COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE.
Classe III.
XIX Année 1926. Fascicule 1—5.

SPRAWOZDANIA
z posiedzeń
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Wydział III
nauk matematycznych i przyrodniczych.

Rok XIX 1926 Zeszyt 1—5

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO
1926

TREŚĆ ZESZYTU 1—5.

(Table des matières).

SPRAWOZDANIE Z POSIEDZEŃ
TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Wydział III

Posiedzenie

z dnia 28 stycznia 1926 r.

1. Stanisław Małkowski — O skaolinizowanym muskowicie ze złóż kaolinowych okolic Korca na Wołyniu. (przedstawił S. Thugutt).

2. Stanisław Małkowski — O zbiorowiskach wód artezyjskich jako środowisku tworzenia się kaolinu. (przedstawił S. Thugutt).

3. Czesław Jaxa-Bykowski — Przyczynek do charakterystyki flisu nagórskiego okolic Krościenka nad Dunajcem. (przedstawił S. Thugutt).

4. Eugenja Zaniewska — Przyczynek do znajomości żył aplitowo-pegmatytowych w porfirytach Klesowskich. (przedstawił S. Thugutt).

5. Eugenja Zaniewska — Wyniki pomiarów goniometrycznych kryształów eteru benz-hydrynowego. (przedstawił S. Thugutt).

6. Antoni Morawiecki — Fosforyty okolic Kazimierza nad Wisłą. (przedstawił S. Thugutt).

7. Tadeusz Woyno — O znaczeniu graficznem kątów osiooptycznych metodą uniwersalną Fedorowa. (przedstawił S. Thugutt).

8. Marja Kołaczkowska — Uwagi o wyznaczaniu współczynnika załamania światła metodą pryzmatu. (przedstawił S. Thugutt).

Prace 1—8 zostały wydrukowane *in extenso*

w Archiwum Pracowni Mineralogicznej T. N. W.
Tom. I 1926 r.

---

9. Eugenja Stołyhwowa.

Charakterystyka antropologiczna kości gnykowej.

Przedstawił K. Stołyhwo.

Streszczenie.

W pracy tej autorka przedstawiła wyniki badań dokonanych na 1256 kościach gnykowych, które doprowadziły ją do szeregu wniosków w zakresie zależności kształtu tej kości od takich czynników jak płeć i wiek. Okazuje się mianowicie, że ustalanie się cech badanych trwa mniej więcej do 30 roku życia, przyczem wyjątek stanowi sprawa zrastania się różków dużych z trzonem, którego brak nawet niekiedy u osobników b. starych, powyżej 80 lat. Wpływ płci wyraża się w proporcjach i kształcie poszczególnych części kości gnykowej, przyczem w serji kobiet spotykamy jeden typ budowy tej kości, w serji mężczyzn natomiast część jedna materjału wykazuje budowę o cechach specyficznie męskich, część zaś druga stosunki podobne do tych, jakie spotykamy u kobiet; na resztę składają się formy przejściowe.

Jakkolwiek autorka starała się wyszukać wpływ rasy przez porównanie serji kości żydowskich z serją kości polskich, nie zdołała go jednak z pewnością stwierdzić wobec niewielkiej liczebności grupy żydowskiej.

Wobec oddawna znanego, a tu raz jeszcze potwierdzonego wpływu płci na kształtowanie się poszczególnych elementów organizmu, autorka zwraca uwagę na konieczność liczenia się z wpływem dymorfizmu płciowego, z czego niestety tak często nie zdają sobie sprawy antropolodzy współcześni.

Praca ta, wykonana w Zakładzie Antropologji Instytutu Nauk Antropologicznych T. N. W., ogłoszoną zostanie w całości w Archiwum Nauk Antropologicznych T. N. W.

---

10. Juan José Barcia Goyanes. Santiago de Compostela. (Hiszpanja).

Objaśnienie systematyki odmian wstecznych mięśnia pośladkowego większego.

(M. glutaeus maximus.)

Przedstawił K. Stołyhwo.

Streszczenie

Autor, na zasadzie swych dawnych prac, dotyczących morfologji m. pośladkowego większego i zaobserwowanych odchyleń w budowie tego mięśnia, usiłuje usystematyzować jego odmiany progenetyczne i eugenetyczne (Loth—15) oraz objaśnić je porównawczo.

M. iliotibialis posticus, m. iliofemoralis lateralis, m. caudo-iliofemoralis oddzielone jeszcze u ptaków, zlewają się stopniowo u zwierząt wyższych w jeden mięsień pośladkowy większy. Odmiany u człowieka, polegające na mniejszym lub silniejszym rozszczepieniu mięśnia, dają się wytłomaczyć jako *m. ilio femoralis* (Gadow) i *m. caudo-ilio femoralis.*

Juan José Barcia Goyanes Santiago de Compostela (España).

L'Interprétation systématique des Variations régressives, étudiées dans le Muscle Grand Fessier.

Presenté par K. Stołyhwo.

L'étude des variations régressives est devenue de plus en plus protéiforme comme conséquence inéluctable de l'importance qu'elle a acquise. Comme chez les êtres vivants, dans les sciences, le polymorphisme suit partout l'éclosion des activités brusquement arrachées au repos.

C'est ce que l'on voit dans l'étude de ces variations. purement descriptive d'abord, et qui est devenue chaque jour plus transcendente. Qu'il y ait des variations régressives ou ataviques, ne prenant ce mot que pour indiquer que telle ou telle variation est normale chez d'autres espèces, est devenu à l'heure présente un axiome et, bien que personne ne suive les vues de Testut (1) qui ne voyait partout que des variations régressives, tous les auteurs admettent leur existence. Je ne citerai que quelques-uns des plus connus comme Macalister (2). Wood (3), (Turner (4), Cuningham (5), Huntington (6), Gegenbaur (7), Fürbringer (8), Eisler (9), Frohse (10), Fränkel (11), Le Double (12, 13 et 14), Loth (15), Y. Vilhena (16). Mais les divergences commencent quand on arrive à faire des déductions de faits.

Nous voyons, d'une part, les travaux qui ont été faits de bonne heure pour faire des variations une preuve éclatante à l'appui des hypothèses évolutionistes; d'autre part, les études si claires et si précises des savants génétiques, lesquels avec T. H. Morgan (17), Cuenot (18), Middleton (19), et bien d'autres réussirent à faire faire des pas de géant aux doctrines de Mendel. A côté des applications des variations à l'étude sur les fous et les criminels, nous trouvons un autre chemin signalé par Ed. Loth, cherchant à fixer les variations eugéniques et progéniques (15).

Il ne faut pas oublier cependant un autre aspect de l'étude des variations qui donne un rôle très important à l'anatomie comparée. C'est, je crois, celui d'application comparative la plus inmédiate et la plus générale. Cet aspect a été le premier qu'on ait étudié dans les variations; mais on l'a dédaigné plus tard, ayant le désir d'en trouver une plus grande transcendence.

Quand on observe une variation musculaire, on cherche une espèce d'animaux chez lesquels elle soit normale, et le cas echéant chez l'homme, on le homme „variation régressive". Mais peut-on s'arréter ici ou peut-on songer à faire de cette espèce un rameau plus ou moins éloigné du phyllum humain? Faire le premier c'est très peu; faire le dernier c'est aller trop loin. C'est en suivant un de ces chemins que la science des variations n'a pas réussi à jouer le rôle que l'on en attendait.

Tous les morphologistes ont cherché à trouver des types synthétiques, parmi lesquels, tous ceux que l'on trouve dans la réalité paraissent être dérivés par le développement de quelques parties au dépens de l'atrophie des autres. Ce désir répond à l'idée professée par presque tous les naturalistes, mono ou polyphylletistes, que tous les animaux de la nature sont constitués d'accord avec un plan commun. C'était déjà le fondement, de l'interprétation des variations que donnait Macalister. L'investigation des formes originaires a occupé les paléontologistes pendant beacoup d'années, et les cas, certes en petit nombre, qu'on a réussi à trouver, ont réalisé les caractères prophétisés par une conception synthétique a priori.

La formation de ces types synthétiques est très favorisée par l'étude attentive et intelligente des variations, lesquelles présentent d'une manière brusque et tranchée ce que la nature nous offre modifié lentement et compliqué par les multiples mécanismes de la corrélation. Quelquefois nous montrant, dédoublé dans ses éléments intégrals, un muscle qui est chez nous le produit de la condensation de parties bien distinctes et ne l'est pas pour d'autres espèces, nous faisant bien surprendre, pour ainsi dire, le passage d'une insertion primitive à une autre secondaire, nous montrant bien ce qui est important, général, et ce qui n'est qu'une modification accidentelle, ou bien le produit des changements spécifiques; étant, en un mot, le guide le plus sûr parmi l'inextricable labyrinthe des formes de la nature vivante.

Cet aspect de l'étude des variations est tout à fait indépendant de quelque hypothèse sur la parenté du phyllum humain avec un autre phyllum. Ce qu'il perd en importance philosophique, il le retrouve avec plus de sureté, et je crois avoir montré, en autre lieu ce qu'il y a de fantastique dans l'interprétation génétique des variations (20).

Ces convictions m'ont amené à faire un schéma morphologique du muscle grand fessier en cherchant à interpréter une variation, que j'ai trouvée tout récemment, et par lequel on peut expliquer toutes les variations qu'on a trouvées jusqu'à présent dans ce muscle, du moins celles que je connais. Qu'une variation aie ou non sa représentation normale chez les animaux elle devient ainsi un caractère secondaire, et ça servira seulement pour en faire une variation, eugénique ou non. (21).

Le muscle grand fessier que signifie-t-il morphologiquement? Voyons ce que nous répondent les variations.

Celles ci ne sont pas seulement des changements dans leurs insertions ou dans leurs connexions avec les muscles voisins. Au contraire, les plus fréquentes variations se réfèrent au dédoublement du muscle, nous montrant ainsi qu'il n'est pas simple, mais le résultat de la fusion de plusieurs formations. Avant de faire une rapide énumération de ces variations, j'essayerai d'établir quels sont les éléments intégrals du muscle.

Pour moi, le muscle grand fessier humain est le produit de l'union de trois muscles clairement distincts chez les oiseaux et chez beaucoup de mammifères. Ce sont d'abord le ilio-tibialis posticus, le ilio-femoralis lateralis et le caudo-ilio-femoralis. (Voy. fig. I).

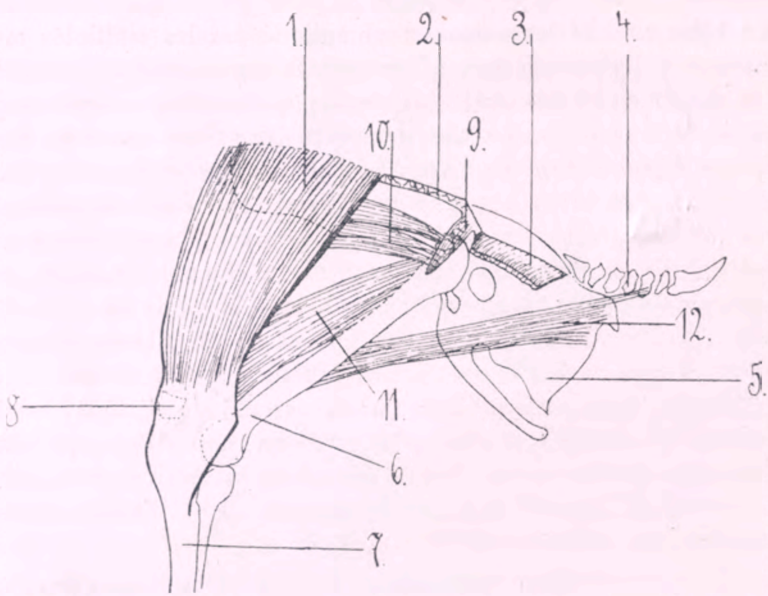

SCHÉMA I = 1 — Muscle ilio-tibialis anticus = 2 — M. il. tib. med. = 3 — M. il. tib. posticus = 4 — Coccys = 5 — Os iliaque = 6 — Fémur = 7 — Tibia = 8 — Rotule = 9 — M. ilio-femoralis lateralis = 10 — M. ilio-trochantericus = 11 — M. ambiens = 12 — M. ilio-caudo-femoralis = Selon Vialleton.

La comparaison de ces muscles avec ceux des mammifères demande quelque explication.

Les muscles superficiels de la racine du membre postérieur des mammifères sont disposès en une nappe entiérement semblable à celle des oiseaux. (Voy. fig. 2). Nous voyons d'avant en arrière le muscle tenseur du fascia lata, le glutaeus superficialis et le parameral ou agitator caudae. Les deux premiers sont-ils entièrement semblables aux ilio-tibiales? La seule différence qu'on y peut trouver, c'est l'insertion partielle du glutaeus superficialis dans le fémur. Ce fait a servi à Vialleton (22) pour contester l'ancienne opinion de de Vicq d'Azyr (23) qui avait établi l'homologie du muscle grand fessier humain avec l'ilio-tibial postérieur.

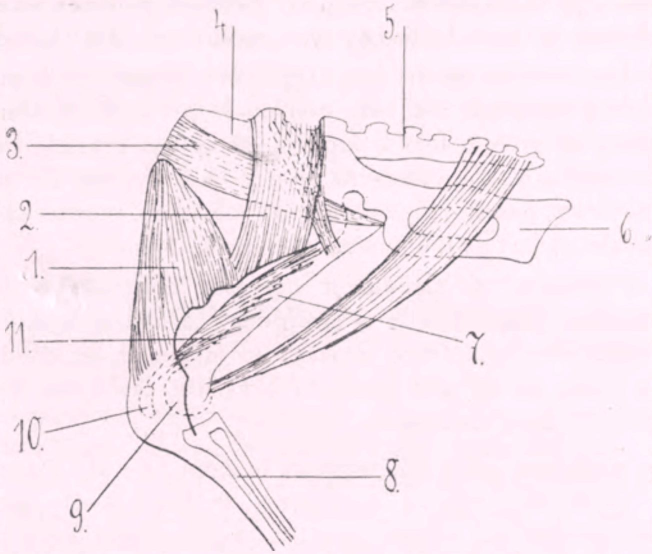

SCHÉMA II. = D'après Vialleton, modifié. = 1 — M. tenseur du fascia = 2—Pars superficialis du glutaeus superf. = 3 — Glutaeus medius = 4— Os iliaque = 5—Sacrum-coccis = 6—Paraméral = 7—Pars profunda glutaei superficialis = 8 — Tibia = 9—Fémur = 10—Rotule = 11—M. dr. autérieur.

Cette différence est due à ce que le muscle glutaeus superficialis des mammifères est un muscle composé. Dans certaines espèces, dans le boeuf notamment, on voit qu'il est divisé en deux parties: l'une superficielle descendant parmi le tenseur du fascia et le biceps femoris; l'autre profonde qui s'insère dans le fémur, tandis que la première le fait dans le fascia et, par sa médiation, dans la rotule. Cette unique portion superficielle du muscle glutaeus superficialis, que beaucoup de zootomistes désignent par ce nom, est considérée par Lavocat (24) comme n'appartenant pas aux muscles fessiers et est denommée par lui muscle crural externe. Que cette portion superficielle n'est qu'une partie de la nappe musculaire homologue des ilio-tibiales, est incontestable. Il reste à trouver l'homologie de la partie profonde laquelle chez beaucoup d'espèces est confondue par les vétérinaires avec le moyen fessier.

Avant de signaler cette homologie, je dois dire quelques mots cherchant à éclairer la confusion qui règne dans ces questions. Je crois en voir la source dans les diverses acceptions qu'on donne au mot fessier en établissant des homologies.

Si l'on veut nommer fessier tout ce qui est homologue des fessiers humains lesquels, comme je prétends le démontrer, constituent un groupe très complexe en ce qui regarde le glutaeus maximus, on donnera ce nom à beaucoup de muscles qui ne pourront pas le recevoir si l'on considère, comme caractère essentiel des glutaei, l'insértion dans le fémur.

Les muscles si clairement disposés chez les oiseaux en deux couches, superficielle et profonde, se confondent plus ou moins chez les mammifères, arrivant au maximum de cette union chez l'homme, où un seul muscle représente les trois des oiseaux que j'ai cités, ci-dessus.

Je crois que ceux qui refusent le nom fessier aux ilio-tibiales et au crural externe de Lavocat, ont de sa part, les meilleures raisons que la morphologie peut donner. Mais, en suivant ses vues, il faudrait refuser le même nom au muscle grand fessier humain lequel n'a du fessier qu'une partie des trois muscl'es que nous y pouvons voir. Cette difficulté m'a amené à conserver le nom de fessier au muscle crural externe de Lavocat, qui représente la portion superficielle du muscle grand fessier humain.

Voyons maintenant quelle est l'homologie de la portion profonde du glutaeus superficialis. Elle ne peut être comparée qu'avec le muscle ilio-femoralis lateralis. Les auteurs comme Gadow (25) considèrant ceci comme représentant seulement les fessiers moyen et petit, ont été induits en erreur par l'union de la couche superficielle avec la profonde dans le grand fessier humain.

Quand au paraméral, personne ne doute qu'il soit homologue au caudo-ilio-femoralis. L'insertion iliaque de celui-ci est dûe à la faiblesse des vértèbres caudales chez les oiseaux, qui l'empêcherait de jouer quelque rôle dans le redressement du fémur, si ce n'est par l'appui qu'il trouve dans l'os iliaque où il prend une insertion secondaire.

Nous arrivons maintenant à étudier les homologies des muscles comparés avec ceux de l'homme. Les variations nous en seront un guide précieux. Dans une, dont j'ai fait le rapport aux „Archives d'Anatomie, d'Histologie et d'Embryologie" à Strasbourg (26), j'ai trouvé le muscle grand fessier divisé en trois portions. Je renvoie le lecteur á ce lieu et, je dirai seulement ici que le muscle présentait deux couches juxtaposées dans le sens antéro-postérieur, desquelles l'une s'insérait dans le fascia tandis que l'autre le faisait dans le fémur. Il y avait, de plus, un faisceau cocci-fémoral très développé dont l'épaisseur l'emportait sur celui des deux couches réunies. Pour interpréter cette variation, j'ai pensé que la portion fasciale du grand fessier est l'homologue de l'ilio-tibiale postérieur des oiseaux et du crural externe de Lavocat, que sa portion fémorale réprésente l'ilio-fémoral externe des oiseaux comme la portion trochantérienne de glutaeus superficialis des mammifères. Et que la portion cocci-fémorale, enfin, est le réprésentant de l'agitator caudae et du caudo-ilio-femoralis. Nous serions amenés, peut-être, à ces mêmes conclusions par une étude attentive des dispositions intermédiaires dans la disposition offerte par les oiseaux et celle que nous trouvons chez l'homme. Mais, que cette étude pourrait nous tromper, l'exposition de quelques opinions sur les homologies des fessiers que l'on peut voir chez Le Double (12), le démontre. Par contre, il me semble que la variation que j'ai décrite ci-dessus chasse le moindre doute. Je pense qu'elle est la première qu'on aie décrite, car le cas de Tiedemann (27) n'est pas trop clair, et bien des auteurs pensent qu'un tel cas, n'était qu'un glutaeus maximus normal auquel allait s'ajouter un caudo-fémoral.

Mais, tandis que les variations réalisant la séparation entre la portion du grand fessier homologue de l'ilio-tibiale postérieur et celle du muscle ilio-fémoral externe sont très rares; au contraire, tout laisse à croire que les formes séparant le cocci-fémoral du reste du grand fessier sont, par contre, très fréquentes. Je citerai seulement les cas de Luschka (28), Macalister (29), Chudziński (30), les quatre de Testut (I) et les sept de Le Double (12), deux cas personnels. L'un, cité déja ci-dessus; l'autre, très intéressant parce qu'il réalise l'état intermédiaire dans la disposition offerte par les mammifères où le paraméral s'attache à la pars distalis du fémur et celle que nous trouvons chez nous. Celui-ci a été l'objet d'une communication à „l'Arquivo de Anatomia e Anthropologia" à Lisboa. (31).

Ces variations forment la plupart de celles qu'on a observées dans le muscle grand fessier. Il y en a d'autres que l'on comprend aisément après avoir lu ce qui précède. Peut-il, en effet, nous sembler étrange que le muscle grand fessier s'unisse avec le tenseur du fascia; après avoir vu que ces muscles ne sont que des parties d'une même couche musculaire dont la portion moyenne est dégénerée chez l'homme dans une aponévrose que revêt le moyen fessier? (Lannegrâce, 32) C'est ainsi que chez quelques espèces, comme la chèvre, le boeuf, le cheval, le porc, etc. le muscle grand fessier est réduit à une aponévrose dans la partie comprise parmi la pars medialis et la pars lateralis glutaei maximi (Ellenberger, 33), chez l'homme, la portion dégénérée est plus antérieure, mais elle peut ne pas dégénérer.

Quant à quelques variations que l'on interprète avec les données rapportées ci-dessus, ce sont des variations qu'on ne doit pas référer au grand fessier comme l'isquio-aponévrotique de Chudziński (34) ou l'isquio fémoral d'Alezais (35).

On pensera peut-être que mon interprétation systématique, n'apporte rien de nouveau à nos connaissances. C'est vrai. Mais, en regardant ce que bien des auteurs ont fait à cet égard, on verra qu'ils n'ont fait que pour chaque varation, un muscle semblable chez d'autres espèces. J'ai essayé de découvrir toutes les formes qu'il présente chez l'homme et chez les animaux d'un type commun. Si je n'ai pas réussi, j'espère, du moins, que la direction que je marque pourra être profitable à des esprits plus éclairés. C'est tout ce que je désire.

AUTEURS ET TRAVAUX CITÉS.

1. Testut. Les Anomalies Musculaires chez l'Homme, expliquées par l'Anatomie Comparée, leur importance en Anthropologie. Paris, 1884.
2. Macalister, cité d'aprés Eisler (9).
3. Wood. On human variations and their relations to comparative anatomy — Journ. of. Anat. and Physiol., vol I. 1867.
4. Turner, cité d'aprés Eisler (9).
5. Cunningham. The significance of anatomical variations. Journ. of Anat. and Physiol., vol 33, 1899.
6. Huntington, cité d'aprés Eisler (9).
7. Gegenbaur. Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere, Leipzig 1898.
8. Fürbringer. In Gegenbaur's Handbuch der Anatomie des Menschen, 8 éd. Leipzig 1909.
9. Eisler. Die Muskeln des Stammes, in Bardeleben's Handbuch der Anatomie des Menschen, Jena 1912.
10. et 11. Frohse u. Fränkel. Die Muskeln des menschlichen Armes, Jena 1908 in. Bardeleben's Handbuch der Anatomie des Menschen.
12. Le Double. Traité des Variations du Systéme Musculaire de l'Homme et de leur signification au point de vue de l'Anthropologie Zoologique, Paris 1897.
13. Le Double. Traité des variations des os du crâne de l'homme et de leur signification au point de vue de l'Anthropologie Zoologique, Paris, 1903.
14. Le Double. Traité des variations des os de la face de l'homme et de leur signification au point de vue de l'Anthropologie Zoologique, Paris, 1906.
15. Loth. E. Antropomorfologja mięśni — Problemat normalnej budowy człowieka — Arch Nauk Antropol. Tom. I Num. 3 Lwów—Warszawa 1921.
16. Vilhena. V. Arquivo de Anatomia e Anthropologia — Lisboa, passim.
17. Morgan. Evolucion y Mendelismo, tr. espanola de A. de Zulueta, Madrid 1921.
18. Cuenot. La Génèse des espèces animales, 2-e éd Paris 1921.
19. Middleton, cité d'après Morgan (17).
20. Barcia Goyanes. Sobre el valor de las Variedades en Morfologia — Comunicación al II Congreso Nacional de Ciencias Medicas — Sevilla 1924.

21. Barcia Goyanes. Sobre la Integracion Morfologica del Musculo Gluteo mayor. Com. al II Congr. N. de C. M. Sevilla 1924.
22. Vialleton. Morphologie générale — Membres et ceintures des Vertébrés Tétrapodes — Critique Morphologiue du Transformisme, Paris, 1924.
23. Vicq D'Azyr. Oeuvres de Vicq d'Azyr, publiées par Moreau, Paris 1805.
24. Lavocat. Discussion sur quelques muscles des mammifères, in Mem. de l'Acad. des Sc. Inscr. et Belles Lettres de Toulouse, 1893.
25. Gadow. Vögel, in Bronn's Classen und Ordnungen des Tierreichs, cit. d'après Vialleton (22).
26. Barcia Goyanes. Sur une nouvelle varieté du muscle grand fessier — Archives d'Anatomie, d'Histologie et d'Embryologie de Strasbourg, 1924.
27. Tiedemann. „Fr. Meckel's Deutsches Archiv für die Physiologie", cit. d'aprés Luschka.
Tiedemann. „Journal Complémentaire du Dictionnaire des Sciences Medicales. „Paris 1820, Vol. VI, p. 272, cit d'après Le Double.
28. Luschka. Die Anatomie des Menschlichen Beckens, Tübingen 1864, p. 139.
29. Macalister. Cit. d'après Testut et Poirier.
30. Chudziński. Observations sur les variations musculaires dans les races humaines, Mem. de la soc. d'Anthrop. de Paris, 1898.
31. Barcia Goyanes. Sobre la Morfologia del Músculo Glúteo Mayor— Arquivo de Anatomia e Antrop. Vol IX, Lisboa 1924.
32. Lannegrace. Myologie comparée des membres, Th. de Montpellier, 1878.
33. Ellenberger u. Baum. Vergleichende Anatomie der Haustiere— 15 Auf. Berlin 1921.
34. Chudziński. Loc. cit.
35. Alezais. Le muscle fessier, Comt. rendus de la Soc. de Biol. Paris 1902, cit. d'après Testut (I).

11. Karol Kosiński.

Znaczenie badań układu nerwowo-czuciowego dla antropologji.

Przedstawił K. Stołyhwo.

Streszczenie.

Zdaniem autora najważniejszym dla badań antropologicznych jest układ nerwowy, który najwcześniej osiąga w rozwoju jednostkowym swój zupełny rozwój i zachowuje najstalsze położenie. Badania autora, ogłoszone jako dodatek do tomu I Archiwum Nauk Antropologicznych T. N. A. (1925) stanowią próbę uzupełnienia badań w tym kierunku. Zestawiając wyniki swoich badań z wynikami innych autorów, zarówno w zakresie anatomiczno-porównawczym unerwienia czuciowego łydki i grzbietu stopy, jak też w zakresie odmian rasowych w obrębie jednego gatunku człowieka, autor stwierdza stale powtarzający się w zakresie badanych przez niego cech następujący stosunek ewolucyjny: Wilno: Włochy: Wielka Brytania.

---

12. N. Zylberlast-Zandowa.

O przepuszczalności opon mózgowych w stanach zapalnych.

Przedstawił E. Flatau.

Streszczenie.

W poprzednim komunikacie, wygłoszonym w Tow. Biologicznem w r. 1924 starałam się dowieść, iż rolę ochronną względem układu nerwowego odgrywa naczyniówka dzięki zawartości w niej specjalnych komórek tak zw. histiocytów.

Obecne doświadczenia miały na celu skontrolować, jak rolę swą pełni naczyniówka w stanie zapalnym. U królików wywoływaliśmy zapalenie opon, wprowadzając do przestrzeni podpajęczynówkowej drogą nakłucia podpotylicznego 0,2 ctm. hodowli pneumokokowej w rozcieńczeniu 1:500000; następnie zaś zastrzykiwaliśmy do żył zwierzęcia błękit trypanu.

Wyniki badań klinicznych łącznie z wynikami anatomopatologicznemi dają się podzielić na 2 kategorje: 1) przypadki, przebiegające ostro i kończące się śmiercią w ciągu 1—3 dni, dają wynik ujemny co do przepuszczalności opon dla błękitu trypanu w ramach kliniki, to znaczy, iż barwnika nie odnajduje się w płynie mózgowo-rdzeniowym. Badanie anatomopatologiczne pozwala jednak ustalić, iż barwnik przeniknął po za barjerę ochronną układu nerwowego, gdyż odnajduje się go w nabłonku splotu naczyniastego (zabarwia on jądra komórek nabłonkowych na kolor błękitny); 2) przypadki o przebiegu przewlekłym, trwające od 2-ch do 3-ch tygodni, pozwalają ustalić a) niebieskie zabarwienie płynu mózgowordzeniowego, b) obecność błękitu w nabłonku oraz c) istnienie histiocytów błękitnych w naczyniówce głębokiej.

Zazwyczaj płyn mózgowordzeniowy zabarwia się na kolor błękitny dopiero pod koniec życia, na 10—12 godzin przed śmiercią. Barwnik znajduje się tu wewnątrz zarodzi komórek specjalnych, które naskutek podobieństwa do histiocytów naczyniówki, uważać należy za histiocyty wolne, złuszczone z naczyniówki.

W nabłonku splotu błękit tkwi pod postacią pyłu, gęsto zaściełającego całą zaródź komórki nabłonkowej.

Przenikanie błękitu do histiocytów naczyniówki głębokiej (t. j. otaczającej naczynia krwionośne, drążące wgłąb tkanki nerwowej) potwierdza naszą tezę, iż narząd ten zaczyna pełnić swą rolę ochronną dopiero wtedy, gdy naczyniówka powierzchowna staje się niewydolną.

Nathalie Zylberlast-Zand.

La perméabilité meningée à l'état inflammatoire.

Presenté par E. Flatau.

Résumé.

Dans la communication précédente, faite à la Soc. Biol. en 1924, je tâchais de prouver que la rôle protecteur vis-à-vis du système nerveux appartient à la pie-mère surtout à ses cellules spéciales les histiocytes.

Dans nos expériences actuelles nous voulions voir comment remplit sa fonction la pie-mère enflammée. Dans ce but

nous avons provoqué l'inflammation des méninges en introduisant dans le sac méningé (à l'aide de la ponction sousoccipitale) 0,2 ctm. de culture pneumococcique diluée à l: 500000. Immédiatement après nous injections le bleu de trypan intraveineusement. Les résultats des examens cliniques à côté des anatomopathologiques nous autorisent de distinguer 2 catégories de cas: 1) ceux à marche aigûe qui aboutissent à la mort au bout de 1—3 jours; la perméabilité méningée s'y montre négative en ce qui concerne le liquide céphalorachidien; cliniquement le bleu de trypan n'y passe pas. L'examen anatomopathalogique décèle pourtant le passage du colorant à travers la barrière protectrice, puisqu'on le trouve dans l'épithelium du plexus choroide sous forme de coloration en bleu des noyaux des cellules épithéliales; 2) Deuxième catégorie de cas à marche lente durant 2—3 semaines permet de constater la présence du colorant: a) dans le liquide céphalorachidien, b) dans l'épithelium du plexus et c) dans les histiocytes de la pie-mère profonde c. à. d. celle qui accompagne les vaisseaux sanguins lors de leur pénétration dans la profondeur du tissu nerveux.

Le liquide céphalorachidien se colore habituellement vers le fin de la vie, 10 à 12 h. avant la mort. Le colorant s'y trouve au sein des cellules spéciales, qui vu leur ressemblance avec les histiocytes piemériens doivent être considerées commes des histiocytes libres detachés de la pie-mére.

L'épithelium du plexus contient le bleu de trypan sous forme de granulation fine remplissant le protoplasme cellulaire.

Les histiocytes de la pie-mère profonde colorés semblent parler en faveur de notre hypothèse qu'ils se mettent à jouer leur rôle protecteur du moment que la pie-mère superficielle se montre insuffisante.

Posiedzenie

z dnia 29 kwietnia 1926 r.

Wacław Sierpiński.

O zbiorach hyperborelowskich.

Streszczenie.

Zbiorem *hyperborelowskim* nazywamy każdy zbiór linjowy, który otrzymać można z przedziałów zapomocą conajwyżej $\aleph_1$ dodawań i conajwyżej $\aleph_0$ mnożeń, wykonywanych w dowolnym porządku.

Treścią komunikatu jest dowód twierdzenia, że *każdy zbiór hyperborelowski, nie zawierający podmnogości doskonałej, jest mocy* $\leqslant \aleph_1$.

Dowód tego twierdzenia oparty jest na rozważaniu tak zwanych zbiorów *hyper*-(A), przedstawiających uogólnienie zbiorów (A) Suslina. Zbiory *hyper*-(A) można określić jako odwzorowania ciągłe zbiorów hyperborelowskich.

Wacław Sierpiński.

Sur les ensembles hyperboreliens.

Nous appellerons *hyperborelien* tout ensemble linéaire qu'on obtient en partant des intervalles et en effectuant dans un ordre quelconque au plus $\aleph_1$ additions et au plus $\aleph_0$ multiplications d'ensembles.

La classe de tous les ensembles hyperboreliens est assez vaste: elle contient tous les ensembles linéaire messurables (B), toutes les sommes de $\aleph_1$ ensembles mesurables (B), donc tous les ensembles (A) de M. Souslin, leurs complémentaires et les images continues des ensembles complémentaires aux ensembles (A). Si l'hypothèse de Cantor, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, était vraie, tout ensemble linéaire serait hyperborelien.

Le but de cette note est démontrer que *tout ensemble hyperborelien totalement imparfait est de puissance* $\leqslant \aleph_1$. Il en résulte tout de suite que *la puissance d'un ensemble hyperborelien ne peut être comprise entre* $\aleph_1$ *et* $2^{\aleph_0}$ (ce qui présente une généralisation d'une propriété connue des ensembles complémentaires aux ensembles (A)).

À ce but nous considérerons une classe d'ensembles linéaires plus étendue que la classe de tous les ensembles hyperboreliens.

Supposons qu'à tout système fini de nombres ordinaux $< \Omega$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, correspond un intervalle (fermé) $\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$. Nous appellerons (suivant une terminologie de M. Souslin) *noyau* du système $S\{\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}\}$ l'ensemble-somme de tous les produits

$$\delta_{\alpha_1}\,\delta_{\alpha_1, \alpha_2}\,\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \ldots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies (dénombrables) de nombres transfinies $< \Omega$: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Nous appellerons *ensemble hyper*-(A) tout ensemble qui est noyau d'un système $S\{\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}\}$ (où $\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ sont des intervalles fermés).

Nous allons maintenant déduire quelques propriétés fondamentales des ensembles hyper-(A).

Tout intervalle (fermé) δ *est un ensemble hyper*-(A): pour obtenir le système $S\{\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}\}$ dont le noyau est δ, il suffira évidemment de poser $\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \delta$ pour tout système fini de nombres ordinaux $< \Omega$.

Nous prouverons maintenant qu'*une somme de* $\aleph_1$ *ensembles hyper*-(A) *est un ensemble hyper*-(A). Soit donc

$$E = \sum_{\lambda < \omega} E^{\lambda}, \tag{1}$$

où E^λ $(\lambda < \Omega)$ sont des ensembles hyper-(A). L'ensemble E^λ est donc noyau d'un système $S^\lambda\{\delta^\lambda_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}\}$.

L'ensemble de tous les systèmes (ξ, η) de deux nombres ordinaux $< \Omega$ étant, comme on sait, de puissance $\aleph_1$ (puisque $\aleph_1^2 = \aleph_1$), il existe une suite transfinie du type Ω,

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3), \ldots, (\xi_\omega, \eta_\omega), \ldots, (\xi_\alpha, \eta_\alpha), \ldots$$

formée de tous les systèmes (ξ, η) de deux nombres ordinaux $< \Omega$. (ξ, η) étant un système donné de deux nombres ordinaux $< \Omega$, il existe donc un et un seul nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $\xi = \xi_\alpha$ et $\eta = \eta_\alpha$: désignons-le par $\nu(\xi, \eta)$. Nous aurons évidemment:

(2) $$\nu(\xi_\alpha, \eta_\alpha) = \alpha \text{ pour } \alpha < \Omega.$$

(3) $$\xi_{\nu(\lambda, \mu)} = \lambda, \text{ pour } \lambda < \Omega, \ \mu < \Omega$$

(4) $$\eta_{\nu(\lambda, \mu)} = \mu, \text{ pour } \lambda < \Omega, \ \mu < \Omega.$$

Posons

(5) $$\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \delta^{\xi_{\alpha_1}}_{\eta_{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k}$$

pour tout système fini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de nombres ordinaux $< \Omega$.

Je dis que l'ensemble E est noyau du système $S\{\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}\}$. En effet, soit x un point de E. D'après (1) il existe donc un nombre ordinal $\lambda < \Omega$, tel que $x \varepsilon E^\lambda$. Donc x est un point du noyau du système $S^\lambda\{\delta^\lambda_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}\}$: il existe donc une suite infinie $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ de nombres ordinaux $< \Omega$, telle que

(6) $$x \varepsilon \delta^\lambda_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Posons

(7) $$\alpha_1 = \nu(\lambda, \beta_1), \ \alpha_k = \beta_k \text{ pour } k = 2, 3, 4, \ldots$$

D'après (5), (7), (3) et (4) nous aurons:

$$\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \delta^\lambda_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots$$

donc, d'après (6):

$$x \varepsilon \delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui prouve que x est un point du noyau du système S.

Or, soit x un point du noyau du système S: il exist donc une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ de nombres ordinaux $< \Omega$, telle que

(8) $$x \varepsilon \delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Posons

$$\beta_1 = \eta_{\alpha_1}, \beta_k = \alpha_k \text{ pour } k = 2, 3, 4, \ldots;$$

d'après (5) et (8) nous aurons

$$x \varepsilon \delta^{\xi_{\alpha_1}}_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k} \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots$$

ce qui prouve que x est un point du noyau du système $S^{\xi_{\alpha_1}}$, donc un point de l'ensemble $E^{\xi_{\alpha_1}}$ et, d'après (1), un point de E.

Nous avons ainsi démontré que E est le noyau du système S: donc E est un ensemble hyper-(A), ce qui prouve notre proposition.

Nous démontrerons maintenant qu'*un produit de $\aleph_0$ ensembles hyper-(A) est un ensemble hyper-(A)*.

Soit donc $E = \overset{1}{E}. \overset{2}{E}. \overset{3}{E}\ldots$, où E^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles hyper-(A). L'ensemble E^n est donc noyau d'un système $S^n \{ \delta^n_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \}$.

L'ensemble de tous les systèmes (p, q) de deux nombres naturels peut être, comme on sait, rangé en une suite infinie

$$(p_1, q_1),\ (p_2, q_2),\ (p_3, q_3), \ldots;$$

p et q étant deux nombres naturels donnés, il existe donc un et un seul nombre naturel n, tel que $p = p_n$ et $q = q_n$: désignons-le par $n(p, q)$. [On pourrait poser, p. e. $n(p, q) = 2^{p-1}(2q-1)$]. Nous aurons évidemment

(9) $$n(p_k, q_k) = k \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots$$

(10) $$p_{n(r, s)} = r \text{ pour } r = 1, 2, 3, \ldots; s = 1, 2, 3, \ldots,$$

(11) $$q_{n(r, s)} = s \text{ pour } r = 1, 2, 3, \ldots; s = 1, 2, 3, \ldots$$

Posons, pour tout système fini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de nombres ordinaux $< \Omega$.:

(12) $$\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \delta^{p_k}_{\alpha_{n(p_k, 1)}, \alpha_{n(p_k, 2)}, \ldots, \alpha_{n(p_k, q_k)}}$$

Je dis que l'ensemble E est noyau du système $S \{ \delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \}$.

En effet, soit x un point de E, r — un nombre naturel donné. D'après $x \varepsilon E = E^1 E^2 E^3 \ldots\ldots$, nous aurons $x \varepsilon E^r$. Donc x appartient au noyau du système S^r: il en résulte l'existence pour tout nombre naturel r d'une (au moins) suite infinie de nombres ordinaux $< \Omega$: $\beta_1^r, \beta_2^r, \beta_3^r, \ldots$, telle que

(13) $x \varepsilon \overset{r}{\delta}_{\beta_1^r, \beta_2^r, \ldots, \beta_q^r}$ pour $q = 1, 2, 3, \ldots; r = 1, 2, \ldots$

Posons

(14) $\alpha_k = \beta_{q_k}^{p_k}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$,:

d'après (12), (14) et (11) nous avons:

$$\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \overset{p_k}{\delta}_{\beta_1^{p_k}, \beta_2^{p_k}, \ldots, \beta_{q_k}^{p_k}}$$

et la formule (13) prouve que

$$x \varepsilon \delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc que x appartient au noyau du système S.

Or, soit x un point du noyau du système S. Il existe donc une suite infinie α_1 α_2 $\alpha_3, \ldots$ de nombres transfinis $< \Omega$, telle que

(15) $x \varepsilon \delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

Soit r un nombre naturel donné. Posons

$$\beta_s = \alpha_{n(r,s)} \quad \text{pour } s = 1, 2, 3, \ldots:$$

nous avons donc

$$\overset{r}{\delta}_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s} = \overset{r}{\delta}_{\alpha_{n(r,1)}, \alpha_{n(r,2)}, \ldots, \alpha_{n(r,s)}} \quad \text{pour } s = 1, 2, \ldots$$

donc, d'après (12) (pour $k = n\ (r, s)$), (10) et (11):

$$\overset{r}{\delta}_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s} = \delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n(r,s)}} \quad \text{pour } s = 1, 2, 3, \ldots$$

ce qui prouve, d'après (15) que

$$x \varepsilon \overset{r}{\delta}_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s} \quad \text{pour } s = 1, 2, 3, \ldots.$$

donc que x appartient au noyau du système S^r, et parsuite à l'ensemble E^r_x. Le nombre naturel r étant quelconque, il en résulte, d'après $E = E^1 E^2 E^3 \ldots$, que x est un point de E.

Nous avons ainsi démontré que l'ensemble E est noyau du système S: donc E est un ensemble hyper-*(A)*, c. q. f. d.

Des propriétés démontrées résulte que la classe de tous les ensembles hyper-*(A)* est une de classes $\mathcal{K}$ satisfaisant à 3 conditons suivantes:

1) Tout intervalle (fermé) appartient à la classe $\mathcal{K}$.

2) Tout ensemble-somme de $\aleph_1$ ensembles appartenants à la classe $\mathcal{K}$, appartient à la classe $\mathcal{K}$.

3) Tout produit de $\aleph_0$ ensembles appartenants à la classe $\mathcal{K}$, appartient à la classe $\mathcal{K}$.

Or, la classe de tous les ensembles hyperboreliens étant, par définition, la plus petite classe $\mathcal{K}$ d'ensembles, satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3), il en résulte qu'elle est contenue dans la classe de tous les ensembles hyper-*(A)*. Donc:

Tout ensemble hyperborelien est un ensemble hyper-(A).

Soit maintenant E un ensemble hyper-*(A)* donné, noyau du système $S\{\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}\}$, et supposons que la puissance de l'ensemble E est $> \aleph_1$.

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ étant un système fini donné des indices $< \Omega$, désignons par $E^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p}$ le noyau du système $S\{\gamma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}\}$, où $\gamma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \delta_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ (pour tout système fini d'indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$). On voit sans peine que

$$E = \sum_{\beta < \Omega} E^{\beta} . \delta_{\beta} \tag{16}$$

et, généralement:

$$E^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p} = \sum_{\beta < \Omega} E^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \beta}\, \delta_{\beta_1}\, \delta_{\beta_1, \beta_2, \ldots}\, \delta_{\beta_1, \ldots, \beta_p, \beta} \tag{17}$$

La puissance de l'ensemble E étant, par hypothèse, $> \aleph_1$, il existe, comme on voit sans peine, deux intervalles d_0 et d_1, fermés et disjoints, chacun de longueur < 1, tels que chacun des ensembles $E\,d_0$ et $E\,d_1$ est de puissance $> \aleph_1$.

D'après (16) nous trouvons:

$$(18) \qquad E\,d_o = \sum_{\beta<\Omega} E^\beta \delta_\beta d_o$$

La puissance de l'ensemble $E\,d_o$ étant $> \aleph_1$ et la somme (18) contenant $\aleph_1$ termes, nous concluons qu'il existe un indice $\alpha_1^o < \Omega$, tel que l'ensemble $E^{\alpha_1^o} \delta_{\alpha_1^o} d_o$ est de puissance $> \aleph_1$. Pareillement, en multipliant l'égalité (16) par d_1, nous concluons qu'il existe un indice $\alpha_1^1 < \Omega$, tel que l'ensemble $E^{\alpha_1^1} \delta_{\alpha_1^1} d_1$ est de puissance $> \aleph_1$.

Nous ferons maintenant correspondre (par l'induction finie) à tout système fini $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ de nombres 0 et 1 un intervalle $d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p}$ et un nombre ordinal $\alpha_p^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p} < \Omega$, de sorte que les intervales $d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}, 0}$ et $d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}, 1}$ soient disjoints, que

$$(19) \qquad d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}, \xi_p} \subset d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}},$$

que la longueur de l'intervalle $d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p}$ soit $< 1/_p$ et que l'ensemble

(20)

$$H^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p} \prod_{j=1}^{p} E^{\alpha_1^{\xi_1}, \alpha_2^{\xi_1, \xi_2}, \dots, \alpha_j^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j}} \delta_{\alpha_1^{\xi_1}, \alpha_2^{\xi_1, \xi_2}, \dots, \alpha_j^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j}} d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j}$$

soit de puissance $> \aleph_1$.

Nous avons défini les intervales d_o et a_1 et les nombres ordinaux α_1^o et α_1^1 qui satisfont évidemment aux conditions imposées pour $p = 1$. Admettons que les intervalles $d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p}$ et les nombres ordinaux $\alpha_p^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p}$ sont définis pour un nombre naturel p donné et qu'ils satisfont aux conditions imposées.

L'ensemble $H^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p}$ étant de puissance $> \aleph_1$ et, d'après (20), contenu dans l'intervalle $d_{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p}$, il existe deux intervalles $d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, 0}$ et $d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, 1}$ disjoints contenus dans $d_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p}$, de longueur $< \dfrac{1}{p+1}$ et tels que les ensembles

$$H^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p} d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0} \text{ et } H^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p} d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 1}$$

sont chacun de puissance $> \aleph_1$.

Posons, pour abréger: $\beta_j = \alpha^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j}$, pour $j = 1, 2, \ldots, p$: d'après (20) et (17) nous avons:

$$H^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p} d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0} = H^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p} d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0} E^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p} =$$

$$= \sum_{\beta < \Omega} H^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p} d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0} E^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \beta} \delta_{\beta_1} \delta_{\beta_1, \beta_2} \ldots \delta_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \beta}$$

L'ensemble $H^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p} d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0}$ étant de puissance $> \aleph_1$, et la somme $\sum\limits_{\beta < \Omega}$ contenant $\aleph_1$ termes, nous concluons qu'il existe un indice $\beta = \alpha_{p+1}^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0} < \Omega$, tel que le terme correspondant de la somme $\sum\limits_{\beta < \Omega}$ est de puissance $> \aleph_1$. Or, d'après (20), et d'après la définition des nombres β_j, on voit sans peine que ce terme est égale à l'ensemble $H^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0}$.

Pareillement on définit l'indice $\alpha_{p+1}^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 1}$.

Les intervalles $d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p}$ et les indices $\alpha_p^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p}$ sont ainsi définis par l'induction.

Soit maintenant $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ une suite infinie donnée quelconque de nombres 0 et 1. Les ensembles (20) étant de puissance $> \aleph_1$, nous avons:

$$\prod_{j=1}^{p} \delta_{\alpha_1^{\xi_1}, \alpha_2^{\xi_1, \xi_2}, \ldots, \alpha_j^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j}} d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j} \neq 0$$

pour $p = 1, 2, 3, \ldots$; tous les δ et d étant des intervalles fermés, nous en concluons, d'après un théorème bien connu de Cantor, que

$$(21) \qquad \prod_{j=1}^{\infty} \delta_{\alpha_1^{\xi_1}, \alpha_2^{\xi_1, \xi_2}, \ldots, \alpha_j^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j}} d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j} \neq 0.$$

Or, E étant le noyau du système $S\{\delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}\}$, nous avons

$$(22) \qquad \prod_{j=1}^{\infty} \delta_{\alpha_1^{\xi_1}, \alpha_2^{\xi_1, \xi_2}, \ldots, \alpha_j^{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j}} \subset E.$$

La longueur de l'intervalle $d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j}$ étant $< 1/_j$, le produit (21) se réduit à un seul point $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ qui, d'après (22), appartient à E.

Or, nous avons évidemment

$$p(\xi_1, \xi_2, \ldots) = d_{\xi_1} d_{\xi_1, \xi_2} d_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} \ldots,$$

donc

$$P = \sum_{\xi_1, \xi_2, \ldots} d_{\xi_1} d_{\xi_1, \xi_2} d_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} \ldots \subset E,$$

la sommation $\sum_{\xi_1, \xi_2, \ldots}$ s'étendant à toutes les suites infinies de nombres 0 et 1.

Or, $d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}$ étant des intervalles fermés, dont la longueur tend vers 0 avec $1/_n$, et les intervalles $d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 0}$ et $d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 1}$ étant toujours disjoints et contenus dans l'intervalle $d_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}$, on voit sans peine que l'ensemble P est parfait.

Nous avons ainsi démontré que *tout ensemble hyper-(A) de puissance* $> \aleph_1$ *contient un sous-ensemble parfait*. Tout ensemble hyperborelien étant, comme nous avons démontré plus haut, un ensemble hyper-(A), il en résulte que *tout ensemble hyperborelien totalement imparfait* (c'est-à-dire ne contenant aucun sous-ensemble parfait) *est nécessairement de puissance* $\leqslant \aleph_1$. Par conséquant la puissance d'un ensemble hyperborelien ne peut être comprise entre $\aleph_1$ et $2^{\aleph_0}$, c. q. f. d.

Remarquons enfin qu'on pourrait démontrer que les ensembles hyper-(A) sont des images univoques et continues des ensembles hyperboreliens et inversement. On pourrait aussi définir la classe de tous les ensembles hyper-(A) comme la plus petite classe K d'ensembles satisfaisant aux conditions 1), 2), 3) et à la condition 4) suivante:

4) Toute image d'un ensemble appartenant à la classe K appartient à K.

Kazimierz Kuratowski.

Pewne twierdzenie dotyczące mocy mnogości punktowych.

Streszczenie.

Celem tej pracy jest udowodnienie następującego twierdzenia:

Niech S oznacza najmniejszą klasę zbiorów, która: 1^0 zawiera wszystkie przedziały, 2^0 zawiera rezultaty operacji A dokonanej na zbiorach do niej należących, 3^0 zawiera uzupełnienia zbiorów do niej należących.

Twierdzenie orzeka, że jeśli E jest zbiorem klasy S, to moc zbioru E jest bądź $\leqslant \aleph_0$, bądź jest $\aleph_1$, bądź $\mathfrak{c}$.

Casimir Kuratowski.

Un théorème concernant la puissance d'ensembles de points.

Un des problèmes les plus anciens de la théorie des ensembles consiste à déterminer les puissances d'ensembles qui entrent dans une famille d'ensembles donnée. Le premier théorème concernant ce problème est celui de Bendixson[1]) et de Cantor:[2]) la puissance d'un ensemble parfait est $\mathfrak{c}$ (puissance du continu); il s'en suit qu'un ensemble fermé indénombrable a aussi la puissance $\mathfrak{c}$. Ce résultat fut étendu ensuite par MM. W. H. et C. G. Young[3]) aux ensembles C_δ (c. à. d. aux produits des suites d'ensembles ouverts). Après quelques généralisations partielles[4]) M. Hausdorff et indépendamment de lui M. Alexandroff arrivèrent[5]) à généraliser ce même théorème aux ensembles de Borel, c. à. d. aux ensembles qui s'obtiennent des ensembles fermés en alternant les opérations $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ et $\prod\limits_{n=1}^{\infty}$ une infinité dénombrable de fois.

Lorsque M. Lebesgue[6]) eut prouvé que les ensembles de Borel ne sont pas les seuls ensembles que l'on puisse définir effectivement et que Souslin[7]) introduisit les ensembles (A), qui s'imposèrent comme une généralisation naturelle des ensembles de Borel, — le problème de la puissance surgît relativement aux ensembles (A) et aux ensembles qui en dérivent par d'autres opérations antérieurement connues.

Les ensembles (A) s'obtiennent des intervalles[8]) à l'aide de l'opération suivante, appelée „opération A": supposons qu'à tout système fini $n_1, n_2 \cdots n_k$ de nombres naturels corresponde un ensemble $A_{n_1 n_2 \cdots n_k}$; l'ensemble-somme de tous les produits infinis de la forme $A_{n_1} A_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2 n_3} \cdots$ s'appelle résultat de l'opération A effectuée sur le système d'ensembles $\{A_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$.

---

[1]) *Bihang Svensk. Akad.* 9, 1884.

[2]) *Math. Ann.* 23, 1884.

[3]) *The theory of sets of points,* Cambridge 1906, p. 72.

[4]) Rosenthal, *Math. Ann.* 73, 1913, p. 499 (cas d'ensemble $C_\delta - C_\delta$). Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914 p. 465 (cas d'ensemble $C_{\delta\sigma\delta}$).

[5]) Hausdorff, *Math. Ann.* 77, 1916 p. 430. Alexandroff *C. R.* 162. Cf. Sierpiński *Fund. Math. V.* p. 166.

[6]) *Journ. de Math.* 6-me série t. I.

[7]) *C. R.* t. 164, 1917.

[8]) Dans tout ce qui suit le terme „intervalle" peut être remplacé par „cube à n dimensions".

Considérons le problème de la puissance relativement aux ensembles que l'on obtient des intervalles en combinant un nombre fini ou infini de fois les deux opérations: opération A et opération $C(X)$[1]) (les opérations $X - Y$, $\sum_{n=1}^{\infty}$, $\prod_{n=1}^{\infty}$ y sont comprises, vu la formule VII du N 1).[2])

Le but de cette note est de prouver que la puissance de ces ensembles est $\aleph_1$ ou $\mathfrak{c}$ (à moins qu'elle ne soit $\leqslant \aleph_0$).

Dans le même ordre d'idées furent établis jusqu'à présent les théorèmes: 1-o de Souslin[3]) que les ensembles (A) ont la puissance $\mathfrak{c}$ ou bien $\leqslant \aleph_0$ (ce qui étend le résultat de MM. Hausdorff et Alexandroff), 2-o de MM. Lusin et Souslin (v. Lusin et Sierpiński loc. cit.) que les complémentaires indénombrables d'ensembles (A) ont la puissance $\aleph_1$ ou $\mathfrak{c}$ [4]), 3-o de M. Sierpiński, publiés dans les notes: „Sur une propriété des ensembles (A)" (Fund. Math. VIII) et „Sur les ensembles hyperboreliens (ce volume), qui servent du point de départ à nos raisonnements.

Il est à signaler que le problème plus général, notamment le problème de la puissance relatif aux ensembles que l'on obtient des intervalles en combinant trois opérations: A, $C(X)$ et la transformation continue, — reste jusqu'à présent ouvert.

1. Définitions. Soit F une famille d'ensembles; nous désignons:

---

[1]) $C(X)$ désigne l'ensemble complémentaire à l'ensemble X.

[2]) L'étude générale de ces ensembles a été proposée il y a plusieurs années par M. Lusin (voir: note de M. Alexandroff dans *Fund. Math. V.* p. 155 où on trouvera quelques renseignements concernant l'étude de ces ensembles). D'après un théorème de MM. Lusin et Sierpiński (*Bull. Ac. Cracovie,* 1918 p. 47), tout ensemble de ce genre est mesurable au sens de Lebesgue; d'après le théorème de M. Nikodym, publié dans *Fund. Math. VI.* p. 149, ces ensembles jouissent de la propriété de Baire (c. à. d. il existe sur tout ensemble parfait P un point où l'ensemble considéré ou bien son complémentaire est de I-ère catégorie sur P).

[3]) Loc. cit. Cf. Sierpiński Fund. Math VIII.

[4]) On ne sait pas si la puissance $\aleph_1$ peut se présenter effectivement parmi les ensembles-complémentaires aux ensembles (A). D'après M. Lusin (*C. R.* t. 180) c'est un problème des plus difficiles.

1⁰ par F^* la famille de tous les ensembles-complémentaires aux ensembles appartenant à F; c. à. d. *Si* $X \varepsilon F$, $C(X) \varepsilon F^*$;

2⁰ par $B(F)$ la plus petite famille parmi les familles X qui remplissent les deux conditions: (*i*) $F \subset X$, (*ii*) *Si* $E_n \varepsilon X$,

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} E_n \varepsilon X$ et $\prod_{n=0}^{\infty} E_n \varepsilon X$[1]);

3⁰ par $A(F)$ la famille de tous les ensembles-résultats de l'opération A effectuée sur des systèmes d'ensembles appartenant à F.

(En particulier, lorsque F est la famille de tous les intervalles, $B(F)$ est la famille d'ensembles de Borel, $A(F)$ est la famille d'ensembles (A) de Souslin).

Nous établirons à présent quelques propriétés élémentaires de ces trois opérations; les formules que nous démontrerons constituent un genre de „calcul", qui nous servira ensuite pour prouver notre théorème.

I. $F^{**} = F$. II. $BB(F) = B(F)$. III. $AA(F) = A(F)$.

IV. *Si* $F \subset F_1$ on a $F^* \subset F_1^*$, $B(F) \subset B(F_1)$, $A(F) \subset A(F_1)$.

V. $(\sum_i F_i)^* = \sum_i F_i^*$ (i variant dans un ensemble arbitraire).

VI. *Si* $F^* \subset F$, $F^* = F$. VII. $F \subset B(F) \subset A(F)$.

VIII. $BA(F) = AB(F) = A(F)$. IX. $(B(F))^* = B(F^*)$.

X. $(B(F + F^*))^* = B(F + F^*)$.

Les formules I, II, IV et V résultent immédiatement des définitions. Pour la démonstration des formules III et VII on consultera la note citée de MM. Lusin et Sierpiński (p. 48). La proposition VI se déduit facilement de IV et I; VIII se déduit de VII, IV et III.

Je vais prouver, à présent, la formule IX et j'en déduirai X. Je dis que

$$(1) \qquad B(F^*) \subset (B(F))^*.$$

---

[1]) M. Hausdorf désigne l'opération $B(F)$ par $F_{(\sigma\delta)}$ (*Grundzüge* p. 25).

Il s'agit donc de prouver que 1⁰ $F^* \subset (B(F))^*$ et 2⁰ si $E_n \varepsilon (B(F))^*$ on a $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \varepsilon (B(F))^*$ et $\prod_{n=1}^{\infty} E_n \varepsilon (B(F))^*$. Or, selon VII: $F \subset B(F)$, d'où en raison de IV: $F^* \subset (B(F))^*$. D'autre part, l'hypothèse: $E_n \varepsilon (B(F))^*$ équivaut à: $C(E_n) \varepsilon B(F)$, ce qui donne, par définition de l'opération B: $\prod_{n=1}^{\infty} C(E_n) \varepsilon B(F)$. D'après la formule de de Morgan: $C\left(\prod_{n=1}^{\infty} C(E_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$; il vient donc: $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \varepsilon (B(F))^*$. Pareillement: $\prod_{n=1}^{\infty} E_n \varepsilon (B(F))^*$.

La formule (1) est ainsi établie.

F étant arbitraire, on peut substituer dans (1): F^* à F. Cela donne $B(F) \subset (B(F^*))^*$ et en appliquant IV et I, on a:

(2) $$(B(F))^* \subset B(F^*).$$

Les inclusions (1) et (2) équivalent à l'identité IX.

Pour en déduire X, on substitue $F + F^*$ à F et on tient compte de l'identité:

$$(F + F^*)^* = F^* + F^{**} = F^* + F,$$

qui résulte de V et I[1]).

Une conséquence de la proposition X est que la *différence* de deux ensembles appartenants à $B(F + F^*)$ lui appartient également. En effet, $E_1 - E_2 = E_1 \cdot C(E_2)$; or $C(E_2)$ appartient à $(B(F + F^*))^* = B(F + F^*)$. Donc $E_1 \cdot C(E_2)$, comme produit de deux ensembles-éléments de $B(F + F^*)$, en est également élément.

En s'appuyant sur cette remarque, nous pouvons ajouter

---

[1]) Ainsi, la famille $B(F + F^*)$ peut être définie comme la plus petite parmi les familles X qui satisfont aux conditions: *(i)*, *(ii)*, énoncées auparavant, et à la condition: *(iii)* si $E \varepsilon X$, $C(E) \varepsilon X$.

aux propositions I—X la suivante, qui n'est qu'une modification d'un énoncé de M. Sierpiński[1]):

XI. si $E \varepsilon A(F)$ il existe deux suites transfinies du type Ω:

$$E_1, E_2, \dots E_\alpha, \dots \text{ et } K_1, K_2, \dots K_\alpha, \dots$$

telles que: $E_\alpha \varepsilon B(F)$, $K_\alpha \varepsilon B(F+F^*)$,

$$E = \prod_{\alpha<\Omega} E_\alpha = \sum_{\alpha<\Omega} K_\alpha$$

(Ω désignant le plus petit nombre ordinal indénombrable).

En effet, $\{A_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ étant le système duquel E résulte par l'opération A, on pose:

$$A^o_{n_1 \dots n_k} = A_{n_1 \dots n_k}, \quad A^{\alpha+1}_{n_1 \dots n_k} = A^\alpha_{n_1 \dots n_k} \sum_{n=1}^{\infty} A^\alpha_{n_1 \dots n_k n}$$

et pour λ de seconde espèce: $A^\lambda_{n_1 \dots n_k} = \prod_{\xi<\lambda} A^\xi_{n_1 \dots n_k}$.

Puis: $E_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} A^\alpha_n$

et $$K_\alpha = E_\alpha - \sum_{n_1 \dots n_k} \left\{ A^\alpha_{n_1 \dots n_k} - A^{\alpha+1}_{n_1 \dots n_k} \right\},$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes finis: $n_1 \dots n_k$.

2. Lemme. Etant données: une famille F d'ensembles telle que

(3) $$F = B(F) = F^*$$

et une suite d'ensembles $F_o, F_1, F_2, \dots F_n, \dots$ telle que

(4) $$F_o = F, F_{2n+1} = A(F_{2n}), F_{2n+2} = F^*_{2n+1},$$

alors:

(5) si $E \varepsilon F_n$, E est de la forme $\sum_{\alpha<\Omega} U_\alpha$ et $\prod_{\alpha<\Omega} V_\alpha$ où $U_\alpha \varepsilon F$ et $V_\alpha \varepsilon F$.

Démonstration. Nous allons prouver d'abord que:

(6) $$F_{2n} \subset F_{2n+2}$$

[1]) Fund. Math. VIII, op. cit.

Pour prouver que $F_o \subset F_2$, observons que $F_2 = (A(F_o))^*$. Or, selon VII: $F_o \subset A(F_o)$, d'où $F_o^* \subset (A(F_o))^*$, mais, d'après (3): $F_o = F_o^*$. Ainsi: $F_o \subset (A(F_o))^* = F_2$.

Supposons $F_{2n} \subset F_{2n+2}$; nous prouverons que $F_{2n+2} \subset F_{2n+4}$. En effet, selon IV: $A(F_{2n}) \subset A(F_{2n+2})$; autrement dit: $F_{2n+1} \subset F_{2n+3}$. D'après IV: $F_{2n+1}^* \subset F_{2n+3}^*$, c. à. d. $F_{2n+2} \subset F_{2n+4}$.

La formule (6) est ainsi établie. Nous allons nous servir encore des formules:

$$B(F_n) = F_n, \tag{7}$$

$$B(F_{2n} + F_{2n}^*) \subset F_{2n+1}. \tag{8}$$

Pour $n = 0$, l'égalité (7) résulte de (3). En outre: $B(F_{2n+1}) = B\,A(F_{2n}) = A(F_{2n}) = F_{2n+1}$ selon VIII. Enfin, si $F_{2n+1} = B(F_{2n+1})$, on a $F_{2n+1}^* = (B(F_{2n+1}))^*$ et en raison de IX: $(B(F_{2n+1}))^* = B(F_{2n+1}^*)$. Comme $F_{2n+2} = F_{2n+1}^*$, il vient $B(F_{2n+2}) = F_{2n+2}$, ce qui achève la démonstration de (7).

La formule (8), pour $n = 0$, résulte de (3). D'autre part, si $n > 0$, on a $F_{2n} = F_{2n-1}^*$, d'où $F_{2n}^* = F_{2n-1}$ et comme selon (6): $F_{2n-2} \subset F_{2n}$, il vient $F_{2n-1} \subset F_{2n+1}$ donc $F_{2n}^* \subset F_{2n+1}$. D'uprès VII: $F_{2n} \subset F_{2n+1}$. Par conséquent: $F_{2n} + F_{2n}^* \subset F_{2n+1}$, d'où $B(F_{2n} + F_{2n}^*) \subset B(F_{2n+1}) = F_{2n+1}$ selon (7).

Les formules (7) et (8) établies, passons à la proposition (5). Procédons par induction.

La proposition (5) étant évidemment vraie pour $n = 0$, supposons la vraie pour $2n$; nous allons la prouver pour $2n + 1$ et $2n + 2$.

Soit $E \varepsilon F_{2n+1}$. Comme $F_{2n+1} = A(F_{2n})$, on a selon XI:

$$E = \prod_{\alpha<\Omega} E_\alpha = \sum_{\alpha<\Omega} K_\alpha, \tag{9}$$

$$E_\alpha \,\varepsilon\, B(F_{2n}), \tag{10}$$

$$K_\alpha \,\varepsilon\, B(F_{2n} + F_{2n}^*). \tag{11}$$

Selon (7) et (10): $E_\alpha \,\varepsilon\, F_{2n}$, et la proposition (5) étant supposée vraie pour $2n$, on a $E_\alpha = \prod_{\xi<\Omega} V_\xi^\alpha$, d'où $E = \prod_{\alpha<\Omega} \prod_{\xi<\Omega} V_\xi^\alpha$ et $V_\xi^\alpha \varepsilon F$.

Comme $\aleph_1^2 = \aleph_1$, l'ensemble E est produit d'une suite du type Ω d'ensembles de F.

D'autre part, selon (11) et X: $C(K_\alpha) \varepsilon B(F_{2n} + F_{2n}^*)$, d'où suivant (8): $C(K_\alpha) \varepsilon F_{2n+1}$. Comme nous venons de prouver, cela implique que $C(K_\alpha) = \prod_{\xi<\Omega} G_\xi^\alpha$ où $G_\xi^\alpha \varepsilon F$. Donc $K_\alpha = \sum_{\xi<\Omega} C(G_\xi^\alpha)$ et, en posant $C(G_\xi^\alpha) = H_\xi^\alpha$, on a: $E = \sum_{\alpha<\Omega} \sum_{\xi<\Omega} H_\xi^\alpha$ avec $H_\xi^\alpha \varepsilon F^* = F$.

La proposition (5) est ainsi établie pour $2n+1$. En tenant compte des formules de de Morgan et de l'égalité $F^* = F$, on en déduit la proposition (5) pour $2n+2$, c. q. f. d.

3. Nous avons annoncé dans l'introduction que nous allons étudier le problème de la puissance relatif aux ensembles qui s'obtiennent des intervalles en appliquant les opérations A, et $C(X)$. Appelons famille S cette famille d'ensembles. La définition précise de la famille S peut s'énoncer de cette façon:

S est la plus petite parmi les familles X telles que:

1⁰ X comprend tous les intervalles,

2⁰ $A(X) \subset X$,

3⁰ $X^* \subset X$.

La famille S se prète à une classification analogue à celle des ensembles de Borel. Nous allons prouver notamment que les ensembles de S peuvent être rangés en $\aleph_1$ classes définies de la façon suivante: la classe S_0 coïncide avec la classe d'ensembles de Borel; λ étant un nombre de deuxième genre (ou 0) on a: [1])

$$S_\lambda = B(\sum_{\xi<\lambda} S_\xi),\ S_{\lambda+2n+1} = A(S_{\lambda+2n}),\ S_{\lambda+2n+2} = S_{\lambda+2n+1}^*.$$

Il s'agit de prouver que

---

[1]) On voit que S_1 est la famille d'ensembles (A) de Souslin, S_2 est celle des complémentaires aux ensembles (A). D'après notre lemme, tout ensemble appartenant à une classe S_n qui a l'indice fini est somme de $\aleph_1$ ensembles de Borel. Mais je ne sais pas si cette propriété subsiste lorsqu'on passe aux indices infinis.

$$(12) \qquad S = \sum_{\alpha<\Omega} S_\alpha.$$

A cet effet nous établirons d'abord la proposition:

$$(13) \qquad S_\lambda = B(S_\lambda) = S_\lambda^*.$$

La formule (13) est évidemment réalisée pour $n = 0$. Si $\lambda > 0$, on a $S_\lambda^* = [B(\sum_{\xi<\lambda} S_\xi)]^* = B(\sum_{\xi<\lambda} S_\xi^*)$ selon IX et V; par définition, on a $S_\xi^* = S_{\xi+1}$, à moins que ξ ne soit de deuxième genre, où l'on peut supposer $S_\xi^* = S_\xi$. Ainsi $\sum_{\xi<\lambda} S_\xi^* \subset \sum_{\xi<\lambda} S_\xi$, d'où

$$S_\lambda^* = B(\sum_{\xi<\lambda} S_\xi^*) \subset B(\sum_{\xi<\lambda} S_\xi) = S_\lambda.$$

On en déduit (13) en s'appuyant sur VI et II.

La formule (13) établie, passons à la démonstration de (12.)

Supposons que, pour $\xi < \alpha$, on a $S_\xi \subset S$. Le nombre α est d'une des trois formes: λ $\lambda + 2n + 1$ ou $\lambda + 2n + 2$. Dans chaque cas on prouve facilement, en s'appuyant sur les définitions de S et de S_α, que l'inclusion $S_\xi \subset S$ entraîne $S_\alpha \subset S$.

Ainsi: $$\sum_{\alpha<\Omega} S_\alpha \subset S.$$

Pour démontrer l'inclusion inverse, il s'agit de prouver que la somme $\sum_{\alpha<\Omega} S_\alpha$ est une des familles X satisfaisant aux conditions 1⁰-3⁰ (de la définition de S). Quant aux conditions 1⁰ et 3⁰, on n'a qu'à tenir compte des propositions: S_0 comprend les intervalles, $S_\lambda = S_\lambda^*$ d'après (13) et $S_\alpha^* = S_{\alpha+1}$ pour α de premier genre. Il nous reste à prouver que, étant donné un système $\{A_{n_1 \cdots n_k}\}$ d'ensembles appartenant à $\sum_{\alpha<\Omega} S_\alpha$, le résultat de l'opération A effectuée sur ce système appartient également à cette somme. Or, ce système étant dénombrable, il existe un nombre λ de deuxième genre tel que tous les ensembles du système appartiennent à S_λ (puisque, par définition de S_λ, on a $S_\xi \subset S_\lambda$ pour $\xi < \lambda$). Comme $S_{\lambda+1} = A(S_\lambda)$, le résultat de l'opération A appartient à $S_{\lambda+1}$ donc à $\sum_{\alpha<\Omega} S_\alpha$.

L'égalité (12) est ainsi établie.

Appelons, avec M. Sierpiński, *hyperborelien* tout ensemble qui appartient à la plus petite famille H parmi toutes les familles X telles que: 1) tout intervalle appartient à X, 2) Si $E_\alpha \varepsilon X$, pour tout $\alpha < \Omega$, $\sum_{\alpha<\Omega} E_\alpha \varepsilon X$, 3) si $E_n \varepsilon X$ pour $n = 1, 2, \cdots$, $\prod_{n=1}^{\infty} E_n \varepsilon X$.

Comme l'a prouvé M. Sierpiński dans sa note citée, si $E \varepsilon H$ et si la puissance de E est $> \aleph_1$, l'ensemble E contient un ensemble parfait. Donc tout ensemble hyperborelien indénombrable est de puissance $\aleph_1$ ou $\mathfrak{c}$.

En s'appuyant sur ce fait, nous établirons à présent le théorème qui forme le but de notre note. Ce théorème s'énonce ainsi:

Théorème: *Si $E \varepsilon S$, la puissance de E est ou bien $\leqslant \aleph_0$ ou bien $\aleph_1$ ou bien $\mathfrak{c}$.*

Ce théorème sera évidemment prouvé dès que nous établirons la proposition plus générale que voici:

$$(14) \qquad S \subset H.$$

Démonstration de la form. (14). Evidemment tout ensemble de Borel appartient à H. Donc $S_0 \subset H$.

Supposons que pour tout $\xi < \alpha$, on a $S_\xi \subset H$. Je dis que $S_\alpha \subset H$.

En effet, si $\alpha = \lambda$ est de deuxième genre, on a:

$$S_\lambda = B(\sum_{\xi<\lambda} S_\xi) \text{ et } \sum_{\xi<\lambda} S_\xi \subset H.$$

Mais, évidemment $B(H) = H$, donc $B(\sum_{\xi<\lambda} S_\xi) \subset B(H) = H$, d'où $S_\lambda \subset H$.

Supposons, d'autre part, que $\alpha = \lambda + n$ (λ est de deuxième genre ou 0 et $n = 1, 2, \ldots$). En tenant compte de (13), on déduit du lemme que tout ensemble E appartenant à $S_{\lambda+n}$ est somme de $\aleph_1$ ensembles appartenant à S_λ. Comme $\lambda < \alpha$, on a $S_\lambda \subset H$. Donc E est somme de $\aleph_1$ ensembles de H, ce qui entraîne, par définition de H, que $E \varepsilon H$. Autrement dit: $S_\alpha \subset H$.

On en conclut par induction transfinie que

$$\sum_{\alpha<\Omega} S_\alpha \subset H$$

ce qui donne, en raison de (12): $S \subset H$.

Stefan Kempisty.

O funkcjach Baire'a.

Przedstawił W. Sierpiński.

Streszczenie.

W pracy tej autor dowodzi, że każda funkcja 1-szej klasy Baire'a rozwija się na szereg wielomianów, prawie wszędzie bezwzględnie zbieżny. Twierdzenie to uogólnia autor dalej w sposób następujący. Jeżeli do klasy 0 zaliczymy funkcje ciągłe, zaś do klasy α (gdzie α oznacza liczbę porządkową $< \Omega$) funkcje, będące sumami szeregów funkcyj klas $< \alpha$, zbieżnych wszędzie, a prawie wszędzie bezwzględnie, to uzyskana w ten sposób klasyfikacja funkcji pokrywa się z klasyfikacją Baire'a.

Sur les fonctions de M. Baire.

Par Stefan Kempisty.

Il résulte du théorème de Weierstrass sur les polynomes que toute fonction finie de première classe de M. Baire est représentable par une série de polynomes. La fonction étant discontinue, cette série n'est pas uniformément convergente. Et même il existe des fonctions de première classe qui, n'étant pas égales à la différence de deux fonctions semicontinues, ne peuvent pas être developpées en séries absolument convergentes de polynomes [1]).

Or, en appliquant le théorème de M. Egoroff sur la convergence uniforme, nous pouvons montrer que *les fonctions de première classe sont développables en series de polynomes presque partout absolument convergentes.*

En généralisant ce résultat aux classes supérieures, nous verrons que la classification de fonctions suivant les séries itérées presque partout absolument convergentes est identique à celle de M. Baire.

Lemme. Quel que soit la suite presque partout convergente de fonctions mesurables finies $S_n(x)$, on en peut choisir une suite

$$s_{n_1},\ s_{n_2},\ s_{n_3},\dots,\ s_{n_k}\dots$$

telle que la série

$$s_{n_1} + (s_{n_2} - s_{n_1}) + \dots + (s_{n_k} - s_{n_{k-1}})\dots$$

soit presque partout absolument convergente.

Considérons la suite de fonctions $s_n(x)$ définies dans l'intervalle fini (a, b) et soit $s(x)$ la limite de $s_n(x)$.

Il résulte du théorème de M. Egoroff sur la convergence uniforme [2]) qu'il existe une suite des ensembles E_k, tels que

1⁰ E_k fait partie de E_{k+1},

2⁰ mes $E_k > b - a - \frac{1}{k},$

3⁰ la suite donnée est uniformément convergente sur E_k.

Choisissons n_k de manière qu'on ait

$$\left| s_{n_k}(x) - s(x) \right| < \frac{1}{2^k}, \text{ pour } x \varepsilon E_k.$$

---

1) W. Sierpiński, sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues. *Fundamenta Math.* t. II (1921) p. 15.

2) D. Th. Egoroff, Sur les suites de fonctions mesurables. *Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. Paris* 152 (1911) p. 244.

La série correspondante

$$s = s_{n_1} + (s_{n_2} - s_{n_1}) + (s_{n_k} - s_{n_{k-1}}) + \dots$$

est évidement presque partout absolument convergente.

En effet, pour un point x appartenant à un des ensembles E_k et parsuite à tous les ensembles suivants, nous avons

$$\left| s_{n_{k+p}} - s_{n_{k+p-1}} \right| < \left| s_{n_{k+p}} - s \right| + \left| s_{n_{k+p-1}} - s \right| < \frac{1}{2^{k+p}} + \frac{1}{2^{k+p-1}},$$

quel que soit p entier positif.

Il s'en suit que

$$\left| s_{n_{k+1}} - s_{n_k} \right| + \left| s_{n_{k+2}} - s_{n_{k+1}} \right| + \dots + \left| s_{n_{k+p}} - s_{n_{k+p-1}} \right| + \dots <$$

$$< \frac{1}{2^{k-1}}, \text{ pour } x \varepsilon E_k.$$

Or l'ensemble de points qui n'appartiennent pas à aucun des ensembles E_k est de mesure nulle, puisque

$$\text{mes } [(a, b) - \sum_{k=1}^{\infty} E_k] < b - a - \text{ mes } E_k < \frac{1}{k},$$

quel que soit k.

Lorsque l'intervalle considéré est infini, on doit définir E_k dans l'intervalle $(-k, k)$ de manière qu'on ait

$$\text{mes } E_k > 2k - \frac{1}{k},$$

les autres conditions étant conservées.

Alors, la série correspondante sera presque partout absolument convergente dans l'intervalle $(-k, k)$ et parsuite dans l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$.

Théorème. *Toute fonction de première classe de* M. Baire *est développable en une série presque partout absolument convergente de polynomes.*

Soit $f(x)$ la limite de fonctions $f_n(x)$ continues dans (a, b). D'après le théorème de Weierstrass il existe un polynome

P_n tel que

$$|P_n(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n} \tag{1}$$

dans (a, b).

Alors $$f(x) = \lim_{n=\infty} P_n(x).$$

La série construite d'après notre lemme:

$$f(x) = P_{n_1} + (P_{n_2} - P_{n_1}) + \ldots + (P_{n_k} - P_{n_{k-1}}) + \ldots.$$

est presque partout absolument convergente et leurs termes sont des polynomes.

Lorsque l'intervalle est infini, on détermine P_n de manière que l'inégalité (1) soit vérifiée dans l'intervalle $(-n, +n)$.

Passons aux classes supérieures.

Considérons une classification de fonctions d'après les régles suivantes:

1⁰ les fonctions continues constituent la classe 0,

2⁰ une fonction apartient à la classe $\alpha < \Omega$ lorsqu'elle n'appartient pas à une classe inférieure et lorsqu'elle est somme d'une série partout convergente et presque partout absolument convergente de fonctions de classe $< \alpha$.

Théorème. *Toute fonction de classe* α *de* M. Baire *appartient à la classe* α *ainsi définie et inversement.*

Notre théorème est évidemment vrai pour $\alpha = 0$ et même pour $\alpha = 1$, les polymomes étant des fonctions continues.

Supposons, pour moment, que le théorème est vérifié pour tout nombre inférieur à α.

Soit $f(x)$ une fonction de classe α de M. Baire, donc limite des fonctions $f_n(x)$ de classes $\alpha_n < \alpha$.

En vertu de notre lemme, nous avons

$$f = f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \ldots + (f_{n_k} - f_{n_{k-1}}) + \ldots..,$$

la série étant presque partout absolument convergente.

Les classes de M. Baire et celles qui viennent d'être définies étant identiques, d'après notre hypothèse, pour $\alpha_{n_k} < \alpha$, nous voyons que les termes de notre série sont de classes nférieures à α suivant la classification admise.

Ainsi d'après le principe d'induction transfinie le théorème est demontré.

Wilno, mars 1926.

Otton Nikodym.

Sur un ensemble plan fermé, tel que la somme de toutes les droites qui ne le rencontrent pas est un ensemble non mesurable (B).

W pracy tej autor podaje przykład zbioru płaskiego, zamkniętego, takiego, iż suma wszystkich prostych, które go nie trafiają, tworzy zbiór niemierzalny w sensie Borela.

M. M. Sierpiński et Mazurkiewicz ont posé le problème d'étudier la somme de toutes les droites[1]) contenues dans un ensemble donné à l'avance. Relativement à ce problème, on sait jusqu'ici que, si l'ensemble donné est un ensemble *(G)* dans l'espace euclidien à un nombre fini de dimensions, la somme considérée est toujours un ensemble *(A)* de MM. Souslin et Lusin. — Il est intéressant de savoir, si la somme en questíon peut être un ensemble non mesurable *(B)*. Un exemple d'un tel ensemble *(G)* dans l'espace à trois dimensions est donné dans le VII vol. de Fund. Math.[2]) et on y a signalé l'existence d'un exemple à deux dimensions sans donner des renseignements plus précis. — Le but de ce travail est de donner le demonstration de l'existence d'un ensemble *(G)* plan, pour lequel la somme de toutes les droites illimitées, contenues dans cet ensemble, forme un ensemble non - mesurable *(B)*. Il est intéressant de remarquer que les difficultés de la construction pour le plan sont beaucoup plus grandes que dans le cas de l'espace à trois dimensions.

Notations.

1. (x, y) désigne le point dont des coordonnées sont x et y.

2. **(**A, B**)** (en parenthèses grasses) désigne le segment ouvert, c'est-á-dire l'ensemble de tous les points du segment rectiligne, les extrémités A et B exclues.

---

[1]) On considère la droite comme un ensemble de points.

[2]) Nikodym et Sierpiński. *Sur un ensemble ouvert etc. Fund. Math.* t. VII. p. 259.

3. $\langle A, B \rangle$ désigne le segment rectiligne fermé, c'est-à-dire les extremités A, B comprises.

On considère ce segment comme un ensemble de points.

4. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble, $(\mathcal{E})$ designe ce que devient $\mathcal{E}$, si l'on le f e r m e. — C'est donc la somme de $\mathcal{E}$ et de sa dérivée.

5. $\widehat{x, y}\,\{\ldots\}$ désigne l'ensemble de tous les points (x, y), dont les coordonnées x, y sasisfont à la condition spécifiée entre les accolades $\{\ldots\}$.

6. $\underset{df}{=}$ signifie „égal par définition".

7. Si T est une correspondance biunivoque, „T pro a" désigne ce qui corresponde au a par cette corespondance.

§ 2. Avant d'aborder la construction de notre exemple, nous allons indiquer la marche générale des idées du raisonnement.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble (A), non mesurable (B), situé dans l'intervalle (A, B) de l'axe x et soit

$$\left|\; \mathcal{E}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \;\right|, \quad \begin{array}{c} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k = 1, 2, \ldots) \\ (k = 1, 2, \ldots) \end{array}$$

un système déterminant, dont le noyau est l'ensemble $\mathcal{E}$. Supposons que les intervalles $\mathcal{E}_l$ soient ouverts, qu'ils soient contenus dans (A, B) et qu'ils satisfassent à la condition suivante: $\mathcal{E}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}} \subset \mathcal{E}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ pour toutes les cortèges d'indices. Imaginons qu'on a construit des tubes: $\mathfrak{T}_{\alpha_1}$, $(\alpha_1 = 1, 2, \ldots)$ limités par des demi-droites divergentes, situées dans le demi-plan $\widehat{xy}\,\{y > o\}$ et issues des extrémités des intervalles $\mathcal{E}_{\alpha_1}$, de sorte que chaque tube forme un domaine ouvert, non borné, limité par le segment $\mathcal{E}_{\alpha_1}$, et les deux demi-droites divergentes. — Nous voudrons déterminer ces tubes de manière à ce qu'ils n'aient de points communs deux à deux qu'au d e s s o u s de la droite $y = 1$.

Envisageons maintenant le tube $\mathfrak{T}_{\alpha_1}$ et essayons de répéter la même construction en partant des intervalles $\mathcal{E}_{\alpha_1, 1}$, $\mathcal{E}_{\alpha_1, 2}, \ldots$

et en choisissant des nouveaux tubes $\mathfrak{T}_{\alpha_1, 1}, \mathfrak{T}_{\alpha_1, 2}, \ldots$ de manière à ce qu'ils ne sortent jamais du tube $\mathfrak{T}_{\alpha_1}$ et qu'ils n'aient de points communs deux à deux qu'au dessous de la droite $y = 2$. La chose n'est pas toujours possible, mais nous montrerons dans le suite que la construction peut être réalisée par un choix convenable de l'ensemble $\mathfrak{E}$ et de son système déterminant.

Supposons que notre procédé peut être continué indéfiniment. On obtient ainsi un système de tubes $\{\mathfrak{T}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k}\}$: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k = 1, 2, \ldots)$, $(k \cdots 1, 2, \ldots)$. Si l'on envisage l'ensemble

$$\mathfrak{S} \underset{df}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k = 1, 2, \ldots} \widehat{xy} \{y < k\} . \mathfrak{T}_{\alpha_k, \alpha_k, \ldots, \alpha_k},$$

on voit qu'à son aide on peut facilement construire l'ensemble (G) cherché. Voilà l'idée que je dois à M. Sierpiński.

§ 3. Pour réaliser ce que nous nous proposons de faire, nous aurons besoin de la construction fondamentale suivante,

Etant donnés 1) un domain ouvert (un tube) $\mathfrak{M}$, limité par un segment $\langle G, H \rangle$ de l'axe x et par deux demi-droites $\dot{g}, \dot{h}$ divergentes issues respectivement des points G, H et situées dans le demi-plan $\widehat{xy}\{y > 0\}$, 2) un nombre positif r, 3) une suite infinie d'intervalles:

$$\langle G_1, H_1 \rangle, \langle G_2, H_2 \rangle, \cdots, \cdots \tag{1}$$

s'empiétant mutuellement on non, où

$$\langle G_n, H_n \rangle \subset (G, H),$$

trouver une suite de tubes $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots$, contenus dans $\mathfrak{M}$, partant respectivement des intervalles (1), limités respectivement par $\langle G_n, H_n \rangle$ et par deux droites *parallèles*, et tels que les ensembles $\mathfrak{M}_n . \widehat{xy}\{y > r\}$ n'aient pas de points communs deux à deux. — Transformons ledit problème à l'aide de la transformation homographique Φ (du plan), satisfaisante aux conditions suivantes: 1) à la droite à l'infinie corresponde la droite $y = s$, où s est un nombre donné, supérieur à r, 2) tous les points de la droite $y = r$ se conservent, 3) la droite $y = 0$ passe à l'infini.

Le tube $\mathfrak{N}_n$ se transforme ainsi en un angle $\mathfrak{N}'_n$, dont le sommet N'_n se trouve sur le segment $\langle G', H' \rangle$, dont les extrémités G', H' correspondent aux points à l'infini, situés sur les droites g, h.

Si l'on désigne par A_n, B_n les points d'intersection des demi-droites $\dot{g}'_n, \dot{h}_n$ avec la droite $y = r$, les bras $\dot{g}'_n, \dot{h}'_n$ de cet angle $\mathfrak{N}'_n$ passent par A_n et B_n. — Soient γ_n, δ_n les directions qui représentent les points (à l'infini) correspondant aux points G_n et H_n. — Si nous faisons varier la position des points A_n, B_n, en conservant leur distance et leur ordre et en laissant fixe l'intervalle (G_n, H_n), on obtient dans la configuration transformée des différents angles $\widehat{A_n N'_n B_n}$ avec des bras respectivement *parallèles*. C'est-à-dire, les directions γ_n et δ_n restent fixes. On voit donc, qu'a chaque intervalle (G_n, H_n) corresponde une classe d'angles homothétiques dont les sommets sont situés sur $\langle G', H' \rangle$, la grandeur et l'orientation de ces angles étant complètement déterminées par la position et la grandeur de l'intervalle (G_n, H_n).

Notre problème auxiliaire se présente alors comme il suit: construire un suite infini d'angles $\widehat{A_n N'_n B_n}$ de manière à ce que les triangles $A_n N'_n B_n$ n'aient pas, même si l'on les ferme, de points communs deux à deux, mais sous la condition d'avoir donné à l'avance les grandeurs et les orientations de ces angles.

Envisageons le triangle $A_n N' B_n$. Soit P_n le point situé au milieu du segment $A_n B_n$. Joignons les points P_n et N'_n par une droite et menons - y les parallèles passant par A_n et par B_n. Ces parallèles coupent la droite $y = s$ dans deux points que nous désignerons par C'_n, D'_n. On obtient ainsi le parallélogramme $A_n B_n C'_n D'_n$. Le problème auxiliaire sera à fortiori résolu, si l'on réussissait à construire une suite des parallelogrammes fermés $A_n B_n C'_n D'_n$ relativement aux intervalles (C_n, H_u) donnés à l'avance et de manière à ce que, ces parallèlogrammes n'aient pas de points communs deux à deux et que le bases $\langle C'_n, D'_n \rangle$ se trouvent dans (G', H').

On verra dans la suite que si l'on suppose que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}\,(G_n, H_n)$$

soit convergente, on peut effectivement faire la construction en question pour tous les intervalles (G_n, H_n) sauf pour un nombre fini d'eux au plus.

C'est pourquoi nous aurons besoin d'un ensemble E, pour lequel il existe un système déterminant, tel que la somme:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k} \text{mes}\, E_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k}$$

serait finie. L'idée générale des raisonnements que nous venons d'exposer, subira dans ce qui va suivre, des modifications convenables imposées par la nature du problème.

§ 4. Passons maintenant aux considérations plus exactes, en abordant le problème auxiliaire concernant les parallélogrammes dont nous venons de parler.

L e m m e I. D'une manière précise, supposons qu'on ait 1) deux nombres k et h, oú $k < h$, 2) deux segments ouverts:

$$(A, B) \underset{df}{=} \widehat{xy}\,\{y = k, m < x < n\},$$

$$(L', M) \underset{df}{=} \widehat{xy}\,\{y = h, p < x < q\},$$

$$\text{où} \quad n - m > q - p,$$

3) une suite infinie des nombres positifs:

$$v_1, v_2 \ldots .$$

tels que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ soit convergente,

4) outre cela, à chaque n soit attribuée une direction, représentée par l'angle φ_n donné à l'avance, qu'elle fait avec l'axe $+x$, ces directions satisfaisant à l'inégalité:

$$\frac{q-n}{h-k} \leqslant \operatorname{cotg} \varphi_n \leqslant \frac{p-m}{h-k}. \text{*)}$$

Je dis que dans ces conditions on peut trouver un nombre n_o et une suite d'intervalles ouverts

$$W_1, W_2, \ldots .$$

situés sur le segment (L, M) de sorte que:

1) mes $W_n = V_{n_o+n}$

2) les intervalles $\langle W_n \rangle$, $(n = 1, 2, ..)$ n'aient pas de points communs deux à deux

3) si $(x', h) \varepsilon \langle W_s \rangle$ et $(x'', h) \varepsilon \langle W_t \rangle$, où $x' < x''$ on a, quelque soient les indices s, t:

$$x' - (h-k) \operatorname{cotg} \varphi_s < x'' - (h-k) \operatorname{cotg} \varphi_t,$$

ce que veut dire que, si l'on mène les droites l' et l'' par les points (x', h), (x'', h) dans les directions déterminées respectivement par φ_s et φ_t, les droites l' et l'' ne se coupent pas dans la bande limitée par les droites $y = k$ et $y = h$.

L'équation de la droite passant par (x', h) et ayant la direction φ_s et:

$$(y - h) \operatorname{cotg} \varphi_s = x - x',$$

d'où le point, où cette droite coupe la droite $y = k$, est

$$x = x' + (k - h) \operatorname{cotg} \varphi_s$$
$$x = x' - (h - k) \operatorname{cotg} \varphi_s$$

4) si $(x', h) \varepsilon \langle W_n \rangle$, on ait:

$$m < x' - (h - k) \operatorname{cotg} \varphi_n < n,$$

ce qui veut dire que les parallélogrammes ne sortent jamais du quadrilatère $ABLM$.

L'idée de la démonstration sera basée sur la remarque suivante, bien intuitive. Considérons le plan représenté par l'équation

$$z = x - (h - k). \lambda, \tag{2}$$

où x et λ sont des variables indépendantes et z la variable dé-

---

*) Par l'hypothèse on a: $q - n < p - m$ et $h - k > 0$.

pendante. Si l'on suit un chemin situé dans le plan (2) de sorte que l'on traverse toujours les lignes de niveau

$$x - (b - k).\ \lambda = \text{const},$$

de ce plan dans la direction de gauche à droite (p. ex. en augmentant les x), on ne va jamais qu'en *montant* (en augmentant la coordonnée z).

D'une manière précise envisageons la fonction $F(\lambda)$, définie dans l'intervalle $\left\langle \frac{q-n}{b-k}, \frac{p-m}{b-k} \right\rangle$ comme il suit:

$$F(\lambda) = -2 \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} v_n + q$$

où la sommation s'étend à tous les indices n, pour lesquels $\lambda_n = \operatorname{cotg} \varphi_n \leqslant \lambda$ et $n > \mu$; le nombre μ ne sera déterminé que dans la suite.

Le fonction n'est pas croissante, puisque tous les v_n sont positifs. — La sommation a un sens bien déterminé puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ est supposée d'être convergente. — D'après l'hypothèse l'ensemble de nombres λ_n se trouve enfermé dans l'intervalle

$$\left\langle \frac{q-n}{b-k}, \frac{p-m}{b-k} \right\rangle$$

Déterminons le nombre μ de sorte que

$$F\left(\frac{p-m}{b-k}\right) > p$$

ce que nous pouvons faire puisque $\sum_n v_n$ est convergente.

On a donc dans $\left\langle \frac{q-n}{b-k}, \frac{p-m}{b-k} \right\rangle$: $q \geqslant F(\lambda) \geqslant p$.

L'ensemble Λ de tous les nombres λ_n, $(n > \mu)$ est au plus dénombrable. A chaque nombre λ appartenant à Λ faisons correspondre la quantité:

$$s(\lambda) \underset{df}{=} \sum_{\lambda_n = \lambda} v_n$$

la sommation étant étendue à tous les indices n, pour lesquels $\lambda_n = \lambda$ et $n > \mu$.

Envisageons les intervalles, situés sur l'axe x:

$$(F(\lambda), F(\lambda) + 2s(\lambda)), \text{ où: } \lambda \varepsilon \Lambda.$$

Je dis que, si $\lambda' < \lambda''$ on a:

$$F(\lambda'') < F(\lambda'') + 2. s(\lambda'') \leqslant F(\lambda') < F(\lambda') + 2. s(\lambda').$$

En effet, on a:

$$F(\lambda'') = -2. \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda''} v_n + q$$

$$\text{d'où: } F(\lambda'') + 2s(\lambda'') = -2. \sum_{\lambda_n < \lambda''} v_n + q - 2. \sum_{\lambda_n = \lambda''} v_n + 2s(\lambda'')$$

$$= -2. \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda''} v_n + q \tag{1}$$

On a aussi:

$$F(\lambda') = -2 \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda'} v_n + q \tag{2}$$

Mais

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda'} v_n \leqslant \sum_{\lambda_n < \lambda''} v_n,$$

puisque $\lambda' < \lambda''$ et tous les v_n sont positifs.

Donc, en vertu de (1) et (2), on a:

$$F(\lambda'') + 2s(\lambda'') \leqslant F(\lambda')$$

c. q. à d.

On voit facilement que si $\lambda \varepsilon \Lambda$, on a:

$$(F(\lambda), F(\lambda) + 2s(\lambda)) \subset (p, q)$$

En effet, on a

$$F(\lambda) \geqslant p,$$

$$\text{et: } F(\lambda) + 2s(\lambda) = -2 \sum_{\lambda_n < \lambda} v_k + q \leqslant q.$$

Ceci posé, envisageons l'intervalle

$$(F(\lambda),\ F(\lambda) + 2\,s(\lambda))$$

dont la longueur est $= 2 . s(\lambda) = 2. \sum_{\lambda_n = \lambda} v_n$

Soient $n_1 : < n_2, < \cdots$ tous les différents indices $> \mu$ qui interviennent dans la sommation en question:

$$S(\lambda) = v_{n_1} + v_{n_2} + \cdots$$

Cette somme peut avoir un nombre fini ou infini de termes et elle peut même se réduire à un seul terme. Quelques soient les circonstances qui s'y présentent, ou peut définir les intervalles:

$$\langle a_{n_1}, b_{n_1} \rangle \underset{df}{=} \langle F(\lambda) + \frac{v_{n_1}}{2},\ F(\lambda) + \frac{3\,v_{n_1}}{2} \rangle$$

$$\langle a_{n_2}, b_{n_2} \rangle \underset{df}{=} \langle F(\lambda) + 2v_{n_1} + \frac{v_{n_2}}{2},\ \ F(\lambda) + 2v_{n_1} + \frac{3\,v_{n_2}}{2} \rangle$$

et d'une manière générale

$$\langle a_{n_m}, b_{n_m} \rangle \underset{df}{=} \langle F(\lambda) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} v_{nk} + \frac{v_{n_m}}{2},$$

$$F(\lambda + 2 \sum_{k=1}^{m-1} v_{n_k} + \frac{3\,v_{n_m}}{2} \rangle$$

$$\text{pour } m > 1$$

On voit que, d'après les résultats obtenus, les intervalles

$$\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle : \cdots$$

sont ainsi bien définis et n'ont pas deux à deux de points communs. Ils sont contenus tous dans (p, q).

On a aussi: $\langle a_n, b_n \rangle \subset (F(\lambda_n), F\lambda_n + 2\,s(\lambda_n))$

Passons maintenant au plan $x\,y$ et considérons les segments:

$$\underset{xy}{\wedge} \left\{ \begin{matrix} a_n \leqslant x \leqslant b_n \\ y = b \end{matrix} \right\}, n > \mu$$

Soit $n' \neq n''$ et $a_{n'} \leqslant x' \leqslant b_{n'}$, $a_{n''} \leqslant x''\ b_{n''}$. Menons par le point (x', b) la droite λ', ayant la direction φ_n et par le point (x'', b) a droite λ'' dans la direction $\varphi_{n''}$. Les points d'intersection de ces droites avec la droite $x = k$ ont respectivement les abscisses:

$$x_1 = x' + (k - b) \operatorname{cotg} \varphi_n$$
$$x_1'' = x'' + (k - b) \operatorname{cotg} \varphi_{n''}.$$

Je vais démontrer que la relation $x' > x''$ entraîne toujours l'inégalité $x_1' > x_1''$.

Deux cas peuvent s'y présenter: ou 1⁰) $\varphi_{n'} = \varphi_{n''}$, ou bien 2⁰) $\varphi_{n'} \neq \varphi_{n''}$.

Dans le cas 1⁰ la chose est évidente.

Supposons donc que $\varphi_{n'} \neq \varphi_{n''}$ et que $x' > x''$.

Dans ce cas on a nécessairement:

$$\operatorname{cotg} \varphi_{n'} < \operatorname{cotg} \varphi_{n''}$$

En effet, l'égalité $\operatorname{cotg} \varphi_{n'} = \operatorname{cotg} \varphi_{n''}$ étant excluse, si l'on suppose que $\operatorname{cotg} \varphi_{n'} > \operatorname{cotg} \varphi_{n''}$, on aurait $\lambda_{n'} > \lambda_{n''}$. Puisque $\lambda_{n'} \varepsilon \Lambda$ et $\lambda_{n''} \varepsilon \Lambda$, on aurait d'après les résultats obtenus plus haut:

$$F(\lambda_{n'}) < F(\lambda_{n'}) + 2s(\lambda_{n'}) \leqslant F(\lambda_{n''}) < F(\lambda_{n''}) + 2s(\lambda_{n''})$$

et par conséquent:

$$a_{n'} < b_{n'} < a_{n''} < b_{n''}$$

d'où

$$x' < x'',$$

ce qui est en contradiction avec la supposition $x' < x''$

Il s'ensuit que

$$\operatorname{cotg} \varphi_{n'} < \operatorname{cotg} \varphi_{n''}$$

et par conséquent $x_1' > x''$, puisque $b > k$.

Si l'on pose:

$$a_n' \underset{df}{=} a_n + (k - b) \operatorname{cotg} \varphi_n$$
$$b_n' \underset{df}{=} b_n + (k - b) \operatorname{cotg} \varphi_{n'}$$

on voit que les parallélogrammes:

$$(a_n', k),\ (b_n', k),\ (b_n, b),\ (a_n, b)$$

n'ont pas deux à deux de points communs, même si l'on les ferme.

Tous ces parallélogrammes sont contenus dans le quadrilatère $ABLM$.

En effet, on a quelque soit n:

$$\operatorname{cotg} \psi' = \frac{q-h}{h-k} \leqslant \operatorname{cotg} \varphi_n \leqslant \frac{p-m}{h-k} = \operatorname{cotg} \psi'',$$

où ψ' et ψ'' sont les angles que font les droites MB et NA respectivement avec l'axe $+x$.

On a donc:

$$a'_n > p + (k-h) \operatorname{cotg} \psi''$$
$$b'_n < q + (k-h) \operatorname{cotg} \psi'$$

c'est-à-dire:

$$a'_n > p + \frac{k-h}{h-k}(p-m) = p - p + m = m$$

$$b'_n < q + \frac{k-h}{h-k}(q-n) = q - q + n = n,$$

ce qui nous montre que $\langle a'_n, b'_n \rangle \subset (m, n)$.

Les intervalles $\langle a_n, b_n \rangle$, à partir d'un certain rang, satisfont donc complètement aux conditions désirées dans l'énoncé du lemme. Le lemme est donc démontré.

§ 5. Si a, b sont deux points situés sur l'axe x et si $a < b$, appelons *U - domaine appartenant au segment* (a, b) chaque domaine ouvert, limité par ce segment, par une demi-droite l issue du point a, et par une demi-droite m issue du point b, les demi-droites l et m se trouvant dans le demi-plan $\widehat{xy}\,\{y > o\}$ et étant portées sur les droites dont le point d'intersection existe et se trouve dans le demi-plan $\widehat{xy}\,\{y < o\}$.

II. Lemme. Soit W un U - domaine appartenant au segment (a, b), où $a < b$, soit k un nombre positif et

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots.$$

une suite infinie d'intervalles, tels que

1) $\langle a_n, b_n \rangle \subset (a, b)$, $(n = 1, 2, \ldots)$

2) la somme des longueurs de ces intervalles

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{mes } (a_n, b_n)$$

soit convergente.

Dans ces conditions il existe une suite infinie d'ensembles $W_1, W_2, \ldots$ et un nombre μ satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $W_n \subset W$ pour $n > \mu$

2) W_n est un U-domaine correspondant au segment (a_n, b_n), pour $n > \mu$.

3) les ensembles

$$W_n \cdot \widehat{xy} \{y \geqslant k\} \text{ pour } n > \mu$$

n'ont pas, même si l'on les ferme, de points communs deux à deux.

Au lieu d'une démonstration analytique; pour gagner en clarté des idées et en brévité d'exposé, nous préférons de donner une esquisse de démonstration, en n'employant que le langage géometrique.

Envisageons la troisième axe z des coordonnées, perpendiculaire au plan x, y dans le point $x=o, y=o$ et menons le plan π:

$$\Pi \underset{df}{=} \widehat{xyz} \quad \{x = k\} \tag{1}$$

Faisons la projection centrale sur le plan Π du demi-plan $(+x, +y, -x)$, projection produite par des rayons issus du point S, dont les coordonnées sont $x=y=o$, $z=1$. Ladite projection détermine une correspondance Γ entre des points du plan x, y et des points du plan Π, cette correspondance étant homographique, biunivoque et bicontinue si l'on n'y l'applique qu'aux points du domaine ouvert W.

Le domaine W est limité par le segment $\langle a, b \rangle$ et par deux demi-droites l, m dont la première part du point a et la deuxième du point b. Soient respectivement a', b' les points d'intersection de la droite $\widehat{xyz} \{x=k, \ z=o\}$ avec l et m. Menons par S la droite SL parallèle à l et soit L le point où SL coupe le plan Π

D'une manière analogue, soit M le point d'intersection du plan Π avec la droite SM issue du point S et parallèle à m.

La projection cherchée du domaine W est un domaine ouvert (du plan Π), limité par le segment LM et par deux demi-droites dont l'une part du point L et passe par a' et l'autre part du point M et passe par b'.

Les droites Sb et Mb' étant parallèles d'une part et les droites Sa et La' d'autre part, on voit que les demi-droites Mb' et La' sont divergentes de sorte que le segment $a'b'$ est plus grand que LM.

Soit maintenant (a_n, b_n) un des intervalles donnés, situés dans (a, b). Désignons par l_n le point

$$x = \frac{a_n + b_n}{2},\ y = o,\ z = o.$$

Soit λ_n le *cotangens* de l'angle que fait la demi-droite Sl_n avec l'axe $+x$.[1]). On a évidemment:

$$\operatorname{cotg} \psi' < \lambda_i < \operatorname{cotg} \psi''$$

où ψ' et ψ'' sont respectivement les angles enfermés entre l'axe $+x$ et les droites sb et sa.

Désignons par v_i la longueur de l'intervalle (a_i, b_i).

Considérons maintenant le plan π et introduisons-y un système des cordonnées rectangulaires ξ, η en plaçant l'axe ξ sur la droite $\widehat{xyz}$ $\{y = k,\ z = o\}$, l'axe η sur la droite $\widehat{xyz}$ $\{y = k,\ x = o\}$, le centre dans le point $x = o,\ y = k,\ z = o$ et en dirigeant les axes $+\xi$ et ef $+\eta$ vers les cotés, où sont dirigées respectivement les axes $+x$ et $+z$.

On obtient ainsi dans le plan $\pi(\xi, \eta)$ une configuration réalisant précisément les conditions du problème auxilière précédent, à savoir:

On a deux nombres 0 et 1 et deux segments

(L, M) situé sur la droite $\eta = 1$

$(a'\,b')$ situé sur la droite $y = 0$

la longueur du premier segment étant *inférieure* à celle du deuxième segment.

---

[1]) Par le sens direct des angles on entend ici celui, qui ramène, par une rotation de $\frac{\pi}{2}$, l'axe $+x$ à l'axe $+z$.

On a donné une suite infinie des nombres positifs $\{v_n\}$, telle que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ est convergente.

Outre cela, à chaque n est attribuée une direction φ_n, où $\operatorname{cotg} \varphi_n \underset{df}{=} \lambda_n$, chaque λ_n étant évidemment compris entre le cotangens de l'angle que fait la demi-droite Mb' avec $+\xi$, et entre le cotangens de l'angle ψ'' que fait la demi-droite La' avec la même axe:

$$\operatorname{cotg} \psi' \leqslant \lambda_n \leqslant \operatorname{cotg} \psi''.$$

Par conséquent il existe un nombre μ et une suite d'intervalles

$$\langle c_1, d_1 \rangle, \langle c_2, d_2 \rangle, \cdots$$

situés sur $(L, M,)$ et telle que:

1) $d_n - c_n = v_{\mu+n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

2) les intervalles $\langle c_n d_n \rangle$ n'ont pas de points communs deux à deux

3) si l'on prend arbitrairement des points v_n, où $v_n \varepsilon \langle c_n, d_n \rangle$ et qu'on mène la droite $l(v_n)$ par le point v_n dans la direction φ_n, toutes ces droites $l(v_n)$ n'ont pas deux à deux de points communs dans la bande

$$\widehat{\xi\eta}\{0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$$

4) le point d'intersection de la droite l (v_n) avec l'axe ξ, se trouve dans (a', b').

La troisième et la quatrième propriété peuvent être énoncées d'une autre manière. Considérons des différents points v_n de l'intervalle $\langle c_n d_n \rangle$ et construisons les demi-droites issues des points v dans la direction φ et dans le sens dirigé vers l'axe ξ. La somme de toutes ces demi-droites est une demi-bande B_n limitée par $\langle c_n d_n \rangle$ et deux demi-droites parallèles partant de c_n et de d_n. La propriété en question exprime que les ensembles (parellèlogrames):

$$\langle B_n \rangle \widehat{\xi\eta}\{0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$$

n'ont pas de points communs deux à deux et qu'ils ne sortent jamais du quadrilatère $L M a' b'$.

Revenons maintenant au plan xy par la transformation inverse à Γ. Soit $c_n\, d_n\, B_n\, A_n$ le parellélogramme $\langle B_n \rangle \widehat{\xi\eta} \{0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$ où $c_n\, d_n \parallel A_n\, B_n$, $c_n\, A_n \parallel d_n\, B_n$. Soit f_n le point qui se trouve précisément au milieu du segment $c_n\, d_n$. Aux demi-droites $f_n\, A_n$ et $f_n\, B_n$ correspondent, par la projection inverse, les demi-droites parallèles coupant l'axe de x en deux points $\overline{a}_n\, \overline{b}_n$.

Par des considérations simples on démontre que $\overline{a}_n = a_n$ et $\overline{b}_n = b_n$. Comme l'angle $A_n\, f_n\, B_n$ corresponde à une demi-bande limitée par $(a_n\, b_n)$ et deux demi-droites parallèles il s'ensuit que B_n se transforme en un U-domaine appartenant à $(a_n\, b_n)$.

Si l'on désigne ce U-domaine par W_n, on voit que les ensembles $W_n\, \widehat{xyz} \{ z = 0, y > k \}$ n'ont pas même si l'on les ferme de points communs deux à deux. On voit aussi que $W_n \subset W$

Le lemme est ainsi établi.

Remarque. On peut évidemment s'arranger de manière à ce que l'angle de divergence de chaque W_n, (c'est-à-dire la valeur absolue de la différence de deux angles qui fait l'axe $+x$ avec les demi-droites limitant W_n) soit inférieur à un nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance. Pour cela, il suffit de former des nouvelles tubes, suffisamment peu divergentes, choisis respectivement dans les intérieurs des tubes W_n.

§ 6. Ce qui précède, nous montre que nous aurons besoin d'un système déterminant $\{\mu_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$, dont le noyau soit non-mesurable (B) et pour lequel la somme des longueurs de tous les intervalles μ soit finie. Pour en construire un, envisageons un ensemble E linéaire, du type (A), non-mesurable (B) et situé dans l'intervalle $(0,1)$.

Désignons par R l'ensemble de tous les nombres réels qui se présentent sous la forme $\dfrac{p}{2^q}$, où p, q sont des entiers. Soit S le complémentaire de l'ensemble R. Posons:

$$E' \underset{df}{=} E - R.$$

L'ensemble E n'étant pas mesurable (B), l'ensemble E' ne l'est non plus, puisque E comme un ensemble non mesurable (B)

est nécessairement non-dénombrable, tandis que R est dénombrable. On a $E' \subset S$. Ceci posé, envisageons un ensemble parfait P, non dense, situé dans $\langle 0, 1 \rangle$ et construit de la manière suivante. On forme un système des intervalles fermés

$$\{ \lambda_{s_1, s_2, \ldots, s_k} \}$$

$$(s_1, s_2, \ldots, s_k = 0, 1), \ (k = 1, 2, \ldots),$$

où les indices $s_1, s_2, \ldots, s_k$ n'admettent que les deux valeurs 0 et 1, et tel que

1) $$\lambda_{s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}} \subset \lambda_{s_1, s_2, \ldots, s_k},$$

2) $$\lambda_{s_1', s_2', \ldots, s_k'} \cdot \lambda_{s_1'', s_2'', \ldots, s_k''} = 0$$

chaque fois, où les deux groupes d'indices ne sont pas identiques,

3) $$\text{mes } \lambda_{s_1, s_2, \ldots, s_k} = \frac{1}{4^k}$$

ensuite, on forme l'expression

$$P \underset{df}{=} \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_k = 0, 1} \lambda_{s_1, s_2, \ldots, s_k}.$$

P est nécessairement un ensemble parfait et non dense. Le système $\{ \lambda_{s_1, s_2, \ldots, s_k} \}$ possède les propriétés suivantes:

1) Le nombre des intervalles $\lambda_{s_1, s_2, \ldots, s_k}$ correspondant aux groupes à k indices est égal à 2^k. Nous appellerons ces intervalles: *les intervalles d'ordre k*, et désignerons par $A(k)$ la classe de tous les intervalles d'ordre k. Les intervalles d'ordre $k+1$ son contenus dans les intervalles d'ordre k et la longueur des intervalles d'ordre k tend vers 0, si $k \to \infty$.

2) Pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre k_o tel que, si $k \geqslant k_o$, tous les intervalles d'ordre k se trouvent dans $S(P, \varepsilon)$.[1])

3) Quelque soit k, l'ensemble P est contenu dans la somme de tous les intervalles d'ordre k.

---

[1]) $S(P, \varepsilon)$ désigne l'ensemble de tous les points, dont la distance de l' ensemble P est inférieur à ε.

4) La somme des longueurs de tous les intervalles λ est finie, puisqu'elle est égale à;

$$2^1 . \frac{1}{4} + 2^2 . \frac{1}{4^2} + \cdots$$

L'ensemble S $(o, 1)$ peut être mis en une correspondance biunivoque et bicontinue avec l'ensemble de tous les points de 2^e espèce [1]) de l'ensemble P. En effet, entre toutes les suites infinies d'indices

$$s_1,\ s_2, \cdots \qquad (s_1,\ s_2, \cdots = 0,\ 1)$$

et tous les points x de P, il existe une correspondance biunivoque definie par la relation:

$$x = \lambda_{s_1} . \lambda_{s_1,\ s_2} . \lambda_{s_1,\ s_2,\ s_3} \cdots$$

Les points x de deuxième espèce de l'ensemble P se caractérisent par le fait que dans la suite correspondant $(s_1, s_2, \cdots)$ tous les éléments ne sont pas identiques à partir d'un certain rang. Faisons correspondre le point:

$$x = \lambda_{s_1} . \lambda_{s_1, s_2} \ldots\ldots$$

au nombre:

$$x' = \frac{s_1}{2^1} + \frac{s_2}{2^2} + \cdots\cdots.$$

Cette correspondance est pour les points de 2^e espèce biunivoque et bicontinue. Désignons cette correspondance par T.

T pro E' est un ensemble (A) qui n'est pas mesurable (B) et est contenu dans T pro $[S. (o, 1)] \subset P$.

C'est une conséquence du fait connu que l'image biunivoque et bicontinue d'un ensemble mesurable (B) est aussi mesurable (B) et qu'un tel image d'un ensemble (A) est aussi un ensemble (A) [2]).

On peut évidemment trouver un système déterminant

$$\{\triangle_{i_1,\ i_2, \ldots,\ i_k}\}$$

---

[1]) Ce sont ces points de P qui ne forment pas des extrémités des intervalles contigus.

[2]) Cf. Lavrentieff. Fund. Math. 1924. vol. VI. pp. 149-160. Sierpiński. C. R. t. 178. p. 545.

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, 3, \ldots), (k = 1, 2, \ldots)$$

composé d'intervalles fermés et satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $$\triangle_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}} \subset \triangle_{i_1, \ldots, i_k}$$

2) $$\text{mes } \triangle_{i_1, \ldots, i_2, \ldots} < \frac{1}{k}$$

3) T pro E' est le noyau du système déterminant considéré.

Posons:

$$\Gamma_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \underset{df}{=} \triangle_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \cdot P$$

pour tous les groupes d'indices.

On voit que $\Gamma_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ n'est jamais vide, et que son diamètre tend vers 0 si $k \to \infty$.

Quelque soit la suite infinie $i_1, i_2, \ldots$, il existe un point x_o tel que $x_o \varepsilon \Gamma_{i_1} \Gamma_{i_1, i_2} \Gamma_{i_1, i_2, i_3, \ldots}$

§ 8. Rangeons maintenant tous les groupes finis d'indices $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, où $i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots$, et $k = 1, 2, \ldots$, en une suite infinie:

$$I_1, I_2, \ldots,$$

en évitant des répetitions. Désignons par $N(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ l'indice qui correspond ainsi au groupe $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Outre cela écrivont les deux suites suivantes:

1; 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2,...

A (1), A (1), A (3), A (4), A (5), A (6), A (7) A (8),...

l'une au dessous de l'autre. — Dans la première suite chaque nombre naturel se trouve infini de fois. Soient

$$A[k, 1], A[k, 2], \ldots$$

tous les éléments de la deuxième suite, qui se trouvent au dessous des nombres k, et soit l'ordre de $A[k, l+1]$ supérieur à celui de la classe $A[k, l]$ et cela quelque soit k et l. On voit que, $k' \neq k''$, aucune classe de la suite

$$A[k', 1], A[k', 2] \ldots$$

n'intervient dans la suite

$$A[k'', 1], A[k'', 2] \ldots$$

et réciproquement.

Faisons correspondre au groupe $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ la suite

$$A\,[N(i_1, i_2, \dots, i_k), 1],\ A\,[N(i_1, i_2, \dots, i_k), 2], \dots$$

Nous pouvons ainsi attribuer à chaque groupe d'indices des différentes classes $A\,(k)$ d'ordre k autant élévé qu'on veut et de manière à ce qu'aucune classe $A\,(n)$ ne corresponde à deux différents groupes d'indices.

Cela posé, envisageons les ensembles $\langle \Gamma_{i_1} \rangle$, $(i_1 = 1, 2, \dots,)$ et les suites

$$A\,[N\,(i_1), 1],\ A\,[N\,(i_2), 2], \dots \tag{4}$$

correspondantes.

L'ensemble P est contenu dans la somme des intervalles constituant la classe $A\,(v)$, et cela est vrai pour n'importe quel v; donc $\langle \Gamma_{i_1} \rangle$, comme une partie de P, est à fortiori contenu dans la somme des intervalles, constituant la classe $A\,[N\,(i_1), s)$ et cela est vrai pour $s = 1, 2, \cdots$. Pour chaque i_1 choisissons un nombre $s = s\,(i_1)$ tel que tous les intervalles de la classe

$$A\,[N\,(i_1),\ s\,(i_1)\,] \tag{5}$$

aient la longuer $< \frac{1}{1}$. Ceci est possible, puisque la suite (4) contient des classes ayant l'ordre si élévé qu'on veut. Soit $t\,(i_1)$ l'ordre de la classe (5). Désignons par

$$Q[i_1, 1],\ Q\,[i_1, 2], \cdots Q\,[i_1, p\,(i_1)\,]$$

où $p\,(i_1) \geqslant 1$, tous les différents intervalles d'ordre $t\,(i_1)$ qui ont au moins un point commun avec $\langle \Gamma_{i_1} \rangle$.

On a

$$\langle \Gamma_{i_1} \rangle \subset Q[i_1, 1] + \dots + Q[i_1, p\,(i_1)\,] \subset S\left(\langle \Gamma_{i_1} \rangle, \frac{1}{1}\right)$$

En variant $i_1 = 1, 2, \dots$ on obtient ainsi un ensemble de couples $[i_1, v_1]$ que nous désignerons par Φ_1. v_1 admet ici des valeurs $1, 2, \dots$ en nombre fini $\geqslant 1$, ce nombre ne dépendant que de i_1. On voit que pour chaque $i_1 = 1, 2, \dots$ il existe au moins un couple, à savoir $[i_1, 1]$, appartenant à Φ_1.

Passons maintenant aux ensembles Γ_{i_1, i_2} à deux indices. L'un au moins des ensembles fermés:

$$Q[i_1, 1].\ \langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle,\ Q\,[i_1, 2]\,.\ \langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle, \dots$$

n'est pas vide, puisque $\langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle \neq 0$ et

$$\langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle \subset \langle \Gamma_{i_1} \rangle \subset Q[i_{j_1}, 1] + Q[i_2, 2] + \ldots. \tag{6}$$

Supposons que:

$$Q[i_1, v] \cdot \langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle \neq 0 \tag{7}$$

Envisageons la suite de classes d'intervalles:

$$A[N(i_1, i_2), 1],\ A[N(i_1, i_2), 2], \ldots \tag{8}$$

correspondant au groupe (i_1, i_2). L'ensemble (7) est contenu, dans la somme des intervalles constituant la classe $A[N(i_1, i_2), s]$ quelque soit s. N'envisageons que les s assez grands pour que tous les intervalles de la classe $A[N(i_1, i_2), s]$ aient la longueur inférieure à $\frac{1}{2}$. Outre cela déterminons $s = s(i_1, v, i_2)$ de sorte qu'aux différents v, satisfaisant à la condition (7), correspondent pour i_1 et i_2 fixes des différents $s(i_1, v, i_2)$ et que l'ordre de la classe $A[N(i_1, i_2), s(i_1, v, i_2)]$ soit supérieur à $t(i_1)$.

Cela est possible à faire, parce que, si l'on fixe i_1 et i_2, le nombre de v, satisfaisant à (7) est toujours fini et parce que dans la suite (8) il y a des classes d'ordre autant élévé qu'on veut.

Le nombre $s(i_1, v, i_2)$ étant ainsi attribué à l'ensemble $Q[i_1, v] \cdot \langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle \neq 0$, soient

$$Q([i_1, v], [i_2, 1]),\ Q([i_1, v], [i_2, 2]), \ldots \tag{9}$$

tous les différents intervalles de la classe

$$A[N(i_1, i_2),\ s(i_1, v, i_2)], \ldots \tag{10}$$

tels qu'ils aient au moins un point commun avec l'ensemble

$$Q[i_1, v] \cdot \langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle \neq 0.$$

Leur nombre est fini $\geqslant 1$ et ne dépend que de i_1, v et i_2. Désignons l'ordre de la classe (10) par $t([i_1, v], i_2)$.

D'après ce qui précède on a:

$$t([i_1, v], i_2) > t(i_1), \tag{11}$$

d'où

$$Q([i_1, v_1], [i_2, v_2]) \subset Q[i_1, v_1] \tag{12}$$

Outre cela on a:

$$t\,([i_1, v_1'], i_2) \neq t\,([i_1, v_1''], i_2)$$

chaque fois, où $v_1' \neq v_1''$.

On a, sous la condition (7):

$$Q\,[i_1, v]\,.\langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle \subset Q\,([i_1, v], [i_2, 1]) + Q\,([i_1, v], [i_2, 2]) + \dots$$

$$\subset S\left(Q\,[i_1, v]\,.\langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle, \frac{1}{2}\right).$$

En procédant ainsi avec tous les ensembles (7), non vides, on obtient un ensemble Φ_2 des groupes d'indices:

$$([i_1, v_2^1], [i_1, v_2]),$$

et cet ensemble jouit des propriétés suivantes:

1) pour chaque groupe d'indices (i_1, i_2), où $i_1, i_2 = 1, 2, \dots$ il existe au moins un groupe $([i_1, v_1], [i_2\, v_2])$ appartenant à Φ_2.

2) pour chaque groupe (i_1, i_2) le nombre des différents groupes $([i_1, v_1], [i_2, v_2])$ appartenant à Φ_2 est fini,

3) si $([i_1, v_1], [i_2, v_2])$ appartient à Φ_2, le groupe $[i_1, v_1]$ appartient à Φ_1,

4) les ensembles $Q\,([i_1, v_1], [i_2, v_2])$ ne sont définis que pour les groupes appartenant à Φ_2,

5) $Q\,([i_1, v_1], [i_2, v_2]) \subset Q\,[i_1, v_1]$,

6) si les groupes $[i_1', v_1'], i_2'$ et $[i_1'', v_1''], i_2''$ ne sont pas identiques, les rangs des intervalles

$$Q\,([i_1', v_1'], [i_2', v_2']),\ Q\,([i_1'', v_1''], [i_2'', v_2''])$$

ne sont pas différents entre eux, quelque soient v_2' et v_2'',

7) le rang des différents intervalles $Q\,([i_1, v_1], [i_2, v_2])$ pour les i_1, v_1 et i_2 fixes est toujours le même et égal à $t\,([i_1, v_1], i_2)$, qui est un nombre supérieur à $t\,(i_1)$,

8) $Q\,([i_1, v_1], [i_2, v_2]) \subset S\left(Q\,[i_1, v_1] \cdot \langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle, \frac{1}{2}\right)$

9) $\langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle \subset \sum\limits_{\Phi_2} Q\,([i_1, v_1], [i_2, v_2]) \subset S\left(\langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle, \frac{1}{2}\right)$

a sommation étant étendue à tous les groupes $([i_1, v_1], [i_2, v_2])$ avec les i_1 et i_2 fixes et v_1 et v_2 variables de sorte que les groupes appartiennent à Φ_2.

10) Si deux groupes I' et I'' appartenant à $\Phi_1 + \Phi_2$ ne sont pas identiques, les ensembles $Q[I']$, $Q[I'']$ correspondants sont différents.

11) Le rang de chaque intervalle $Q(I')$ où $I \varepsilon \Phi_2$ est différent du rang de n'importe quel intervalle $Q(I'')$, où $I' \varepsilon \Phi_1$.

Procédons d'une manière analogue sur les ensembles Γ_{i_1, i_2, i_3}, ce qui nous donne des groupes $([i_1, v_1], [i_2, v_2], [i_3, v_3])$ et les ensembles Q correspondant, et ainsi de suite.

§ 9. D'une manière générale, supposons que nous avons déjà obtenu l'ensemble Φ_k des groupes:

$$([i_1, v_1], [i_2, v_2], \ldots, [i_k, v_k])$$

et défini les ensembles $Q[(i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k])$ correspondantes où $k \geqslant 2$. Supposons qu'on a établi les propriétés suivantes:

1) pour chaque groupe à k indices $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ il existe au moins un groupe

$$([i_1, v_1], [i_2, v_2], \ldots, [i_k\, v_k])$$

appartenant à Φ_k.

2) pour chaque groupe à k indices $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ le nombre des différents groupes $([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k])$ appartenant à Φ_k est fini.

3) si le groupe $([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}], [i_k, v_k])$ appartient à Φ_k le groupe $([i_1, v_1], \cdots [i_{k-1}, v_{k-1}])$ appartient à Φ_{k-1},

4) les intervalles $Q([i_1, v_1], \cdots [i_k, v_k])$ ne sont définis que pour les groupes appartenant à Φ_k.

5) $Q([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}], [i_k, v_k]) \subset$
$\subset Q([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}])$.

6) si les deux groupes $([i'_1, v'_1], \ldots, [i'_{k-1}, v'_{k-1}], i'_k)$ et $([i''_1, v''_1], \cdots [i''_{k-1}, v''_{k-1}], i''_k)$ ne sont pas identiques, les deux intervalles

$$Q([i'_1, v'_1], \ldots, [i'_{k-1}, v'_{k-1}], [i'_k, v'_k])$$

$$Q([i_1'', v_1''], \ldots, [i_{k-1}'', v_{k-1}''], [i_k'', v_k''])$$

sont de rangs différents et cela quelque soient v_k' et v_k''.

7) Le rang des différents intervalles

$$Q([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}], [i_k, v_k])$$

pour les $i_1, v_1, \ldots, i_{k-1}, v_{k-1}, i_k$ fixes est indépendant de v_k et égal è $t([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}], i_k)$, qui est un nombre supérieur à

$$+([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-2}, v_{k-2}], i_{k-1})$$

dans le cas où $k > 2$, et supérieur à $t(i_1)$ dans le cas où $k = 2$.

8) $Q([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}], [i_k, v_k] \subset$

$$\subset S\left(Q([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}]), \langle \Gamma_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \rangle, \frac{1}{k}\right),$$

9) $\langle \Gamma_{i_1, \ldots, i_k} \rangle \subset \sum_{\Phi_k} Q([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k]) \subset$

$$\subset S\left(\langle \Gamma_{i_1, \ldots, i_k} \rangle, \frac{1}{k}\right)$$

10) Si deux groupes I', I'', appartenant à $\sum_{\lambda=1}^{k} \Phi_\lambda$ ne sont pas identiques, les ensembles $Q(I')$, $Q(I'')$ correspondant sont différents.

11) Le rang de chaque intervalle $Q(I')$ où $I' \varepsilon \Phi_k$ est différent du rang de n'importe quel intervalle $Q(I'')$ où $I'' \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{k-1} \Phi_\lambda$.

Nous allons démontrer ces propiétés pour $k+1$. Envisageons un groupe fixe à k indices: $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ et désignons le par I. Soit i_{k+1} un entier positif arbitraire. On a:

$$\langle \Gamma_{I, i_{k+1}} \rangle \subset \langle \Gamma_I \rangle.$$

d'où en vertu de l'hypothèse 9):

$$\langle \Gamma_{I, i_{k+1}} \rangle \subset \sum_{\Phi_k} Q([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k]). \langle \Gamma_{I, k+1} \rangle$$

et comme $\langle \Gamma_{I, i_{k+1}} \rangle \neq 0$, il existe au moins un groupe $([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k])$ appartenant à Φ_k et tel que:

$$\langle \Gamma_{l,\, i_{k+1}} \rangle \cdot Q\,([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k]) \neq 0 \ldots \tag{14}$$

Envisageons tous les groupes $([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k])$, appartenant à Φ_k et satisfaisant à l'inégalité (14)

Le nombre de ces groupes est fini pour I fixe, ce qui découle de la propriété 2).

Envisageons la suite:

$$A\,[N(I, i_{k+1}), 1],\ \ A\,[N(I, i_{k+1}), 2], \ldots, \tag{15}$$

de classes corespondantes au groupe (I, i_{k+1}). L'ensemble (14), comme un sous-ensemble de P est contenu dans la somme des intervalles constituant la classe

$$A\,[N(I, i_{k+n}), s], \tag{16}$$

quelque soit $s = 1, 2, \ldots$ et le groupe $v_1, v_2, \ldots, v_k$, considéré. Choisissons s assez grand pour que tous les intervalles de la classe (16) aient la longueur inférieure à $\frac{1}{k+1}$. Cela est possible, puisque l'ordre des classes (16) s'augmente indéfiniment si $s \to \infty$ et le nombre de groupes $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en question est fini, les I et i_{k+1} étant supposés fixes. En ne considérant que ces s, assez grands, faisons correspondre à chaque groupe $v_1, v_2, \ldots, v_k$ un nombre $s = s\,(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tel que:

α) l'ordre de classes

$$A\,[N(I, i_{k+1}),\ s\,(v_1, \ldots, v_k)]$$

soit supérieur à $t\,([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}], i_k)$. (Cette condition à un sens, puisque d'après l'hypothèse 3) le groupe $([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}])$ appartient à Φ_{k-1} et par conséquent le nombre $t\,([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}], i_k)$ est bien défini par 7)).

β) les ordres de deux classes

$$A\,[N(I,\ i_{k+1}),\ s\,(v'_1, \ldots, v'_k)]$$

$$\text{et } A\,[N(I,\ i_{k+1}),\ s\,(v''_1, \ldots, v''_k)]$$

soient différents chaque fois où les groupes

$$(v'_1, \ldots, v'_k) \text{ et } (v''_1, \ldots, v''_k) \text{ sont différents.}$$

La condition α) pout être evidemment satisfaite pour chaque v_k si l'on prend s suffisamment grand. Quant à β), cette condition peut être satisfaite, puisque le nombre de tous les groupes $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ en question est fini d'après ce que nous avons dit plus haut.

Les nombres $s = s(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ainsi fixés, désignons par $t([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k], i_{k+1})$ l'ordre de la classe

$$A[N(I, i_{k+1}), s(v_1, v_2, \ldots, v_k)] \tag{17}$$

On a

$$t([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}], [i_k, v_k], i_{k+1}) > \\ > t([i_1, v_1], \ldots, [i_{k+1}, v_{k-1}], i_k) \tag{18}$$

Les classes (17) étant ainsi attribuées aux ensembles

$$\langle \Gamma_{I, i_{1+1}} \rangle \cdot Q([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k]) \neq 0 \tag{14}$$

non vides, soient

$$\left.\begin{array}{l} Q \subset [i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k], [i_{k+1}, 1], \\ Q \subset [i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k], [i_{k+1}, 2], \end{array}\right\} \tag{19}$$

tous les différents intervalles de la classe (17), tels qu'ils aient au moins un point commun avec l'ensemble (14). Il y en existe au moins un intervalle.

Le nombre des intervalles (19) est fini et $\geqslant$ J.

En procédant ainsi pour tous les groupes $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1})$ possibles et tous les $v_1, v_2 \cdots, v_k$ tels que l'inégalité (14) soit satisfaite, on obtient les ensembles $Q([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k], [i_{k+1}, v_{k+1}])$ et les groupes $([i_1, v_1], \ldots, [i_{k+1}, v_{k+1}])$ y correspondantes.

Désignons par Φ_{k+1} l'ensemble de tous ces groupes à $k+1$ couples d'indices.

On voit que les Q à $k+1$ couples d'indices ne sont définis que pour les groupes appartenant à Φ_{k+1} ce qui exprime la propriété 4) pour $k+1$ couples d'indices.

De ce que nous avons dit il résulte immédiatement que les propriétés 1), 2), 3), subsistent pour les groupes à $k+1$ couples d'indices.

La propriété 5), c'est-à-dire

$$Q([i_1, v_1], \ldots, [i_{k+1}, v_{k+1}]) \subset Q([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k])$$

subsiste, puisque l'ordre de l'intervalle du premier membre est $t([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k], i_{k+1})$ et celui du second membre est

$t\,([i_1, v_1], \ldots, [i_{k-1}, v_{k-1}], i_k)$ et nous savons que le premier nombre est plus grand que le deuxième en vertu de α).

Nous avons à la fois démontré 7).

Sous la condition (14) on a, par définition, des ensembles Q a $k+1$ couples d'indices:

$$\langle \Gamma_{l, i_{k+1}} \rangle \,.\, Q \langle [i_1, v_1], \cdots, [i_k, v_k] \rangle \subset$$

$$\subset Q\,([M], [i_{k+1}, 1]) + Q\,([M], [i_{k+1}, 2]) + \cdots$$

où $[M]$ désigne le groupe $([i_1, v_1], \cdots, [i_k, v_k])$.

Mais on a choisi dans (16) le nombre s assez grand, pour que tous les intervalles de la classe (16) soient de longueur $< \dfrac{1}{k+1}$.

Il s'ensuit que:

$$Q\,([M], [i_{k+1}, v]) \subset S\left(\langle \Gamma_{l, i_{k+1}} \rangle \,.\, Q\,[M], \frac{1}{k+1}\right)$$

$$\text{pour } v = 1, 2, \ldots$$

et c'est précisément la propriété 8) pour $k+1$.

On a donc:

$$\langle \Gamma_{l, i_{k+1}} \rangle \,.\, Q\,[M] \subset \sum_v Q\,([M], [i_{k+1}, v]) \subset$$

$$\subset S\left(\langle \Gamma_{l, i_{k+1}} \rangle \,.\, Q\,[M], \frac{1}{k+1}\right)$$

En sommant ces relations pour tous les $v_1, v_2, \ldots, v_k\ v$, pour lesquels le groupe $[M], [i_{k+1}, v]$ appartient à Φ_{k+1}, on obient:

$$\langle \Gamma_{l, i_{k+1}} \rangle \subset \sum_{\Phi_{k+1}} Q\,(L_{i_1}, v_1), \cdots, [i_{k+1}, v_{k+1}]) \subset$$

$$\subset S\left(\langle \Gamma_{l, k+1} \rangle, \frac{1}{k+1}\right),$$

c'est-à-dire la propriété 9) pour $k+1$,

Les propriétés restantes sont aisées à démontrer.

§ 10. Pour éviter dans la suite, des symboles extrêmement lourds faisons un changement de l'écriture. En ne considérant à présent que les groupes $[i_2, v_2]$, appartenant à Φ_1, rangeons-les, en évitant des répétitions, dans une suite infinie simple:

$$[1, 1],\ [1, 2], \cdots;\ [2, 1],\ [2, 2], \cdots; \cdots .\ [i_r, 1],\ [i_r, 2],$$

Désignons par $\mu(n_1)$ l'intervalle $Q[i_1, v_1]$, tels que le groupe $[i_1, v_1]$ occupe la n_1-ième place dans la suite que nous venons d'écrire.

Fixons un intervalle

$$\mu(n_1) = Q[i_1, v_1]$$

et envisageons tous les groupes $([i_1, v_1], [i_2, v_2])$ appartenant à Φ_2, dans lesquels $[i_1, v_1]$ reste fixe, n. b. si de tels groupes existent. Comme plus haut, on peut tous ces groupes ranger dans une suite simple, finie ou infinie:

$$([i_1, v_1], [1, 1]), ([i_1, v_1], [1, 2]), \ldots; ([i_1\ v_1], [i_2, 1]) \ldots$$

Désignons par $\mu(n_1\ n_2)$ l'intervalle $Q([i_1, v_1], [i_2, v_2])$ dont le groupe d'indices occupe le n_2-ième place dans notre suite.

D'une manière analogue on procédera avec les intervalles ayant des groupes à trois couples d'indices, et ainsi de suite. Nous supprimons le procédé inductif, bien facile. On obtient ainsi un système d'intervalles

$$\{\mu(n_1, n_2, \ldots, n_k)\}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$, où $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ne prennent que des valeurs consécutifs 1, 2,... en nombre fini on infini, suivant le cas. Pour chaque $k = 1, 2, \ldots$ il y en a au moins un intervalle μ avec k indices, puisque pour chaque groupe d'indices $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ il y a au moins un groupe $([i_1\ v_1], \ldots, [i_k\ v_k])$ appartenant à Φ_k. On voit aussi que si les intervalles $\mu(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ et $\mu(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1})$ sont définis, on a

$$\mu(i_1, \ldots, i_{k+1}) \subset \mu(i_1, \ldots, i_k).$$

La somme des longueurs de tous les μ est finie.

Posons $\mu(n_1, n_2, \ldots, n_k) \underset{df}{=} 0$ toutes les fois où l'intervalle $\mu(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ n'était pas défini jusqu'ici.

Nous allons démontrer que l'ensemble T pro E' est le noyau du système déterminant

$$\{\mu(n_1, n_2, \ldots, n_k)\}$$

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots), \ (k = 1, 2, \ldots)$$

En effet, soit

$$x_o \,\varepsilon\, \mu\,(n_1) \,.\, \mu\,(n_1, n_2) \ldots .$$

Par conséquent, aucun des μ dans le second membre n'est pas vide.

Il existe donc une suite infinie des nombres naturels:

$$i_1, v_1, i_2, v_2, \ldots,$$

telle que:

$$\mu\,(n_1) = Q\,([i_1, v_1])$$
$$\mu\,(n_1, n_2) = Q\,([i_1, v_1], [i_2, v_2]).$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

On a donc $x_0 \,\varepsilon\, Q\,([i_1, v_1], \ldots, [i_k\, v_k])$, pour $k = 1, 2, \ldots$

Comme

$$Q\,([i_1, v_1], \ldots, [i_k, v_k]) \subset S\left(\langle \Gamma_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \rangle, \frac{1}{k}\right)$$

il s'ensuit que la distance du point x_0 de n'importe quel point de l'ensemble $\Gamma_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ est inférieure à $\frac{2}{k} + \eta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, où $\eta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ désigne le diamètre de l'ensemble $\Gamma_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$.

Mais on sait qu'il existe un point x_0' et un seul appartenant à T pro E', pour lequel on a:

$$x_0' \,\varepsilon\, \Gamma_{i_1} \,.\, \Gamma_{i_1, i_2} \ldots$$

Par conséquent la distance de deux points x_0 et x_0' est $< \frac{2}{k} + \eta_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$. Le diamètre de l'ensemble $\Gamma_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ tend vers 0 si $k \to \infty$, donc la distance des points x_0 et x_0' est si petit que l'on veut et par conséquent, $x_0 = x_0'$, d'où $x_0 \,\varepsilon\, T$ pro E'.

Soit réciproquement $x_0 \,\varepsilon\, T$ pro E'. Il existe alors une suite infinie d'indices $i_1, i_2, \ldots$, telle que

$$x_0 \,\varepsilon\, \Gamma_{i_1} \,.\, \Gamma_{i_1, i_2}, \ldots$$

Nous avons

$$\langle \Gamma_{i_1} \rangle \subset \sum_v Q\,[i_1, v].$$

Il existe donc un nombre v_1 (et un seul), tel que

$$x_0 \varepsilon Q[i_1, v_1] \text{ et } [i_1, v_1] \varepsilon \Phi_1.$$

Donc

$$x_0 \varepsilon \langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle . Q[i_1, v_1]$$

d'où $$\langle \overline{\Gamma_{i_1, i_2}} \rangle . Q[i_1, v_1] \neq 0.$$

Mais, comme dans ce cas on a:

$$\langle \Gamma_{i_1, i_2} \rangle . Q[i_1, v_1] \subset \sum_v Q([i_1, v_1], [i_2, v]),$$

il existe un nombre v_2, tel que

$$x_0 \varepsilon Q([i_1, v_1], [i_2, v_2]),$$

où $$([i_1, v_1], [i_2, v_2]) \varepsilon \Phi_2.$$

On en tire:

$$x_0 \varepsilon Q([i_1, v_1], [i_2, v_2]) . \langle \Gamma_{i_1, i_2, i_3} \rangle \neq 0,$$

d'où on obtient que pour un certain v_3:

$$x_0 \varepsilon Q([i_1, v_1], [i_2, v_2], [i_3, v_3])$$

et ainsi de suite.

On peut procédér ainsi indéfiniment en y appliquant le principe d'induction, ce qui nous donne l'existence d'une suite infinie $v_1, v_2, \ldots$ pour laquelle:

$$x_0 \varepsilon Q[i_1, v_1] . Q([i_1, v_1], [i_2, v_2]) \ldots .$$

Il s'ensuit qu'il existe une suite infinie d'indices $n_1, n_2 \ldots$, telle que

$$x_0 \varepsilon \mu(n_1 . \mu(n_1, n_2) \ldots .$$

c'est-à-dire: x_o appartient au noyau du système déterminant $\{\mu(n_1, \ldots, n_k)\}$. Rappelons que tous les μ non vides, sont des intervalles fermés.

§ 11. Nous aurons besoin d'un système déterminant composé d'intervalles ouverts. Pour en avoir un, posons

$$\langle a_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, b_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \rangle \underset{df}{=} \mu(n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

$$\text{si } \mu(n_1, n_2, \ldots, n_k) \neq 0, \tag{20}$$

et choisissons (ce qui est facile à faire), un système de nombres positifs

$$\{\varepsilon_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$$

tel que

1) $$\varepsilon_{n_1, n_2, \ldots, n_k} < \frac{1}{k}$$

2) $$\Sigma\, \varepsilon_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \text{ est finie}$$

3) $$\varepsilon_{n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}} < \varepsilon_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

la sommation étant étendue à tous les possibles groupes $(n_1, n_1, \ldots, n_k)$ d'indices.

Si l'on pose pour les groupes d'indices satisfaisant à (20):
$\mu'(n_1, n_2, \ldots, n_k) \underset{df}{=} (a_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \varepsilon_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, b_{n_1, n_2, \ldots, n_k} + \varepsilon_{n_1, n_2, \ldots, nk})$
et pour les autres groupes $\mu'(I) \underset{df}{=} 0$,
on obtient un nouveau système déterminant

$$\{\mu'(n_1, n\,, \ldots, n_k)\}, \ (n_1, n_2, \ldots, \ n_k = 1, 2, \ldots) \ (k = 1, 2, \ldots) \quad (21)$$

dont le noyau est identique à T pro E'[1]) On peut remarquer que, si l'on forme le système déterminant $\{\langle \mu'(n_1 \ldots n_k) \rangle\}$, on obtient le même noyau. La somme des longueurs de tous les intervalles du système (21) reste finie. On a

$$\langle \mu'(n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}) \rangle \subset \mu'(n_1, \ldots, n_k)$$

en vertu de la condition 3) imposée aux ε_i. On voit de plus que la somme de tous les intervalles μ' est un ensemble borné.

§ 12. Ayant achevé tous les préparatifs, passons á la construction principale.

---

[1]) En effet, désignons par E'' le noyau de (21). Soit $x_0 \varepsilon E''$. Alors il existe une suite infinie d'indices $n_1, n_2, \ldots$ telle que $x_0 \varepsilon \mu'(n_1)$. $. \mu'(n_1, n_2) \ldots$.. Les $\mu(n_1, \ldots, n_k)$ n'étant pas vides, les $\mu(n_1, \ldots, n_k)$ correspondants ne le sont non plus. Les $\mu(n_1, \ldots, n_k)$ étant des intervalles formés et comme $\mu(n_1) \supset \mu(n_1, n_2) \supset \ldots$, il existe un point x_0', tel que $x_0' \varepsilon \mu(n_1) . \mu(n_1, n_2) \ldots$.. Le point x_0' est unique, puisque mes $\mu(n_1, n_2, \ldots, n_k) \to 0$ pour $k \to \infty$. On voit que la distance de deux points x_0 et x_0' et inférieure à $2\varepsilon_{n_1, n_2, \ldots, n_k} +$ mes $\mu(n_1, \ldots, n_k)$, quelque soit k et par conséquent $x_0 = x_0'$.

Désignons par N la classe de tous les groupes d'indices $(n_1, n_2, \dots n_k)$, pour lesquelles

$$\mu'(n_1, n_2, \dots, n_k) \neq 0$$

et pour lesquelles il existe une suite infinie d'indices

$$n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots$$

telle que

$$\mu'(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+l}) \neq 0.$$

quelque soit $l = 1, 2, \dots$

D'après ce qui précède on voit que la classe N n'est pas vide.

Dans la formation du noyau du système déterminant $\{\mu'(n_1 \dots n_k)\}$ ce sont seulement les $\mu'(n_1, \dots, n_k)$ où $(n_1, \dots, n_k) \varepsilon N$, qui jouent un rôle.

Soit (a, b) un intervalle de l'axe x, dans lequel sont renfermés tous les intervalles $\langle \mu_I \rangle$. Définissons:

$$W \underset{df}{=} \widehat{xy} \left\{ \begin{matrix} y > -x + a \\ y > x - b \end{matrix}, \; y > 0 \right\}.$$

W est un U-domaine appartenant au segment (a, b), limité par les demidroites:

$$\widehat{xy}\{y \geqslant 0, y = -x + a\} \text{ et } \widehat{xy}\{y \geqslant 0, y = x - b\}.$$

La somme des longueurs de tous les intervalles $\mu'(n_1, n_2, \dots, n_k)$, $(k = 1, 2, \dots,)$ étant finie, on y peut appliquer le lemme II. A chaque intervalle $\mu'(n_1, n_2, \dots, n_k) \neq 0$, où $(n_1, n_2, \dots, n_k) \varepsilon N$, on peut donc attribuer un U-domaine $W(n_1, n_2, \dots, n_k)$ appartenant à $\mu'(n_1, n_2, \dots, n_k)$ de sorte que, si l'on supprime un nombre fini convenable de ces domaines, les suivantes conditions soient satisfaites:

1) $W(n_1, n_2, \dots, n_k) \subset W$,

2) si I et I' sont deux différents groupes d'indices, appartenant à N, on aura:

$$\langle W(I) \rangle . W \langle (I') \rangle . \widehat{xy}\{y \geqslant 1\} = 0.$$

3) l'angle de la divergence de chaque tube W_l est inférieure à $\sigma_1 > 0$, où σ_1 est un nombre qui ne sera précisé que plus tard.

Le nombre des intervalles supprimés étant fini, il existe certainement un nombre q tel qu'aucun intervalle $\mu'(l'')$ ayant q indices n'appartient pas aux intervalles supprimés. Soient:

$$\mu'(I_1),\ \mu'(I_2),\ldots..$$

tous les intervalles à q indices. Leur nombre est nécessairement $\geqslant 1$ en vertu des résultats obtenus plus haut. Désignons par

$$W^{(1)}(I_1),\ W^{(1)}I(_2),\ldots$$

les U domaines y correspondantes. Envisageons le système:

$$(\mu'(I_{s_1},\ n_{q+1},\ldots\ n_{q+k})\} \tag{22}$$

composé de tous les intervalles $\mu'(I_{s_1},\ n_{q+1},\ n_{q+k}) \neq 0$, où I_{s_1} reste fixe et $k=1,\ 2,\ldots$ (Le nombre s_1 est égal à une des valeurs 1, 2,...)

Les intervalles du système (22), même si l'on les ferme, sont contenus dans $\mu'(I_{s_1})$ et la somme de leurs longueurs est finie. Appliquons le raisonnement précédent relativement au U-domaine $W(I_{s_1})$ et aux intervalles (22).

En vertu du même lemme on peut à chaque intervalle $\mu'(I_{s_1},\ n_{q+1}\ldots n_{q+k})$ attribuer un U-domaine $W^{(2)})I_{s_1},\ n_{q+1},\ldots n_{q+k})$ appartenant à cet intervalle et de sorte que, si l'on en supprime un nombre fini convenable de ces domaines, on aurait:

1) $W^{(2)}(I_{s_1},\ n_{q+1},\ldots,n_{q+k}) \subset W(I_{s_1})$,

2) si l' et l'' sont deux différents groupes d'indices, tels que $(I_{s_1},\ l') \varepsilon N$ et $(I_{s_1},\ l'') \varepsilon N$, on a:

$$\langle W(I_{s_1},l')\rangle \cdot \langle W(I_{s_2},\ l'')\rangle \cdot \widehat{xy}\{y \geqslant 2\} = 0.$$

3) l'angle de la divergence des tubes $W(I_{s_1},\ l)$ est inférieur à $\sigma_2 > 0$, où σ_2 ne sera précisé que plus tard.

Le nombre d'intervalles que l'on doit supprimer ne dépend que de s_1. Il existe un nombre $q\ (s_1)$ tel qu'aucun intervalle $\mu'(I_{s_1},l)$ à $q+q\ (s_1)$ indices, dont le cortège commence par I_{s_1}, n'appartienne aux intervalles supprimés. Soient

$$\mu'(I_{s_1},\ I_1^{(s_1)}),\ \mu'\ (I_{s_1},\ I_2^{(s_1)}),\ \mu'(I_{s_1},\ I_3^{(s_1)}),$$

tous les intervalles dont le cortège d'indices commence par I_{s_1} et possède $q+q\ (s_1)$ indices.

Désignons par

$$W^{(2)}\ (I_{s_1},\ I_1^{(s_1)}),\ W^{(2)}(I_{s_1},\ I_2^{(s_1)}),\ \cdots$$

les U-domaines correspondants.

On peut répéter notre procédé en partant du domaine $W^{(2)}\ (I_{s_1},\ I_{s_2}^{(s_1)}),\ (s_2=1,2,\ldots)$, ce qui nous donne les domaines:

$$W^{(3)}\ (I_{s_1},\ I_{s_2}^{(s_1)},\ I_{s_3}^{(s_1,\ s_2)}),\ (s_3=1,2,\ldots)$$

en nombre fini où infini suivant le cas.

Le nombre d'indices de ces domaines est égal à

$$q+q\ (s_1)+q(s_1,s_2),$$

où $\qquad q(s_1,s_2)\geqslant 1.$

Ces domaines satisfont aux conditions suivantes:

1) $W^{(3)}\ (I_{s_1},\ I_{s_2}^{(s_1)}\ I_{s_3}^{(s_1,\ s_2)} \subset\ W^{(2)}\ (I_{s_1},\ I_{s_2}^{(s_1)}),$

2) si les deux groupes $I_{s_3}^{'\,(s_1,\ s_2)}$ et $I_{s_3}^{''\,(s_1,\ s_2)}$ sont différents, on a:

$$\langle W^{(3)}\ (I_{s_1},\ I_{s_2}^{(s_1)},\ I_{s_2}^{'\,(s_1,\ s_2)}) \rangle\ \langle\ W^{(3)}\ (I_{s_1}, I_{s_2}^{(s_1)}, I_{s_3}^{''\,(s_1,\ s_2)}\ \rangle \widehat{xy} \{ y \geqslant 3 \} = 0.$$

3) l'angle de divergence de ces tubes est inférieur à $\sigma_3 > 0$.

§ 13. En y appliquant le principe d'induction on obtient pour chaque nombre naturel k les U-domaines:

$$W^{(k)}\left(I_{s_1}, I_{s_2}^{(s_1)}, I_{s_3}^{(s_1, s_2)}, \dots, I_{s_k}^{(s_1, s_2, \dots s_{k-1})}\right)$$

que nous désignerons d'une manière plus commode par

$$T(s_1, s_2, \dots, s_k),$$

et qui satisfont aux conditions suivantes:

1) $T(s_1, s_2, \dots, s_{k+1}) \subset T(s_1, s_2, \dots, s_k)$

2) $\langle T(s_1, s_2, \dots, s_k') \rangle \cdot \langle T(s_1, s_2, \dots, s_k'') \rangle \cdot$

$$\widehat{xy}\left\{ y \geqslant k \right\} = 0$$

chaque fois, où $s_k' \neq s_k''$.

3) L'angle de divergence des tubes $T(s_1, \dots, s_k)$ est inférieur à $\sigma_k > 0$; c'est un nombre que l'on ne précisera que plus tard.

Il n'est pas sûr que pour chaque groupe d'indices $(s_1, s_2, \dots, s_k)$, quels que soient ces indices, il y a un T correspondant, mais on sait, que pour chaque k il existe un T ayant k indices. $T(s_1, s_2, \dots, s_k)$ est un U-domaine relatif à l'intervalle

$$E_{s_1, s_2, \dots, s_k} \underset{dj}{=} \mu' \left(I_{s_1}, I_{s_2}^{(s_1)}, \dots, I_{s_k}^{(s_1, s_2, \dots, s_{k-1})}\right)$$

Si l'on pose

$E_{s_1, s_2, \dots, s_k} = 0$ chaque fois, où le symbole $T(s_1, s_2, \dots, s_k)$ n'est pas défini, on obtient un système déterminant

$$\{E_{s_1, s_2, \dots, k}\}$$

$$(s_1, s_2 \dots, s_k = 1, 2, \dots), \ (k = 1, 2, \dots) \tag{23}$$

Je dis que le noyau de ce système (23) est identique à T pro E'.

En effet, désignons par E'' le noyau du système (23). Supposons que $x_o \varepsilon T$ pro E'. Il y existe une suite infinie d'indices $n_1, n_2, \dots$, telle que

$$x_o \ \varepsilon \ \mu'(n_1) \cdot \mu'(n_1, n_2) \dots$$

Par conséquent, $(n_1) \ \varepsilon \ N$, $(n_1, n_2) \ \varepsilon \ N, \dots$

Il existe un nombre s_1, tel que

$$I_{s_1} = (n_1, n_2, \dots n_2)$$

puisque dans la suite $I_1, I_2, \ldots$ se trouvent tous les groupes de q indices, groupes appartenant à N.

Il existe un nombre s_2 tel que:

$$(I_{s_1}, I_{s_2}^{(s_1)}) = (n_1, \ldots, n_q, \ldots, n_{q+q(s_1)}),$$

ce qu'on démontre de la même manière. De proche en proche, on démontre l'existence d'un nombre s_k, tel que

$$(I_{s_1}, I_{s_2}^{(s)}, \ldots, I_{s_k}^{(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1})}) =$$

$$= (n_1, n_2, \ldots, n_{q+q(s_1)+\ldots+q(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1})})$$

et cela quelque soit $k \geqslant 1$.

Il s'ensuit que:

$$x_o \varepsilon E(s_1) \,.\, E(s_2, s_2) \ldots$$

c'est-à-dire: $x_o \varepsilon E''$.

Supposons maintenant que $x'_o \varepsilon E''$. Il existe donc une suite infinie $s_1, s_2, \ldots$, telle que

$$x'_o \varepsilon E_{s_1} \,.\, E_{s_1, s_2} \ldots$$

Par conséquent,

$$x'_o \varepsilon \mu'(I_{s_1}, I_{s_2}^{(s_1)}, \ldots, I_{s_k}^{(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1})})$$

pour $k = 1, 2, \ldots$

Les I désignent des groupes d'indices et on a:

$$I_{s_1} = (n_1, \ldots, n_q)$$

$$I_{s_2}^{(s_1)} = (n_{q+1}, \ldots, n_{q+q(s_1)})$$

$$\ldots\ldots$$

Donc il existe une suite infinie d'indices

$$n_1, n_2, \ldots$$

telle que

$$x'_o \varepsilon \mu'(n_1, n_2, \ldots, n_{q+q(s_1)+\ldots+q(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1})})$$

quelque soit $k = 1, 2, \ldots$

Mais on sait que $\mu'(i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}) \subset \mu'(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, pour n'importe quels indices. Par conséquent

$$x'_o \varepsilon \mu'(n_1) \,.\, \mu'(n_1, n_2) \ldots$$

c'est-à-dire

$$x'_o \varepsilon T \text{ pro } E'.$$

§ 14. Nous avons ainsi démontré que T pro E' est le noyau du système déterminant

$$\{E_{s_1, s_2, \ldots, s_k}\} \tag{23}$$

$$(s_1, s_2, \ldots, s_k = 1, 2, \ldots), \ (k = 1, 2, \ldots)$$

Cela posé, définissons:

$$W' \underset{df}{=} \widehat{xy} \left\{ \begin{matrix} y < 0, \ y < x - a \\ y < -x + b \end{matrix} \right\}.$$

C'est un domaine limité par le segment $\langle a, b \rangle$ et par les deux demi-droites:

$$\widehat{xy} \{ y = x - a, \ y \leqslant 0 \}$$

$$\widehat{xy} \{ y = -x + b, \ y \leqslant 0 \}.$$

Désignons par Ψ_k la classe de tous les groupes de k indices $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ pour lesquelles $T(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ est défini.

Définissons:

$$H \underset{df}{=} W' + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\Psi_k} \left[\widehat{x, y} \{ y < k \}. \ T(s_1, s_2, \ldots, s_k) + \right.$$
$$\left. + E(s_1, s_2, \ldots, s_k) \right]$$

Je dis que l'ensemble H et un (G) tel que la somme de toutes droites illimitées, contenues dans H, forme un ensemble (A) qui n'est pas mesurable (B). Pour nous en convaincre faisons d'abord une remarque. Soit T' un U-domaine appartenant à l'intervalle (p, q), situé dans l'intervalle (a, b). Si une droite l est contenue dans l'ensemble

$$W' + (p, q) + T', \tag{24}$$

elle coupe nécessairement l'intervalle (p, q).

On voit tout de suite que l'ensemble (24) est un ensemble ouvert c'est-à-dire un ensemble (G).

L'ensemble H est un (G). En effet:

$W' = W' \cdot \widehat{xy}\{y < k\}$ et $E(s_1,\dots, s_k) = \widehat{xy}\{y < k\} \cdot E(s_1,\dots, s_k)$,

d'où

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\Psi_k} [W' + T(s_1,\dots, s_k) + E(s_1,\dots s_k)] \cdot \widehat{xy}\{y < k\}$$

L'ensemble $W' + T(s_1,\dots, s_k) + E(s_1,\dots, s_k)$ est un ensemble (G) d'après la remarque précédente. Par conséquent

$$[W' + T(s_1,\dots, s_k) + E(s_1,\dots, s_k)] \cdot \widehat{xy}\{y < k\}$$

est un ensemble (G), ce qui nous donne que H est un (G).

§ 15. Soit maitenant l une ligne droite, contenue dans H. Comme $T(s_1,\dots, s_k) \subset W$ (voir p. 69) et $E(s_1,\dots, s_k) \subset (a, b)$ on obtient:

$$H \subset W + (a, b) + W'.$$

d'où il s'ensuit, en vertu de notre remarque, que

$$l \cdot (a, b) \neq 0.$$

La demi-droite $l \cdot \widehat{xy}\{y > 0\}$ est contenue dans

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\Psi_k} \widehat{xy}\{y < k\} \cdot T(s_1,\dots, s_k),$$

d'où à fortiori, dans

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\Psi_k} T(s_1,\dots, s_k).$$

Mais on sait que:

$$T(s_1,\dots, s_k) \subset T(s_1 \dots s_{k-}) \subset \dots T(s_1),$$

d'où

$$l \cdot \widehat{x_1 y}\{y > 0\} \subset \sum_{\Psi_1} T(s_1).$$

Donc

$$l \cdot \widehat{xy}\{y \geqslant 1\} \subset \sum_{\Psi_1} \left[T(s_1) \cdot \widehat{xy}\{\geqslant 1\} \right]$$

Mais on sait que les ensembles

$$\langle T(s_1).\widehat{xy}\{\geqslant 1\}\rangle,$$

pour des différents s_1, appartenant à Ψ_1 n'ont pas deux à deux de points communs. Par conséquent, il n' existe qu'un seul indice α_1, tel que

$$l.\widehat{xy}\{y \geqslant 1\} \subset T(s_1).\widehat{xy}\{y \geqslant 1\}$$

et un tel indice existe certainement.

On a évidement:

$$H.\widehat{xy}\{y \geqslant 1\} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\Psi_k}\widehat{xy}\{y < k\}.T(s_1, \dots, s_k)$$

$$\subset \sum_{\Psi_2} T(s_1, s_2).$$

puisque $T(s_1, s_2) \supset T(s_2, s_2, s_3,) \supset \dots$

Donc

$$l.\widehat{xy}\{y \geqslant 2\} \subset \sum_{\Psi_2} T(s_1, s_2).\widehat{xy}\{y \geqslant 2\}.$$

Mais les ensembles

$$\langle T(s_1, s_2).\widehat{xy}\{y \geqslant 2\}\rangle \dots \tag{25}$$

n'ont pas de points communs si l'on fixe s_1 et qu'on fait varier s_2 de sorte que $(s_1, s_2) \varepsilon \Psi_2$. D'autre part, $T(s_1, s_2) \subset T(s_1)$ et les ensemble

$$\langle T(s_1).\widehat{xy}\{y \geqslant 1\}\rangle, \quad (s_1 = 1, 2 \dots)$$

n'ont pas pareillement de points communs deux à deux. Il s'ensuit que, si l'on fait varier les deux indices s_1 et s_2, l'un indépendamment de l'autre, les ensembles (25) n'ont pas de points communs deux á deux. Par conséquent, il existe un groupe (α_1', α_2) et un seul, tel que

$$l. \widehat{xy}\{y \geqslant 2\} \subset T(\alpha_1', \alpha_2). \widehat{xy}\{y \geqslant 2\}.$$

Comme $T(\alpha_1', \alpha_2) . \widehat{xy}\{y \geqslant 2\} \subset T(\alpha_1') . \widehat{xy}\{y \geqslant 1\}$, d'après ce qui précède, α_1' ne peut pas être différent de α_1. On obtient donc

$$l . \widehat{xy}\{y \geqslant 2\} \subset T(\alpha_1, \alpha_2). \widehat{xy}\{y \geqslant 2\}.$$

Par un procédé inductif on obtient ainsi qu'il existe une suite infinie

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$$

telle que

$$l . \widehat{xy}\{y \geqslant k\} \subset T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k). \widehat{xy}\{y \geqslant k\}.$$

pour $k = 1, 2, \ldots$.

Envisageons maintenant le groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ et désignons-le par I. Le U-domaine $T(I)$ est limité par l'intervalle

$$\langle p_I, q_I \rangle \underset{df}{=} \langle E_I \rangle$$

et par deux demi-droites: L_I issue du point p_I et M_I issue du point q_I. Soient p_I' et q_I' les points d'intersection des demi-droites L_I et M_I avec la droite $\widehat{xy}\{y = k\}$. Par p_I' menons la droite $p_I' p_I''$ parallèle à M_I et par q_I' menons la droite $q_I' q_I''$ parallèle à L_I.

Soient p_I'' et q_I' les points d'intersection de ces droites avec l'axe x. On voit aisément que la droite l coupe l'axe x dans un point x_o, qui se trouve nécessairement dans l'intervalle

$$(p_1'', q_I'').$$

On a

$$p_I'' < p_I < q_I < q_I''$$

$$\text{et} \quad p_I - p_I'' = q_I'' - q_I.$$

Soient $\frac{\pi}{2} - \beta_I$ et $\frac{\pi}{2} - \beta_I''$ les angles que font respectivement les demi-droites L_I et M_I avec l'axe $+y$.

On trouve:

$$p_I - p_I'' = |\operatorname{tg}\beta_I - \operatorname{tg}\beta_I''| . k$$

$$= \left| \frac{\sin \beta_l \cos \beta_l'' - \cos \beta_l \sin \beta_l''}{\cos \beta_l \cdot \cos \beta_l''} \right| . k$$

$$= \left| \frac{\sin (\beta_l - \beta_l'')}{\cos \beta_l \cdot \cos \beta_l''} \right| . k.$$

Comme $|\beta_l - \beta_l''|$ est l'angle de divergence du tube T_l, on a

$$|\beta_l - \beta_l''| < \sigma_k < \frac{\pi}{2}$$

On a aussi $\cos \beta_i \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \beta_l'' \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il s'ensuit que

$$p_l - p_l'' < \frac{\sigma_k \cdot k}{\frac{1}{2}}$$

$$p_l - p_l'' < 2\,\sigma_k \cdot k.$$

Les nombres σ_k, $(k = 1, 2, \ldots)$ ne sont pas déterminés jusqu'ici; déterminons-les à présent, en posant

$$\sigma_k = \frac{1}{2k^2}.$$

On obtient ainsi l'inégalité

$$p_l - p_l'' < \frac{1}{k},$$

qui nous montre que:

$$(p_l''\ q_l'') \subset \left(p_l - \frac{1}{k},\ q_l + \frac{1}{k} \right).$$

Le point x_0 est donc situé dans chaquun des intervalles:

$$\left(p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} - \frac{1}{k},\ q_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} + \frac{1}{k} \right)$$

où $\qquad \left(p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k},\ q_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \right) = E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k},$

$$(k = 1, 2, \ldots,).$$

Je dis que

$$x_0 \in \langle E_{\alpha_1} \rangle . \langle E_{\alpha_1, \alpha_2} \rangle \ldots$$

où x_0 désigne le point l. (a, b) (voir p. 75).

En effet, les intervalles $E_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ ne sont pas des ensembles vides et comme

$$E_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}} \subset E_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k},$$

il existe un point x_0' tel que

$$x_0' \varepsilon \langle E_{\alpha_1} \rangle . \langle E_{\alpha_1, \alpha_1} \rangle \dots$$

Ce point appartient nécessairement à T pro E'.

La distance de deux points x_0 et x_0' est inférieure à

$$\text{mes } E_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} + \frac{2}{k}$$

quelque soit $k = 1, 2, \dots$

Par conséquent $x_0 = x_0'$, puisque mes $E_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ tend vers 0, si k croît indéfiniment.

Nous avons ainsi démontré que chaque droite l appartenant à l'ensemble H coupe nécessairement l'axe x en un point qui appartient à T pro E'.

§ 16. Il nous faut démontrer que réciproquement, par chaque point de T pro E' passe nécessairement une droite différente de l'axe x, et contenue dans H. Soit $x_0 \varepsilon T$ pro E',

Il existe une suite infinie d'indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, telle que

$$x_0 \varepsilon E_{\alpha_1}. E_{\alpha_2} \dots$$

Envisageons les tubes $T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2, \alpha_2}, \dots$ appartenant respectivement à ces intervalles.

On a:

$$\langle T_{\alpha_1} \rangle \supset \langle T_{\alpha_1, \alpha_2} \rangle \supset \dots$$

donc il existe une droite m, telle que

$$m. \widehat{xy} \{y > o\} \subset \langle T_{\alpha_1} \rangle . \langle T_{\alpha_1, \alpha_2} \rangle \dots$$

Le point x_0' d'intersection de la droite m avec l'axe de x se trouvant nécessairement dans

$$\langle E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \rangle,$$

quelque soit k, on en déduit aisément que $x_0 = x'_0$.

Mais on a: $x_0 \varepsilon E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$, et $E_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ est un intervalle ouvert, donc la distance du point x_0 aux deux extrémités $p_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ et $q_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ de l'intervalle $E_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, est $\neq 0$. Par conséquent, la demi droite $m \cdot \widehat{xy}\, \{y > 0\}$ ne peut pas avoir de points communs avec le contour du domaine $T_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ sans sortir du domaine fermé $\langle T_{\alpha_1, \ldots, \alpha_2} \rangle$.

Il s'en suit que

$$m \cdot xy\, \{y > 0\} \subset T_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \text{ pour } k = 1, 2, \ldots$$

On en déduit facilement que $m \subset H$. En effet, soit $P(x', y')$ un point arbitraire de la droite m.

Si $y' < 0$, on a $P \varepsilon W'$, donc $P \varepsilon H$. Si $y' = 0$, on a $P \varepsilon E_{\alpha_1}$ donc $P \varepsilon H$. Supposons que $y' > 0$. Si l'on pose $k \underset{df}{=} E\, y' + 1$ on trouve facilement que

$$P \varepsilon T_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \cdot \widehat{xy}\, \{y < k\},$$

ce qui nous donne:

$$P \varepsilon H.$$

§ 17. En résumant, on a démontré que l'ensemble T pro E' est identique avec l'ensemble de tous les points qui appartiennent à la fois à l'axe de x et à la somme de toutes les droites contenues dans H. Il s'ensuit que ladite somme ne peut pas être mesurable (B).

Kazimierz Stołyhwo.

W sprawie metody djagnozy różniczkowej i jej zastosowania w antropologji.

Przedstawione na posiedzeniu Wydziału III-go T. N. W. dnia 29.IV 1926 r.

Zaletą wielką metod biometrycznych jest to, że są one wyrazem usiłowań wprowadzenia kryterjum objektywnego do nauk antropologicznych. Z tego powodu niewątpliwie oddać mogą one wielkie usługi tym naukom, jeżeli tylko są stosowane w sposób właściwy i krytyczny. Najzupełniej słusznem bowiem jest zdanie, wypowiedziane jeszcze przez Leonardo da Vinci: że „nissuna humana investigazione si po dimandare vera scientia s'essa non passa per le mathematice dimostratione", które cytuje znakomity biometra angielski K. Pearson (1922).

Wszakże metody biometryczne mogą łatwo stać się bronią obosieczną w tym przypadku, gdy są stosowane w sposób niewłaściwy, wówczas bowiem interpretacja matematyczna może niedość krytycznie wyrobionego badacza wprowadzić w błąd pozorami ścisłości.

Zupełnie więc słusznie pisze w tej sprawie Bogdanow (1920 str. 7), że nikt nie zaprzecza wielkiego znaczenia zastosowania metod statystycznych w badaniu, natomiast spornem jest to, w jaki sposób należy te metody stosować i czy zawsze posiadają one rolę przodującą w badaniach, dotyczących zmienności i dziedziczenia.

W tym względzie rzeczywiście niektórzy uczeni, jak to słusznie zaznacza E. A. Bogdanow (1920 str. 3), dochodzą w swej krańcowości nieraz nawet wprost do absurdu w stosowaniu pewnych zasad umiłowanej przez siebie metody biometrycznej.

W pracy swej Bogdanow (1920 str. 27—72) wykazuje w sposób bardzo demonstracyjny jak dalece metody biometryczne są niewystarczające, oraz jak niekrytycznie są nieraz stosowane, nawet przez tak znakomitych przedstawicieli tego kierunku badań, jak słynny Karl Pearson i Davenport, którzy popełniają elementarne i wprost niedopuszczalne błędy logiczne w swoich wywodach, dotyczących kwestji zmienności i dziedziczenia, a opartych na metodzie biometrycznej.

Gorzej jest jednak, jeżeli pewne metody biometryczne są z gruntu błędne i w tym przypadku wyświetlenie tego rodzaju błędów jest niezbędne, aby usunąć balast mylnych poglądów, tworzących się na ich podstawie.

W tym właśnie celu rozpatrzeć pragnę jedną z takich metod biometrycznych, a mianowicie metodę djagnozy różniczkowej, stosowaną w antropologji przez Czekanowskiego, który uważa tę metodę za precyzyjną i dającą wyniki pewne i niezbite.

Ponieważ mam poważne wątpliwości w tym względzie, przeto przystępuję przedewszystkiem do rozważenia zasad tej metody.

1. Zasady i technika metody djagnozy różniczkowej.

Metoda djagnozy różniczkowej opiera się na słusznem skądinąd twierdzeniu, (Czekanowski 1913 str. 162) „że osobniki należące do grup różnych bardziej się różnią między sobą, aniżeli osobniki wchodzące w skład tej samej grupy antropologicznej". Dla dokonania więc analizy pewnej grupy osobników należy zdefinjować różnice zachodzące między dwoma osobnikami, których miarą będzie t. zw. „różnica przeciętna". W tym celu obliczane są dla każdych dwu jednostek badanych absolutne różnice dla wielkości cyfr, oznaczających tego rodzaju cechy, jak: długości, kąty, wskaźniki, a nawet numery porządkowe w skałach barw skóry i tęczówki według tablic Luschana i Martina (Czekanowski 1910 str. 103). Obliczane są następnie średnie arytmetyczne dla wszystkich różnic każdych dwu jednostek. Posiadając już obliczone średnie różnice, łączymy we wspólne grupy te jednostki, które wykazują najmniejsze „średnie różnice". Dokonywane to jest w ten sposób, że cyfry, oznaczające średnie różnice, rozmieszczane są w siatce z odpowiednią ilością kwadratów. a mianowicie zapisywane są one w przecięciu dwu kolumn poziomej i pionowej, przeznaczonych dla każdego osobnika.

Ponieważ, jak pisze Czekanowski (1913 str. 169), liczby takiej „tablicy przygniatają jednak swą ilością, i zgrupowanie jednostek wykazujących między sobą małe różnice, nastręcza duże bardzo trudności", przeto posiłkuje się on w tym celu metodą graficzną. Opisuje ją Czekanowski w sposób następujący: „Jeżeli oznaczymy w każdej kolumnie pionowej naszej tablicy jednakową ilość najniższych różnic przeciętnych czarnemi polami, to możemy osobniki badane tak uszeregować, by pola czarne tworzyły możliwie jaknajbardziej zwarte, jaknajmniej przerywane kompleksy. Przy takiem postępowaniu bowiem podgrupy muszą wystąpić jako czarne prostokąty na białem tle, jeśli tylko zachodzące między niemi różnice są dość duże, aby się dać ująć tak niedokładnym miernikiem podobieństwa, jak różnica przeciętna". Dalej zaś Czekanowski pisze (1913 str. 172): „zastosowana tutaj miara różnicy w postaci przeciętnej, nie uwzględniającej dostatecznie morfologicznej wartości cech i pomijającej zupełnie ich współzależność, będzie musiała uledz modyfikacji. Przyjmując, że dla pomiarów głowy milimetry mają tą samą wartość, co dla pomiarów tułowia i kończyn centymetry, dla wskaźników ich całe jednostki, a dla kątów — stopnie, wprowadzamy coprawda, nie jaką naogół dość pierwotną i dowolną ocenę badanych cech".

Z powyższego widzimy, iż pod wpływem krytyki metody djagnozy różniczkowej, dokonanej przez S. Poniatowskiego (1912), Czekanowski zaczął zdawać sobie sprawę ze słabych stron swojej metody i potrzeby dokonania jej modyfikacji.

Niestety jednak w czasach ostatnich, nietylko, że nie nastąpiła naprawa wykazanych przez krytykę w tej metodzie błędów zasadniczych, lecz nawet Czekanowski doszedł do przekonania, iż naprawa w tym względzie jest zupełnie zbyteczna (1925 str. 64). Wobec tego uważam za konieczne rozpatrzeć metodę djagnozy różniczkowej na podstawie nowych przykładów i niektórych wyników osiągniętych na tej drodze.

2. Operowanie wielkościami niewspółmiernemi i różnorodnemi co do swego charakteru.

Metoda djagnozy różniczkowej byłaby słuszną najzupełniej gdyby operowała cyframi oznaczającemi wielkości cech jednorodnych i współmiernych, jak np. wielkości kątów u różnych kryształów i t. p.

Niestety jednak długość czaszki wyrażona w milimetrach kąt prognatyzmu zębodołowego wyrażony w stopniach oraz wskaźnik nosowy wyrażony w liczbie oderwanej a tembardziej numer porządkowy skali barw — nie są wielkościami współmiernemi i jednorodnemi a przeto nie można jednostek, wyrażających te wielkości ani dodawać, ani odejmować jednej od drugi ej, tymbardziej, że np. numery porządkowe skali barw nie wyobrażają nawet wogóle żadnej wielkości. Szczególniej zaś niewłaściwem jest obliczanie średnich arytmetycznych dla wszystkich różnic, otrzymanych w zakresie tak różnorodnych cech, jak cechy powyższe; jest to metoda absolutnie niedopuszczalna ze względów logicznych. Zwrócić tu jeszcze należy uwagę na nadzwyczajną dowolność w obrachunkach „średnich różnic" przez Czekanowskiego (1910 str. 103), podlegającą na tym, że jedne cechy, jak np. wzrost, długość kończyn, długość i szerokość stopy i t. p. wyraża on w centymetrach, inne zaś cechy, jak długość i szerokość głowy, wysokość i szerokość nosa i t. d. oznacza w milimetrach. Konsekwencją tego jest, że przy obliczaniu „średnich różnic" — różnice wyrażone w centymetrach ulegają automatycznie redukcji dziesięciokrotnej. Tego rodzaju redukcja jest przytem stosowana najzupełniej chaotycznie, gdyż nie odnosi się ona bynajmniej tylko do wymiarów większych. Świadczy o tym fakt, że np. długość dłoni, lub szerokość stopy oznaczaną jest przez autora w centymetrach, aczkolwiek pomiary te stanowią wielkości mniejsze, niż np. długość i szerokość czaszki, ktora jest oznaczaną w milimetrach. Skutek zaś jest taki, że różnice zaoberwowane w zakresie dłoni i stopy ulegają redukcji dziesięciokrotnej w porównaniu do odpowiednich, lub nawet znaczniejszych wielkości na czaszce.

Można mieć bardzo poważną wątpliwość, czy tego rodzaju metoda redukcji wartości pewnych cech jest słuszną. Natomiast z całą pewnością twierdzić należy, że niedopuszczalne jest ze względów logicznych tego rodzaju działanie arytmetyczne jak zsumowanie centymetrów, milimetrów, stopni kątów i liczb oderwanych, w których wyrażone są wskaźniki, nie mówiąc już o numerach porządkowych tablic skali barw.

Wobec powyższego nasuwa się w stosunku do metody djagnozy różniczkowej przedewszystkiem zarzut następujący:

Metoda ta operuje wielkościami najzupełniej niewspółmiernemi i różnorodnemi co do swego charakteru — traktując je, jako jednowartościowe.

Czekanowski jednak tego rodzaju postępowanie metodyczne uznaje za zupełnie słuszne, pisząc w ostatniej swej pracy (1925a str. 67): „dass man die Indexdifferenzen in Einheiten (Prozenten) und die absoluten Differenzen in Millimetern und Bogengraden als gleichwertig ansehen darf".

W celu więc wykazania, że średnia arytmetyczna obliczona na podstawie różnorodnych, niewspółmiernych i morfologicznie niejednakowo ważnych cech nie może posiadać absolutnie żadnej wartości, rozpatrzymy przykłady następujące: wyobraźmy sobie, że według metody djagnozy różniczkowej mamy określić różnice np. stanu majątkowego właścicieli różnej ilości hektarów ziemi, kamienic, krów i główek kapusty.

Ilustruje to nam tablica następująca:

Właściciele	A.	B.	C.	Różnica pomiędzy A. i B.	Różnica pomiędzy A. i C.	Różnica pomiędzy B. i C.
Ilość hektarów ziemi	100	2	100	98	98	0
Ilość kamienic	10	1	12	9	11	2
Ilość krów	31	2	29	29	27	2
Ilość główek kapusty	100	1000	800	900	200	700
Średnie różnice				259	84	176

Z tablicy powyższej wynika na podstawie „średnich różnic“, że różnica wartości majątku właścicieli „B“ i „C“ jest mniejsza, niż „A“ i „B“ oraz „A“ i „C“, co jest oczywistym absurdem, ponieważ najbogatszymi i najbardziej zbliżonymi do siebie pod względem wartości majątku są właściciele „A“ i „C“.

Wynik powyższy dowodzi wyraźnie, że cechy różnorodne, niewspółmierne i niejednakowo ważne nie mogą być badane przy pomocy metody djagnozy rożniczkowej.

Rozpatrzmy teraz przykład zastosowania metody djagnozy różniczkowej do określenia podobieństw pomiędzy typami antropologicznymi.

	Typy Czekanowskiego	α	β	γ	Różnica pomiędzy α i β	Różnica pomiędzy β i γ	Różnica pomiędzy γ i α
I. metry	Wzrost	1,69 m.	1,62 m.	1,71 m.	0,07	0,09	0,02
	Wskaźnik główn.	77,5	81,5	84,5	4	3	7
	Średnie różnice				2,03	1,54	3,51
II. centymetry	Wzrost	169cm.	162cm.	171cm.	7	9	2
	Wskaźnik główn.	77,5	81,5	84,5	4	3	7
	Średnie różnice				5,5	6	4,5

W tablicy powyższej uwzględniłem dwie najbardziej charakterystyczne cechy, t. j. wskaźnik główny i wzrost według danych Czekanowskiego (1921 str. 66). Z tablicy powyższej wynika, że jeżeli oznaczymy w kategorji wzrostu odpowiednie wielkości w metrach, to największe podobieństwo zachodzi pomiędzy typem „β“ i „γ“, znaczniejsze różnice obserwujemy pomiędzy typami „α“ i „β“ i wreszcie najsilniejsze różnice występują pomiędzy typami „α“ i „γ“. Rezultat ten jest niezmiernie zadziwiający wobec tego, że zgodnie z poglądem Czekanowskiego (1925 a str. 76), który utożsamia swój typ „γ“ z rasą subnordyczną Denikera, należałoby przypuszczać, że pomiędzy typem „α“ i „γ“ istnieć powinno zbliżenie najsilniejsze. Jeżeli następnie oznaczymy też same wielkości wzrostu w centymetrach, to otrzymujemy obraz wręcz przeciwny, a mianowicie najsłabsze różnice występują pomiędzy typami „α“ i „γ“; silniejsze różnice zaznaczają się pomiędzy typami „α“ i „β„, wreszcie najsilniejsze różnice występują pomiędzy typami „β“ i „γ“.

Widzimy więc, że zmiana tylko jednostki mierniczej zmienia zasadniczo rezultat i w konsekwencji takich wyników nie jesteśmy w stanie zdefinjować przy pomocy metody djagnozy różniczkowej podobieństw i różnic pomiędzy typami antropologicznymi.

3. Zreasumowanie zarzutów postawionych metodzie djagnozy różniczkowej.

Reasumując wyniki rozważań dotychczasowych nad metodą djagnozy różniczkowej, dochodzimy do stwierdzenia, iż metoda ta nie rokuje dobrych rezultatów, ponieważ:

a) operuje wielkościami najzupełniej niewspółmiernemi i różnorodnemi co do swego charakteru — traktując je jako jednowartościowe,

b) nie uwzględnia różnic wartości morfologicznych poszczególnych cech i ich współzależności,

c) nie może być zastosowaną do badania cech opisowych antropologicznych,

d) jest subjektywną w sposobie ujmowania poszczególnych elementów rasowych na diagramach.

Wykazane powyżej wady metody djagnozy rożniczkowej spowodowały surową krytykę jej zasad i wyników tą drogą otrzymanych.

Tak np. w „American Journal of Physical Anthropology“ (1926 Vol. IX. Nr. 1 str. 130—131), wychodzącem pod redakcją znakomitego antropologa amerykańskiego A. Hrdlički znajduje się ustęp następujący, poświęcony zastosowaniu w antropologji metody djagnozy różniczkowej: „The tendency to reduce anthropology to the simple and definite order of geometry and mathematics, recurs again and again on the part of workers, who are still full of the optimism and resistlessness of scientific youth. It is only later, much later, that they are bound to acknowledge that nature with man especially, works on no easily delimitable grooves, but with unbounded complexity an understanding of which we may here and there approach but can neither fully reduce nor fathom. The author has measured a series of Polish skulls and utilising twelve indices of these together with skull capacity, and with additional data obtained from literature believes himself justified in advancing the following main conclusions: With the aid of the method of „differential analysis" it is possible to decompose every population into a number of cranial types that correspond strictly to anthropological types. These types, very durable, reach far into the past. The number of these types is limited and strictly defined. Every skull can be described and defined as to its race. And having now this „key" we can not only apply it to solving the anthropological riddles of the present but also those of the past... This... some of the modern biometricians and earlier phrenologist is an attempt at anthropological mechanics which are to do away with our difficulties. The trouble or one of the troubles is that all these panaceas ignore nature".

4. Harmonijność rezultatów.

Cała dotychczasowa obrona metody djagnozy różniczkowej polegała jedynie na twierdzeniu, że przy pomocy tej metody otrzymywane są rezultaty harmonijne.

Tego rodzaju obrona metody djagnozy różniczkowej nie jest zupełnie przekonywującą, gdyż rezultaty otrzymane przy pomocy każdej metody, a nie tylko metody djagnozy różniczkowej będą zawsze harmonijne z punktu wyjścia danej metody. Harmonijność więc rezultatów otrzymywanych nie może przesądzać o ich słuszności. Będą one słuszne o tyle tylko, o ile będą odpowiadały istotnemu stanowi rzeczy.

Przy badaniu typów antropologicznych nie należy zapominać o tym, iż są one zjawiskiem bardzo skomplikowanem i zależnem od mnóstwa najrozmaitszych czynników, skutkiem czego wszelkie próby dotychczasowe zastosowania najbardziej misternych metod biometrycznych nie dały bynajmniej pozytywnych rezultatów w zakresie ścisłej ich definicji.

Ulegamy bowiem złudzeniu, jeżeli sądzimy, że powodzenie w rozwiązaniu tych kwestji zależy od złożoności metody. Zależy ona zdaniem mojem w daleko większym stopniu od umiejętności logicznego operowania faktami należycie zaobserwowanemi i od zastosowania metody odpowiedniej, chociażby nawet bardzo prostej.

LITERATURA.

1920. E. A. Bogdanow — Nowoje naprawlenije w uczenii o podborie. Biometrika i jeja znaczenije w zootiechnii i żywotnowodstwie. (Zadruga) Moskwa.

1910. Czekanowski — Verwandschaftsbeziehungen der Zentralafrikanischen Pygmäen. (Korresp.-Blatt d. Deutschen Anthr. Gesell. XLI. str. 101).

1913. J. Czekanowski — Zarys metod statystycznych w zastosowaniu do antropologji. (Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego Nr. 5). Warszawa.

1921. J. Czekanowski — Z badań uwarstwienia etniczno-społecznego Polski (Prace Komisji Matematyczno-Przyrodniczej Tow. Przyjaciół Nauk w Poznaniu). Poznań.

1925. Jan Czekanowski — Metoda analizy typów antropologicznych p. Kazimierza Stołyhwy w świetle kryterjum niezależności. (Lud. Tom. XXIV). Lwów.

1925a. Jan Czekanowski — Zum Problem der Systematik der Kurzköpfigen schweizerischen neolitischen Pfahlbaubewohner. (Archiv für Anthropologie Neue Folge Band XX). Braunschweig.

1922. Karl Pearzon — The science of Man its needs and its prospects (Annual Peport of the Board of Regents of the Smitsonian Institution 1921).

1912. S. Poniatowski — O wpływie błędów obserwacyjnych na wskaźniki antropologiczne. (Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego).

(Z Zakładu Antropologji Instytutu Nauk Antropologicznych T.N.W.)

Marja Romanowska.

Charakterystyka antropologiczna ludności męskiej powiatu Będzińskiego.

Przedstawił K. Stołyhwo

na posiedzeniu wydziału III T. N. W. z dnia 29 kwietnia 1926 r.

Niniejsza charakterystyka opiera się na 539 spostrzeżeniach zebranych nad ludnością męską powiatu Będzińskiego. Badani byli w wieku od 17 lat do 62. Największa ilość spostrzeżeń przypada na lata od 18 do 25, maximum spostrzeżeń na 22 rok, średnia wieku 23,08 lat.

Część materjału otrzymałam z Referatu antropologicznego W. I. Ż. Ministerstwa Spraw Wojskowych, resztę ze swoich badań, prowadzonych nad ludnością powiatu Będzińskiego.

Materjał mój składa się z rekrutów i robotników, a także z paru osób z inteligencji. Zbierając go przestrzegałam, żeby nietylko mierzony, ale przynajmniej i jego rodzice urodzeni byli w pow. Będzińskim. Przy tej sposobności uderzyło mnie to, że o ile tylko ojciec i syn są urodzeni w Będzińskiem, to matka pochodzi często, z miejscowości przodków ojca n. p. badany urodzony w Czeladzi: ojciec jego też, matka ze Śląska i przodkowie ojca ze Śląska. Częściej jednak się spotyka, że syn jest z tej miejscowości co matka, a ojciec pozamiejscowy i ciekawe, że pochochodzenie przodków matki jest lepiej znane niż pochodzenie przodków ojca.

Rekrutów badałam w koszarach, a robotników przeważnie w szpitalach pośród chirurgicznie chorych.

Stosowałam w badaniu metody zestawione w podręczniku Martina, skalę barwy oczu i włosów Fischera i Martina, oraz schemat do spostrzeżeń Zakładu antropologicznego I. N. A. T. N. W. W badaniach posługiwałam się instrumentami wypożyczonemi mi przez p. prof. Stołyhwę z Instytutu Nauk Antropologicznych Tow. Nauk. Warszawskiego.

Z pomiarów ciała ograniczyłam się do wzrostu. Opracowywałam materjał metodami statystycznemi zestawionemi przez prof. Czekanowskiego (1913).

Praca ta wykonaną została w Zakładzie Antropologji Instytutu Nauk Antropologicznych T. N. W.

Wzrost.

Średnia wzrostu 163,87 $\pm$ 0,18, $v = 3,8 \pm 0,08$, skala wahań 148—182 cm.

Linja regresji wzrostu z wiekiem wskazuje na stały przyrost wzrostu do 21 lat, w 22 roku osięga swoje maximum i do 25 ze słabemi wahaniami utrzymuje się na jednym poziomie, a więc znaczyłoby to, że mężczyźni pow. Będzińskiego rosną do 22 roku życia. U starszych, widzimy, wzrost cokolwiek niższy i ostre jego skoki, na co wpłynęły może okresy gorszych warunków ekonomicznych przypadające na czas ich rozwoju, a możliwe też, że wchodzi tu w grę i selekcja rasowa.

Wobec przypuszczenia, że na roczny przyrost młodszych mogła wywrzeć wpływ wojna, został on obliczony od lat 18 do 22 t. j. do wieku do którego zaznaczył się jego przyrost w Będzińskiem. Najsłabszy przyrost mamy między r. 1919—20, najsilniejszy między 1920—21, pierwszych wojna zaskoczyła w 11 roku życia, drugich w 13.

Tabela Nr. 1.

Przyrost roczny.

Wiek	Przyrost roczny w Będzińskiem	Przyrost roczny według Daffnera	w 1914 r. Będziniacy mieli
18—19	1·54 cm.	1·7 cm.	10 lat
19—20	1·08 „	0·8 „	11 „
20—21	2·44 „	—	12 „
21—22	1·18 „	—	13 „

Przyrost ten porównywany z rocznym przyrostem u Daffnera nie nasuwa specjalnych wniosków na temat wpływu wojny, zresztą mamy do porównania tylko dwa okresy, bo Daffner tabelkę swoją kończy na latach 1919—20.

W badaniach wojskowych przy zbieraniu ewidencji nie liczono się z pochodzeniem przodków, nawet rodziców i stąd w materjale wojskowym mamy znaczną liczbę zbadanych, którzy są pierwszem pokoleniem urodzonem w pow. Będzińskim. Jeśli usuniemy spostrzeżenia, przy których zupełnie nie było uwzględnione pochodzenie rodziców, otrzymamy 43% zbadanych, których rodzice pochodzą z Będzińskiego, 15% będzie takich, których jedno z rodziców, przeważnie matka, jest tego pochodzenia, a 42% o zamiejscowem pochodzeniu obojga rodziców. Tymczasem materjał gromadzony prywatnie w 75% ma ludność miejscową t. j. której rodzice i przodkowie pochodzą z Będzińskiego, w 12% jedno z rodziców ze swojemi przodkami jest miejscowego pochodzenia, a tylko w 13% pochodzenie przodków nieznane. A więc w materjale tkwi przyczyna, że średnia wzrostu obliczona dla materjału tylko wojskowego (A=165,02) nie leży w granicach potrójnego błędu średniej dla całości (A=162,87 ∓ 0,18). Średnia obliczona dla całości materjału jest mniejsza od średniej wzrostu dla materjału wojskowego. Wpłynęła na to prawdopodobnie selekcja wojskowa, możliwe jednak, że niższy wzrost ludności rdzennej, która w materjale wojskowym jest słabiej reprezentowana.

Tabela Nr. 2.

Średnie wzrostu.

	Smardzewice	Będzin	Pułtusk	Pilzno	Podgórze	Górale
Wzrost	163·2	163·87	163·88	164·28	165·4	165·6

W Będzińskiem, leżącem między terenami wpływów typu alpejskiego (ω) i presłowiańskiego (β), należy się spodziewać oddziaływania tych dwóch typów i rzeczywiście wzrost jest tu wyższy niż w Smardzewicach, gdzie mamy silnie i wyraźnie występujący typ presłowiański (β), niższy natomiast niż u Podgórzan i Górali, będących typu alpejskiego (ω). Z pułtuskiem i pilzneńskiem różnice wzrostu niewielkie, w pierwszym z przyczyny wspólnego im typu presłowiańskiego (β), w drugim presłowiańskiego i alpejskiego (β i ω). Ze wskaźników zmienności widać, że ustosunkowanie wzrostu w powiatach: Będzińskim, Pilzneńskim i Pułtuskim jest bardzo zbliżone. Pilzno v=3,98; Będzin v=3,8 ± 0,08; Pułtusk v=3,76.

Wskaźnik główny.

Maximum spostrzeżeń przypada na wskaźnik 84, skala wahań 70—101, średnia 84, 65 $\pm$0,10, v=4,2$\pm$ 0,08.

Tabela Nr. 3.

Średnie wskaźnika głównego.

	Górale	Pilzno	Będzin	Pod-górze	Smardze-wice	Pułtusk
Wsk. głów.	85·73	84·98	84·65	84·34	82·67	81·69

Ludność pow. Będzińskiego i Podgórza pod względem wskaźnika głównego zajmuje miejsce pośrednie. Górale i ludność Pilzneńskiego jest bardziej krótkogłowa. W Smardzewicach występują dłuższe głowy, najbardziej jednak przechyla się ku długogłowości ludność Pułtuskiego, w skład której obok typu presłowiańskiego (β) wchodzi również typ północno-europejskiego długogłowca (α), co wpływa na obniżenie wskaźnika w tym stopniu, że jest on z porównywanych powiatów najniższy, niższy niż w Smardzewicach, gdzie wybitnie zaznacza się typ presłowiański (α).

Różnice we wskaźnikach zmienności w Pilzneńskiem i Będzińskiem są nieznaczne, natomiast Pułtuskie ma mniejszy wskaźnik. Pilzno v=4,12, Będzin v=4,2$\pm$ 0,08, Pułtusk v=3,78.

Wskaźnik twarzowy.

Maximum spostrzeżeń przy wskaźniku 85, skala wahań 72—104, średnia 85,66 $\mp$0,15, v=6,2$\pm$ 0,12.

Tabela Nr. 4.

Średnie wskaźnika twarzowego.

	Górale	Pułtusk	Pod-górze	Pilzno	Będzin	Smardze-wice
Wsk. tw.	90·08	87·97	86·89	86·42	85·66	84·13

W powiecie Będzińskim występują twarze węższe niż w Smardzewicach, które szerokie twarze swej ludności zawdzięcza szerokolicemu typowi presłowiańskiemu (β). Natomiast ludność Pilzneńskiego, Podgórza i Górale mają twarze węższe, gdyż powoduje to typ alpejski, wchodzący w skład tej ludności, wąskie zaś twarze Pułtuskiego to wpływ typu północno-europejskiego (α). We wskaźniku twarzowym zaznacza się więc również, jak we wzroście i wskaźniku głównym, przejściowy charakter ludności pow. Będzińskiego. Co do wskaźnika zmienności, to ten mówi nam, że ustosunkowanie we wskaźniku twarzowym jest u ludności Będzińskiego różne od ustosunkowania w Pilzneńskiem, a zwłaszcza w Pułtuskiem. Będzin $v = 6,2 \pm 0,12$, Pilzno $v = 5,65$, Pułtusk $v = 6,91$.

Maximum spostrzeżeń przy wskaźniku 64, skala wahań 41 — 95, średnia $65,94 \pm 0,25$ $v = 13,00 \pm 0,27$.

Tabela Nr. 5.

Średnie wskaźnika nosa.

	Pułtusk	Górale	Pilzno	Podgórze	Będzin	Smardz.
Wsk. nosa	55·64	60·94	62·98	63·64	65·94	73·43

Pomijając powiat Pułtuski, którego ludność ma nosy najwęższe zapewne z powodu, że na tym terytorjum silnie zaznacza się typ północno-europejski (α), typ o nosach wybitnie wąskich, przy porównywaniu z pozostałemi powiatami, ludność Będzińskiego ma charakter przejściowy, od wąskich nosów terytorjum typu alpejskiego (ω) do szerokich nosów rasy wschodniej (β), od Górali do Smardzewic. To też i wskaźnik zmienności w Będzińskiem największy, bo $v = 13, \pm 0,27$, kiedy w Pilznie $v = 11,62$, a w Pułtusku $v = 10,46$.

Kształty grzbietu nosa.

W %% przedstawia się jak następuje:

nosów prostych 36,70%
„ wypukłych 34,46% (wypukłe, faliste, garbate)
„ wklęsłych 23,84%.

Najwięcej więc jest tu nosów prostych, najmniej wklęsłych.

Wargi.

	Będzin	Pułtusk
Wywinięte	—	2,6%
Grube	18,42%	7,7%
Mierne	66,92%	80,9%
Cienkie	14,66%	8,8%

Będzińskie posiada największy % warg miernych, podobnie jak i Pułtuskie, ale kosztem miernych stosunkowo więcej warg grubych i cienkich.

Kości policzkowe.

Ludność pow. Będzińskiego ma słabo wystające kości policzkowe, gdyż występują tu one aż w 87,7% przy 5,2% miernie i tylko 2,1% silnie wystających.

Obrąbek uszny.

Obrąbek uszny rozwinięty miernie zaobserwowano u ludności pow. Będzińskiego w 57,74%, słabo rozwinięty 26,04% a silnie tylko w 16,23%.

Tabela Nr. 6.

Pigmentacja

Barwa oczów i włos.	Będzin	Pilzno	Barwa oczów i włos.	Będzin	Pilzno
Niebieskie oczy	44·6%	56·2%	Miesz. włos. nieb. ocz.	14·6%	30·1%
Zielone „	38·3%	27·9%	„ „ zielone „	38·3%	27·9%
Piwne „	17·1%	15·5%	„ „ piwne „	4·3%	3·4%
Jasne włosy	53·6%	36·7%	Jasne włos. nieb. ocz.	30·0%	26·1%
Ciemne „	46·1%	63·1%	Ciemne „ piwne „	12·7%	12·1%
Rude włosy	0·2%	0·3%	Czyste typy	42·7%	38·2%
Czarne „	0·2%	—	Mieszane „	57·3%	61·5%

Ponieważ w opracowaniu ludności pow. Będzińskiego podział skal barwy oczu i włosów był brany według podziału Stołyhwy, porównywanie z powiatami, gdzie stosowano inny podział nie jest ścisły i dlatego Będzińskie co do pigmentacji porównane jest tylko z Pilzneńskiem, gdyż co do ludności tego powiatu są analogiczne dane.

Wśród ludności pow. Będzińskiego występuje znaczny % niebieskich oczu i jasnych włosów, dając w połączeniu 30% niebieskookiego blondyna. Porównanie z ludnością Pilzneńskiego wypada na korzyść jasnej pigmentacji ludności Będzińskiego, co spowodowane jest obecnością jakiegoś typu o jasnej pigmentacji.

Przyczyna nieznacznej przewagi typów mieszanych pigmentacyjnie nad czystemi tkwi zapewne w braku odpowiedniego czasu aby mogło nastąpić wykrzyżowanie ludności; przewaga w typach czystych pigmentacyjnych niebieskookiego blondyna (30%) nad ciemnowłosym i ciemnookim (12·7%) pozwala przypuszczać, że dzieje się to za sprawą typu jasno pigmentowanego, który napłynął tu stosunkowo niedawno i w znacznej ilości.

Ludność rdzenna i fale napływowe.

Powszechnie znanem jest zjawisko, że do miast i ośrodków przemysłowych ściąga szukająca zarobków ludność z bliższych a często nawet b. dalekich okolic. Wobec przemysłowego charakteru Zagłębia Dąbrowskiego powstało więc pytanie, czy zjawisko to znajdzie wyraz w antropologji, czy i jakie elementy rasowe dadzą się tu prześledzić, jako miejscowe podłoże i jako fale napływowe.

W tym celu obliczono wskaźnik główny, twarzowy, nosowy, wzrost i barwę włosów dla trzech kategorji spostrzeżeń. Do pierwszej zostali zaliczeni ci, których rodzice i ich przodkowie pochodzą z Będzińskiego, do drugiej kategorji ci których tylko rodzice pochodzą z omawianego powiatu, a dziadkowie są pozamiejscowi, w trzeciej kategorji znaleźli się zaś ci, których już rodzice są przybyszami i tylko sami badani urodzeni byli w pow. Będzińskim.

Tabela Nr. 7.

	I kategorja spostrz. 114		II kategorja spostrz. 21		III kategorja spostrz. 85		Cały materj. spostrz. 539	
Wzrost	161·63		162·02		164·87		163·87	
Wsk. główny	84·79		86·22		84·41		84·65	
„ twarzowy	87·16		91·09		86·25		85·66	
„ nosowy	62·30		60·66		66·11		65·94	
Typy	ω. β.		ω. β.		ω. β. γ.		ω. β. γ.	
Barwa włosów	jasne	ciem.	jasne	ciem.	jasne	ciem.	jasne	ciem.
%	34%	66%	30%	70%	42%	58%	54%	46%

Pierwsza kategorja swoim niskim wzrostem wskazuje na typ presłowiański (β), co zaś do wskaźnika głównego, to typ presłowiański (β) wpływa tu na jego obniżenie, gdyż we wskaźniku głównym znajduje swój wyraz i typ alpejski, który we wskaźnikach nosa i twarzy b. wyraźnie się uwypukla. W kategorji pierwszej widzimy również znaczną, prawie 100% przewagę włosów ciemnych nad jasnemi.

Pomimo stosunkowo małej liczebności, widać jednak w kategorji drugiej oddziaływanie typów presłowiańskiego i alpejskiego, pierwszy zaznacza się w niskim wzroście, drugi we wskaźnikach głównym, twarzowym i nosowym, co pozwala przypuszczać, że pośród przybyszów dziadków typ alpejski reprezentowany był b. silnie, przemawia za tem rownież zwiększony % włosów ciemnych.

Kategorja trzecia jest to kategorja pierwszego pokolenia urodzonego z rodziców przybyszów na terenie pow. Będzińskiego. Obserwujemy tu wyższy wzrost, dłuższą głowę, szerszą twarz i nos, oraz znaczny % włosów jasnych. Znaczy więc, że obok typu alpejskiego i presłowiańskiego napłynął tu element przedewszystkiem rosły i jasnowłosy. Nie mógł to być typ północno-europejski, gdyż jego wąski nos i wąska twarz, oraz długa głowa nie znajdują wyrazu w powyższych średnich, natomiast wpływy typu subnordycznego (γ) dają się zupełnie łatwo prześledzić.

W czwartej rubryce podane są średnie całości materjału t. j. trzech wspomnianych kategorji łącznie z tym materjałem, który do żadnej z nich nie mógł być zaliczony ze względu na niepełną ewidencję, lub jej pominięcie. W materjale wojskowym często notują powiat bez uwzględnienia miejscowości i to w odniesieniu do badanego tylko. Uderza nas przedewszystkiem duży % jasnowłosych, a więc element jasny znajduje się w przewadze, kiedy w kategorji pierwszej t. j. u ludności rdzennej jest w znacznej mniejszości. Zwiększenie % jasnowłosych obserwujemy dopiero w kategorji trzeciej, w ktorej już rodzice są przybyszami, co pozwala wnioskować, że w spostrzeżeniach, które ze względu na niepełną ewidencję, w poprzednich ketegorjach, musiały być pominięte, a które obecnie tak bardzo podnoszą % jasnowłosych, znajduje się dużo elementu świeżo napływowego jasnowłosego. Potwierdzenie tego wniosku znajdujemy w rozdziale o pigmentacji, w którym mowa o przewadze w typach czystych pigmentacyjnie niebieskookiego blondyna nad ciemnowłosym i ciemnookim i o nieznacznej przewadze typów mieszanych pigmentacyjnie nad czystemi. Wszystkie te dane wskazują, że ostatniemi czasy napłynął w Będzińskie element jasny, a średnie i linje regresji przemawiają za typem subnordycznym (γ).

Rdzenna ludność pow. Będzińskiego jest więc typu alpejskiego (ω) i presłowiańskiego (β), co zresztą wypływa z geograficznego położenia. Rozwijający się przemysł i górnictwo ściąga ludność bliższych i dalszych okolic. Idą fale omegowo-betowe (ω-β) z domieszką innych elementów: i tak w pierwszej ludność o typie presłowiańskim (β), obok ludności o typie alpejskim (ω), ten ostatni silnie reprezentowany. W drugiej również ludność typu alpejskiego (ω) i presłowiańskiego (β) ale towarzyszy jej jeszcze ludność jasno pigmentowana typu subnordycznego (γ)

Całość materjału pow. Będzińskiego jest więc typu alpejskiego (ω), presłowiańskiego (β) i subnordycznego (γ) ($\beta\omega\gamma$), naturalnie z domieszką innych elementów, tem liczniejszą, że strony przemysłowe ściągają ludność z różnych zakątków kraju, a nawet z poza jego granic. A m m o n w „Die Natürliche Auslese beim Menschen“ na stronie 111-113 stwierdza, że w Niemczech elementy wysokie, długogłowe i jasne wywędrowują ze wsi do miast. Są to bezwątpienia elementy typu północno-europejskiego. Przez niektórych b. poważnych autorów (Deniker) typ subnordyczny (γ) jest uważany za odmianę północno-europejskiego, a rezultaty otrzymane w pow. Będzińskim wskazujące na typ subnordyczny (γ) jako napływowy w Zagłębiu nasuwają przypuszczenie, że w Polsce zachowuje się on analogicznie do północno-europejskiego w Niemczech, ściągając ze wsi do miast i ośrodków przemysłowych, a więc przemawiałoby to na korzyść poglądów Denikera.

Z powyższych danych widać, że podniesienie wzrostu nie zawsze spowodowane jest polepszeniem warunków ekonomicznych, ale przyczynić się do tego również może napływ elementów roślejszych. Chcąc więc znaleźć wytłumaczenie dla zmian zaszłych wśród danej ludności, powinno się przy zbieraniu ewidencji notować i pochodzenie przodków badanego, zwłaszcza jeśli idzie o ludność okręgu przemysłowego. Ludność robotnicza jest b. ruchliwa i zmienia się często. To nie strony rolnicze, gdzie chłop przez szereg pokoleń siedzi na swoim zagonie. Urodzenie się jakiegoś osobnika w takiej miejscowości b. mało mówi o jego faktycznem pochodzeniu, bo i jego rodziców często nic więcej z temi stronami nie wiąże poza przelotnym tylko pobytem dla zarobku, w następstwie czego i on jest tym stronom zupełnie obcy i nie ma z niemi nic wspólnego.

Dotychczasowe rozważania doprowadziły więc do wyodrębnienia wśród ludności męskiej Zagłębia Dąbrowskiego następujących typów antropologicznych: presłowiańskiego (β) alpejskiego (ω), subnordycznego (γ), lambda (λ) i północno-europejskiego (α). Ponieważ jednak, jak już było zaznaczone, w wypadku pow. Będzińskiego metody korelacji i linji regresji nie dały zadawalniająco pewnych wyników, materjał został przeliczony jeszcze metoda nadwyżek liczebności.

Rezultaty otrzymane metodą nadwyżek liczebności.[1]

Jeżeli tablice korelacji podzieli się na klasy i w każdej z nich obliczy ilości obserwowane i teoretycznie przewidziane,

[1]) Ta część pracy została wykonaną w Instytucie Antropologiczno-Etnologicznym Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie z zasiłku Ministerstwa W. R. i O. P.

jak to ma miejsce przy obliczaniu współczynnika odchylenia współzależnościowego (C), to te klasy w których ilości obserwowane przewyższają teoretycznie oczekiwania, można ująć w typy antropologiczne, gdyż musi w nich zachodzić między rozpatrywanymi cechami jakiś związek i zależność, bo gdyby tego nie było wszystkie kombinacje występowałyby jednakowo często.

Ponieważ do wyników otrzymanych na linjach regresji wobec ich niezdecydowanego przebiegu należy odnosić się z ostrożnością, chcąc możliwie upewnić się co do występujących wśród ludności pow. Będzińskiego typów antropologicznych, została tu jeszcze zastosowana i metoda nadwyżek liczebności. W powyżej opisany sposób podzielono tablice włosów i oczu ze wzrostem, wskaźnikiem głównym, wskaźnikiem twarzy, wskaźnikiem nosa, oraz wzrostu i wskaźnika głównego między sobą i z wskaźnikami nosa i twarzy.

Naturalnie nie wszystkie nadwyżki występujące na każdej tablicy przyjmujemy za typy, a tylko te, które w tej samej klasie i na wszystkich tablicach znajdują odpowiedniki dla każdej z rozpatrywanych cech, np. nadwyżki występują stale w klasie wskaźnika głównego 77 — 82, wzrostu 148 — 162, włosów 5 — 8, oczu 5 — 11 i w tych klasach znajdujemy odpowiedniki dla twarzy klasie 81 — 83 i dla nosa 69 — 95. Ponieważ ramy te najlepiej odpowiadają typowi presłowiańskiemu (β) można więc powiedzieć, że on spowodował te nadwyżki i klasy w których występują użyć do scharakteryzowania go. A np. typ subnordyczny (γ) zamykać się będzie nadwyżkami występującemi dla wkaźnika głównego w klasie 83 — 85, dla wzrostu 170 i wyżej, oczu 12-16, włosów 9—26 i 3, twarz uwypukla się w klasie 81—84, a nos 63—72. I tak postępujemy ze wszystkiemi nadwyżkamj, a te z nich, które nie dają się dobierać w typy zostają pominięte i są uważane jako rzecz przypadku, lub może niedostatecznie jeszcze silnych wpływów.

Tabela Nr 8.

	β.	(α β) ?	ω	λ.	γ.	
Oczy	5—11	14—16	5—13	2—4	12—16	NN skali Martina
Włosy	5—8	7—8	5—8	27 ; 4	9—26; 3	NN skali Fischera
Wsk. głów.	77—82	70—76	86—101	86—101	83—85	
„ twarz.	81—88	85—88	89—104	72—80	81—84	
„ nosa	69—95	73—80	41—62	63—80	63—72	
Wzrost	148—162	163—169	156—169	156—162	170 i wyżej	

Rezultatem powyższego postępowania jest wyodrębnienie następujących typów antropologicznych: presłowiańskiego (β), alpejskiego (ω), subnordycznego (γ), lambdy (λ) i grupy przy której zmuszona jestem postawić znak zapytania. Prawdopodobnio będzie to typ północno-europejski (α) przekrzyżowany z typem presłowiańskim. Niższy niż zwykle występuje u północno-europejskiego, a wyższy niż u presłowiańskiego wzrost, ciemnawa pigmentacja włosów, a przedewszystkiem szerokie nosy, przy niebieskich oczach, długiej głowie i dość długiej twarzy nasuwają to przypuszczenie, w którym utwierdza jeszcze fakt, że typ północno-europejski, jako taki, metodą nadwyżek nie został uchwycony, a jednak na linjach regresji i w korelacjach zaznaczał się. Widocznie coś z niego tkwi w materjale, tym bardziej że wszystkie inne typy, które w korelacjach i na linjach regresji wystąpiły, znajdują potwierdzenie w metodzie nadwyżek liczebności.

Typ presłowiański (β).

Oczy i włosy ma o barwach przejściowych (oczy tablica Martina Nr. 5—11, włosy tablica Fischera Nr. 5—8), głowa długa, twarz krótka, typ presłowiański mieści się bowiem w klasie wskaźnika licowego 81 — 88, nos b. szeroki; są to nosy najszersze z całego materjału, obejmują klasę nosów 69 — 95.

Przy typie presłowiańskim skupia się najbardziej niskorosła ludność Będzińskiego o klasie wzrostu 148 — 162.

Typ alpejski (ω).

Włosy ciemne (tablica Nr. 5—8), oczy o barwach przejściowych, aż do szarych (Tablica 5—13), głowa b. krótka, twarz długa przy nosie b. wąskim i wzroście średnim.

Typ lambda (λ).

Oczy ma zdecydowanie ciemne (oczy tablica Nr. 2—4, włosy tabl. Nr. 27, 4), głowę krótką, narówni z typem alpejskim, ale przy twarzy szerokiej, nosie również szerokim i wzroście niskim.

Typ subnordyczny (γ).

Jest to typ jasno pigmentowany (oczy 12 — 16, włosy 9—26; 3, o głowie i twarzy średniej, a nosie dość szerokim przy wysokim wzroście. To najroślejszy i najjaśniej pigmentowany element składowy ludności pow. Będzińskiego.

* * *

Wszystkie powyżej opisane typy w klasach tablic korelacji zamykają się b. dobrze, t. zn. że w tych samych klasach wyraźnie zarysowują się na wszystkich tablicach korelacji.

Typ alpejski (ω) z typem lambda (λ) na tablicy wzrostu i wskaźnika głównego ścierają się ze sobą, lecz jest to zupełnie zrozumiałe, gdyż typy te różniące się między sobą pigmentacją, kształtem twarzy i nosa, wzrost i kształt głowy mają zbliżony, więc przy podziale tej właśnie tablicy korelacji znalazły się w jednej klasie. Typ lambda (λ) okazuje pewną skłonność ku dłuższym głowom, co zaznacza się na tablicy wskaźnika głównego z włosami, przesunięciem z klasy wsk. 86—101 do 83—85. To samo obserwujemy u typu alpejskiego, na tablicy wskaźnika głównego z kształtem twarzy.

Pomimo trudności jakie natrafiło scharakteryzowanie antropologiczne ludności męskiej Zagłębia Dąbrowskiego, trudności wynikających z warunków miejscowych, pewne oświetlenie na panujące tam stosunki rasowe rzucić można, gdyż zestawiając wyniki wszystkich stosowanych w niniejszej pracy metod, widzi się, że presłowiański, alpejski i subnordyczny (βωγ) powtarzają się w rezultatach każdej z nich, przez co zyskują na mocy; można więc ze znaczną dozą prawdopodobieństwa powiedzieć, że są to typy charakterystyczne dla dzisiejszej robotniczej ludności pow. Będzińskiego, z których typ alpejski (ω) w dużym stopniu a subnordyczny (γ) prawdopodobnie całkowicie są elementami napływowemi. Co zaś do lambdy, to i ten typ uwypukla się b. wyraźnie. Najmniej pewnym jest tu typ północno-europejski, który prawdopodobnie zatracił swoją samodzielność na rzecz uchwyconej metodą nadwyżek liczebności grupy alfowo-betowej (α-β).

LITERATURA.

Ammon. Die natürliche Auslese beim Menschen.

Czekanowski J. 1913. Zarys metod statystycznych w zastosowaniu do antropologji. Prace Tow. Nauk. Warsz. Tom. V.

Czekanowski J. 1921. Z badań uwarstwienia etniczno-społecznego Polski. Prace Komisji Matemat. Przyrod. Tow. Przyjaciół Nauk w Poznaniu. Serja B, Tom. I. Zeszyt I. Poznań.

Daffner F. 1902. Die Wachstum des Menschen. Leipzig, 2-te Auflage.

Deniker 1902. Czełowieczeskija rasy. S. Petersburg.

Krzywicki L. 1912. Charakterystyka ludności ziem polskich i dzielnic ościennych. Encyklopedja Polska, Tom I. Akademja Umiejętności.

Lencewicz St. 1911. Charakterystyka Antropologiczna ludności Smardzewic (pow. Opoczyński woj. Radomskie), Sprawozd. z pos. Tow. Nauk. Warszaw. Tom IV, Zesz. 9, Warszawa.

Lencewicz St. 1914. Dalsze studja antropologiczne w powiecie Opoczyńskim. Pam. fizjograf. Tom. XXII Warsz.

Lencewicz. St. 1916. Ludność gór Kieleckich pod względem antropologicznym. Sprawozdania z pos. Tow. Nauk., Warsz. Tom VII, Zesz. 7. Warszawa.

Loth E. 1914. Wskazówki do badań antropologicznych na człowieku żywym. Prace Tow. Nauk. Warsz., Warszawa.

Majer i Kopernicki 1877. Charakterystyka fizyczna ludności galicyjskiej. Zbiór wiadomości do antropologji krajowej, Tom. I Akademja Um. Kraków.

Majer i Kopernicki 1885. Charakterystyka fizyczna etc. Serja II Tamże Tom IX.

Mydlarski 1924. Analiza antropologiczna ludności powiatu Pilzneńskiego. Lwów. Tow. Nauk. Archiwum Dział III, Zesz. 8.

Martin R. 1914. Lehrbuch der Anthropologie. Jena.

Olechnowicz W. 1897. Charakterystyka antropologiczna ludności pow. Opatowskiego woj. Radomskiego. Mat. Antrop.-archeol. i etnograf. Tom. II, Akademja Umiej. Kraków.

Rosiński B. Ks. 1923. Charakterystyka antropol. ludności pow. Pułtuskiego „Kosmos" Czasopismo Pol. Tow. Przyrodn. im. Kopernika Tom 48.

Stołyhwo K. 1924. Analiza typów antropologicznych (Światowit, Tom XII) Warszawa.

Talko-Hryncewicz J. 1916. Górale polscy jako grupa antropologiczna Księga pamiątkowa ku czci Bol. Orzechowicza, Tom I. Lwów. Tow. dla Popierania Nauki Polskiej.

7. Romuald Minkiewicz. Możności autochromatyczne oka ludzkiego (analiza t. zw. chaosu świetlnego).

8. Leonja Papierbuchówna. Zmysł i pamięć kierunku przedmiotu u żab (metoda nałogu) (przedstawił R. Minkiewicz.

Kazimierz Żorawski.

O pewnej własności ruchów sztywnych i kompleksów linjowych.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat. przyr. Tow. Nauk. Warsz. w dniu 29 kwietnia 1916 r.

W ustępie 1 tej pracy przytaczamy zasadnicze wzory kinematyki ciał sztywnych. W ustępach 2 i 3 zajmujemy się rachunkami związanemi z odniesieniem ruchu sztywnego i kompleksu linjowego do nowego układu spółrzędnych, który z biegiem czasu porusza się w przestrzeni. Na podstawie tych wywodów uzasadniamy w ustępie 4 twierdzenie, będące celem tej pracy, a dotyczące wzajemnego stosunku ruchów sztywnych i kompleksów linjowych.

1. Ruch ciała sztywnego, odbywający się w czasie, można przedstawić analitycznie zapomocą równań:

$$(1)\quad \begin{cases} x = a + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y} + a_3 \bar{z}, \\ y = b + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y} + b_3 \bar{z}, \\ z = c + c_1 \bar{x} + c_2 \bar{y} + c_3 \bar{z}. \end{cases}$$

Wielkości, zachodzące w tych równaniach, mają znaczenie następujące: x, y, z oznaczają spółrzędne punktu ciała sztywnego względem prostolinjowego, prostokątnego, nieruchomego układu spółrzędnych; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ oznaczają spółrzędne tegoż punktu ciała sztywnego względem prostolinjowego, prostokątnego, ruchomego układu spółrzędnych, niezmiennie połączonego z ciałem sztywnem; a, b, c ze wskaźnikami i bez wskaźników oznaczają funkcje czasu t, które spełniają tożsamościowo związki:

$$(2)\quad \begin{cases} a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1, \quad (i = 1, 2, 3) \\ a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k) \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +1. \end{cases}$$

Rzeczone ciało sztywne znajduje się w ruchu, jeżeli wielkości a, b, c ze wskaźnikami i bez wskaźników nie są wszystkie jednocześnie niezależne od t. Jeżeliby te wielkości były niezależne od t, to równania (1) określałyby tylko zmianę spółrzędnych prostokątnych.

Tensam ruch ciała sztywnego można przedstawić także zapomocą nieskończenie małego przekształcenia:

$$(3)\quad Wf = \frac{\partial f}{\partial t} + (\lambda + qz - ry)\frac{\partial f}{\partial x} + \\ + (\mu + rx - pz)\frac{\partial f}{\partial y} + (\nu + py - qx)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

W przekształceniu tem wielkości:

$$(4)\qquad p,\ q,\ r,\ \lambda,\ \mu,\ \nu$$

są funkcjami zmiennej t, które w przypadku istotnie zachodzącego ruchu nie są wszystkie jednocześnie tożsamościowo równe zeru. Jeżeliby wszystkie wielkości (4) były tożsamościowo równe zeru, to ciało znajdowałoby się w spoczynku. Funkcje a, b, c ze wskaźnikami i bez wskaźników oraz funkcje (4) tego samego ruchu ciała sztywnego połączone są jedne z drugiemi zapomocą związków:

$$(5)\quad \begin{cases} a_i' = qc_i - rb_i,\ b_i' = ra_i - pc_i,\ c_i' = pb_i - qa_i, \\ \qquad (i = 1, 2, 3) \\ a' = \lambda + qc - rb, \\ b' = \mu + ra - pc, \\ c' = \nu + pb - qa, \end{cases}$$

gdzie akcent jest symbolem jednokrotnego różniczkowania względem t. Danym funkcjom a, b, c ze wskaźnikami i bez wskaźników, spełniającym związki (2), odpowiada jeden określony układ funkcji (4) i jeden określony ruch ciała sztywnego względnie jego spoczynek. Danym funkcjom (4) odpowiada także jeden określony ruch względnie spoczynek ciała sztywnego, ale natomiast odpowiada im nieskończenie wiele układów takich funkcji a, b, c ze wskaźnikami i bez wskaźnikòw, które spełniają związki (2). Ta wielowartościowość daje tylko rozmaite układy spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, niezmiennie połączone z ciałem sztywnem przy jednym i tymsamym ruchu względnie spoczynku tego ciała. Spoczynek ciała sztywnego dogodnie będzie uważać jako szczególny przypadek ruchu tego ciała. Dogodnie będzie także czasem nazywać ruch ciała sztywnego wprost ruchem sztywnym.

2. Niech będzie teraz nieskończenie małe przekształcenie:

$$(6)\quad Df = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\xi + \beta z - \gamma y\right)\frac{\partial f}{\partial x} +$$
$$+ \left(\eta + \gamma x - \alpha z\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\zeta + \alpha y - \beta x\right)\frac{\partial f}{\partial z},$$

gdzie

$$(7)\qquad \alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$$

oznaczają funkcje zmiennej t. To nieskończenie małe przekształcenie Df określa ruch sztywny naogół różny od uważanego poprzednio ruchu Wf. Postarajmy się odnieść ruch Df do układu spółrzędnych $\bar x, \bar y, \bar z$, określonego równaniami (1) ustępu 1. Jeżeli naskutek tych równań funkcja f zmiennych x, y, z, t przechodzi w funkcję $\bar f$ zmiennych $\bar x, \bar y, \bar z, t$, to nieskończenie małe przekształcenie Df przechodzi na skutek tychże równań w nieskończenie małe przekształcenie:

$$(8)\qquad \overline{Df} = \frac{\partial \bar f}{\partial t} + \left(\bar\xi + \bar\beta\bar z - \bar\gamma\bar y\right)\frac{\partial \bar f}{\partial \bar x} +$$
$$+ \left(\bar\eta + \bar\gamma\bar x - \bar\alpha\bar z\right)\frac{\partial \bar f}{\partial \bar y} + \left(\bar\xi + \bar\alpha\bar y - \bar\beta\bar x\right)\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z},$$

gdzie

$$(9)\qquad \bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma, \bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta$$

oznaczają funkcje zmiennej t, które określają się przez funkcje (7) i funkcje a, b, c ze wskaźnikami i bez wskaźników zapomocą wzorów następujących:

$$(10)\left\{\begin{aligned}
\bar\alpha &= a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma - (a_3 a_2' + b_3 b_2' + c_3 c_2'),\\
\bar\beta &= a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma - (a_1 a_3' + b_1 b_3' + c_1 c_3'),\\
\bar\gamma &= a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma - (a_2 a_1' + b_2 b_1' + c_2 c_1'),\\
\bar\xi &= a_1(\xi - a') + b_1(\eta - b') + c_1(\zeta - c') + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ a & b & c\end{vmatrix},\\
\bar\eta &= a_2(\xi - a') + b_2(\eta - b') + c_2(\zeta - c') + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2\\ \alpha & \beta & \gamma\\ a & b & c\end{vmatrix},\\
\bar\zeta &= a_3(\xi - a') + b_3(\eta - b') + c_3(\zeta - c') + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3\\ \alpha & \beta & \gamma\\ a & b & c\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Gdybyśmy w szczególności przekształcenie (1) zastosowali do ruchu sztywnego Wf, to otrzymalibyśmy rezultat, który można wyrazić równością:

$$Wf = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}.$$

Równość ta wynika bezpośrednio stąd, że układ $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ jest niezmiennie związany z ciałem sztywnem, poruszającem się według prawa, określonego nieskończenie małem przekszałceniem Wf. Rezultat ten można także sprawdzić na podstawie wzorów (10). Istotnie, przyjmując we wzorach tych:

$$\alpha = p, \ \beta = q, \ \gamma = r,$$
$$\xi = \lambda, \ \eta = \mu, \ \zeta = \nu$$

i podstawiając w nich zamiast wielkości a'_k, b'_k, c'_k $(k = 1, 2, 3)$ i a', b', c' wyrażenia (5), dojdziemy do wyniku:

$$\bar{\alpha} = 0, \ \bar{\beta} = 0, \ \bar{\gamma} = 0, \ \bar{\xi} = 0, \ \bar{\eta} = 0, \ \bar{\zeta} = 0,$$

co jest sprawdzeniem rzeczonego rezultatu.

3. Niech będzie następnie wyrażenie Pfaffa:

$$(11) \qquad dP = (l + hz - ky)\, dx + \\ + (m + kx - gz)\, dy + (n + gy - hx)\, dz, \text{[1]}$$

gdzie

$$(12) \qquad g, h, k, l, m, n$$

są funkcjami zmiennej t, które nie są wszystkie jednocześnie tożsamościowo równe zeru. Jeżeli wyrażenie to odniesiemy do układu spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, określonego równaniami (1), to otrzymamy wyrażenie:

$$(13) \qquad d\bar{P} = (\bar{l} + \bar{h}\bar{z} - \bar{k}\bar{y})\, d\bar{x} + \\ + (\bar{m} + \bar{k}\bar{x} - \bar{g}\bar{z})\, d\bar{y} + (\bar{n} + \bar{g}\bar{y} - \bar{h}\bar{x})\, d\bar{z},$$

gdzie

$$(14) \qquad \bar{g}, \bar{h}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$$

są funkcjami zmiennej t, które określają się przez wielkości (12) oraz przez wielkości a, b, c ze wskaźnikami i bez wskaźników zapomocą wzorów:

---

[1]) Wyrażenie dP wogóle nie jest różniczką zupełną.

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
\bar g &= a_1 g + b_1 h + c_1 k,\\
\bar h &= a_2 g + b_2 h + c_2 k,\\
\bar k &= a_3 g + b_3 h + c_3 k,\\
\bar l &= a_1 l + b_1 m + c_1 n + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix},\\
\bar m &= a_2 l + b_2 m + c_2 n + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix},\\
\bar n &= a_3 l + b_3 m + c_3 n + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

Niech będzie nadto nieskończenie małe przekształcenie:

$$
(16)\qquad Tf = (l + hz - ky)\frac{\partial f}{\partial x} + \\
+ (m + kx - gz)\frac{\partial f}{\partial y} + (n + gy - hx)\frac{\partial f}{\partial z}.
$$

Jeżeli to nieskończenie małe przekształcenie odniesiemy do układu $\bar x$, $\bar y$, $\bar z$ określonego równaniami (1), to otrzymamy nieskończenie małe przekształcenie:

$$
(17)\qquad \bar T \bar f = (\bar l + \bar h \bar z - \bar k \bar y)\frac{\partial \bar f}{\partial \bar x} + \\
+ (\bar m + \bar k \bar x - \bar g \bar z)\frac{\partial \bar f}{\partial \bar y} + (\bar n + \bar g \bar y - \bar h \bar x)\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}.
$$

Możemy powiedzieć przytem, że wyrażenie Pfaffa dP i nieskończenie małe przekształcenie Tf są utworami spółzmiennemi w stosunku do przekształceń określonych równaniami (1).

Zauważmy tu jeszcze, że równanie różniczkowe:

$$dP = 0$$

określa kompleks linji prostych, wogóle zmieniający się z biegiem czasu.

Każdy ruch sztywny, posiadający własność, że w każdym momencie szybkość każdego punktu jest prostopadła do linji prostej, przechodzącej przez ten punkt i należącej w tym momencie do kompleksu $dP = 0$, określa się nieskończenie małem przekształceniem:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \rho\, Tf,$$

gdzie ρ oznacza dowolną funkcję czasu t, nierówną tożsamościowo zeru.

4. Na podstawie wzorów podanych w poprzednich ustępach udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

Twierdzenie. *Mając w kartezjuszowskim prostokątnym układzie spółrzędnych* x, y, z *dowolnie dany ruch sztywny:*

$$(6) \qquad Df = \frac{\partial f}{\partial t} + (\xi + \beta z - \gamma y) \frac{\partial f}{\partial x} + \\ + (\eta + \gamma \alpha - \alpha z) \frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta + \alpha y - \beta x) \frac{\partial f}{\partial z},$$

gdzie

$$(7) \qquad \alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$$

oznaczają funkcje czasu t *oraz dowolnie dany kompleks linjowy:*

$$(11) \qquad dP = (l + h z - k y)\, dx + \\ + (m + k x - g z)\, dy + (n + g y - h x)\, dz = 0,$$

gdzie

$$(12) \qquad g, h, k, l, m, n$$

oznaczają funkcje czasu t, *które nie są wszystkie jednocześnie tożsamościowo równe zeru, możemy znaleść nieskończenie wiele takich kartezjuszowskich, prostokątnych układów spółrzędnych* $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ *nakładalnych na układ* x, y, z *i wogóle poruszających się z biegiem czasu względem tego układu, że odnosząc ruch* Df *i kompleks* $dP = 0$ *do układu* $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, *otrzymamy względem niego ruch* $\overline{Df}$ *i kompleks* $d\bar{P} = 0$, *posiadające własność następującą: szybkość każdego punktu poruszającego się ruchem* $\overline{Df}$ *jest w każdym momencie prostopadła do linji prostej przechodzącej przez ten punkt i należącej w tym momencie do kompleksu* $d\bar{P} = 0$.

Układ $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, *posiadający tę własność, otrzymuje się przez dowolne niezmienne połączenie z ciałem sztywnem trójścianu trzech prostopadłych osi, nakładalnego na* x, y, z *i poddanie tego ciała sztywnego ruchowi, określonemu przez nieskończenie małe przekształcenie:*

$$(18) \qquad Wf = Df - \omega\, Tf,$$

gdzie Tf oznacza nieskończenie małe przekształcenie:

$$(16) \qquad Tf = (l + hz - ky)\frac{\partial f}{\partial x} + $$
$$+ (m + kx - gz)\frac{\partial f}{\partial y} + (n + gy - hx)\frac{\partial f}{\partial z},$$

a ω jest funkcją czasu t, która może być wybrana dowolnie byleby nie była tożsamościowo równą zeru.

W celu udowodnienia tego twierdzenia zauważmy, że szybkość każdego punktu, poruszającego się ruchem $\overline{Df}$, jest wtedy i tylko wtedy w każdym momencie prostopadła do linji prostej przechodzącej przez ten punkt i należącej w tym momencie do kompleksu $\overline{dP} = 0$, gdy istnieje funkcja ω zmienniej t, nie równa tożsamościowo zeru, dla której tożsamościowo zachodzą równości

$$\overline{\alpha} - \omega \overline{g} = 0,\ \overline{\beta} - \omega \overline{h} = 0,\ \overline{\gamma} - \omega \overline{k} = 0,$$
$$\overline{\xi} - \omega \overline{l} = 0,\ \overline{\eta} - \omega \overline{m} = 0,\ \overline{\zeta} - \omega \overline{n} = 0.$$

Na podstawie związków (10) i (15) otrzymujemy stąd warunki:

$$a_3 a_2' + b_3 b_2' + c_3 c_2' = a_1 (\alpha - \omega g) + b_1 (\beta - \omega h) + c_1 (\gamma - \omega k),$$
$$a_1 a_3' + b_1 b_3' + c_1 c_3' = a_2 (\alpha - \omega g) + b_2 (\beta - \omega h) + c_2 (\gamma - \omega k),$$
$$a_2 a_1' + b_2 b_1' + c_2 c_1' = a_3 (\alpha - \omega g) + b_3 (\beta - \omega h) + c_3 (\gamma - \omega k),$$
$$a_i a' + b_i b' + c\, c' = a\, (\xi - \omega l) + b_1 (\eta - \omega m) + c_i (\zeta - \omega n),$$
$$+ \begin{vmatrix} a_i, & b_i, & c_i \\ \alpha - \omega g, & \beta - \omega h, & \gamma - \omega k \\ a, & b, & c \end{vmatrix},$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

które można łatwo doprowadzić do postaci:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} a_i' = (\beta - \omega h)\, c_i - (\gamma - \omega k)\, b_i, \\ b_i' = (\gamma - \omega k)\, a_i - (\alpha - \omega g)\, c_i, \\ c_i' = (\alpha - \omega g)\, b_i - (\beta - \omega h)\, a_i, \end{array} \right\} (i = 1, 2, 3) \\ a' = \xi - \omega l + (\beta - \omega h)\, c - (\gamma - \omega k)\, b, \\ b' = \eta - \omega m + (\gamma - \omega k)\, a - (\alpha - \omega g)\, c, \\ c' = \zeta - \omega n + (\alpha - \omega g)\, b - (\beta - \omega h)\, a. \end{array} \right.$$

Porównywając te warunki ze związkami (5), widzimy, że dla wyznaczenia układu $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, względem którego zachodzi rzeczona własność, trzeba trójścian osi łączyć niezmiennie z ciałem sztywnem poruszającem się według prawa określonego nieskończenie małem przekształceniem (18). W ten sposób twierdzenie nasze jest udowodnione.

Młądz, w Domu Kasy im. Mianowskiego; lipiec 1925 r.

Kazimierz Żorawski.

Spółzmienne punkty rzeczywiste punktów zespolonych.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat. przyr. Tow. Nauk. Warsz. w dniu 29 kwietnia 1926 r.

W publikacjach, odnoszących się do geometrji dziedziny zespolonej, znajdują się wzmianki lub rozważania związane z wymaganiem, aby przy każdem przekształceniu punktu zespolonego, należącem do pewnej kategorji przekształceń, jego obraz rzeczywisty ulegał temu samemu przekształceniu, co punkt zespolony[1]). Te wzmianki i rozważania odnoszą się bądź do przekształceń rzeczywistych grupy pokrewieństwa, bądź też do przekształceń rzeczywistych grupy ruchów euklidesowych. Ponieważ jednak temat określenia obrazów rzeczywistych punktu zespolonego, spełniających takie wymagania, nie jest w znanej mi literaturze geometrji dziedziny urojonej wyczerpany, przeto podejmuję opracowanie tego tematu i pewnej jego modyfikacji w publikacji niniejszej, stosując przytem nieskończenie małe przekształcenia rzeczonych grup przekształceń.

1. Niech będzie euklidesowa przestrzeń n-wymiarowa. W przypadku $n = 1$ przestrzenią taką jest linja prosta. Jeżeli nadamy jej własność osi spółrzędnych, to położenie punktów w tej przestrzeni będziemy mogli określać odciętemi na tej osi. W przypadkach zaś $n \geqslant 2$ możemy obrać w tej przestrzeni prostolinjowy prostokątny układ spółrzędnych i określać w niej położenie punktów spółrzędnemi w tym układzie. Niech będzie teraz w rzeczonej przestrzeni n-wymiarowej bądź w jednym, bądź w drugim z tych przypadków punkt zespolony i oznaczmy jego spółrzędne przez x_k $(k = 1, 2, \dots, n)$.

---

[1]) M. Marie. Théorie des fonctions de variables imaginaires. Tome premier. Nouvelle géométrie analytique. Paris 1874 p. 8-12.

E. Study. Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Erstes Heft. Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. Leipzlg und Berlin 1911 p. 8-9.

J. L. Coolidge. The Geometry of the complex domain. Oxford 1924 p. 77-78.

Jeżeli mamy:

$$(1) \quad x_k = x'_k + i\, x''_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie *i* oznacza pierwiastek kwadratowy z wielkości — 1, a x'_k i x''_k oznaczają wielkości rzeczywiste, to punkt jest *punktem rzeczywistym,* gdy jednocześnie zachodzą równości:

$$x''_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

jest zaś *punktem urojonym,* gdy jednoczesne zachodzenie wszystkich tych równości niema miejsca. Do każdego punktu urojonego należy pewna prosta rzeczywista. Spółrzędne X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ punktów tej linji prostej napiszemy w postaci:

$$(2) \quad X_k = x'_k + \omega\, x''_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie ω oznacza zmienny parametr. Tę linję prostą nazwiemy *prostą rzeczywistą urojonego punktu* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Niech będzie grupa przekształceń zmiennych x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ na zmienne $\overline{x}_l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ określona równaniami:

$$(3) \quad \overline{x}_l = a_l + \sum_1^n{}^k\, a_{lk}\, x_k, \quad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie wielkości a_l oznaczają dowolne parametry rzeczywiste, a wielkości a_{lk} dowolne parametry rzeczywiste, czyniące zadość warunkowi, by wyznacznik $|a_{lk}|$ nie był równy zeru. Grupa ta nazywa się *ogólną grupą linjową rzeczywistą.* Dla krótkości będziemy ją także nazywać *grupą L.* Jeżeli zastosujemy wzory (1) oraz wzory analogiczne:

$$\overline{x}_l = \overline{x}'_l + i\, \overline{x}''_l, \quad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie $\overline{x}'_l$ i $\overline{x}''_l$ oznaczają wielkości rzeczywiste, to z równań (3) otrzymamy równania:

$$(4) \quad \left.\begin{array}{l} \overline{x}'_l = a_l + \sum_1^n{}^k\, a_{l_k}\, x'_k, \\[2ex] \overline{x}''_l = \sum_1^n{}^k\, a_{l_k}\, x''_k, \end{array}\right\}, \quad (l = 1, 2, \ldots n)$$

z których nawzajem wynikają równania (3). Równania (4) określają grupę przekształceń zmiennych rzeczywistych x'_k, x''_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ na zmienne rzeczywiste $\overline{x}'_l$, $\overline{x}''_l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$. Równania te są tylko innem wysłowieniem treści równań (3) dla punktów zespolonych. Z tego powodu grupę określoną równaniami (4) nazywać będziemy także *grupą L.*

Zajmiemy się zapytaniami następującemi:

1) Jak należy wybrać n rzeczywistych funkcyj:

$$\xi_k = \varphi_k (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; x''_1, x''_2, \ldots, x''_n), \tag{5}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

aby przy każdym wyborze parametrów a_l i a_{lk} zachodziły na skutek przekształcenia (4) równości:

$$\overline{\xi}_l = a_l + \sum_1^n {}^k a_{lk} \xi_k \quad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie $\overline{\xi}_l$ oznaczają funkcje:

$$\overline{\xi}_l = \varphi_l (\overline{x'_1}, \overline{x'_2}, \ldots, \overline{x'_n}; \overline{x''_1}, \overline{x''_2}, \ldots, \overline{x''_n}) \ ?$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n)$$

2) Jak należy wybrać n rzeczywistych funkcyj:

$$\eta_k = \psi_k (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; x''_1, x''_2, \ldots, x''_n), \tag{6}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

aby przy każdym wyborze parametrów a_l i a_{lk} zachodziły na skutek przekształcenia (4) równości:

$$\overline{\eta}_l = \sum_1^n {}^k a_{lk} \eta_k, \ (l = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie $\overline{\eta}_l$ oznaczają funkcje:

$$\overline{\eta}_l = \psi_l (\overline{x'_1}, \overline{x'_2}, \ldots, \overline{x'_n}; \overline{x''_1}, \overline{x''_2}, \ldots, \overline{x''_n}) \ ?$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n)$$

Zmienny punkt, którego spółrzędne ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem uważanego powyżej układu prostokątnego określone są odpowiednio funkcjami φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, posiadającemi własność wyszczególnioną pod 1), nazwiemy *punktem spółzmiennym (zmiennego) punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *względem grupy L.*

Zmienny punkt zaś, którego spółrzędne η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, względem uważanego powyżej układu prostokątnego określone są odpowiednio funkcjami ψ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, posiadającemi własność wyszczególnioną pod 2), nazwiemy *punktem jednorodnie spółzmiennym (zmiennego) punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *względem grupy* L.

2. Odpowiedź na powyższe zapytania uzyskać można łatwo przez zastosowanie przekształceń nieskończenie małych. Nieskończenie małe przekształcenia grupy L w zmiennych x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ są:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \, (\lambda = 1, 2, \ldots, n); \; x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \, (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

w zmiennych zaś x'_λ, x''_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ są:

$$\frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} \, (\lambda = 1, 2, \ldots, n); \; x'_\mu \frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} + x''_\mu \frac{\partial f}{\partial x''_\lambda} \, (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Punkt ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jest punktem spółzmiennym punktu x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem grupy L wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań (5) jest niezmiennym układem równań przy wszelkich przekształceniach grupy o nieskończenie małych przekształceniach:

$$\frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \xi_\lambda}, \; (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x'_\mu \frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} + x''_\mu \frac{\partial f}{\partial x''_\lambda} + \xi_\mu \frac{\partial f}{\partial \xi_\lambda}, \; (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Stąd wynika, że warunki konieczne i dostateczne, aby punkt ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ był punktem spółzmiennym punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem grupy L, polegają na tożsamościowem zachodzeniu systemu równości:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = 1 \; (k = 1, 2, \ldots, n), \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_\lambda} = 0 \; (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n; \, k \neq \lambda),$$

$$x'_\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_k} + x''_\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_k} = \varphi_\mu \; (k, \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x'_\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_\lambda} + x''_\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_\lambda} = 0 \; (k, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n; \, k \neq \lambda).$$

Ten system równości jest równoważny z systemem równości:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_\lambda} = 0, \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_\lambda} = 0 \; (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n; \, k \neq \lambda),$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k'} = 1, \; x_\mu' + x_\mu'' \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k''} = \varphi_\mu \; (k, \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

z którego wynika łatwo rezultat:

$$\varphi_k = x_k' + \omega\, x_k'', \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie ω oznacza stałą dowolną. Dochodzimy przeto do następującego twierdzenia:

Twierdzenie I. *Każdy punkt, którego spółrzędne określają się wzorami:*

$$(7) \qquad \xi_k = x_k' + \omega\, x_k'', \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie ω posiada rzeczywistą wartość stałą, którą można obrać dowolnie, jest punktem spółzmiennym punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem grupy L. Prócz tych punktów spółzmiennych niema żadnych innych punktów spółzmiennych punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem grupy L. Zależność punktu spółzmiennego ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ od punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ scharakteryzować można w ten sposób, że do każdego punktu urojonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ należy punkt ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ położony na prostej rzeczywistej tego urojonego punktu i odpowiadający rzeczonej stałej wartości parametru ω, do każdego zaś rzeczywistego punktu x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ należy tenże sam punkt rzeczywisty.

Dla wyznaczenia punktów η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jednorodnie spółzmiennych punktu x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem grupy L zastosować można nieskończenie małe przekształcenia:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\lambda'} \; (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_\mu' \frac{\partial f}{\partial x_\lambda'} + x_\mu'' \frac{\partial f}{\partial x_\lambda''} + \eta_\mu \frac{\partial f}{\partial \eta_\lambda} \; (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Zauważymy mianowicie, że punkt η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jest punktem o żądanej własności wtedy i tylko wtedy, gdy podane nieskończenie małe przekształcenia pozostawiają bez zmiany układ równań (6), t. j. gdy spełnione są tożsamościowo równości:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_\lambda'} = 0 \quad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x'_\mu \frac{\partial \psi_k}{\partial x'_k} + x''_\mu \frac{\partial \psi_k}{\partial x''_k} = \psi_\mu \quad (k, \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x'_\mu \frac{\partial \psi_k}{\partial x'_\lambda} + x''_\mu \frac{\partial \psi_k}{\partial x''_\lambda} = 0 \quad (k, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda).$$

Równości te zastąpić można równościami:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x'_\lambda} = 0 \ (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n), \ \frac{\partial \psi_k}{\partial x''_\lambda} = 0 \ (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq \lambda)$$

$$x''_\mu \frac{\partial \psi_k}{\partial x''_k} = \psi_\mu, \ (k, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

z których wynika rezultat:

$$\psi_k = \omega x''_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie ω oznacza stałą dowolną. Otrzymujemy przeto twierdzenie następujące.

Twierdzenie II. *Każdy punkt, którego spółrzędne określają się wzorami:*

(8) $$\eta_k = \omega x''_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie ω posiada rzeczywistą wartość stałą, którą można obrać dowolnie, jest punktem jednorodnie spółzmiennym punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem grupy L. Prócz tych punktów jednorodnie spółzmiennych niema żadnych innych punktów jednorodnie spółzmiennych punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem grupy L. W przypadkach $n \geqslant 2$ można zależność punktu jednorodnie spółzmiennego η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ od punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ scharakteryzować w ten sposób, że do każdego punktu urojonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ należy punkt η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, położony na prostej przechodzącej przez początek spółrzędnych i równoległej do prostej rzeczywistej tego urojonego punktu oraz odpowiadający w ten sposób stałej wartości parametru ω, że prosta łącząca punkt ten z należącym do punktu x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ i tejże wartości parametru ω punktem ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jest równoległa do prostej łączącej początek spółrzędnych z punktem x'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$; do każdego zaś punktu rzeczywistego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ należy w tym przypadku początek spółrzędnych.

3. Jeżeli w równaniach (3) wielkości a_l oznaczają dowolne parametry rzeczywiste, a wielkości a_{lk} parametry, które mogą przybierać wszelkie wartości rzeczywiste spełniające związki:

$$(9)\quad \begin{cases} \sum\limits_{1}^{n}{}^{l}\, a_{lk}^2 = 1, \ (k = 1, 2, \ldots, n), \\ \sum\limits_{1}^{n}{}^{l}\, a_{lk}\, a_{lk'} = 0, \ (k, k' = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq k') \\ \qquad\qquad |a_{lk}| = +1, \end{cases}$$

to równania te określają *grupę ruchów euklidesowych.* W zastosowaniu do punktów zespolonych można ją przy uwzględnieniu tych samych warunków na parametry określić równaniami (4). Dla krótkości nazywać ją będziemy i w jednem i w drugiem sformułowaniu *grupą E.*

Dla grupy E możemy także łatwo rozwiązać zadania analogiczne do zadań 1) i 2) ustępu 1. W zastosowaniu do grupy E zadania te modyfikują się tylko ograniczeniem dowolności parametrów a_{lk}, a mianowicie warunkiem, by a_{lk} mogły przybierać wszelkie wartości rzeczywiste, które spełniają równości (9). W związku z tem zmienny punkt ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, którego spółrzędne określone są odpowiednio funkcjami φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, czyniącemi zadość zmodyfikowanym w ten sposób warunkom zadania 1), nazwiemy *punktem spółzmiennym (zmiennego) punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *względem grupy E.* Podobnież zmienny punkt η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, którego spółrzędne określone są odpowiednio funkcjami ψ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, czyniącemi zadość zmodyfikowanym w ten sposób warunkom zadania 2), nazwiemy *punktem jednorodnie spółzmiennym (zmiennego) punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *względem grupy E.*

Wyznaczenie tych punktów uzyskamy także przez zastosowanie przekształceń nieskończenie małych. Nieskończenie małe przekształcenia grupy E w zmiennych x_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ są:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} - x_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \ (\lambda, \ \mu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda \neq \mu)$$

w zmiennych zaś x'_λ, x''_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ są:

$$\frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x'_\mu \frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} - x'_\lambda \frac{\partial f}{\partial x'_\mu} + x''_\mu \frac{\partial f}{\partial x''_\lambda} - x''_\lambda \frac{\partial f}{\partial x''_\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n; \ \lambda \neq \mu).$$

Zajmiemy się naprzód rozwiązaniem rzeczonych zadań dla przestrzeni $n \geqslant 3$.

Punkt ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jest spółzmiennym punktem punktu x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem grupy E, gdy układ równań (5) jest niezmiennym układem grupy o nieskończenie małych przekształceniach:

$$\frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \xi_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x'_\mu \frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} - x'_\lambda \frac{\partial f}{\partial x'_\mu} + x''_\mu \frac{\partial f}{\partial x''_\lambda} - x''_\lambda \frac{\partial f}{\partial x''_\mu} + \xi_\mu \frac{\partial f}{\partial \xi_\lambda} - \xi_\lambda \frac{\partial f}{\partial \xi_\mu}$$

$$(\lambda, \ \mu = 1, 2, \ldots, n; \ \lambda \neq \mu).$$

Stąd wynika, że dla odpowiednich funkcji φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ potrzeba i wystarcza, by spełniały one tożsamościowo związki następujące:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_k} = 1 \ (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_\lambda} = 0 \ (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n; \ k \neq \lambda),$$

$$x'_\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_k} - x'_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_\mu} + x''_\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_k} - x''_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_\mu} = \varphi_\mu$$

$$(k, \mu = 1, 2, \ldots, n; \ k \neq \mu),$$

$$x'_\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_\lambda} - x'_\lambda \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_\mu} + x''_\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_\lambda} - x''_\lambda \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_\mu} = 0$$

$$(k, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n; \ k \neq \lambda, \ k \neq \mu, \ \lambda \neq \mu).$$

Z tym układem związków jest równoważny układ związków:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_k} = 1 \ (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_\lambda} = 0 \ (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n; \ k \neq \lambda).$$

$$x'_\mu + x''_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x''_k} - x''_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_\mu} = \varphi_\mu \quad (k, \ \mu = 1, 2, \ldots, n; \ k \neq \mu),$$

$$x''_\mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_\lambda} - x''_\lambda \frac{\partial \varphi_k}{\partial x''_\mu} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} k, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n \\ k \neq \lambda, \; k \neq \mu, \; \lambda \neq \mu \end{array} \right).$$

Ale równania trzeciego wiersza tego układu orzekają, że funkcja φ_k zależy od wielkości $x_1'', x_2'', \ldots, x''_{k-1}, x''_{k+1}, \ldots, x''_n$ tylko przez pośrednictwo sumy kwadratów:

$$x_1''^2 + x_2''^2 + \cdots + x''^2_{k-1} + x''^2_{k+1} + \cdots + x''^2_n.$$

Z tej uwagi i z równań pierwszego wiersza tego układu wynika, że funkcje φ_k można przedstawić w postaci:

(10) $$\varphi_k = x'_k + w_k\,(x''_k, \tau)\, x''_k, \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie przyjęto oznaczenie:

$$\tau = \sum_1^n {}_l\, x''^2_l.$$

Jeżeli wyrażenia (10) podstawimy w równania drugiego wiersza rzeczonego układu, to dojdziemy do związków:

$$x''_k \frac{\partial w_k}{\partial x''_k} = w_\mu - w_k, \; (k, \mu = 1, 2, \ldots, n\,;\, k \neq \mu)$$

z których wynika, że wszystkie funkcje w_k są sobie równe i że zależą tylko od τ Dochodzimy przeto do wzorów:

$$\varphi_k = x'_k + \omega\,(\tau)\; x''_k, \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

które sprawdzają wszystkie związki uważanego układu przy dowolnej funkcji $\omega\,(\tau)$.

Otrzymujemy więc twierdzenie następujące:

Twierdzenie III. *Każdy punkt, którego spółrzędne określają się wzorami:*

(11) $$\xi_k = x'_k + \omega\,(\tau)\; x''_k, \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie $\omega\,(\tau)$ *oznacza funkcję rzeczywistą wyrażenia* $\tau = \sum_1^n {}_l\, x''^2_l$, *którą można obrać dowolnie, jest punktem spółzmiennym punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *względem grupy E. Przy spełnieniu warunku* $n > 3$ *niema żadnych innych punktów spółzmiennych punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *względem grupy E.*

Do punktów (11) *stosuje się analogiczna uwaga do uwagi twierdzenia* I, *charakteryzującej zależność punktów* (7) *od punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Przechodząc teraz do punktów jednorodnie spółzmiennych, widzimy, że punkt η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jest wtedy i tylko wtedy punktem jednorodnie spółzmiennym punktu x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ względem grupy E, gdy układ równań (6) jest niezmiennym układem grupy o nieskończenie małych przekształceniach:

$$\frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x'_\mu \frac{\partial f}{\partial x'_\lambda} - x'_\lambda \frac{\partial f}{\partial x'_\mu} + x''_\mu \frac{\partial f}{\partial x''_\lambda} - x''_\lambda \frac{\partial f}{\partial x''_\mu} + \eta_\mu \frac{\partial f}{\partial \eta_\lambda} - \eta_\lambda \frac{\partial f}{\partial \eta_\mu},$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n; \ \lambda \neq \mu)$$

Stąd dla odpowiednich funkcji ψ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ wynikają warunki:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x'_\lambda} = 0 \ (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x''_\mu \frac{\partial \psi_k}{\partial x''_k} - x''_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x''_\mu} = \psi_\mu \ (k, \mu = 1, 2, \ldots, n; \ k \neq \mu),$$

$$x''_\mu \frac{\partial \psi_k}{\partial x''_\lambda} - x''_\lambda \frac{\partial \psi_k}{\partial x''_\mu} = 0. \ \left(\begin{array}{l} k, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n; \\ k \neq \lambda, \ k \neq \mu, \ \lambda \neq \mu \end{array} \right)$$

Z warunków tych taką samą drogą jak w poprzednim przypadku dojdziemy do wyniku:

$$\psi_k = \omega(\tau) \, x''_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie $\omega(\tau)$ jest dowolną funkcją wielkości:

$$\tau = \sum_1^n {}^l \, x''^2_l.$$

Otrzymujemy przeto twierdzenie:

Twierdzenie IV. *Każdy punkt, którego spółrzędne określają się wzorami:*

(12) $\eta_k = \omega(\tau) \, x''_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n)$

gdzie $\omega(\tau)$ *oznacza funkcję rzeczywistą wyrażenia* $\tau = \sum_1^n {}^l x''^2_l$, *którą można obrać dowolnie, jest punktem jednorodnie spółzmiennym punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *względem* *grupy E. Przy spełnieniu warunku* $n \geqslant 3$ *niema żadnych innych punktów jednorodnie spółzmiennych punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *względem grupy E. Do punktów* (12) *stosuje się analogiczna uwaga do uwagi twierdzenia* II, *charakteryzującej zależność punktów* (8) *od punktu zespolonego* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

4. Pozostaje jeszcze wyznaczenie punktów spółzmiennych i punktów jednorodnie spółzmiennych względem grupy E na linji prostej i na płaszczyźnie t. j. w przypadkach $n = 1$ i $n = 2$.

W przypadku $n = 1$ mamy nieskończenie małe przekształcenie:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},$$

a więc punkt:

$$\xi_1 = \varphi_1 (x_1', x_1'') \tag{13}$$

jest punktem spółzmiennym wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (13) jest niezmiennem równaniem grupy o nieskończenie małem przekształceniu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1'} + \frac{\partial f}{\partial \xi_1}.$$

Otrzymujemy zatem dla funkcji φ_1 warunek;

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1'} = 1,$$

z którego dla punktów spółzmiennych wynika wzór:

$$\xi_1 = x_1' + w (x_1''),$$

gdzie w jest funkcją, którą można wybrać dowolnie. Podobnież skonstatujemy, że dla punktów jednorodnie spółzmiennych zachodzi wzór:

$$\eta_1 = w (x_1''),$$

gdzie w jest także symbolem funkcji dowolnej.

W przypadku $n = 2$ grupa E ma nieskończenie małe przekształcenia:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Stąd wynika, że punkt:

$$\xi_1 = \varphi_1 (x_1', x_2'; x_1'', x_2''), \quad \xi_2 = \varphi_2 (x_1', x_2'; x_1'', x_2'') \tag{14}$$

jest wtedy i tylko wtedy punktem spółzmiennym zespolonego punktu x_1, x_2 względem tej grupy, gdy układ równań (14) jest niezmiennym układem grupy o nieskończenie małych przekształceniach:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1'} + \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2'} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2},$$

$$x_1' \frac{\partial f}{\partial x_2'} - x_2' \frac{\partial f}{\partial x_1'} + x_1'' \frac{\partial f}{\partial x_2''} - x_2'' \frac{\partial f}{\partial x_1''} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_2} - \xi_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_1}.$$

Dochodzimy zatem do warunków:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1'} = 1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2'} = 0, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1'} = 0, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2'} = 1,$$

$$x_1' \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2'} - x_2' \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1'} + x_1'' \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2''} - x_2'' \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1''} = -\varphi_2,$$

$$x_1' \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2'} - x_2' \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1'} + x_1'' \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2''} - x_2'' \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1''} = \varphi_1.$$

Równania pierwszego wiersza prowadzą do wzorów:

$$\varphi_1 = x_1' + \lambda_1 (x_1'', x_2''), \; \varphi_2 = x_2' + \lambda_2 (x_1'', x_2''), \tag{15}$$

a z równań drugiego i trzeciego wiersza otrzymujemy dla funkcji λ_1 i λ_2 równania:

$$x_1'' \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_2''} - x_2'' \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1''} = -\lambda_2, \; x_1'' \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2''} - x_2'' \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1''} = \lambda_1.$$

Jeżeli w tych równaniach wprowadzimy zamiast funkcji λ_1 i λ_2 funkcje w_1 i w_2 określone związkami:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x_1'' w_1 + x_2'' w_2, \\ \lambda_2 &= x_2'' w_1 - x_1'' w_2, \end{aligned} \tag{16}$$

to otrzymamy równania:

$$x_1'' \left(x_1'' \frac{\partial w_1}{\partial x_2''} - x_2'' \frac{\partial w_1}{\partial x_1''} \right) + x_2'' \left(x_1'' \frac{\partial w_2}{\partial x_2''} - x_2'' \frac{\partial w_2}{\partial x_1''} \right) = 0,$$

$$x_2''\left(x_1''\frac{\partial w_1}{\partial x_2''}-x_2''\frac{\partial w_1}{\partial x_1''}\right)-x_1''\left(x_1''\frac{\partial w_2}{\partial x_2''}-x_2''\frac{\partial w_2}{\partial x_1''}\right)=0,$$

z których wynikają związki:

$$x_1''\frac{\partial w_1}{\partial x_2''}-x_2''\frac{\partial w_1}{\partial x_1''}=0,$$

$$x_1''\frac{\partial w_2}{\partial x_2''}-x_2''\frac{\partial w_2}{\partial x_1''}=0.$$

Związki te orzekają, że funkcje w_1 i w_2 zależą tylko od wielkości:

$$\tau=x_1''^2+x_2''^2.$$

To znaczy, że wzory (15) i (16) prowadzą do punktów spółzmiennych:

$$\xi_1=x_1'+x_1''\,w_1(\tau)+x_2''\,w_2(\tau),$$
$$\xi_2=x_2'+x_2''\,w_1(\tau)-x_1''\,w_2(\tau),$$

gdzie $w_1(\tau)$ i $w_2(\tau)$ są funkcjami wielkości τ, z których każdą można obrać dowolnie. Podobnież dojdziemy dla punktów jednorodnie spółzmiennych do wzorów:

$$\eta_1=x_1''\,w_1(\tau)+x_2''\,w_2(\tau),$$
$$\eta_2=x_2''\,w_1(\tau)-x_1''\,w_2(\tau),$$

gdzie $w_1(\tau)$ i $w_2(\tau)$ oznaczają także dowolne funkcje wielkości τ.

Rezultaty otrzymane w tym ustępie prowadzą do następującego twierdzenia.

Twierdzenie V. *W przypadku $n=1$ wszystkie punkty spółzmienne punktu zespolonego x_1 względem grupy E określają się wzorem:*

(17) $$\xi_1=x_1'+w(x_1''),$$

gdzie w jest symbolem funkcji dowolnej, wszystkie zaś punkty jednorodnie spółzmienne tego punktu zespolonego względem tejże grupy E określają się wzorem:

(18) $$\eta_1=w(x_1''),$$

gdzie w jest także symbolem funkcji dowolnej. W przypadku $n=2$ wszystkie punkty spółzmienne punktu zespolonego x_1, x_2 względem grupy E określają się wzorami:

$$
(19) \qquad \begin{cases} \xi_1 = x_1' + x_1'' w_1(\tau) + x_2'' w_2(\tau), \\ \xi_2 = x_2' + x_2'' w_1(\tau) - x_1'' w_2(\tau), \end{cases}
$$

gdzie

$$
(20) \qquad \tau = x_1''^2 + x_2''^2,
$$

a w_1 i w_2 są symbolami funkcji dowolnych, wszystkie zaś punkty jednorodnie spółzmienne tego punktu zespolonego względem tejże grupy E określają się wzorami:

$$
(21) \qquad \begin{cases} \eta_1 = x_1'' w_1(\tau) + x_2'' w_2(\tau), \\ \eta_2 = x_2'' w_1(\tau) - x_1'' w_2(\tau), \end{cases}
$$

gdzie w_1 i w_2 są także symbolami funkcji dowolnych, a τ oznacza tę samą wielkość co poprzednio.

5. Niech teraz będą w przestrzeni o n wymiarach dwa punkty rzeczywiste, zależne od punktu zespolonego x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) i niech spółrzędne tych punktów rzeczywistych określone będą wzorami:

$$
u_k = U_k(x_1', x_2', \ldots, x_n';\ x_1'', x_2'', \ldots, x_n'') \ (k = 1, 2, \ldots, n),
$$
$$
v_k = V_k(x_1', x_2', \ldots, x_n';\ x_1'', x_2'', \ldots, x_n'') \ (k = 1, 2, \ldots, n).
$$

W przypadkach, gdy wyznacznik funkcyjny $2n$ funkcji U_k, V_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) względem $2n$ zmiennych x_k', x_k'', ($k = 1, 2, \ldots, n$) nie równa się tożsamościowo zeru, nazywać będziemy punkty te *pełnym obrazem punktu zespolonego* x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), w przypadkach zaś, gdy rzeczony wyznacznik funkcyjny równa się tożsamościowo zeru, nazywać będziemy punkty te *niepełnym obrazem punktu zespolonego* x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Na podstawie tego określenia widać bezpośrednio, że dwa punkty jednorodnie spółzmienne punktu zespolonego x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) względem grupy L są zawsze niepełnym obrazem tego punktu oraz że dwa punkty jednorodnie spółzmienne punktu zespolonego x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) względem grupy E są także zawsze niepełnym obrazem tego punktu.

Zbadamy pod tym względem także dwa punkty spółzmienne oraz dwa punkty, z których jeden jest punktem spółzmiennym, drugi zaś jest punktem jednorodnie spółzmiennym. W pierwszym z tych dwóch przypadków nazywać będziemy te dwa punkty *obrazem spółzmiennym pierwszej kategorji*, w drugim zaś *obrazem spółzmiennym drugiej kategorji.*

Dwa punkty spółzmienne względem grupy L wyrazić można wzorami:

$$(22) \qquad \begin{cases} \xi_k = x'_k + a\,x''_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n) \\ \bar{\xi}_k = x'_k + \bar{a}\,x''_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

gdzie a i $\bar{a}$ oznaczają wielkości stałe. Widoczne, że punkty te są wtedy i tylko wtedy pełnym obrazem punktu zespolonego, gdy stałe a i $\bar{a}$ są od siebie różne, t. j. gdy punkty spółzmienne są od siebie różne.

Dwa punkty, z których jeden jest punktem spółzmiennym względem grupy L, drugi zaś jest punktem jednorodnie spółzmiennym względem tejże grupy, wyrazić można wzorami:

$$(23) \qquad \begin{cases} \xi_k = x'_k + a\,x''_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n) \\ \eta_k = b\,x''_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

gdzie a i b oznaczają wielkości stałe. Punkty te są pełnym obrazem zespolonego punktu, gdy stała b jest różną od zera, t. j. gdy drugi z tych punktów nie jest stale początkiem spółrzędnych.

Przechodząc teraz do grupy E, zajmiemy się naprzód przypadkiem linji prostej, t. j. przypadkiem $n = 1$. Dwa punkty spółzmienne względem grupy E można w tym przypadku przedstawić zapomocą wzorów:

$$(24) \qquad \begin{cases} \xi_1 = x'_1 + A\,(x''_1), \\ \bar{\xi}_1 = x'_1 + \bar{A}\,(x''_1), \end{cases}$$

gdzie $A\,(x''_1)$ i $\bar{A}\,(x''_1)$ oznaczają funkcje zmiennej x''_1. Widoczne, że punkty te są pełnym obrazem zespolonego punktu wtedy i tylko wtedy, gdy różnica funkcji $A\,(x''_1)$ i $\bar{A}\,(x''_1)$ nie jest wielkością stałą, t. j. gdy pochodne tych funkcji nie są tożsamościowo sobie równe. Dwa punkty, z których jeden jest punktem spółzmiennym, drugi zaś punktem jednorodnie spółzmiennym względem grupy E, można w tym przypadku przedstawić wzorami:

$$(25) \qquad \begin{cases} \xi_1 = x'_1 + A\,(x''_1), \\ \eta_1 = B\,(x''_1), \end{cases}$$

gdzie $A(x_1'')$ i $B(x_1'')$ oznaczają funkcje zmiennej x_1''. Dwa te punkty są pełnym obrazem zespolonego punktu wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $B(x_1'')$ nie jest wielkością stałą, t. j. gdy drugi z tych punktów nie jest punktem stałym.

W przypadku $n = 2$, t. j. w płaszczyźnie można dwa punkty spółzmienne względem grupy E przedstawić zapomocą wzorów:

$$(26)\quad \left|\begin{array}{l} \xi_1 = x_1' + x_1'' A_1(\tau) + x_2'' A_2(\tau), \\ \xi_2 = x_2' + x_2'' A_1(\tau) - x_1'' A_2(\tau), \\ \bar{\xi}_1 = x_1' + x_1'' \bar{A}_1(\tau) + x_2'' \bar{A}_2(\tau), \\ \bar{\xi}_2 = x_2' + x_2'' \bar{A}_1(\tau) - x_1'' \bar{A}_2(\tau), \end{array}\right.$$

gdzie $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$, $\bar{A}_1(\tau)$, $\bar{A}_2(\tau)$ są funkcjami wielkości τ. Łatwo dostrzedz, że wprowadzając oznaczenia:

$$(27)\quad \alpha_1 = A_1(\tau) - \bar{A}_1(\tau),\ \alpha_2 = A_2(\tau) - \bar{A}_2(\tau),$$

możemy warunek, żeby te dwa punkty stanowiły pełny obraz zespolonego punktu przedstawić jako warunek, żeby wyznacznik funkcyjny funkcji:

$$x_1'' \alpha_1 + x_2'' \alpha_2,\ x_2'' \alpha_2 - x_1'' \alpha_2$$

względem zmiennych x_1'', x_2'' nie był tożsamościowo równy zeru. Ten wyznacznik funkcyjny możemy napisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + 2x_1''(x_1''\alpha_1' + x_2''\alpha_2'), & -\alpha_2 + 2x_1''(x_2''\alpha_1' - x_1''\alpha_2') \\ \alpha_2 + 2x_2''(x_1''\alpha_1' + x_2''\alpha_2'), & \alpha_1 + 2x_2''(x_2''\alpha_1' - x_1''\alpha_2') \end{vmatrix},$$

gdzie akcenty przy literach α z dolnemi indeksami oznaczają różniczkowanie względem τ. Przez obliczenie wyznacznika przekonywamy się, że jest on równy wyrażeniu:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\tau(\alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2),$$

t. j. wyrażeniu:

$$(28)\quad \frac{d}{d\tau}[\tau(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)].$$

Zważywszy zaś z drugiej strony, że na podstawie wzorów (26) oraz oznaczeń (27) mamy związek:

$$(\xi_1 - \bar{\xi}_1)^2 + (\xi_2 - \bar{\xi}_2)^2 = \tau(\alpha_1^2 + \alpha_2^2),$$

dochodzimy do wyniku, że uważany wyznacznik funkcyjny równa się pochodnej:

$$\frac{d}{d\tau}\left[(\xi_1 - \overline{\xi}_1)^2 + (\xi_2 - \overline{\xi}_2)^2\right]. \tag{29}$$

Z wyrażenia (28) wynika rezultat, że rozważane punkty spółzmienne są pełnym obrazem zespolonego punktu, gdy iloczyn

$$\tau\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$$

nie jest wielkością stałą (t. j. wielkością niezależną od wyboru zespolonego punktu), są zaś niepełnym obrazem tego punktu, gdy iloczyn ten jest wielkością stałą. Z wyrażenia zaś (29) wynika inna forma tego samego rezultatu, a mianowicie wniosek, że rozważane punkty spółzmienne stanowią pełny obraz punktu zespolonego, gdy kwadrat odległości tych punktów nie jest wielkością stałą, stanowią zaś niepełny obraz zespolonego punktu, gdy kwadrat odległości rzeczonych punktów spółzmiennych jest wielkością stałą.

Dwa punkty, z których jeden jest punktem spółzmiennym, drugi zaś punktem jednorodnie spółzmiennym względem grupy E można w płaszczyźnie t. j. w przypadku $n = 2$ przedstawić zapomocą wzorów:

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= x_1' + x_1'' A_1(\tau) + x_2'' A_2(\tau), \\ \xi_2 &= x_2' + x_2'' A_1(\tau) - x_1'' A_2(\tau), \\ \eta_1 &= x_1'' B_1(\tau) + x_2'' B_2(\tau), \\ \eta_2 &= x_2'' B_1(\tau) - x_1'' B_2(\tau), \end{aligned}\right. \tag{32}$$

gdzie $A_1(\tau)$. $A_2(\tau,)$ $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ są funkcjami wielkości τ. Łatwo dostrzedz, że dla tego obrazu zespolonego punktu otrzymujemy, taką samą drogą, jak dla poprzednio rozważanego obrazu rezultat następujący. Punkty (30) są pełnym obrazem zespolonego punktu, gdy iloczyn

$$\tau\,(B_1{}^2 + B_2{}^2)$$

nie jest wielkością stałą, są zaś niepełnym obrazem tego punktu, gdy iloczyn ten jest wielkością stałą. Rezultat ten w innej formie można wysłowić w ten sposób, że punkty te są pełnym obrazem zespolonego punktu, gdy kwadrat odległości punktu $\eta_1 \cdot \eta_2$ od początku spółrzędnych nie jest wielkością stałą, są zaś niepełnym obrazem tego punktu, gdy kwadrat odległości punktu η_1, η_2 od początku spółrzędnych jest wielkością stałą.

Przechodzimy wreszcie do założenia $n \geqslant 3$, t. j. do odpowiednich obrazów punktów zespolonych w przestrzeniach o liczbie wymiarów większej niż dwa. Dwa punkty spółzmienne punktu zespolonego względem grupy E można w tym przypadku przedstawić zapomocą wzorów:

$$(31) \quad \begin{cases} \xi_k = x'_k + A(\tau)\, x''_k, & (k = 1, 2, \ldots, n) \\ \bar{\xi}_k = x'_k + \bar{A}(\tau)\, x''_k, & (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

gdzie $A(\tau)$ i $\bar{A}(\tau)$ oznaczają funkcje wyrażenia $\tau = \sum_1^n{}' x''^2_l$. Łatwo dostrzedz, że punkty (31) stanowią pełny obraz punktu zespolonego, gdy iloczyn:

$$\tau \, [A(\tau) - \bar{A}(\tau)]^2$$

nie jest wielkością stałą, są zaś niepełnym obrazem tego punktu, gdy iloczyn ten jest wielkością stałą. Inaczej możemy powiedzieć, że dwa punkty (31) są pełnym obrazem punktu zespolonego, gdy kwadrat odległości tych punktów nie jest wielkością stałą, są zaś niepełnym obrazem tego punktu, gdy rzeczony kwadrat jest wielkością stałą.

Dwa punkty, z których jeden jest punktem spółzmiennym względem grupy E, drugi zaś punktem jednorodnie spółzmiennym względem tejże grupy E, można przy założeniu $n \geqslant 3$ przedstawić zapomocą wzorów:

$$(32) \quad \begin{cases} \xi_k = x'_k + A(\tau)\, x''_k, & (k = 1, 2, \ldots, n) \\ \eta_k = B(\tau)\, x''_k, & (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

gdzie $A(\tau)$ i $B(\tau)$ są funkcjami wielkości $\tau = \sum_1^n{}' x''^2_l$. Punkty (32) stanowią pełny obraz punktu zespolonego, gdy iloczyn:

$$\tau \, B^2(\tau)$$

nie jest wielkością stałą, stanowią zaś niepełny obraz tego punktu, gdy iloczyn ten jest wielkością stałą. Inaczej możemy powiedzieć, że dwa punkty (32) są pełnym obrazem punktu zespolonego, gdy kwadrat odległości punktu η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ od początku spółrzędnych nie jest wielkością stałą, są zaś niepełnym obrazem tego punktu, gdy rzeczony kwadrat jest wielkością stałą.

6. Badanie zespolonych dziedzin miejsc geometrycznych punktów prowadzić można przez stosowanie obrazów punktów zespolonych. Widoczne, że z pośród obrazów, o których powyżej była mowa, celom badania odpowiadać mogą tylko obrazy pełne. To znaczy, że przy rozważaniu, które przeprowadziliśmy, wyodrębnione zostały następujące rodzaje obrazów, które ewentualnie stosować można przy badaniu zespolonych dziedzin miejsc geometrycznych punktów.

1) Obrazy pełne punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, spółzmienne pierwszej kategorji względem grupy L.

2) Obrazy pełne punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, spółzmienne drugiej kategorji względem grupy L.

3) Obrazy pełne punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, spółzmienne pierwszej kategorji względem grupy E.

4) Obrazy pełne punktu zespolonego x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, spółzmienne drugiej kategorji względem grupy E.

Widoczne, że każdy obraz 1) jest także obrazem 3) oraz, że każdy obraz 2) jest także obrazem 4).

Przykładem obrazu 1) jest obraz otrzymujący się ze wzorów (22) przez przyjęcie: $a = +1$, $\bar{a} = -1$. Obraz ten określa się więc wzorami:

$$\xi_k = x_k' + x_k'', \; \bar{\xi}_k = x_k' - x_k'' \; (k = 1, 2, \ldots, n).$$

W literaturze dotyczącej geometrji dziedziny zespolonej stosowany on był w płaszczyźnie i w przestrzeni, t. j. dla $n = 2$ i $n = 3$. Obraz ten nazywa się obrazem Marie.

Przykładem obrazu 3) jest obraz Laguerre'a w płaszczyźnie. Otrzymuje się on ze wzorów (26) przez przyjęcie:

$$A_1(\tau) = 0, \; A_2(\tau) = -1,$$

$$\bar{A}_1(\tau) = 0, \; \bar{A}_2(\tau) = +1,$$

t. j. określa się wzorami

$$\xi_1 = x_1' - x_2'', \quad \xi_2 = x_2' + x_1'',$$
$$\xi_1 = x_1' + x_2'', \quad \xi_2 = x_2' - x_1''.$$

i nie należy do obrazów 1).

Wreszcie przykładem obrazu 2) jest obraz otrzymujący się ze wzorów (23) przez przyjęcie $a = 0$, $b = 1$. Określa się on wzorami:

$$\xi_k = x_k', \ \eta_k = x_k'' \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Obraz ten posiada spółzmienność drugiej kategorji, ale odznacza się prostotą swej zależności od wielkości określających spółrzędne punktu zespolonego. Wydaje się, że badanie, do jakich rezultatów prowadziłoby stosowanie tego obrazu w geometrji dziedziny urojonej, nie byłoby pozbawione interesu.

Mlądz, Dom Kasy im. Mianowskiego, sierpień 1925 r.

Errata

p. 40 ligne 4: au lieu de: (E) lire: $\langle E \rangle$.

p. 41 ligne 26: au lieu de: $(+)$ lire: (1).

p. 41 ligne 27: au lieu de: deux droites *paralléles*, lire: deux demi-droites *parallèles* $\dot{g}_n, \dot{b}_n$.

p. 42 ligne 8: au lieu de: $\dot{g}'_n$ lire: $\dot{g}_n$.

p. 42 ligne 33: au lieu de: (C_n, H_n) lire: (G_n, H_n).

p. 43 ligne 7 et 8: au lieu de: E lire: $\mathcal{E}$.

p. 43 ligne 19 et 20: au lieu de: $\widehat{x\,y}$ lire: $\widehat{x, y}$.

p. 43 ligne 20: au lieu de: L' lire: L.

p. 44 ligne 6: au lieu de: V_{n_0+n} lire: v_{n_0+n}.

p. 45 ligne 11: au lieu de: $n \geqslant \mu$ lire: $n > \mu$.

p. 46 ligne 10: au lieu de: $\lambda_n \leqslant \lambda''$ lire: $\lambda_n < \lambda''$.

p. 47 ligne 4: au lieu de: $n_1 : < n_2, < \cdots$ lire: $n_1 < n_2 < \cdots$.

p. 47 ligne 15: au lieu de: $F(\lambda +$ etc. lire: $F(\lambda) +$ etc.

p. 47 ligne 18: au lieu de: $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle : \cdots$ lire: $\langle a_{\mu+1}, b_{\mu+1} \rangle, \langle a_{\mu+2}, b_{\mu+2} \rangle, \cdots$.

p. 47 ligne 21: au lieu de: $F\lambda_n$ lire: $F(\lambda_n)$.

p. 47 ligne 24: au lieu de: $x''\ b_{n''}$ lire: $x'' \leqslant b_{n''}$.

p. 47 ligne 25: au lieu de: φ_n lire: $\varphi_{n'}$.

p. 48 ligne 3: au lieu de: φ_n lire: $\varphi_{n'}$.

p. 48 ligne 25: au lieu de: $x'_1 > x''$ lire: $x'_1 > x''_1$.

p. 49 ligne 5: au lieu de: $\frac{q-b}{b-k}$ lire: $\frac{q-n}{b-k}$.

p. 49 ligne 6: au lieu de: NA lire: LA.

p. 50 ligne 20: au lieu de: $\widehat{x\,y\,z}\,\{x=k\}$ lire: $\widehat{x\,y\,z}\,\{y=k\}$.

p. 50 ligne 31: au lieu de: $\widehat{xyz}\,\{x = k,\ z = o\}$ lire:
$\widehat{xyz}\,\{y = k,\ z = o\}$.

p. 51 ligne 20: au lieu de: π lire: Π.

p. 51 ligne 26: au lieu de: $\pi\,(\xi,\ \eta)$ lire: $\Pi\,(\xi,\ \eta)$.

p. 52 ligne 16 — 25: au lieu de: $v_n,\ v$ lire: $r_n,\ r$.

p. 61 ligne 7: au lieu de: $+$ lire: t.

p. 63 ligne 12 et 13: au lieu de: $\left.\begin{matrix} Q \subset [i_1,\ v_1],\ldots,\ [i_{k+1},\ 1], \\ Q \subset [i_1,\ v_1],\ldots,\ [i_{k+1},\ 2], \end{matrix}\right\}$ lire:

$$\left.\begin{matrix} Q\,([i_1,\ v_1],\ldots,\ [i_{k+1},\ 1]), \\ Q\,([i_1,\ v_1],\ldots,\ [i_{k+1},\ 2]), \end{matrix}\right\}.$$

....

p. 63 ligne 17: au lieu de: $\geqslant J$ lire: $\geqslant 1$.

p. 64 ligne 22: au lieu de: $\sum\limits_{\Phi_{k+1}} Q\,(L_{i_1},\ v_1)$ etc. lire: $\sum\limits_{\Phi_{k+1}} Q\,([i_1,\ v_1]$, etc.

p. 65 ligne 1: au lieu de: $[i_2,\ v_2]$ lire: $[i_1,\ v_1]$.

p. 70 ligne 20: au lieu de: $W(I_{s_1})$ lire: $W^{(1)}\,(I_{s_1})$.

p. 70 ligne 25: au lieu de: $W(I_{s_1})$ lire: $W^{(1)}\,(I_{s_1})$.

p. 70 ligne 28 et 29: au lieu de: W lire: $W^{(2)}$.

p. 70 ligne 30: au lieu de: σ lire: σ_2.

p. 72 ligne 29: au lieu de: $(n_1,\ n_2,\ldots\ n_2)$ lire: $(n_1,\ n_2,\ldots,\ n_2)$.

Zakłady Graficzno-Introligatorskie J. Dziewulski, Złota 29.

Redaktor i Wydawca

Edward Loth.

Adres Redakcji: Śniadeckich 8.