

9. 167

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

Classe III.

XX Année 1927.

Fascicule 6—9.

SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO
WARSZAWSKIEGO

Wydział III
nauk matematycznych i przyrodniczych

Rok XX 1927

Zeszyt 6—9



WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

1928

<http://rcin.org.pl>

TREŚĆ ZESZYTU 6—9.

(Table des matières).

H. J. Ettliger, Austin, Texas U. S. A.	Zasada R. L. Moore'a i jej odwrócenie	455
W. Sierpiński.	Uwaga o zbiorach spójnych w przestrzeniach (V) .	461
W. Sierpiński.	O funkcjach Hausdorff'a	463
Marja Kołaczkowska.	Badania mikroskopowe skaleni występujących w andezytach z Wżaru pod Czortoszynem z uwzględnieniem nowych metod badania. . . .	466
Antoni Łazkiewicz.	Badania krystalograficzne jednochloroocetanu kadmowego.	470
W. Sierpiński.	O pewnym zagadnieniu, tyjącem się zbiorów $C(A)$.	473
W. Sierpiński.	Zbiory rzutowe, a własność Baire'a	477
Józef Grzybowski.	O wejściach i otworach nadoczodołowych i podoczodołowych w szeregu naczelnych	481
L. Wertenstein.	Nowa metoda wyznaczania objętości 1 curie radonu.	504
Kazimierz Stołyhwo.	W sprawie morfologii Arcus superciliaris i Tori supraorbitales u Hominidae i Anthropoidae.	529
Kazimierz Żorawski.	O wektorach zespolonych.	531
W. Sierpiński.	Uwaga do zagadnienia mierzalności zbiorów rzutowych	548
Henryk Świdziński.	Utwory Jurajskie między Małogoszczą a Czarną Nidą na zachodnim zboczach Gór Świętokrzyskich.	551
Gustaw Dehnel.	Przypadek nader wczesnej potworności podwójnej u kosa (<i>Planesticus merula merula</i> L.)	558
Jan Tur.	W sprawie „oddziaływania na odległość” w układach zarodkowych wielotwórczych.	566
H. J. Ettliger, Austin.	R. L. Moore's principle and its converse.	455
W. Sierpiński.	Remarque sur les ensembles connexes dans les espaces (V)	461
W. Sierpiński.	Sur les fonctions de M. Hausdorff.	463
Marie Kołaczkowska.	Etudes microscopiques des plagioclases provenant des andésites de Wżar, tenant compte des nouvelles méthodes d'examen.	468

Posiedzenie

z dnia 17 czerwca 1927 r.

H. J. Ettlinger, Austin, Texas U. S. A.

Zasada R. L. Moore'a i jej odwrócenie.

Przedstawił W. Sierpiński.

Streszczenie.

Autor wyprowadza zasadę R. L. Moore'a w zmienionej formie, a następnie otrzymuje odwrócenie tej zasady, dające warunek konieczny i wystarczający istnienia granic pewnych sum.

H. J. Ettlinger, Austin, Texas U. S. A.

R. L. Moore's principle and its converse.

R. L. Moore¹⁾ has stated an important principle which the writer has made use of in various connections²⁾. It is our pur-

¹⁾ On Duhamel's Theorem, *Annals of Mathematics*, second series, vol. 13 (1912), pp. 161 ff.

²⁾ Ettlinger, A Simple Form of Duhamel's Theorem and Some New Applications, *American Mathematical Monthly*, vol. 29 (1922) pp. 239—250.

Ettlinger, On the Integrability of a Continuous Function, *American Mathematical Monthly*. vol. 31 (1924) pp. 419—421.

Ettlinger, Note on the Continuity of a Function defined by a Definite Lebesgue Integral, *American Mathematical Monthly*, vol. 32 (1925) pp. 510—511.

Ettlinger, On Multiple Iterated Integrals, *American Journal of Mathematics*, (in press).

Ettlinger, On the Fredholm Equation, sent to the *Tohoku Mathematical Journal*.



pose to restate and establish this principle in modified form and also to obtain with the aid of the concept of the convergency in the mean¹⁾ a converse of Moore's principle which thus provides a necessary and sufficient condition for the existence of the limit of certain sums. The principle in this last form is very useful to define summable functions and to establish their properties. The generalization contained in the sufficient condition corresponds to carrying over Moore's principle from what may be characterized as the bounded measurable case to the general summable case²⁾.

Let $C: a < x_i < b, i = (1, m)$ be a hypercube in m dimensions and let E be a measurable point set contained in C . Let C be subdivided into n^m subdivisions $D_{rk}, k = n^m, r = (1, k)$, by means of the hyperplanes $x_i = t_{jn}, j = (0, n), i = (1, m)$, where $t_{0n} = a, t_{1n}, t_{2n}, \dots, t_{nn} = b$ are distinct points of division of the interval $a < t < b$. Let E_{rk} be the subset of E contained in D_{rk} .

By a sequence of *horizontal functions*³⁾ on C of index k with respect to E_{rk} is meant a sequence of functions $H_k(P)$ such that

$$H_k(P) = \text{constant} = H_{rk}$$

for every point P belonging to E_{rk} interior to D_{rk} . Let us call the *hypervolume* under $H_k(P)$ on the set E ,

1) Riess, Comptes Rendus, 1907. We say that a sequence $f_k(P)$ converges in the mean to $f(P)$ on E , if for every $\varepsilon > 0$ there exists a N_ε such that for $n > N_k |f_n(P) - f(P)| < \varepsilon$ except a subset of E of measure $< \varepsilon$.

2) For a generalization of Moore's principle to iterated sums which yield iterated Riemann integrals for which the multiple Riemann integral need not exist, see my papers cited above, „On Multiple Iterated Integrals” and „On the Fredholm Equation”.

3) This is the concept of „Treppenfunktionen” or „stückweise constante Funktionen” of the German writers, also called „fonctions simples” by F. Riesz, who was the first to make use of this concept to define a Lebesgue integral. See „Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables” Comptes Rendus, vol. 154 (1912) p. 641 ff. These ideas were elaborated in a letter to Mittag-Leffler in 1917 and published under the title „Sur l'intégrale de Lebesgue” in the Acta Mathematica, vol. 42 (1920), p. 190 ff. When I wrote my paper, „Note on a Fundamental Lemma Concerning the Limit of a Sum”, Bulletin of the American Mathematical Society, vol 32 (1926), p. 69 ff., I was unaware of the above facts.

$$V(n) = \sum_{r=1}^k H_{rk} m(E_{rk}),$$

where $m(E_{rk})$ is the measure of E_{rk} .

The following theorem establishes a sufficient condition for the validity of Moore's principle which contains Moore's original formulation as a special case.

Theorem 1: *If 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} H_k(P)$ almost everywhere (except for a set of measure zero) on E , and 2) $|H_k(P)| < M$, for all values of $n > N_M$, (where M is a constant, and N_M is a positive integer) for every point of E except a set F_n such that if B_n is a set of numbers for which $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$, $|H_k(P)| < B_n$ for every P on F_n and $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n m(F_n) = 0$, then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 0.$$

Proof: Given $\varepsilon > 0$, let $E_{n\varepsilon}$ be the totality of subsets E_{rk} of E for which $|H_k(P)| > \varepsilon$. Given $\delta > 0$, there exists a positive integer $N_{\delta\varepsilon}$ such that $m(E_{n\varepsilon}) < \delta$ for $n > N_{\delta\varepsilon}$. Suppose the latter statement false, then $m(E_{n\varepsilon}) > \delta > 0$ for an infinite set of values of n . By a theorem due to W. H. Young generalized to m dimensions¹⁾ it follows that there exists a set of points E_{δ} of measure not less than δ , each of whose points is common to an infinite number of subsets E_{rk} . Let P be a point of E_{δ} not belonging to the excepted null set of hypothesis 1). Then $\lim_{n \rightarrow \infty} H_k(P)$ cannot be zero, which contradicts hypothesis 1). Hence the second statement above of this proof, is true. Similarly given $\eta_1 > 0$, there exists a positive integer N_{η_1} , such that $B_n m(F_n) < \eta_1$ for $n > N_{\eta_1}$. Hence

$$|V(n)| < \varepsilon m(E) + M\delta + \eta_1$$

for $n > N_{M\delta\varepsilon\eta_1}$ where $N_{M\delta\varepsilon\eta_1}$ is the largest of the three positive integers $N_M, N_{\delta\varepsilon}, N_{\eta_1}$. Hence the theorem is proved, $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 0$.

We establish the following necessary conditions which are believed to be new.

¹⁾ Hobson, The Theory of Functions of a Real Variable, second edition, vol. 1, Cambridge, 1921, p. 175.

Theorem II: *If $H_k(P) > 0$ (or < 0) for $n > N$, where N is a positive integer, then necessary conditions that*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 0$$

are 1) $H_k(P)$ converges in the mean to 0 on I ,

2) $H_k(P) < M$ for every $n > N_M$ (where M is a constant and N_M is a positive integer) and every P of E except a set F_n such that there exists a set of numbers, A_n , for which $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n m(F_n) = 0$.

Proof: Suppose condition 1) is not satisfied. Given any $\varepsilon > 0$ there exist a $\delta_\varepsilon > 0$ such that $H_k(P) > \varepsilon$ for all points in a collection $E_{n\varepsilon}$ of subsets E_{rk} such that

$$m(E_{n\varepsilon}) > \delta_\varepsilon > 0$$

for an infinite number of values of n . Hence

$$V(n) > \varepsilon \delta_\varepsilon > 0$$

for an infinite set of positive integers. This contradicts $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 0$. Hence condition 1) is necessary. As a corollary of the necessity of condition 1) we have that $H_k(P) > M$ for every constant M on a subset of E of measure greater than some positive number is impossible for an infinite number of values of n . Since by W. H. Young's theorem there would be a subset of positive measure such that on this set $H_k(P) > M$. This contradicts condition 1). Hence a corollary of the necessity of condition 1) is that $H_k(P) < M$ for some positive constant M for $n > N_M$ where N_M is a positive constant, for every P except a set whose measure approaches zero as n increases without limit.

To prove the necessity of condition 2) we have

$$V(n) > A_n m(F_n).$$

If $A_n m(F_n)$ does not approach the limit zero as n increases without limit, then there exists an $\varepsilon > 0$ such that

$$A_n m(F_n) > \varepsilon$$

for an infinite set of values of n . This contradicts $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 0$. Hence theorem II is proved.

For the set F_n of theorems I and II, we will define

$$C_n = \frac{\sum_{F_n} H_{rk} m(E_{rk})}{m(F_n)}$$

where \sum_{F_n} designates that the sum is taken over the subsets comprising F_n . Then we have

Theorem III: *Necessary and sufficient conditions that*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 0$$

are 1) $H_k(P)$ converges in the mean to 0 on E ,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n m(F_n) = 0$.

Proof: Theorem III follows at once if we substitute in the proofs of Theorems I and II equality signs for the inequalities which express the contribution of F_n to $V(n)$. Thus the set F_n contributes to the hypervolume $V(n)$ exactly the amount

$$C_n m(F_n).$$

The writer has called attention elsewhere¹⁾ to the equivalence of Moore's principle to the well-known theorem of Lebesgue: *A uniformly bounded sequence of summable functions convergent almost everywhere on a measurable set E will have a summable function for the limit function, and the limit of the integral is the integral of the limit*²⁾. In similar fashion extensions of Lebesgue's theorem which have been obtained by Lebesgue, de la Vallée-Poussin and others may be obtained by the use of Theorems I, II and III. Likewise, Theorem III furnishes with the aid of the definitions of F. Riesz (*l. c.*) of a measurable function and the integral of a summable function, a necessary and sufficient condition that a measurable function be summable.

The underlying ideas inherent in Moore's principle and the present generalizations given by the writer, as well as the concept of a sequence of horizontal functions is to be found in many classical treatments in analysis, such as Riemann's definition of

1) Ettlinger, Schlesinger on Lebesgue Integrals and Fourier Series, accepted for publication by the Bulletin of the American Mathematical Society.

2) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, Gauthier-Villars, Paris, 1904, p. 111 and p. 114.

an integral, some of E. H. Moore's work in General Analysis, Lebesgue's analytic definition of the integral of a measurable function, and the ideas of F. Riesz cited above. The importance of these ideas for modern real variable analysis makes it worthwhile to isolate these fundamental convergence principles.

The University of Texas, August 15, 1926.

W. Sierpiński.

Uwaga o zbiorach spójnych w przestrzeniach (V)

Streszczenie.

Autor rozstrzyga negatywnie następujące zagadnienie p. Knastera: „Czy, w przestrzeni (V) Frécheta, zbiór, zawarty między zbiorem spójnym a jego domknięciem, musi być spójny?”. Autor dowodzi, dalej, na przykładzie, że w przestrzeniach (V) zbiory zamknięte względem danego zbioru nie muszą być iloczynami tego zbioru przez zbiór zamknięty.

W. Sierpiński.

Remarque sur les ensemble connexes dans les espaces (V).

E étant un ensemble connexe d'un espaces (V) de M. Fréchet, tout ensemble H , tel que $E \subset H \subset E + E'$ est, comme on sait, connexe¹⁾. On sait aussi que la fermeture \bar{E} d'un ensemble connexe E ²⁾ est connexe³⁾. M. Knaster a posé le problème suivant: E étant un ensemble connexe et H désignant un ensemble tel que $E \subset H \subset \bar{E}$, l'ensemble H est-il toujours connexe?

Nous prouverons que la réponse est *négative*.

Soit, en effet E_0 un espace (V) de M. Fréchet, formé de trois éléments distincts: a , b et c . Les voisinages des éléments de E_0 seront définis comme il suit. Chacun des éléments a , b et c a un seul voisinage que nous désignerons par $V(a)$, $V(b)$ et $V(c)$, notamment:

$$V(a) = (a), \quad V(b) = (a, b), \quad V(c) = (b, c).$$

Désignons par E l'ensemble formé d'un seul élément a : ce sera évidemment un ensemble connexe, et nous aurons $\bar{E} = E_0$. Or, posons $H = (a, c)$: nous aurons donc $E \subset H \subset \bar{E}$. D'autre part, on voit sans peine que l'ensemble $H = (a) + (c)$ est une somme de deux ensemble séparés et par suite n'est pas connexe.

1) Voir W. Sierpiński. Mathematische Annalen Bd. 97, p. 333 (théorème 13).

2) c'est-à-dire le plus petit ensemble fermé contenant E .

3) ibid. p. 334 (théorème 14).

Le problème de M. Knaster et ainsi résolu par négative.

Observons encore qu'on a dans notre exemple $E' = (b)$ donc $E'H = 0$, et d'autre part: $H\bar{E} = H \neq E$. On en conclut sans peine que l'ensemble E est fermé relativement à H , mais n'est pas un produit de H par un ensemble fermé (Puisque, si l'on avait $E = HF$, où F est fermé, on aurait $E \subset F$, d'où, F étant fermé, $\bar{E} \subset F$ et $H\bar{E} \subset HF = E$, d'où $E \supset H\bar{E} = H$, ce qui est impossible, puisque $E = (a)$ et $H = (a, c)$). Donc, dans les espaces (V) les ensembles fermés relativement à un ensemble H ne coïncident pas avec les produits de H par des ensembles fermés.

W. Sierpiński.

O funkcjach Hausdorff'a.

Autor dowodzi, że t. zw. funkcje Hausdorff'a stanowią najmniejszą rodzinę \mathfrak{F} funkcji ciągu nieskończonego zbiorów, $\Phi(E_1, E_2, E_3, \dots)$, spełniającą następujące dwa warunki: 1) każda z funkcji $\Phi_k(E_1, E_2, \dots) = E_k$ należy do \mathfrak{F} ; 2) suma, oraz iloczyn dowolnej mnogości funkcji, należących do \mathfrak{F} , należy do \mathfrak{F} .

W. Sierpiński.

Sur les fonctions de M. Hausdorff.

Dans son livre „Mengenlehre“¹⁾ M. F. Hausdorff considère des fonctions d'une suite infinie d'ensembles $\Phi(E_1, E_2, E_3, \dots)$ jouissant de la propriété suivante: il existe un ensemble N de suites (finies ou infinies) de nombres naturels croissants $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, tel que

$$(1) \quad \Phi(E_1, E_2, E_3, \dots) = \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \dots$$

quelle que soit la suite infinie d'ensembles E_1, E_2, E_3, \dots , la somme \sum_N s'étendant à toutes les suites (n_1, n_2, n_3, \dots) constituant N . Nous appellerons des telles fonctions *fonctions de M. Hausdorff*.

Au premier regard on pourrait penser que les fonctions de M. Hausdorff constituent une famille tout à fait particulière de fonctions d'ensembles. Nous prouverons qu'on peut la caractériser par des propriétés très simples. Il en résultera que les fonctions de M. Hausdorff se présentent d'une façon tout à fait naturelle dans l'étude de fonctions d'ensembles.

Nous démontrerons que *la famille \mathfrak{H} de toutes les fonctions de M. Hausdorff est la plus petite famille \mathfrak{F} de fonctions d'une suite infinie d'ensembles jouissant de deux propriétés suivantes:*

1) F. Hausdorff: *Mengenlehre*. Berlin und Leipzig 1927, p. 89 et p. 90.

1) les fonctions

$$\Phi_k(E_1, E_2, E_3, \dots) = E_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

appartiennent à \mathfrak{F} ;

2) la somme et le produit d'un ensemble quelconque de fonctions appartenant à la famille \mathfrak{F} appartient à \mathfrak{F} .

Pour prouver notre théorème, il suffira évidemment de démontrer que:

1^o: la famille $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ jouit des propriétés 1) et 2), et que

2^o: la famille \mathfrak{F} fait partie de toute famille \mathfrak{F} jouissant des propriétés 1) et 2).

N étant un ensemble donné de suites (finies ou infinies) de nombres naturels croissants, désignons par $\Phi(N)$ la fonction (1).

Désignons par N_k l'ensemble formé d'une seule suite qui contient seulement un terme, le nombre k . On a évidemment

$$\Phi(N_k) = E_k \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots;$$

la famille \mathfrak{H} jouit donc de la propriété 1).

\mathfrak{U} étant une famille d'ensembles N de suites, désignons par $S(\mathfrak{U})$ la somme de tous les ensembles constituants \mathfrak{U} , et désignons par $T(\mathfrak{U})$ l'ensemble de toutes les suites de nombres naturels qu'on obtient en choisissant arbitrairement une suite de chacun d'ensembles N constituant \mathfrak{U} et en rangeant ensuite en une suite croissante tous les nombres naturels appartenant aux suites ainsi choisies.

Soit \mathfrak{R} une famille quelconque de fonctions de M. Hausdorff, $\Sigma(\mathfrak{R})$ et $\Pi(\mathfrak{R})$ resp. la somme et le produit de toutes les fonctions constituant \mathfrak{R} . Soit \mathfrak{U} la famille de tous les ensembles N de suites, tels que $\Phi(N) \in \mathfrak{R}$. On vérifie sans peine les formules:

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathfrak{R}) &= \Phi(S(\mathfrak{U})) \\ \text{et } \Pi(\mathfrak{R}) &= \Phi(T(\mathfrak{U})), \end{aligned}$$

d'où résulte que $\Sigma(\mathfrak{R})$ et $\Pi(\mathfrak{R})$ sont des fonctions de M. Hausdorff. La famille \mathfrak{H} jouit donc de la propriété 2).

Or, soit \mathfrak{F} une famille quelconque de fonctions d'une suite infinie d'ensembles jouissant des propriétés 1) et 2), et soit (1) une fonction donnée quelconque de M. Hausdorff. L'ensemble N de suites est donc donné. Soit (n_1, n_2, n_3, \dots) une suite quelconque appartenant à N . D'après la propriété 1) de la famille \mathfrak{F} ,

les fonctions $\Phi(N_{n_k}) = E_{n_k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) appartiennent à \mathfrak{F} , donc aussi, d'après 2), leur produit $\Phi(N_{n_1})\Phi(N_{n_2})\Phi(N_{n_3})\dots = E_{n_1}E_{n_2}E_{n_3}\dots$. D'après la propriété 2) de la famille \mathfrak{F} et d'après (1) nous en concluons que la fonction (1) appartient à \mathfrak{F} . Nous avons donc démontré que $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Marja Kołaczkowska.

Badania mikroskopowe skaleni występujących w andezytach z Wżaru pod Czorsztynem z uwzględnieniem nowych metod badania.

Przedstawił p. St. J. Thugutt.

Streszczenie.

Celem tej pracy jest zbadanie skaleni występujących w andezytach z Wżaru metodą Fedorowa.

We wstępie podany jest krótki plan z wymienieniem środków pomocniczych i źródeł, którymi w biegu pracy należało się posługiwać.

Całość składa się z dwóch zasadniczych części: teoretycznej i doświadczalnej. Na pierwszą część składa się pięć rozdziałów, z których pierwszy poświęcony jest metodzie Fedorowa: opisany tu jest czteroosiowy stolik Fedorowa i podany jest sposób manipulowania tym przyrządem, w celu rozwiązania jednego z zasadniczych zadań metody Fedorowa, mianowicie w celu wyznaczenia położenia trzech osi elipsoidu współczynnikowego względem płaszczyzny przekroju; wskazany jest też sposób notowania wykonanych obrotów i unaoczniania tych przestrzennych zależności w rzucie stereograficznym przy pomocy siatki Wulfa.

W rozdziale drugim jest mowa o zrostach bliźniaczych spotykanych na skaleniach. W celu wykazania wzajemnej zależności różnych praw bliźniaczych, podzielone są one na grupy w ten sposób, że osie bliźniacze trzech praw należących do tej samej grupy są wzajemnie prostopadłe. Grup takich teoretycznie dało się wyprowadzić sześć (niektóre prawa występują w dwóch różnych grupach) i zostało udowodnione, że jeżeli skaień złożony jest z trzech osobników, z których pierwszy z drugim i drugi z trzecim zrosnięte są według dwóch praw należących do tej samej grupy, to pierwszy i trzeci położone są względem siebie tak, jakgdyby tworzyły bliźniaka według trzeciego prawa tej samej grupy. Zjawisko to jest prostym następstwem twierdzenia Eulera. W drugiej części te wywody czysto teoretyczne będą potwierdzone doświadczalnie.

W rozdziale trzecim podany jest sposób wyznaczania położenia bieguna badanego przekroju w odniesieniu do kierunków krysta-

lograficznych w przypadku, gdy badane ziarno składa się z trzech lub z czterech osobników, tworzących bliźniaki według trzech praw należących do jednej z grup podanych w rozdziale drugim.

W czwartym rozdziale opracowana jest metoda wyznaczania położenia płaszczyzny bliźniaczej w przypadku, gdy jeden z osobników bliźniaczych jest tak wąski, że metodą Fedorowa nie można wyznaczyć położenia elipsoidu współczynnikowego. Metoda tu opisana opiera się na tak zwanem zjawisku „de l'éclairément commun”. Dla osobnika większego szukamy położenia elipsoidu w zwykły sposób opisany w rozdziale pierwszym, potem wyznaczamy położenie płaszczyzny bliźniaczej opisaną tu metodą i biegun tej płaszczyzny odwzorowany na siatce Wulfa będzie wychodnią osi bliźniaczej; po obliczeniu odległości tej osi od wektorów α , β i γ pierwszego osobnika, wyznaczamy przy pomocy djagramów Wülfing'a prawo bliźniacze i procentową zawartość anortytu.

W ostatnim rozdziale części I-ej opracowane i opisane są djagramy, służące do bezpośredniego odczytania kąta osi optycznych przy znanem położeniu elipsoidu współczynnikowego w badanym przekroju na stoliku Fedorowa i przy znanym kącie zaćmienia w tem położeniu. Djagramy te są jakby dalszem rozwinięciem metody Berka i T. J. Woyny.

Część druga poświęcona jest szczegółowemu opracowaniu skaleni andezytów z Wżaru. Badania prowadzone były zarówno na mikroskopie zaopatrzonym w stolik Fedorowa, jak i na zwykłym polaryzacyjnym mikroskopie, gdy chodziło o zastosowanie światła zbieżnego. Metody, opracowane w części teoretycznej i dostosowane do stolika Fedorowa, były tu wykorzystane, ile razy zachodziła tego potrzeba i możliwość.

W rozdziale pierwszym podane są cechy ogólne skaleni andezytów z Wżaru: ich wielkość w przekroju (od 2 mm. aż do ziarn tworzących ciasto skalne) i budowa (koncentryczne, pasowe narastanie).

W rozdziale drugim szczegółowo opisane są ziarna złożone z dwóch osobników bliźniaczych.

Ziarna, złożone z trzech osobników i opisane w trzecim rozdziale, są potwierdzeniem wywodów teoretycznych zawartych w rozdziale drugim części pierwszej. Najczęściej spotykanymi zrostami bliźniaczemi na jednym i tym samym ziarnie są zrosty: albitowy, karlsbadzki i Roc Tourné, kombinujące się we wszelki możliwy sposób, to jest spotykamy zarówno ziarna, w których osobniki

nie sąsiadujące zajmują położenie takie, jakgdyby były bliźniakiem albitowym, jak i takie, że osobniki nie zrosnięte bezpośrednio są bliźniakiem karlsbadzkim lub Roc Tourné. Bliźniaki Roc Tourné są nietylko rezultatem dwóch kolejnych zbliżniczeń według praw albitowego i karlsbadzkiego, ale istnieją ziarna i to bardzo liczne, gdzie bliźniak Roc Tourné utworzony jest przez osobniki bezpośrednio sąsiadujące, a jedno z praw, karlsbadzkie lub albitowe, jest wynikiem teoretycznym dwóch innych.

W rozdziale czwartym opisane są ziarna złożone z czterech osobników zrosniętych według praw: albitowego, karlsbadzkiego i Roc Tourné. Zostało tu stwierdzone istnienie kilku typów takich zrostów. Teoretycznie można typów takich wyprowadzić i przewidzieć znacznie więcej niż udało się odszukać wśród badanych skaleń, nie znaczy to jednak, że typy takie nie istnieją i to nietylko w innych skałach, ale może nawet w tych samych andezytach uda się komu innemu natrafić na inny jeszcze układ osobników.

W rozdziale piątym opisane są bliźniaki baweńskie, których przekroje \perp do płaszczyzny bliźniaczej, będącej tu jednocześnie płaszczyzną zrostu, są tak charakterystyczne, że można na pierwszy rzut oka poznać bliźniaka baweńskiego.

W następnych już bardzo krótkich rozdziałach opisany jest jedyny spotkany bliźniak manebachski i następnie ziarna złożone z bardzo licznych osobników, najczęściej ułożonych promienisto.

Marie Kołaczowska.

Etudes microscopiques des plagioclases provenant des andésites de Wzar, tenant compte des nouvelles méthodes d'examen.

Présenté par M. St. Thugutt.

Résumé.

Dans la partie théorique du présent travail on donne d'abord les principes de la méthode de Fédoroff; ensuite en se basant sur le théorème d'Euler on a pu classer les différentes sortes de macles rencontrées dans six groupes, chacun contenant trois sortes de macles dont les axes sont réciproquement perpendiculaires. On a introduit ici une nouvelle méthode pour la détermination de la position du plan de la macle en se basant sur

le phénomène de l'éclairement commun. Pour la détermination de l'angle des axes optiques on a construit de nouveaux diagrammes.

Dans la partie expérimentale sont présentés les résultats des études des plagioclases dans les andésites, provenant de Wzar, par les méthodes décrites ci-dessus.

Antoni Łaszkiewicz.

Badania Krystalograficzne jednochloroocjanu kadmowego.

Przedstawił p. St. J. Thugutt.

Streszczenie.

Bezbarwne kryształy jednochloroocjanu kadmowego: $Cd(CH_2Cl.COO)_2 \cdot 6H_2O$ mają pokrój przeważnie pryzmatyczny, rzadziej tablicowaty według $\{010\}$ i należą do klasy podwójnej piramidy rombowej. Wykazują one kombinacje następujących postaci: $b\{010\}$, $m\{110\}$, $k\{011\}$, $l\{031\}$, $o\{101\}$, $p\{111\}$, $u\{212\}$, $r\{121\}$, $s\{131\}$, $v\{311\}$. Na gonjometrze teodolitowym Goldschmidta zmierzono 22 kryształy wielkości 0,5—1 cm. Stąd obliczono stosunek osiowy:

$$a:b:c = 0,6209:1:0,4561.$$

Niektóre z kryształów wykazywały symetrię pozornie niższą. Były to kombinacje słupa pionowego $m\{110\}$ i dwuscianu podłużnego $b\{010\}$, z dwiema tylko ścianami piramidy (111) i $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$, wyglądające z pozoru na jednoskośną kombinację $\{100\}$, $\{110\}$ i $\{011\}$. Zjawisko to stanie się zrozumiałe, jeśli się zważy, że ściana (010) występuje w charakterze płaszczyzny wzrostu.

Poważną przeszkodę przy badaniu własności geometrycznych i optycznych stanowiły zmętnienia kryształów, wywołane łatwym ich wietrzeniem.

Płaszczyzna osi optycznych jednochloroocjanu kadmowego leży w dwuscianie podstawowym: $a = \gamma$, $b = \alpha$, $c = \beta$. Pierwszą dwusieczną jest wektor α , kryształy są zatem optycznie ujemne. Spółczynniki załamania światła zmierzono metodą pryzmatu. W tym celu użyty był pryzmat naturalny, utworzony przez ściany (010) i (110), o kącie łamiącym $= 58^{\circ} 17'$. Znalaziono:

Dla światła	czerwonego (Li)	żółtego (Na)	niebieskiego
$n_{\alpha'}$	1,520	1,522	1,532
n_{β}	1,532	1,533	1,545

19^o C

Pozorny kąt osi optycznych na ścianie (010):

$$2 E_{Li} = 50^{\circ} 12'; 2 E_{Na} = 50^{\circ} 22'; 2 E_{Nieb} = 49^{\circ} 10';$$

skąd:

$$2 V_{Li} = 32^{\circ} 9'; 2 V_{Na} = 32^{\circ} 14'; 2 V_{Nieb} = 31^{\circ} 14'.$$

Spółczynniki załamania n_{α} i n_{γ} możemy obliczyć, posługując się wzorami:

$$n_{\alpha} = \frac{n_{\alpha'} \cos \varphi}{\sin V} \sqrt{\frac{\sin(V + \sigma) \sin(V - \sigma)}{\cos 2\varphi}}; \text{ gdzie } \operatorname{tg} \varphi = \frac{n_{\alpha'} \sin \sigma}{n_{\beta} \sin V};$$

$$n_{\gamma} = \frac{n_{\alpha'} \cos \varphi}{\cos V} \sqrt{\frac{\sin(\sigma + V) \sin(\sigma - V)}{-\cos 2\varphi}}; \text{ gdzie } \operatorname{tg} \varphi = \frac{n_{\alpha'} \cos \sigma}{n_{\beta} \cos V};$$

Kąt V liczymy od γ ; σ oznacza kąt, jaki tworzy wektor γ z kierunkiem, w którym mierzone były współczynniki załamania światła (w naszym przypadku $\sigma = 60^{\circ} 51^{1/2}'$). Stąd współczynniki załamania światła jednochlorooctanu kadmowego wynoszą:

Dla światła	czerwonego (Li)	żółtego (Na)	niebieskiego
n_{α} obl.	1,466	1,47	1,477
n_{β} zm.	1,532	1,533	1,545
n_{γ} obl.	1,538	1,539	1,551

Antoni Łaszkiewicz.

Etudes cristallographiques sur le monochloracetate de cadmium.

Présenté par M. St. Thugutt.

Resumé.

Les cristaux incolores du monochloracetate de cadmium $Cd(CH_2 Cl. COO)_2 \cdot 6H_2O$ sont d'habitus prismatique ou tabulaire suivant $b\{010\}$. Ils appartiennent à la classe holosymétrique du

système orthorhombique. Formes observées: $b\{010\}$, $m\{110\}$, $k\{011\}$, $l\{031\}$, $o\{101\}$, $p\{111\}$, $u\{212\}$, $r\{121\}$, $s\{131\}$, $v\{311\}$. Sur le goniomètre à deux cercles de Goldschmidt furent mesurés 22 cristaux. Les paramètres d'ici calculés:

$$a:b:c = 0,6209:1:0,4561.$$

Plan des axes — (001): $\alpha = n_g$, $b = n_p$, $c = n_m$; biréfringence négative. Dispersion $\rho > \nu$.

Pour la lumière	rouge (Li)	jaune (Na)	bleu
n_p calc.	1,466	1,47	1,477
n_m mes.	1,532	1,533	1,545
n_g calc.	1,538	1,539	1,551
$2E$ mes.	$50^0 12'$	$50^0 22'$	$49^0 10'$
$2V$ calc.	$32^0 9'$	$32^0 14'$	$31^0 14'$

Posiedzenie

z dnia 3 listopada 1927 r.

W. Sierpiński.

O pewnem zagadnieniu, tyczącem się zbiorów $C(A)$.

Streszczenie.

W pracy tej autor dowodzi, że jeżeli M jest rzutem (na oś rzędnych) dopełnienia płaskiego zbioru analitycznego, to istnieje zbiór płaski E , będący dopełnieniem zbioru analitycznego, taki, iż M jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych b , dla których prosta $y=b$ trafia zbiór E w mnogości punktów, zawierającej podmnożność doskonałą.

W. Sierpiński.

Sur un problème concernant les ensembles $C(A)$.

E étant un ensemble plan donné quelconque, désignons par $\pi(E)$ l'ensemble de tous les nombres réels b , tels que la droite $y=b$ rencontre l'ensemble E en un ensemble de points contenant un sous-ensemble parfait. M. Lusin a démontré¹⁾ que si E est un ensemble CA , $\pi(E)$ est une projection orthogonale d'un ensemble plan CA (sur l'axe d'ordonnées), c'est-à-dire un ensemble P_2 .

Le but de cette Note est de démontrer que, M étant un ensemble P_2 (linéaire) donné quelconque, il existe un ensemble E qui est un CA (plan), tel que $\pi(E) = M$.

¹⁾ *Fund. Math.* t. X, p. 91. La démonstration de M. Lusin est donnée pour un ensemble CA (plan) universel, mais il est évident qu'elle s'applique à un ensemble plan CA quelconque.

Soit donc M un ensemble P_2 linéaire donné, que nous supposerons situé sur l'axe OY . Comme j'ai démontré¹⁾, il existe un ensemble de nombres irrationnels H , qui est un CA , tel que M est une image continue de H . Soit $f(x)$ la fonction continue dans H qui transforme l'ensemble H en l'ensemble M .

x étant un nombre irrationnel, désignons par

$$x = Ex + \frac{1}{\mu(1, x)} + \frac{1}{\mu(2, x)} + \dots + \frac{1}{\mu(k, x)} + \dots$$

son développement en fraction continue et posons

$$\varphi(x) = Ex + \frac{1}{\mu(2, x)} + \frac{1}{\mu(4, x)} + \dots + \frac{1}{\mu(2k, x)} + \dots$$

La fonction $\varphi(x)$ est ainsi définie et continue dans l'ensemble X de tous les nombres irrationnels, et on voit sans peine que pour tout nombre irrationnel x_0 l'ensemble de tous les nombres x de X satisfaisant à l'équation

$$(1) \quad \varphi(x) = x_0$$

est homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$ et par suite contient un sous-ensemble parfait.

Désignons par Q l'ensemble de tous les nombres x de X , tels que $\varphi(x) \in H$: l'ensemble H étant un CA et la fonction φ étant continue dans X , on voit sans peine que l'ensemble Q est un CA (En effet, soit T l'image de la fonction $\varphi(x)$ dans X , c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, où $x \in X$ et $y = \varphi(x)$. La fonction φ étant continue dans l'ensemble X qui est un G_δ , l'ensemble T est, comme on sait, un G_δ . Or, désignons par U l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $y \in CH$: l'ensemble CH étant un ensemble (A) (linéaire), U sera un (A) (plan). L'ensemble TU , comme produit d'un G_δ par un (A) , est donc un ensemble (A) . Or, on voit sans peine que la projection de l'ensemble TU sur l'axe OX est l'ensemble $X - Q$: ce dernier est donc un ensemble (A) et par suite l'ensemble Q est un CA , c. q. f. d.).

Posons maintenant $\Phi(x) = f(\varphi(x))$ pour $x \in X$: ce sera évidemment une fonction définie et continue dans l'ensemble X .

¹⁾ *Fund. Math.* t. XI, p. 117—121.

Désignons par E l'image de la fonction $\Phi(x)$ dans Q , c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \in Q$ et $y = \Phi(x)$. L'ensemble Q étant un CA et la fonction Φ étant continue dans Q , on voit sans peine que l'ensemble E est un CA (En effet, soit V l'image de la fonction Φ dans X : ce sera évidemment un ensemble G_δ plan. Or, soit W l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \in X - Q$: l'ensemble $X - Q$ étant un (A) , W sera un ensemble (A) . Or, on a évidemment $E = V - W$: l'ensemble E , comme différence d'un G_δ et d'un (A) , est donc un CA , c. q. f. d.).

Il nous reste donc à démontrer que $\pi(E) = M$.

Soit donc $y_0 \in M$. D'après la propriété de la fonction f , il existe un nombre x_0 de H , tel que $y_0 = f(x_0)$. Or, d'après la propriété de la fonction φ , l'ensemble de tous les nombres x de X satisfaisant à l'équation (1) contient un sous-ensemble parfait, soit Π . Pour $x \in \Pi$ nous avons donc $\varphi(x) = x_0 \in H$, donc (d'après la définition de l'ensemble Q): $x \in Q$. D'autre part, nous avons $y_0 = f(x_0)$, donc, pour $x \in \Pi$: $y_0 = f(\varphi(x)) = \Phi(x)$. D'après la définition de l'ensemble E , le point (x, y_0) appartient donc à E pour $x \in \Pi$. Cela prouve que la droite $y = y_0$ rencontre l'ensemble E en un ensemble de points contenant un sous-ensemble parfait (superposable avec Π), d'où résulte que $y_0 \in \pi(E)$. Nous avons ainsi démontré que $M \subset \pi(E)$.

Or, soit (x_0, y_0) un point de l'ensemble $\pi(E)$. Il résulte de la définition de l'ensemble $\pi(E)$ qu'il existe un nombre ξ , tel que $(\xi, y_0) \in E$. D'après la définition de l'ensemble E nous avons donc $\xi \in Q$ et $y_0 = \Phi(\xi)$, et il résulte de la définition de l'ensemble Q que $\varphi(\xi) \in H$. Or, $\Phi(\xi) = f(\varphi(\xi))$: nous avons donc $y_0 = f(\varphi(\xi))$, où $\varphi(\xi) \in H$: la fonction f transformant l'ensemble H en l'ensemble M , il en résulte que $y_0 \in M$. Nous avons ainsi démontré que $\pi(E) \subset M$.

La formule $\pi(E) = M$ est ainsi établie et notre assertion est démontrée.

Le fait que nous avons établi prouve que le résultat de M. Lusin (que si E est un CA , $\pi(E)$ est un P_2) ne peut être remplacé par un résultat plus précis.

Or, désignons, pour tout ensemble plan E , par $\nu(E)$ l'ensemble de tout les nombres réels b , tels que la droite $y = b$ rencontre l'ensemble E en un ensemble non dénombrable de

points. M. Lusin a démontré¹⁾ que si E est un ensemble CA , $\nu(E)$ est un ensemble C_3 (c'est-à-dire un ensemble de la forme $CPCPCP(B)$, où B est un ensemble mesurable B), et la méthode de M. Lusin ne permet pas d'obtenir pour $\nu(E)$ un ensemble d'une classe inférieure. Or, il est possible que d'autres méthodes y seraient plus efficaces. En effet, dans le cas, où E est un ensemble (A) , la méthode de M. Lusin permet seulement de conclure que $\nu(E)$ est un ensemble C_2 (c'est-à-dire un ensemble de la forme $CPCP(B)$, où B est mesurable B), tandis que nous avons démontré avec M. Mazurkiewicz²⁾ que $\nu(E)$ est alors un ensemble (A) . Remarquons que si l'on pourrait démontrer que si E est un CA , $\nu(E)$ n'est pas nécessairement un P_2 , il en résulterait l'existence des ensembles CA non dénombrables ne contenant aucun sous-ensemble parfait.

1) l. c., p. 92.

2) *Fund. Math.* t. VI, p. 166.

W. Sierpiński.

Zbiory rzutowe, a własność Baire'a.

Streszczenie.

W pracy tej autor buduje przykład efektywny zbioru rzutowego (linjowego) klasy drugiej, E_0 , takiego, iż zagadnienie, czy każdy zbiór rzutowy (linjowy) klasy drugiej posiada własność Baire'a, jest równoważne zagadnieniu, czy zbiór E_0 posiada tę własność.

W. Sierpiński.

Les ensembles projectifs et la propriété de Baire.

On ne sait pas si les ensembles projectifs (linéaires) de la classe 2 jouissent de la propriété de Baire¹⁾ et, d'après M. Lusin, on ne le saura jamais²⁾.

Nous prouverons qu'on peut nommer un ensemble projectif (linéaire) de la classe 2, E_0 , tel que le problème si tout ensemble projectif (linéaire) de la classe 2 jouit de la propriété de Baire est équivalent au problème si l'ensemble E_0 jouit de la propriété de Baire.

D'après M. Lusin on peut nommer un ensemble analytique U dans l'espace à 3 dimensions, tel qu'en le coupant avec les plans parallèles au plan YOZ on a tous les ensembles analytiques plans possibles³⁾. Soit T le complémentaire de l'ensemble U (par rapport à l'espace): la projection orthogonale V de l'ensemble T sur le plan XOY est évidemment un ensemble (plan) P_2 ⁴⁾ universel, c'est-à-dire un ensemble P_2 plan, tel qu'on a, en le coupant avec les droites parallèles à l'axe OX , tous les ensembles P_2 linéaires possibles.

1) Pour la définition de la propriété de Baire voir p. e. *Fund. Math.* t. IX. p. 116, note¹⁾.

2) *C. R.*, t. 180, p. 1572.

3) *Fund. Math.* t. X, p. 80 (Remarque 1).

4) Nous appellons P_2 les ensembles (m -dimensionnels) qui sont projections orthogonales des ensembles ($m+1$ -dimensionnels) complémentaires aux ensembles analytiques.

Désignons par Q l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, dont les coordonnées x et y sont irrationnelles. L'ensemble Q est, comme on sait, homéomorphe à l'ensemble N de tous les nombres irrationnels, et on peut sans peine nommer une correspondance h établissant cette homéomorphie. Désignons par E_0 l'ensemble de tous les nombres x de N qui correspondent dans la homéomorphie h aux points de QV : c'est donc un ensemble qu'on peut nommer. Je dis que l'ensemble E_0 jouit des propriétés demandées.

L'ensemble Q est évidemment mesurable B , donc, à plus forte raison, c'est un ensemble P_2 (plan). L'ensemble V étant aussi un P_2 (plan), le produit QV est un P_2 (plan): son homéomorphe E_0 est donc aussi un P_2 (linéaire). Il suffira donc de démontrer que si l'ensemble E_0 jouit de la propriété de Baire, tout ensemble projectif (linéaire) de la classe 2 jouit de la propriété de Baire, et même que tout ensemble P_2 (linéaire) jouit de la propriété de Baire, puisque tout ensemble projectif de la classe 2 est ou bien un P_2 , ou bien un complémentaire d'un P_2 (et puisque le complémentaire d'un ensemble qui a la propriété de Baire, l'a aussi).

Supposons donc que l'ensemble E_0 jouit de la propriété de Baire, et soit E un ensemble P_2 linéaire donné que nous supposerons situé sur l'axe OY . Si l'ensemble CE est dénombrable, E jouit évidemment de la propriété de Baire. Supposons donc que l'ensemble CE est non dénombrable. Soit η un élément quelconque de CE , et désignons par E_η l'ensemble formé de l'ensemble E et de l'élément η . Les ensemble E_η correspondant aux différents éléments η de CE sont donc en infinité non dénombrable et ils sont tous différents. Or, tout ensemble E_η est évidemment un P_2 : d'après la propriété de l'ensemble V , il existe donc pour tout élément η de CE un nombre réel x_η , tel qu'en coupant l'ensemble V avec la droite $x = x_\eta$, on obtient un ensemble H_η , dont la projection orthogonale sur l'axe OY est l'ensemble E_η . D'après $E_\xi \neq E_\eta$ pour $\xi \neq \eta$, on aura évidemment $H_\xi \neq H_\eta$, donc $x_\xi \neq x_\eta$, pour $\xi \neq \eta$. L'ensemble de tous les nombres x_η correspondant aux nombres η de CE étant ainsi non dénombrable, il existe un nombre α de CE , tel que le nombre x_α est irrationnel. Désignons par K l'ensemble de tous les points

de l'ensemble H_α (situé sur la droite $x = x_\alpha$) dont les ordonnées sont irrationnels; les ensembles H_α et K ne diffèrent donc que par un ensemble au plus dénombrable de points: par conséquent, si K jouit de la propriété de Baire, H_α , et par suite E_α et E , jouiront aussi de cette propriété. Il suffira donc de prouver que K jouit de la propriété de Baire.

Or, il résulte sans peine de la définition de l'ensemble K , qu'on l'obtient en coupant l'ensemble QV par la droite $x = x_\alpha$: l'ensemble K est donc fermé dans QV . Or, l'ensemble QV est homéomorphe à l'ensemble E_0 : soit K_0 le sous-ensemble de E_0 qui correspond dans cette homéomorphie à l'ensemble K : l'ensemble K_0 sera donc fermé dans E_0 , c'est-à-dire il sera un produit de E_0 par un ensemble fermé. L'ensemble E_0 jouissant, par hypothèse, de la propriété de Baire, et le produit de deux ensembles jouissant de cette propriété, jouissant aussi d'elle, nous concluons que l'ensemble K_0 jouit de la propriété de Baire. Or, j'ai démontré¹⁾ qu'un ensemble homéomorphe d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire, jouit de cette propriété. Donc, l'ensemble K (comme homéomorphe à K_0) jouit de la propriété de Baire, d'où résulte, comme nous savons, que E jouit de la propriété de Baire, c. q. f. d.

Les propriétés demandées de l'ensemble E_0 sont ainsi démontrées.

Remarque 1. On ne sait pas si tout ensemble P_2 (linéaire) est un produit de \aleph_1 ensemble mesurable B . On pourrait démontrer sans peine que ce problème est équivalent au problème si l'ensemble E_0 est un produit de \aleph_1 ensembles mesurables B .

Remarque 2. Un autre problème qui n'est pas résolu (et qui, d'après M. Lusin, ne sera jamais résolu) c'est le problème si tout ensemble CA linéaire non dénombrable contient un sous-ensemble parfait. Désignons, avec M. Lusin²⁾, par P_0 la propriété suivante d'ensembles de points: quel que soit un ensemble parfait π , si l'ensemble E possède sur π une infinité non dénombrable de points, il possède sur π un ensemble parfait de points. Le problème que nous venons d'énoncer est évidemment équivalent au problème si tout ensemble CA (linéaire) jouit de la

¹⁾ *Fund. Math.* t. IV, p. 319.

²⁾ *Fund. Math.* t. X, p. 42.

propriété P_0 . (Pour prouver cette équivalence, il suffit de remarquer que le produit d'un ensemble CA par un ensemble parfait est un CA).

En partant d'un ensemble CA plan universel au lieu de l'ensemble V et en répétant (avec des modifications évidentes) notre raisonnement, on pourrait nommer un ensemble CA linéaire, soit E_1 , tel que le problème si tout ensemble CA linéaire jouit de la propriété P_0 est équivalent au problème si l'ensemble E_1 jouit de la propriété P_0 .

Józef Grzybowski.

O wcięciach i otworach nadoczodołowych i podoczodołowych w szeregu naczelnych.

Przedstawił E. Loth.

Wcięcia i otwory w czaszce, przez które wychodzą do tkanki podskórnej końcowe rozwidlenia trzech gałęzi n. trójdzielnego były już nieraz badane, przeważnie na czaszkach wymacerowanych.

Ilość czaszek zbadanych w tym względzie wynosi parę tysięcy (Lotze—11, Krauze—8, Le Double—10, Zweiback—15), pomimo to przyczyny dotyczące sposobu formowania się otworów nad — i podoczodołowych dotąd nie są stwierdzone.

Zadaniem mojem było uwypuklić proces tworzenia się tych otworów w górnym i dolnym brzegu oczodołu u naczelnych, co mogło by rzucić światło i na stosunki u człowieka.

Wyniki niniejszej pracy opieram na danych, które otrzymałem badając czaszki małpie, znajdujące się w paryskim „*Museum d'Histoire Naturelle*” i w Zakładzie Anatomji Opisowej Uniw. Warsz. oraz na zbadanych czaszkach ludzi rozmaitych narodowości. Te ostatnie miałem do dyspozycji w Paryżu w „*Laboratoire de l'Anthropologie*” (opis materiału patrz niżej).

I. Wcięcia i otwory nadoczodołowe.

Podług klasyfikacji Le Double'a (10), na górnym brzegu oczodołu należy odróżniać: a) wcięcie, otwór, lub kanał nadoczodołowy (*échancrure, trou sus-orbitaires et canal frontal moyen*), b) wcięcie, otwór, lub kanał czołowy wewnętrzny, (*échancrure, trou sus-orbitaires et canal frontal latéral interne*) i c) kanał czołowy boczny zewnętrzny (*canal frontal latéral externe*).

Powyższe trzy jednostki anatomiczne są uwzględniane przez wszystkich badaczy górnego brzegu oczodołu, oraz w podręcznikach (Lotze—11, Krauze—8, Zweiback—15); różnice zachodzą li tylko w określeniu nazw tych jednostek.

Określenie każdej z wyżej podanych jednostek jest wykonywane zawsze na podstawie przypuszczalnej zawartości otworu, wcięcia, lub kanału.

Wyżej wymienieni autorzy zgodnie zaznaczają niestałość umiejscowienia wcięć i otworów nadoczodołowych. Na jednym oczodole mogą współistnieć wszystkie trzy jednostki, ilość ich może być także mniejsza, lub zwiększona do czterech (Z w e i b a c k, podł. Le Double'a — 10 str. 196). Mogą one znajdować się w najrozmaitszej odległości od linii środkowej ciała, np. wcięcia nadoczodołowe — w odległości od *linea mediana* od 17 do 41 mm. (podług różnych autorów, — Le Double — 10. str. 194).

Badając czaszki ludzkie przekonałem się, że nadzwyczajna niestałość co do ilości i umiejscowienia otworów i wcięć nadoczodołowych najczęściej uniemożliwia stwierdzenie, na czaszkach wymacerowanych, — jaki organ przebiegał przez dany otwór, lub wcięcie, a więc, uniemożliwia ściśle zróżnicowanie, z jakiego rodzaju otworem, lub wcięciem ma się do czynienia.

Dlatego też odrzuciłem określenia ściśle, notując tylko ilość i rodzaj, np. — dwa wcięcia i jeden otwór (trzy jednostki), lub dwa otwory (dwie jednostki) i t. d.

W słuszności mego stanowiska przekonały mnie niektóre sekcje zwłok ludzkich i małpich.

Na jednych zwłokach małpich stwierdziłem, że we wcięciu nadoczodołowym znajdowała się żyła czołowa, zaś pęczek naczyniowo-nerwowy leżał o parę milimetrów na zewnątrz, nie pozostawiając żadnego śladu na brzegu oczodołu.

Na zwłokach ludzkich stwierdziłem, że pęczek naczyniowo-nerwowy nadoczodołowy był podzielony: część jego przebiegała przez otwór, część — przez wcięcie, leżące nieco ku wewnątrz. W miejscu, gdzie się znajdował pęczek naczyniowo-nerwowy czołowy nie było na kości żadnych śladów.

Gdybym badał tę głowę w stanie wymacerowanym z pewnością przyjąłbym otwór za *formen supraorbitale*, a wcięcie — za czołowe wewnętrzne. Omyłki są zbyt często możliwe (patrz niżej).

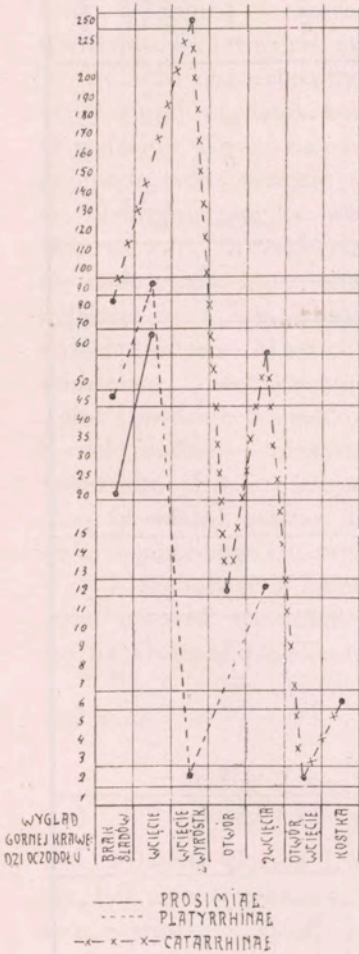
Również zredukowałem w znacznym stopniu pojęcie kanału w górnej krawędzi oczodołu. Nie znajduję bowiem żadnego kryterjum dla określenia, — kiedy otwór można nazwać otworem, a kiedy kanałem. Rozgraniczenie tych dwu pojęć wydaje mi się

aż nadto subiektywne. W rzeczywistości, Zweiback (15) na str. 18 pisze o *canalis supraorbitalis*: „*seine Länge schwankt zwischen 5—15 mm, beträgt im Durchschnitt 8 mm*”. Nie znalazłem wytłumaczenia, dlaczego np. czteromilimetrowy kanał nie jest kanałem.

Z powyższych względów w moich badaniach określałem jako kanał tylko jednostkę o charakterze tunelu, resztę zaś klasyfikowałem jako otwór (jeśli był całkowicie zamknięty), lub jako wcięcie.

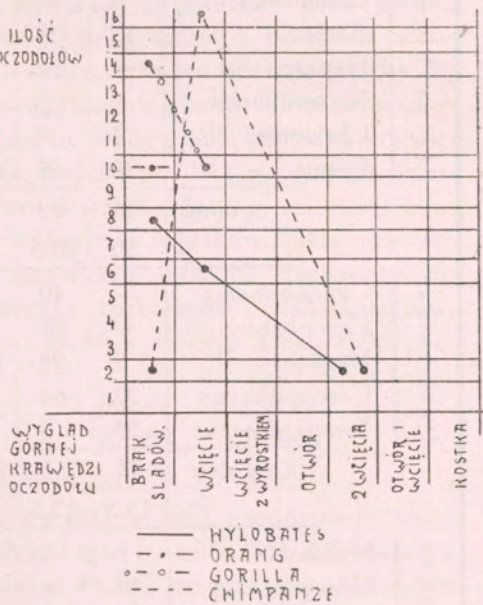
Wyniki moich badań na czaszkach małych załączam w wykresie Nr. 1 i 2 oraz w zestawieniu liczbowym (patrz str. 484).

IŁOŚĆ
OCZODOLÓW



Wykres Nr. 1.

IŁOŚĆ
OCZODOLÓW



Wykres Nr. 2.

Jak widać z tego zestawienia, w rzędzie małpozwierzy przeważa gładki górny brzeg oczodołu, lub tylko jedno wcięcie przy dośrodkowym brzegu oczodołu. Wcięcie to zazwyczaj jest bardzo małe.

Liczbowy wykaz zbadanych oczodołów małpich z oznaczeniem wyglądu ich górnej krawędzi.

		Brak śladów	Wcięcie	Wcięcie z wyrostkiem	Otwór	2 wcięcia	Otwór i wcięcie	Kostka
Prosimiæ	Perodicticus	6	—	—	—	—	—	—
	Nycticebus	6	4	—	—	—	—	—
	Propithecus	—	2	—	—	—	—	—
	Chirogale	4	—	—	—	—	—	—
	Lemur	6	58	—	—	—	—	—
	ogółem	22	64	—	—	—	—	—
	$\frac{0}{0}$	26	74	—	—	—	—	—
Platyrrhinæ	Brachiteles	4	—	—	—	—	—	—
	Ateles	12	8	—	—	—	—	—
	Hapale	—	12	—	—	—	—	—
	Nictipithecus	—	2	—	—	—	—	—
	Chrisotrix	4	4	2	—	4	—	—
	Cebus	26	66	—	—	8	—	—
	ogółem	46	92	2	—	12	—	—
	$\frac{0}{0}$	30	60.5	1	—	8	—	—
Catarrhinæ	Cynocephalus	—	40	54	—	—	2	—
	Cercocebus	—	20	2	—	—	—	—
	Macacus	2	25	135	12	53	—	6
	Cercopithecus	22	64	56	—	—	—	—
	Semnopithecus	53	6	6	—	3	—	—
		ogółem	77	155	253	12	56	2
	$\frac{0}{0}$	13.5	27.5	45	2	10	0.5	1
Simiidae	Hylobates	8	6	—	—	2	—	—
	Orang	10	—	—	—	—	—	—
	Gorilla	14	10	—	—	—	—	—
	Chimpanze	2	16	—	—	2	—	—
		ogółem	34	32	—	—	4	—
	$\frac{0}{0}$	50	45	—	—	5	—	—

Wśród małp szerokonosych spotykamy ten sam obraz — gładki brzeg, lub jedno wcięcie. Niekiedy wcięcie to (5 oczodołów *Hapale*) staje się głębsze, przypominając z wyglądu $\frac{1}{2}$ lub $\frac{2}{3}$ otworu, lub też zewnętrzny brzeg (2 przyp. *Christrix*) wydłuża się w postaci kostnego wyrostka ku środkowi i ku dołowi. Ponadto u szerokonosych w $\frac{1}{10}$ przypadków można stwierdzić dwa wcięcia umiejscowione obok siebie.

Cechą charakterystyczną dla małp wązkonosych jest wspomniany wyżej wyrostek kostny przy zewnętrznym brzegu wcięcia. U rodzajów *Cynocephalus*, *Macacus* i *Cercopithecus* przeważa jedno wcięcie z wyrostkiem. Ten ostatni jest tak duży, że, niekiedy, zamyka wcięcie, tworząc otwór (12 przyp. rodzaju *Macacus*). W tych razach na brzegu wyrostka kostnego tworzą się małe guzki, które wyrastają w kierunku do brzegu oczodołu i, łącząc się z nim, tworzą otwór. Ciekawe jest, że na 6 oczodołach rodzaju *Macacus* wyrostek zewnętrzny miał postać oddzielnej kosteczki, złączonej tkanką łączną z brzegiem oczodołu. U rodzaju *Semnopithecus* wyrostek boczny spotyka się o wiele rzadziej, — przeważa brzeg zupełnie gładki. Wreszcie u człekokształtnych najczęściej spotyka się brzeg gładki lub jedno wcięcie.

O wiele rzadziej można znaleźć po dwa wcięcia na oczodole u gibbonów i u szympanza (łącznie 5%).

Przechodząc z kolei do omówienia wyników, jakie poszczególni autorzy stwierdzili na czaszkach ludzkich zaznaczam, że można stwierdzić niekiedy znaczną rozbieżność zdań badaczy.

Wcięcie lub otwór nadoczodołowy istnieje u człowieka prawie stale:

	z prawa	z lewa
podług <i>Zweibacka</i>	95,96%	92,84%
podług <i>Lotze'go</i>	100%	100%

Ponadto podług *Lotze'go* (11) w 100% współistnieje wcięcie lub kanał czołowy, podług *Zweiback'a* (15) współistnieją one z prawa w 50,09%, z lewa w 49,58% przypadków. Natomiast według statystyki zbiorowej podanej przez *Le Double'a* (10) (str. 197) wcięcie, lub otwór czołowy istnieją tylko w 26%!

Częstość występowania wcięć, otworów i kanałów na górnym brzegu oczodołu w stosunku wzajemnym poszczególni autorzy notują prawie zgodnie. Wcięcie nadoczodołowe ma występować trzy razy częściej niż otwór, ten zaś—10 razy częściej od kana-

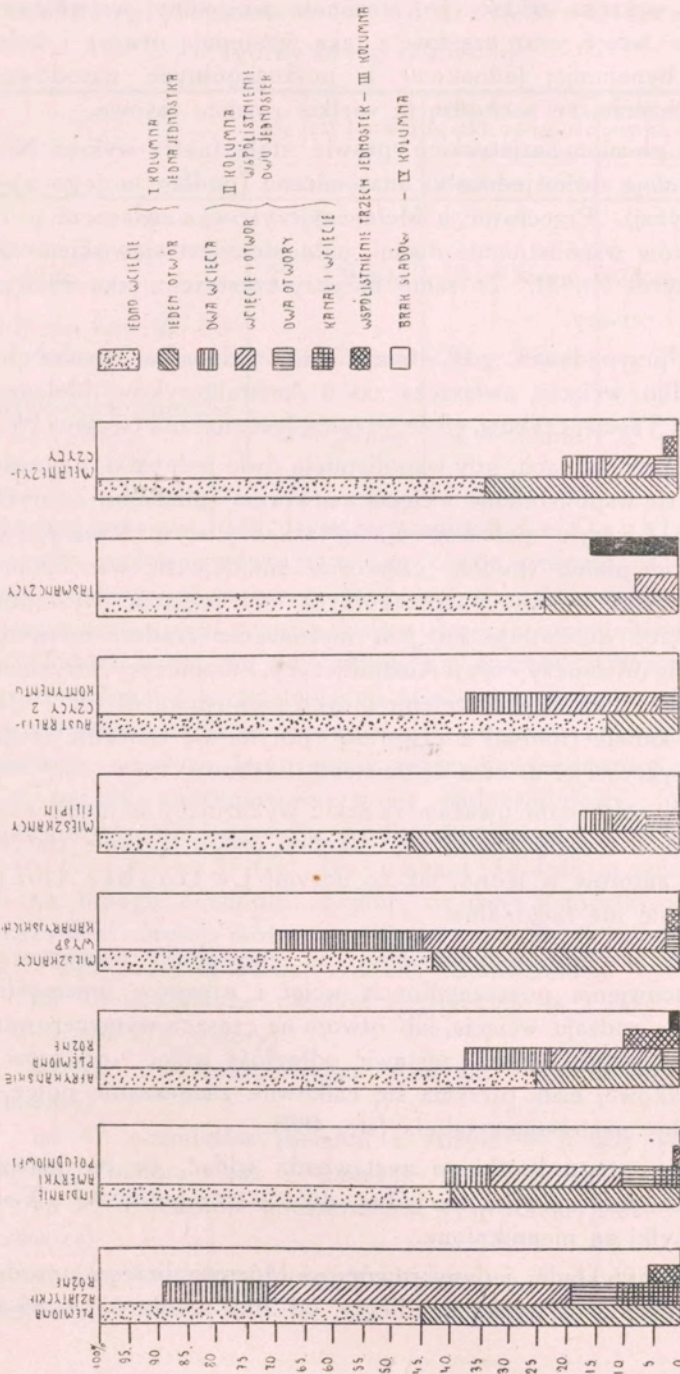
łu (Z we i b a c k, 15). Wcięcie czołowe istnieje 14 razy częściej niż jednoimienny otwór (K r a u s e — 8, L o t z e — 11, d' E s t e — 4, L e D o u b l e — 10) zaś podług Z w e i b a c k'a (15)—20 razy częściej.

Co się tyczy częstości występowania kanału czołowego zewnętrznego (*canal frontal latéral externe*), podług jedynej istniejącej statystyki Z o j i (L e D o u b l e—10, str. 198), występuje on w 16,4% i zawiera gałąź nerwu i tętnicy ocznej, oraz żyłkę.

Poniżej przedkładam wykres wyników własnych badań na czaszkach ludzkich (wykres Nr. 3), oraz tabelę liczbową:

Częstość występowania otworów i wcięć nadoczodołowych w stosunku wzajemnym w %

	Jedna jednostka		Współistnienie dwu jednostek				Współistnienie trzech jednostek			Brak śladów	Ilość zbadanych oczodołów
	wcięcie	otwór	2 wcięcia	wcięcie otwór	2 otwory	Kanał (tunel) i otwór lub wcięcie	2 wcięcia i otwór	3 otwory	Kanał (tunel) i 2 otwory		
Plemiona azjatyckie różne	28.5	23.0	8.5	27.0	4.0	6.0	1.5	1.5	—	—	70
Indianie Ameryki Południowej	42.0	28.0	5.5	16.5	3.5	3.0	—	0.5	—	—	215
Afrykańskie plemiona różne	50.0	16.5	10.0	12.5	2.0	—	4.0	—	2.0	2.0	48
Mieszkańcy wysp Kanaryjskich	33.0	24.0	15.0	24.0	1.5	—	—	1.5	—	—	54
Mieszkańcy Filipin	45.0	40.0	5.0	5.0	5.0	—	—	—	—	—	20
Australijczycy z kontynentu	63.0	9.0	11.5	13.5	2.0	—	—	—	—	—	44
Tasmańczycy	62.0	18.5	—	6.0	—	—	—	—	—	12.5	16
Melanezyjczycy	55.0	27.5	5.5	5.5	4.0	—	1.5	—	—	—	69



Wykres Nr. 3.

Z wykresu widać, że stosunek wzajemny współlistnienia otworów i wcięć, oraz częstość z jaką występują otwory i wcięcia nie są bynajmniej jednakowe u poszczególnych narodowości. Mam wrażenie, że zachodzą tu wielkie różnice rasowe.

U plemion azjatyckich prawie stale (patrz wykres Nr. 3) współlistniają dwie jednostki anatomiczne (podług mojego ujęcia, patrz wyżej). Przeciwnie u Melanezyjczyków, a zwłaszcza u Tasmańczyków współlistnienie dwóch jednostek jest zjawiskiem rzadkiem (wyres Nr. 3). To samo dotyczy częstości z jaką występują wcięcia i otwory.

W przypadkach, gdy istnieje jedna jednostka, zawsze przeważa tylko wcięcie, zwłaszcza zaś u Australijczyków, Melanezyjczyków i Tasmańczyków, gdzie różnica jest znaczna (wykres Nr. 3).

W przypadkach, gdy współlistniają dwie jednostki, najczęściej spotyka się współlistnienie wcięcia z otworem (plemiona azjatyckie, Indjanie Ameryki południowej, mieszkańcy wysp Kanaryjskich). Na drugim planie (podług częstości) znajduje się współlistnienie 2 wcięć, aczkolwiek u poszczególnych ras częstość występowania 2 wcięć dorównuje, lub jest nieznacznie rzadsze od wcięcia z otworem (Melanezyjczycy, Australijczycy, Filipińczycy, afrykańskie plemiona różne). Współlistnienie innych jednostek, jak to: 2 otworów, lub kanału (tunelu) z otworem spotyka się znacznie rzadziej (patrz wykres Nr. 3, oraz zestawienie liczbowe).

Powyższe dane uważam za szkic wykazujący istnienie różnic rasowych w kwestji omawianej. Wobec czego łączenie statystyk różnych autorów w jedno, jak to uczynił Le Double (10) wydaje mi się nie racjonalne.

We wstępie wspomniałem, że niestałość występowania i umiejscowienia poszczególnych wcięć i otworów uniemożliwia określenie rodzaju wcięcia, lub otworu na czaszce wymacerowanej. W rzeczywistości, jeżeli zestawić odległość wcięć i otworów od linii środkowej ciała otrzyma się całkowite zamieszanie pojęć, jak to ilustruje następująca tabela (str. 489).

Już z tego krótkiego zestawienia widać, że na jednakowej przestrzeni spotyka się jedną, dwie i trzy jednostki. Wobec tego omyłki są nieuniknione.

Dla przykładu: jedyny otwór na górnym brzegu oczodołu, wśród plemion azjatyckich, odległy od linii środkowej o 35 mm

Odległość otworów od linii środkowej
(górny brzeg oczodołu)

	Gdy jest 1 otwór	Gdy są 2 jednostki, odległość zewn. otworu	Gdy są 3 jednostki, odległość zewn. otworu
	od — do	od — do	od — do
Plemiona azjatyckie różne	22 — 39mm	19 — 36mm	24 — 35mm
Indjanie Ameryki Południowej	16 — 27mm	20 — 30mm	24mm
Afrykańskie plemiona różne	22 — 32mm	31 — 35mm	35 — 40mm

może być przyjęty (jeśli użyję terminologii Le Double'a (10) za otwór czołowy wewnętrzny, za otwór nadoczodołowy i za otwór czołowy zewnętrzny, to samo zjawisko wynika w powyższym zestawieniu czaszek Indjan Ameryki południowej.

Chodzi o to, że gdy mamy na czaszce wymacerowanej w górnym brzegu oczodołu jeden otwór, lub wcięcie, niema danych do stwierdzenia jej zawartości: z jednakowym prawdopodobieństwem mógł to być pęczek naczyniowo-nerwowy czołowy, jak i pęczek naczyniowo-nerwowy nadoczodołowy, lub, zwyczajnie, otwór odżywny dla śródkościa Török (14), Königstein (7), Adachi (1). Na większą ścisłość można liczyć, jeśli na brzegu oczodołu znajdują się dwie jednostki, z jeszcze większą dokładnością można określić trzy współlistniejące jednostki, lecz te przypadki są bardzo rzadkie. Spotkałem je

na 70 oczodołów plemion azjatyckich — 2 razy (2 wcięcia + otwór i 3 otwory)

na 213 oczodołów Indjan Ameryki Południowej — 1 raz (3 otwory)

na 47 oczodołów plemion z Afryki — 3 razy (2 razy: 2 wcięcia + otwór, 1 raz — kanał + 2 otwory)

na 54 oczodołów mieszkańców wysp Kanaryjskich — 1 raz (3 otwory)

na 69 oczodołów Melanezyjczyków — 1 raz (2 wcięcia + otwór)

Zestawiając cały szereg naczelnych można spostrzedz, że do człowieka w górnej krawędzi oczodołu rzadko spotyka się 2 lub 3 wcięcia, zazwyczaj istnieje jedno, częstokroć odgraniczone od zewnątrz dużym wyrostkiem kostnym. Od tego wyrostka, jak wykazały sekcje, biegnie więzadło do kącika wewnętrznego oka. Po stronie przysiódkowej wyrostka kostnego i więzadła znajduje się pęczek naczyniowo-nerwowy, który dopiero po wydostaniu się na czoło dzieli się na pęczek czołowy i nadczołowy. Wspomniany pęczek przed podziałem końcowym jest porozdzielany w paru miejscach przez cieniutkie, zbite pasemka tkanki łącznej, odbiegające od wyrostka kostnego, lub jego więzadła skośnie, w kierunku do *margo supra-orbitalis*. W razie zwapnienia wspomnianych pasemek tkanki łącznej, wytwarza się otwór przy brzegu oczodołu. Na załączonych fotografiach (Tabl. rys. 1, 2, 3, 4) jest uwydatnione w jaki sposób odbywa się ten proces. Obecność niekiedy wolnej kostki (Tabl. rys. 3 i 4) zamiast wyrostka kostnego przemawiałoby za tem, że ma się tu do czynienia ze zwykłym zwapnieniem więzadła i jego pęczków poprzecznych, a nie z procesem kostnienia.

U człowieka spotyka się odsunięcie się pęczka nadczołowego od pęczka czołowego. Omawiane rozsuniecie odbywa się już w oczodole. Podług Hovelaque (6) znajduje się ono w 6—7 mm. ku tyłowi od brzegu oczodołu. Miejsce to jest jednak bardzo niestałe, opisywane są przypadki Cruveilhier podł. Hovelaque 6), gdzie podział następował przy *fissura orbitalis superior*.

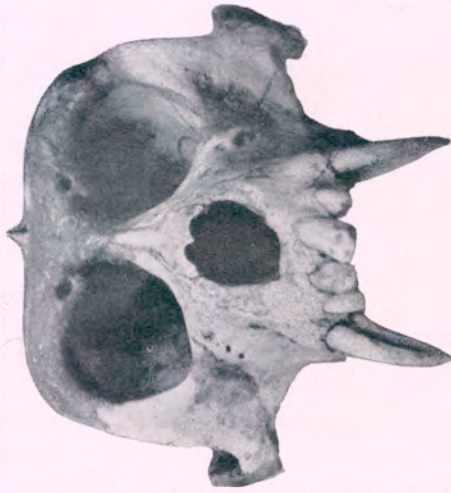
Sposób tworzenia się otworów w górnym brzegu oczodołu był badany przez Maggi'ego, (Le Double — 10. str. 200) lecz nie został rozstrzygnięty. Mam wrażenie, że nie wszystkie otwory w brzegu oczodołowym mają jednakowe pochodzenie.

Przypuszczam, że otwory, które leżą bliżej krawędzi oczodołu, tworzą się w sposób podobny, jak na czaszkach małpich, mianowicie przez zwapnienie więzadła, które biegnie od górnego brzegu oczodołu, do kącika wewnętrznego oka.

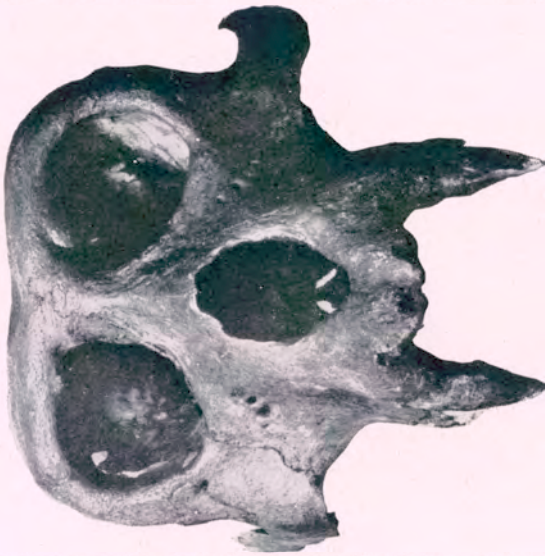
Jeśli pęczek naczyniowo-nerwowy znajduje się bliżej do linii środkowej — więzadło ma przebieg bardziej skośny ku dołowi, otwór może się wytworzyć tylko w razie bocznego odszczepienia w kierunku do *margo supraorbitalis* części włókien więzadła i ich zwapnienia. Im bardziej nazewnątrz leży pęczek ner-



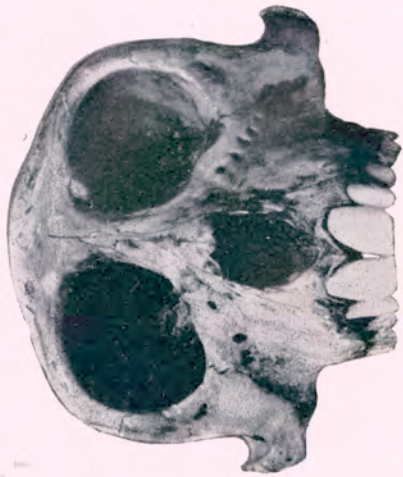
Rys. 1. *Macacus* ♂
(Muséum d'Histoire Naturelle N. 1875—52)



Rys. 2. *Zati Cynomolgus* (L)
(Muséum d'Histoire Naturelle N. 1895—145)



Rys. 3. Magot ♀
(Muséum d'Histoire Naturelle N. 1883—1890)



Rys. 4. Magot ♀
(Muséum d'Histoire Naturelle N. 1870—283)

1889

1889

wowo - naczyniowy, tem bardziej poziomy przebieg otrzyma wiadło, tem bliżej będzie ono krawędzi oczodołu, i, wapniejąc, może prędzej zlać się z przylegającą krawędzią kostną i utworzyć otwór. Dlatego też im dalej od linii środkowej, tem częściej spotykamy na oczodołach otwory, a rzadziej wcięcia.

W jaki sposób tworzą się otwory odległe od krawędzi o 7—15 mm., tego z moich badań wywnioskować nie mogę.

II. Otwory i kanały podoczodołowe.

U człowieka, zazwyczaj, istnieje jeden kanał podoczodołowy, — dłuższy, lub krótszy, — otwierający się jednym otworem pod brzegiem dolnym oczodołu. Niekiedy kanał ten przybiera jednak kształty odmienne: rozwidła się na 2, 3, lub 4 ramiona, lub też istnieją kanały dodatkowe: zewnętrzny (*canalis infraorbitalis anomalous externus*) i wewnętrzny (*canalis infraorbitalis anomalous internus*) z własnymi otworami (Gruber, 5).

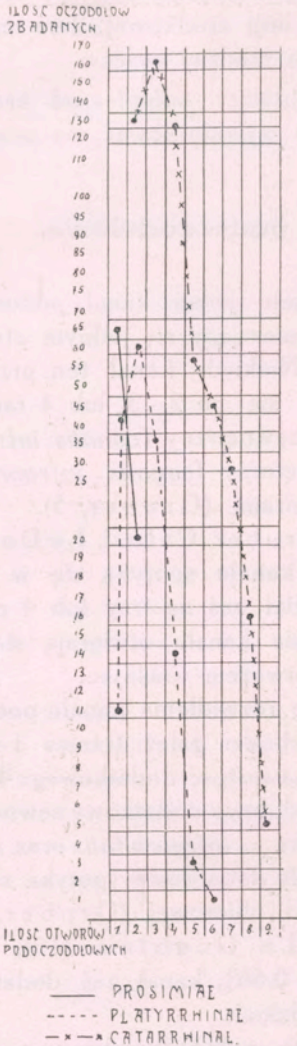
Podług statystyki zbiorowej (Gruber, Calori, Le Double, Adachi, Poirier) rozdwojenie kanału spotyka się w 10.9% (Le Double, 10, str. 173) podział zaś na trzy lub 4 odnogi jest wyjątkowo rzadki. Rozdwojenia kanału otwierają się pod dolnym brzegiem oczodołu każde otworem własnym.

Podług Gruber'a (5), w razie rozwidlenia kanału podoczodołowego, przez każdy otwór wychodzi gałąź tętnicy i nerwu podoczodołowego. Taka sama jest zawartość dodatkowego kanału wewnętrznego. Przez kanał podoczodołowy dodatkowy zewnętrzny podług Gruber'a przebiega gałązka a. *infraorbitalis* oraz *ramus facialis n. subcutanei malae*. Kanały dodatkowe spotyka się niezmiernie rzadko. Podług statystyki zbiorowej (Gruber, Calori, Le Double) podanej u Le Double'a (10), kanał dodatkowy wewnętrzny istnieje w 0.66%, kanał zaś dodatkowy zewnętrzny — na 0.44% czaszek ludzkich.

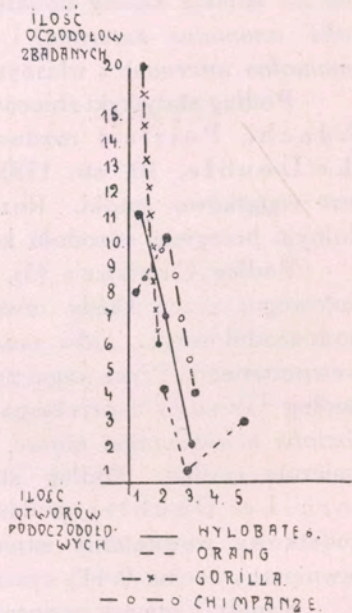
Kanały i otwory podoczodołowe małp były także w poszczególnych przypadkach badane przez Gruber'a (5). Stwierdził on, że przez każdy otwór podoczodołowy przechodziła gałązka *arteriae et nervi infraorbitalis*.

Wyniki moich badań na czaszkach małpich podaję w wykresie Nr. 4 i 5 oraz w tabeli (dane liczbowe i procentowe str. 493).

Jak widać, większą ilość (do 6-ciu) otworów podoczodołowych posiadają niektóre rodziny szerokonosych. Przeważnie zaś małpozwierze i małpy szerokonose posiadają 1 lub 2 otwory. Inaczej jest u małp wązkonosych. Ilość otworów gwałtownie wzrasta, do chodząc do 9-ciu. Największą ilość stwierdziłem urodzaju *Cynocephalus* (patrz tablicę, rys. 1, 2, 3, 4).



Wykres Nr. 4.



Wykres Nr. 5.

lub 2 otwory, wyjątek stanowi orang, który posiada do 5-ciu otworów podoczodołowych.

U wszystkich małp do człekokształtnych włącznie niema właściwego kanału podoczodołowego. Istnieją tylko rowki od-

Tabela do wykresu Nr. 4 i 5.
Ilość otworów podoczodołowych u małp.

Ilość otworów podoczodołowych		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prosimiæ	Perodicticus	2	4	—	—	—	—	—	—	—
	Nycticebus	7	3	—	—	—	—	—	—	—
	Propithecus	2	—	—	—	—	—	—	—	—
	Chirogale	4	—	—	—	—	—	—	—	—
	Lemur	51	13	—	—	—	—	—	—	—
	ogółem	66	20	—	—	—	—	—	—	—
	%	76.5	23.5	—	—	—	—	—	—	—
Platyrrhinæ	Brachiteles	—	—	—	2	2	—	—	—	—
	Ateles	1	3	11	3	1	1	—	—	—
	Hapale	10	2	—	—	—	—	—	—	—
	Nyctipithecus	2	—	—	—	—	—	—	—	—
	Chrisotrix	4	8	2	—	—	—	—	—	—
	Cebus	22	48	23	9	—	—	—	—	—
ogółem	39	61	36	14	3	1	—	—	—	
	%	25	39.5	23	9	2	1	—	—	—
Catharrhinæ	Cynocephalus	—	—	1	11	20	23	24	12	5
	Cercocebus	—	—	2	2	4	8	3	3	—
	Macacus	7	67	76	62	15	8	—	1	—
	Cercopithecus	1	24	58	41	17	3	—	—	—
	Semnopithecus	3	36	21	9	1	2	—	—	—
	ogółem	11	127	158	125	57	44	27	16	5
	%	2	22	27.5	22	10	7.5	4.5	2.5	1
Simiæ	Hylobates	11	7	2	—	—	—	—	—	—
	Orang	—	4	1	2	3	—	—	—	—
	Gorilla	22	6	—	—	—	—	—	—	—
	Chimpanze	8	10	4	—	—	—	—	—	—
	ogółem	41	27	7	2	3	—	—	—	—
	%	50	33.5	9	2.5	4	—	—	—	—

słonięte od góry, przyczem ilość ich odpowiada ilości otworów pod krawędzią oczodołu. Nerw podoczodołowy dzieli się na gałązki przy samej szczelinie oczodołowej dolnej; z nerwami przebiegają gałęzie tętnicy (*a. infraorbitalis*). Przy samej krawędzi oczodołu każda gałąź nerwu (wraz z tętnicą) samodzielnie przebija *margo infraorbitalis*. Tylko jeden lub dwa zewnętrzne

rowki są przykryte na dłuższej przestrzeni blaszką kostną tak, że do połowy swej długości tworzą rynienkę, od połowy — kanalik.

U małą człekokształtnych również niema kanału podoczodołowego, istnieje natomiast głęboka rynienka, zazwyczaj jedna, w której leżą obok siebie gałązki nerwowe i tętnicze. Po przebicium w paru miejscach brzegu oczodołowego rozpadają się one na szereg drobniejszych gałęzi. Dopiero przebijając *margo infraorbitalis* są one otoczone ze wszystkich stron tkanką kostną, a więc ujęte w kanalikach. W zależności od głębokości oczodołu, od wysokości i grubości *marginis infraorbitalis* omawiana część może być o parę milimetrów dłuższa lub krótsza.

Wyniki badań na czaszkach ludzkich są przedstawione w tabeli na str. 495.

Wśród ludzkich czaszek nie spotykałem samodzielnych dodatkowych kanałów bocznych, lub przyśrodkowych, istniały tylko rozwidlenia kanału głównego, które rozpoczynały się bądź głębiej w oczodole, bądź bliżej do *margo infraorbitalis*.

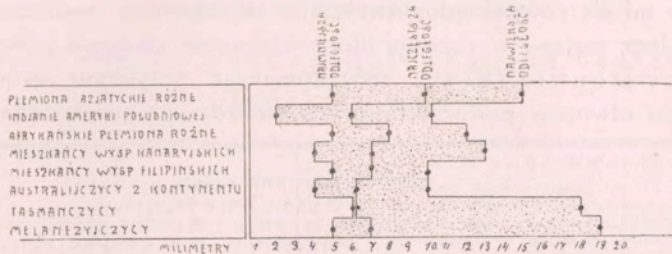
Odległość otworów podoczodołowych od krawędzi oczodołu uwypukliłem w wykresie Nr. 6.

Najmniejszą odległość stwierdziłem na czaszkach Indian amerykańskich — 2 mm, największą — na czaszkach Melanezyjczyków — 19 mm. Najczęstsza odległość była w 6 i 7 mm od krawędzi, pod tym względem różnice u poszczególnych ras są bardzo nieznaczne.

O wiele ciekawsze jest zachowanie się kanału podoczodołowego.

Jak widać z wykresu Nr. 7 oraz z tabeli (str. 497) zachodzą tu duże różnice rasowe. Podług Le Double'a (10, str. 168) kanał całkowity t. zn. od szczeliny oczodołowej dolnej do *margo infraorbitalis* spotyka się na 20% czaszek ludzkich.

Na czaszkach badanych przezemnie mogłem stwierdzić, że całkowity kanał podoczodołowy spotyka się najczęściej na czaszkach mieszkańców wysp Kanaryjskich i plemion afrykańskich. Na czaszkach Tasmańczyków przeważa kanał długości $\frac{2}{3}$ przestrzeni od szczeliny oczodołowej do *margo infraorbitalis*. U innych narodowości badanych przezemnie przeważa kanał krótszy — długości $\frac{1}{2}$ omawianej przestrzeni. Najkrótsze kanały podoczodołowe stwierdziłem na czaszkach Indian amerykańskich: — tyl-



Wykres Nr. 6.

Ilość otworów podoczodołowych na czaszkach ludzkich.

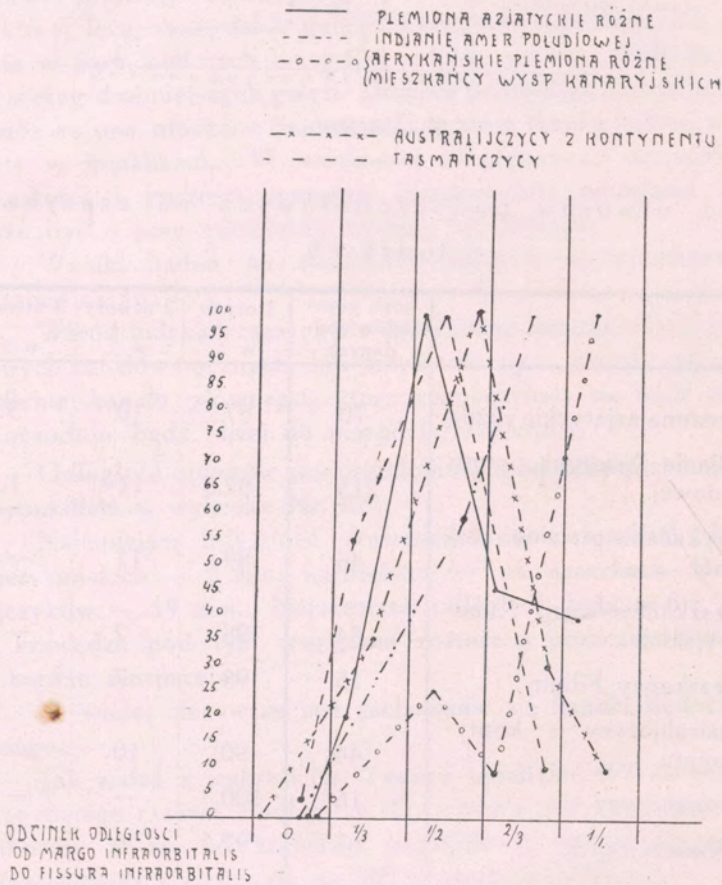
	Ilość oczodołów zbadanych	1 otwór	2 otwory	3 otwory
		w %	w %	w %
Plemiona azjatyckie różne	70	87	10	3
Indianie Ameryki południowej	215	87.5	11	1.5
Afrykańskie plemiona różne.	46	89	11	—
Mieszkańcy wysp Kanaryjskich.	54	98	2	—
Mieszkańcy Filipin.	15	93	7	—
Australijczycy z kontynentu	44	90	10	—
Tasmańczycy	16	100	—	—
Melanezyjczycy	67	92.5	6	1.5

ko $\frac{1}{3}$ długości rynienki podoczodołowej posiadało pokrycie, zaś na 2 oczodołach cały kanał był zastąpiony rynienką. Nie udało mi się stwierdzić jakiegokolwiek współzależności pomiędzy długością kanału i odległością otworu zewnętrznego od krawędzi oczodołu.

Przechodząc do analizy procesu tworzenia się dodatkowych otworów podoczodołowych chciałbym zaznaczyć, że sprawa ta

wyduje mi się równorzędną tworzeniu się otworów nadoczodołowych, lecz mająca w rozwoju filogenetycznym kierunek odwrotny.

Le Double (10 str. 185) tłumacząc przyczynę tworzenia się kilku otworów podoczodołowych twierdzi, że zwiększona ilość



Wykres Nr. 7.

tych otworów zależy od wczesnego podziału nerwu na gałązki końcowe. Twierdzenie to nie może być jednak uważane za bezwzględnie słuszne, gdyż, jak mogłem się przekonać na sekcjach zwłok ludzkich, nerw podoczodołowy, nawet gdy posiada jedno wyjście z kanału, dzieli się na gałązki końcowe już przy *fissura orbitalis inferior*.

Tabela do wykresu Nr. 7.

Długość kanału podoczodołowego na czaszkach ludzkich w $\frac{0}{0}$.

	Ilość zbadanych oczodołów	Długość kanału:				
		o = brak kanału, ułamki $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{1}$ oznaczają długość kanału wyrażoną w stosunku do długości przestrzeni od <i>margo infraorbitalis</i> do <i>fissura orbitalis inferior</i>				
		o	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$
Plemiona azjatyckie różne	41	—	9.5	50	21	19.5
Indjanie Ameryki południowej	127	1.5	33.5	59.5	5.5	—
Afrykańskie plemiona różne	33	—	—	18	6	76
Mieszkańcy wysp Kanaryjskich	37	—	—	14	8	78
Australijczycy z kontynentu	34	—	20.5	56	17.5	6
Tasmańczycy	16	—	—	37.5	62.5	—
Melanezyjczycy	38	—	10.5	44.5	23.5	21

Poszczególne gałązki i tętnica biegną jednak razem, ujęte w mocną otoczkę łączno-tkankową.

Dla wyświetlenia tej kwestji zostały wykonane preparaty histologiczne z dolnego brzegu oczodołu małpy rodzaju *Cynocephalus*. Preparaty zostały wykonane w ten sposób, aby wykazać nerwy w chwili przebicia brzegu oczodołu, a więc otoczone ze wszystkich stron tkanką kostną. Na przekroju na preparatach okazało się pięć kanalików kostnych. W każdym z tych kanalików stwierdziłem nerw, tętnicę i żyłę. Te ostatnie miały w poszczególnych kanalikach wygląd różny. W dwóch kanalikach żyły były tej grubości, że zajmowały połowę światła kanalika, były one o wiele szersze od obok leżących tętnic. W trzech kanalikach również znajdowały się żyły, lecz o wiele cieńsze. Nie miałem możliwości stwierdzić, czy były to żyły zębodołowe, podobne do spostrzeżonych przez Gruber'a (5) w zuchwie i odprowadzające krew na zewnątrz do tkanki podskórnej przez szereg otworów w zuchwie, czy też były to (w 2 kanalikach żyły grubsze) żyły odpowiadające żyłom podoczodołowym niektórych ssaków.

Sam fakt istnienia w tych otworach żył nasuwa myśl, czy nie są one czynnikiem głównym w tworzeniu się otworów dodatkowych podoczodołowych, a być może i nadoczodołowych, jak to zostało stwierdzone dla otworów w wyrostkach poprzecznych kręgów przez J. Loth — Niemirycz (9) i M. Orłowskiego (12), oraz ostatnio przez G. Cutore (3) dla niektórych dodatkowych kanałów kłykciowych czaszki (*canali praecondyloidei*). Dla całkowitego wyświelenia tej kwestji są potrzebne dalsze badania na zwłokach.

Wnioski.

1. Otwory w górnej krawędzi oczodołu należy uważać, w szeregu naczelnych, za cechę specyficznie ludzką, u małp spotykają się one bardzo rzadko.

2. Otwory nadoczodołowe małp tworzą się przez zwapnienie więzadła, biegnącego od krawędzi pierwotnego wcięcia nadoczodołowego do wewnętrznego kąta oczodołu, oraz przez zwapnienie włókien odszczepionych od tego więzadła i biegnących wskos, w górę i do środka do górnego brzegu oczodołu.

3. Pęczek nerwowo naczyniowy nadoczodołowy i czołowy u małp leżą bezpośrednio obok siebie w jednym lub 2 wcięciach, lub (bardzo rzadko) we wcięciu i otworze. Rozsuniecie się tych pęczków nerwowo-naczyniowych na szerszej przestrzeni spotyka się dopiero u człowieka. Zjawisko to powoduje wytworzenie się w górnym brzegu oczodołu u człowieka większej liczby wcięć i otworów (do czterech).

4. Wcięcia i otwory w górnym brzegu oczodołu na czaszkach ludzkich są tak niestałe, że badanie ich na czaszkach wymacerowanych nasuwa częste omyłki.

5. Ilość wcięć i otworów w górnym brzegu oczodołu i ich stosunek wzajemny różni się znacznie u poszczególnych grup rasowych.

6. Na czaszkach ludzkich na *margo supraorbitalis* im dalej na zewnątrz od linii środkowej znajduje się ślad od pęczka naczyniowo-nerwowego, tem częściej bywa to otwór a nie wcięcie. Powyższe zjawisko może być wytłómaczone, — o ile otwory nad oczodołem u człowieka tworzą się w sposób podobny, jak u małp (punkt 2), — przez bardziej poziomy przebieg więzadła okalającego od zewnątrz pęczek naczyniowo-nerwowy, a więc i łatwiejsze jego zwapnienie w pobliżu krawędzi kostnej.

7. Ilość otworów podoczodołowych u małp jest zmienna. Największą ilość wspomnianych otworów posiadają małpy wążkonose, a zwłaszcza rodzina *Cynocephalus* (do 9-ciu otworów).

8. Kanał podoczodołowy występuje w szeregu naczelnych po raz pierwszy u człowieka; w oczodołach wszystkich małp istnieją rynienki dla tętnicy i nerwu podoczodołowego.

9. *Canalis infraorbitalis* na czaszkach ludzkich wykazuje duże różnice rasowe, dotyczące długości samego kanału (stosunek części przykrytej do rynienki).

10. Zwiększona ilość otworów podoczodołowych u człowieka nie jest zależna od wczesnego podziału nerwu podoczodołowego, gdyż nerw ten u człowieka dzieli się na gałązki końcowe już przy szparze oczodołowej dolnej.

11. Badanie mikroskopowe *marginis infraorbitalis* u małpy wykazało, że przy dużej ilości otworów podoczodołowych w każdym otworze znajduje się prócz nerwu żyła; być może rozgałęzienia żylna są przyczyną powodującą tworzenie się zwiększonej ilości otworów.

* * *

Czuję się w obowiązku wyrazić moją głęboką wdzięczność panu Prof. Verneau, dyrektorowi *Laboratoire de l'Anthropologie Humaine* w *Muséum d'Histoire Naturelle* w Paryżu za pozwole nie wykorzystania dla moich badań zbiorów czaszek ludzkich oraz p. Prof. R. Anthony, dyrektorowi *Laboratoire d'Anatomie Comparée* tegoż muzeum i p. H. Neuville za pozwolenie zbadania zbiorów czaszek małpich.

Tabela zbadanych przezemnie czaszek ludzkich znajdujących się w *Laboratoire d'Anthropologie Humaine* w Paryżu.

Azjatyckie plemiona różne:

Nr. Nr.:

12320, 12324, 12327, 17782, 17779, 19777, 19776, 17571, 17575,
12317, 17050, 12325, 17781, 17049, 19778, 19781, 17570, 17573,
12321, 12323, 12326, 17780, 17777, 19782, 19784, 17576,
12322, 12328, 17047, 17778, 19780, 17048, 17577, 17574,

(oraz jedna czaszka bez numeru).

Indianie Ameryki południowej:

Nr. Nr.:

18095, 18105, 18073, 18317, 18385, 18200, 18232, 18163, 18091,
18099, 18109, 18074, 18312, 18365, 18230, 18234, 18120, 18092,
18087, 18083, 18075, 18280, 18367, 18166, 18240, 18149, 18084,
18093, 18079, 18111, 18325, 18397, 18690, 18179, 18160, 18085,
18094, 18078, 18113, 18297, 18398, 18167, 18168, 18123, 18086,
18096, 18081, 18112, 18290, 18236, 18180, 18184, 18144, 18097,
18104, 18068, 18119, 18322, 18226, 18277, 18183, 18145, 18098,
18102, 18069, 18117, 18388, 18191, 18310, 18143, 18146, 18115,
18100, 18070, 18114, 18384, 18192, 18190, 18140, 18088, 18110,
18101, 18071, 18116, 18323, 18244, 18184, 18162, 18089,
18106, 18072, 18118, 18324, 18243, 18231, 18158, 18090,
(oraz 12 czaszek bez numerów).

Afrykańskie plemiona różne:

Nr. Nr.:

17555, 17976, 17286, 17276, 17584, 17587, 18446, 18453
17556, 17957, 17607, 17565, 17585, 17588, 18451,
17557, 17981, 17274, 17567, 17586, 17285, 18452,
(oraz 2 czaszki bez numerów).

Mieszkańcy wysp Kanaryjskich:

Nr. Nr.:

6403, 7740, 6402, 6397, 6249, 4668, 6243, 6286,
7736, 6339, 6396, 6256, 6356, 6255, 6279, 6292,
(oraz 11 czaszek bez numerów).

Mieszkańcy Filipin:

Nr. Nr. 1883 oraz 9 czaszek nienumerowanych.

Australijczycy z kontynentu:

Nr. Nr.:

1511, 4759, 5327, 4763, 5328, 1526, 1525, 4764, 3628, 4765,
5325, 5326, 5329, 1507, 4460, 1506, 5330, 4665, 3616,
(oraz 3 czaszki bez numeru).

Tasmańczycy:

Nr. Nr.: 3619, 972, 3638, 4767, 4768, 4766, 1505, 1503.

Melanezyjczycy:

Nr. Nr.:

6859, 9794, 9252, 7983, 7999, 7991, 8000, 18493, 15884, 15882,
6861, 6860, 8015, 8023, 8012, 9198, 8013, 15881, 18442, 18443,
9278, 9268, 7993, 7987, 7980, 7988, 17886, 15883, 15880,
(oraz 6 czaszek bez numerów).

Józef Grzybowski.

Etude sur les échancrures et les trous susorbitaires et sur les trous sousorbitaires chez les Primates.

Présenté par E. L o t h.

Résumé.

1. Les trous dans le bord supérieur de l'orbite constituent un phénomène typique pour l'homme. Chez les singes on ne les trouve qu'exceptionnellement.

2. Les trous susorbitaires des singes proviennent de la calcination du ligament allant du bord externe de l'échancrure sus-orbitaire primitive jusqu'à l'angle interne de l'orbite, et de la calcination des fibres ligamentaires, qui se détachent du ligament sus — dit et qui se dirigent en haut et médialement jusqu'au bord supérieur de l'orbite.

3. Le faisceau vasculo — nerveux sus-orbitaire se trouve chez les singes à côté du faisceau vasculo — nerveux frontal. Tous deux sont logés dans une ou deux échancrures, rarement dans une échancrure et un trou contigu.

C'est seulement chez l'homme qu'ils s'écartent plus ou moins l'un de l'autre suivant le sujet et c'est la cause de l'apparition d'un plus grand nombre de trous et d'échancrures dans le bord supérieur de l'orbite.

4. Le nombre et les places des trous et les échancrures sus orbitaires de l'homme sont très variables, c'est pourquoi en les étudiant sur des crânes on commet inévitablement de nombreuses erreurs.

5. Le nombre des trous et des échancrures dans le bord supérieur de l'orbite est fort variable suivant les différentes races humaines.

6. Plus les traces du faisceau vasculo-nerveux sont à la partie extérieure de l'orbite, plus elles affectent la forme de trous; rarement elles se présentent en échancrures.

Ce phénomène pourrait s'expliquer (si les trous susorbitaires de l'homme se formaient comme chez les singes — 2) par la calcination plus rapide du ligament qui entoure la face externe du faisceau vasculo — nerveux. Si ce faisceau se trouve loin de la ligne médiane, son ligament a un parcours plus horizontal, plus rapproché du bord de l'orbite. Dans ce cas le ligament à proximité du tissu osseux peut se calciner très vite.

7. Le nombre des trous sousorbitaires chez les singes est fort variable. C'est chez les *Catarrhiniens* que je les ai trouvés en plus grand nombre. (*Cynocephale* — jusqu'à 9).

8. Dans les Primates le canal sousorbitaire se trouve pour la première fois chez l'homme. Les singes, même les anthropoïdes possèdent une ou plusieurs gouttières sous-orbitaires.

9. Chez l'homme la longueur du canal sousorbitaire varie beaucoup selon les races (longueur du canal par rapport à celle de la gouttière chez un même sujet).

10. Le nombre des trous sousorbitaires ne dépend pas de la ramification précoce du nerf sousorbitaire. Ce nerf se divise en branches terminales chez l'homme presque toujours près de la fente orbitale inférieure (*fissura orbitalis inferior*).

11. L'examen histologique du bord inférieur de l'orbite des singes (*Cynocephales*) a montré que par chaque trou sousorbitaire passe un rameau nerveux et une veine. C'est peut-être la présence de cette veine qui provoque la formation des trous supplémentaires. (Loth-Niemirycz, Cutore, Orłowski)

* * *

Une grande partie de mes observations ont été faites à Paris au Laboratoire d'Anatomie Comparée et au Laboratoire d'Anthropologie. Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à M. le Prof. R. Anthony, à M. H. Neuville et à M. le Docteur Verneau pour l'extrême obligeance qu'ils ont eue de m'autoriser à prendre mes notes dans les Laboratoires du Muséum.

PIŚMIENNICTWO.

1. Adachi B. Zeitschr. f. Morphol. u. Anthrop. Bd. VII. 1904 Die Orbita u. die Hauptmasse des Schädels der Japaner u. die Methode der Orbitalmessung.
2. Calori L. Sulle anomalie del canale e del nervo sotto orbitale ecc. Bologna. 1874.
3. Cutore G. Sulla molteplicita di canali precondiloidei. Arch. Ital. di Anat. e di Embr. Vol. XXIII. fasc. 3. 1926.
4. d'Este. Le incisure i forami e canali sovorbitari. Roma. 1889 (cit. Le Double).
5. Gruber W. Ueber die Infraorbitalkanäle bei dem Menschen u. bei den Säugethieren. Mem. de l'Academie Impériale des Sciences de St. Petersburg. VII serie T. XXI. Nr. I. 1873.
6. Hovélaque A. Les nerfs craniens. Paris. 1923.
7. Königstein. Notizen zur Anatomie u. Physiol. der Orbita. Beiträge zur Augenheilkunde. H. XXV. 1896. (cit. Adachi).
8. Krause C. Handbuch d. menschl. Anatomie. Hannover 1833 (cit. Le Double).
9. Loth-Niemirycz J. Badania anatomiczne i antropologiczne nad kanałem wyrostków poprzecznych (canalis transversarius) kręgów szyjowych człowieka i małp. Prace Tow. Nauk. Warsz. Wydz. III. 1916.
10. Le Double A. F. Traité des variations des os du crane de l'homme Paris. 1903. oraz Paris 1906.
11. Lotze. Handbuch der anat. Variet. p. 67. Hannover 1880. (cit. W. Krause).
12. Orłowski M. Zagadnienie kanału wyrostków poprzecznych kręgów piersiowych i lędźwiowych i kilka rzadkich odmian kręgów ludzkich. Kosmos. T. 50. Zesz. IV. 1925.
13. Poirier P. Trait. d'anat. humaine. 2-edit. T. I. p. 436. 1899.
14. Török. Die Orbita bei den Primaten, Korr. Blatt. d. deutsch. Ges. f. Anthrop., Ethn. u. Urg. 1881 (cit. Adachi)
15. Zwiback S. Dissertatio inauguralis. Königsberg. 1900.

L. Wertenstein.

Nowa metoda wyznaczania objętości 1 curie radonu.

Objętość jednego curie radonu t. j. (ilości emanacji radu w równowadze z 1 g radu) jest jedną z najważniejszych stałych nauki o promieniotwórczości. Z wartości stałej tej wyliczyć możemy okres życia radu θ , lub, co na jedno wychodzi, liczbę ν cząsteczek α wysyłanych w ciągu sekundy przez 1 g radu. Związek między temi stałemi jest następujący.

Niech będzie V_0 objętość jednego curie radonu w warunkach normalnych, N liczba cząsteczek gazu doskonałego w 1 cm³ w warunkach normalnych, M liczba cząsteczek w gram-cząsteczce, λ_r i λ_R stałe radioaktywne radonu i radu, $\theta_r = \frac{1}{\lambda_r}$, i $\theta_R = \frac{1}{\lambda_R}$ okresu życia obu tych substancji.

Mamy

$$V_0 = \frac{\nu}{\lambda_r N} = \frac{M \lambda_R}{226 N \lambda_r} = \frac{M}{226 N} \frac{\theta_r}{\theta_R} \dots \quad (1)$$

Ponieważ stałe λ_r , N , M są znane z wielką dokładnością, widzimy że wzory (1) pozwalają na wyliczenie dwu jakichkolwiek z pośród stałych V_0 , ν , λ_R , jeżeli jedną z nich wyznaczymy na drodze doświadczalnej.

Pierwsze wyznaczenia stałej V_0 zawdzięczamy Rutherford'owi¹⁾, Debiernie'owi oraz Ramsay'owi. Badacze ci otrzymali wyniki zgodne; a mianowicie objętość jednego curie radonu wynosi według nich 0,6 mm³ pod ciśnieniem normalnem i w temperaturze 0°. Wyliczona stąd wartość ν stała w doskonałej zgodności z wartością ν wyznaczoną na drodze doświadczalnej. Należy jednak wziąć na uwagę, że w epoce, gdy prace te były wykonane, stałe podstawowe λ_r , N , i M nie były znane z tą samą dokładnością, co obecnie. Uwaga ta stosuje się jeszcze w wyższym stopniu do sposobów wyznaczania stałej ν . Jeżeli pójdziemy dro-

¹⁾ Rutherford, Phil Mag. **16**, 300, 1908; Debiernie, C. R. 1264, 1909; Gray and Ramsay, Trans Chem. Soc. v. 4, **95**, 1073, 1909.

gą odwrotną, mianowicie spróbujemy wyliczyć V_0 , przyjmując za podstawę najlepsze nowoczesne oznaczenia stałych, wchodzących do wzoru (1), t. j. $N=2,705 \cdot 10^{19}$, $\lambda_r=2,1 \cdot 10^{-5}$, $\nu=3,72 \cdot 10^{10}$, otrzymujemy $V_0=0,652 \text{ mm}^3$, a więc blisko o 10% więcej, niż liczby znalezione przez Rutherford'a, Debiere'na i Ramsay'a.

Metody stosowane przez tych badaczy były w zasadzie podobne i polegały na ścisaniu rtęcią w wycechowanej rurce włoskowej starannie oczyszczonego radonu. Ujemną ich stroną było to, że nie dawały pewności, czy użyty do wyznaczenia radon był istotnie czysty. W dodatku objętość radonu w rurkach włoskowych ulega znacznemu zmniejszeniu w ciągu pierwszych kilku godzin po przyrządzeniu, wobec czego czyni się z konieczności założenie, nieco dowolne, że objętość ostateczna jest objętością czystego radonu.

Z powyższych powodów wydało mi się rzeczą interesującą ponowne podjęcie tego zagadnienia przy użyciu metody, która pozwoliłaby dokonać analizy otrzymanego gazu. Ze względu na niezmiernie drobną jego ilość wchodzić tu mogły w grę niemal wyłącznie metody, oparte na własnościach bardzo rozrzedzonych gazowych. Jeśli zważymy, że ciśnienie 100 millicurie radonu w objętości 100 cm^3 wynosi 0,65 bara, dojdziemy do wniosku, że mamy tu właśnie do czynienia z tą dziedziną ciśnień, w której stosują się z całą dokładnością prawa, rządzące zachowaniem się gazów bardzo rozrzedzonych.

Metoda, jaką obrałem, polegała na jednoczesnym pomiarze ciśnienia i współczynnika tarcia zewnętrznego. Współczynnik ten w czystym bardzo rozrzedzonym gazie jest proporcjonalny do ciśnienia i do pierwiastka kwadratowego z ciężaru cząsteczkowego; w mieszaninie gazów, do sumy iloczynów z pierwiastków kwadratowych z ciężaru cząsteczkowego składników przez odpowiadające im ciśnienia cząstkowe. Ciśnienie wyznaczałem zapomocą skalibrowanej miarki Knudsen'a (zwanej także manometrem absolutnym); tarcie badałem, obserwując zanik drgań nitki kwarcowej, zawieszonej w badanym gazie. Odwrotność czasu, w ciągu którego amplituda drgań zmniejsza się w oznaczonym stosunku, (nazywać będziemy tą wielkość „tłumieniem”) jest wprost proporcjonalna do współczynnika tarcia. Niech będzie p ciśnienie całkowite, $p_r, p_x, p_y \dots$ ciśnienia cząstkowe radonu i jego domieszek M_r, M_x, M_y

ich ciężary cząsteczkowe, d tłumienie w mieszaninie gazów. Mieć będziemy:

$$\begin{aligned} p &= p_r + p_x + p_y \dots \\ d &= a_r p_r + a_x p_x + a_y p_y \dots \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $a_r = c \sqrt{M}$, $a_x = c \sqrt{M_x} \dots$

Ponieważ stała c może być wyznaczona na drodze doświadczalnej, widzimy, że z równań (1) wyliczyć możemy ciśnienie cząstkowe radonu p_r , pod warunkiem: a) że liczba składników wynosi 2, b) po drugie, że ciężary cząstkowe ich znane.

Pierwsza część niniejszej pracy polegała na zbadaniu, czy warunek ów jest spełniony. Ponieważ ciężar cząsteczkowy radonu jest znany, przeto zapadnienie polegało na wyjaśnieniu natury domieszek towarzyszących oczyszczonemu radonowi.

Zadanie ułatwiała okoliczność, że znamy dość dokładnie istotę tych domieszek *przed* procesem oczyszczania — jeśli radon pobieramy z roztworu radu, zawartego w szczelnym, starannie ewakuowanym naczyniu: Są nimi: wodór, tlen, bezwodnik węglowy; oraz, według wszelkiego prawdopodobieństwa, nieco węglowodorów. Dwa pierwsze pochodzą z rozkładu wody przez promienie α , pozostałe są wynikiem działania tych promieni na substancje organiczne (smary do kranów, kauczuk i t. p.) użyte do uszczelnienia aparatury. W zasadzie uniknięcie gazów grupy drugiej jest możliwe przez zbudowanie aparatury, uszczelnionej wyłącznie przy pomocy szkła i rtęci. Ponieważ, jak to za chwilę zobaczymy, główną trudnością w zdobywaniu czystego radonu jest obecność gazów tej grupy, przeto konstrukcja taka byłaby bardzo celowa. Jednakże w większości laboratoriów roztwór radu przechowywany bywa w aparatach uszczelnianych smarami, i ze względu na wielką wartość radu, istnieje niechęć w kierunku dokonywania skomplikowanych przeróbek. Musimy więc — najczęściej — uważać podany wyżej skład mieszaniny „radonowej”, za fakt dany przez warunki doświadczenia.

W celu ustalenia, czy i które z tych gazów pozostają wraz z radonem po ukończeniu procesu oczyszczania, wprowadzałem do aparatury, zamiast radonu, małe ilości każdego z tych gazów bez radonu i poddawałem tym samym czynnościom które prowadzą o sporządzania czystego radonu. Kryterjum skuteczności

tych sposobów byłoby oczywiście zupełne pochłonięcie gazu, objętość otrzymana w kapilarze mierniczej powinna być znikomo mała.

Sposoby te są dwojakie: chemiczne i fizyczne. Wodór i węglowodory spala się ogrzanym tlenkiem miedzi, tlen pochłania się ogrzaną miedzią, parę wodną — bezwodnikiem fosforowym, zaś bezwodnik węglowy — wodorotlenkiem potasowym.

Od reakcji chemicznych nie można żądać za wiele. Objętość czystego radonu, przy użyciu nawet znacznej ilości np. 100 millicurie jest mniejsza od $0,1 \text{ mm}^3$. Musimy liczyć się z tem, że po najenergiczniejszej nawet reakcji pozostanie niepochłonięta jeszcze ilość obcego gazu, tego samego porządku wielkości, co ilość radonu.

Dlatego też w ostatecznej instancji odwołujemy się do zabiegu o charakterze fizycznym, mianowicie zużytkujemy własność radonu kondensowania się w temperaturze ciepłego powietrza. Radon przedystylowujemy do części aparatury o możliwie małej objętości, dzięki czemu zmniejszamy w wybitny sposób względną ilość zanieczyszczeń. Przez kilkakrotne łączenie aparatury z szybko działającą pompą usuwamy nieskroplone gazy, poczem oddzielamy rtęcią część aparatury zawierającą radon, i po ogrzaniu jej do temperatury pokojowej, przez co radon przechodzi znów w stan gazu, ściskamy go w kapilarze.

Jak widzimy, metoda ta nie wymaga absolutnej skuteczności procesów chemicznych. Prowadzi ona jednak do celu jedynie pod warunkiem, że radon pozbawiony został w *zupełności* składników, ulegających skropleniu w ciekłym powietrzu. Na takie więc składniki należało zwrócić szczególniejszą uwagę. Najważniejszym z nich jest bezwodnik węglowy, i dlatego przeprowadziłem szereg doświadczeń z tym gazem. Miarka Knudsen'a, dolutowana do aparatury, pozwalała mi badać postępy pochłaniania bezwodnika węglowego przez wodorotlenek potasowy.

Stwierdziłem przytem fakt nieoczekiwany, który wyjaśnił mi przyczynę trudności otrzymywania czystego radonu. Oto ilość CO_2 , zebranego w kapilarze tym samym sposobem jakim koncentruje się radon, tj. przez oddystylowanie do części aparatury połączonej z kapilarą, jest naogół znacznie większa od tej, jaka istnieje w całej aparaturze przed dystylacją.

Ilości te wyznaczałem; przed dystylacją, mnożąc objętość (50 cm) przez ciśnienie wskazane przez miarkę Knudsen'a;

w kapilarze, mnożąc jej objętość przez ciśnienie, wyliczone z wysokości słupa rtęci, ściskającego gaz w kapilarze. Typowym jest przykład następujący: ilość przed dystylacją $25 \text{ cm}^3 \times \text{bar}$ ($0.025 \text{ mm}^3 =$ objętości 40 millicurie radonu); ilość w kapilarze $250 \text{ cm}^3 \times \text{bar}$ (= objętości 400 milicurie radonu).

Przykład ten oznacza, że gdyby aparatura zawierała 100 millicurie radonu, to gaz przed dystylacją zawierałby $71,5\%$, zaś w kapilarze zaledwie 20% radonu. Przykład ten odpowiada zatem całkowicie *nieudanej* próbie oczyszczenia radonu!

Wyjaśnienie tego napozór samorzutnego powstawania bezwodnika węglowego jest bardzo proste. Znaczna ilość tego gazu ulega adsorpcji na szkle. Podczas dystylacji koncentrujemy nie tylko gaz, znajdujący się w stanie swobodnym, ale również wypompowujemy niejako, dzięki bardzo niskiej prężności pary CO_2 w temperaturze ciekłego powietrza, gaz uwięziony na szkle.

Pod względem jakościowym nie ma w tem nic nowego, gdyż od dawna wiadomo, że CO_2 ulega adsorpcji na szkle. Uderzającymi są tylko liczby; znalezione przezemnie adsorpcja jest kilkaset razy większa od tej, jakiej należało się spodziewać, ekstrapolując do dziedziny bardzo małych ciśnień wyniki otrzymane przez innych badaczy, w szczególności przez Langmuir'a¹⁾.

Sprzeczność ta będzie przedmiotem pracy osobnej. Na tem miejscu wystarczy stwierdzić, 1) że koncentrując adsorbowany gaz przez dystylację, zastosowujemy do wykrycia adsorpcji sposób znacznie czulszy od tych, jakie używane były poprzednio, 2) że Langmuir badał adsorpcję *odwracalną*, tj. tę, która wyraża się w ustalających się w ciągu bardzo krótkiego czasu stanach równowagi, podczas gdy w mojem doświadczeniu szkło pozostaje w zetknięciu z CO_2 przez czas dłuższy, dzięki czemu może się wytworzyć warstwa adsorbowana, silniej związana, jak gdyby głębiej w powierzchniowych elementach adsorbenta osadzona.

Osobne doświadczenia wykazały że odkryta przezemnie adsorbacja CO_2 posiada w istocie cechy zjawiska, *praktycznie* biorąc, nieodwracalnego, t. j. nie prowadzącego do wyraźnych, szybko ustalających się stanów równowagi. Podczas dystylacji CO_2 wydziela się z szkła bardzo powoli; czas, w ciągu którego

¹⁾ I. Langmuir, Journ. Am. Chem. Soc., **40**, 1361, 1918.

szkło oddaje całą swą zawartość, jest porządku wielkości kilkunastu godzin.

Jasnym jest, że warunkiem powodzenia doświadczenia z radonem jest właśnie owo opróżnienie szkła z CO_2 . Na szczęście opróżnienie to nie wymaga żadnych specjalnych zabiegów. Umieszczony w aparaturze wodorotlenek potasowy spełnia tę rolę skutecznie; obecność jego ma skutek ten sam, co obecność powierzchni oziębionej do temperatury ciepłego powietrza. Ale działanie jest w obu przypadkach równie powolne.

Jeżeli ilość pozostałego CO_2 wyznaczamy kilkakrotnie, w różnych odstępach czasu, metodą dystylacji, wówczas stwierdzamy, że ilość ta maleje stale. Dopiero po kilku godzinach jednak ilość ta staje się istotnie mała wobec tej ilości radonu, z jaką zazwyczaj ma się do czynienia. Teoretycznie biorąc, prędkość pochłaniania CO_2 przez KOH jest tak wielka, że gaz ten powinien zniknąć, zanim szkło zdoła się nim nasycić. W praktyce jednak nie sposób uniknąć conajmniej częściowego pokrycia KOH warstwą cząsteczek węgla potasowego, wskutek czego pochłanianie staje się powolne, a zjawiska adsorpcyjne uzyskują czas potrzebny na ich rozwinięcie.

Wynika stąd, że w doświadczeniu z radonem koniecznym jest pozostawienie mieszaniny gazowej na dłuższy czas w zetknięciu z KOH . Jest rzeczy wskazaną, aby czas ten wynosił ok. 15—18 godzin. Nawet i wtedy jednak nie można mieć absolutnej pewności, że bezwodnik węglowy został usunięty całkowicie, tak iż trzeba liczyć się z tem, że po sporządzeniu radonu zawierać będzie pewną domieszkę CO_2 .

Czy istnieją inne jeszcze domieszki, które metoda dystylacji koncentruje w sposób podobny? Jak wspominałem wyżej, możliwa jest obecność w radonie nieoczyszczonym węglowodorów. Ponieważ niektóre węglowodory, np. etylen, skraplają się w ciepłym powietrzu, przeto możliwość domieszki tego typu w radonie oczyszczonym nie jest wykluczona a priori. W celu rozstrzygnięcia tej sprawy wykonałem kilka doświadczeń z gazem oświetlającym, który zawiera wielką ilość i różnorodność węglowodorów. Okazało się jednak, że gaz oświetlający znika zupełnie w aparaturze oczyszczającej. Możemy zatem twierdzić że CO_2 jest jedynym gazem *trwałym*, który w warunkach doświadczenia skrapla się z radonem.

Nie znaczy to aby stanowił on *jedyną* domieszkę oczyszczonego radonu. Znajdziemy w nim zawsze 1) pary wody i rtęci, 2) ślady gazów nieskroplonych, bądź dlatego że nie zostały całkowicie wypompowane, bądź przez to, że, — jak o tem dowiemy się szczegółowo w dalszym ciągu — powstają one pod wpływem działania promieni α na szkło.

Ponieważ stosowalność opisanej wyżej metody analizy wymaga obecności jednej tylko domieszki o znanym ciężarze cząsteczkowym, przeto konieczną jest rzeczą 1) usunięcie par, 2) przeprowadzenie analizy tego składnika mieszaniny, który ulega skropleniu w temperaturze ciekłego powietrza.

Pierwszy cel osiągamy, doprowadzając oczyszczony radon do aparatury przez płuczkę, zanurzoną w kąpeli o temperaturze — 120° , gdyż w temperaturze tej pary wodna i rtęci posiadają prężność znikomo małą, zaś ani radon ani CO_2 skropleniu nie ulegają. Kąpiel taką sporządzamy najłatwiej, ogrzewając *bardzo małym* wydatkiem energii elektrycznej, naczynie Dewarowskie, zanurzone w ciekłym powietrzu.

Aby osiągnąć cel drugi, wyznaczamy a) całkowite ciśnienie (p_1) i tłumienie (d_1) mieszaniny, b) ciśnienie (p_a) i tłumienie (d_a), które pozostają w aparaturze, gdy małą część jej powierzchni oziębamy do temperatury ciekłego powietrza. Różnice $p_1 - p_a = \Delta p$ oraz $d_1 - d_a = \Delta d$ są ciśnieniem oraz tłumieniem radonu z bezwodnikiem węglowym. Wystarczy zatem podstawić do równości (1) wartość $\Delta p, \Delta d$, aby otrzymać wartość ciśnienia samego radonu (p_r), oraz wyznaczyć stopień jego czystości.

Aby wyliczyć z p_r objętość V_0 jednego curie radonu, posługujemy się wzorem

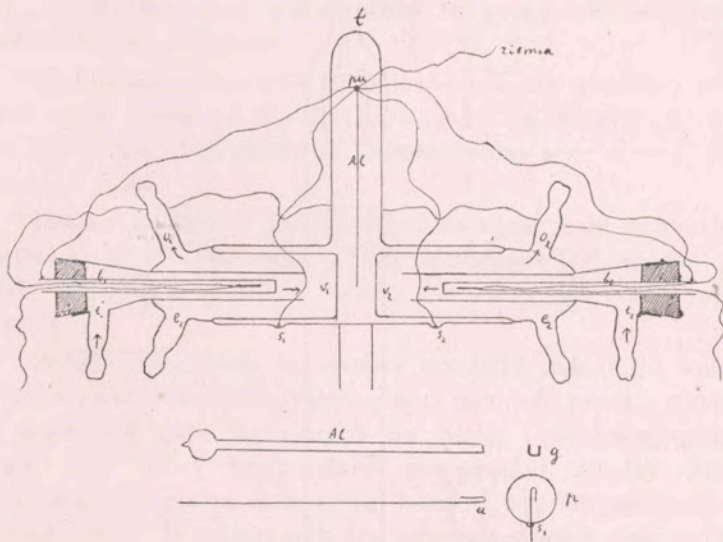
$$V_0 = \frac{p_r V \cdot 273}{(273 + t) \gamma \cdot 1,013 \cdot 10^6},$$

gdzie V jest objętością aparatury, t temperaturą, γ ilością radonu wyrażoną w curie, a wyznaczoną w sposób zwykły drogą porównania jego promieniowania γ z promieniowaniem γ wzoru radowego.

Do wyznaczenia wielkości p i d posługiwałem się, jak wspomniano wyżej, miarką Knudsen'a oraz aparatem z nitką kwarcową.

Miarka Knudsen'a przedstawiona jest na rys. 1. Listek Al, grubości $0,5 \mu$ o kształcie widocznym z Al, rys. 1, zawieszony

jest między płaskimi denkami naczynek v_1, v_2 , których temperaturę zmieniać można za pomocą wody krążącej przez rurki i_1, i_2, o_1, o_2 . Pomiaru różnicy temperatury między naczynkami dokonywamy za pomocą zakończeń pary termoelektrycznej, b_1, b_2 , odchylenie listku odczytujemy w mikroskopie. „Wskazaniem” π miarki jest iloraz z odchylenia, wyrażonego w podziałkach mikrometru przez różnicę temperatur, wyrażoną w podziałkach skali galwanometru.

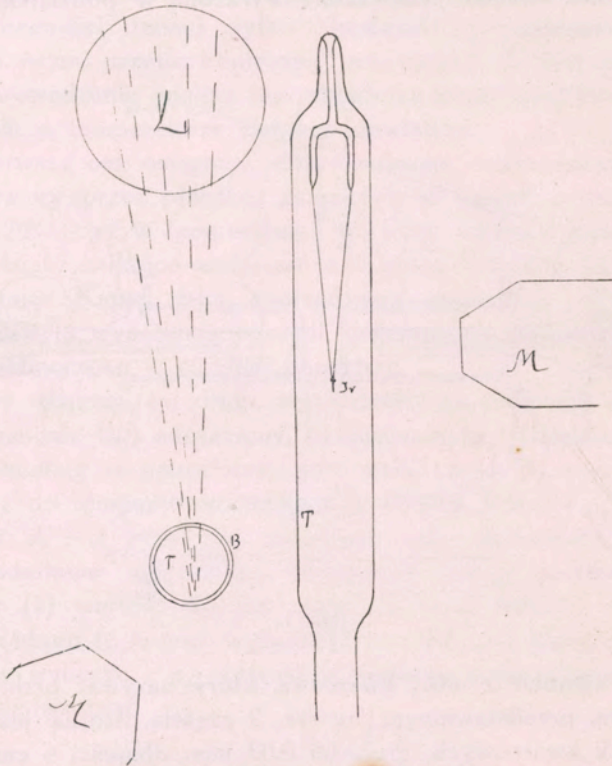


Rys. 1.

W aparacie z nitką kwarcową, który nazywać będą miarką tłumikową, przedstawionym na rys. 2 częścią istotną jest układ dwu nitek kwarcowych, grubości 0.03 mm, długości 6 cm, zlutowanych u dolnego końca pod ostrym kątem i wlutowanych górnymi końcami w widełki ze szkła ołowiowego wtopione w szczyt rurki cylindrycznej ze szkła zwykłego. Gdy wzbudzamy drgania, zbliżając magnes do dolnego końca do którego dolutowany jest maleńki drucik żelazny, koniec ten wykonywa drgania harmoniczne w płaszczyźnie symetrii. Tłumienie wyznaczamy, mierząc czas, w ciągu którego amplituda drgań zmniejsza się w oznaczonym stosunku. Do pomiarów amplitudy posługujemy się mikroskopem z mikrometryczną podziałką w okularze; przy stosownem oświetleniu układ drgający widzimy w postaci świecącego

pasma z ostremi brzegami; pasmo zwęża się stopniowo; połowa jego szerokości jest amplitudą. Tłumienie d definiujemy jako odwrotność czasu, wyrażonego w 10^5 sekund, w ciągu którego amplituda maleje w stosunku 1,2 do 1.

Celem wycechowania miarek łączymy je z miarką Mac-Leod'a, ędz y miarką Mac-Leod'a a miarkami Knudsen'a i tłumikową znaj-



Rys. 2.

duje się płuczka oziębiona do -120^0 celem wymrożenia par wody i rtęci. Cała aparatura może być połączona, zapomocą widełek rtęciowych, z pompą dyfuzyjną, lub z urządzeniami pomocniczymi, służącymi do wytwarzania małych ilości czystych chemicznie gazów. Do cechowania używałem wodoru, tlenu, bezwodnika węglowego i ksenonu.

Po zrobieniu jaknajlepszej próżni w aparaturze, odczytujemy ciśnienie p_0 na miarce Mac-Leod'a, oraz wskazania π_0

i d_0 miarek próżniowych; p_0 jest naogół niedostrzegalnie małe, π_0 i d_0 odpowiadają w dobrych warunkach obecności gazów pod ciśnieniem kilku setnych bara. Gazami temi są ślady par rtęci i wody, których miarka Mac-Leod'a nie wykazuje.

Następnie wprowadzamy do aparatury jeden z wspomnianych poprzednio gazów, pod ciśnieniem 2—3 barów. i odczytujemy wskazania p_1 , π_1 , d_1 , wszystkich trzech przyrządów. Wypompowujemy nieco gazy; otrzymujemy nowy szereg wartości p_2 , π_2 , d_2 . Powtarzamy kilkakrotnie te czynności, aż ciśnienie spadnie do ok. 0.5 bara.

Po porównaniu miarek próżniowych w ten sposób z miarką Mac-Leod'a rysujemy dla każdego gazu x krzywe $\pi_x = f(p)$ oraz $d_x = \varphi(p)$. Zależności są liniowe, mamy więc $\pi_x = k_x p + \pi_0$ $d_x = a_x p + d_0$.

Istnieje pogląd że miarka Knudsen'a jest manometrem absolutnym, t. j. że wskazania jej są niezależne od natury gazu. Gdyby tak było, k_x powinno by mieć dla wszystkich gazów wartość tę samą.

Bliższe rozważenie tej sprawy prowadzi jednak do wniosku, że siła wywarta na listek zależną być musi od energii kinetycznej cząsteczek gazu, padających na listek i odskakujących od niego. Dla danej temperatury powierzchni, między którymi listek wisi, energia ta zmienia się wraz z współczynnikiem akomodacji gazu. Współczynnik ten odgrywa ważną rolę w przewodnictwie cieplnym bardzo rozrzedzonych gazów, wzrasta on wraz z ciężarem cząsteczkowym; wynosi dla wodoru 0.28, dla tlenu 0.8, dla bezwodnika węglowego 0.87. Największą wartość znaleziono w parze rtęci; wynosi ona 0.93. Z definicji współczynnika wynosi, że musi on być mniejszy od jednostki.

Teoria miarki Knudsen'a wskazuje że wskazanie jej, t. j. stała k_x wzrastać musi wraz z współczynnikiem akomodacji. Zgodnie z temi przewidywaniami otrzymałem dla czterech wymienionych gazów: $k_{H_2} : k_{O_2} : k_{CO_2} : k_{Xe} = 79 : 100 : 104 : 105$.

W interesującym nas zagadnieniu musimy znać stałą k_r dla radonu. Nie możemy oczywiście wyznaczyć jej wprost. Widzimy jednak że stałe k dla trzech ostatnich gazów różnią się niewiele, przyjmując na k_r wartość o 1% większą od k_x , nie popełnimy zapewne błędu większego od 1%, zwłaszcza że własności radonu

muszą być bardzo zbliżone do własności ksenonu, jego najbliższego homologa.

Wyliczona w ten sposób czułość miarki Knudsen'a wynosiła dla radonu: z listkiem, użytym w trzech pierwszych serjach doświadczeń 0,0707 podziałek mikroskopu na 1 bar i 1 podziałkę skali galwanometru, z listkiem cieńszym i dłuższym, użytym w serii ostatniej, 0,096 podziałek mikroskopu na 1 bar i 1 podziałkę skali galwanometru.

Podobnie i wyniki cechowania miarki tłumikowej nie dają nam stałej α_r dla radonu bezpośrednio. Możemy ją jednak wyliczyć z którejkolwiek z wartości eksperymentalnych α_x , przy pomocy wzoru, podanego przez Knudsen'a¹⁾:

$$\alpha_r = \alpha_x \sqrt{\frac{M_r}{M_x}}$$

Kontrolą poprawności tego sposobu wyliczenia α_r będzie zgodność wartości otrzymanych z eksperymentalnych wartości α_x dla czterech wymienionych gazów. W tablicy 1 mamy te wyliczenia zestawione.

Gaz, ciężar cząsteczkowy .	α_x	α_r
Wodór, 2,018	111,5	1175
Tlen, 32	442	1168
Bezwodnik węglowy, 44 . .	506	1137
Ksenon, 130	890	1160

Zgodność wartości ekstrapolowanych, umieszczonych w kolumnie III-ej jest bardzo dobra. Do obliczenia wyników doświadczeń posługiwałem się wartością $\alpha_r = 1164$, t. j. średnią arytmetyczną z wartości, wynikających z cechowania tlenem i kse-

¹⁾ M. Knudsen, Ann. d. Phys. 44, 525, 1914.

nonem, które wydawały mi się najdokładniejszymi. Dla bezwodnika węglowego przyjąłem wartość $\alpha_c = 517$ wyliczoną z tych samych danych, która wydawała mi się pewniejszą od wartości eksperymentalnej 506, a to ze względu na opisaną poprzednio łatwość, z jaką CO_2 ulega adsorpcji. Adsorpcja może prowadzić do pewnych błędów w wyznaczaniu ciśnienia tego gazu.

W równaniach (1) zakładaliśmy milcząco, że wskazania Knudsen'a są niezależne od natury gazu. W rzeczywistości doświadczenie daje nam nie Δp , lecz $\Delta\pi = k_c p_c + k_r p_r$. Kładąc w myśl rozważań str. 513, $k_c = 0,98 k_r$ przepisujemy równania (1)

$$\begin{aligned} \Delta p' &= \frac{\Delta\pi}{k_r} = p_r + 0,98 p_c & \dots & \quad (1 \text{ bis}) \\ \Delta d &= 1164 p_r + 517 k_c \end{aligned}$$

$\Delta p'$ jest „pozornym” przyrostem ciśnienia, t. j. przyrostem ciśnienia, któremu odpowiadałaby różnica $\Delta\pi$ wskazań miarki Knudsen'a, gdyby gaz był czystym radonem. Z równań (1 bis) otrzymujemy, pisząc dla prostoty Δp zamiast $\Delta p'$

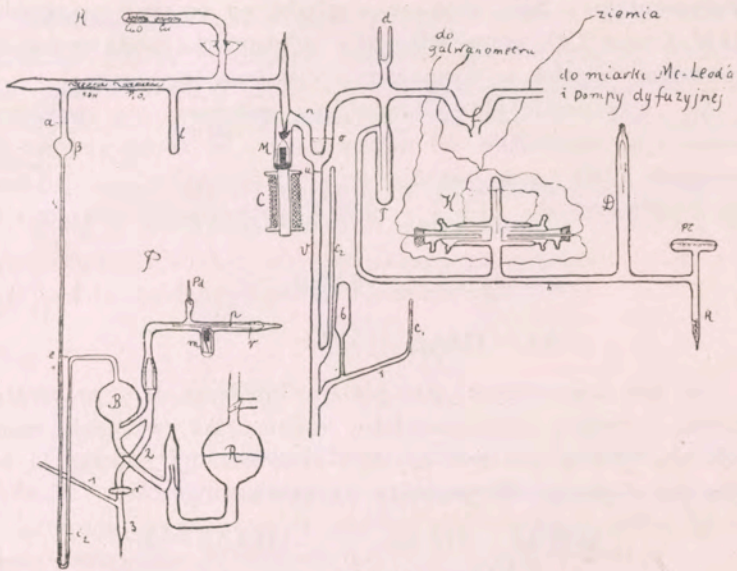
$$p_r = \frac{0,98 \Delta d - 517 \Delta p}{623}, \quad p_c = \frac{1164 \Delta p - \Delta d}{623} \dots \quad (2)$$

Wyjaśnwszy sposób użycia miarek i zużytkowania ich wskazań, przejdę teraz do opisu aparatury i doświadczeń.

Aparatura została skonstruowana w ten sposób, że pozwalała na wprowadzenie oczyszczonego radonu bez uprzedniego otwierania aparatury i wpuszczania do niej powietrza. Jest to szczególnie istotny, gdyż ze względu na małe ciśnienie wprowadzanych gazów (mniejsze od 1 bara) konieczną jest rzeczą, by w aparaturze istniała przed wprowadzeniem radonu bardzo dobra próżnia, t. j. nie tylko bardzo niskie ciśnienie (porządku 0,01 bara), ale także i taki stan powierzchni ścianek, w którym nie wydzielają one samorzutnie gazów; osiągnięcie tego stanu wymaga długiego czasu; niszczy go wpuszczenie do aparatury powietrza.

Jak widać z rys. 3, do części aparatury, zawierającej miarki (K) i (D) i płuczkę (T), (część „manometryczna”) dolutowano aparaturę do oczyszczania radonu (A) (część „puryfikacyjna”). Część puryfikacyjna zawiera KOH i P_2O_5 w łódeczkach szlanych, Cu i CuO w rurce pyreksowej, wreszcie rurkę I , którą można oziębiać w ciekłym powietrzu. Część puryfikacyjna może

być połączona z manometryczną zapomocą zamknięcia rtęciowego (*M*), otwieranego przez stosowne użycie sił elektromagnetycznych. Do części tej wpuszczamy z gruba oczyszczony radon za pomocą



Rys. 3.

pompy (*P*), podobnej w zasadzie do pompy Toeplera. Dzięki wysokości ramion wypełnionej rtęcią rurki w kształcie *U* łączącej pompę z częścią puryfikacyjną, możemy wpuszczać powietrze do kuli (*B*), podczas gdy cała pozostała aparatura trwa w stanie doskonałej próżni. Rureczkę *r* z cieniutkim wyciągniętym końcem, zawierającą z gruba oczyszczony radon (ok. 0.2 cm³ gaz), umieszczamy w poziomej rurce *p*, którą następnie zalutowujemy. Kulę *B* ewakuujemy osobną pompą, poczem tłuczemy rureczkę zapomocą prostego urządzenia elektromagnetycznego, i drogą łatwych do zrozumienia z rysunku, kolejno następujących po sobie ruchów rtęci w górę i w dół, uskutecznianych przez zmiany ciśnienia w zbiorniku (*R*), przierzucamy radon do części puryfikacyjnej. Zgodnie z uwagami str. 509, pozostawiamy radon w zetknięciu z reaktywami w ciągu 15—18 godzin, przyczem od czasu do czasu podnosimy temperaturę *Cu* i *CuO* do 600° na 15—30 minut.

Po upływie tego czasu, radon zawiera małą tylko domieszkę *CO*₂, natomiast dość znaczną jeszcze ilość gazów, nie ulegających

skropleniu w temperaturze ciekłego powietrza. Celem usunięcia tych gazów, nasuwamy Dewar z ciekłym powietrzem na rurkę l , poczem otwieramy kilkakrotnie, za każdym razem na 10 sekund, zamknięcie rtęciowe M , łącząc część puryfikacyjną z pompą dyfuzyjną, przylutowaną za widełkami rtęciowymi. Po skończeniu tej czynności oddzielamy pompę dyfuzyjną i przedystylowujemy radon do części manometrycznej, usuwając ciekłe powietrze z okolicy rurki l , a natomiast wlewając je do małego naczynka Dewarowskiego d . Podnosząc rtęć w rurce V (o której będzie mowa w dalszym ciągu), dokonywamy zamknięcia radonu w części manometrycznej.

Możemy teraz przystąpić do właściwych pomiarów. Korzystając z tego, że radon i CO_2 są skroplone na powierzchni Dewarka d wyznaczamy ciśnienie p_a i tłumienie d_a gazów nieskroplonych. Po wyparowaniu ciekłego powietrza i ogrzania Dewarta do temperatury pokojowej wyznaczamy ciśnienie całkowite p_1 i tłumienie całkowite d_1 . Otrzymujemy stąd wartości Δp i Δd , o których mowa była na str. Dowolną liczbę tych wartości otrzymać możemy, powtarzając wspomniane czynności, t. j. kolejno wymrażając radon i CO_2 , i przeprowadzając je ponownie w stan gazowy.

Wykonałem razem 4 serie doświadczeń. Dwie pierwsze miały charakter raczej orjentacyjny, pozwoliły one na wypracowanie wyżej opisanej techniki pomiarów, ponadto ujawniły pewne nieprzewidziane trudności doświadczalne.

Okazało się, że ciśnienie i tłumienie po wprowadzeniu radonu wzrasta dość szybko, tak iż podwaja się po upływie ok. 30 minut. Wzrost ten jest skutkiem wydzielania przez szkło gazów pod działaniem cząsteczek α . Analiza zapomocą metody tłumień oddała tu usługi nieocenione. Badając stosunek wzrostu tłumienia do wzrostu ciśnienia, mogłem ustalić, że wydzielający się gaz jest niemal czystym wodorem. Można więc było przyjąć, że nie zmienia on składu mieszaniny radonu z CO_2 , i dążyć do wyznaczenia ciśnienia Δp i tłumienia Δd tej mieszaniny. Było to możliwe jedynie na drodze interpolacji. Konstruowałem krzywe ciśnień całkowitych $p_1 = f(t)$, i tłumień całkowitych $d_1 = f(t)$, oraz krzywe podobne ciśnień i tłumień gazów nieskroplonych. Δp i Δd wyznaczałem, biorąc różnicę rzędnych dla tych samych wartości czasu t . Z uwagi na małą liczbę punktów (każda z czyn-

ności takich, jak wymrozenie lub odparowanie radonu, odczytywanie miarek i t. d., zabiera dużo czasu), bieg krzywych jest bardzo niepewny, niemniej dla orientacji podaję wyniki pierwszego doświadczenia.

Doświadczenie 1-sze, objętość aparatury $V=157$ cm, temperatura 19° .

Serja 1-sza — ilość radonu $\gamma=71,8$ mc.

$$p_r = 0,189; p_c = 0,261; \frac{p_r}{\Delta p_1} = 0,528$$

$$V_0 = 5,83 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$$

Serja 2-ga ilość radonu $\gamma=70$ mc (podczas jednej z czynności pomocniczych nastąpiła strata 1,8 mc radonu).

Pomiar 1-szy:

$$p_r = 0,323; p_c = 0,114; \frac{p_r}{\Delta p} = 0,744$$

$$V_0 = 6,68 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$$

Pomiar 2-gi:

$$p_r = 0,285; p_c = 0,180; \frac{p_r}{\Delta p} = 0,63$$

$$V_0 = 5,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3.$$

Widzimy, że pomimo wyraźnie niekorzystnych warunków doświadczenia, otrzymane wyniki są bardzo zbliżone do przewidywanych wartości V_0 . Fakt ten zachęcał do ulepszenia techniki doświadczenia. Należało przede wszystkim dążyć do zrealizowania stałości ciśnień, t. j. do usunięcia gazów wydzielanych przez szkło.

Analiza tłumikowa wskazywała drogę do rozwiązania zagadnienia. Jeśli gaz wydzielany jest wodorem, łatwo go spalić na ogrzanym tlenku miedzi; powstała para wodna powinna się skraplać w płuczce, oziębionej do -120° .

W myśl tego rozumowania, przylutowałem do aparatury rurkę Pt z wtopionym drucikiem platynowym, pokrytym przez elektrolizę miedzią, którą następnie utleniłem przez wyżarzenie w powietrzu.

Okazało się, że przez zastosowanie tego urządzenia można istotnie osiągnąć stałość warunków, niezbędną do otrzymania zgodnych i pewnych pomiarów. Fakt, że drogowskazem było ta

analiza tłumikowa, wzmacnia zaufanie do obranej w pracy tej metody, która właśnie na analizie tej jest oparta.

Nie odrazu jednak osiągnięto ten wynik. Potrzebne było sprecyzowanie warunków żarzenia nitki platynowej, pokrytej tlenkiem miedzi, oraz temperatury kąpieli płuczki. Dlatego też drugie doświadczenie, które wykonane było jeszcze niejako poomacku, dało wyniki częściowo tylko zadawalające. Wydzielanie gazów w tem doświadczeniu było dwa razy mniejsze; oznaczało to, że oksydacja wodoru zachodziła, nie była jednak kompletna. Poza tem, jak to wskazała analiza tłumikowa, pochodząca ze spalania wodoru para wodna częściowo tylko wymrożona była w płuczce. Pierwszą okoliczność tłumaczyłem zbyt niską temperaturą żarzenia tlenku miedzi; — drugą zbyt wysoką temperaturą kąpieli ochładzającej. W istocie w doświadczeniu tem temperatura kąpieli nastawiona była przypadkowo na — 105° ; zamiast jak zwykle na — 120° . Na szczegól ten nie zwróciłem należytej uwagi, sądząc że jest bez znaczenia, gdyż i w tej nawet temperaturze prężność pary wodnej wynosi zaledwie ok. 10^{-2} bara.

Z opisu doświadczeń trzeciego i czwartego dowiemy się, że interpretacja owych komplikacji doświadczalnych była słuszna, t. j. że można je było usunąć, postępując w myśl wskazówek, jakie z interpretacji tej wynikały.

Niezależnie jednak od tych wskazówek, pomiary z doświadczenia drugiego dały się zużytkować do wyznaczenia objętości radonu. Należało tylko zmodyfikować nieco sposób analizy, gdyż Δp i Δd w tym przypadku pochodzi nie od dwu, lecz od trzech składników, mianowicie: radonu, CO_2 i H_2O . Modyfikacja polegała na tem, że ilość pary wodnej, a więc jej ciśnienie i tłumienie, wyznaczałem, stosując metodę analizy, wyjaśnioną na str. 506 do *wydzielanego* gazu, będącego mieszaniną wodoru i pary wodnej. Wyliczone w ten sposób wartości ciśnienia i tłumienia, pochodzące od pary wodnej, odejmowałem od Δp i od Δd , przez co sprowadzałem przypadek mieszaniny trzech gazów do przypadku mieszaniny dwu gazów, którą już mogłem analizować za pomocą metody str. 506.

Do doświadczenia użyto 138,6 millicurie radonu. Objętość aparatury wynosiła 180 cm^3 , wskutek dolutowania rurki z nitką platynową a także małej lampki z nitką wolframową (w celu

zastosowania rozżarzonego wolframu do pochłaniania gazów), która jednak używaną nie była.

Otrzymałem wyniki następujące:

1 serja pomiarów:

$$p_r = 0,519; p_c = 0,298; \frac{p_r}{\Delta p} = 0,635; V_0 = 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$$

2 serja pomiarów

$$p_r = 0,527; p_c = 0,434; \frac{p_r}{\Delta p} = 0,55; V_0 = 6,29 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$$

Zgodność wartości V_0 jest zadawalająca, niemniej jest rzeczą jasną, że ze względu na skomplikowany sposób obliczenia, wyników tych nie można uważać za decydujące.

Wyniki takie dały, jak sędzę, doświadczenia trzecie i czwarte.

Doświadczenia te różniły się od drugiego tem tylko, że lampkę wolframową usunąłem, a na jej miejsce przylutowałem rurkę z kilkoma okruchami wodorotlenku potasowego; oraz, że w wyborze temperatury żarzenia nitki i kąpieli płuczki kierowałem się wskazówkami doświadczenia 2-go. Objętość aparatury wynosiła 160 cm^3 , ilość radonu w doświadczeniu 3-em 104 millicurie, w doświadczeniu czwartem 176 cm.

Zgodnie z przewidywaniami, osiągnięto w tych doświadczeniach dość dobrą stałość warunków doświadczalnych. Można było stwierdzić pewne wydzielanie gazów; było ono jednak bardzo małe; ciśnienie całkowite w ciągu godziny podnosiło się zaledwie o 8%. Sposób zużytkowania wyników ilustruje rys. 4, przedstawiający graficznie pomiary, dokonane w doświadczeniu 4-tem. Na rysunku tym punkty oznaczają ciśnienia, kółka — tłumienia. Grupy punktów, oznaczone cyframi, otrzymane były z gazem całkowitym, punkty, oznaczone literami, oznaczają ciśnienia i tłumienia gazów nieskroplonych. Grupa punktów, oznaczonych cyfrą 4, otrzymaną została po wyłączeniu ogrzewania tlenu miedzi; świadczy ona, że i w tem doświadczeniu wodór był wydzielany obficie, jednakże znikał całkowicie pod działaniem CuO . Wahania punktów dają pojęcie o dokładności pomiarów; nie jest ona zbyt wielka, co jest zrozumiałem wobec małości badanych ciśnień. Największe wahania wykazują pomiary ciśnienia i tłumienia gazów nieskroplonych, co jednak w małym tylko stopniu wpływa na wartość Δp i Δd , gdyż ilość gazów nieskroplonych była mała wobec

łości całkowitej gazu. Celem zmniejszenia błędu, używałem do wyznaczenia Δp i Δd , z łatwych do zrozumienia względów, przeciętnych typu

$$\frac{p_1 + p_2}{2} - p_a, d_2 - \frac{d_a + d_b}{2} \text{ i t. d.}$$

Wyniki są następujące:

Doświadczenie 3-cie:

$$1) p_r = 0,433; p_c = 0,143; \frac{p_r}{\Delta p} = 0,75; V_0 = 6,15 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$$

$$2) p_r = 0,454; p_c = 0,143; \frac{p_r}{\Delta p} = 0,77; V_0 = 6,41 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$$

Doświadczenie 4-te:

$$1) p_r = 0,743; p_c = 0,153; \frac{p_r}{\Delta p} = 0,825; V_0 = 6,26 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$$

$$2) p_r = 0,753; p_c = 0,156; \frac{p_r}{\Delta p} = 0,825; V_0 = 6,33 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$$

$$3) p_r = 0,808; p_c = 0,1; \frac{p_r}{\Delta p} = 0,89; V_0 = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$$

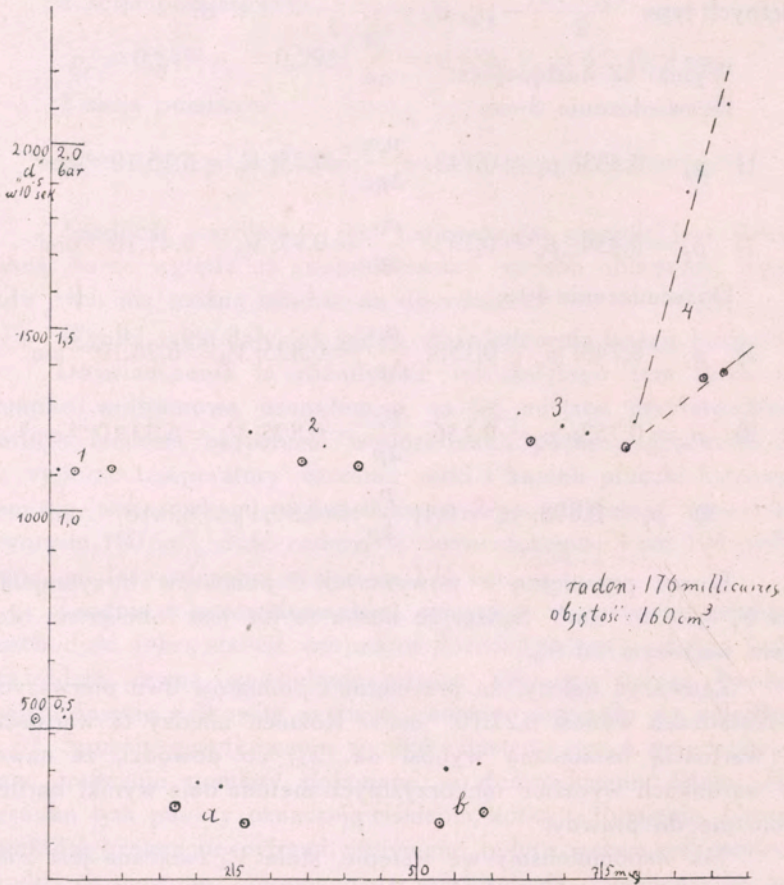
Biorąc przeciętną z powyższych 5 pomiarów otrzymujemy na V_0 $6,39 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$. Sądzę, że liczba ta nie jest obciążona błędem, większym od 5%.

Zauważyć należy, że przeciętna z pomiarów dwu pierwszych doświadczeń wynosi $6,27 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$. Różnica między tą wartością a wartością ostateczną wynosi ok. 2%, co dowodzi, że nawet w warunkach wyraźnie niekorzystnych metoda daje wyniki bardzo zbliżone do prawdy.

Jak wspomnieliśmy we wstępie, stała V_0 związana jest z innymi stałymi promieniotwórczości, w szczególności z liczbą ν cząsteczek α wysyłanych w ciągu sekundy przez 1 g. Ra. Z wartości $V_0 = 6,39 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$ wyliczamy $\nu = 3,62 \cdot 10^{10}$. Liczba ta leży niemal dokładnie pośrodku między wartością $\nu = 3,5 \cdot 10^{10}$, otrzymaną przez Jędrzejowskiego i $\nu = 3,7 \cdot 10^{10}$ otrzymaną przez Braddick'a i Cave. Obie te liczby uzyskane zostały w r. 1927 metodą pomiaru ładunku elektrycznego, przenoszonego przez cząsteczki α .

Opisana w pracy tej metoda może być udoskonalona przez konstrukcję czulszych miarek próżniowych. Główną jednak

przeszkodą do uzyskania wielkiej precyzji wydają się gwałtowne zjawiska, zachodzące w obecności radonu. Z tego powodu zamierzam metodę tę zastosować, po wprowadzeniu możliwych



Rys. 4.

ulepszeń, do zagadnienia innego, które jednak prowadzi do wyznaczenia tej samej stałej, mianowicie do wyznaczenia objętości helu, wydzielanego w ciągu sekundy przez 1 g. Ra.

Pozostaje jeszcze do powiedzenia parę słów o stosunku metody powyższej do metody dawnej, użytej przez Rutherford'a, Debierné'a i Ramsay'a.

Przytoczone przeze mnie liczby wskazują, że w żadnym przypadku nie miałem zupełnie czystego radonu; domieszka CO₂

wahała się od 45% do 15%. W związku z tem przypomnieć należy, że przy ściskaniu oczyszczonego radonu w kapilarze, otrzymuje się zazwyczaj objętości, które ulegają w ciągu kilku godzin po wprowadzeniu radonu, dość znacznemu zmniejszeniu, wynoszącemu od 20 do 50% objętości ostatecznej. Jasnym jest, że i w tej metodzie nie otrzymuje się — drogą samych tylko procesów chemicznych i fizycznych — czystego radonu. Jest natomiast rzeczą możliwą, że — jak to zakładali wspomnieni badacze — ostateczny proces oczyszczania zachodzi w samej kapilarze. Domieszki radonu ulegają, według tego poglądu, pochłonięciu przez szkło pod wpływem promieni α ; stąd owo zmniejszanie się objętości.

W celu wyjaśnienia tej sprawy, wykonałem kilka doświadczeń metodą rurki kapilarnej, posługując się aparaturą, podobną w zasadzie do aparatury Rutherford'a, opisaną w innej pracy, a także urządzeniem przedstawionem na rys. 3. Do rurki V dolutowana była pochylona rurka S , zakończona wykalibrowaną kapilarą c_1 . Rurka kapilarna c_2 o tym samym przekroju pozwalała na wyznaczenia ciśnienia w rurce c_1 . O znaczeniu kulki b powiem za chwilę.

Pierwsze ze wspomnianych doświadczeń, wykonane za pomocą aparatury oddzielnej, dało wyniki bardzo podobne do wyników Rutherford'a. 40,5 millicurie radonu po wprowadzeniu do kapilary zajęło objętość, która uległa zmniejszeniu o 30%. Objętość końcowa odpowiadała $V_0 = 6,4 \cdot 10^{-4}$ cm³.

Wydać się może rzeczą dziwną, że radon rozrzedzony powoduje wydzielanie się gazów, radon stężony — ich pochłanianie. Wyjaśnienie pozornej tej sprzeczności otrzymujemy, zauważywszy, że wydzielanie następuje pod wpływem zderzania się cząsteczek α ze ściankami, zaś pochłanianie jest wynikiem zderzeń między cząsteczkami α i cząsteczkami gazu. Pod bardzo niskim ciśnieniem liczba zderzeń między cząsteczkami jest znikomo mała, i dlatego w tym przypadku wydzielanie się gazów odbywa się znacznie szybciej, niż ich pochłanianie.

Zastanawiając się nad tem szczególnem zjawiskiem znikania domieszek w obecności radonu, zmuszeni jesteśmy przyjąć, że cząsteczka, gazu uderzona przez cząsteczkę α , zostaje przeprowadzona w pewien stan szczególny, w którym działają między nią a ściankami siły chemiczne. Ponieważ cząsteczki α trafiają zarówno w molekuly domieszek, jak i w molekuly radonu, przeto a priori

nie jest wykluczone, że zmniejszanie objętości odbywa się nie tylko na koszt domieszek, ale i na koszt samego radonu.

Gdyby tak było, metoda Rutherford'a utraciłaby znaczną część swej wartości.

Celem sprawdzenia tego przypuszczenia, usiłowałem wykonać doświadczenie Rutherford'a z możliwie najczystszym radonem; gdyby przypuszczenie było słuszne, objętość końcowa powinna być mniejsza od teoretycznej.

Do doświadczenia użyłem oczyszczonego radonu, którego stopień czystości wyznaczyłem zapomocą analizy tłumikowej (doświadczenie 2-gie). Po uskutecznieniu pomiarów, radon przedystrylowałem do rurki *S* (rys. 3). Rurka ta zawierała nieco wodorotlenku potasowego, celem dalszego zmniejszenia zawartości CO_2 . Przed zamknięciem radonu w kapilarze, poddałem go jeszcze próbie oczyszczenia, opartej na prawach przepływu gazów bardzo rozrzedzonych. Do tego służyła kulka *b* połączona z rurką *S* kapilarą o średnicy 0.5 mm. Po skondensowaniu radonu rtęć podniosłem powyżej poziomu kapilary *b*. Gdy radon wyparował po usunięciu ciekłego powietrza, rtęć opuściłem na kilka sekund poniżej poziomu tej kapilary; część radonu przeszła do kulki *b'* ale zgodnie z wspomnianymi prawami musiała przejść do tej kulki znacznie większą część CO_2 . Po uskutecznieniu tego zabiegu zamknąłem gaz pozostały w kapilarze mierniczej c_1 .

Wynik odpowiedział przewidywaniom. Objętość początkowa wynosiła $5,08 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^3$ co przy użytej ilości 86,1 millicurie odpowiada $V_0 = 5,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$, objętość końcowa (zmierzona dnia następnego) wynosiła $3,9 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^3$ co po uwzględnieniu rozpadu części radonu daje $V_0 = 4,34 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^3$.

Widzimy, że blisko 30% radonu uległo pochłonięciu. Aby zbadać naturę tej absorpcji, wypompowałem radon i rurkę ogrzałem do 200° . Uskuteczniłem następnie pomiary promieniowania γ okazały, że rurka zatrzymała ok. 20% wprowadzonego do niej radonu.

Absorpcja skoncentrowanego radonu w szkle jest tem większa, im dłużej radon pozostaje w kapilarze. W innym doświadczeniu, do którego użyłem mniej czystego radonu, objętość początkowa odpowiadała $V_0 = 7,91 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$, objętość końcowa, zmierzona dnia następnego $6,2 \cdot 10^{-4}$. Po czterech dniach radon wypompowałem, jak poprzednio; w rurce uwięzło 40% ilości początkowej.

Z doświadczeń tych zdaje się wynikać, że nowa metoda jest poprawniejsza od dawnej, gdyż pozwala na zbadanie zjawisk, zachodzących w obecności radonu, w szczególności umożliwia wprowadzenie poprawek, wynikających ze zmian ciśnienia i natury gazów zmieszanych z radonem.

Zmiany te są bardzo interesujące, a niewątpliwie zastanawiającym jest obfite wydzielanie wodoru przez szkło pod wpływem promieni α . Najprawdopodobniejszym objaśnieniem tego zjawiska jest, że polega ono na rozkładzie pod działaniem promieni α warstwy wody, jaka zazwyczaj na szkle istnieje. Objaśnienie to nie zdaje jednak sprawy z nieobecności tlenu, i dlatego będzie przedmiotem osobnego badania.

Badania wstępne do niniejszej pracy wykonałem w pracowni radjologicznej w Warszawie, częściowo w r. 1923 w ciągu kilkumiesięcznego pobytu w Paryżu w Institut de Radium p. Curie-Skłodowskiej. Samą pracę wykonałem w latach 1925/26 i 1926/27 w Cavendish Laboratory w Cambridge.

Poczuwam się do obowiązku złożenia dyrektorowi Cavendish Laboratory p. Rutherfordowi, serdecznego podziękowania za wysoce uprzejme pozostawienie do mej dyspozycji bogatych środków swej pracowni, oraz za jego życzliwy stosunek do postępów mej pracy.

Dziękuję również instytucji amerykańskiej International Education Board za przyznane mi stypendjum, które umożliwiło mój wyjazd do Anglii i dwuletni pobyt w Cambridge.

Ludwik Wertenstein.

Une méthode nouvelle de détermination du volume de 1 curie de radon.

Résumé.

J'ai redéterminé le volume de 1 curie de radon en appliquant une méthode basée sur les propriétés des gaz très raréfiés. La méthode consiste à déterminer simultanément la pression et le coefficient du frottement du radon purifié. On mesure la pression à l'aide d'une jauge de Knudsen, le frottement, à l'aide d'un manomètre à fil de quartz. J'appellerai les indications de ce dernier instrument „pouvoir d'amortissement” en définissant cette grandeur comme l'inverse du temps pendant lequel l'amplitude

des oscillations du fil de quartz diminue dans un rapport donné. Soit p la pression totale, p_r, p_x, p_y, \dots pressions partielles du radon et de ses impuretés, d le pouvoir d'amortissement du mélange. Nous aurons

$$p = p_r + p_x + p_y + \dots$$

$$d = \alpha_r p_r + \alpha_x p_x + \alpha_y p + \dots$$

Conformément aux lois établies par Knudsen nous avons

$$\alpha_r = c \sqrt{M_r}, \alpha_x = c \sqrt{M_x}, \dots$$

ou les grandeurs M sont les poids moléculaires et la constante c peut être déterminée expérimentalement.

On voit que la méthode permet de déterminer p_r dans le cas du mélange du radon avec **un** autre gaz de nature connue.

Des recherches préliminaires ont établi que le radon purifié contient toujours une certaine proportion de CO_2 si, comme c'est généralement le cas, la graisse à robinets est utilisée dans l'appareil d'extraction. La difficulté de se débarrasser entièrement de CO_2 résulte de la propriété que possède ce gaz d'être adsorbé en grande quantité par le verre. L'adsorption de CO_2 fera l'objet d'une recherche spéciale.

Le radon purifié contient aussi, en faible quantité, d'autres impuretés, dues principalement à l'action des rayons α sur le verre. Cependant parmi toutes ces impuretés, CO_2 est *la seule* qui se condense avec le radon à la température de l'air liquide. La méthode d'analyse basée sur les formules (1) est donc entièrement applicable à la partie du mélange gazeux qui est condensable dans l'air liquide.

Toutefois il est essentiel, pour l'application de cette méthode, de supprimer les vapeurs d'eau et de mercure. On se sert à cet effet d'un bain, maintenu à -120^0 , qui condense les vapeurs sans agir sur le radon ni sur CO_2 .

On opère en déterminant 1) la pression p_1 et le pouvoir d'amortissement d_1 de la quantité totale des gaz, 2) la pression p_a et le pouvoir d'amortissement d_a des gaz qui subsistent quand on refroidit une petite portion de la surface de l'appareil à la température de l'air liquide. Les grandeurs $\Delta p = p_1 - p_a$, $\Delta d = d_1 - d_a$ appartiennent au mélange du radon avec le gaz carbonique.

Les quantités de radon employées au cours de ce travail étaient de l'ordre de 0,1 curie et le volume total de l'appareil voisin de 150 mc³. Les pressions à mesurer étaient de l'ordre de 1 bar, généralement inférieures à cette grandeur; la mesure des pressions et des amortissements ne présentait donc pas de difficultés spéciales.

Cependant une difficulté très importante résultait du fait que les parois de l'appareil dégageaient sous l'action des rayons α des quantités notables des gaz. En se basant sur le fait que ces gaz ne contiennent pas de CO₂, il a été possible d'adapter la méthode au cas d'un régime variable et de déterminer les grandeurs Δp et Δd . Mais les calculs deviennent compliqués et un peu incertains.

En appliquant la méthode d'analyse expliquée plus haut aux gaz dégagés par les parois on a pu établir que ces gaz étaient constitués principalement par de l'hydrogène. Dès lors il devenait facile de s'en débarrasser en adjoignant à l'appareil un tube à oxyde de cuivre destiné à brûler l'hydrogène au fur et à mesure de sa production.

Grace à cet artifice on a pu réaliser un état stationnaire et effectuer les mesures dans de bonnes conditions. J'ai fait en tout quatre expériences dont deux en régime variable et deux en régime constant. Les proportions de CO₂ variaient de 45 à 15%. La moyenne de 5 déterminations faites au cours de ces dernières expériences est $V_0^1) = 6,39 \cdot 10^{-4}$ cm³. L'erreur probable ne dépasse pas 5%.

Les déterminations en régime variable donnent

$$V_0 = 6,27 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3.$$

De la valeur $V_0 = 6,39 \cdot 10^{-4}$ cm³ nous déduisons pour ν le nombre de particules α émises en 1 seconde par 1 g de Ra: $3,62 \cdot 10^{10}$. Les récentes déterminations directes de ce nombre donnent $3,5 \cdot 10^{10}$ (Jędrzejowski) et $3,7 \cdot 10^{10}$ (Braddick et Cave).

En comparant ces résultats aux résultats obtenus par Rutherford, Debierne et Ramsay, qui comprimèrent le radon dans un tube capillaire jaugé, on arrive à la conclusion que la présence de CO₂ dans le produit final de la purification explique le fait que dans les expériences de ces auteurs le volume initial du radon

1) Volume de 1 curie de radon sous pression normale et à 0°.

était notablement supérieur au volume final. Cette contraction est attribuée à la disparition des impuretés sous l'action des rayons α . Mais on peut se demander si les rayons α n'agissent de même sur le radon.

J'ai répété ces expériences et j'ai retrouvé d'une manière générale les résultats des savants nommés plus haut. J'ai constaté en outre 1) que si le radon est, initialement, pratiquement pur on obtient des nombres considérablement inférieurs au nombre théorique, 2) qu'une proportion notable de radon (de 10 à 40% suivant le temps de séjour dans le tube capillaire) adhère si fortement au verre qu'on ne peut la chasser même en faisant le vide et en chauffant fortement le tube.

Ceci prouve, que dans la méthode ancienne la quantité de radon à l'état libre ne peut pas être déduite des mesures de son rayonnement. La méthode exposée dans ce travail ne possède pas ce désavantage.

Kazimierz Stołyhwo.

W sprawie morfologii.

**Arcus superciliares i Tori supraorbitales
u Hominidae i Anthropoidae.**

Pod ogólną nazwą Tori supraorbitales i Arcus superciliares kryje się właściwie mówiąc cały szereg odrębnych kierunków rozwojowych w zakresie budowy łuków brwiowych, które występują zarówno u człowieka, jak też u różnych Antropoidów i Małp niższych.

Poznanie tych kierunków rozwojowych może nam rzucić bardzo ciekawe światło zarówno na stosunki pokrewieństwa, jak też na proces różnicowania się rasowego u form badanych.

Badając cechy powyższe bardziej szczegółowo stwierdziłem wyraźne różnice, zarówno pomiędzy obszerniejszymi grupami systematycznymi — jak Hominidae, Pongidae i Hylobatidae, jak też pomiędzy poszczególnymi gatunkami, jak np. *Pithecus satyrus*, *Gorilla engena*, *Pseudogorilla Mayema* i *Troglodytes niger*.

Różnice występują wyraźnie nawet w obrębie genus *Hylobates*, jak np. pomiędzy *Hylobates lar* i *concolor*.

W obrębie zaś Hominidae występują wyraźne różnice pomiędzy czaszką z Neanderthalu, czaszką z Krapiny „D” i człowiekiem współczesnym.

Badając łuki brwiowe u *Pithecanthropus erectus* przekonałem się, iż pod tym względem zbliża się on bardziej do Antropoidów niż do człowieka a w szczególności do *Pithecus satyrus* i *Gorilla engena*. Być może więc najśluszniej byłoby nawiązywać te zagadkowe szczątki nie do Hylobatidae, lecz do jakiejś kopalnej odmiany form orangoidalnych.

Czaszka z Neanderthalu w zakresie łuków brwiowych przedstawia najsilniejsze zbliżenie do *Hylobates syndactylus* a następnie wykazuje znaczną zgodność z *Hylobates concolor* i z *Troglodytes niger* (odmiana „B”).

Czaszka z Krapiny „D” wykazuje najsilniejsze zbliżenie do *Pithecus satyrus* i *Pseudogorilla Mayema* oraz posiada znaczną zgodność z budową *Hylobates lar* i *Troglodytes niger* (odmiana „A”).

Wreszcie człowiek współczesny wykazuje największe podobieństwo z *Troglodytes niger* (odmiana „B”) oraz posiada znaczną

zgodność budowy z *Hylobates lar* i *Troglodytes niger* (odmiana „A”) a następnie z *Hylobates concolor* i *Hylobates syndactylus*.

Na podstawie powyższego porównania największych zgodności w budowie łuków brwiowych u człowieka i Antropoidów możemy powiedzieć, że czaszka z Neanderthalu wykazuje zasadniczą różnicę w tym zakresie i może być przeciwstawioną czaszce z Krapiny „D”.

Człowiek zaś współczesny, aczkolwiek silniej zbliża się do stosunków charakterystycznych dla grupy Neanderthal, to jednak wykazuje również i te cechy, które są właściwe dla grupy z Krapiny.

Ograniczam się tu do podania tylko ważniejszych wyników, gdyż całość tej pracy ogłoszoną będzie w „Archiwum Nauk Antropologicznych”.

Kazimierz Żorawski.

O wektorach zespolonych.

Przedmiotem pracy tej są własności wektorów zespolonych w rzeczywistej przestrzeni euklidesowej o trzech wymiarach. Wektory te określone są przez zespolone składowe na osiach rzeczywistego prostolinjowego układu spólrzędnych. Wyznaczenie pewnych niezmienników tych wektorów z jednej strony oraz zbadanie własności pewnej ich interpretacji z drugiej stanowią główną treść tej pracy. Rozważania te stoją w bliskim związku z własnościami kierunków urojonych w przestrzeni trzywymiarowej.

§ 1. Niech będzie rzeczywista euklidesowa przestrzeń trzywymiarowa i w przestrzeni tej rzeczywisty układ spólrzędnych prostolinjowych x, y, z wogóle ukośnokątnych. Oznaczmy kąt osi y i z przez ξ , kąt osi z i x przez η , a kąt osi x i y przez ζ .

Zespół trzech liczb zespolonych na spólrzędne punktu x, y, z nazywać będziemy *punktem zespolonym* tej przestrzeni. Punkt ten jest *rzeczywisty*, gdy wszystkie rzeczzone liczby są rzeczywiste, jest zaś *urojony*, gdy przynajmniej jedna z nich jest urojona.

Weźmy pod uwagę równania:

$$(1) \quad x = x_1 + ku, \quad y = y_1 + kv, \quad z = z_1 + kw,$$

w których przez u, v, w rozumiemy trzy stałe liczby zespolone, przez k zmienny parametr rzeczywisty, a przez x_1, y_1, z_1 i x, y, z spólrzędne stałego i spólrzędne zmiennego zespolonego punktu. Jeżeli k powiększa się od 0 do $+1$, to zmienny punkt o spólrzędnych x, y, z , określonych równaniami (1) opisuje pewien zbiór punktów zespolonych, który nazwiemy *nieswobodnym wektorem zespolonym*. Przytem punkt o spólrzędnych x_1, y_1, z_1 nazwiemy *początkiem wektora zespolonego*, liczby u, v, w *składowemi wektora zespolonego na osiach*, a punkt o spólrzędnych x_2, y_2, z_2 , określonych równaniami:

$$(2) \quad x_2 = x_1 + u, \quad y_2 = y_1 + v, \quad z_2 = z_1 + w,$$

końcem wektora zespolonego. Gdy dane są tylko składowe u, v, w , to powiemy, że określają one *swobodny wektor zespolony*. Na podstawie równań (2) możemy dla każdego dowolnie

wybranego początku wyznaczyć współrzędne końca nieswobodnego wektora, mającego dane składowe na osiach.

Jeżeli u, v, w są wszystkie zerami, to powiemy, że uważany wektor jest *wektorem zerowym*, jeżeli zaś u, v, w nie są wszystkie jednocześnie zerami, to powiemy, że uważany wektor jest *wektorem niezerowym*. Wektor niezerowy posiada *dwukierunek*, określający się stosunkami:

$$u : v : w.$$

Gdy wszystkie składowe niezerowego wektora mnożymy przez ten sam czynnik zespolony różny od zera, wówczas dwukierunek wektora nie ulega żadnej zmianie.

W dalszym ciągu stosować będziemy oznaczenie:

$$(3) \quad \Phi(l, m, n) = l^2 + m^2 + n^2 + \\ + 2mn \cos \xi + 2nl \cos \eta + 2lmn \cos \zeta,$$

a także oznaczenie:

$$(4) \quad \Phi(l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2) = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 + \\ + (m_1 n_2 + n_1 m_2) \cos \xi + (n_1 l_2 + l_1 n_2) \cos \eta + (l_1 m_2 + m_1 l_2) \cos \zeta.$$

Wyrażenie $\Phi(u, v, w)$ nazwiemy *kwadratem długości wektora*.

Wektor niezerowy, którego składowe spełniają związek:

$$\Phi(u, v, w) = 0,$$

nazywać będziemy *wektorem izotropowym*. Każdy wektor izotropowy jest wektorem urojonym. Mówić będziemy, że wektor izotropowy posiada *pseudokierunek* i składowe jego nazywać będziemy także *spółczynnikami pseudokierunkowymi*. Jeżeli wszystkie trzy składowe izotropowego wektora pomnożymy przez ten sam czynnik zespolony różny od zera, to otrzymamy składowe wektora izotropowego, który będzie wogóle różnym od poprzedniego wektorem izotropowym.

Jeżeli składowe u, v, w , wektora zespolonego spełniają nierówność:

$$\Phi(u, v, w) \neq 0,$$

to wektor ten nazywać będziemy *wektorem nieizotropowym*. Wektor nieizotropowy może być albo rzeczywisty, albo też urojony. Mówić będziemy, że każdy nieizotropowy wektor niezerowy posiada *jeden kierunek* i umówimy się określać ten kierunek zapomocą wielkości λ, μ, ν , wyznaczonych wzorami:

$$(5) \quad \lambda = \frac{u}{\sqrt{\Phi(u, v, w)}}, \quad \mu = \frac{v}{\sqrt{\Phi(u, v, w)}}, \quad \nu = \frac{w}{\sqrt{\Phi(u, v, w)}},$$

w których pierwiastek kwadratowy oznacza tę jego wartość, której jedna z amplitud jest jednocześnie mniejsza od π i większa od zera, lub conajmniej równa zeru. Wielkości λ, μ, ν spełniają związek:

$$\Phi(\lambda, \mu, \nu) = 1.$$

Nazywać je będziemy *spółczynnikami kierunkowymi* niezrowego nieizotropowego wektora. Zauważymy przytem, że jeżelibyśmy wszystkie składowe uważanego nieizotropowego wektora pomnożyli przez czynnik zespolony różny od zera, to wektor, którego składowymi byłyby odpowiednio te iloczyny, miałyby albo współczynniki kierunkowe λ, μ, ν , albo też współczynniki kierunkowe $-\lambda, -\mu, -\nu$. Można łatwo określić warunki, przy spełnieniu których zachodzi pierwszy z tych przypadków i warunki, przy spełnieniu których zachodzi drugi z tych przypadków. Łatwo dostrzec mianowicie, że jeżeli rzeczoną powyżej amplitudę pierwiastka kwadratowego oznaczymy przez φ , a czynnik, przez który mnożymy składowe, napiszemy w postaci $\rho e^{i\omega}$, gdzie ρ oznacza moduł tego czynnika, a ω oznacza liczbę rzeczywistą, spełniającą warunki:

$$0 \leq \omega < 2\pi,$$

to pierwszy z rzeczonych przypadków zajdzie wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków:

$$\varphi + \omega < \pi, \quad \varphi + \omega \geq 2\pi,$$

drugi zaś wtedy, gdy jednocześnie spełnione są warunki:

$$\pi \leq \varphi + \omega < 2\pi.$$

§ 2. Napiszemy składowe u, v, w wektora zespolonego w postaci:

$$(6) \quad u = u' + iu'', \quad v = v' + iv'', \quad w = w' + iw'',$$

gdzie $u', v', w', u'', v'', w''$ oznaczają liczby rzeczywiste. Wektor swobodny o składowych (6) jest *wektorem rzeczywistym*, gdy wszystkie trzy wielkości u'', v'', w'' są zerami, jest zaś *wektorem urojonym*, gdy nie wszystkie trzy wielkości u'', v'', w'' są jednocześnie zerami. Wektor o składowych (6) ma *dwukierunek rze-*

czywisty, gdy jest wektorem niezerowym i gdy wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$$

są zerami. Wtedy kierunek wektora jest także rzeczywisty. Wektor o składowych (6) ma *dwukierunek urojony*, gdy nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (7) są jednocześnie zerami. Wtedy wektor posiada albo urojony kierunek albo pseudokierunek.

Przyjmijmy początek wektora o składowych (6) w początku współrzędnych i postarajmy się wyznaczyć płaszczyzny rzeczywiste, wektor ten zawierające. Jeżeli wektor ten jest wektorem zerowym, to wszystkie płaszczyzny, wektor ten zawierające, są wszystkimi płaszczyznami przechodzącymi przez początek współrzędnych. Jeżeli wektor ma dwukierunek rzeczywisty, to położony jest na prostej rzeczywistej określonej równaniami:

$$(8) \quad x : y : z = u : v : w$$

i wszystkie płaszczyzny, wektor ten zawierające, są wszystkimi płaszczyznami, na których leży ta linja prosta. Jeżeli wreszcie wektor o składowych (6) z początkiem w początku współrzędnych ma dwukierunek urojony, to jedyną płaszczyzną rzeczywistą, wektor ten zawierającą, jest płaszczyzna:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0.$$

Zauważmy *jednojednowartościową odpowiedniość*, zachodzącą pomiędzy wszystkimi wektorami zespolonemi przestrzeni i pewnemi figurami geometrycznemi, składającemi się z dwóch wektorów rzeczywistych, o wspólnym początku, położonym w początku współrzędnych. Niech składowemi jednego z tych wektorów będą wielkości rzeczywiste u', v', w' a składowemi drugiego z nich wielkości rzeczywiste u'', v'', w'' . Tę figurę nazwiemy *węzłem wektora zespolonego*, a rzeczony wektory rzeczywiste *bokami węzła*, przyczem wektor o składowych u', v', w' nazwiemy *pierwszym bokiem węzła*, a wektor o składowych u'', v'', w'' *drugim bokiem węzła*. Jeżeli wektor o składowych (6) jest wek-

torem zerowym, to oba boki węgła tego wektora są wektorami zerowymi. Jeżeli wektor o składowych (6) ma dwukierunek rzeczywisty, to oba boki jego węgła leżą na prostej (8). Jeżeli wreszcie wektor o składowych (6) ma dwukierunek urojony, to oba boki węgła tego wektora leżą na płaszczyźnie (9).

Wykonajmy teraz w uważanej przestrzeni trzywymiarowej zmianę spólrzędnych x, y, z na nowe prostolinjowe spólrzędne rzeczywiste $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Taka zmiana spólrzędnych określa się równaniami:

$$(10) \quad \begin{cases} x = a + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y} + a_3 \bar{z}, \\ y = b + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y} + b_3 \bar{z}, \\ z = c + c_1 \bar{x} + c_2 \bar{y} + c_3 \bar{z}, \end{cases}$$

w których a, b, c bez wskaźników oznaczają dowolnie wybrane współczynniki rzeczywiste, a a, b, c ze wskaźnikami oznaczają współczynniki rzeczywiste, spełniające warunki:

$$\begin{aligned} \Phi(a_1, b_1, c_1) &= 1, \quad \Phi(a_2, b_2, c_2) = 1, \quad \Phi(a_3, b_3, c_3) = 1, \\ \Phi(a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3) &= \cos \bar{\xi}, \\ \Phi(a_3, b_3, c_3; a_1, b_1, c_1) &= \cos \bar{\eta}, \\ \Phi(a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2) &= \cos \bar{\zeta}, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\xi}$ jest kątem osi \bar{y} i \bar{z} , $\bar{\eta}$ kątem osi \bar{z} i \bar{x} , a $\bar{\zeta}$ kątem osi \bar{x} i \bar{y} . Jeżeli składowe uważanego wektora zespolonego w nowym układzie oznaczymy przez $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, to na podstawie równań (10) zachodzić będą pomiędzy temi składowymi i składowymi u, v, w związki:

$$(11) \quad \begin{cases} u = a_1 \bar{u} + a_2 \bar{v} + a_3 \bar{w}, \\ v = b_1 \bar{u} + b_2 \bar{v} + b_3 \bar{w}, \\ w = c_1 \bar{u} + c_2 \bar{v} + c_3 \bar{w}. \end{cases}$$

A jeżeli składowe $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ napiszemy w postaci:

$$\bar{u} = u' + iu'', \quad \bar{v} = v' + iv'', \quad \bar{w} = w' + iw'',$$

gdzie $u', v', w', u'', v'', w''$ oznaczają wielkości rzeczywiste, to na podstawie równań (11) mieć będziemy równania:

$$(12) \quad \begin{cases} u' = a_1 \bar{u}' + a_2 \bar{v}' + a_3 \bar{w}', \\ v' = b_1 \bar{u}' + b_2 \bar{v}' + b_3 \bar{w}', \\ w' = c_1 \bar{u}' + c_2 \bar{v}' + c_3 \bar{w}', \\ u'' = \alpha_1 \bar{u}'' + \alpha_2 \bar{v}'' + \alpha_3 \bar{w}'', \\ v'' = b_1 \bar{u}'' + b_2 \bar{v}'' + b_3 \bar{w}'', \\ w'' = c_1 \bar{u}'' + c_2 \bar{v}'' + c_3 \bar{w}'' . \end{cases}$$

Zastosujemy tu do układu $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ oznaczenia analogiczne do oznaczeń (3) i (4), t. j. przyjmujemy oznaczenia:

$$(13) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi}(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}) &= \bar{l}^2 + \bar{m}^2 + \bar{n}^2 + \\ &+ 2\bar{m}\bar{n} \cos \bar{\xi} + 2\bar{n}\bar{l} \cos \bar{\eta} + 2\bar{l}\bar{m} \cos \bar{\zeta}, \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi}(\bar{l}_1, \bar{m}_1, \bar{n}_1; \bar{l}_2, \bar{m}_2, \bar{n}_2) &= \bar{l}_1 \bar{l}_2 + \bar{m}_1 \bar{m}_2 + \bar{n}_1 \bar{n}_2 + \\ &+ (\bar{m}_1 \bar{n}_2 + \bar{n}_1 \bar{m}_2) \cos \bar{\xi} + (\bar{n}_1 \bar{l}_2 + \bar{l}_1 \bar{n}_2) \cos \bar{\eta} + (\bar{l}_1 \bar{m}_2 + \bar{m}_1 \bar{l}_2) \cos \bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Z równań (11) wynika związek:

$$(15) \quad \Phi(u, v, w) = \bar{\Phi}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}),$$

a z równań (12) wynikają związki:

$$(16) \quad \begin{cases} \Phi(u', v', w') = \bar{\Phi}(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'), \\ \Phi(u'', v'', w'') = \bar{\Phi}(\bar{u}'', \bar{v}'', \bar{w}''), \\ \Phi(u', v', w'; u'', v'', w'') = \bar{\Phi}(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'; \bar{u}'', \bar{v}'', \bar{w}''). \end{cases}$$

Ponieważ zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \Phi(u, v, w) &= \Phi(u', v', w') - \Phi(u'', v'', w'') + \\ &+ 2i \Phi(u', v', w'; u'', v'', w'') \\ \bar{\Phi}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &= \bar{\Phi}(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}') - \bar{\Phi}(\bar{u}'', \bar{v}'', \bar{w}'') + \\ &+ 2i \bar{\Phi}(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'; \bar{u}'', \bar{v}'', \bar{w}''), \end{aligned}$$

przeto związek (15) jest wynikiem związków (16).

Związki (16) orzekają, że wielkości rzeczywiste:

$$\Phi(u', v', w'), \Phi(u'', v'', w''), \Phi(u', v', w'; u'', v'', w'')$$

są niezmiennikami wektora zespolonego przy zmianach współrzędnych prostolinjowych. Niezmienniki te są bezpośrednio związane z węzłem wektora zespolonego. Jeżeli bezwzględne dłu-

gości pierwszego i drugiego boku węgła oznaczymy odpowiednio przez b' i b'' , to mieć będziemy równości:

$$\Phi(u', v', w') = b'^2, \quad \Phi(u'', v'', w'') = b''^2.$$

Jeżeli zaś założymy, że żaden z boków węgła nie jest wektorem zerowym i kąt zawarty pomiędzy temi bokami oznaczymy przez ϑ , to mieć będziemy:

$$\Phi(u', v', w'; u'', v'', w'') = b' b'' \cos \vartheta.$$

W związku z temi rozważaniami zamieścimy tu uwagi następujące. Jeżeli wektor o składowych u, v, w nie jest wektorem zerowym i długość drugiego boku jego węgła jest równa zeru, to kwadrat długości tego wektora jest wielkością rzeczywistą dodatnią. Jeżeli wektor o składowych u, v, w nie jest wektorem zerowym i długość pierwszego boku jego węgła jest równa zeru, to kwadrat długości tego wektora jest wielkością rzeczywistą ujemną. Jeżeli długości obu boków węgła wektora zespolonego są różne od zera, to dla kwadratu długości tego wektora zachodzi wzór:

$$\Phi(u, v, w) = b'^2 - b''^2 + 2 i b' b'' \cos \vartheta$$

i możemy o tym wektorze wypowiedzieć szereg wniosków następujących: 1) Wektor ten jest wektorem izotropowym wtedy i tylko wtedy, gdy boki jego węgła są do siebie prostopadłe, a długości ich są sobie równe. 2) Kwadrat długości tego wektora jest wielkością rzeczywistą różną od zera wtedy i tylko wtedy, gdy boki jego węgła są do siebie prostopadłe, ale długości tych boków są od siebie różne. 3) Kwadrat długości tego wektora jest wielkością urojoną bez rzeczywistej części wtedy i tylko wtedy, gdy długości boków węgła tego wektora są sobie równe, a boki te nie są do siebie prostopadłe. 4) Kwadrat długości tego wektora jest wreszcie liczbą zespoloną, której obie części i rzeczywista i urojona są różne od zera, gdy nie zachodzi żaden z wymienionych powyżej przypadków.

§ 3. Zajmiemy się zbadaniem związków, zachodzących pomiędzy rozważaniami powyżej wielkościami, odnoszącemi się do danego wektora zespolonego i wielkościami odnoszącemi się do wektora zespolonego, którego składowe są iloczynami składowych danego wektora przez ten sam czynnik zespolony. Jeżeli czynnik ten napiszemy w postaci $\rho e^{i\omega}$, a składowe drugiego z uważanych wektorów oznaczymy przez $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, to mieć będziemy:

$$(17) \quad \underline{u} = \rho e^{j\omega} u, \quad \underline{v} = \rho e^{j\omega} v, \quad \underline{w} = \rho e^{j\omega} w.$$

Jeżeli zaś składowe drugiego z uważanych wektorów przedstawimy w postaci:

$$\underline{u} = \underline{u}' + j\underline{u}'', \quad \underline{v} = \underline{v}' + j\underline{v}'', \quad \underline{w} = \underline{w}' + j\underline{w}'',$$

to dojdziemy do związków:

$$(18) \quad \begin{cases} \underline{u}' = \rho (u' \cos \omega - u'' \sin \omega), & \underline{u}'' = \rho (u' \sin \omega + u'' \cos \omega), \\ \underline{v}' = \rho (v' \cos \omega - v'' \sin \omega), & \underline{v}'' = \rho (v' \sin \omega + v'' \cos \omega), \\ \underline{w}' = \rho (w' \cos \omega - w'' \sin \omega), & \underline{w}'' = \rho (w' \sin \omega + w'' \cos \omega). \end{cases}$$

Na podstawie tych związków łatwo otrzymamy równości:

$$(19) \quad \begin{cases} \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') = \rho^2 [\Phi(u', v', w') \cos^2 \omega + \\ + \Phi(u'', v'', w'') \sin^2 \omega - 2 \Phi(u', v', w'; u'', v'', w'') \sin \omega \cos \omega], \\ \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') = \rho^2 [\Phi(u', v', w') \sin^2 \omega + \\ + \Phi(u'', v'', w'') \cos^2 \omega + 2 \Phi(u', v', w'; u'', v'', w'') \sin \omega \cos \omega], \\ \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}'; \underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') = \\ = \rho^2 \{ [\Phi(u', v', w') - \Phi(u'', v'', w'')] \sin \omega \cos \omega + \\ + \Phi(u', v', w'; u'', v'', w'') (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \}. \end{cases}$$

Równości te można zastąpić równościami:

$$(20) \quad \begin{cases} \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') + \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') = \rho^2 [\Phi(u', v', w') + \Phi(u'', v'', w'')] \\ \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') - \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') = \rho^2 \{ [\Phi(u', v', w') - \\ - \Phi(u'', v'', w'')] \cos 2\omega - 2 \Phi(u', v', w'; u'', v'', w'') \sin 2\omega \}, \\ \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}'; \underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') = \rho^2 \left\{ \frac{1}{2} [\Phi(u', v', w') - \\ - \Phi(u'', v'', w'')] \sin 2\omega + \Phi(u', v', w'; u'', v'', w'') \cos 2\omega \right\}. \end{cases}$$

Z dwóch ostatnich z tych równości przez rugowanie ω dochodzimy do związku:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') - \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'')]^2 + [\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}'; \underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'')]^2 = \\ & = \rho^4 \left\{ \frac{1}{4} [\Phi(u', v', w') - \Phi(u'', v'', w'')]^2 + [\Phi(u', v', w'; u'', v'', w'')]^2 \right\}, \end{aligned}$$

albo, uwzględniając pierwszą z równości (20) do związku:

$$\begin{aligned} & \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') - [\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}'; \underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'')]^2 = \\ & = \rho^4 \{ \Phi(u', v', w') \Phi(u'', v'', w'') - [\Phi(u', v', w'; u'', v'', w'')]^2 \}. \end{aligned}$$

Rachunki te prowadzą do *twierdzeń* następujących:

1) Niezmienniki dwóch wektorów zespolonych, których składowe na tych samych osiach różnią się jedne od drugich tylko jednym i tym samym czynnikiem zespolonym o module równym jedności, spełniają dwa związki następujące:

$$(21) \begin{cases} \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') + \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') = \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') + \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}''), \\ \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') - [\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}'; \underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'')]^2 = \\ = \Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') - [\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}'; \underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'')]^2 \end{cases}$$

2) Niezmienniki dwóch niezerowych wektorów zespolonych, których składowe na tych samych osiach różnią się jedne od drugich tylko jednym i tym samym czynnikiem zespolonym spełniają związek następujący:

$$(22) \begin{cases} \frac{\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') - [\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}'; \underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'')]^2}{[\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') + \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'')]^2} = \\ = \frac{\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') - [\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}'; \underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'')]^2}{[\Phi(\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') + \Phi(\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'')]^2}. \end{cases}$$

Związki (21) i (22) można także napisać w innej formie. Jeżeli mianowicie litery $\underline{b}', \underline{b}''$ i ϑ oznaczają dla wektora o składowych $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ długość pierwszego boku węgła, długość drugiego boku węgła i kąt pomiędzy temi bokami, a litery $\underline{b}', \underline{b}''$ i ϑ oznaczają dla wektora o składowych $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ długość pierwszego boku węgła, długość drugiego boku węgła i kąt pomiędzy temi bokami, to związki (21) można napisać w postaci:

$$(23) \begin{cases} \underline{b}'^2 + \underline{b}''^2 = \underline{b}'^2 + \underline{b}''^2, \\ \underline{b}'^2 \underline{b}''^2 \sin^2 \vartheta = \underline{b}'^2 \underline{b}''^2 \sin^2 \vartheta, \end{cases}$$

a związek (22) w postaci:

$$(24) \frac{\underline{b}'^2 \underline{b}''^2 \sin^2 \vartheta}{(\underline{b}'^2 + \underline{b}''^2)^2} = \frac{\underline{b}'^2 \underline{b}''^2 \sin^2 \vartheta}{(\underline{b}'^2 + \underline{b}''^2)^2}.$$

Widoczne, że rozumiejąc przez ϑ i ϑ kąty bezwzględne $\leq \pi$, można drugi ze związków (23) zastąpić przez związek:

$$(25) \frac{1}{2} \underline{b}' \underline{b}'' \sin \vartheta = \frac{1}{2} \underline{b}' \underline{b}'' \sin \vartheta.$$

Jeżeli koniec pierwszego boku węgła wektora o składowych u, v, w połączymy odcinkiem prostoliniowym z końcem drugiego boku tego węgła, a koniec pierwszego boku węgła wektora o składowych $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ połączymy odcinkiem prostoliniowym z końcem drugiego boku tego węgła, to otrzymamy dwa trójkąty. Związek (25) zachodzi przy założeniu, że $\rho = 1$ i orzeka, że w każdym takim przypadku dwa rzeczony trójkąty mają równe sobie pola. Twierdzenie to może być uogólnione. W tym celu zauważmy, że z równań (18) wynikają związki:

$$(26) \quad \begin{cases} \underline{v' w''} - \underline{w' v''} = \rho^2 (v' w'' - w' v''), \\ \underline{w' u''} - \underline{u' w''} = \rho^2 (w' u'' - u' w''), \\ \underline{u' v''} - \underline{v' u''} = \rho^2 (u' v'' - v' u'') \end{cases}$$

i przyjmijmy takie obiegi dwóch uważanych powyżej trójkątów, że kierunki ich są zgodne z kierunkami pierwszych boków, a niezgodne z kierunkami drugich boków. Trójkąty te możemy wraz z ich obiegami rzutować na płaszczyznę spórzędnych yz równoległe do osi x , na płaszczyznę zx równoległe do osi y oraz na płaszczyznę xy równoległe do osi z . W ten sposób otrzymamy na każdej z tych płaszczyzn dwa trójkąty wraz z należącymi do nich obiegami. Jeżeli przytem na każdej z trzech płaszczyzn obierzemy pewne kierunki obiegu jako dodatnie, a wprost przeciwne jako ujemne, to na podstawie związków (26) dojdziemy do wniosków następujących. Pola każdego z rzeczonych trójkątów, położonych na tej samej płaszczyźnie spórzędnych są albo oba równe zeru, albo też oba jednego i tego samego znaku. Jeżeli $\rho = 1$, to pola każdego z rzeczonych trójkątów, położonych na tej samej płaszczyźnie spórzędnych są sobie równe i co do wartości bezwzględnych i co do znaku. Zaznaczamy przytem, że dla każdego wektora zespolonego, mającego dwukierunek rzeczywisty, wszystkie trzy rzeczony pola na płaszczyznach spórzędnych są zerami, a dla każdego wektora zespolonego, mającego dwukierunek urojony, przynajmniej jedno z tych pól jest różne od zera.

Widzieliśmy, że boki węgła każdego wektora u, v, w o dwukierunku rzeczywistym położone są na prostej rzeczywistej (8). Widoczne, że na tej samej linii prostej rzeczywistej położone są boki węgła każdego wektora $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, otrzymującego się drogą wyżej wskazaną z wektora u, v, w .

Zajmiemy się teraz bliższem rozważeniem węgła wektora o składowych \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} w założeniu, że *wektor o składowych* u, v, w *ma dwukierunek urojony*. W tym celu zauważymy naprzód, że oba boki węgła wektora o składowych \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} położone są na płaszczyźnie (9), t. j. na tej samej płaszczyźnie, co oba boki węgła wektora o składowych u, v, w . Niech będą następnie dwie formy linjowe względem x, y, z , określone wzorami:

$$(27) \quad \begin{cases} \Omega' (x, y, z) = b'' \cos \vartheta \Phi (u' v', w'; x, y, z) - \\ - b' \Phi (u'', v'', w''; x, y, z), \\ \Omega'' (x, y, z) = b'' \Phi (u', v', w'; x, y, z) - \\ - b' \cos \vartheta \Phi (u'', v'', w''; x, y, z). \end{cases}$$

Obliczymy naprzód wartości, które formy te przyjmują po podstawieniu w nich zamiast x, y, z odpowiednio wielkości $\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}'$ i $\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}''$. Łatwo dojdziemy tą drogą do wzorów następujących:

$$(28) \quad \begin{cases} \Omega' (\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') = \rho \sin \omega b' b''^2 \sin^2 \vartheta, \\ \Omega'' (\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}') = \rho \cos \omega b'^2 b'' \sin^2 \vartheta, \\ \Omega' (\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') = -\rho \cos \omega b' b''^2 \sin^2 \vartheta, \\ \Omega'' (\underline{u}'', \underline{v}'', \underline{w}'') = \rho \sin \omega b'^2 b'' \sin^2 \vartheta. \end{cases}$$

Niech będzie dalej równanie:

$$(29) \quad b'^2 [\Omega' (x, y, z)]^2 + b''^2 [\Omega'' (x, y, z)]^2 = \rho^2 b'^4 b''^4 \sin^4 \vartheta,$$

które określa w spólrzędnych x, y, z powierzchnię walca eliptycznego. Na podstawie wzorów (28) sprawdzimy łatwo, że końce obu boków węgła wektora o składowych \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} położone są na powierzchni tego walca. Widoczne przytem, że w przypadkach $\rho=1$, także i końce obu boków węgła wektora o składowych u, v, w leżą na powierzchni walca odpowiadającego wartości $\rho=1$. Prosta środków walca (29) określona jest równaniami:

$$\Omega' (x, y, z) = 0, \quad \Omega'' (x, y, z) = 0,$$

które zastąpić można równaniami im równoważnemi:

$$\begin{aligned} \Phi (u', v', w'; x, y, z) &= 0, \\ \Phi (u'', v'', w''; x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że prosta środków uważanego walca jest prostopadłą do boków węgła wektora o składowych u, v, w , przecho-

dzącą przez wspólny początek tych boków. Płaszczyzna średnicowa walca sprzężona z dwukierunkiem, wyznaczonym stosunkami $\lambda : \mu : \nu$, określona jest równaniem:

$$(30) \quad b'^2 \Omega'(\lambda, \mu, \nu) \Omega'(x, y, z) + b''^2 \Omega''(\lambda, \mu, \nu) \Omega''(x, y, z) = 0.$$

Z równania tego na podstawie wzorów (28) wynika, że dwa boki węgła wektora o składowych \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} leżą w płaszczyznach, które w stosunku do uważanego walca są ze sobą sprzężone. Wniosek ten odnosi się do wszelkich wektorów o składowych \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , a więc także do przypadku szczególnego, odpowiadającego wartościom $\rho = 1$, $\omega = 0$, t. j. do wektora o składowych u, v, w .

Wyniki, które tutaj otrzymaliśmy odnośnie do wektorów zespolonych o urojonych dwukierunkach, streścimy jeszcze w cokolwiek innej postaci. Boki węgła wektora o składowych u, v, w i urojonym dwukierunku są połowami średnic ze sobą sprzężonych elipsy, będącej przecięciem płaszczyzny, określonej równaniem:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x, y, z \\ u', v', w' \\ u'', v'', w'' \end{vmatrix} = 0$$

z powierzchnią walca, określoną równaniem:

$$(31) \quad b'^2 [\Omega'(x, y, z)]^2 + b''^2 [\Omega''(x, y, z)]^2 = b'^4 b''^4 \sin^4 \vartheta.$$

Boki węgła wektora, mającego składowe \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , określone równościami:

$$\underline{u} = e^{i\omega} u, \quad \underline{v} = e^{i\omega} v, \quad \underline{w} = e^{i\omega} w$$

są przy dowolnej rzeczywistej wartości parametru ω połowami średnic ze sobą sprzężonych teźże elipsy, będącej przecięciem powierzchni (9) i (31), przyczem pola dwóch trójkątów, rozwiązanych powyżej na każdej płaszczyźnie spółrzędnych, są sobie równe i co do wartości bezwzględnej i co do znaku. Zaznaczamy przytem, że dwa wyprowadzone powyżej związki, mianowicie pierwszy ze związków (23) i związek (25) wyrażają dla rzeczony elipsy twierdzenia Apollonjusza. Boki węgła wektora, mającego składowe \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} , określone równościami:

$$\underline{u} = \rho e^{i\omega} u, \quad \underline{v} = \rho e^{i\omega} v, \quad \underline{w} = \rho e^{i\omega} w,$$

gdzie ρ jest dowolną liczbą dodatnią, a ω dowolną liczbą rzeczywistą, są połowami średnic ze sobą sprzężonych elipsy, będącej przecięciem płaszczyzny (9) i walca eliptycznego:

$$b'^2 [\Omega' (x, y, z)]^2 + b''^2 [\Omega'' (x, y, z)]^2 = \rho^2 b'^4 b''^4 \sin^4 \vartheta,$$

przyczem pola dwóch trójkątów, rozważanych powyżej na każdej płaszczyźnie współrzędnych, są i co do wartości bezwzględnej i co do znaku do siebie proporcjonalne z czynnikiem proporcjonalności ρ^2 . Zaznaczamy przytem, że związek (24) można interpretować, jako wyrażenie równości mimośrodków uważanych tutaj elips.

§ 4. Gdy wektor o składowych u, v, w ma dwukierunek rzeczywisty, wówczas ze wzorów (5) wynikają na jego współczynniki kierunkowe λ, μ, ν wartości rzeczywiste. Wektor o składowych λ, μ, ν położony jest na prostej (8). Długość pierwszego boku węgła wektora o składowych λ, μ, ν równa się jedności, a długość drugiego boku tego węgła równa się zeru.

Gdy wektor o składowych u, v, w jest wektorem izotropowym, wówczas składowe te nazwalibyśmy także jego współczynnikami pseudokierunkowemi. Węgiel wektora o tych składowych rozważaliśmy już w końcu § 2.

Gdy wektor o składowych u, v, w ma urojony dwukierunek nieizotropowy, wówczas ze wzorów (5) otrzymują się współczynniki kierunkowe λ, μ, ν tego wektora, spełniające związek:

$$(32) \quad \Phi (\lambda, \mu, \nu) = 1$$

i nie będące wszystkie jednocześnie wielkościami rzeczywistymi. Zajmiemy się zbadaniem węgła wektora, którego składowemi są wielkości λ, μ, ν . Jeżeli napiszemy je w postaci:

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'', \quad \mu = \mu' + i\mu'', \quad \nu = \nu' + i\nu'',$$

gdzie litery z jednym i z dwoma akcentami oznaczają wielkości rzeczywiste, to można będzie warunek (32) zastąpić warunkami:

$$(33) \quad \begin{cases} \Phi (\lambda', \mu', \nu') - \Phi (\lambda'', \mu'', \nu'') = 1, \\ \Phi (\lambda', \mu', \nu'; \lambda'', \mu'', \nu'') = 0. \end{cases}$$

Wielkości λ', μ', ν' są składowemi pierwszego boku badanego węgła, a wielkości λ'', μ'', ν'' są składowemi drugiego boku badanego węgła. Warunki (33) orzekają, że kwadrat długości pierwszego boku węgła równa się sumie kwadratu długości drugiego boku węgła i dodatniej jedności oraz, że boki tego węgła są do siebie prostopadłe.

Zapytamy, jak określić liczbę rzeczywistą ujemną ω , spełnia-

jącą nierówność $\omega > -\pi$ i liczbę rzeczywistą dodatnią ρ , które czyniłyby zadość równaniu:

$$(34) \quad \rho e^{i\omega} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(u, v, w)}},$$

gdzie przez pierwiastek kwadratowy rozumiemy taką jego wartość, której jedna z amplitud jest wielkością dodatnią mniejszą od π . Dla takich liczb ω i ρ mielibyśmy równości:

$$\lambda = \rho e^{i\omega} u, \quad \mu = \rho e^{i\omega} v, \quad \nu = \rho e^{i\omega} w$$

i bliższe określenie tych liczb możemy oprzeć zamiast na wzorze (34) na związkach (18) i (33). Na podstawie związków (18) zachodzą równości:

$$(35) \quad \begin{cases} \lambda' = \rho (u' \cos \omega - u'' \sin \omega), & \lambda'' = \rho (u' \sin \omega + u'' \cos \omega), \\ \mu' = \rho (v' \cos \omega - v'' \sin \omega), & \mu'' = \rho (v' \sin \omega + v'' \cos \omega), \\ \nu' = \rho (w' \cos \omega - w'' \sin \omega), & \nu'' = \rho (w' \sin \omega + w'' \cos \omega), \end{cases}$$

a więc można tu zastosować trzeci ze związków (19) i dojść tą drogą do przedstawienia drugiego ze związków (33) w formie następującej:

$$(36) \quad b' b'' \cos \vartheta (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) + (b'^2 - b''^2) \sin \omega \cos \omega = 0.$$

Związek ten można zastąpić związkami:

$$(37) \quad \begin{cases} b''^2 \cos \omega + b' b'' \cos \vartheta \sin \omega = S b' b'' \sin \vartheta \cos \omega, \\ b' b'' \cos \vartheta \cos \omega + b'^2 \sin \omega = S b' b'' \sin \vartheta \sin \omega, \end{cases}$$

w których S oznacza nową niewiadomą. Pisząc związki (37) w postaci:

$$\begin{aligned} (b''^2 - b' b'' \sin \vartheta S) \cos \omega + b' b'' \cos \vartheta \sin \omega &= 0, \\ b' b'' \cos \vartheta \cos \omega + (b'^2 - b' b'' \sin \vartheta S) \sin \omega &= 0, \end{aligned}$$

widzimy, że otrzymuje się z nich na niewiadomą S równanie stopnia drugiego:

$$(38) \quad S^2 - IS + 1 = 0,$$

w którym zastosowano oznaczenie:

$$(39) \quad I = \frac{b'^2 + b''^2}{b' b'' \sin \vartheta}.$$

Zauważmy, że wielkość stojąca po prawej stronie równości (24) jest $1:I^2$. Wielkość I nazwiemy *niezmiennikiem urojonego dwu-*

kierunku. Przy założeniu, że ϑ jest kątem bezwzględnym, niezmiennik ten ma wartość dodatnią. Łatwo dostrzec przytem, że wartość tego niezmiennika jest dla każdego urojonego dwukierunku nieizotropowego większa od 2. Dla każdego dwukierunku izotropowego $I=2$. Równanie (38) ma w przypadku dowolnego urojonego dwukierunku nieizotropowego dwa różne od siebie pierwiastki dodatnie, z których mniejszy oznaczmy przez S' , a większy przez S'' . Pierwiastki te określają się wzorami:

$$S' = \frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4}),$$

$$S'' = \frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4}),$$

gdzie przez pierwiastek kwadratowy rozumiemy jego wartość dodatnią. W przypadku dwukierunku izotropowego równanie (38) ma jeden pierwiastek podwójny, równy dodatniej jedności. Zadanie nasze wymaga szczegółowego rozważenia dla dwu kierunków urojonych nieizotropowych. Oznaczmy przez $\bar{\omega}$ wartość niewiadomej ω , otrzymującej się z równań (37), gdy przyjmiemy w nich $S=S'$. Oznaczmy podobnie przez ω^* wartość niewiadomej ω , otrzymującej się z równań (37), gdy przyjmiemy w nich $S=S''$. Wtedy mieć będziemy układ równości:

$$(40) \quad \begin{cases} b''^2 \cos \bar{\omega} + b' b'' \cos \vartheta \sin \bar{\omega} = S' b' b'' \sin \vartheta \cos \bar{\omega}, \\ b' b'' \cos \vartheta \cos \bar{\omega} + b'^2 \sin \bar{\omega} = S' b' b'' \sin \vartheta \sin \bar{\omega} \end{cases}$$

i układ równości:

$$(41) \quad \begin{cases} b''^2 \cos \omega^* + b' b'' \cos \vartheta \sin \omega^* = S'' b' b'' \sin \vartheta \cos \omega^*, \\ b' b'' \cos \vartheta \cos \omega^* + b'^2 \sin \omega^* = S'' b' b'' \sin \vartheta \sin \omega^*. \end{cases}$$

Z równości (40) wynika równość:

$$(42) \quad b''^2 \cos^2 \bar{\omega} + 2 b' b'' \cos \vartheta \cos \bar{\omega} \sin \bar{\omega} + b'^2 \sin^2 \bar{\omega} = S' b' b'' \sin \vartheta,$$

a z równości (41) wynika równość:

$$(43) \quad \begin{aligned} b''^2 \cos^2 \omega^* + 2 b' b'' \cos \vartheta \cos \omega^* \sin \omega^* + \\ + b'^2 \sin^2 \omega^* = S'' b' b'' \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Z obu układów równości (40) i (41) łatwo wyprowadzić równość:

$$\cos \omega^* \cos \bar{\omega} + \sin \omega^* \sin \bar{\omega} = 0,$$

skąd pomiędzy kątami $\bar{\omega}$ i ω^* wynika związek:

$$(44) \quad \omega^* = \bar{\omega} + \varepsilon \frac{\pi}{2}, \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

który zastąpić można związkami:

$$\cos \omega^* = -\varepsilon \sin \bar{\omega}, \quad \sin \omega^* = \varepsilon \cos \bar{\omega}.$$

Zauważmy, że jeżelibyśmy w równości (43) zamiast wielkości ω^* wprowadzili wielkość $\bar{\omega}$ na podstawie związku (44), to otrzymałoby się:

$$(45) \quad b''^2 \sin^2 \bar{\omega} - 2b'b'' \cos \vartheta \sin \bar{\omega} \cos \bar{\omega} + b'^2 \cos^2 \bar{\omega} = S''b'b'' \sin \vartheta.$$

Podobnie jeżelibyśmy w równości (42) zamiast wielkości $\bar{\omega}$ wprowadzili wielkość ω^* na podstawie związku (44), to wynikłoby:

$$(46) \quad b''^2 \sin^2 \omega^* - 2b'b'' \cos \vartheta \sin \omega^* \cos \omega^* + b'^2 \cos^2 \omega^* = S'b'b'' \sin \vartheta.$$

Jeżeli w pierwszym i w drugim ze wzorów (19) przyjmiemy $\omega = \bar{\omega}$, to na podstawie związków (45) i (42) otrzymamy:

$$(47) \quad \begin{cases} \Phi(\lambda', \mu', \nu') = \rho^2 S''b'b'' \sin \vartheta, \\ \Phi(\lambda'', \mu'', \nu'') = \rho^2 S'b'b'' \sin \vartheta. \end{cases}$$

Jeżeli zaś w pierwszym i drugim ze wzorów (19) przyjmiemy $\omega = \omega^*$, to na podstawie związków (46) i (43) otrzymamy:

$$(48) \quad \begin{cases} \Phi(\lambda', \mu', \nu') = \rho^2 S'b'b'' \sin \vartheta, \\ \Phi(\lambda'', \mu'', \nu'') = \rho^2 S''b'b'' \sin \vartheta. \end{cases}$$

Dla rozwiązania naszego zadania musimy jeszcze spełnić pierwsze z równań (33) przez rzeczywistą dodatnią wielkość ρ . Ponieważ $S'' > S'$, przeto widzimy ze wzorów (48), że założenie $\omega = \omega^*$ prowadzi do sprzeczności, a ze wzorów (47), że założenie $\omega = \bar{\omega}$ prowadzi do równania:

$$\rho^2 (S'' - S')b'b'' \sin \vartheta = 1,$$

albo do równania:

$$\rho^2 b'b'' \sin \vartheta \sqrt{I^2 - 4} = 1,$$

skąd otrzymujemy wartość:

$$(49) \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{b'b'' \sin \vartheta} \sqrt{I^2 - 4}},$$

gdzie oba pierwiastki oznaczają ich rzeczywiste wartości dodatnie. W ten sposób zadanie nasze rozwiązuje się wzorami (35), przyjmując w nich tę wartość $\omega = \bar{\omega}$, wynikającą z równań (40), której wstawa jest ujemną, oraz wartość na ρ , wynikającą ze wzoru (49).

Wektory λ', μ', ν' i λ'', μ'', ν'' , które wyznaczyliśmy w ten sposób, są pierwszym i drugim bokiem węgła wektora o składowych λ, μ, ν . Wektory te mają kierunki główne elips, o których była mowa w § 3.

Zwróćmy tu jeszcze uwagę na wartości funkcji trygonometrycznych pewnych kątów. Mamy widocznie:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda', \mu', \nu'; \lambda, \mu, \nu) &= \Phi(\lambda', \mu', \nu'), \\ \Phi(\lambda'', \mu'', \nu''; \lambda, \mu, \nu) &= i \Phi(\lambda'', \mu'', \nu''). \end{aligned}$$

To znaczy, że dostawa kierunku λ, μ, ν z kierunkiem wektora λ', μ', ν' jest $\sqrt{\Phi(\lambda', \mu', \nu')}$, a dostawa kierunku λ, μ, ν z kierunkiem wektora λ'', μ'', ν'' jest $i \sqrt{\Phi(\lambda'', \mu'', \nu'')}$, gdzie w obu przypadkach przez pierwiastek kwadratowy rozumiemy jego wartość dodatnią. Na podstawie wzorów (47) i (49) dostawy te możemy przedstawić odpowiednio wzorami:

$$\frac{\sqrt{S''}}{\sqrt[4]{I^2 - 4}}, \quad i \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt[4]{I^2 - 4}},$$

gdzie oba pierwiastki oznaczają ich rzeczywiste wartości dodatnie. Wobec tego wstawy tych kątów są odpowiednio równe wielkościom:

$$\varepsilon' i \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt[4]{I^2 - 4}}, \quad \varepsilon'' \frac{\sqrt{S''}}{\sqrt[4]{I^2 - 4}},$$

gdzie pierwiastki mają te same wartości, co poprzednio, a $\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Wreszcie styczne tych kątów są odpowiednio równe wielkościom:

$$\varepsilon' i \sqrt{\frac{S'}{S''}}, \quad -\varepsilon'' i \sqrt{\frac{S''}{S'}}$$

przy tych samych co poprzednio znaczeniach symbolów tutaj figurujących.

W. Sierpiński.

**Uwaga do zagadnienia mierzalności zbiorów
rzutowych.**

Streszczenie.

Autor dowodzi, że na to, aby okazać, że wszystkie zbiory rzutowe są mierzalne w znaczeniu Lebesgue'a, wystarcza okazać, że mierzalne są zbiory rzutowe linjowe.

W. Sierpiński.

**Remarque sur le problème de la mesurabilité
des ensembles projectifs.**

Un des problèmes importants, non résolus, de la théorie des ensembles projectifs est le problème s'ils sont tous mesurables (L)¹⁾. Le but de cette Note est de prouver qu'il suffira de résoudre ce problème pour les ensembles projectifs *linéaires*. Pour fixer les idées, nous traiterons ici seulement les ensembles projectifs de la classe 2, et nous prouverons que si tout ensemble projectif linéaire de la classe 2 est mesurable (L) (linéairement), tout ensemble projectif plan de la classe 2 est mesurable (L) superficiellement. (Pour le cas des ensembles projectifs d'une classe supérieure ou ayant un nombre supérieur de dimensions le raisonnement serait tout à fait analogue).

Les ensembles projectifs de la classe ≤ 2 ce sont, comme on sait, ou bien les images continues des ensembles CA (complémentaires des ensembles analytiques) linéaires — nous les appellerons ensembles P_2 — ou bien les complémentaires des ensembles P_2 . Pour démontrer que tous les ensembles projectifs plans de la classe ≤ 2 sont mesurables (L), il suffira évidemment de prouver que les ensembles P_2 plans sont mesurable (L), et il suffira même de considérer les ensembles P_2 situés dans un carré K dont les côtés sont $=1$ (tout ensemble P_2 plan pouvant être divisé en un nombre fini ou dénombrable de tels ensembles).

Supposons donc que tout ensemble P_2 linéaire est mesurable (L) (linéairement). Pour en déduire que tout ensemble P_2 situé

¹⁾ Voir N. Lusin: *Fundamenta Mathematicae* t. X, p. 91.

dans le carré K est mesurable (L) superficiellement, nous utiliserons une propriété remarquable de la courbe de M. Peano.

Soit $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) la courbe continue de M. Peano remplissant le carré K (celle qu'on obtient par les divisions successives du carré en 9 carrés plus petits et par les divisions correspondantes du segment en 9 segments égaux). T étant un ensemble de points donné quelconque de l'intervalle $(0,1)$, nous désignerons par $f(T)$ l'image de l'ensemble T obtenue par la courbe de Peano, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $(\varphi(t), \psi(t))$ du plan, tels que $t \in T$. Or, E étant un ensemble plan $\subset K$, nous désignerons par $g(E)$ l'ensemble de tous les nombres t de $(0,1)$, tels que $(\varphi(t), \psi(t)) \in E$.

Les points multiples de la courbe de Peano ont, comme on sait, au moins une coordonnée rationnelle (de la forme $k/3^n$) et par suite forment un ensemble de mesure (superficielle) nulle. Il en résulte que les images $f(P)$ et $f(Q)$ des ensembles P et Q disjoints sont presque disjoints (c'est à dire leurs points communs forment un ensemble de mesure nulle).

La propriété de la courbe de Peano, dont nous ferons usage, est la suivante¹⁾:

Quel que soit l'ensemble T de points de l'intervalle $(0,1)$, la mesure extérieure (resp. intérieure) linéaire de l'ensemble T est égale à la mesure extérieure (resp. intérieure) superficielle de son image $f(T)$.

La démonstration de cette propriété est très simple. On remarque d'abord qu'il résulte immédiatement de la construction de la corbe de Peano que si l'on divise l'intervalle $(0,1)$ en 9^n intervalles égaux, et si Δ est un des intervalles ainsi obtenus, $f(\Delta)$ est un carré dont la surface est de mesure 9^{-n} , donc égale à la mesure de la longueur de l'intervalle Δ . Réciproquement, si l'on divise le carré K en 9^n carrés et si Q est l'un d'eux, la mesure superficielle de Q est égale à la mesure linéaire de $g(Q)$.

Appelons *élémentaires* les intervalles (resp. les carrés) qui proviennent de la division de l'intervalle (resp. du carré) fondamental en 9, 9^2 , 9^3 ,... parties égales.

Tout ensemble ouvert linéaire (resp. plan) étant une somme d'une infinité dénombrable des intervalles (resp. carrés)

¹⁾ Cf. F. Riesz: *Systeme integrierbarer Funktionen*, § 16, Math Annalen 1910.

élémentaires n'empiétant pas les uns sur les autres, il résulte tout de suite de la remarque que nous avons fait que si G est un ensemble ouvert contenu dans $(0,1)$ (resp. dans K), $f(G)$ (resp. $g(G)$) est un ensemble ouvert contenu dans le carré K (resp. dans $(0,1)$), tel que sa mesure superficielle (resp. linéaire) est égale à la mesure linéaire (resp. superficielle) de G .

Tout ensemble linéaire (resp. plan) pouvant être enfermé dans un ensemble ouvert dont la mesure diffère de sa mesure extérieure aussi petit que l'on veut, il en résulte facilement la propriété désirée pour la mesure extérieure. Pour en déduire la propriété analogue de la mesure intérieure, il suffit de passer au complémentaires et de se rappeler que les images des ensembles disjoints sont presque disjointes.

Une conséquence immédiate de la propriété démontrée est que *les images (obtenues par la courbe de Peano) des ensembles linéaires mesurables (L) (linéairement) sont mesurables (L) (superficiellement).*

Soit maintenant E un ensemble P_2 donné quelconque, situé dans le carré K . Désignons par H l'ensemble de tous les nombres t de $(0,1)$, tels que $(\varphi(t), \psi(t)) \in E$. Les fonctions φ et ψ étant continues, il résulte sans peine des propriétés connues des ensembles P_2 que H est un ensemble P_2 linéaire, donc, par hypothèse, un ensemble mesurable (L). Or, on a évidemment $E = f(H)$. L'ensemble H étant mesurable (L), il en résulte, d'après la propriété démontrée, que l'ensemble E est mesurable (L) (superficiellement), c. q. f. d.

Henryk Świdziński.

Utwory Jurajskie między Małogoszczą a Czarną Nidą na zachodnim zboczu Gór Świętokrzyskich.

Przedstawił J. Lewiński.

Streszczenie.

Teren, badany przezemnie w latach 1925-27, stanowi wycinek z pasa jurajskiego na zachodnim zboczu gór Świętokrzyskich. Od NE ograniczony jest wychodniami triasu, od SW — kredy; na zachodzie dochodzi do Małogoszczy, na wschodzie granicę stanowi Czarna Nida.

Wzmianki o tym obszarze znajdujemy u szeregu dawnych geologów, poczynając od P u s c h a¹⁾. Naogół są fragmentaryczne i nie zawsze ściśle. Na kilka lat przed wojną badał te strony L e w i ń s k i²⁾, który po raz pierwszy dał przegląd stratygraficzny całej jury, oparty na obfitej faunie.

Najstarszym ogniwem jest kellowej. Ciągnie się wąskim pasem od Młynków nad Łośnią do Korzecka, gdzie wyklinowuje się. Składa się z zielonawo-szarych i żółtawych margli i wapieni piaszczystych, z częstymi skrzemienieniami, o oryginalnej, bulastej powierzchni warstw. W profilu drogi z Miedzianki do Milechów widać nadto dwie cienkie wkładki twardych wapieni czerwonych. Fauna trafia się dość rzadko i źle zachowana. Najpospolitszymi są belemnity, przeważnie połamane, trudne do oznaczenia. Pozatem posiadam: *Macrocephalites* sp., *Perisphinctes* sp., *Reineckia* sp., *Stephanoceras* cf. *coronatum* Brug. Miąższość kelloweju wynosi około 30 m., co wraz z obecnością batu w sąsiednich okolicach (Chęciny³⁾) świadczyłoby, że kellowej jest wykształcony w całości (w paśmie krakowsko-wieluńskim K o r o n i e w i c z - R e h b i n d e r⁴⁾ i P r e m i k⁵⁾ podają znacznie mniej — do 20 m.).

¹⁾ G. G. Pusch. Geognostische Beschreibung von Polen 1836.

²⁾ J. Lewiński. Utwory jurajskie na zach. zboczu g. Świętokrzyskich. Pos. War. Tow. Nauk. 1912.

³⁾ J. Lewiński. Les dépôts jurassiques près la Station Chęciny. Bull. Ac. d. Sciences. Cracovie 1908.

⁴⁾ Koroniewicz-Rehbinder. Geolog. izsled. w dole linii Kielce-Herby żel. drogi. Petersburg 1913.

⁵⁾ J. Premik. Warstwy glaukonit. i kordatowe w Wieluniu i Lipiu. Sprawozdania P. I. G. t. II, 1924.

Stratygrafia jury białej oparta jest na podziale Lapparent'a, wprowadzonym do jury gór Świętokrzyskich przez Lewińskiego. Ogólny charakter tych utworów najbardziej przypomina jurę francuską (basen paryski, Jura i b. akwitański). Już na podstawie litologicznego wykształcenia można wydzielić cztery grupy: oksford, raurak, astart i kimeryd. Fauna uzasadnia ten podział.

Oksford. Bardzo źle odsłonięty, ciągnie się równoległe do kelloweju, budując wraz z nim szereg wzgórz. Lepsze wychodnie są dopiero w okolicach Korzecka. W dolnej części przedstawia się jako szarawe wapienie, nieraz margliste; resztę stanowi gruby kompleks białych i kremowych wapieni, dobrze uławiconych. Charakterystyczną cechą są liczne drobne skrzemienia, występujące w postaci ciemniejszych plamek na przełamach. Fauna bardzo bogata, jednak dla ubóstwa odkrywek mało dostępna. Z form charakterystyczniejszych przytoczę: *Haploceras* cf. *Erato* d'Orb., *Ochetoceras* cf. *Henrici* d'Orb., *Oppelia oculata* Phill., *Peltoceras* sp., *Perisphinctes* cf. *Wartae* Buk., *Rhynchonella selliformis* Lewiński i t. d.

Raurak: dzieli się na dwie grupy: 1. Dolna — wyrażona potężną serją wapieni skalistych, naogół bez widocznego uławicenia, białawo-żółtawych, skalcytowych. Skamieniałości trafiają się w cienkich, soczewkowatych, zdaje się, złożach ziarnistego, zupełnie skalcytowanego wapienia. Przewagę wybitną mają ramienionogi. Między innymi liczna jest *Megerlea loricata* d'Orb., oraz *Acanthothyris spinulosa* Opp., *Rhynchonella lacunosa* Quen., *Rhynchonella trilobata* Ziet., *Zeilleria* cf. *bucculenta* Sow., *Zeilleria humeralis* Roem., *Zeilleria pseudolagenalis* Moesch i t. p. Serja ta tworzy szereg wzgórz, od g. Wysprzenicy począwszy, do Korzecka. Poza to buduje południowe wzgórze pasma Bocheńskiego, oraz wychodzi na powierzchnię między wsią Bocheniec a Nową Wsią. 2. Część górną stanowią wapienie naogół płytowate, szarawe, miejscami margliste, z przerostami i bułami krzemieni o koncentrycznej budowie. Widoczne są dobrze jedynie na g. Bocheńskiej (pod szczytem 327) w kontakcie prawie z astartem; poza to w dolinach, oddzielających wychodnie wapieni skalistych od astartu, pospolite są krzemienie, bądź wapienie skrzemieniałe, z fauną. Ze skamieniałości, znalezionych na górze Bocheńskiej i w krzemieniach, posiadam m. inn.: *Pecten* cf. *epis-*

copalis de Lor., *Pecten subspinosus* Schloth., *Rhynchonella Astieriana* d'Orb., *Terebratula Cracoviensis* Siem., *Cidaris* cf. *Blumenbachii* Münst., *Cidaris florigemma* Phill. i t. p.

A start: jest to serja ogromnie zmienna litologicznie. Wapienie koralowe, oolityczne, płytowe i t. d. przelawicają się wielokrotnie. Można wyróżnić kilka grup:

1. Najniższa część — białe wapienie płytowe, miejscami kredowate, dość miękkie, czasem twardsze z przerostami pasiastych krzemieni. Skamieniałości występują głównie w ławicach. *Aptyxiella* cf. *Cottaldina* d'Orb., *Apt.* cf. *sexcostata* d'Orb., *Nerinella* cf. *bicristata* Etal., *Mytilus pectinatus* Sow., *Zeilleria* cf. *humeralis* Röm.

2. Wapienie oolityczno-koralowe z ławicami grochowca. Liczne są neryneje, oraz *Cardium corallinum* Leym.

3. Serja różnych wapieni płytowych, źle odsłoniętych; fauna uboga, przeważnie cienkie wkładki muszlowca z drobnymi małżami i ramienionogami.

4. Gruba ławica dicerasowo-koralowa z liczną fauną rafową: *Nerinea* cf. *subcylindrica* d'Orb., *Pseudonerinea Clio* d'Orb., *Ptygmatis bruntrutana* Thurm., *Trochalia depressa* Voltz, *Lima denticulata* d'Orb., *Pachyerisma* sp., *Pachymytilus* sp. Z ramienionogów pospolite są *Rhynchonella matronensis* de Lor., *Rhynch. pinguis* Röm., *Terebratula* cf. *cincta* Cott. var. „a” Nal.

5. Kompleks wapieni płytowych z niegrubemi ławicami muszlowca z *Exogyra bruntrutana* Th., *Trigonia* af. *Leblanci* Mun. i t. p. Nadto *Harpagodes (Pteroceras)* cf. *aranaea* d'Orb., *Natica phasianelloides* d'Orb., *Rhynchonella pinguis* Röm. i t. d.

6. Serja oolitów drobnoziarnistych, zwięzłych z przewarstewkami b. bogatemi w skamieniałości: *Alectryonia pulligera* Goldf., *Exogyra* cf. *auriformis* Gf. *Exog. bruntrutana* Th., *Gervillia* sp. (licznie), *Mactromya rugosa* Ag., *Modiola perplicata* Et., *Mytilus jurensis* Mér., *Perna subplana* Et. (licznie), *Pinna suprajurensis* d'Orb., *Rhynchonella pinguis* Röm., *Terebratula cincta* Cott., *Zeilleria humeralis* Röm. etc.

7. Cienkopłytowe, białe wapienie z wkładami rogowca. Wapienie te zawierają cienkie przewarstewki materiału grubszego i na powierzchni, zwiertzałej zwłaszcza, przybierają wygląd wybitnie pasiasty. Kompleks ten fauny nie zawiera, natomiast, ze

względu na swe charakterystyczne wykształcenie, stanowi ważną jednostkę przewodnią.

Kimeryd — da się podzielić na trzy grupy:

1. Dolna — oolity drobno-ziarniste, u dołu margliste, z warstwami obfitymi w skamieniałości; ku górze bardziej zbite. W najwyższej części zaczynają się pojawiać wkładki ilasto-margliste, wiążąc w sposób ciągły z następną serją. Ponadto w części dolnej, w okolicach Żernik, pojawia się rafa koralowa, gdzieindziej niewidoczna, oraz w części stropowej, w NW końcu niecki Bolmińskiej, wykształcona jest dość gruba ławica ostrygowa, złożona niemal wyłącznie z *Alectryonia pulligera* Gf. Masowo (w ławicach) występują także *Exogyra bruntrutana* Th. i *Terebratula subsella* Leym. Pozatem często są: *Natica hemisphaerica* Röm., *Ceromya excentrica* Ag., *Isocardia striata* d'Orb., *Lithodomus socialis* Th., *Modiola aequiplicata* Strom., *Mytilus pectinatus* Sow., *Trigonia papillata* Ag., *Rhynchonella pinguis* Röm., *Terebratula* cf. *Bauhini* Etal., *Hemicidaris intermedia* Flem. i t. d.

2. Część środkowa: wapienie płytowe szare, ilaste i margliste, nieraz gruzełkowate z ławicami muszlowca, złożonego przeważnie z *Al. pulligera* Gf. i *Exogyra bruntrutana* Th. Pojawiają się też amonity, jak *Aspidoceras* cf. *inflatum* Quen., *Holcostephanus* cf. *stephanoides* Opp., *Perisphinctes* sp. Ukazuje się wreszcie *Exogyra virgula* Defr., w niedużej coprawda ilości.

3. Najwyższy kimeryd wykształcony jest jako margle ilaste i gliny ze zlepanami *Exogyra virgula* Defr.

Astart i kimeryd budują obramowanie synkliny Bolmińskiej, oraz ciągną się pasem od Małogoszczy do Brzeźna, przyczem tworzą dwa razy zatoki, zwrócone na zachód, jedna przy Małogoszczy, druga koło Bizorendy. Większość wzgórz na tym terenie zbudowana jest z powyższych utworów.

Z utworów młodszych zasługuje przedewszystkiem na uwagę kreda, ocalała w samym środku niecki Bolmińskiej. Składa się ona z trzech ogniw, znanych Czarnockiemu¹⁾, który kartował część tego obszaru.

¹⁾ J. Czarnocki. Wyniki badań geol. w SW i W cz. g. Świętokrzyskich. Pos. Nauk. P. I. G. zesz. 15, 1926.

Najstarsze są piaskowce białe, żółte, lub ceglaste sypkie, z luźno ułożonymi ziarnami kwarcu. Zawierają liczne i oryginalne konkretje krzemionkowe, podobne nieraz do koralii, czy gąbek, a w górnej części — koncentryczne skupienia limonityczne. Wiek ich nie jest dobrze ustalony; są one starsze od cenomańskich piasków glaukonitowych, zalegających na nich. Czarnocki zalicza je do albu. Fauny nie zawierają ani śladu, jedynie na granicy z kimerydem występuje zlepieniec z liczniami, pogruchotaniami szczątkami skorupki, wśród których daje się rozpoznać *Exogyra virgula* Defr. na wtórnem złożu. Piaskowce te występują także od Małogoszczy do Brzeźna prawie, przyczem pod Brzeźnem wyklinowują się.

Cenoman: w postaci piasków i piaskowców glaukonitowych otacza płat margli turońskich w Bolminie; widoczny jest na północ od Bizorendy w jądrze synkliny i daje się prześledzić od Bizorendy do Brzeźna.

Turon: zielonawe i szare margle glaukonityczne z liczniami inoceramami, czasem jeżowcami i czarnymi krzemieniami. Tworzą wspomniany płat w Bolminie, zaznaczają najgłębsze miejsce synkliny koło Bizorendy, i ciągną się aż do Brzeźna.

Trzeciorzęd: w trzech miejscach zalegają niezgodnie na utworach starszych — żwirowiska, złożone z doskonale otoczonych, nawet często wypolerowanych ziaren kwarcu mlecznego, krzemieni i t. d. Charakterem ogólnym identyczne ze żwirowskiem z pod Tokarni, zaliczonym przez Czarnockiego¹⁾ do sarmatu. Skamieniałości nie zawierają.

Dyluwjum w postaci mocno przemytej i spiaszczonej moreny, piasków i glin nieprawidłowo warstwowych, zajmuje doliny i obniżenia w terenie.

Löss: miejscami warstwowany, pokrywa S i SW część pasma Korzeckowskiego.

Tektonika: środek terenu zajmuje brachysynkliną Bolmińską, asymetryczną, na obu końcach (nad Łośnią i k. Tokarni) szybko wychodząca w powietrze.

Środek jej zaznacza płat kredy w Bolminie. Od południa towarzyszy fałd Bocheński, zanurzający się w okolicach Małogoszczy i będący przedłużeniem fałdu Zbrzańskiego¹⁾.

¹⁾ Lewiński. Op. cit.

Jądro, zbudowane z rauraku, wiąże się prawdopodobnie wąskim pasem z raurackim obrzeżeniem fałdu Lasocińskiego¹⁾. Mała synklina (Małogoska Czarnockiego) oddziela oba fałdy. Koło Bizorendy istnieje znowu mała i wąska synklina, którą nazywam Bizorendzką, zaznaczona płatem turonu w obramowaniu utworów starszych. Od południa towarzyszy jej wąski i długi fałd z jądrem kimerydzkiem, dochodzący do Bizorendy. Jest to przedłużenie fałdu Sobkowskiego, wyróżnionego przez Czarnockiego po drugiej stronie Nidy. Pas, przyległy do triasu, budującego Pd skrzydło fałdu Chęcińskiego, jest silnie zaburzony. W pobliżu Łośni widać w nim parę niedużych uskoków. Koło wsi Miedzianka tworzy mały fałd z niewielką synkliną od strony N. W okolicach Polichna i Korzecka warstwy te są przeważnie obalone na Pd, przyczem koło Zarośla Korzeckowskiego widać dwa małe uskoki. Pozatem na całym tym obszarze istnieje jeszcze jeden uskok, na W od Milechów, przesuwający warstwy g. Brodowej w stosunku do g. Bocheńskiej.

Na zakończenie chciałbym wyrazić podziękowanie Panu Profesorowi Janowi Lewińskiemu za nadzwyczaj życzliwe kierownictwo w pracy i pomoc, P. J. Czarnockiemu za wskazówki, i P. A. Paszewskim za wielokrotnie udzielaną gościnę.

Zakład geologiczny Uniwersytetu Warszawskiego.

H. Świdziński.

Resumé.

A l'initiative de M. le Professeur J. Lewiński, l'auteur a exploré les dépôts jurassique entre le bourg de Małogoszcz et la rivière Czarna Nida, sur le versant occidental des montagnes Święty Krzyż.

Stratigraphie. Callovien: calcaires sablonneux et marnes jaune-verdâtres localement silicifiés. Faune mal conservée; nombreuses belémnites, *Macrocephalites* sp., *Reineckia* sp. Epaisseur 30 m.

¹⁾ Czarnocki. Op. cit.

Oxfordien. Environ 150 m. de calcaires en dalles, blancs, fins, un peu plus foncés à la base. Faune abondante: *Haploceras* cf. *Erato* d'Orb., *Ochetoceras* cf. *Henrici* d'Orb., *Oppelia oculata* Phill., *Rhynchonella selliformis* Lewiński etc.

Rauracien. Partie inférieure — calcaires à chailles, blancs, partiellement cristallisés. La faune est rassemblée dans des gisements en lentille. *Acanthothyris spinulosa* Opp., *Megerlea loricata* d'Orb., *Rhynchonella lacunosa* Quen. etc.

Partie supérieure: calcaires plus foncés, parfois marneux, avec concrétions de silex à structure concentrique. Nombreuses épines de *Cidaris florigemma* Phill., *Pecten subspinosus* Schlot., *Terebratula cracoviensis* Siem. etc. Ensemble environ 300 m.

Astartien. Composition très variable: calcaires en dalles, oolithes et calcaires coralligènes interstratifiés. Contient une faune abondante de Gastéropodes (Nérinées), de Dicéras, de polypiers etc. Epaisseur env. 250 m.

Kimméridgien. Partie inférieure: oolithes avec bancs d'huîtres (*Alectryonia pulligera* Gf.), *Exogyra bruntrutana* Th., *Terebratula subsella* Leym., etc. Partie moyenne — calcaires marneux et en dalles, gris, avec bancs subordonnés de lumachelle. Faune analogue à la précédente.

P. supérieure: marnes argileuses et argiles avec *Exogyra virgula* Deffr.

Cretacé: 1. Grès quartzeux, blancs, jaunes et rouges; probablement Albien.

2. Sables et grès glauconitiques — Cénomaniens.

3. Marnes glauconitiques avec de très nombreux Inocérames et avec concrétions de silex — Turonien.

Téctonique: le milieu du territoire est occupé par le synclinal de Bolmin, avec le Cretacé dans sa partie intérieure. Au sud se rapprochent le pli de Bocheniec à noyau rauracien et le petit synclinal de Małogoszcz. Près de Bizorenda dans l'aile occidentale du pli de Bocheniec apparaît un petit synclinal, accompagné au Sud par le pli de Sobków.

La zone adjacente au versant méridional de l'anticlinal de Chęciny est fortement disloquée, ici apparaissent de nombreuses failles, les couches sont perpendiculaires ou même renversées vers le Sud.

Gustaw Dehnel:

Przypadek nader wczesnej potworności podwójnej u kosa (*Planesticus merula merula* L.).

Przedstawił Jan Tur.

W tej notatce mam zamiar dodać do kazuistyki zarodkowych potworności podwójnych jeszcze jeden przypadek, znaleziony w jajku kosa (*Planesticus merula merula* L.).

Czynię to z następujących względów: przedewszystkiem potworność, którą tu opisuję, znajdowała się w bardzo wczesnym stadium rozwojowym, a w tych stadiach mamy dotychczas bardzo mało znanych przypadków potworności złożonych. Następnie, potworności podwójne u ptaków dzikich prawie że nie były notowane. Przeglądając literaturę odnośną stwierdziłem, że są nam znane: jeden przypadek potworności podwójnej u szpaka (*Sturnus vulgaris*) i jeden przypadek u wróbla (Klaussner). Jeżeli dodać do tego przypadek potworności potrójnej u *Stercorarius cephus* (Tur) to, kazuistyka przypadków wielotwórczości u ptaków dzikich jest już całkowicie wyczerpana. Wszystkie te przypadki odnoszą się do zarodków już dużo starszych, o przynajmniej kilkunastu parach protosomitów, jeżeli zaś chodzi o wróbla — to było to nawet pisklę na wylęgu. O ile wiem, przypadek mój zdaje się być „najmłodszym” znanym dotychczas potworem podwójnym u ptaków dzikich.

Podkreśliłem określenie: „ptaki dzikie” — a to dlatego, że zarodki tych ptaków mają specjalnie cenne znaczenie dla teratogenji. Jedynie bowiem jaja ptaków dzikich dają zupełną gwarancję, że zniesione i wylęgane były w warunkach najzupełniej normalnych, niezależnie od wpływu człowieka.

Ptaki domowe, od których pochodzi olbrzymia większość znanych nam anomalij wielotwórczych, rozwijają się i żyją w warunkach mocno zmienionych, odległych od naturalnego trybu ich życia. Jaja ich, które podlegają badaniu, są przewożone lub przenoszone na dalekie często odległości, wylęgane są zaś najczęściej w termostatach. Podlegają one w ten sposób wpływowi

najrozmaitszych czynników natury mechanicznej, termicznej, a często nawet i chemicznej.

Daleki jestem od myśli, że którykolwiek z wyżej wymienionych czynników może choć w czemśkolwiek wpłynąć na wytworzenie się potworności podwójnej. O ile wynika to bowiem z dotychczasowych moich badań, to zdaje się, że udało mi się stwierdzić, iż przyczyną powstawania potworów podwójnych są daleko idące anomalje jajnikowe, a mianowicie wielojądrowość oocytów. Wobec powyższego potworność podwójna byłaby zdecydowaną w jajku już dawno przed momentem jego zniesienia. A jednak istnieje pewna grupa badaczy, która na genezę potworności podwójnych zgoła inaczej się zapatruje, i twierdzi, że anomalje te wywołane są jakimś procesem rozszczepienia czy też blastotomji w normalnym jajku, przyczem ma to być wywołane jakowemiś przyczynami zewnętrznymi (zewnętrzne przyczyny u *Amniota?*!). Tutaj jednak, w przypadku opisanym przezemnie u dzikiego ptaka, mamy pewność, że wszystkie te przyczyny jak wstrząsanie, wpływ odczynników, których wyziewami jest zwykle zatrute powietrze w termostacie, wahania temperatury — były najzupełniej usunięte.

Zarodek potworny znajdował się w gnieździe, zawierającym pięć jaj. Jak zwykle u gniazdowników, po zniesieniu trzech jajek ptak rozpoczął normalne wysiadywanie, skutkiem czego trzy zarodki z nich pochodzące były prawie że w jednym stadjum, odpowiadającym mniej więcej około 48 godzinom wylęgu jaja kury; czwarte jajo, z którego uzyskałem ów anormalny zarodek, było wylęgane mniej więcej około 24 godzin, ostatnie było świeżo zniesione i znajdowało się w stadjum wczesnej blastodermy.

Jajka utrwalone były metodą zwykle stosowaną w naszej pracowni do wczesnych stadjów, a mianowicie trzyprocentowym kwasem azotowym. Przechowane w 90% alkoholu. Blastoderma zabarwiona potem karminem alunowym, fotografowana w balsamie kanadyjskim, w świetle przechodzącym.

Rozwój blastodermy kosa, szczególnie w stadjach wczesnych, kształtuje się zupełnie swoiście. Daremne byłoby doszukiwanie się jakiegokolwiek podobieństwa do rozwoju kury, opisywanego powszechnie we wszystkich podręcznikach embriologii, jako klasycznie „typowy” przykład rozwoju „ptaka wogóle”. Nie będę się szczegółowo rozwodził nad budową normalnej blastodermy kosa, zaznaczę jednak, że szczególnie w rozwoju początkowym

rzuca się tu przede wszystkim w oczy nadzwyczaj wyraźna i charakterystyczna tarczka zarodkowa („*Ecusson embryonnaire*”, „*Embryonalschild*”). Skutkiem tego blastoderma kosa nabiera do



Mikrofotogram blastodermy kosa z dwiema smugami pierwotnymi.
Obj. a_2 Zeiss'a. Pow. $23\frac{1}{2}$ raza.

pewnego stopnia cech gadzich, przypominając wyglądem swym wczesne stadja rozwojowe u *Laceta ocellata* Daud. (Tur).

Jak wspomniałem, anormalny zarodek kosa wylęgany był około 24 godzin. Blastoderma posiadała kształt zupełnie okrągły — średnica jej wynosiła 3,9 mm. Pole jasne ma kształt nieco wydłużony, wymiary jego wynoszą: długość 2,37 mm., szerokość 1,87 mm. Granica między nim a polem ciemnym zaznacza się dość ostro, mimo licznych falistych występów — wrostów pola ciemnego w pole jasne. W polu przezroczystym, przesunięta bardziej ku górnej jego części, znajduje się bardzo ostro odcinająca się na jego tle tarczka zarodkowa, eliptycznego kształtu. Wymiary tarczki wynoszą: szerokość 1,35 mm., długość, liczona do poziomu środka przebiegu smug, wynosi 1,52 mm.

W dolnej części tarczki i w zachodzącym w pole jasne występie jej — widać wyraźnie zarysowane, dwie, mocno do siebie wzajem zbliżone smugi pierwotne. Znajdują się one dopiero w po-

czątkowym stadium tworzenia się. Smugi te ułożone są do siebie pod kątem mniej więcej 30^0 , choć właściwie trudno tu mówić o kącie, gdyż smugi mają raczej kształt półksiężycowaty. W przedniej swej części zdają się bezpośrednio stykać ze sobą. Leżą one zupełnie symetrycznie względem siebie; koniec przedni prawej z nich zachodzi nieco dalej ku przodowi, Obie są w jednakowym stadium rozwoju. Co do wielkości, odpowiada każda z nich normalnej pojedynczej smudze u kosa w tem stadium. Szerokość obu smug w miejscu ich stykania się wynosi 275 μ . Rozciągłość największego zbliżenia obydwu smug: 350 μ . Okolica maximum zbliżenia smug znajduje się całkowicie w obrębie tarczki zarodkowej. Na granicy z jej częścią dolną, mniej ostro zarysowaną, rozpoczyna się wyraźne rozchodzenie się smug¹⁾.

Długość lewej smugi, w całości mierzona, wynosi 625 μ ., swobodna jej część, długa około 250 μ . odchyła się w lewo od linii środkowej tarczki. Grubość smugi w jej części tylnej wynosi 100 μ . Smuga prawa symetrycznie ułożona, to znaczy identycznie odchyłona od osi w stronę przeciwną, jest długa na 750 μ ., część jej wolna ma 375 μ . długości.

* * *

Jeżeli rzucimy okiem na szereg znanych potworności podwójnych ptaków w stadium smugi pierwotnej to zauważyć można (Tur), że istnieją pewne typy takich anomalij, które pojawiają się stosunkowo częściej w porównaniu z innymi. Oczywiście, potworności takie nie są identyczne jedna z drugą, mamy dość duże wahania rozwojowe, a jednak typ ustalony na zasadzie ułożenia względem siebie smug — pozostaje niewątpliwie ten sam.

Tur wyróżnia dwa specjalnie często pojawiające się typy potworności podwójnych. Jeden z nich, typ, do którego należy i tu opisany zarodek, nazwał on na cześć pierwszego badacza który go opisał, typem Allen Thomson'a. Mówi o tym typie co następuje: „Typ Allen Thomson'a, zdaje się, należy do najczęściej występujących u ptaków”... „w typie Allen Thomson'a, dwie smugi pierwotne przybierają pozycję dwu półksięży-

¹⁾ U kury znany był dotychczas jeden tylko przypadek, zbliżony poniekąd do tu opisanego, a mianowicie podany przez Tura. (Arch. de Biol. 1913, str. 334).

ców w herbie polskim „Ostoja”. Oczywiście jest, że w typie tym smugi mogą być w różnym stopniu oddalone od siebie, najbardziej charakterystycznym będzie tu symetryczne ułożenie smug o kształcie półksiężyca. W równym stopniu, jak i półksiężycowaty zarys smug, charakterystycznym jest dla typu Allen Thomson'a kształt pola przezroczystego. Mianowicie we wszystkich przypadkach znanych dotychczas, pole to ma kształt mniej lub więcej wyraźnie zarysowanego trójkąta, w którym wierzchołkiem będzie górna część pola jasnego, zaś kąty przy podstawie wypadają na przedłużeniu tylnych końców dwu smug. Tur uważa, że: „typ taki zachowuje się stale w razie, gdy wzajemny dwu smug stosunek jest ściśle taki, jak w klasycznym przypadku, po raz pierwszy w tym zakresie opisanym przez Allen Thomson'a (1844), gdzie obie smugi były bardzo blisko siebie ułożone”.... „Co ciekawsze, zarys ściśle taki sam pola przezroczystego występuje w przypadkach bardzo silnego zbliżenia obu smug, dochodzącego niemal do ich pozornego zlania się”. A więc zjawisko to powinno wystąpić i w przypadku opisywanym przezemnie — tymczasem pole jasne zachowuje się tak, jak w zarodku normalnym i ma, jak wspomniałem, kształt owalny. Sądzę, że da się to wytłomaczyć tem, że u kosa mamy zupełnie inny typ rozwoju. Tam gdzie rozwój odbywa się podobnie jak u kury, kaczki, cietrzewia, u tych ptaków pole jasne zachowywać się będzie zgodnie z podanym przez Tur'a opisem, natomiast w przypadku moim i wogóle u tych ptaków, gdzie na pierwszy plan wysuwa się tarczka zarodkowa, tam, przynajmniej w początkowych stadiach rozwoju, pole jasne żadnej deformacji przystosowanej do kształtu i ułożenia smug pierwotnych, ulegać nie będzie. Jak wiadomo bowiem, rozwój smugi pierwotnej odbywa się w kierunku od przodu ku tyłowi. Jako punkt stały należy przytem przyjąć węzeł Hensen'a. U wszystkich ptaków o typie rozwojowym zbliżonym do kury, u których tarczka zarodkowa formuje się jako utwór „bardziej rozproszony”, węzeł Hensen'a wypada mniej więcej w środku pola jasnego. W momencie, kiedy smuga zaczyna wznosić się ku tyłowi, cofające się pole jasne jak gdyby podąża za nią i skutkiem tego formuje się ten, tak charakterystyczny, trójkątny zarys pola jasnego. U kosa tarczka zarodkowa jest skoncentrowana na dużo mniejszej powierzchni pola jasnego, wyrastające z niej do tyłu smugi mają za sobą dużą przestrzeń pola jasnego:

poprostu nie istnieje potrzeba deformacji pola. Mimo to przypuszczam, że w momencie definitywnego zakończenia rozwoju smug, musiałyby nastąpić typowe rozszerzenie pola jasnego w tylnej jego części. A zatem wszystkie te różnice, wynikające z odmiennego typu rozwoju w stadjach późniejszych, wyrównają się, i otrzymamy w rezultacie obraz, najzupełniej odpowiadający opisowi Tura.

Jeżeli chodzi o przypuszczalny rozwój dalszy opisanego zarodka, to mam wrażenie, że miał on wszelkie szanse dalszego rozwijania się, gdyż dotychczas przynajmniej, to znaczy do momentu utrwalenia jaja, blastoderma robiła wrażenie najzupełniej zdrowej i zdolnej do dalszego rozwoju. Żadnych śladów wstrzymania rozwojowego, czy też nawet tak często występującego u potworów podwójnych opóźnienia — nie było. Mimo to, wszelkie snucia na temat dalszych losów takiego jak ten, wczesnego potwora, są całkowicie nierealne. Wszelkie bowiem tak zwane „prokonstrukcje” wiążące z taką przedziwną pewnością wczesne, często kilkunastogodzinne zarodki, poprzez olbrzymią przepaść wytworzoną przez brak stadjów późniejszych, z definitywnie już wykształconymi, powiedzmy „dorosłymi” potworami, są zawsze raczej wytworem tak czy inaczej nastrojonej wyobraźni autora, opisującego daną potworność. Dlatego tylko uchodzić mogą za słuszne, że nikt tych koncepcyj sprawdzić nie może. Oczywiście, w niektórych rzadkich przypadkach jakąś najbliższą przyszłość, ułożenie (w dość grubych zarysach) przyszłych zarodków, przewidzieć można, jednak pamiętać zawsze należy o tem, że (Tur): „wbrew temu, co by się zdawać mogło, kierunek dwu smug pierwotnych może nie mieć najmniejszego związku z następnem ułożeniem się dwu, odchodzących od nich strun grzbietowych, a znowu kierunek pierwotny wzrostu tych ostatnich ze swej strony nie decyduje jeszcze o ostatecznym typie potworności”.

Jedyną drogą która pozwoliłaby nam orzec coś pewnego o dalszych losach potworności, znanych nam ze wczesnych stadjów, byłoby znalezienie jakiejś samicy potwororodnej o skłonności do wydawania pewnego typu potworności, i otrzymanie kolejnej seryj rozwojowej jej jaj. Nastąpić to może tylko drogą przypadku. Bardziej prawdopodobnem jest, że bliższe losy różnych form potworności podwójnych same nam się wreszcie odkryją, a to wskutek z każdym dniem zwiększającej się kazuistyki zna-

nych przypadków tych kategorii. Główną rolę odegra tu mozolne dalszych faktów zbieranie.

Na zakończenie pozwolę sobie podziękować Nauczycielow
mojemu, Panu Profesorowi J. Turowi, za Jego pomoc i cenni
wskazówki.

Gustaw Dehnel:

**Sur un cas de diplogénèse très jeune chez le Merle
(*Planesticus merula merula* L.).**

Présentée par Jan Tur.

Résumé.

L'auteur décrit un cas de deux lignes primitives chez le Merle, situées vers le bord postérieur d'un écusson embryonnaire commun, rapprochées intimement l'une de l'autre par leurs bouts céphaliques, et puis divergeant symétriquement dans leurs parties caudales (à comparer la microphotographie dans le texte polonais).

C'est le premier cas d'une diplogénèse si jeune dans l'oeuf d'un Oiseau sauvage. Son type appartient à la catégorie nommée par Tur „d'Allen Thomson”, tout en différant par l'absence d'excroissances postérieures latérales de l'aire transparente. Cette dernière particularité s'explique d'ailleurs par les modalités spéciales du développement normal du Merle.

LITERATURA.

Allen Thomson: „Remarks on the early conditions and probable origin of the double monsters”. The London and Edinburgh Monthly Journal of Medical Science, 1844.

Dehnel Gustaw: „Badania nad anomaljami rozwojowemi u żółwia błotnego (*Emys orbicularis* L.)”. Pamiętnik XII Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich. Warszawa 1925.

Dehnel Gustaw: „O nowych przypadkach oocytów złożonych w jajniku żółwia (*Emys orbicularis* L.)”. Warszawskie Czasopismo Lekarskie. 1926. Nr. 2.

- Dehnel Gustaw: „Origine des polygénèses et oeufs plurinucléés”.
Comptes rendus des séances de la Société de Biologie. Tome
XCIII, 1925.
- Klaussner F: „Mehrfachbildungen bei Wirbeltieren. Eine teratologische
Studie”. München 1890.
- Turjan: „Sur la ligne primitive dans l'embryogénie de *Lacerta ocellata*
Daud”. Anatomischer Anzeiger. XXIII. 1913.
- Turjan: „Przypadek zarodków bliźniaczych kurczęcia”. Sprawozd. Tow.
Nauk. Warsz. 1912. Tom. V.
- Turjan: „O potworach podwójnych w stadjach wczesnych rozwoju kaczki”.
Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. 1913. Tom VI, z. 6.
- Turjan: „Sur les diplogénèses embryonnaires à centres rapprochés”.
Arch. de Biologie T. XXVIII, 1913.
- Turjan: „Zagadnienia wytyczne embriologii potworów złożonych”. Pa-
miętnik Pierwszego Zjazdu Anatomiczno-Zoologicznego. War-
szawa 1926.

Jan Tur:

**W sprawie „oddziaływania na odległość”
w układach zarodkowych wielotwórczych.**

Przed laty dwunastu opisałem w „Sprawozdaniach” Tow. Nauk. Warsz. przypadek szczególny nader powikłanej potworności podwójnej w blastodermie kurczęcia po 50 godzinach wylęgania. Pomijając nader osobliwe zarysy ciał obu zarodków, stanowiące ciekawy przyczynek do sprawy t. zw. prokonstrukcji układów złożonych — jedna jeszcze szczególna cecha tego potwora zwróciła wówczas moją uwagę. Oto w obu ściśle symetrycznych względem siebie osobnikach rozwinęły się przedewszystkiem zewnątrzne części rygnięk rdzeniowych (t. j. prawa — prawej i lewa — lewej), oraz również zewnątrzne szeregi protosomitów. Odpowiednie elementy po stronach wewnętrznych obu zarodków (lewej—prawego i prawej—lewego) albo wcale się tu nie rozwinęły, albo były znacznie słabiej wyrażone. Wyraziłem się wówczas¹⁾, iż: „zdawać by się mogło, że zarówno płyty nerwowe, jak odcinki mezodermiczne dopełniają się tu u zarodków obu — do odpowiednich narządów jednego zarodka normalnego, że, innymi słowy, w całym tym układzie dwuosobnikowym występuje jakby jakieś podporządkowanie organogenetyczne części symetrycznych — zasadzie tworzenia jednego zarodka w dwu znacznie od siebie wzajem oddalonych ogniskach twórczych”...

Narazie, wobec tego, że wymieniony zarodek przedstawiał swoiste „unicum” — nie dające się porównać z żadnym z przypadków, znanych z kazuistyki wielotwórczości zarodkowej, opisałem go jako coś zgoła wyjątkowego. Obecnie wszakże, na podstawie nowych materiałów, jakie od tego czasu udało mi się zebrać — dochodzę do przekonania, że stanowi on przypadek skrajny i w szczegółach swych niezmiernie typowy—pewnej swoistej modyfikacji form rozwoju dwuosobnikowego, występującej niekiedy, co prawda niezmiernie rzadko, w blastodermach, które mogą być uważane za stadja dalsze typu dwu smug pierwotnych, nazwanego przezemnie typem Allen Thomson'a. O sprawie tej wspomnia-

¹⁾ Spraw. T. N. W. 1915, Rok VIII, zes. 4, str. 245.

łem pokrótce w moim podręczniku Teratologii (1927, str. 181-183), oraz w referacie programowym na I Zjeździe Anat. Zool. (str. 34-35). Obecnie chciałbym rzecz tę nieco szerzej przedstawić.

Poza zarodkiem z r. 1915 mam teraz jeszcze trzy przypadki, dające się z tamtym porównać. Jednym z nich jest zarodek podwójny kurczęcia, wylęgany w ciągu 48 godzin, o konfiguracji ogólnej obu komponentów przypominającej niemal we wszystkich szczegółach ów przypadek pierwszy. Jestto również *duplicitas posterior*, o bardzo mocno na boki rozchodzących się smugach pierwotnych, o ułożonych niemal równolegle a dość wzajem od siebie oddalonych okolicach protosomitów, zaś o głowach niemal bezpośrednio stykających się ze sobą. W danym przypadku oba komponenty układu dotknięte są niezbyt skrajną, lecz wyraźnie zaakcentowaną platyneurią całkowitą. Otóż w obu widzimy też bardzo wyraźny defekt obu wewnętrznych, ku sobie zwróconych połówek płyt nerwowych, dochodzący do tego, że w ich przed-somitowych okolicach — granice wewnętrzne obu zarodków zaznaczone są przez ich dwie struny grzbietowe, wyraźnie przeświecające poprzez pozbawioną zróżnicowań nerwowych ektoderme...

Co się tyczy metamerów mezodermicznych, to są one wyrażone znacznie lepiej w prawym komponencie, niż w lewym; w pierwszym widzimy 6 par protosomitów zewnętrznych i 5 par — wewnętrznych. Te ostatnie są wyraźnie słabiej zarysowane, aczkolwiek przednie z nich wykazują typowe dla platyneurów rozszczepienie schistopojetyczne. Lewy zarodek ma wogóle somity gorzej rozwinięte. Po jego stronie lewej (t. j. zewnętrznej) widzimy zarysy czterech par protosomitów, również w stanie schistopojezy, po prawej zaś — wewnętrznej — z trudnością daje się *in toto* stwierdzić obecność jednego somitu, o konturach rozlanych, oraz nikłe ślady, bardzo niewyraźne, trzech pozostałych.

I w danym tedy przypadku widzimy, że dwa dość znacznie od siebie na danym poziomie oddalone zarodki wykazują bardzo wyraźne upośledzenie rozwojowe okolic wewnętrznych związków swych układów nerwowych i protosomitów. Typ anomalji jest bezwątpienia ten sam, co w zarodku z r. 1915.

W innym znowu przypadku (trzecim z kolei danego typu) mamy również do czynienia z dodatkową anomalią platyneuryczną obu komponentów, choć w danym razie zasadnicza forma podwójności zarodkowej różni się od poprzednich. Na preparacie tym,

ofiarowanym mi uprzejmie przez Prof. M. Konopackiego, mamy podwójny zarodek kurczęcia, wylęgany prawdopodobnie w ciągu 40—48 godzin, i przedstawiający odmianę swoistą typu, nazwanego przezemnie *Syncephalus pseudomphalocephalus*.

Dwa zarodki niejednakowej wielkości, „łączą się” swemi okolicami głowowymi w istotnie jednolitą całość, tak, że niepodobna tu rozróżnić granicy pomiędzy krawędziami przednimi obu płyt mózgowych. Pozatem okolice tułowiowe i ogonowe obu zarodków rozchodzą się pod kątem około 75°. Zarodek prawy (większy) ma po swej stronie zewnętrznej 5 protosomitów, dość wyraźnych, typowo dla platyneurów wydłużonych w poprzek, chociaż bez schistopojezy. Na stronie wewnętrznej (lewej) tegoż zarodka widać ślady czterech protosomitów, znacznie mniej wydłużonych, najwyraźniej niedorozwiniętych. Zarodek lewy, mniejszy, ma po swej stronie zewnętrznej trzy protosomity słabo zarysowane, również wydłużone w kierunku poprzecznym, zaś po stronie zwróconej ku zarodkowi drugiemu — protosomitów brak zupełnie. Również i zawiązki nerwowe zachowują się tutaj w sposób bardzo typowy: u obu zarodków stwierdzić możemy brak zupełny części „wewnętrznych” płyt nerwowych w okolicy somitowej i przedsomitowej, tak, że i w danym razie dostrzegalnemi *in toto* granicami wewnętrznymi obu zarodków są ...ich struny grzbietowe.

Wreszcie przypadek czwarty, bardzo w swoim rodzaju typowy, różni się od trzech poprzednich pod tym względem, że tutaj (zarodek kaczkki, wylęgany w ciągu 72 godzin), w również charakterystycznej *duplicitas posterior* — mamy bardzo dobrze rozwinięte szeregi w wewnętrznych protosomitów (14 w komponencie lewym, 17 — w prawym), nawet na poziomie znacznego zbliżenia obu indywiduów, natomiast brak tu zupełnie wewnętrznych krawędzi rynienek nerwowych i właśnie w okolicach bardzo znacznie od siebie oddalonych...

Zestawiając dane powyższe dochodzimy do wniosku, że: 1^o szczególny proces dopełniania się *in distans* dwu zarodków występuje w tej lub owej postaci w kilku przypadkach, może więc być uważany za pewien objaw stały (w pewnych warunkach rozwojowych), choć bardzo rzadki, oraz 2^o owo „uzupełnienie się” w jednych przypadkach rozciąga się — pozornie korelacyjnie — jednocześnie i w mierze jednakowej na zawiązki układu

nerwowego i protosomity, w innych zaś wyraża się jedynie w zawiązkach nerwowych, nie odbijając się bynajmniej na protosomitach „wewnętrznych”, co ze swej strony wykazuje właśnie dowodnie brak korelacji pomiędzy temi dwoma układami narządów zarodkowych.

O ile chodzi o brak takiej korelacji, to został on już od dawna stwierdzony w toku moich badań nad działaniem promieni radu na zarodki kręgowców (od r. 1904), gdzie okazało się, że niszczące, elektywne, działanie tych promieni może, w odpowiednich warunkach doświadczenia, odbić się na samych tylko protosomitach, nie modyfikując wyraźnie rozwoju cewki rdzeniowej i pęcherzy mózgowych. W wymienionym więc typie szczególnym rozwoju potworności złożonych mamy tylko raz jeszcze potwierdzenie — na zboczeniach samorzutnych — faktu, ustalonego już dawniej doświadczalnie. Ciekawszem przez to staje się zjawisko odwrotne: niedorozwoju symetrycznego znacznej okolicy „wewnętrznych” krawędzi cewek rdzeniowych z jednoczesnym rozwojem normalnym odpowiadających im szeregów protosomitów (przyadek czwarty). W danym razie elementy przyszłego rdzenia okazują się bardziej „wrażliwe” na swoiste — bliżej obecnie nie dające się określić — warunki rozwoju dwu sąsiadujących ze sobą w podobny sposób ośrodków zarodkowych — aniżeli protosomity... Cała, już sama przez się nader zawiła sprawa, gmatwa się przez to jeszcze więcej.

Bynajmniej też do rozgmatwania tego dziwnego procesu rozwojowego nie przyczynia się jeszcze jedna, nader ciekawa okoliczność. Oto we wszystkich dotychczas przez nas zaobserwowanych przypadkach podobnego „uzupełniania się na odległość” dwu zarodków — mamy stale do czynienia z „*duplicitates posteriores*”, niechybnie dającymi się wyprowadzić z dwu smug pierwotnych „typu Allen Thomson'a”, przyczem z takiej tego typu odmiany, w której występuje charakterystyczny cypel pola ciemnego, wchodzący od tyłu pomiędzy oba zawiązki, oraz swista od niego ku przodowi wyrastająca smuga mezodermiczno-entodermiczna. W trzech pierwszych z pomiędzy naszych przypadków — ów cypel i smuga są wyrażone nader wybitnie; w przypadku czwartym (kaczka) na miejscu takiej smugi widzimy nie mniej charakterystyczny pas wysepek krwiotwórczych, oddzielających od siebie oba zarodki, co w zupełności odpowiada późniejszej

mu — w porównaniu do poprzednich — studjum rozwojowemu tego dwojaka.

Tak więc nasza „*actio in distans*” ma miejsce na poziomach nie tylko znacznego od siebie wzajem oddalenia dwu ciał zarodków, ale w dodatku rozgrywa się na terenach w pewnym względzie też od siebie i histologicznie odgradzonych... Słowem: szereg powikłań dziwnych, na razie zupełnie nie do rozwiązania!

Zwrócić się tu musimy chyba do uwzględnienia paru elementów rozwojowych, wyznaczyć wprost wszakże należy — prawdopodobnie zgoła drugorzędnych, jakie w przypadkach takich zanotować można.

Więc po pierwsze: w trzech z pomiędzy naszych przypadków — z wyjątkiem ostatniego — widzimy przed okolicą głową układu podwójnego — pojedynczy wspólny zawiązek sercowy, typu t. zw. „serca przedniego”, jakie spotykamy zawsze u *Syncephalus pseudomphalocephalus*. Właściwego wszakże tej potworności serca „tylnego” albo wcale tu niema, albo też niktąle zaledwie jego występują ślady. Wszakże w przypadku czwartym serce, pojedyncze, zajmuje położenie zupełnie normalne. Wreszcie w znalezionym niedawno przez p. St. Billewicza w naszej pracowni, a dotychczas nieopisanym, przypadku z podobnym sercem „przednim” — niema żadnych śladów „uzupełniania się” na odległość.

Powtóre: wszystkie nasze przypadki odnoszą się do bardzo, jakośmy to zaznaczyli, typowych *duplicitates posteriores*: odwrotnie, w znanych w literaturze teratogenetycznej przypadkach *d. anterioris* w stadjach odpowiednich — niema ani śladu podobnego „uzupełniania się”, pomimo bardzo silnie wyrażonego zbliżenia się wzajemnego obu komponentów układu (przypadki: Darestea, Klaussnera (szpak), Mitrofanowa i in.). Wszędzie widzimy tu i dwie cewki nerwowe zupełne, i „wewnętrzne” szeregi protosomitów.

A przecież w zarodkowej Anadidymji zawsze być musi większe, niż u Catadidymus — zbliżenie pierwotne dwu ognisk gastrulacyjnych, dwu pierwotnych ośrodków twórczych. Raczej więc w *d. anterior* można by się z góry spodziewać tego dziwnego procesu...

Narazie poprzestać tu muszę na zwróceniu uwagi na ten niezwykle sposób rozwoju dwojaków, występujący, powtarzam,

nader rzadko, lecz w bardzo charakterystyczny sposób. Rozwikłania następujących się tu zagadnień, które niewątpliwie „*ad intima penetrant polygeneseos mysteria*” oczekiwać należy od dalszego nagromadzenia się materiałów kazuistycznych.

Jan Tur:

Sur „l'action à distance” dans les monstres doubles embryonnaires.

Résumé.

L'auteur décrit quatre cas exceptionnels de jeunes embryons doubles d'Oiseaux, tous appartenant à la catégorie des Anadidyms (duplicité postérieure), aux régions thoracales et caudales sensiblement éloignées, et néanmoins présentant un phénomène curieux de l'absence des parties nerveuses (plaque nerveuse, gouttière médullaire) internes, c. à d. tournées vers l'axe médian commun d'un tel système diplogénique. En même temps les rangées internes de protosomites font d'ordinaire défaut, ou accusent les traces du développement incomplet. Dans un seul cas seulement (embryon du Canard, 72 heures d'incubation) — les protosomites „internes” étaient bien développés, malgré l'absence des bords correspondants des deux tubes nerveux sur un trajet assez considérable. Il est à souligner qu'une telle „corrélation à distance” se manifeste juste au niveau où deux corps embryonnaires sont séparés l'un de l'autre par une traînée issue de l'aire opaque, ou des îlots sanguins. Chose curieuse: le phénomène décrit n'a pas été observé chez les jeunes Catadidyms où les centres primitifs individuels sont toujours beaucoup plus rapprochés.

WYCIĄG Z REGULAMINU WYDAWNICTW T. N. W.

1. Sprawozdania mają być odzwierciedleniem całego ruchu naukowego T. N. W. W sprawozdaniach przeto winny się znaleźć przynajmniej w formie doniesień tymczasowych wszystkie prace członków T. N. W., ich uczniów oraz ich pracowni naukowych.

2. Przy sprawozdaniach nie podaje się listy obecności ani daty zgłoszenia pracy, tylko datę posiedzenia na którym prace zostały przedstawione.

3. Rękopisy doniesień i prac winny być składane w zasadzie na posiedzeniu, na którym zostają przedstawione, na ręce przewodniczącego wydziału; o ile nie zostaną nadesłane najdalej w ciągu tygodnia od daty posiedzenia mogą nie być zamieszczane w sprawozdaniach; w tym przypadku podany będzie jedynie tytuł komunikatu.

4. Z obcych języków dopuszcza się angielski, francuski, włoski i niemiecki — inne zaś wymagają osobnej uchwały Zarządu; zastrzega się jednak, że obok polskiego tytułu winno się znajdować przynajmniej krótkie streszczenie w języku polskim.

5. Oprócz streszczeń i referatów w sprawozdaniach mogą też być zamieszczane *in extenso* przedstawiane prace o ile nie będą przekraczały jednego arkusza druku. W razach wyjątkowych, gdy pracą miała by zająć nieco więcej niż jeden arkusz, potrzebna będzie osobna uchwała Zarządu.

6. Głosy dyskusji T-wa będą podawane tylko wtedy, gdy ich autorowie w ciągu tygodnia doręczą rękopis redaktorowi.

7. Na koszt redakcji mogą być zamieszczane w sprawozdaniach tylko rysunki tekstowe, jednokolorowe. Tablice kredowe lub rysunki kolorowe wymagają zgody redaktora lub Zarządu T. N. W. Autorowie zobowiązani są składać gotowe klisze wraz z rękopisem.

8. Autorowie otrzymują darmo 50 odbitek bez okładki. Przy zamawianiu większej liczby i w okładce, obowiązują się pokrywać koszty druku, papieru i okładki.

9. Materiał przeznaczony do druku winien być pisany pismem czytelnym lub maszynowym na jednej stronie z pozostawieniem marginesu i wolnego miejsca przed tytułem dla notat redakcyjnych. Rękopis winien zawierać: 1) imię i nazwisko autora, 2) tytuł pracy, 3) o ile chodzi o pracę nie członka T.N.W., wzmiankę kto z członków pracę przedstawia, 4) tekst lub streszczenie polskie, 5) imię i nazwisko autora, 6) tytuł pracy w obcym języku, 7) streszczenie lub tekst w obcym języku. Rękopisy zmieniane być nie mogą.

10. Obowiązuje zasadniczo pisownia Polskiej Akademii Umiejętności. Tylko w pracach językoznawczych może być stosowana pisownia odmienna z zaznaczeniem w przypisku tego odstępstwa i jego powodu.

11. Tytuły cytowanych książek, rozpraw oraz czasopism wyróżnia się w druku kursywą (bez cudzośłów); w rękopisie powinno to być zaznaczone zapomocą podkreślenia linią falistą. Wielkie litery stosuje się w tytułach czasopism tam tylko, gdzie tego wymagają zwyczaje danego języka (więc np. *Przegląd współczesny*, a nie: *Przegląd Współczesny*).

12. Wyróżnienia treściowe zaznacza się zapomocą rozstrzeżeń (w rękopisie zapomocą podkreślenia linią przerywaną).

13. Nazwiska użyte po raz pierwszy wyróżnia się drukiem rozstrzelonym, zasadniczo jednak nie wyróżnia się żadnym sposobem drukarskim.

14. Wszystkie wyrażenia w obcych językach drukuje się kursywą (w rękopisie podkreślenia linią falistą). Zasada nie obowiązuje w odniesieniu do języków posługujących się alfabetami nie łacińskimi.

15. Dłuższe cytaty winny być rozpoczynane *a linea*; w rękopisie należy to zaznaczyć pionową kreską przez całą długość cytaty i odpowiednią uwagą „*petit*”. Cytatę zaczyna i kończy cudzośłów.

16. Przy cytowaniu literatury tematu w sposobie skróconym po nazwisku autora stawia się dwukropek; tytuły i dalsze dane bibliograficzne przegradza się przecinkami (np. Przychocki G. *Accessus Ovidiani*, Kraków, 1911); miejsce wyda-

nia wymienia się w brzmieniu oryginalnem (np. Lugduni Batavorum, a nie Lyon, Lipsiae lub Leipzig zamiast Lipsk i t. p.).

17. W przypiskach przy cytowaniu literatury zawsze powinny być podawane wszystkie istotne elementy opisu bibliograficznego — choćby niektóre z nich były już wymienione w głównym tekście (nigdy więc: str. 5, ani Accessus Ovidiani, str. 5, ale: G. Przychocki: Accessus Ovidiani, Kraków, 1911, str. 5.). Ponownego cytowania rzeczy w formie skrótu: Op. cit, lub: jak wyżej — jako utrudniającego orientację wogóle należy unikać.

Antoni Łazkiewicz. Etudes cristallographiques sur le monochloracetate de cadmium	471
W. Sierpiński. Sur un problème concernant les ensembles $C(A)$.	473
W. Sierpiński. Les ensembles projectifs et la propriété de Baire.	477
Józef Grzybowski. Etude sur les échancrures et les trous susorbitaires et sur les trous sousorbitaires chez les Primates.	501
Ludwik Wertenstein. Une méthode nouvelle de détermination du volume de I curie de radon	525
K. Stolyhwo. Sur la morphologie des Arcus superciliares et Tori supraorbitales des Hominidae et Anthropoidae	528
Kazimierz Żórawski. Sur les vecteurs complexes	531
W. Sierpiński. Remarque sur le problème de la mesurabilité des ensembles projectifs	548
Henryk Świdziński. Les dépôts jurassiques entre la Małogoszcz et la Czarna Nida sur le versant occidental des Montagnes de St. Croix	556
Gustaw Dehnel. Sur un cas de diplogénèse très jeune chez le Merle (Planesticus merula merula L.)	564
Jan Tur. Sur „l'action à distance“ dans les monstres doubles embryonnaires.	571

Redaktor

Edward Loth.

Adres Redakcji: Śniadeckich 8.

Zakłady Graficzno-Introligatorskie **J. Dzewulski**, Złota 29.