COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.

Classe III.

XX Année 1927. Fascicule 1—5.

SPRAWOZDANIA

z posiedzeń

TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III

nauk matematycznych i przyrodniczych

Rok XX 1927 Zeszyt 1—5

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1927

TREŚĆ ZESZYTU 1—5.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III nauk matematycznych i przyrodniczych.

Posiedzenie
w dniu 13 stycznia 1927 r.

J. Flaks.

Spermatogeneza a mikromorfologja glykogenu w jądrze żaby — (Rana temporaria).

Przedstawił M. Konopacki.

Dawniejsze wzmianki o glykogenie w jądrach tyczą się przedewszystkiem stwierdzenia jego obecności na drodze analizy chemicznej lub barwienia jodem. Tak np. Barfurth (1) wspomina, że gruczoł płciowy u Limax variegatus, Helix pomatia i Arion empiricorum zawiera tę substancję po obfitem karmieniu. W jądrze Rana esculenta z grudnia autor glykogenu nie znalazł. Kühne (2) znajduje glykogen w jądrach psów bezpośrednio po kastracji, Luchsinger (3) w jądrach żab letnich oraz Sundberg (4) w niektórych komórkach zawiązków płciowych zarodka (met. Besta).

Późniejsze badania Kemnitza (5) i pani Ortner-Schönbach (6) nad morfologją przemiany materji u Ascaris lumbricoides, Dicrocoelium i Anoplocephala wykazały także obecność glykogenu w jądrze (met. Besta).

Goldfederowa (7) podkreśla zmniejszenie się ilości tej substancji w organizmie żab w okresie rozmnażania — ilościowe badania jej jednak jądra nie obejmują. Wskazówek o występowaniu glykogenu w poszczególnych elementach komórkowych jądra kręgowców (kom. Sertoli'ego — kom. nasienne) w literaturze nie znalazłem.

Celem pracy niniejszej było zbadanie morfologji oraz rozmieszczenia glykogenu w jądrach żaby, w różnych okresach życia płciowego. Już różnice w objętości jądra, które na początku czerwca jest najmniejsze, a odtąd szybko się rozrasta i dosięga największych rozmiarów w sierpniu, wskazuje na głęboko sięgające zmiany sezonowe w tym narządzie, w związku właśnie ze spermatogenezą. Przypuszczać również należało istnienie pewnych zmian i w chemizmie tego narządu, a mianowicie pewnych różnic jakościowych i ilościowych w zawartości lipoidów i glykogenu. W pracy niniejszej, która stanowi pierwszą część zamierzonej, zajmowałem się jedynie glykogenem.

Obserwacje robione były nad Rana temporaria, która jest materjałem najdogodniejszym dla naszego celu, gdyż spermatogeneza u tego gatunku żab odbywa się w miesiącach letnich i ponieważ w pewnych okresach większość elementów płciowych jądra znajduje się w tem samem stadjum rozwojowem. Jest rzeczą zrozumiałą, że przy takich stosunkach, otrzymane wyniki łatwiej powiązać przyczynowo z odpowiedniem stadjum czynnościowem narządu.

Do badań używane były tylko żaby wzięte bezpośrednio z pola, gdyż, jak to wykazały doświadczenia M. Nussbauma (8), warunki aquarium, to jest temperatury i odżywiania wybitnie wpływają na wielkość, jak i na stan spermatogenezy jądra. Samce, o wyraźnych modzelach, były przeważnie preparowane na miejscu, a jądra utrwalane w alk. absolutnym. Część materjału utrwalonego metodą Carnoy i alk. absolutnym otrzymałem od Prof. Konopackiego.

Preparaty zatapiane były w parafinie. Zatapianie to nie ustępuje celloidynowemu. Skrawki grubości 6 mikronów były naklejane na wodzie lub alkoholu. Krótkie zetknięcie się z wodą preparatu nieodparafinowanego, jak się przekonałem, nie wpływa zupełnie, lub tylko w b. małym stopniu na rozpuszczanie się utrwalonego glykogenu.

Dla wykazania badanej substancji posługiwałem się karminem Besta, metodą jodową Langhansa oraz próbą rozpuszczalności w ślinie. Tylko pozytywny wynik tych trzech prób daje pewność, że mamy do czynienia z glykogenem (Neukirch. 9). Preparaty były uprzednio barwione hematoxyliną żelazistą, hemalaunem Mayera lub Bleu de Lyon'em. Ten ostatni barwik był używany najczęściej, gdyż na podłożu barwionem Bleu de Lyon'em, ziarnistości glykogenu zaznaczają się szczególnie wyraźnie. Zabarwione preparaty były zamykane w balsamie. Część ich była poddawana następnie kontrolnej próbie ze śliną. Po 24 godzinach działania śliny w termostacie przy 37° C. glykogen zabarwiony znikał. Pewna liczba skrawków z każdego miesiąca poddawana była także działaniu jodu, który był stosowany zawsze dla pierwszego stwierdzania obecności tej substancji w jądrze. Obrazy otrzymane były jednak w porównaniu z przygotowanemi metodą Besta (10) mniej wyraźne i na ich podstawie trudniej było wyprowadzić wnioski co do rozmieszczenia glykogenu oraz jego charakteru morfologicznego.

Badałem jądra w różnych porach roku, a mianowicie: z marca, kwietnia, lipca, sierpnia, września, listopada i grudnia.

Niestety nie stwierdziłem różnic ilościowych w całkowitej zawartości glykogenu drogą analizy chemicznej. Nie zbadałem również zachowania się glykogenu podczas późniejszych miesięcy zimowych. Kwestjami temi, które niewątpliwie mają dużą wartość dla całokształtu pracy niniejszej, zajmę się w toku dalszych badań nad tym tematem.

Charakter i rozmieszczenie glykogenu w jądrach żaby w poszczególnych miesiącach wykazują duże różnice. Obrazy mikroskopowe jąder opracowanych przedstawiają się następująco:

1. MARZEC.

Ściana kanalików nasiennych składa się przeważnie z jedne warstwy komórek: spermatogonij, obejmujących je kom. follikularnych i „elementów Sertoli'ego". (Fusszellen Bendy, Tragezellen Grünhagena, spermatophory, blastophory, cytophory). Pod nazwą elementów Sertoli'ego rozumiem nietylko charakterystyczne jądra i plazmę otaczającą od wewnątrz błonę właściwą kanalików; ale i istotę miedzykomórkową komórek nasiennych (Peter, Regaud, Policard). Tellyesniczky (11) rozszerza to pojęcie jeszcze bardziej: „Wir können in den Begriff des „Sertolischen Elements" ebenso den liquor canaliculi der jungen Hoden wie die intercelluläre Substanz der erwachsenen einfassen".

Większość kanalików, szczególnie na obwodzie jądra, wykazuje jeszcze plemniki stojące w związku z komórkami podstawowemi (Sertoli'ego). W tych odcinkach kanalików, w których plemniki odpadły już od ścianek, jądra elementów Sertoli'ego są nieco wysunięte do światła. Niektóre z tych jąder z otaczającą je plazmą (Folgezellen Ploetza 12), oderwane od sąsiednich ulegają rozpadowi, jak na to wskazuje ich chromatyna.

Glykogen, w kształcie b. drobnych ziarenek lub grudek, znajduje się w świetle kanalików nasiennych, rozsiany dookoła opisanych komórek. Spotykające się tutaj duże spermatogonje (archispermatocyty Levy'ego 13), często o nerkowatym kształcie jądra, zawierają tylko b. małe ilości glykogenu, który niekiedy w postaci półksiężyca zajmuje obwodową część komórki. Drobne ziarenka znajdują się także w obrębie kom. podstawowych, przeważnie w wakuolach w protoplaźmie oraz w odcinku, w którym tkwią plemniki. W jądrach komórek ulegających rozpadowi spotykałem także glykogen. Największa ilość ziarnistości znajduje się w świetle kanalika, rozrzucona między plemnikami. Obraz ten b. charakterystyczny spotykamy na przekroju jądra tylko w tych kanalikach, z których plemniki już zostały wydalone. W kanalikach obwodowych natomiast, gdzie zwarte plemniki tkwią jeszcze w kom. podstawowych, ziarnistości tych brak. W świetle przewodów wyprowadzających, ktore miejscami są wypełnione plemnikami, znajduje się drobnoziarnisty glykogen, który przylega także do ścianek przewodów. W nabłonku samych przewodów glykogenu w większości wypadków nie spotykałem; w nielicznych jedynie komórkach, o niewyraźnie od światła odgraniczonej plazmie, zjawiały się niekiedy pojedyńcze ziarenka, zabarwione intensywnie karminem Besta. W podstawowej części kom. nabłonkowych ziarenka te występują jeszcze rzadziej. To samo tyczy się i tkanki międzykanalikowej, której zresztą w tym okresie jest niewiele. W tkance tej spotykałem tylko pojedyńcze ziarenka glykogenu.

2. KWIECIEŃ.

Plemniki są już przeważnie w świetle kanalików nasiennych i przewodów. Ściana kanalików składa się z jednej, miejscami z dwuch warstw komórek.

Glykogen, w kształcie grudek mniejszych lub większych, występuje przedewszystkiem w świetle kanalików. Grudki te spotykają się także między spermatogonjami, w odstępach zajętych przez elementy Sertoli'ego. W świetle niektórych kanalików obwodowych, gdzie plemniki tkwią jeszcze w kom. podstawowych, glykogenu brak. Glykogen, znajdujący się w przewodach, pochodzi przedewszystkiem z kanalików nasiennych, co można doskonale prześledzić w tych miejscach preparatu, w których widać przejście kanalików w przewody wyprowadzające. W przejściach tych spotykają się masy plemników, o główkach oblepionych glykogenem, zdążające do przewodów. W spermatogonjach dzielących się glykogenu niema zupełnie. Najwięcej glykogenu spotyka się w kanalikach obwodowych jądra.

3. LIPIEC.

Obraz histologiczny jądra w tym okresie różni się zasadniczo od poprzednich. Podczas, gdy w marcu i kwietniu w jądrze spotykaliśmy jeszcze plemniki, tkwiące w komórkach podstawowych lub też bezładnie rozrzucone wewnątrz kanalików nasiennych i przewodów wyprowadzających, w tym miesiącu plemników w większości wypadków nie spotykamy zupełnie. Przekrój kanalików jest teraz znacznie węższy, a światło niewielkie, wskutek grubości ścian, które składają się tutaj z nielicznych spermatogonij, spermatocytów w stadjach podziału i spermatyd zebranych w cysty i ułożonych w kilka warstw.

Morfologja i rozmieszczenie glykogenu uległy także zasadniczej zmianie. Ilość jego jest tutaj b. mała w stosunku do ilości spotykanych w miesiącach następnych, a nawet poprzednich. Nieregularne, małe grudki znajdują się albo w świetle kanalika, albo też w ściance kanalika między komórkami. Niekiedy całe spermatocysty są otoczone cieniutką warstewką glykogenu, która występuje również i w błonie właściwej kanalików. Kom. follikularne, które obejmują grupy spermatocytów, a które w spermatogenezie udziału nie biorą (B e n d a 14), glykogenu nie zawierają. To samo tyczy się i tkanki łącznej międzykanalikowej.

Spotkałem jednak jedno jądro w tym miesiącu, w którem, śród spermatocytów wypełniających prawie całkowicie kanaliki i pozbawionych prawie zupełnie glykogenu — występowały wysepki tworzących się już plemników umieszczonych w elem. S e r t o l i'e g o, które zawierały b. duże ilości tego materjału.

Duże grudki znajdywały się, rozrzucone bezładnie, w świetle kanalików, a elementy podstawowe z tkwiącemi w nich plemnikami były częściowo wypełnione grudkami glykogenu. Ten wyjątkowy układ glykogenu w związku właśnie z grupami plemników i brak jego w innych miejscach tego samego kanalika, gdzie istnieją jedynie spermatocyty i spermatydy wskazuje wyraźnie na rolę jego w spermatogenezie.

4. SIERPIEŃ.

Jądra w tym miesiącu wykazują charakterystyczny i stały obraz. Spermatogeneza jest tutaj już na ukończeniu. Plemniki tkwią w elem. Sertoli'ego. Ściana kanalików nasiennych jest b. cienka, wydaje się miejscami utworzona tylko z membrana propria, w innych natomiast odcinkach wysłana jest elementami Sertoli'ego, nielicznemi spermatogonjami i przekształcającemi się w plemniki spermatydami.

Ilość glykogenu jest b. duża; skupia się on w tym okresie w świetle kanalików oraz w komórkach podstawowych i występuje w kształcie grudek mniejszych lub większych. Główki plemników tkwią w elem. Sertoli'ego wypełnionych glykogenem, który znajdujemy również i poza obrębem komórek w postaci rozlanych mas, o strukturze jednolitej lub ziarnistej. Grupy plemników są więc często ze wszystkich stron oblepione grudkami glykogenu. Przekształcające się w plemniki ugrupowania spermatyd, zawierają także w świetle tworzącej się tutaj „cysty" grudki lub pojedyńcze ziarenka glykogenu. W miarę powstawania plemników ze spermatyd ziarnistości te występują w kom. podstawowych, przyczem część ich zdaje się dostawać do światła kanalika nasiennego. Tkanka międzykanalikowa glykogenu nie zawiera.

Pomiędzy preparatami jąder sierpniowych znalazłem jedno, które posiadało wszystkie cechy charakterystyczne jąder z lipca, zarówno pod względem stadjum spermatogenezy jak i pod względem charakteru i zawartości glykogenu. Fakt ten zdaje się przemawiać za zależnością występowania glykogenu od stadjum spermatogenezy, gdyż tylko ten jeden czynnik (spermatogeneza) uległ w danem jądrze sierpniowem zmianie. Interpretacją tego przypadku zajmiemy się przy omawianiu wyników naszych obserwacji.

5. WRZESIEŃ.

Obraz jąder wrześniowych niewiele się różni od sierpniowych. Spotykają się jednak jądra, gdzie wszystkie spermatydy przekształciły się w plemniki. Taki obraz ścianki kanalików spotyka się i w miesiącach następnych, aż do okresu rozrodu, kiedy plemniki wnikają do światła kanalików nasiennych. Rozmieszczenie i charakter morfologiczny glykogenu są mniej więcej te same co i w sierpniu; ilość glykogenu natomiast, znacznie się zwiększyła. Przewody wyprowadzające zawierają już większe ilości plemników i glykogenu.

6. LISTOPAD.

Jądra z tego miesiąca pochodzą od żab z początkowego okresu snu zimowego. Wykazują one spermatogenezę zupełnie ukończoną. Ilość spermatogonij, w tym czasie znacznie się zwiększa. Spermatocytów brak zupełnie. W przewodach wyprowadzających jądra, spotykają się niekiedy już wolne plemniki.

Glykogen koncentruje się przedewszystkiem w elementach Sertoli'ego kanalików obwodowych, gdzie występuje jeszcze w znacznej ilości. U niektórych żab ilość glykogenu, szczególnie w kanalikach, znajdujących się w centrum jądra, wyraźnie się zmniejszyła w stosunku do miesięcy poprzednich. Elementy Sertoli'ego w tych kanalikach zawierają tylko drobne ziarenka glykogenu lub też są ich zupełnie pozbawione.

Jądra żab, które od 3 miesięcy przebywały w aquarium Zakładu Histologji większych różnic w stosunku do wyżej opisanych ani w budowie histologicznej, ani w zawartości glykogenu nie wykazały.

7. GRUDZIEŃ.

W tym okresie jądra nie różnią się w budowie histologicznej od listopadowych, natomiast glykogenu zawierają mniej. Tylko w wąskim pasie kanalików obwodowych spotykamy nieliczne grudki i ziarenka tej substancji rozmieszczone tak jak w miesiącu poprzednim. W świetle kanalików nasiennych glykogenu nie spotykałem zupełnie.

Warto zaznaczyć, że w jądrze osobnika rana esculenta, który żył w tych samych warunkach co i żaby opisane (sen zimowy) nie znalazłem ani śladu glykogenu. Spermatogeneza u tego gatunku żab odbywa się w ciągu całego roku, nie wyłączając zimy. Trwająca więc spermatogeneza wraz z dwumiesięcznem głodowaniem doprowadziły do całkowitego wyczerpania tej substancji w jądrze.

Większe lub mniejsze grudki glykogenu są często otoczone ciemniejszą osłonką, która barwi się hematoxyliną i Bleu de Lyonem. W miarę występowania w elementach Sertoli'ego większych grudek glykogenu, kształt ich staje się mniej lub więcej nieregularny, tak, że tylko ciemniejsza osłonka otacza grudkę glykogenu. Obwódka ta barwi się hematoxyliną i Bleu de Lyon'em. Wobec tego, że poszczególne grudki glykogenu, znajdujące się w samem świetle kanalików, częściowo są otoczone osłonką tego samego charakteru, wydaje się prawdopodobnem, że przy dostawaniu się plemników do światła kanalika, odbywa się odrywanie części elementów Sertoli'ego wraz z nagromadzonym w nich glykogenem. Obserwacje bezpośrednie przemawiają za tem przypuszczeniem. Istotnie, spotykamy elementy Sertoli'ego o wyraźnych jeszcze jądrach i nielicznych ziarenkach glykogenu, oraz całkowicie wypełnione glykogenem, w których często jądra zanikają, a komórki same rozpadają się na drobniejsze fragmenty. Pogląd Tellyesniczky'ego, że los elem. Sertoli'ego da się porównać z losem niektórych komórek gruczołowych (np. łojowych), których wydzielina jest produktem rozpadu samej komórki, znajduje potwierdzenie w powyższem spostrzeżeniu. Istnienie glykogenu w pewnych okresach w świetle kanalików, zdaje się przemawiać również i za tem, że glykogen może być wydzielany i bezpośrednio. Istotnie, na preparatach z września, gdzie widzimy tylko b. małą ilość plemników w świetle, spotykamy już niektóre kanaliki wypełnione prawie grudkami glykogenu. Elementy Sertoli'ego nie wykazują jeszcze zupełnie procesów rozpadowych.

Zestawiając wyniki moich obserwacyj, widzimy, że jądra żab normalnie odżywionych zarówno wiosną, latem jak i jesienią zawierają glykogen. Małe ilości spotykają się także i zimą. W miesiącach poprzedzających i bezpośrednio następujących po spermatogenezie, znajdujemy w jądrze więcej glykogenu, aniżeli w samym okresie spermatogenezy. Ilość tego materjału zmienia się w miarę postępowania procesu rozwojowego komórek nasiennych w ten sposób, że w chwili, kiedy jądro wykazuje komórki nasienne w okresie najintensywniejszego rozmnażania, spotykamy w niem glykogen w ilości minimalnej. Po ukończonym procesie podziału i przekształcania się spermatyd w plemniki, co widzimy już przeważnie w sierpniu, w komórkach podstawowych zaczyna znów gromadzić się glykogen. Ponowne nagromadzenie się glykogenu w elem. Sertoli'ego w sierpniu zdaje się mieć znaczenie dla dalszego odżywiania plemników. Już K. Peter (15) zwrócił uwagę, że chromatyna plemników „skoncentrowana", jak się autor wyraża, w formie dogodnej dla wędrówki, traci zupełnie zdolność przyswajania. W kom. podstawowych więc, które stoją w związku z plemnikami i służą dla ich odżywiania (Nährzellen Petera) znaleźć można takie materjały odżywcze jak tłuszcze (Ebner 16, Plato 17) oraz jak wynika z moich spostrzeżeń i glykogen.

Fakt, że w literaturze nie spotykamy wzmianki o występowaniu glykogenu w elem. Sertoli'ego należy prawdopodobnie przypisać okoliczności, że badano w tym kierunku tylko jądra zwierząt o ciągłej spermatogenezie. Jądra te nie mają możności odkładania zapasów glykogenu, gdyż doprowadzone substancje odżywcze zostają szybko zużyte. W kilku zbadanych przezemnie jądrach ssaków: psa, szczura i królika, glykogenu nie udało mi się stwierdzić. Obrazy mikroskopowe tych jąder wykazywały istotnie spermatogenezę w pełni rozwoju.

Wyraźne zmniejszenie się ilości glykogenu w lipcu i w opisanym przypadku jądra sierpniowego zdaje się świadczyć o zależności zużywania się tego materjału od okresu wzrostu i podziału spermatocytów. Glykogen, który znajduje się w istocie międzykomórkowej (a więc w elementach Sertoli'ego) zostaje zużytkowany przez kom. nasienne, a intensywne podziały w jądrze nie pozwalają na jego odkładanie się. Stąd też brak tego materjału lub bardzo małe jego ilości w tych właśnie miesiącach. Proces tworzenia elementów płciowych wymagałby więc dużych ilości glykogenu.

Fakt ten stoi poniekąd w zgodzie z obserwacjami Sundberga, który stwierdził, że przy podziale mitotycznym, glykogen częściowo lub zupełnie z komórki znika.
Autor wiąże fakt ten z zapotrzebowaniem tej substancji dla wytworzenia kwasów nukleinowych, koniecznych dla jąder nowo-

powstających komórek. Tuż po skończonych procesach podziału glykogen ponownie w komórkach występuje. Brak glykogenu lub tylko bardzo małe ilości w dzielących się komórkach mogłem stwierdzić także i na moim materjale.

Znaczenie glykogenu, jako materjału zapasowego dla rozwijających się komórek nasiennych, jest szczególnie doniosłe, jeżeli zważymy, że komórki te są oddzielone od naczyń krwionośnych błoną właściwą kanalików, a dopływ materjałów odżywczych i morfogenetycznych, w okresie intensywnego podziału kom. nasiennych jest utrudniony.

Że istotnie przy zmniejszeniu się ilości glykogenu w jądrze żaby, rolę decydującą odgrywa sama spermatogeneza, prawdopodobnie, jako rezułtat fali mitotycznych podziałów komórek nasiennych, świadczy nam fakt, iż w okresie między lipcem a sierpniem ani odżywianie się żab [1]), ani ich sposób życia, an temperatura otoczenia [2]) wcale się nie zmieniają. Przemawia za tem przypuszczeniem i to, że w innych narządach w tym krótkim czasie, t. j. między lipcem a sierpniem, wielkich wahań w zawartości glykogenu nie stwierdzono. Wskazuje na to krzywa podana przez Athanasiu (18), z której widać, że wzmożenie ilości glykogenu w organiźmie jako całości zaczyna się i kończy dopiero we wrześniu.

W ostatnich czasach Goldfederowa (l. c.) badała również zachowanie się glykogenu u żab w związku z okresem rozmnażania się tych zwierząt. Badania te wykazały w wątrobie, mięśniach i jajnikach żaby najmniejszą ilość glykogenu w okresie rozrodu. Maximum ilości glykogenu znajdowała autorka podczas miesięcy zimowych. Niestety o glykogenie w jądrach niema wzmianki.

Porównywując moje preparaty jąder wiosennych z lipcowemi i sierpniowemi widzimy, że minimum ilości glykogenu wypada nie na okres rozrodu, lecz właśnie na okres najintensywniejszych podziałów w jądrze. Stąd też, jeżeli proces najintensywniejszego podziału kom. nasiennych przypada na miesiąc późniejszy (np. sierpień), to jądro takie jest prawie pozbawione

[1]) U wszystkich zbadanych żab z lipca i sierpnia żołądki były wypełnione obficie treścią pokarmową.

[2]) Athanasiu (l. c.) wykazał doświadczalnie, że ogrzewanie żab przez pewien czas, powoduje spadek ilości glykogenu w ich ciele.

glykogenu, i odwrotnie, jeżeli w lipcu część plemników jest już uformowana, glykogen zjawia się obficiej. Po ukończeniu procesu spermatogenezy, a więc przeważnie już we wrześniu, następuje ponowne nagromadzenie się glykogenu, często w dużych ilościach.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że w elem. Sertoli'ego jąder zimowych (grudzień) znajdujemy jedynie tylko ślady glykogenu wtedy, kiedy reszta organizmu, jak widać z pracy Goldfederowej, zawiera największe ilości tego materjału — to stanie się widocznem odrębne zachowywanie się jądra w gospodarce węglowodanowej w stosunku do innych narządów. Spadek ilości glykogenu w tym okresie zdaje się być związanym z zużywaniem tego materjału przez zimujące w jądrze plemniki.

Badania Kemnitza (l. c.) wykazały, że „Glanzkörper" plemników ascarid przy wnikaniu do komórki jajowej wypełnionej glykogenem ma zdolność rozpuszczania tej substancji. Możliwe więc, że i główki plemników żabich mają tę własność w stosunku do glykogenu elem. Sertoli'ego. Istotnie już w grudniu t. j. po 5-miesięcznem przebywaniu plemników w związku z elementami Sertoli'ego prawie cały zapas glykogenu, przynajmniej z kanalików centralnych jądra, zostaje wyczerpany.

Jakie jest znaczenie glykogenu, znajdującego się w świetle samych kanalików i przewodów wyprowadzających, czy ma on pewną wartość dla dalszego życia gotowych już, a zmuszonych do przebywania w jądrach plemników — na pytanie to odpowiedzieć jest trudno.

Obserwacje moje pozatem zdają się wskazywać, że grudki większe lub mniejsze glykogenu nie tworzą czystej substancji. Rozpuszczając grudki zabarwione metodą Besta w wodzie lub ślinie i barwiąc później te same miejsca Bleu de Lyon'em, otrzymałem lekkie zabarwienie niebieskie, charakterystyczne dla ciał białkowych.

Przypuszczenie to jest w zgodzie z poglądem Ehrlicha (19), który na podstawie barwienia glykogenu jodem doszedł do wniosku, że w organiźmie występuje on w połączeniu z jakąś substancją białkową. (Trägersubstanz). Do tego poglądu skłania się również Konopacki (20, 21).

Wnioski bezpośrednie, jakie możemy wyciągnąć z pracy niniejszej dadzą się streścić w następujący sposób:

1. W jądrach żaby (Rana temporaria) spotykamy glykogen w rozmaitej ilości zależnie od stopnia rozwoju spermatogenezy. W okresie najintensywniejszych podziałów w jądrze glykogen występuje w ilości b. małej. W jądrach o gotowych już plemnikach substancja ta zaczyna się gromadzić. W miarę trwania snu zimowego ilość glykogenu w jądrze stale się zmniejsza.

2. Glykogen występuje zarówno w kom. Sertoli'ego, jak i w kom. nasiennych, ale w tych ostatnich ilość tego materjału jest b. mała. W kom. śródmiąższowych glykogenu nie spotykałem.

3. Istnieje, zdaje się, bezpośrednia zależność pomiędzy zmniejszaniem się ilości glykogenu a rozmnażaniem komórek nasiennych.

4. Glykogen znajdujący się w świetle kanalików nasiennych, zdaje się pochodzić zarówno z sekrecji, jak i z rozpadu elementów Sertoli'ego.

Spełniając miły obowiązek dziękuję Panu Prof. Dr. M. Konopackiemu za łaskawy wybór tematu i cenne wskazówki oraz Panu Doc. Dr. J. Zweibaumowi za pomoc i zainteresowanie jakie mi okazywał w toku pracy.

(Z Zakładu Histologji i Embrjologji Uniwersytetu Warszawskiego).

J. Flaks.

Sur la spermatogenèse et micromorphologie du glycogène dans le testicule de la grenouille (Rana temporaria).

Resumé.

L'auteur a étudié le comportement du glycogène dans les testicules de la grenouille (Rana temporaria) dans les différentes periodes de la spermatogenèse.

En se basant sur les préparations traitées avec l'iode (méthode de Langhans) et avec la méthode de Best — l'auteur décrit la morphologie du glycogène et son localisation dans les testicules pendant les differentes mois de l'année.

Il s'en suit de ces recherches que le glycogène apparait dans les testicules en quantité differente en relation avec le développement de la spermatogenèse. Dans les testicules oú

l'on observe une multiplication intense des elements sexuels (juin—juilliet) la quantité du glycogène est minime. Au contraire au fur et à mesure de l'apparition des spermatozoides (août) on observe une augmentation progressive du glycogène. La quantité de ce materiel de reserve diminue progressivement pendant les mois d'hiver. (novembre—decembre).

Le glycogène apparait surtout dans les elements de Sertoli, mais on le rencontre aussi en quantité minime dans les cellules sexuelles. On observe souvent le glycogène en grande quantité aussi dans la lumière des canalicules sous la forme de granulations ou des masses irregulières.

Dans les cellules interstitielles le glycogène n'a pas été trouvé.

PIŚMIENNICTWO.

1. Barfurth. D. Vergleichend-histochemische Untersuchungen über das Glykogen. Arch. f. Mikr. Anat. T. 25. 1885 r.
2. Kühne — cyt. wg. Barfurtha z (1).
3. Luchsinger B. Zur Glykogenbildung in der Leber. Pflügers Arch. T. 8. 1874 r.
4. Sundberg K. Das Glykogen in menschl. Embryonen itd. Zeitschr. f. Anat. und Entwicklungeschichte. T. 73. 1924 r.
5. Kemnitz G. von. Die Morphologie des Stoffwechsels bei Ascaris lumbricoides. Arch. f. Zellforschung T. 7. 1912 r.
6. Ortner-Schönbach P. Zur Morphologie des Glykogen bei Trematoden und Cestoden Arch. f. Zellferschung T. II. 1913 r.
7. Goldfederowa A. Le glycogène au cours de l'ontogénèse de la grenouille et sous linfluence des saisons. C. Rendus de la Soc. de Biol. T. 90. 1926 r.
8. Nussbaum M. Über den Einfluss der Jahreszeit, des Alters und der Ernährung auf die Form der Hoden und Hodenzellen der Batrachier.
9. Neukirch P. Über die jodophile Substanz der Leukozyten und das Verhalten zur Bestschen Karminfärbung. Zentralblatt f. allg. Pathologie. cyt. Arnold J· — Über Plasmastrukturen.
10. Best. Über Karminfärbung des Glykogens und der Kerne. Zeitschr. f. Wiss. Mikr. T. 23. 1906. r.
11. Tellyesniczky K. Die Erklärung einer histologischen Täuschung, der sogenanten Kopulation der Spermien und der Sertolischen Elemente. Arch. f. Mikr. Anat. T. 68. 1906 r.

12. Ploetz A. J. Die Vorgänge in den Froschhoden unter dem Einfluss der Jahreszeit. Arch. f. Mikr. Anat. und Physiol. Physiol. Abt. Suplement Bd. 1890 r.
13. Levy F. Studien zur Zeugungslehre. Arch. f. Mikr. Anat. T. 86. 1915 r.
14. Benda C. cyt. przez M. Nussbauma w (8).
15. Peter K. Die Bedeutung der Nährzelle im Hoden. Arch. f. Mikr. Anat. T. 53. 1898 r.
16. Ebner V. von. Zur Spermatogenese bei den Säugetieren. Arch. f. Mikr. Anat. T. 31. 1888 r.
17. Plato J. Die interstitiellen Zellen des Hodens und ihre physiologische Bedeutung Arch. f. Mikr. Anat. T. 48. 1896. r.
18. Athanasiu J. Über den Gehalt des Froschkörpers von Glykogen in den verschiedenen Jahreszeiten. Pflügers Arch. T. 74. 1899 r.
19. Ehrlich P. Zeitschrift f. klinische Medizin. T. 6. 1883 r. cyt. E. Pflüger — Glykogen. Pflügers Arch. T. 96. 1903 r.
20. Konopacki M. Sur le glycogène dans le developpement des embryons de la grenouille. C. Rendus de la Soc. de Biol. T. 91. 1924 r.
21. Konopacki M. i Konopacka B. Micromorphologie du metabolisme dans les periodes initiales du developpement de la grenouille (Rana fusca). Bulletin de l'Acad. de Scien. de Cracovie. 1926 r.

Franciszek Leja.

O równaniach różniczkowych równoważnych z równaniami różniczkowemi linjowemi 3-go rzędu.

Przedstawił K. Żorawski.

Streszczenie.

Celem tej pracy jest rozwiązanie zagadnienia następującego: Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne 3-go rzędu

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \omega(x, y, z, u), \quad \text{gdzie} \quad z = \frac{dy}{dx},\ u = \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{1}$$

podać warunki jakim czynić musi zadość funkcja analityczna $\omega(x, y, z, u)$, aby można było równanie (1) przekształcić za pomocą pewnego przekształcenia analitycznego

$$x' = X(xy),\ y' = Y(xy),\ \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

na dowolne równanie linjowe

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \lambda(x) \cdot u + \mu(x) \cdot z + \nu(x) \cdot y + \rho(x). \tag{2}$$

Stosując metodę niezmienników różniczkowych Liego otrzymałem wyniki następujące:

1^0 Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby równanie (1) można było przekształcić na równanie (2) jestto, aby funkcja $\omega(x y z u)$ spełniała układ (S) siedmiu równań różniczkowych cząstkowych jednej zmiennej zależnej i czterech niezależnych x, y, z, u.

2^0 Wyznaczyłem układ (S), który składa się z jednego równania 2 rzędu, dwóch równań 3 rzędu, trzech równań 4 rzędu i nadto jednego równania 6 rzędu, w którem występuje pewna dowolna funkcja analityczna.

F. Leja.

Sur les équations équivalentes aux équations différenticlles linéaires du 3 ordre.

Présenté par K. Żorawski.

§ 1. Le but de cette note est la résolution du problème suivant:

Etant donnée une équation diffiérentielle ordinaire du 3 ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \omega(x, y, z, u); \; z = \frac{dy}{dx}, \; u = \frac{dz}{dx}, \tag{1}$$

où ω est une fonction analytique des variables x, y, z, u, déterminer les conditions dans lesquelles il existe une transformation ponctuelle analytique

$$x' = X(xy), \; y' = Y(xy), \; \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \neq 0, \tag{2}$$

qui transforme l'équation (1) en une équation différentielle linéaire quelconque

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \lambda u + \mu z + \nu y + \rho, \tag{3}$$

où les coëfficients λ, μ, ν, ρ désignent des fonctions analytiques de la variable x.

Supposons que la fonction $\omega(x, y, z, u)$ soit régulière au point (x_0, y_0, z_0, u_0); les fonctions $X(xy)$ et $Y(xy)$ doivent être régulières au point (x_0, y_0). Sans nuire à la généralité on peut supposer que ces deux dernières fonctions prennent au point $(x_0 y_0)$ des valeurs

$$X(x_0 y_0) = x_0, \; Y(x_0 y_0) = y_0, \tag{4}$$

car, si l'on avait $X(x_0 y_0) = x_0'$, $Y(x_0 y_0) = y_0'$ et si la transformation (2) transformait l'équation (1) en une équation linéaire, la transformation

$$x' = x_0 - x_0' + X(xy), \; y' = y_0 - y_0' + Y(xy) \tag{2'}$$

jouirait, elle-même, de la dernière proprieté et les seconds membres des équation (2)' satisfont à la condition (4).

Toutes les transformations (2) satisfaisant à la condition (4) forment un groupe continu et infini de *Lie* qui sera appelé *groupe* (G).

Etant donnée une fonction quelconque φ des variables $x, y, z, u,$ désignons par φ^{10} et φ_{01} les operations suivantes

$$\varphi^{10} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + z\frac{\partial\varphi}{\partial y} + u\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \ \varphi_{01} = \frac{\partial\varphi}{\varphi u}$$

et posons

$$z' = \frac{dy'}{dx'}, \ u' = \frac{d^2y'}{dx'^2}.$$

Les équations (2) conduisent aux transformations suivantes

$$z' = \frac{Y^{10}}{X^{10}} = Z(x, y, z),$$

$$u' = \frac{Z^{10}}{X^{10}} = U(x, y, z),$$

$$\frac{d^3y'}{dx'^3} = \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{U_{01}}{X^{10}} + \frac{U^{10}}{X^{10}},$$

donc, en remplaçant par x' et y' les variables x et y de l'équation (3), on voit que, si l'équation (1) est transformable en une équation linéaire, la fonction $\omega(x, y, z, u)$ doit être de la forme

$$(5) \qquad \omega = (\lambda U + \mu Z + \nu Y + \rho)\frac{X^{10}}{U_{01}} - \frac{U^{10}}{U_{01}};$$

où 1^0 les fonctions analytiques $X(xy)$ et $Y(xy)$ sont quelconques pourvu qu'elles soient indépendantes et qu'elles satisfassent à la condition (4) en un point régulier (x_0, y_0),

2^0 les lettres λ, μ, ν, ρ désignent des fonctions d'une variable $x' = X(x, y)$, quelconques mais régulières au point x_0.

La condition necessaire (5) de notre problème est en même temps suffisante car, si la fonction ω est de la forme (5), la transformation inverse de (2) transforme l'équation (1) en (3).

Nous formerons dans la suite un système des équations différentielles partielles d'une variable dépendante ω et de quatre variables indépendantes $x, y, z, u,$ ayant la forme

$$(S) \qquad F_i\left(z, u, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^n\omega}{\partial x^n}, \ldots\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

et jouissant des deux propriétés suivantes:

1⁰ Chaque fonction de la forme (5) est une integrale de ce système.

2⁰ Chaque intégrale de ce système est de la forme (5).

Un tel système donne la résolution du problème posé car, si le second membre d'une équation différentielle (1) satisfait au système (S), il est de la forme (5) et, par conségnant, l'équation considérée peut toujours être transformée en une équation linéaire.

Remarquons que le système (S) doit être invariable par rapport aux transformations du groupe (G) car, en effectuant une transformation quelconque de ce groupe sur une intégrale quelconque (5) du système (S), on obtient une fonction de la forme (5) et, par conséquent, une nouvelle intégrale de (S).

Il suit de cette remarque que *le système* (S) *peut être définit comme un système qui est satisfait par le second membre de l'équation linéaire* (3) *la plus générale et qui est invariable par rapport aux transformations du groupe* (G).

§ 2. On peut former le système (S) en différentiant l'équation (5) par rapport aux variables x, y, z et u un nombre suffisamment grand de fois et en éliminant les fonctions arbitraires contenues dans les seconds membres des équations obtenues. Mais cette méthode conduit aux calculs presque insurmontables et c'est pourquoi je me servirai pour notre but de la méthode des invariants différentiels introduite par *Lie*. Cette dernière methode consiste dans la formation de *toutes les relations, independantes entre elles, qui existent entre les invariants différentielles de l'équation linéaire* (3) *par rapport au groupe* (G).

Dans mon travail *„Bestimmung der Invarianten der Differentialgleichungen 3. Ordnung in bezug auf die Punkttransformationen"*[1]) j'ai trouvé tous les invariants de l'équation (1) la plus générale par rapport aux transformations du groupe (6).

Je m'appuyerai sur les resultats suivants de ce travail:

1⁰ Le symbole

$$\varphi_{kl}^{ij} \tag{6}$$

désignera dans la suite le resultat de l'opération

$$\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial z}$$

efféctuée i-fois sur la dérivée partielle

[1]) Monatsh. f. Math. n. Ph. 1918, t. XXIX, p. 203.

$$\varphi^{oj}_{kl} = \frac{\partial^{j+k+l}\varphi}{\partial y^j\, \partial z^k\, \partial u^l}.$$

Il suit de cette définition qu'on a [1])

$$(\varphi^{ij}_{kl})^{10} = \varphi^{i+1,\,j}_{k,\,l}, \quad (\varphi^{ij}_{kl})^{01} = \varphi^{i,\,j+1}_{k,\,l}$$

et que

$$(\varphi^{ij}_{kl})_{10} = \varphi^{i,\,j}_{k+1,\,l} + i\,\varphi^{i-1,\,j+1}_{k,\,l},$$
$$(\varphi^{ij}_{kl})_{01} = \varphi^{i,\,j}_{k,\,l+1} + i\,\varphi^{i-1,\,j}_{k+1,\,l} + \tbinom{i}{2}\,\varphi^{i-2,\,j+1}_{k,\,l},$$

où l'on doit poser $\binom{i}{2} = 0$, lersque $i = 1$. Le symbole (6) sera appelé dérivée de φ d'ordre $i+j+k+l$.

Cela posé, soit

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \omega(x, y, z, u) \tag{7}$$

une équation différentielle quelconque du 3 ordre.

Désignons par α, β, γ, δ les quatre expressions auxiliaires

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \omega^{10}_{01} - 3\,\omega_{10} - \frac{2}{3}\,\omega_{01}\,\omega_{01} + \omega\,\omega_{02},\\
\beta &= \omega_{11} + \frac{1}{3}\,\omega_{01}\,\omega_{02},\\
\gamma &= \alpha_{10} + 2\,\omega^{01}_{01} + \frac{1}{3}\,\omega_{01}\,\alpha_{01} - \frac{1}{3}\,\omega_{02}\,\alpha,\\
\delta &= \alpha_{01} + \frac{4}{3}\,\beta.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Dans la formation des invariants de l'équation (7) jouent un rôle prépondérant les quatre *fonctions fondamentales* suivantes:

$$
\begin{aligned}
a &= \omega_{20} - 2\,\omega^{01}_{01} + \frac{2}{3}\,\omega_{01}\,\omega_{11} + \frac{1}{3}\,\omega_{02}\,\alpha + \frac{1}{9}\,\omega_{01}\,\omega_{01}\,\omega_{02},\\
b &= \alpha^{10} + 6\,\omega^{01} - \frac{2}{3}\,\omega_{01}\,\alpha + \omega\,\alpha_{01},\\
c &= \omega_{12} + \frac{1}{3}\,\omega_{01}\,\omega_{01} + \frac{1}{6}\,\omega_{02}\,\omega_{02},\\
d &= \omega_{03},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

dont la première est du 2 ordre et toutes les autres du 3 ordre.

---

[1]) On pose $\varphi^{01} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\varphi_{10} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, $\varphi_{01} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$.

2⁰ Soit

$$Tf = \xi(xy)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xy)\frac{\partial f}{\partial y}$$

une transformation infinitesimale du groupe (G). Posons

$$W = \eta - z\,\xi;$$

on prouve que les accroissements des fonctions fondamentales (9), provenant de la transformation (10) sont de la forme [1])

$$(10)\qquad \begin{aligned} \delta a &= a(-W^{01} + W_1^{10}) \\ \delta b &= b\,.\,3\,W_1^{10} \\ \delta c &= c(-2\,W^{01} - 2\,W_1^{10}) - d\,W^{11} \\ \delta d &= d(-2\,W^{10} - 3\,W_1^{10}). \end{aligned}$$

Une fonction φ des dérivees ω_{kl}^{ij} dont l'accroissement est de la forme

$$(11)\qquad \delta\varphi = \varphi(r\,W^{01} + s\,W_1^{10}) + \Phi\,W^{11},$$

où r et s sont des nombres entiers et Φ est une nouvelle fonction des ω_{kl}^{ij}, sera appelée *fonction de la seconde classe* et, lorsque $\Phi = 0$, *invariant relalif* [2]). On prouve que Φ est toujours, en même temps que φ, une fonction de la seconde dasse.

3⁰ Losrque φ est une fonction de la seconde classe, désignons par

$$\varphi^{10\prime},\ \varphi^{01\prime},\ \varphi_{10}',\ \varphi_{01}'$$

les expressions suivantes:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \varphi^{10\prime} &= \varphi^{10} + \omega\,\varphi_{01} - \frac{s}{3}\,\omega_{01}\,\varphi + \frac{1}{6}\,\alpha\,\Phi, \\ \varphi^{01\prime} &= \varphi^{01} - \frac{1}{6}\,\alpha\,\varphi_{01} + \left(\frac{3r-s}{6}\,\delta - \frac{s}{9}\,\beta\right)\varphi - \frac{1}{6}\,\omega_{02}\,\varphi^{10\prime} + \frac{1}{6}\,\gamma\,\Phi, \\ \varphi_{10}' &= \varphi_{10} + \frac{1}{3}\,\omega_{01}\,\varphi_{01} - \frac{r+s}{6}\,\omega_{02}\,\varphi + \left(\frac{1}{3}\,\delta - \frac{1}{9}\,\beta\right)\Phi, \\ \varphi_{01}' &= \varphi_{01} - \frac{1}{6}\,\omega_{02}\,\Phi, \end{aligned}$$

---

[1]) On voit, d'après (11), que les fonctions fondamentales a, b, d sont des invariants relatifs et que c est une fonction de la seconde classe.

On peut démontrer que, si φ est un invariant rélatif ayant l'accroissement $\delta\varphi = \varphi(r\,W^{10} + s\,W_1^{10})$, la transformation (2) transforme φ en

$$\varphi' = \varphi\,\frac{(X_x\,Y_y - X_y\,Y_x)^r}{(X_x + z\,X_y)^{r+s}}.$$

[2]) Nous écrirons W_k^{ij} au lieu de W_{ko}^{ij}. La fonction W ne dépend pas de la variable u et, par suite, $W_{kl}^{ij} = 0$, si $l > 0$.

On prouve que ces expressions sont, en meme temps que φ, des fonctions de la seconde classe et que leurs accroissements ont la forme

$$(13)\quad \begin{aligned} &\delta \varphi^{10\prime} = \varphi^{10\prime}[r\, W^{01} + (s+1)\, W_1^{10}] + [\Phi^{10\prime} + (r-s)\,\varphi]\, W^{11} \\ &\delta \varphi^{01\prime} = \varphi^{01\prime}[(r-1)\, W^{01} + s\, W_1^{10}] + [\Phi^{01\prime} - \varphi_{10}']\, W^{11} \\ &\delta \varphi_{10}' = \varphi_{10}'[(r-1)\, W^{01} + (s-1)\, W_1^{10}] + [\Phi_{10}' - \varphi_{01}']\, W^{11} \\ &\delta \varphi_{01}' = \varphi_{01}'[(r-1)\, W^{01} + (s-2)\, W_1^{10}] + \Phi_{01}'\, W^{11} \end{aligned}$$

Les opérations (12) peuvent être appliquées à chaque fonction φ de la seconde classe un nombre quelconque de fois en calculant chaque fois des accroissements correspondants (13). Désignons par

$$(14)\qquad \varphi_{kl}^{ij\prime}$$

l'expression obtenue en appliquant à la fonction φ d'abord la dermière opération (12) l-fois, puis au résultat obtenu la troisième opération (12) k-fois et la seconde opération j-fois et enfin la prémière opération i-fois. L'expression ainsi obtenue sera appelée *dérivée de φ de la secoade classe* d'ordre $i+j+k+l$. Lorsque φ est une fonction d'ordre ν par rapport aux ω_{kl}^{ij}, la dérivée (14) sera une fonction d'ordre $i+j+k+l+\nu$.

4⁰ Formons toutes les dérivées (14) des quatre fonctions fondamentales (9)

$$(15)\qquad a_{kl}^{ij\prime},\ b_{kl}^{ij\prime},\ c_{kl}^{ij\prime},\ d_{kl}^{ij\prime}.$$

On prouve que chaque invariant de l'équation (7) par rapport au groupe (G) est une fonction de ces dérivées.

Losque $b \neq 0$, on peut former touts les invariants relatifs d'ordre $\leqq n$ comme il suit: Désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ toutes les dérivées (15) d'ordre $\leqq n$, la seule dérivée $b^{10\prime}$ exceptée, et soient

$$\delta \varphi_\nu = \varphi_\nu (r_\nu\, W^{10} + s_\nu\, W_1^{10}) + \Phi_\nu\, W^{11},\ i = 1, 2, \ldots, p,$$

leurs accroissements. D'après les formules (10 et (13) tous les Φ_ν sont fonctions des φ_ν et on a en outre

$$(16)\qquad \delta b^{10\prime} = b^{10\prime}.\, 4\, W_1^{11} - 3\, b\, W^{11}.$$

Or, les *intégrales principales* $I_1, I_2, \ldots, I_p$ de l'equation différentielle

(17) $$-3b\frac{\partial f}{\partial b^{10'}}+\Phi_1\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}+\Phi_2\frac{\partial f}{\partial\varphi_2}+\cdots+\Phi_p\frac{\partial f}{\partial\varphi_p}=0,$$

qui se réduisent respectivement à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, pour $b^{10'}=0$, sont des invariants relatifs de l'équation (7) et elles forment un *système complet*[1]) de ces invariants d'ordre $\leqq n$.

Les invariants relatifs ainsi obtenus seront appelés *principals;* à chaque dérivée (15), $b^{10'}$ excepté, il correspond un et un seul invariant principal se reduisant pour $b^{10'}=0$ à la dériveé qui lui correspond.

Par exemple, on a d'après (16) et (13)

$$\delta b^{20'}=b^{20'}.5\,W_1^{10}-7\,b^{10'}\,W^{11},$$
$$\delta b^{30'}=b^{30'}.6\,W_1^{10}-12\,b^{20'}\,W^{11},$$

donc l'équation (17) contient les termes

$$-3b\frac{\partial f}{\partial b^{10'}}-7\,b^{10'}\frac{\partial f}{\partial b^{20'}}-12\,b^{20'}\frac{\partial f}{\partial b^{30'}}+\cdots=0$$

d'où on obtient deux invariants relatifs principals

(18) $$I_2=b^{20'}-\frac{7}{6b}\,b^{10'}\,b^{10'},$$
$$I_3=b^{30'}-\frac{4}{b}\,I_2\,b^{10'}-\frac{14}{9bb}\,b^{10'}\,b^{10'}\,b^{10'},$$

qui correspondent aux dérivées $b^{20'}$ et $b^{30'}$. Remarquons que les fonctions fondamentales a, b et d sont intégrales de l'équation (17) et, par suite, elles sont directement invariants relatifs principals.

On prouve que l'accroissement δI d'un invariant principal I, qui correspond à une dérivée φ ayant l'accroissement $\delta\varphi=\varphi(r\,W^{01}+s\,W_1^{10})+\Phi\,W^{11}$, est de la forme

$$\delta I=I(r\,W^{01}+s\,W_1^{10}).$$

5⁰ Etant donnés trois invariants rélatifs quelconques I_1, I_2, I_3, ayant des accroissements

$$\delta I_\nu=I_\nu(r_\nu\,W^{01}+s_\nu\,W_1^{10}),\quad \nu=1,2,3,$$

on prouve que l'expression

---

[1]) C'est-à-dire que chaque invariant relatif d'odre $\leqq n$ est une fonction des interviants de ce système.

$$I_1^{r_2 s_3 - r_3 s_2} \cdot I_2^{r_3 s_1 - r_1 s_3} \cdot I_3^{r_1 s_2 - r_2 s_1}$$

est un *invariant absolu.*

Lorsque $r_1 = r_2 = 0$, les deux invariants relatifs I_1 et I_2 seuls suffisent pour la formation d'un invariant absolu qui est de la forme

$$I_1^{s_2} \cdot I_2^{-s_1} \tag{19}$$

§ 3. Nous allons maintenant appliquer les resultats du paragraphe précédant au problème posé au début.

Supposons que l'équation (7) soit linéaire c'est-à-dire que

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \omega = \lambda u + \mu z + \nu y + \rho; \tag{20}$$

on a, d'après (8)

$$\alpha = \frac{d\lambda}{dx} - \frac{2}{3}\lambda^2 - 3\mu$$
$$\beta = \gamma = \delta = 0$$

et les fonctions fondamentales (9) ont des valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \frac{d^2\lambda}{dx^2} - 2\lambda\frac{d\lambda}{dx} + \frac{4}{9}\lambda^3 + 2\lambda\mu - 3\frac{d\mu}{dx} + 6\nu, \\ c &= 0, \\ d &= 0, \end{aligned} \tag{21}$$

dont la seconde est une fonction quelconque de x et les trois autres sont identiquement nulles. Je dis que:

I. *Toutes les dérivées* (15) *des fonctions a, c et d sont pour une équation linéaire* (20) *identiquement nulles.*

En effet, étant $d = 0$, les accroissements (10) des fonctions a, c et d sont tous de la forme (11), où $\Phi = 0$, donc toutes les dérivées prémières de ces fonctions sont nulles, d'après les formules (12), car on a pour elles $\varphi = 0$ et $\Phi = 0$. D'autre part, le coëfficient de W^{11} dans toutes les formules (13) étant nul pour $\varphi = a$, c et d, toutes les dérivées secondes de ces fonctions sout nulles et ainsi de suite.

Considérons les dérivées $b_{kl}^{ij'}$ de la fonction b et partageons-les en deux classes suivantes:

$$b,\, b^{10'},\, b^{20'},\, b^{30'},\ldots \tag{22}$$

(23) $$b^{ij'}_{kl}, \text{ pour } j+k+l>0.$$

Je vais prouver que:

II. *Toutes les dérivées* (22) *sont pour une équation linéaire* (20) *fonctions de x et de x seulement et toutes les dérivées* (23) *sont identiquement nulles.*

En effet, la fonction b ne dépend que de la variable x et, d'après la première formule (12), on a

$$b^{10'}=\frac{\partial b}{\partial x}-\lambda b$$

donc $b^{10'}$ ne dépend que de x. Généralement, si une fonction φ ne dépend que de x, on a

$$\varphi^{10'}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{s}{3}\lambda\varphi+\frac{1}{6}\alpha\Phi$$

donc $\varphi^{10'}$ ne dépend que de x, lorsque Φ ne dépend que de x. Il en suit que $b^{20'}$ ne dépand que de x, car le coëfficient Φ dans $\delta b^{10'}$ étant égal à $-3b$, ne dépand que de x, et ainsi de suite.

Considérons les dérivées (23). On voit d'abord, d'après les formules (12) que

$$b^{01'}=b'_{10}=b'_{01}=0,$$

car $\beta=\gamma=\delta=0$. D'autre part, les coëfficient W^{11} dans les accroissements de ces dérivées sont tous nuls donc les dérivées secondes (23) sont nulles et ainsi de suite.

Remarquons que, si $b=0$, toutes les dérivées (22) et (23) s'annulent en même temps.

On sait d'après 4^0 du § 2 que, à chaqune des dérivées (15), $b^{10'}$ excepté, il correspond dans le cas $b\neq 0$ un invariant relatif principal et que l'ensemble de ces invariants forme un système complet. Partageons cet ensemble en deux classes suivantes.

La classe contenant les invariants

(24) $$I_1, I_2, I_3, \ldots I_n, \ldots$$

qui correspondent successivement aux dérivées

(25) $$b, b^{20'}, b^{30'}, \ldots, b^{n0'}, \ldots,$$

et la classe contenant les invariants

(26) $$I,$$

qui correspondent aux autres dérivées (15).

Nous démontrérons que:

III. *Dans une équation linéaire la plus générale les invariants* (24) *ne s'annulent pas et ils sont fonctions d'une seule variable* x *et les invariant* (26) *sont tous identiquement nuls ou il sont fonctions des invariants* (24).

En effet, d'après la proposition II, toutes les dérivées (22) sont fonctions d'une seule variable x et elles ne s'annulent pas dans une équation linéaire la plus génerale. Les invariants (24) ont la forme

$$I_1 = b,\ I_\nu = b^{\nu 0'} + f_\nu \,.\, b^{10'},\ \nu = 2, 3, \ldots, \tag{27}$$

où f_ν est une fonction des variables (22) jusqu'à l'ordre $\nu - 1$. Soit I un invariants quelconque de la classe (26); s'il ne s'annule pas, il ne dépend que des dérivées (22), car toutes les autres sont nulles. En resolvant le système (27) par rapport aux variables (25), ce qui est toujours possible, on voit que l'invariant I est une fonction des invariants (24) et encore de $b^{10'}$ au plus. Mais, la dérivée $b^{10'}$ n'etant pas invariante, I doit être une fonction des seuls invariants (24), c. q. f. d.

Les invariants (24) sont dans le cas général indépendantes entre elles, car $I_1 = b$ est une fonction quelconque de x et chaque invariant d'un indice plus grand dépend d'une dérivée de b d'ordre plus grand. En vertu de la dermière proposition on peut dire que les seuls invariants rélatifs du système complet, qui ne s'annulent pas, sont les invariants (24).

Passons à la détermination des invariants absolus d'une équation linéaire.

D'après la seconde des formules (10) et la prèmiere des formules (13) on a

$$\delta b^{\nu 0'} = b^{\nu 0'} (\nu + 3)\, W_1^{10} + \Phi_\nu\, W^{11},$$

donc, d'après la dernière des propositions 4^0 du § 2, on a

$$\delta I_\nu = I_\nu \,.\, (\nu + 3)\, W_1^{10} \quad \nu \geqq 2$$

L'accroissement de $I_1 = b$ étant connu d'àprès (10) on voit en vertu de 5^0 du § 2 que tous les invariants absolus qui peuvent être formés des invariants relatifs (24) ont la forme [1])

---

[1]) Les nombres 3 et $\nu + 3$ ont ici la dignification ordinaire.

$$(28) \qquad I_\nu^3 b^{-(\nu+3)}, \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

tous les autres invariants absolus sont évidemment identiquement nuls.

Le système d'équations différentielles (S) du § 1 se compose des équations de deux cathégories suivantes: 1^0 des équations obtenus en égalant à zéro tous ceux des invariants absolus qui s'annulent identiquement pour une équation linéaire quelconque (20), 2^0 des relations existant entre les invariants (28). Je dis que

IV. *Les équations de la prémière cathégorie sont conséquences*[1] *des six équations suivantes*

$$(29) \qquad \begin{aligned} &a = c = d = 0, \\ &b'_{01} = b'_{10} = b^{01'} = 0, \end{aligned}$$

et les équations de la deuxième cathégorie sont conséquences d'une seule équation suivante

$$(30) \qquad I_3^3 = b^6 . F\left(\frac{I_2^3}{b^5}\right),$$

où F est une fonction analytique quelconque[2]).

En effet, il suit des propositions I et II que, si les équations (29) sont satisfaites, toutes les dérivées (15) qui diffèrent des dérivées (22) sont nulles et, par suite, touts les invariants relatifs (26) sont nuls en vertue de la proposition III. Il en resulte que tout les invariants absolus qui correspondent aux invariants relatifs (26) s'annulent aussi, donc toutes les équations de la première cathégorie sont satisfaites.

Considérons maintenant les inviants absolus (28) et désignons — les par

$$(31) \qquad U_\nu = I_\nu^3 b^{-(\nu+3)} \quad \nu = 2, 3, \ldots;$$

ils sont fonctions d'une seule variable x, donc

$$U_\nu = f_\nu(x) \quad \nu = 2, 3, \ldots.$$

En éliminant x de ces égalités, on obtient toutes les équations de la seconde cathégorie

---

[1]) C'est-à-dire qu'elles peuvent être obtenues par différentiation et par combinaison des équations (29).

[2]) Dans la formule (30) on a $I_3^3 = I_3 . I_3 . I_3$ et $I_2^3 = I_2 . I_2 . I_2$; les nombres 5 et 6 dans b^5, b^6 désignent des exposants potentiels.

(32) $$U_3 = F(U_2),\ U_4 = F_1(U_2), \ldots,\ U_\nu = F_{\nu-3}(U_2), \ldots$$

dont la prémière est précisement l'équation (30).

Je dis que toutes les équations (32) sont conséquences de la prémière d'elles. En effet, en vertu de la formule (31) elles peuvent être écrites dans la forme

(33) $$I_3 = f(b, I_2),\ I_4 = f_1(b, I_2), \ldots\ldots,$$

où les f_ν sont fonctions de deux invariants relatifs b et I_2.

Soit φ un invariant relatif quelconque ayant l'accroissement $\delta\varphi = \varphi(r\,W^{01} + s\,W_1^{10})$. Considérons la fonction

(34) $$D\varphi = \varphi^{10'} + \frac{(r-s)\varphi}{3b} b^{10'};$$

elle est un nouvel invariant relatif d'ordre plus grand d'unité, car on a

$$\delta(D\varphi) = \delta\varphi^{10'} + \frac{(r-s)\varphi}{3b}\delta b^{10'} + \frac{r-s}{3} \cdot \frac{b\,\delta\varphi - \varphi\,\delta b}{b^2} b^{10'},$$

d'où, d'après la prémière des formules (13),

$$\delta(D\varphi) = D\varphi \cdot (r\,W^{01} + (s+1)\,W_1^{10}).$$

Appliquons l'opération (34) à la prémière équation (33); on obtient

(35) $$D\,I_3 = \frac{\partial f}{\partial b} D\,b + \frac{\partial f}{\partial I_2} D\,I_2.$$

Mais, I_3 étant, en vertu des formules (27), de la forme $I_3 = b^{30'} + f_3\,b^{10'}$, on aura

$$D\,I_3 = b^{40'} + \ldots$$

où les termes omits dépendent des dérivées $b^{io'}$ d'ordre $i \leqq 3$, donc $D\,I_3$ est une fonction des invariants relatifs I_4, I_3, I_2, et b. De même $D\,I_2$ est une fonction de I_3, I_2 et b tandis que

$$D\,b = 0$$

ce qu'il est facile de prouver d'après la formule (34).

Remplaçons I_3 dans l'équation (35) par $f(b, I_2)$ en vertu de (33) et resolvons cette équation par rapport à I_4, on obtient

(36) $$I_4 = f'(b, I_2).$$

Or, cette denière équation doit être identique avec la seconde équation (33), car il ne peut exister qu'une seule relation entre I_4, I_2 et b.

Parcillement, en appliquant de nouveau l'opération (34) à l'équation (36) on peut obtenir la troisième équation (33) et ainsi de suite.

Le problème posé est ainsi resolu car les équations (29) + (30) forment le system (S) du § 1. Remarquons que, dans les équations (29), la fonction a est du 2 ordre, les fonctions c et d sont du 3 ordre et les fonctions $b'_{01}, b'_{10}, b^{01'}$ sont du 4 ordre. Les fonctions I_2 et I_3 de l'équation (30) ont la forme (18), donc elles sont du 5 et du 6 ordre. On a donc le théorème suivant:

Théorème: *Pour qu'une équation différentielle* (1) *puisse être transformée par une transformation ponctuelle* (2) *en une équation linéaire quelconque* (3) *il faut et il suffit que la fonction* $\omega(x\,y\,z\,u)$ *satisfasse au système des sept équations différentielles partielles* (29) + (30) *dont une est du* 2 *ordre deux sont du* 3 *ordre, trois du* 4 *ordre et la dernière* (30) *du* 6 *ordre.*

Les fonctions a, b, c, d et leurs dérivées contenues dans ces équations sont définies par les formules (9), (12) et (18).

En terminant remarquons que, si toutes les quatre fonctions fondamentales a, b, c, d sont nulles, toutes leurs dérivées de la seconde classe (15) sont nulles aussi et l'équation (7) n'a aucun invariant absolu par rapport au groupe (G). De même, l'équation différentielle

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0 \tag{37}$$

n'a aucun invariant et, par suite, une équation différentielle (1) dont la fonction $\omega(x\,y\,z\,u)$ satisfait au système des quatre équations différentielles partielles [1])

$$a = b = c = d = 0$$

peut être transformée en l'equation (37).

---

[1]) Ces dernières conditions ont été trouvées auparavant dans une forme différente par K. Żorawski, v. „O całkow. pewn. kateg. równań różn. 3 rzędu". (Rozprawy Akad. Um. Kraków 1898 t. 36).

Kazimierz Żorawski.

O przekształceniach, czyniących zadość równaniu różniczkowemu cząstkowemu pewnego szczególnego kształtu.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. nauk mat. i przyrodn.
w dniu 13 stycznia 1927.

Kasimir Żorawski.

Über Transformationen, welche eine partielle Differentialgleichung von besonderer Form erfüllen.

In dieser Abhandlung werden einige Bemerkungen über solche Punkttransformationen der Ebene angegeben, welche eine partielle Differentialgleichung von besonderer Form erfüllen. Es sind nämlich in den hier betrachteten Fällen die inversen Transformationen von der Eigenschaft behaftet, dass sie eine partielle Differentialgleichung von analoger Form befriedigen. Diese Thatsache bildet den Ausgangspunkt einer Reihe von Sätzen, welche den Inhalt der Abhandlung bilden.

1. Man betrachte die Gleichungen:

$$u = U(x, y), \quad v = V(x, y), \tag{1}$$

welche unter der Voraussetzung, dass die Funktionaldeterminante:

$$D = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}$$

nicht identisch gleich Null ist, eine Transformation der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v definieren. Es mögen durch Auflösung der Gleichungen (1) in Bezug auf x und y die Gleichungen:

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v) \tag{2}$$

folgen und man nehme an die Bezeichnung:

$$\Delta = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}.$$

Es bestehen alsdann bekanntlich die Beziehungen:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial V}{\partial y}, \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} = -\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial Y}{\partial v} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial U}{\partial x} \end{cases}$$

und die Beziehung:

$$\text{(4)} \qquad D\Delta = 1.$$

Wir wollen uns in der gegenwärtigen Abhandlung mit solchen Transformationen (1) beschäftigen, welche die Eigenschaft besitzen, dass sie eine partielle Differentialgleichung von der Form:

$$\text{(5)} \qquad gD + k\frac{\partial U}{\partial x} + l\frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{h} + m\frac{\partial U}{\partial y} + n\frac{\partial V}{\partial y}$$

befriedigen, wo die Koeffizienten $g, \mathfrak{h}, k, l, m, n$ Konstanten bezeichnen. Damit sich diese Beziehung (5) weder auf eine Identität, noch auf ein Wiederspruch, noch schliesslich auf die Gleichung $D = 0$ reduziert, müssen die fünf Koeffizienten g, k, l, m, n die Eigenschaft besitzen, dass sie nicht alle gleichzeitig gleich Null seien und müssen die fünf Koeffizienten $\mathfrak{h}, k, l, m, n$ auch die Eigenschaft besitzen, dass sie nicht alle gleichzeitig gleich Null seien. Setzt man in der Differentialgleichung (5) $g = \mathfrak{h} = 0$, so ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\text{(6)} \qquad k\frac{\partial U}{\partial x} + l\frac{\partial V}{\partial x} = m\frac{\partial U}{\partial y} + n\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Die Transformationen (1), welche eine solche Differentialgleichung befriedigen, haben wir in einer früheren Abhandlung studiert [1]). Die gegenwärtige Arbeit bildet daher unter Anderem eine Verallgemeinerung der Untersuchung dieser früheren Abhandlung.

Wenn wir auf die Differentialgleichung (5) die Beziehungen (3) und (4) in Anwendung bringen, so kommen wir auf die Differentialgleichung:

---

[1]) Kazimierz Żorawski. Własności pewnej kategorji przekształceń punktowych w płaszczyźnie. Rozprawy Wydz. mat. przyr. Polskiej Akademji Umiejętności 1927.

(7) $$\mathfrak{h}\Delta + n\frac{\partial X}{\partial u} + l\frac{\partial Y}{\partial u} = g + m\frac{\partial X}{\partial v} + k\frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Wir konstatieren also für unsere Kathegorie der Transformationen die Eigenschaft, dass die inverse Transformation (2) auch eine Differentialgleichung von derselben Form und demselben Konstantensystem, (wie die frühere Differentialgleichung) befriedigt, dass aber diese Konstanten in der zweiten Differentialgleichung in einer anderen Weise geordnet sind. Es ist dabei leicht ersichtlich, dass dieselben oben genannten Bedingungen für die Koeffizienten erfüllt werden müssen, damit sich die Beziehung (7) weder auf eine Identität, noch auf ein Wiederspruch, noch schliesslich auf die Gleichung $\Delta = 0$ reduziert.

Wir wollen jetzt zunächst die Frage beantworten, wie die konstanten Koeffizienten der Differentialgleichungen (5) und (7) beschränkt werden müssen, damit sich die Differentialgleichung (7) aus der Differentialgleichung (5) in der Weise erhalten lässt, dass man in der letzteren die Buchstaben U, V, x, y beziehungsweise durch die Buchstaben X, Y, u, v ersetzt. Ein solches Verhalten der genannten Differentialgleichungen kann als invariantes Verhalten bei Inversion der Transformation bezeichnet werden. Dasselbe kommt nur in zwei folgenden Fällen vor. Erstens dann, wenn die Gleichheiten:

(8) $$\mathfrak{h} = g, \; n = k$$

bestehen und zweitens dann, wenn die Bedingungen:

(9) $$l = m = 0, \; g + \mathfrak{h} = 0, \; n + k = 0$$

erfüllt sind. Daraus folgt, dass eine Differentialgleichung (5), welche dieses invariantes Verhalten aufweist, entweder die Form:

(10) $$g(D-1) + k\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right) + l\frac{\partial V}{\partial x} - m\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

oder die Form:

(11) $$g(D+1) + k\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0$$

besitzt. Dabei müssen die Konstanten g, k, l, m der Differentialgleichung (10) nur der Bedingung genügen, dass sie nicht alle gleichzeitig gleich Null sind und die Konstanten g, k der Differentialgleichung (11) nur der Bedingung, dass sie nicht beide gleichzeitig gleich Null sind.

2. Wir setzen voraus, dass alle Koeffizienten der Differentialgleichung:

$$gD + k\frac{\partial U}{\partial x} + l\frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{h} + m\frac{\partial U}{\partial y} + n\frac{\partial V}{\partial y} \tag{5}$$

reell sind. Wenn dabei die Determinante:

$$\varepsilon = lm - kn \tag{12}$$

eine positive Grösse ist, so ist es möglich unsere Differentialgleichung mit einem derart gewählten reellen Faktor multiplizieren, dass die in derselben Weise gebildete Determinante gleich $+1$ ist. Ebenso, wenn diese Determinante eine negative Grösse ist, kann unsere Differentialgleichung mit einem derart gewählten reellen Faktor multipliziert werden, dass die in derselben Weise gebildete Determinante gleich -1 ist. Wenn schliesslich die Determinante (12) gleich Null ist, aber nicht alle Elemente dieser Determinante gleich Null sind, dann können diese Elemente in der Form:

$$k = \mu\,\mathfrak{a},\quad l = \mu\,\mathfrak{b},\quad \mathrm{m} = \lambda\,\mathfrak{a},\quad n = \lambda\,\mathfrak{b} \tag{13}$$

dargestellt werden, wo die Grössen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht beide gleichzeitig gleich Null sind und wo die Grössen λ und μ nicht beide gleichzeitig gleich Null sind. Alsdann ist es möglich die Differentialgleichung mit einem solchen Faktor multiplizieren, dass die betreffenden Faktoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \lambda, \mu$ die Beziehungen:

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = 1,\quad \lambda^2 + \mu^2 = 1 \tag{14}$$

erfüllen. Wir setzen voraus, dass die genannten Maassnahmen unter betreffenden Voraussetzungen getroffen sind und dass sich unsere Bezeichnungen auf derartig modifizierten Koeffizienten beziehen.

Wir unternehmen nun die Integration der Differentialgleichung (5) und betrachten zunächst die Fälle, in welchen $g \neq 0$ ist. Unter dieser Voraussetzung führen wir an Stelle der unbekannten Funktionen u, v die unbekannten Funktionen u^*, v^*, welche mit den früheren durch Beziehungen von der Form:

$$u = px + qy + wu^*,$$
$$v = rx + sy + wv^*$$

verbunden sind, wo p, q, r, s, w reelle Konstanten bezeichnen. Unsere Differentialgleichung geht alsdann in die Differentialgleichung:

$$g w^2 \frac{d(u^*, v^*)}{d(x,y)} + w(k+sg)\frac{\partial u^*}{\partial x} + w(l-qg)\frac{\partial v^*}{\partial x} =$$
$$= \mathfrak{h} + mq + ns - kp - lr - g(ps - qr) +$$
$$+ w(m+rg)\frac{\partial u^*}{\partial y} + w(n-pg)\frac{\partial v^*}{\partial y}$$

über und man bemerkt leicht, dass die Koeffizienten p, q, r, s in der Weise bestimmt werden können, dass die Funktionen u^*, v^*, kommen in der transformierten Differentialgleichung nur vermittelst der Funktionaldeterminante vor. Nimmt man nähmlich:

$$p = \frac{n}{g}, q = \frac{l}{g}, r = -\frac{m}{g}, s = -\frac{k}{g},$$

so erhält man die Transformation:

$$(15) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{g}(nx + ly) + wu^*, \\ v = -\dfrac{1}{g}(mx + ky) + wv^* \end{cases}$$

und die Differentialgleichung:

$$g^2 w^2 \frac{d(u^*, v^*)}{d(x,y)} = g\mathfrak{h} + \varepsilon.$$

Auf Grund dieser Rechnung kommt man zum Resultate, dass die Funktionen u, v, welche die Differentialgleichung (5) beim Bestehen der Ungleichheit $g \neq 0$ befriedigen, durch die Formeln (15) dargestellt werden können. Wenn dabei die Ungleichheit $g\mathfrak{h} + \varepsilon > 0$ erfüllt ist, dann ist es möglich die reelle Konstante w aus der Gleichung:

$$(16) \qquad g^2 w^2 = g\mathfrak{h} + \varepsilon$$

zu bestimmen und es werden alsdann die Funktionen u^*, v^* nur der Bedingung unterworfen, dass sie die Differentialgleichung:

$$(17) \qquad \frac{d(u^*, v^*)}{d(x,y)} = +1$$

befriedigen. Wenn ferner die Ungleichheit $g\mathfrak{h}+\varepsilon<0$ besteht, dann kann die reelle Konstante w aus der Gleichung:

$$g^2 w^2+g\mathfrak{h}+\varepsilon=0 \tag{18}$$

bestimmt werden und die Funktionen u^*, v^* müssen alsdann nur die Differentialgleichung:

$$\frac{d(u^*,v^*)}{d(x,y)}=-1 \tag{19}$$

erfüllen. Wenn schliesslich die Gleichheit $g\mathfrak{h}+\varepsilon=0$ stattfindet, so kann

$$w=1 \tag{20}$$

angenommen werden und die Funktionen u^*, v^* müssen nur der Differentialgleichung:

$$\frac{d(u^*,v^*)}{d(x,y)}=0 \tag{21}$$

Genüge leisten.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Fälle über, in welchen die Gleichheit $g=0$ besteht. In allen solchen Fällen sagt die Differentialgleichung (5) aus, dass der Ausdruck:

$$(m\,U+n\,V+\frac{1}{2}\mathfrak{h}\,y)\,dx+(k\,U+l\,V-\frac{1}{2}\mathfrak{h}\,x)\,dy \tag{22}$$

das Differential einer Funktion der Veränderlichen x, y ist. Wir bezeichnen beim Bestehen der Ungleichheit $\varepsilon\neq 0$ diese Funktion mit $F(x,y)$ und kommen demnach auf die Beziehungen:

$$m\,U+n\,V=\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathfrak{h}}{2}\,y,\; k\,U+l\,V=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\mathfrak{h}}{2}\,x,$$

auf Grund welcher für die Unbekannten u, v die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} u&=\varepsilon\left[l\frac{\partial F}{\partial x}-n\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathfrak{h}}{2}(n\,x+l\,y)\right],\\ v&=\varepsilon\left[m\frac{\partial F}{\partial y}-k\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\mathfrak{h}}{2}(m\,x+k\,y)\right]\end{aligned}\right. \tag{23}$$

sich ergeben. In diesen Ausdrücken ist $F(x,y)$ eine willkürliche Funktion der Veränderlichen x, y. Wenn aber die Gleichheit $\varepsilon=0$ besteht, dann ist es möglich den Ausdruck (22) auf Grund der Beziehungen (13) in der Form:

$$(\mathfrak{a}\, U + \mathfrak{b}\, V)(\lambda\, d\,x + \mu\, d\,y) + \frac{\mathfrak{h}}{2}(y\, d\,x - x\, d\,y)$$

darzustellen. Führt man hier die neuen Veränderlichen:

$$z = \lambda\, x + \mu\, y, \quad t = -\mu\, x + \lambda\, y \tag{24}$$

ein, so erhält man den Ausdruck:

$$(\mathfrak{a}\, U + \mathfrak{b}\, V)\, d\,z + \frac{\mathfrak{h}}{2}(t\, d\,z - z\, d\,t).$$

Dieser Ausdruck ist das Differential einer Funktion der Veränderlichen z und t, die wir etwa mit $\Phi(z, t)$ bezeichen wollen. Es besteht also die Gleichheit:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\mathfrak{h}}{2} z$$

und aus derselben folgt die Gleichheit:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = f(z) - \frac{\mathfrak{h}}{2} t,$$

wo $f(z)$ eine willkürliche Funktion von z bezeichnet. Wir kommen demnach zu der Beziehung:

$$\mathfrak{a}\, u + \mathfrak{b}\, v = f(z) - \mathfrak{h}\, t$$

und es ist ersichtlich, dass wir auf die unbekannten Funktionen u, v noch eine willkürliche Bedingung auferlegen können. Wählt man diese Bedingung in der Form:

$$-\mathfrak{b}\, u + \mathfrak{a}\, v = G(x, y),$$

wo $G(x, y)$ eine willkürliche Funktion der Veränderlichen x, y ist, so erhält man für die Unbekannten u, v die Formeln:

$$\left\{\begin{array}{l} u = \mathfrak{a}\, f(z) - \mathfrak{b}\, G(x, y) - \mathfrak{a}\, \mathfrak{h}\, t, \\ v = \mathfrak{b}\, f(z) + \mathfrak{a}\, G(x, y) - \mathfrak{b}\, \mathfrak{h}\, t. \end{array}\right. \tag{25}$$

Die Formeln (15), (23) und (25) liefern die Funktionen U, V, welche in verschiedenen Fällen die Differentialgleichung (5) erfüllen.

Jedes dieser Formelnpaare bestimmt aber dann und nur dann eine Transformation der Veränderlichen x, y, in die Veränderlichen u, v, wenn die betreffende Funktionaldeterminante der Funktionen U, V in bezug auf die Veränderlichen x, y nicht identisch gleich Null ist. Deshalb wollen wir hier noch die

Ausdrücke dieser Funktionaldeterminanten anführen. Für alle Fälle, in welden die Funktionen U, V durch die Formeln (15) bestimmt sind, ergibt sich die Funktionaldeterminante:

$$D = \frac{\mathfrak{h} g + 2\varepsilon}{g^2} + \frac{w}{g}\left(m\frac{\partial u^*}{\partial y} + n\frac{\partial v^*}{\partial y} - k\frac{\partial u^*}{\partial x} - l\frac{\partial v^*}{\partial x}\right), \tag{26}$$

wo u^*, v^* und w die entsprechenden oben angeführten Bedingungen erfüllen müssen. Für die Funktionen U, V der Formeln (23) erhält man die Funktionaldeterminante:

$$D = \varepsilon\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{\mathfrak{h}^2}{4}\right] \tag{27}$$

und für die Funktionen U, V der Formeln (25) die Funktionaldeterminante:

$$D = \left(\lambda\frac{\partial G}{\partial y} - \mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)\frac{df}{dz} + \mathfrak{h}\left(\lambda\frac{\partial G}{\partial x} + \mu\frac{\partial G}{\partial y}\right). \tag{28}$$

3. Wenn man in der Differentialgleichung (5) die Buchstaben $x, y, U, V, g, \mathfrak{h}, k, n$ beziehungsweise durch die Buchstaben $u, v, X, Y, \mathfrak{h}, g, n, k$ ersetzt und die Buchstaben l und m unverändert lässt, dann erhält man die Differentialgleichung:

$$\mathfrak{h}\,\Delta + n\frac{\partial X}{\partial u} + l\frac{\partial Y}{\partial u} = g + m\frac{\partial X}{\partial v} + k\frac{\partial Y}{\partial v}. \tag{7}$$

Es bleiben dabei: das Produkt $g\mathfrak{h}$ und die Determinante ε — unverändert. Im Falle, wenn diese Determinante gleich Null ist, wird man die erwähnte Vertauschung der Grössen k und n und das erwähnte invariante Verhalten der Grössen l und m dadurch erziehlen können, dass man $\mathfrak{a}$ mit λ und gleichzeitig $\mathfrak{b}$ mit μ vertauscht. Wenn man diese Bemerkungen berücksichtigt, so wird man auf Grund der Rechnungen der früheren Nummer die Funktionen X, Y, welche die Differentialgleichung (7) befriedigen, sogleich angeben können.

Wenn $\mathfrak{h} \neq 0$ ist, dann erhält man die Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\mathfrak{h}}(ku + lv) + \omega x^*, \\ y &= -\frac{1}{\mathfrak{h}}(mu + nv) + \omega y^* \end{aligned}\right. \tag{29}$$

mit der Funktionaldeterminante:

$$(30)\qquad \Delta = \frac{g\mathfrak{h} + 2\varepsilon}{\mathfrak{h}^2} + \frac{\omega}{\mathfrak{h}}\left(m\frac{\partial x^*}{\partial v} + k\frac{\partial y^*}{\partial v} - n\frac{\partial x^*}{\partial u} - l\frac{\partial y^*}{\partial u}\right).$$

Wenn dabei $\mathfrak{h} g + \varepsilon > 0$ ist, dann erfüllen die Grössen ω, x^*, y^* die Bedingungen:

$$(31)\qquad \mathfrak{h}^2\omega^2 = \mathfrak{h} g + \varepsilon, \frac{d(x^*, y^*)}{d(u, v)} = +1;$$

wenn ferner $\mathfrak{h} g + \varepsilon < 0$ ist, dann erfüllen diese Grössen die Bedingungen:

$$(32)\qquad \mathfrak{h}^2\omega^2 + \mathfrak{h} g + \varepsilon = 0, \frac{d(x^*, y^*)}{d(u, v)} = -1;$$

wenn schliesslich $\mathfrak{h} g + \varepsilon = 0$ ist, dann gelten die Gleichheiten:

$$(33)\qquad \omega = 1, \frac{d(x^*, y^*)}{d(u, v)} = 0.$$

Für Fälle, in welchen $\mathfrak{h} = 0$ ist, aber $\varepsilon \neq 0$ ist, ergeben sich die Formeln:

$$(34)\qquad \begin{cases} x = \varepsilon\left[l\frac{\partial\Phi}{\partial u} - k\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{g}{2}(ku + lv)\right], \\ y = \varepsilon\left[m\frac{\partial\Phi}{\partial v} - n\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{g}{2}(mu + nv)\right] \end{cases}$$

mit der Funktionaldeterminante:

$$(35)\qquad \Delta = \varepsilon\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}\right)^2 + \frac{g^2}{4}\right];$$

in diesen Formeln bezeichnet $\Phi(u, v)$ eine willkürliche Funktion der Veränderlichen u, v.

Für Fälle endlich, in welchen die Gleichheiten $\mathfrak{h} = 0$, $\varepsilon = 0$ bestehen, erhält man die Formeln:

$$(36)\qquad \begin{cases} x = \lambda\varphi(\xi) - \mu\Psi(u, v) - \lambda g\tau, \\ y = \mu\varphi(\xi) + \lambda\Psi(u, v) - \mu g\tau \end{cases}$$

mit der Funktionaldeterminante:

$$(37)\qquad \Delta = \left(\mathfrak{a}\frac{\partial\Psi}{\partial v} - \mathfrak{b}\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right)\frac{d\varphi}{d\xi} + g\left(\mathfrak{a}\frac{\partial\Psi}{\partial u} + \mathfrak{b}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right).$$

In diesen letzteren Formeln sind die Bezeichnungen:

$$(38)\qquad \xi = \mathfrak{a}u + \mathfrak{b}v,\ \tau = -\mathfrak{b}u + \mathfrak{a}v$$

in Anwendung gebracht und es wird in derselben unter $\varphi(\xi)$

eine willkürliche Funktion von ξ und unter $\Phi(u,v)$ eine willkürliche Funktion der Veränderlichen u, v verstanden.

4. Wir werden uns ferner nur mit denjenigen Fällen unserer Formelnpaare (15), (23), (25) beschäftigen, in welchen die bezüglichen Funktionaldeterminanten D nicht identisch gleich Null sind. Ebenso werden wir ferner nur diejenigen Fälle der Formelnpaare (29), (34), (36) in Betracht ziehen, in welchen die zugehörigen Funktionaldeterminanten Δ nicht identisch gleich Null sind. Die genannten Formelnpaare bestimmen alsdann Transformationen, für welche wir um kürzere Ausdrucksweise in Anwendung zu bringen, besondere Bezeichnungen gebrauchen werden.

Es möge nämlich die Bezeichnung S mit einem unteren Index für eine solche Transformation der Veränderlichen x, y in die Veränderlichen u, v benutzt werden, welche durch eines der Formelnpaare (15), (23), (25) bestimmt ist. Es möge ferner die Bezeichnung T mit einem unteren Index für eine solche Transformation der Veränderlichen u, v in die Veränderlichen x, y gebraucht werden, welche durch eines der Formelnpaare (29), (34), (36) bestimmt ist. Wir wollen dabei die präzise Erklärung dieser Bezeichnungen durch die folgende Tabelle festsetzen.

Bedingungen	Formeln	Bez.
$g \neq 0,\ g\mathfrak{h} + \varepsilon > 0$	(15), (16), (17)	S_1
$g \neq 0,\ g\mathfrak{h} + \varepsilon < 0$	(15), (18), (19)	S_2
$g \neq 0,\ g\mathfrak{h} + \varepsilon = 0$	(15), (20), (21)	S_3
$g = 0,\ \varepsilon = +1$	(23)	S_4
$g = 0,\ \varepsilon = -1$	(23)	S_5
$g = 0,\ \varepsilon = 0$	(25), (24)	S_6
$\mathfrak{h} \neq 0,\ \mathfrak{h}g + \varepsilon > 0$	(29), (31)	T_1
$\mathfrak{h} \neq 0,\ \mathfrak{h}g + \varepsilon < 0$	(29), (32)	T_2
$\mathfrak{h} \neq 0,\ \mathfrak{h}g + \varepsilon = 0$	(29), (33)	T_3
$\mathfrak{h} = 0,\ \varepsilon = +1$	(34)	T_4
$\mathfrak{h} = 0,\ \varepsilon = -1$	(34)	T_5
$\mathfrak{h} = 0,\ \varepsilon = 0$	(36), (38)	T_6

Die Bedeutung jeder Horizontalreihe dieser Tabelle ist die folgende. Beim Bestehen der in der ersten Vertikalreihe befindlichen Bedingungen ergeben sich die in der zweiten Vertikalreihe angezeigten Formeln, welche unter der Voraussetzung, dass die betreffende Funktionaldeterminante nicht identisch gleich Null ist, eine Transformation bestimmen, die mit dem in der dritten Vertikalreihe befindlichen Symbol bezeichnet wird.

Wir werden nun Paare der zu einander inversen Transformationen betrachten. Wenn eine dieser Transformationen eine der Differentialgleichungen (5) und (7) befriedigt, dann befriedigt die andere dieser Transformationen die andere dieser Differentialgleichungen. Daraus folgt, dass die Einteilung unserer Trans formationen, die in der soeben angeführten Tabelle angezeigt ist, auf eine Einteilung der Paare inverser Transformationen führt, die wir in der folgenden Tabelle zasammenstellen.

Bedingungen	Paare inv. Transf.
$gh + \varepsilon > 0,\ g \neq 0,\ h \neq 0$	S_1, T_1
$\varepsilon = +1,\ g \neq 0,\ h = 0$	S_1, T_4
$gh + \varepsilon < 0,\ g \neq 0,\ h \neq 0$	S_2, T_2
$\varepsilon = -1,\ g \neq 0,\ h = 0$	S_2, T_5
$gh + \varepsilon = 0,\ g \neq 0,\ h \neq 0$	S_3, T_3
$\varepsilon = 0,\ g \neq 0,\ h = 0$	S_3, T_6
$\varepsilon = +1,\ g = 0,\ h = 0$	S_4, T_4
$\varepsilon = +1,\ g = 0,\ h \neq 0$	S_4, T_1
$\varepsilon = -1,\ g = 0,\ h = 0$	S_5, T_5
$\varepsilon = -1,\ g = 0,\ h \neq 0$	S_5, T_2
$\varepsilon = 0,\ g = 0,\ h = 0$	S_6, T_6
$\varepsilon = 0,\ g = 0,\ h \neq 0$	S_6, T_3

In dieser Tabelle sind linker Hand einer jeden Horizontalreihe Bedingungen angegeben, bei deren Erfüllung solche

Paare inverser Transformationen existieren, welchen nach unserer Bezeichnungsweise Symbole zugehören, die rechter Hand in derselben Horizontalreihe gelegen sind. Die Angaben dieser Tabelle entstehen dadurch, dass die Angaben einer jeden der sechs ersten Horizontalreihen der früheren Tabelle mit den Angaben einer der sechs weiteren Horizontalreihen dieser früheren Tabelle vereinigt werden.

Es ist ersichtlich, dass die in der zweiten Tabelle angegebenen zwölf Fälle die einzigen sind, welche auf diese Weise nicht auf Widersprüche führen. Wir wollen dabei hier noch die Bemerkung machen, dass den Angaben jeder Horizontalreihe, welche eine unpaarige Stelle in unserer Tabelle besitzt, die Invarianteneigenschaft gegen Vertauschung der Buchstaben $g, h, k, l, m, n, x, y, u, v$ mit den entsprechen der Buchstaben $h, g, n, l, m, k, u, v, x, y$ zugehört. Diese Invarianteneigenschaft soll in bezug auf die Symbole inverser Transformationen in der Weise verstanden werden, dass bei genannter Vertauschung das Paar inverser Transformationen in ein Paar inverser Transformationen übergeht, welchem dasselbe Paar der Symbole zugehört. Was nun die Horizontalreihen anbetrifft, welche an paarigen Stellen unserer Tabelle gelegen sind, so verhalten sich die Angaben dieser Horizontalreihen bei der genannten Vertauschung in anderer Weise. Man betrachte drei Paare dieser Horizontalreihen, nämlich: die zweite und achte, die vierte und zehnte, die sechste und zwölfte. Jedes dieser Paare von Horizontalreihen besitzt die Eigenschaft, dass die Angaben zweier Horizontalreihen desselben Paares bei der genannten Vertauschung miteinander vertauscht werden.

Wir wollen noch einen Teil des Inhaltes der zweiten Tabelle in zwei weiteren Tabellen anders gruppieren.

S_1	$b \neq 0$	T_1
S_1	$b = 0$	T_4
S_2	$b \neq 0$	T_2
S_2	$b = 0$	T_5
S_3	$b \neq 0$	T_3
S_3	$b = 0$	T_6
S_4	$b \neq 0$	T_1
S_4	$b = 0$	T_4
S_5	$b \neq 0$	T_2
S_5	$b = 0$	T_5
S_6	$b \neq 0$	T_3
S_6	$b = 0$	T_6

T_1	$g \neq 0$	S_1
T_1	$g = 0$	S_4
T_2	$g \neq 0$	S_2
T_2	$g = 0$	S_5
T_3	$g \neq 0$	S_3
T_3	$g = 0$	S_6
T_4	$g \neq 0$	S_1
T_4	$g = 0$	S_4
T_5	$g \neq 0$	S_2
T_5	$g = 0$	S_5
T_6	$g \neq 0$	S_3
T_6	$g = 0$	S_6

Jede Horizontalreihe dieser beiden Tabellen soll in der Weise verstanden werden, dass bei Erfüllung der in der zweiten Vertikalreihe angegebenen Bedingung die in der ersten Vertikalreihe angeführte Transformation eine solche inverse Transformation besitzt, deren Symbol in der dritten Vertikalreihe angegeben ist.

Posiedzenie

w dniu 3 marca 1927 roku.

A. Łaszkiewicz.

Badania krystalograficzne jednochlorooctanu kobaltawego.

Przedstawił p. St. J. Thugutt.

Streszczenie.

Działaniem wodnego roztworu kwasu jednochlorooctowego na $CoCO_3$ otrzymujemy rombowe kryształy, których skład odpowiada wzorowi $Co(CH_2Cl \cdot COO)_2 \cdot 6H_2O$. Ich pokrój zmienia się w zależności od ilości wolnego kwasu w roztworze. Z roztworów kwaśnych wydzielają się kryształy pryzmatyczne, będące kombinacją postaci $\{010\}$, $\{110\}$, $\{131\}$, $\{111\}$ czasem w połączeniu z $\{011\}$ i $\{161\}$. Powtórna krystalizacja prowadzi do zaniku ścian dwuścianu, słupa oraz piramidy $\{131\}$ tak, że z czystych roztworów wydzielają się kombinacje $\{111\}$ z $\{110\}$. Ogółem zmierzono 24 kryształy na gonjometrze teodolitowym Goldschmidta i z uskutecznionych pomiarów obliczono stosunki osiowe:

$$a:b:c = 0{,}6285:0{,}4607.$$

Zdarzało się, że ściany słupa nie leżały w jednym pasie, lub też, że pasy kół małych obejmujących ściany $\{111\}$ i $\{131\}$ nie miały osi wspólnej; kryształ należało justować osobno według ścian $\{111\}$, osobno według $\{131\}$ i dwukrotnie wykonywać pomiary. Aby uniknąć majoryzowania pewnych ścian przy obliczaniu stosunków osiowych kosztem innych, trzeba było zrzec się korzyści gonjometrji dwukołowej i zestawić wyniki tak, jak przy pomiarach jednokołowych. Kryształy jednochlorooctanu kobaltawego wykazują symetrję klasy podwójnej piramidy rombowej, nacechowanej obecnością trzech płaszczyzn symetrji, trzech osi dwukrotnych i środka symetrji. Zakładając, że pomimo zauwa-

żonych odchyleń symetrja ustroju została jednak zachowana [1]), możemy na podstawie wykonanych pomiarów wyprowadzić stosunki osiowe, uwzględniając ilość pomiarów, dobroć refleksów oraz obciążenie położeniowe poszczególnych ścian.

Płaszczyzną osi optycznych jest (001). $a=\gamma$; $b=\alpha$; $c=\beta$. Ostry kąt osi optycznych występuje przy α na ścianie (010), kryształ jest zatem optycznie ujemny. Pomiar kąta osi optycznych wykonany był na konometrze Wülfinga. Silna barwa własna minerału pozwoliła na wykonanie pomiarów jedynie w świetle sodowem i litowem. Zmierzone w powietrzu kąty wynosiły:

$$2\,E_{Li} = 34^0\,27' \pm 2';$$
$$2\,E_{Na} = 33^0\,56' \pm 3';$$

Pleochroizm kryształów zaznaczył się wyraźnie:

α — malinowo-czerwony;
β — pomarańczowo-żółty;
γ — fioletowo-czerwony.

Dwa spółczynniki załamania światła zostały określone metodą pryzmatu wyciętego $|| c$. Umożliwiło to obliczenie kąta rzeczywistego osi optycznych oraz trzeciego spółczynnika.

---

[1]) W rzeczywistości symetrja nie jest zachowana, już choćby z tego względu, że różnice w położeniu osi pasów koła wielkiego i kół małych dochodzą kilku, a nawet kilkunastu minut. Pozatem zboczenia spowodowane brakiem równoległości ścian dochodzą 4′. Oczywiście nie można wszystkich błędów zwalić na karb niedokładności refleksów i na braki przyrządów, zwłaszcza, gdy wykraczają one po za granice średniego błędu pojedyńczych pomiarów.

Antoni Morawiecki.

Przyczynek do znajomości „kwarcytów” Łysogórskich.

Przedstawił p. St. J. Thugutt.

Streszczenie.

„Kwarcyt” kambryjski jest jednym z najbardziej rozprzestrzenionych utworów na terenie Łysogór. Jest to skała drobnoziarnista, tworząca duże, 1—2 m. grube ławice. Lepiszcze krzemionkowe nadaje jej dużą zwięzłość. Barwa kwarcytów jest szara. W licznych szczelinach, przecinających kwarcyty, napotykamy rozmaicie zabarwione kryształy kwarcu, buły i nacieki tlenków, względnie wodorotlenków, żelaza i manganu, gniazda i warstewki kaolinu, a także promieniste skupienia szmaragdowo-zielonego lub niebieskawego wawelitu.

Kwarcyt, badany w szlifach pod mikroskopem, wygląda jak drobnoziarnista, zwięzła skała, złożona prawie wyłącznie z kwarcu. W charakterze bardzo nielicznych domieszek występują: muskowit, biotyt, chloryt, turmalin, cyrkon, rutyl, magnetyt, hematyt, apatyt i am'ibol (?). Ujawniająca się przy znaczniejszych powiększeniach budowa skały wskazuje, iż mamy tu do czynienia z typowym piaskowcem o prawie całkowicie skrystalizowanem lepiszczu krzemionkowem.

Skład chemiczny tego piaskowca podaje poniżej przytoczona analiza ryczałtowa:

Cz. lot.	0,28%	wag.
SiO_2	98,38%	„
$Ti(Zr)O_2$	—	
P_2O_5	0,02%	„
MnO	0,02%	„
Fe_2O_3 } Al_2O_3 }	0,93%	„
CaO	0,13%	„
MgO	śl.	
Na_2O	śl.	
K_2O	—	
Razem	99,76%	wag.

Potwierdza więc ona wniosek, wysnuty na podstawie badań mikroskopowych, iż głównym składnikiem piaskowców jest krzemionka.

Proces powstawania piaskowców vel „kwarcytów" był mało skomplikowany. Prawdopodobnie luźny piasek kwarcowy został spojony koloidalną krzemionką, która z biegiem czasu uledz musiała krystalizacji. Krzemionka pochodzić mogła albo z koagulacji zawiesin w infiltrujących roztworach, albo z rozkładu w tych roztworach zawartych alkalicznych krzemianów.

Zakład Mineralogiczny Uniwersytetu Warszawskiego r. 1926.

K. Białaszewicz.

O zastosowaniu metody ultrafiltracyi w badaniach nad rozmieszczeniem elektrolitów w cytoplazmie.

Praca ukaże się w wydawnictwach Instytutu Marcelego Nenckiego.

Streszczenia nie nadesłano.

Posiedzenie

w dniu 5 maja 1927 roku.

N. Zandtowa.

Oliwki opuszkowe, jako środki czynności stania.

Przedstawił E. Flatau.

Praca ukaże się w Archiwum Pracowni Neurologicznej T. N. W.

Streszczenia nie nadesłano.

C. Czarnocki.

Badania nad ostrym żółtym zanikiem wątroby ze specjalnem uwzględnieniem pochodzenia t. zw. kanalików wrzekomych.

Przedstawił M. Konopacki.

Praca ukaże się w Archiwum Nauk biologicznych T. N. W. T. II.

Streszczenia nie nadesłano.

Eugenia Stołyhwowa.

W sprawie badań nad doborem płciowym u ludzi.

Przedstawił K. Stołyhwo.

Zagadnienia doboru, jako czynnika powodującego, względnie mogącego powodować zanikanie pewnych a utrzymywanie się innych form zwierzęcych, są bezwątpienia sprawą pierwszorzędnej wagi dla badań antropologicznych, dotyczących kwestji perzystencyi lub też cdwrotnie wymierania pewnych ras lub typów antropologicznych. Zagadnienia doboru wywołały dotychczas wśród antropologów zainteresowanie przedewszystkiem w zakresie przejawów dających się podciągnąć pod kategorję zagadnień doboru naturalnego, jak np. zjawiska niejednakowej długowieczności poszczególnych typów, mniejszej lub większej odporności na pewne choroby, mniejszej lub większej zdolności przystosowania się do takich lub innych warunków, bądź klimatycznych, bądź socjalnych, i t. d., i t. d., — zjawisk stanowiących częściowo pole badań t. zw. antropologii socjalnej. Zagadnienie doboru płciowego natomiast, — jakkolwiek związane ze sprawą doboru naturalnego lecz zwykle, śladem Darwina, oddzielnie ujmowane, wzbudzało dotychczas znacznie mniej zainteresowania. Ilość prac dotyczących tego zagadnienia, jest dotychczas b. nieliczna, tak iż śmiało powiedzieć można, iż stawiamy dopiero pierwsze kroki w zakresie badań w tym kierunku. Nic też dziwnego, że i metodyka tego działu nie jest należycie opracowana. Kwestya zaś metody jest sprawą pierwszorzędnej wagi, gdyż wiąże się ona ściśle — jak zresztą przy każdem opracowaniu materjału, — z należytem ujęciem zagadnienia, którego poznanie stawiamy jako cel naszej pracy. Wszak powodem błędnych rezultatów prac naukowych, bywa niekiedy nie błędność stosowanej w pracy metody jako takiej, lecz pomijanie przez zastosowanie danej metody momentów, których uwzględnienie przy rozwiązywaniu danego zagadnienia jest konieczne.

W pracy obecnej pragnę zastanowić się nad metodami, które stosowano dotychczas w pracach poruszających zagadnienia doboru płciowego, zatrzymując się specjalnie nad stosowaniem w tym celu współczynnika podobieństwa małżonków.

Jeżeli przez dobór wogóle rozumieć należy czynnik, względnie czynniki, które powodują odchylenie od stosunków jakie by miały miejsce o ile by czynniki te nie działały, czyli gdyby stosunki kształtowały się jedynie na zasadzie przypadku, — to dobór płciowy będzie tym czynnikiem, który poprzez cechy morfologiczne, fizjologiczne lub psychiczne wywołuje odchylenie od stosunków prawdopodobnych, które by miały miejsce w danej populacyi o ile łączenie się par zachodziłoby wedle praw przypadku zgodnie z rachunkiem prawdopodobieństwa. Stąd wniosek dotyczący badań nad zjawiskami doboru: istnienie czynników doboru uchwycić można przez porównanie istniejących realnie stosunków, z temi, które daje obliczenie opierające się na rachunku prawdopodobieństwa. O ile przy porównaniu tem okaże się, że obraz istotnego stanu rzeczy, jest identyczny z tym jaki wypadł z obliczenia opartego na rachunku prawdopodobieństwa, przypuszczać możemy, że w zjawisku kształtowania się rozpatrywanego obrazu nie brały udziału czynniki doborowe (jeżeli naturalnie wykluczymy możliwość działania dwu, względnie kilku, równych co do wielkości, lecz przeciwnych co do kierunku czynników). O ile natomiast obrazy te będą różne, należy przypuścić istnienie pewnych czynników, których kierunek działania poznać i znaczenie jego dla danej populacyi wyświetlić, będzie właśnie zadaniem badacza.

Tego rodzaju badania, opierające się na porównaniu 2 seryi, rzeczywiście istniejącej i teoretycznej, obliczonej, — były już stosowane przez Pearson'a i jego szkołę w badaniach nad doborem naturalnym, przejawiającym się w nierównomiernem eliminowaniu poszczególnych składników rasowych ludności. W zastosowaniu do zagadnień doboru płciowego sprawa o tyle się komplikuje, iż teoretycznie wyrażać się on może albo eliminowaniem pewnych typów, albo takiem czy innem dobieraniem się par, względnie jednem i drugiem. Jakkolwiek w świecie zwierzęcym dobór płciowy polega właśnie na eliminacji pewnych elementów, uwaga antropologów poszła przedewszystkiem w kierunku pytania czy wśród małżeństw zachodzą takie stosunki, jakich oczekiwać by należało, gdyby serja mężów i żon łączyła się na zasadzie praw przypadku, czy też grają w dobieraniu się ich pewne momenty, których istnienie uznać by należało jako wynik doboru. Z tego punktu widzenia właśnie starał się podejść do zagadnienia doboru płciowego F. Galton zestawiając różne kombinacje pigmentacyi włosów i oczu u małżonków. Nie doszedł on jednak do żadnych pozytywnych rezultatów, gubiąc się w ogromnej ilości kombinacyi spotykanej wśród małżeństw badanych. Holmes (1921) w poszukiwaniach swoich dążył do stwierdzenia czy piękność, — czyli moment estetyczny, posiada znaczenie czynnika doboru płciowego, a w tym celu rozsegregował według stopnia piękności uczenice jednej ze szkół, poczem obliczył ilość małżeństw zawartych przez panny należące do poszczególnych kategoryi piękności. Wyniki, które otrzymał Holmes, dowodziłyby, iż moment estetyczny w sprawie doboru płciowego gra rolę w kierunku eliminowania elementów „brzydkich". Wyniki te są o tyle niepewne, że określanie stopnia „piękności" zależy od czysto subjektywnych poglądów autora, — od jego przynależności rasowej w dużej mierze, a wobec tego metody tej nie można uznać za ścisłą, zaś wyniki otrzymane tłomaczone być mogą może cokolwiek inaczej niż to robi autor, o ile wysuniemy np. sprawę zależności wrażenia „brzydoty" od wrażenia obcości, odrębności (w tym wypadku rasowej).

Badania Davenport'a (1917) w zasadzie znowu odpowiedzieć miały na pytanie czy dobór płciowy przejawia się w specjalnem dobieraniu się par. Rozpatrywał on mianowicie pary małżeńskie z punktu widzenia wzrostu, — przyczem okazało się, iż wysocy dobierają się z wysokiemi, niscy z niskiemi,— a więc podobni z podobnemi, — gdyż liczba kombinacyi tego rodzaju była bardzo duża w przeciwieństwie do kombinacji wzrostu różnych kategoryi, a więc wysokich i niskich pomiędzy sobą. Zestawienie Davenporta sprowadza się właściwie do metody obliczania nadwyżek liczebności pomiędzy serją oczekiwaną, obliczoną na zasadzie rachunku prawdopodobieństwa, a realnie istniejącą. Wobec tego, że obliczanie współczynnika podobieństwa pomiędzy małżonkami na tej samej podstawie jest oparte, a więc i zarzuty, któreby można metodzie obliczania współczynnika podobieństwa zrobić, stosują się i do metody Davenport'a. Nie chcąc zarzutów tych 2 razy powtarzać przechodzę do szczegółowego rozpatrzenia metody obliczania współczynników podobieństwa małżonków, która wprowadzona do antropologii przez Pearson'a, w zastosowaniu do badań nad doborem płciowym użytą była po raz pierwszy przez Dr. Rosińskiego w pracy „Charakterystyka antropologiczna ludności pow. Pułtuskiego” (1923 r.) Autor ten oblicza współczynniki podobieństwa małżonków z punktu widzenia kilku cech, poczem zakładając, że są one wyrazem doboru płciowego, dochodzi do szeregu wniosków. Wniosków tych nie zamierzam rozpatrywać, — chodzi mi jedynie o zagadnienie czy założenie jest słuszne, czy wolno uważać współczynniki podobieństwa za wyraz doboru płciowego? Czy niema innych czynników, które wpływają na wartość współczynnika podobieństwa, co naturalnie uniemożliwiałoby opieranie jedynie na wielkości tego ostatniego wniosków dotyczących zagadnienia doboru płciowego.

W tym celu zastanówmy się przedewszystkiem w jaki sposób obliczamy współczynniki podobieństwa.

Rozkładamy dany materjał t. j. serję żon i serję mężów, — każdą z osobna, — na 2 kategorje pod względem cechy, z punktu widzenia której chcemy obliczyć współczynnik podobieństwa małżonków, — np. ze względu na pigmentację oczu — na grupy o oczach jasnych i ciemnych. — Następnie zapisujemy na każdym z 4 kwadrantów tablicy, ustawionej jak poniżej tabl. I, ilość istniejących realnie małżeństw o odpowiedniej kombinacji

		ŻONY		
		jasne	ciemne	razem
MĘŻOWIE	jasne	$\frac{a_1 b_1}{N} + \delta$	$\frac{a_1 b_2}{N} - \delta$	a_1
	ciemne	$\frac{a_2 b_1}{N} - \delta$	$\frac{a_2 b_2}{N} + \delta$	a_2
	razem	b_1	b_2	N

pod względem oczu, poczem na podstawie wzoru Pearson'a i przy pomocy tablic Everitt'a obliczamy współczynnik podobieństwa małżonków z punktu widzenia pigmentacyi oczu. Współczynnik ten wahający się zasadniczo w granicach od $-1 \leqslant r \leqslant +1$ tem mniej odchylać się będzie od 0 im bardziej stosunki badane zbliżone będą do tych, jakie otrzymujemy w obliczeniu opierającem się na rachunku prawdopodobieństwa, dla rezultatów zaś otrzymanych na podstawie tego rachunku będzie on równy 0.

W założeniu więc swem wielkość współczynnika podobieństwa, zależy od różnicy istniejącej pomiędzy dwiema serjami, — serją realnie istniejącą a teoretycznie obliczoną, — zdawałoby się przeto, iż odpowiada to wymogom badania statystycznego zjawisk doboru wogóle, a więc i zjawisk doboru płciowego, o które nam chodzi obecnie.

Twierdzenie to byłoby słuszne przedewszystkiem, gdyby zjawiska doboru płciowego wyrażać by się mogły jedynie przez takie czy inne połączenie, taką czy inną kombinację małżonków ze względu na daną cechę, i gdybyśmy mogli wykluczyć działanie doboru płciowego po przez eliminację pewnych elementów. — Wszak jeśli dobór płciowy działa poprzez eliminację, działanie to absolutnie nie wpłynie na wielkość współczynnika podobieństwa małżonków, współczynnika obliczanego dla wyselekcjonowanego, dzięki wyeliminowaniu pewnych elementów, materjału. Przecież na materjale wyselekcjonowanym, bez porównania go z materjałem z którego nie nastąpiło jeszcze wyeliminowanie pewnych elementów, ani kierunku selekcyi ani wogóle jej istnienia uchwycić nie jesteśmy w stanie. — To też w wypadku, gdy dobór płciowy działa j e d y n i e przez eliminację, moglibyśmy dojść do wręcz błędnego wniosku, że nie istnieje on wcale, opierając się na tem, że wielkość współczynnika podobieństwa małżonków jest 0. — Wyjaśnić to można na następującym przykładzie:

Niechaj na pewnem terytorjum, zamieszkałem przez badaną ludność, zachodzą następujące stosunki z punktu widzenia kształtu nosa:

	kobiety (%%)	mężczyźni (%%)
nosów wklęsłych	60	50
„ prostych	30	40
„ wypukłych	10	10
	100	100

Teoretycznie na podstawie rachunku prawdopodobieństwa, o ile nie działałyby żadne czynniki doborowe, oczekiwaćby należało następujących kombinacyi kształtów nosa wśród łączących się par. — (% %) (Tab. II).

Tabl. II.

		KOBIETY			
	w % %	wklęsłe	proste	wypukłe	Razem
MĘŻCZYŹNI	wklęsłe	30	15	5	50
	proste	24	12	4	40
	wypukłe	6	3	1	10
	Razem	60	30	10	100

Gdyby jednak faktycznie działał tu dobór płciowy poprzez eliminowanie osobników o pewnym kształcie nosa, np. nosa wypukłego, — dewizą łączących się par byłoby „łączyć się z każdym lub każdą, byle nie miał (nie miała) nosa wypukłego", wówczas stosunki liczbowe kombinacyj kształtów nosa wśród faktycznie połączonych par małżeńskich, obliczone również na postawie rachunku prawdopodobieństwa — byłyby zgoła inne, niż te, jakie widzimy na Tab. II. — Byłyby inne, gdyż serja kobiet i serja mężczyzn w związkach różniły by się od odpowiednich seryi całej ludności, na skutek wyeliminowania z nich elementów o nosach wypukłych, procentowością występowania poszczególnych kategoryi kształtów nosa. Przedstawiałyby się wówczas w sposób następujący: (Tabl. III)

Tabl. III.

		ŻONY		
	w % %	wklęsłe	proste	Razem
MĘŻOWIE	wklęsłe	37,04	18,52	55,56
	proste	29,63	14,81	44,44
	Razem	66,67	33,33	100

Współczynnik podobieństwa małżonków obliczony na podstawie tej tablicy wynosi naturalnie 0. Opierając się na nim musielibyśmy orzec, iż dobór płciowy wcale tu nie działał, gdy tymczasem wiemy, że dobór płciowy wyeliminował całkowicie elementy o nosach wypukłych, czyli, że działał b. silnie i w b. ściśle określonym kierunku.

Czemuż wniosek nasz jest fałszywy? Czyżby zasada poszukiwania czynników doborowych przez porównanie szeregów realnie istniejącego z teoretycznie obliczonym nie byłaby słuszna? Bynajmniej, tylko że *szereg teoretyczny obliczony być powinien na podstawie całego materjału, w obrębie którego działanie czynników doborowych suponujemy, a nie dla wyselekcjonowanego już materjału, jaki przedstawiają osobniki, które już do związków małżeńskich weszły.* Aby wykazać istnienie czynnika doboru płciowego działającego wśród danej populacyi po przez eliminację należałoby:

1) albo porównać szeregi realnie istniejących kombinacyi cechy badanej w związkach małżeńskich z teoretycznie obliczonemi na podstawie stosunków mających miejsce w serjach męskiej i kobiecej dotyczących całej ludności, t. j. porównać rezultaty tablicy II i III;

2) albo też — i to byłoby nawet prostsze — porównać serje kobiet i mężczyzn, którzy weszli w związki małżeńskie z odpowiedniemi serjami dla całej ludności. W obu wypadkach stwierdzenie istniejących różnic sygnalizowałoby nam istnienie

czynników eliminacyjnych — stwierdzenie braku różnic dowodziłoby braku czynników wspomnianych, które, jak to widzieliśmy, nie posiadają żadnego wpływu na wartość współczynnika podobieństwa małżonków.

Na wartość tego współczynnika *wpływa dobór płciowy jedynie jeżeli działa poprzez takie, czy inne łączenie się par*, wpływają jednak poza nim i inne czynniki, których wpływ trudno jest niejednokrotnie wykluczyć, a który może całkowicie zmienić rezultat uwarunkowany istnieniem doboru płciowego.

Niechaj w powyżej podanym przykładzie dobór płciowy działa nietylko w kierunku wyeliminowania nosów wypukłych, lecz i w kierunku łączenia się osobników o nosach podobnych, dając w rezultacie następujące stosunki procentowe występowania poszczególnych kombinacyi kategorji nosów. Tabl. IV.

Tabl. IV.

		ŻONY		
MĘŻOWIE	w %%	wklęsłe	proste	Razem
	wklęsłe	42,22	13,33	55,56
	proste	24,44	20	44,44
	Razem	66,66	33,33	100

Współczynnik podobieństwa małżonków z punktu widzenia kształtu nosa wynosiłby: $r = + 0{,}3486$ i byłby wynikiem a więc i dowodem istnienia doboru płciowego działającego w kierunku łączenia się osobników podobnych z podobnymi.

Przypuśćmy jednak jeszcze większe skomplikowanie sytuacji, i wyobraźmy sobie, — co na zasadzie dotychczasowych badań w tym kierunku jest najzupełniej prawdopodobne, — że pewne typy antropologiczne posiadają specyficzne cechy psychiczne. Niech dajmy na to, w związku z powyższem, — nosy proste korelują z większą ruchliwością, lub też większą przedsiębiorczością. Oczywiście, iż małżeństwa złożone z dwu osobników należących do tego typu, na terenie gdzie odbywa się emigracja, częściej będą emigrowały niż inne nie posiadające tych cech. — Stąd antropolog zestawiający tablicę korelacyjną a nie znający przesunięć, które uwarunkowane są emigracją części ludności z terytorjum badanego, opierając się na obliczonym na podstawie tej tablicy współczynniku podobieństwa małżonków, — dojść musi do zupełnie fałszywych wniosków dotyczących doboru płciowego.

I tak przekonajmy się czy i w jaki sposób zmieni się współczynnik podobieństwa małżonków jeśli w przypadku przedstawionym na Tabl. IV dołączy się wpływ emigracyi różniczkowej wspomnianej powyżej, i jeśli np. z 20% małżeństw o nosach prostych wyemigruje połowa, t. j. 10%. Tablica korelacyjna kształtów nosa u małżonków wobec zmiany stosunków %% występowania poszczególnych kategoryi kształtu nosa w seryi żon i seryi mężów wyglądać będzie w sposób następujący. Tabl. V.

Tablica V[1])

		ŻONY		
	w %%	wklęsłe	proste	Razem
MĘŻOWIE	wklęsłe	46,9 (45,72)	14,8 (15,95)	61,7
	proste	27,2 (28,38)	11,1 (9,92)	38,3
	Razem	74,1	25,9	100

Wskaźnik podobieństwa wynosiłby w tym wypadku $r = -0{,}054$, czyli byłby tak mały, iż właściwie opierając się na nim uznać by należało brak czynnika doboru płciowego w kształtowaniu istniejącego stanu rzeczy. Gdybyśmy jednak uznali go za

[1]) W nawiasach liczby obliczone na podstawie rachunku prawdopodobieństwa.

dostatecznie duży aby go brać pod uwagę, musielibyśmy przypuścić istnienie doboru płciowego, działającego — wobec tego, że współczynnik jest ujemny, — w kierunku łączenia się osobników różnych pod względem kształtu nosa.

Wniosek ten, jak wiemy byłby wręcz fałszywy, gdyż na utworzenie się przytoczonego na tabl. V obrazu procentowych stosunków poszczególnych kombinacyj kształtu nosa u par małżeńskich wpłynęły trzy następujące momenty:

1. Całkowita eliminacya osobników o nosach wypukłych.
2. Silnie wyrażona tendencja łączenia się pomiędzy sobą osobników podobnych.
3. Wyemigrowanie połowy par o kombinacji nosów prostych z prostemi, z któremi korelują pewne właściwości psychiczne, (większa przedsiębiorczość).

Przykład powyższy wskazuje nam na zależność wielkości współczynnika podobieństwa od innych poza doborem płciowym czynników, co uniemożliwia nam opieranie się na nim przy wyciąganiu wniosków dotyczących doboru płciowego przed usunięciem wpływu tych czynników.

Jeżeli chodzi o wpływ emigracyi, można by go usunąć badając dobierające się pary możliwie wcześnie po ich dobraniu, co bezwątpienia ogromnie by pracę antropologa utrudniało, zmuszając go do stałego niemal przemieszkiwania na terytorjum badanem w czasie zbierania materjału, — pracy by tej jednak nie uniemożliwiało.

Badanie zjawisk doboru na parach, które się właśnie lub też stosunkowo niedawno dobrały, jest koniecznem jeszcze z jednego powodu. — Mam mianowicie na myśli wpływ wieku na niektóre z cech morfologicznych, które działając na obu osobników badanej pary w tym samym kierunku, wpłynąć może na wtórne upodobnienie się ich.

Przypuszczenie istnienia tego rodzaju wpływu nasunęły mi rezultaty obliczania współczynników podobieństw małżonków przez dr. Rosińskiego podane na str. 55 jego pracy nad ludnością powiatu Pułtuskiego. Uderzyło mnie mianowicie to, iż największym i właściwie jedynym co do wielkości współczynnikiem, z którym poważnie liczyćby się należało, był współczynnik podobieństwa małżonków pod względem kształtu warg. Jest to tem dziwniejsze, iż przy określaniu „kształtu“ warg, bierzemy pod uwagę nie zarys warg, — który może ze względów estetycznych mógłby mieć dla doboru płciowego jakieś znaczenie, lecz jedynie kategorje grubości warg. Nasunęło mi się więc przypuszczenie, iż być może wargi z wiekiem zmieniają się w pewnym kierunku, np. cienieją, — a wobec tego, iż bierzemy pod uwagę wszelkie małżeństwa, nawet i stare, — ilość małźeństw podobnych pod względem tej cechy będzie większa, niż byłoby to w tym przypadku, gdyby cecha ta nie była zależna od wieku osobnika badanego. Aby się o tem przekonać opracowałam z punktu widzenia zależności grubości warg od wieku materjał antropologiczny zebrany przez Zakład Antropologji Inst. Nauk Antrop. T. N. W. na Pomorzu a składający się z około 200 osobników. Rozpatrywałam go przytem dwukrotnie: raz opierając się na określeniach słownych: „cienkie”, „mierne”, „grube”, drugi raz zaś opierając się na danych cyfrowych, podających grubość warg w mm. Rezultaty otrzymałam następujące.

Wiek osobników (♂ i ♀)	Wargi cienkie	Wargi mierne	Wargi grube	Razem w %%
I. do 20 lat	19,05	61.7	19,25	100
II. od 20 do 40 lat	11,1	71,85	17,05	100
III. powyżej 40 lat	40,3	46,95	12,75	100

Z zestawienia tego, szczególnie po odrzuceniu serji I w skład której wchodzą dzieci i która prawie wcale nie wchodzi w skład seryi małżonków, widzimy b. wyraźne wycienianie się warg z wiekiem, ilość bowiem warg cienkich znacznie wzrasta kosztem warg miernych i grubych u osobników powyżej 40 lat, w porównaniu do osobników w wieku od lat 20 do 40.

Zjawisko „wycieniania” warg występuje jeszcze wyraźniej, gdy zestawimy przeciętną grubość warg w mm. w poszczególnych kategorjach wieku.

Wiek	Grubość warg w mm. ♂	♀
do lat 20	15,01	13,96
od 20 do 40 lat	14,87	13,19
od 40 do 60 lat	12,30	10,75
powyżej 60 lat	11,40	9,25

Nie wchodzę w istotę tego zjawiska, ani przyczyny, które go warunkują. Wynikiem jego istnienia jest upodobnianie się z wiekiem par, które w chwili dobierania mogły się bardziej różnić, a wobec tego współczynnik podobieństwa obliczany przez antropologa dla wszystkich badanych w pewnej chwili małżeństw wszelkiego wieku, jest większy niż ten jakibyśmy otrzymali, gdybyśmy zmierzyli te same pary w chwili gdy się dobierały.

Za koniecznością oparcia badań nad doborem płciowym na parach, które możliwie niedawno się pobrały, przemawia jeszcze jeden ważny moment, a mianowicie niejednakowa długowieczność typów antropologicznych. Powoduje ona fakt, iż małżeństwa, które dobrały się jako „różne" — po pewnym czasie, przekraczającym maximum życia typu krótkowiecznego, — uchodzi z pod obserwacyi badacza, — jak również i małżeństwa „podobne" zawarte przez osobniki należące do typu krótkowiecznego. Wyżywają i stanowią przedmiot badania te małżeństwa stare, które powstały na skutek dobrania się do typu długowiecznego. W ujęciu statystycznem wyrażać się to będzie coraz to większem podobieństwem małżonków w coraz wyższych kategorjach wieku, — fakt, który wpływa na podniesienie się współczynnika podobieństwa małżonków przy rozpatrywaniu ich jednoczesnem bez względu na wiek.

Na zakończenie chciałabym omówić sprawę, którą właściwie należałoby może rozpatrzeć na początku, — jako że dotyczy ona materjału, na którym przeprowadzać mamy badania nad doborem płciowym. Zazwyczaj przy badaniach tych jako materjał służą pary małżeńskie. Czy słusznie? — Sądzę, że nie. Przy dobieraniu się małżeństw, poza ewentualnym czynnikiem doboru płciowego, grają bezwątpienia ogromną i bodaj przeważającą rolę czynniki socjalne, a więc ekonomiczne i społeczne w ściślejszem tego słowa znaczeniu. Wyeliminowanie tych czynników jest częstokroć niemożliwe, nietylko ze względu na trudność uchwycenia ich, ale — i to przedewszystkiem — ze względu na niemożność sprecyzowania ich wpływu ilościowo. Jeżeli np. współczynnik podobieństwa małżonków pod względem wzrostu wynosi, jak to obliczył Ks. Rosiński dla małżonków z Pułtuskiego, +0,13, to nie wiemy w jakim stopniu zależy on od warunków ekonomicznych, a w jakim od doboru płciowego.

Przypuszczenie, iż momenty socjalne nie grają roli „wśród ludzi jednolitego środowiska pod względem ekonomiczno-społecznym wybitnych różnic nie posiadającego", za jaki uważa np. Ks. Rosiński ludność wiejską — jest najzupełniej mylne. Ogromny wpływ tych momentów stwierdza fakt, iż prawie niespotykanemi są małżeństwa pomiędzy małorolnemi a gospodarzami, tak samo jak na kresach pomiędzy najbiedniejszą choćby szlachtą a chłopami.

Pozatem żenią się zazwyczaj młodzi pochodzący z jednej wsi, a najwyżej jednej parafji, co wpływa na wytworzenie się podobieństwa mieszkańców poszczególnych wsi pomiędzy sobą. Antropolog posiadający materjał z kilku wsi sąsiednich znajdzie niewątpliwie dodatni współczynnik podobieństwa małżonków spowodowany istnieniem wyżej wspomnianych momentów, a nie właściwym doborem płciowym. Wszelkie wnioski oparte na materjale złożonym z par małżeńskich dotyczą właściwie nie zagadnienia doboru płciowego a dobierania się małżeństw, — co nie jest równoznacznem, gdyż w tem ostatniem mamy do czynienia z łącznym wpływem momentu: biologicznego — doboru płciowego — oraz momentów natury socjalnej. Jakkolwiek przesadnem, sądzę jest twierdzenie Castle'a (1926), iż „w sprawach dotyczących zagadnień rasowych człowieka metody biologiczne są również nieodpowiednie, jak metody socjalne dla zagadnień krzyżowania się królików" — nieuwzględnianie jednak czynników socjalnych przy badaniach tego rodzaju jak badania nad dobieraniem się małżeństw — jest niedopuszczalne.

Reasumując wysunęłabym w sprawie badań nad doborem płciowym następujące zastrzeżenia.

I. Wobec nierozstrzygnięcia sprawy, w jaki sposób przejawiać się może działanie doboru płciowego, metody stosowane w badaniach tego zagadnienia powinny uwzględniać możliwość działania doboru płciowego zarówno przez eliminacyę, jak przez takie czy inne łączenie się par. Z tego względu opieranie się np. jedynie na współczynniku podobieństwa małżonków jest absolutnie niedostateczne.

II. Wobec tego, iż wpływ wieku na pewne cechy antropologiczne powodować może wtórne upodabnianie się par połączonych już oddawna, materjał do badań nad doborem płciowym składać się powinien z par skojarzonych możliwie niedawno.

III. Te same wymogi co do materjału stawiać należy, wobec możliwości zmian w składzie antropologicznym ludności badanego terytoryum, wskutek istnienia ewentualnie emigracyi z danego terytoryum, jako też niejednakowej długowieczności poszczególnych typów antropologicznych.

Ze względu na przemożny wpływ momentów natury socjalnej na dobieranie się małżeństw, małżeństwa są bodaj najmniej odpowiednim materjałem do badań nad doborem płciowym u ludzi. Dotyczy to specjalnie małżeństw ze środowiska wiejskiego, gdzie czynniki ekonomiczne i tradycja, w porównaniu np. do środowiska proietarjatu miejskiego, gra przodującą rolę.

Na zakończenie składam niniejszem podziękowanie kasie im. J. Mianowskiego za udzielenie mi subwencyi na wykonanie tej pracy.

(Z Zakładu Antropologji Instytutu Nauk Antropologicznych Tow. Nauk. Warsz.)

Eugenja Stołyhwowa.

Sur les methodes de recherches concernant le problème de la sélection sexuelle chez l'homme.

Résumé

Après avoir pris en consideration les methodes employées jusqu'à présent dans les recherches sur le problème de la selection sexuelle chez l'homme, et specialement la methode des coefficients de la similitude des epoux, — l'auteur est arrivé aux conclusions suivantes:

I. Dans les recherches sur le problème de la selection sexuelle on ne peut employer uniquement la methode des coefficients de la similitude des epoux, car elle méconnait le fait, que la selection sexuelle peut s'exercer de par l'elimination des certains types antropologiques, ce qui n'a pas d'influence sur la valeur du coefficient de la similitude des epoux.

II. Vue que certains caractères antropologiques changent à travers l'âge de même chez les deux sexe, ce qui cause une ressemblance secondaire de vieux epoux, qui n'existait pas au moment de leur mariage, — il est indispensable de prendre comme sujet d'études sur la question de la selection sexuelle un matériel composé uniquement de jeunes epoux.

III. Les mêmes exigence doivent être observer pour le materiel vue les possibilités des changements dans la composition anthropologique de la population examinée, que peuvent être advenues par l'emigration ainsi que par diverse longueur de la vie des differents types antropologique.

IV. En vue de l'influence enorme des facteurs sociaux sur la formation des mariage legaux, ceux là sont à l'avis de l'auteur un matériel le moins approprié aux recherches sur la question de la selection sexuelle. Cela concerne specialement les mariages parmi les paysans, — où la traditions et les facteurs economiques joue un rôle beaucoup plus important, que par ex. dans le milieu proletaire de grandes villes.

(De l'Institut des Sciences Anthropologiques de la Soc. de Sciences et de Lettres de Varsovie).

LITERATURA.

Baur E., Fischer E., Lenz F. Grundriss der menschlichen Erblichkeitslehre und Rassenhygiene.

Castle W. E. Biological and social consequences of racecrossing. Amer, Jour. of Phys. Anthr. Vol. IX Nr 2.

Czekanowski J. Zarys metod statystycznych. Warszawa 1913.

Darwin K. Dobór płciowy.

Davenport C. B. Inheritance of Stature. Cold Spies. Harbor, 1917.

Ploetz A. Sozialanthropologie. Die Kultur der Gegenwart. V Abt. Leipzig und Berlin. 1923

Rosiński B. Charakterystyka antropologiczna ludności powiatu pułtuskiego. Kosmos T. 48. 1923.

Scheidt W. Allgemeine Rassenkunde. München. 1925.

Zakłady Graficzno-Introligatorskie, **J. Dziewulski**, Złota 29