

7.74 — ośrodki sypkie, ziarniste,  
rozdrobione,  
mechanika górotworu  
i gruntów.

Andrzej Jarzębowski

MODELE KONSTITUTYWNE  
DLA GRUNTÓW SYPKICH —  
— PRZEGLĄD AKTUALNYCH KONCEPCJI

24/1990

P.269



WARSZAWA 1990

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 13 kwietnia 1990 r.



56810



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd. 5 Ark.druk. 6,25

Oddano do drukarni w maju 1990 r.

Nr zamówienia 267/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,

ul. Śniadeckich 8  
<http://rcin.org.pl>

Andrzej Jarzębowski  
Pracownia Procesów  
Skrawania Gruntów  
ORT IPPT PAN

MODELE KONSTITUTYWNE DLA GRUNTÓW SYPKICH -  
- PRZEGLĄD AKTUALNYCH KONCEPCJI \*

Streszczenie

W pracy podjęto próbę usystematyzowania i przeglądu aktualnych tendencji jakie spotkać można w bogatej literaturze światowej dotyczącej modelowania konstytutywnego gruntów sypkich.

Ograniczono się do prezentacji najciekawszych koncepcji oraz ich rozwoju, bez szczegółowego przedstawienia modeli konstytutywnych, które częstokroć licznie powstawały jedynie jako modyfikacje oryginalnych pomysłów. Przedyskutowano możliwości zastosowań wybranych modeli.

1. WSTĘP

Modelowanie konstytutywne materiałów geotechnicznych ma bardzo duże znaczenie we współczesnej praktyce inżynierskiej. W miarę, notowanego w ostatnich latach, gwałtownego rozwoju techniki obliczeniowej, zyskały na atrakcyjności zaawansowane modele teorii plastyczności, a wiele z nich stało się (lub wkrótce się stanie) powszechnym narzędziem konstruktorów i projektantów.

Spośród materiałów geotechnicznych, w trakcie modelowania konstytutywnego, najwięcej kłopotów sprawiają grunty sypkie. Wykazują bowiem bardzo złożone i różnorodne formy zachowania, zależne tak od warunków początkowych procesu jak i historii obciążenia. Sprawiają

\* Niniejsza praca stanowi rozszerzony i uzupełniony fragment pracy doktorskiej autora pt.: "Modele Konstytutywne dla materiałów rozdrobionych i ich zastosowanie", wykonanej w ramach Centralnego Programu Badań Podstawowych 02.13 "UKłady ze sztuczną inteligencją do maszyn roboczych i pojazdów".



też chyba najwięcej kłopotów konstruktorom i budowniczym, gdyż grunt piaszczysty nasączony wodą może pod wpływem obciążeń cyklicznych przejść w fazę upłynienia, stając się przyczyną często tragicznych w skutkach katastrof. Spośród najbardziej znanych, wymienić można, spowodowane upłynieniem gruntu pod fundamentami, zjawisko przewracania się całych domów podczas trzęsienia ziemi w Niigata (Japonia) w 1964 r., czy zniszczenie zapory w San Fernando (USA) w czasie trzęsienia ziemi w 1971 r., w wyniku którego należało ewakuować osiemdziesiąt tysięcy osób (Dobry et al. (1982)). Zjawisko upłyniania gruntu może być groźne również na obszarach nie aktywnych sejsmicznie. Wielokrotnie było ono przyczyną osuwania się nasypów kolejowych pod wpływem obciążeń cyklicznych spowodowanych przejazdem pociągu.

Różnorodność sposobów modelowania konstytutywnego ośrodków sypkich spotykana w literaturze, skłoniła autora do podjęcia próby pewnego ich usystematyzowania. Może to być pomocne przy wyborze właściwego modelu do konkretnych zagadnień mechaniki, lecz należy pamiętać, że praca ta nie stanowi poradnika dla inżynierów, a jedynie nieśmiałą próbę przedstawienia stanu badań w omawianej dziedzinie. Nie było też celem pracy szczegółowe i kompletne prezentowanie różnych modeli (szczegóły znajdzie czytelnik bez trudu w cytowanej literaturze) lecz raczej porównanie ich zalet i wad, dyskusja ograniczeń w zastosowaniach, czy wreszcie, ukazanie historii i kierunków ich rozwoju. Choć historia badań nad zależnościami konstytutywnymi dla materiałów sypkich liczy już ponad sto lat (Reynolds w 1885 roku badał zjawisko dylatacji w czasie procesu ścinania), w tej pracy skoncentrujemy się na osiągnięciach współczesnych tj. z ostatniego dwudziestolecia.

Związki konstytutywne są to zależności pomiędzy oddziaływaniami zewnętrznymi (obciążeniami) a odpowiedzią materiału, wynikające z jego cech fizycznych. Ponieważ obciążenie wymuszone jest zwykle poprzez naprężenie lub odkształcenie (względnie obciążenie mieszane naprężenie - odkształcenie) oddziaływujące quasistatycznie lub zmiennie w czasie przy zadanych warunkach termicznych, związki konstytutywne dla gruntów opisywane są ogólnie jako zależności pomiędzy naprężeniami, odkształceniami, czasem i temperaturą.

W pracy tej ograniczymy się jednak do gruntów sypkich (bezkohesyjnych), czyli materiałów wykazujących zerową wytrzymałość na izo-

tropowe rozciąganie, dla których przeważająca większość spotykanych w literaturze równań konstytutywnych wyrażona jest w formie niezależnej od czasu i temperatury.

Obecnie wyodrębniły się dwa podejścia do formułowania równań konstytutywnych dla ośrodków sypkich: mikroskopowe i makroskopowe.

Podejście mikroskopowe polega na wnioskowaniu o własnościach materiału na podstawie sumowania efektów wzajemnego oddziaływania sąsiadujących cząstek lub ich grup. Rozważania geometryczne rozpoczyna się zwykle od analizy prostych układów prętów o znanych przekrojach (zagadnienia płaskie) lub cząstek przestrzennych - często kul (zagadnienia trójwymiarowe).

Podejście mikroskopowe pozwala na otrzymanie równań konstytutywnych oraz analizę ruchu cząstek (a często całej struktury) w czasie procesu deformacji.

Podejście makroskopowe polega na analizowaniu fenomenologicznego zachowania się materiałów sypkich poprzez traktowanie ich jako ośrodków ciągłych. Założenie to jest słuszne w przypadku, gdy wymiary rozpatrywanej próbki znacznie przewyższają wymiary pojedynczego ziarna (co jest spełnione przy analizie problemów inżynierskich jak i w większości badań laboratoryjnych). W ten sposób powstały teorie ośrodków idealnie sprężystych, sprężysto-plastycznych, lepkosprężystych czy lepkosprężysto-plastycznych. Z podejścia makroskopowego wywodzi się liczna grupa modeli inżynierskich (Dobry et al. 1982), kładących na ogół nacisk na odwzorowanie jednej, wybranej cechy materiału. W prezentowanym przeglądzie modele te zostały świadomie pominięte. Zachowanie ośrodków sypkich w odniesieniu do konkretnych problemów technicznych badało wielu autorów m.in. Szczepiński (1974) oraz Izbicki i Mróz (1976).

## 2. MODELE MIKROSKOPOWE

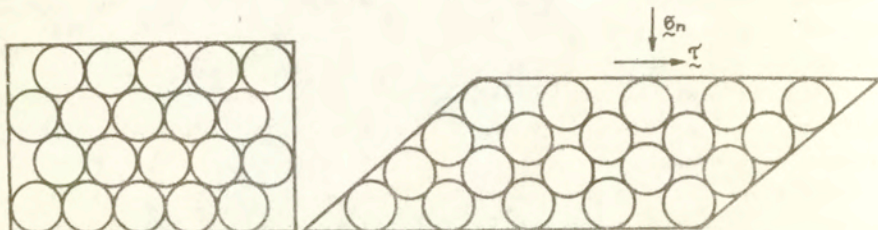
### 2.1. Modele strukturalne

Grunty sypkie są ośrodkami dwufazowymi złożonymi z cząstek stałych (faza stała) i wody lub powietrza, wypełniających pustki między tymi cząstkami (faza ciekła). Teorie mechaniki takich ośrodków bazują na założeniu, że materiały sypkie są układami cząstek o pewnej strukturze będącej cechą tych materiałów. Znajdując zależność między naprężeniami i strukturą oraz odkształceniami i strukturą



otrzywać można związek konstytutywny uwzględniający zmiany struktury ośrodka.

Już najprostsze rozważania geometryczne pozwalają wyjaśnić pewne własności materiałów sypkich jak np. dylatację w czasie procesu ścinania. Dylatacja, jak wiadomo, związana jest ze wzrostem objętości pustek, co widać na Rys. 1.



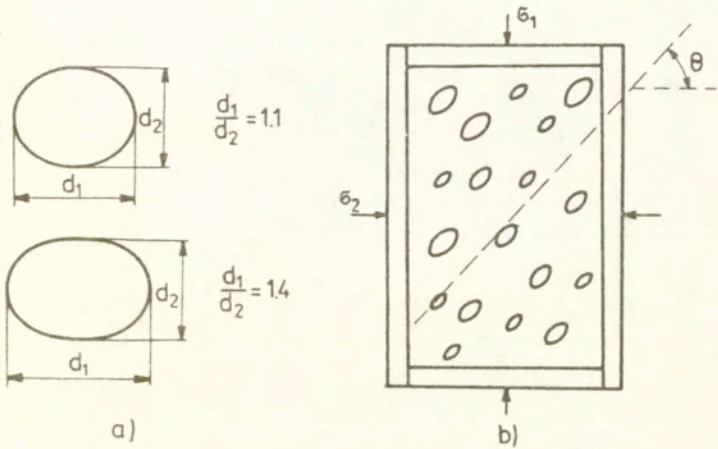
Rys. 1. Dylatacja jako wynik wzrostu objętości pustek.

#### 2.1.a. Opis struktury ośrodków sypkich

Pod pojęciem struktury ośrodków sypkich rozumie się przestrzenne rozłożenie cząstek i związany z nim rozkład pustek. Wiele kontrowersji budzi jednak sposób jej opisu, a konkretnie wyboru parametrów niezbędnych do jednoznacznego i pełnego jej zdefiniowania.

Oda (1972 b), Cowin (1974) i Oda, Konishi i Nemat-Nasser (1982) zwracali uwagę, że opis struktury musi uwzględniać takie elementy jak orientację poszczególnych cząstek i wzajemne oddziaływanie między cząstkami (liczbę kontaktów na jedną cząstkę oraz rozkład kierunków normalnych do kontaktów).

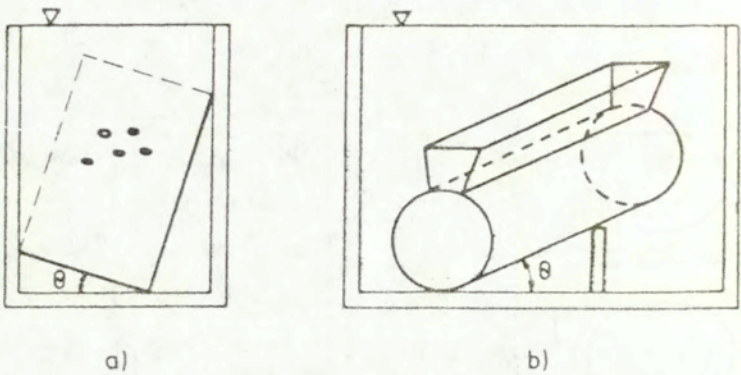
Orientacja poszczególnych cząstek (orientacje struktury) wskazuje na uprzywilejowany kierunek przestrzennego układu ziaren o kształtach różnych od kulistego. Wpływ orientacji struktury na wytrzymałość materiału w czasie próby ściskania został potwierdzony eksperymentalnie (Oda, Nemat-Nasser i Mehrabachi (1982)) dla układu poliuretanowych prętów o owalnych przekrojach. Kształty przekrojów prętów oraz schemat obciążenia przedstawia Rys. 2.



Rys. 2a) Kształty przekrojów prętów stosowanych w doświadczeniach, b) schemat obciążenia próbek (wg Ody Nemat-Nasser i Mehrabachi (1982)).

Doświadczenia wykazały wyraźny wpływ kąta nachylenia  $\theta$  na wartość stosunku  $\sigma_1/\sigma_2$  dla owali wydłużonych ( $d_1/d_2 = 1.4$ ), zarówno w momencie maksymalnej wytrzymałości jak i zniszczenia układu. Dla drugiej grupy owali (o przekrojach zbliżonych do koła) wpływ kąta  $\theta$  nie był istotny. Uzyskano również potwierdzenie zależności wytrzymałości układu od kąta tarcia wewnętrznego, lecz także tylko dla kształtów wydłużonych. Wytrzymałość ta prawie dwukrotnie wzrastała przy zmianie kąta tarcia od  $26^\circ$  do  $52^\circ$ . Doświadczenia wykazały jednak, że takie parametry jak kąt orientacji struktury i kąt tarcia wewnętrznego dają efekt sprzężony, a ich wpływ należy rozpatrywać łącznie.

Oda et al. (1978) badał również zależność wytrzymałości piasku od orientacji struktury, zarówno dla aparatów prostego jak i trójosiowego ścinania. Początkowy kąt nachylenia struktury otrzymano dzięki specjalnej metodzie przygotowania próbek (Rys.3). Otrzymane wyniki mają identyczny charakter jak dla doświadczeń na prętach elastoplastycznych.



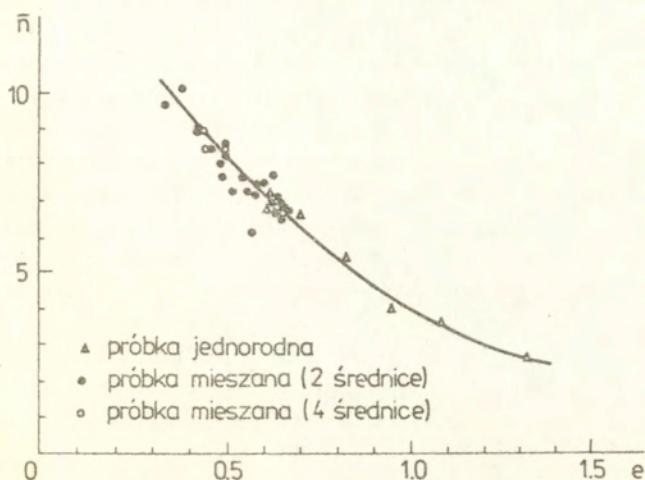
Rys. 3. Metoda przygotowania próbek badanych w aparatach: a) prostego ścinania, b) trójosiowego ścinania (wg Ody et al. (1978)).

Liczba kontaktów przypadających na jedną cząstkę (oznaczana często  $\bar{n}$ ) jest szczególnie istotna, gdyż ruch danej cząstki staje się coraz bardziej ograniczony wraz ze wzrostem  $\bar{n}$ . Gray (1968) i Oda (1977) zwracali uwagę na zależność liczby kontaktów  $n$  od wskaźnika porowatości  $e$ . Na Rys. 4 przedstawiono liczbę kontaktów  $\bar{n}$  w zależności od wskaźnika porowatości dla trzech losowo otrzymanych układów kul. Próbki składały się z kul o jednej, dwóch lub czterech różnych średnicach. Dane doświadczalne ułożyły się wzdłuż jednej krzywej, tak więc związek między  $\bar{n}$  i  $e$  zdaje się nie zależeć od rozkładu wielkości cząstek.

Mogami (1965) i Cowin (1974) uwzględniali wpływ przestrzennych zmian wskaźnika porowatości w celu otrzymania dokładnego opisu deformacji osrodków sypkich. W konsekwencji przedstawionej teorii, Cowin (1974) utrzymywał znikanie naprężeń ścinających w stanie równowagi przy jednorodnym rozkładzie wskaźnika porowatości.

Oda et al. (1985) zwrócił uwagę, że do kompletnego opisu struktury, oprócz omawianych dotychczas elementów, konieczne jest uwzględnienie kształtu występujących pustek. Wpływ tego czynnika oraz





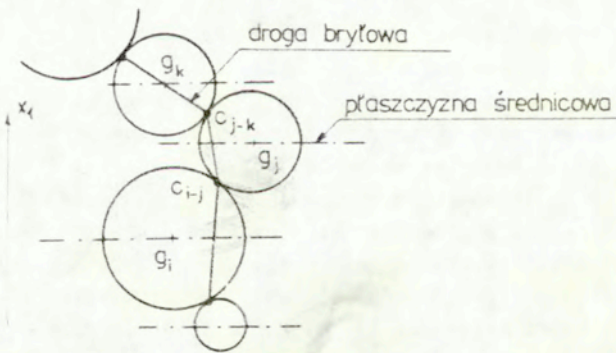
Rys. 4. Liczba kontaktów  $\bar{n}$  w zależności od wskaźnika porowatości  $e$  dla trzech różnych układów kul (wg Ody (1977)).

wspomnianego wcześniej rozkładu kierunków prostopadłych do kontaktów zostanie omówiony dalej w części poświęconej zmianom struktury w czasie procesu deformacji. Barthurst i Rothenburg (1988) stosowali do opisu struktury tzw. wektory kontaktowe, łączące środek masy cząsteczki z punktem jej styku z cząsteczką sąsiednią. Przestrzenny układ wektorów kontaktowych niesie informację o kształtach cząstek i ich ukierunkowaniu w przestrzeni. W przypadku cząstek kulistych kierunki wektorów kontaktowych pokrywają się z kierunkami prostopadłymi do kontaktów, zaś ich długość równa jest promieniom ziaren.

Inną próbę opisu struktury podjął Horne (1965), wprowadzając koncepcję tzw. "dróg bryłowych". Zdefiniowane przez Horne'a płaszczyny średnicowe przechodzą przez środek każdej ze sfer, prostopadle do założonej osi odniesienia  $x_1$  (Rys. 5). Każda cząstka jest zatem podzielona na dwie części: "dodatnią" - po stronie zgodnej z kierunkiem osi  $x_1$  i "ujemną" - po stronie przeciwnej. Losowo wybiera się jedną z cząstek i jeden kontakt po jej "dodatniej" stronie np. cząstkę  $g_i$  i kontakt  $c_{i-j}$  (Rys. 5). Punkt  $c_{i-j}$  jest "dodat-

nim" kontaktem dla cząstki  $g_i$  lecz "ujemnym" dla cząstki  $g_j$ . Znow losowo wybiera się jeden z "dodatnich" kontaktów  $g_j$  (np.  $c_{j-k}$ ) łącząc go linią prostą z  $c_{i-j}$ . Kontynuując ten proces otrzymuje się łamaną linię łączącą losowo wybrane kontakty (tzw. "drogą bryłową"). Średnia liczba kontaktów  $m_i$  na jednostkę długości mierzoną w kierunku  $x_1$  zależy od takich parametrów struktury jak gęstość rozkładu wielkości cząstek i gęstość przestrzennego rozkładu normalnych do kontaktów (obydwa te parametry zostaną omówione przy prezentowaniu tensorów struktury). Stosunek największej wartości wielkości  $m_i$  do najmniejszej traktowany jest jako wskaźnik anizotropii strukturalnej.

Koncepcja dróg bryłowych była stosowana przez wielu autorów do znajdowania zależności tensora odkształceń plastycznych od struktury materiałów ziarnistych (np.: Horne (1965), Oda (1974) i Tokue (1979a)).



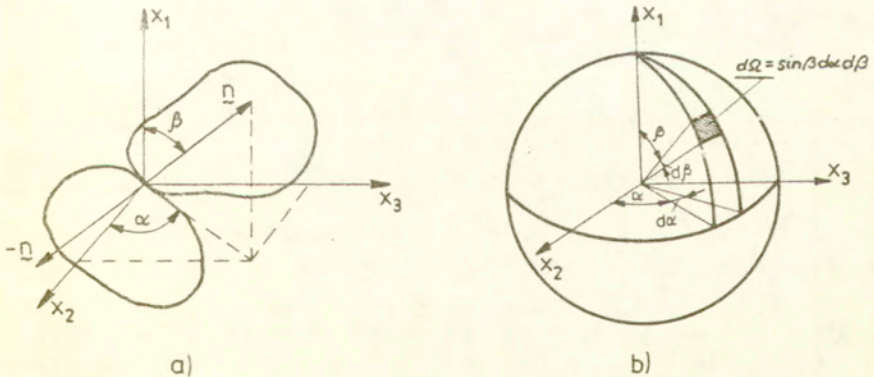
Rys. 5. Droga bryłowa dla układu cząstek sferycznych (wg Horne'a (1965)).

Aby opisać wpływ ukierunkowania normalnych do kontaktów na własności struktury, Horne (1965) wprowadził, a Oda (1972a) rozwinął pojęcie funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $E(\underline{n})$ , opisującej kątowny rozkład wektorów jednostkowych  $\underline{n}$  prostopadłych do płaszczyzn kontaktowych. Ponieważ położenie wektora  $\underline{n}$  opisać można za pomocą dwóch kątów  $\alpha$  i  $\beta$  (Rys. 6a), liczba kontaktów, których normalne mieszczą się w elementarnym kącie bryłowym  $d\Omega = \sin\beta d\alpha d\beta$  (Rys. 6b) jest równa  $E(\alpha, \beta) d\Omega$ . Zapis  $E(\alpha, \beta)$  jest zapisem alternatywnym do  $E(\underline{n})$ . Funkcja  $E(\underline{n})$  spełnia warunki:

$$(1) \quad \iint_{\Omega} E(\underline{n}) d\Omega = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin\beta d\alpha d\beta = 1$$

$$E(\underline{n}) = E(-\underline{n}) \geq 0$$

i geometrycznie może być reprezentowane przez elipsoidę podobną do elipsoidy naprężeń czy odkształceń. Różne przypadki symetrii tej elipsoidy opisał Oda et al. (1980).



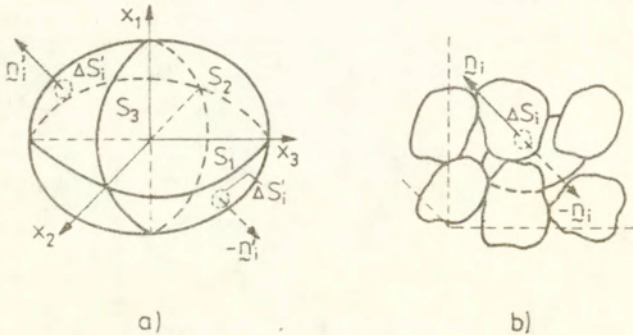
Rys. 6a) Opis orientacji wektora za pomocą dwóch kątów, b) elementarny kąt bryłowy.



Opierając się na założeniu, że funkcja  $E(\underline{n})$  może być aproksymowana za pomocą elipsoidy, Oda (1978) przedstawił koncepcję tzw. "elipsoidy struktury". Koncepcja ta wprowadzona została dla układu cząstek o dużej liczbie kontaktów. Każda cząstka styka się z sąsiadującą poprzez powierzchnię kontaktu  $\Delta S_i$  (Rys. 7a). Niech dana będzie zamknięta powierzchnia, której każdy mały element  $\Delta S_i'$  odpowiada dokładnie powierzchni kontaktu  $\Delta S_i$ , zaś jednostkowy, prostopadły do  $\Delta S_i'$  wektor  $\underline{n}_i'$  jest równoległy do  $\underline{n}_i$  (Rys. 7b).

Przy założeniu, że powierzchnia każdego kontaktu równa jest , wprowadzoną powierzchnię aproksymować można elipsoidą nazywaną "elipsoidą struktury".

Wprowadzona przez Horne'a funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $E(\underline{n})$  rozkładu wektorów jednostkowych i elipsoida struktury mają te same osie główne, przy czym największa oś główna  $E(\underline{n})$  odpowiada najmniejszej osi elipsoidy struktury.



Rys. 7a) Elipsoida struktury,  
b) przykładowa powierzchnia kontaktu dwóch cząstek (wg Ody (1978)).

Kształt elipsoidy struktury charakteryzują trzy wielkości:  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$ , będące polami powierzchni jej trzech przekrojów płaszczyznami prostopadłymi do kierunków głównych i opisane zależnościami (Oda et al.(1980)):

$$S_1 = \overline{\Delta S} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2E(\alpha, \beta) \cos\beta \sin\beta d\beta d\alpha$$

$$(2) \quad S_2 = \overline{\Delta S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} 2E(\alpha, \beta) \cos\beta \sin^2\beta d\beta d\alpha$$

$$S_3 = \overline{\Delta S} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} 2E(\alpha, \beta) \sin^2\beta \sin\alpha d\beta d\alpha.$$

Stosunek  $S_1/S_2$  może być rozumiany jako wskaźnik anizotropii strukturalnej.

Na podstawie prac eksperymentalnych dla piasku Oda (1972b, c) zaproponował następującą liniową zależność:

$$(3) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \propto \frac{S_1}{S_3}$$

gdzie  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$  oznaczają maksymalne i minimalne naprężenie główne.

#### 2.1.b. Tensor struktury

Pojęcie tensora struktury wprowadził Satake (1978) dla obszaru wypełnionego z założenia dostateczną liczbą cząstek kulistych o jednakowych promieniach, definiując go równaniem:

$$(4) \quad \text{lub} \quad \begin{aligned} \Phi &= \int_{\Omega} E(\underline{n}) \underline{n} \underline{n} d\Omega \\ \Phi_{ij} &= \int_{\Omega} E(\underline{n}) n_i n_j d\Omega. \end{aligned}$$

Inny typ tensora struktury  $N_{ij}$  zaproponował Kanatani (1981), również opisując go poprzez funkcję gęstości rozkładu normalnych do kontaktów:

$$(5) \quad E(\underline{n}) = \frac{1}{4\pi} N_{ij} n_i n_j.$$

Niedostateczną ogólność tak wprowadzonego tensora struktury dyskutował Satake zauważając, że podstawienie (5) do (4) prowadzi do zależności:

$$(6) \quad N_{ij} = \frac{3}{2} (5 \Phi_{ij} - \delta_{ij}),$$

a następnie podstawienie (6) do (5) daje:

$$(7) \quad E(\underline{n}) = \frac{15}{2} \left( \phi_{ij} n_i n_j - \frac{1}{5} \right).$$

Jak widać, funkcja  $E(\underline{n})$  staje się zdeterminowana przez  $\phi_{ij}$  i w konsekwencji równanie (7) może nie być spełnione (dla  $\phi_i < \frac{1}{5}$ , gdzie  $\phi_i$  oznacza wartości główne tensora  $\phi_{ij}$ ), ponieważ będzie dawało wartości ujemne. Tak więc tensor  $\phi_{ij}$  jest jednoznacznie określony przez  $E(\underline{n})$  lecz nie na odwrót.

Szczegółowe wyprowadzenie tensora struktury dla układu złożonego z kul w oparciu o wprowadzenie pojęcia gałęzi (tj. odcinków łączących środki stykających się ziaren) podali Oda, Nemat-Nasser i Mehrabadi (1982). Rozpatrując sumę wektorową gałęzi przecinających przekrój jednostkowy o zadanym kierunku, a następnie rzut tej sumy na zadany kierunek otrzymali:

$$(8) \quad F_{ij} = N \hat{l} \int_{\Omega} E(\underline{n}) n_i n_j d\Omega,$$

gdzie  $N$  jest gęstością kontaktów (ilością punktów kontaktowych na jednostkę objętości), zaś  $\hat{l}$  średnią długością gałęzi, daną zależnością:

$$(9) \quad \hat{l} = \int_{2r_{min}}^{2r_{max}} l g(l) dl.$$

Funkcja  $g(l)$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu długości gałęzi zależną od rozkładu długości promieni kul, zaś  $r_{min}$  i  $r_{max}$  oznaczają najmniejszy i największy z występujących promieni. Wyprowadzony tensor struktury  $F_{ij}$  transformuje się jak tensor drugiego rzędu.

Na podstawie koncepcji tensora struktury Oda et al. (1985) wprowadził inne tensorowe miary struktury mające opisać jej orientację (orientację poszczególnych cząstek struktury o kształtach różnych od kulistego) i kształt pustek. Założył, że kształt  $k$ -tej cząstki może być opisany za pomocą macierzy diagonalnej:



$$(10) \quad \bar{S}_{ij}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{a}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}^{(k)} \end{bmatrix}$$

w następujący sposób:

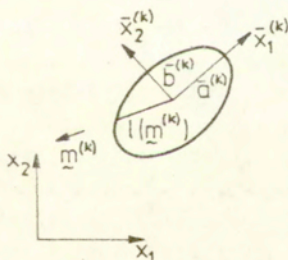
$$(11) \quad l(\underline{m}^{(k)}) = \bar{S}_{ij}^{(k)} m_i^{(k)} m_j^{(k)},$$

gdzie  $\bar{a}^{(k)}$ ,  $\bar{b}^{(k)}$ ,  $\bar{c}^{(k)}$  są długościami półosi k-tej cząstki, zaś  $\underline{m}^{(k)}$  wektorem jednostkowym zaczepionym w jej środku. Wówczas  $l(\underline{m}^{(k)})$  jest odległością punktu leżącego na brzegu cząstki od jej środka na kierunku  $\underline{m}^{(k)}$  (Rys.8).

W układzie globalnym otrzymuje się:

$$(12) \quad S_{ij}^{(k)} = Q_{il}^{(k)} \bar{S}_{lm}^{(k)} Q_{mj}^{(k)},$$

gdz  $\bar{x}_i^{(k)} = Q_{ij}^{(k)} x_j$  (patrz Rys. 8).



Rys. 8. Definicja miary odległości punktu leżącego na brzegu cząstki od jej środka na dowolnym kierunku (wg Ody et al. (1985)).

Przystępując z (12) wprowadzić można średnią miarę

$$(13.a) \quad S_{ij} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{m^{(v)}} S_{ij}^{(k)},$$

gdzie

$$(13.b) \quad \lambda = \sum_{k=1}^{m^{(v)}} (\bar{a}^{(k)} + \bar{b}^{(k)} + \bar{c}^{(k)}).$$

Wielkość  $m^{(v)}$  oznacza całkowitą liczbę cząstek w obszarze  $v$ . Wyznaczając  $l(\underline{m})$  z zależności:

$$(14) \quad l(\underline{m}) = S_{ij} m_i m_j,$$

otrzymuje się kształt powierzchni dla rozpatrywanej cząstki, która charakteryzuje orientację i kształt elementów struktury. Dla cząstek sferycznych  $S_{ij}$  jest tensorem izotropowym.

Dla struktur rzeczywistych zdefiniowany powyżej tensor  $S_{ij}$  daje się wyznaczyć jedynie wówczas, gdy kształt cząstek zbliżony jest do elipsoidalnego.

Analogicznie do zależności (5) zdefiniowano tensor  $v_{ij}$  opisujący kształt i rozłożenie pustek dla materiałów sypkich:

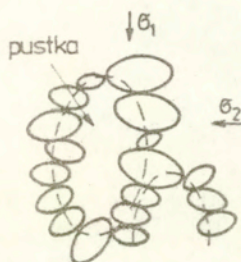
$$(15) \quad l(\underline{\rho}) = \frac{1}{4\pi} v_{ij} \rho_i \rho_j,$$

gdzie  $l(\underline{\rho})$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa bezwymiarowej wielkości pustek na jednostkę długości, zależną od kierunku pomiarowego  $\underline{\rho}$ .

Nasuwa się pytanie, czy wprowadzone wyżej tensorowe miary struktury są niezależne, czy też są ze sobą związane. Mechanizm deformacji struktury (omówiony nieco szerzej w dalszej części tego rozdziału) wskazuje, iż nowo powstające kontakty tworzą się głównie w kierunku prostopadłym do największego naprężenia głównego, powodując formowanie charakterystycznych kolumn i towarzyszących im wydłużonych pustek (Oda, Konishi i Nemat-Nasser (1982)), jak to przedstawiono na Rys. 9. Należy zatem sądzić, że tensory:  $N_{ij}$  (opisujący orientację kontaktów) i  $v_{ij}$  (opisujący kształt pustek) są skolerowane, gdyż opisują to samo zjawisko, ten sam mechanizm deformacji. Pobieżna analiza danych eksperymentalnych dla owali elastooptycznych (Oda, Konishi i Nemat-Nasser (1982)) zdaje się potwierdzić ten wniosek. Tensory te okazują się być współosiowe, o identycznym charakterze zmian stosunków ich wartości głównych.

Mehrabadi et al. (1982) podjęli próbę uzależnienia tensora naprężenia od tensora struktury  $F_{ij}$ , zdefiniowanego równaniem (8). W tym celu wyprowadzili związki między siłami na kontaktach i naprężeniami, stosując dwa podejścia:

1. statystyczne uśrednienie sił kontaktowych i układu gałęzi na pewnej objętości;



Rys. 9. Kolumny i wydłużone pustki formujące się wzdłuż kierunku największego naprężenia głównego.

2. rozważanie sił przenoszonych przez wybraną, myślowo wyciętą powierzchnię, traktowanych jako suma oddziaływań cząstek znajdujących się po jednej i po drugiej stronie tej powierzchni. Przedyskutowano warunki pokrywania się obydwu podejść, otrzymując ostatecznie związek:

$$(16) \quad \sigma_{ij} = A_{ijkl} F_{kl},$$

gdzie

$$(17) \quad A_{ijkl} = \frac{1}{2} \alpha_0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha_1 \int E(\underline{n}) n_i n_j n_k n_l d\Omega.$$

Współczynniki  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$  są w ogólności funkcjami niezmienników tensora naprężenia, jak też niezmienników tensora anizotropii  $\phi_{ij}$  (równanie 4).



Zadaniem trudniejszym i ciągle jeszcze nie rozwiązany okazuje się być znalezienie związku pomiędzy tensorem przyrostu odkształcenia a tensorem struktury, co w połączeniu z równaniem (16) doprowadziłoby do zapostulowania ogólnej zależności konstytutywnej dla materiałów sypkich, uwzględniającej ich strukturę. Próbę przedstawienia takiego podejścia podjęli Bathurst i Rothenburg (1988) dla układów płaskich krążków, otrzymując równanie konstytutywne w postaci:

$$(18) \quad \sigma_{ij} = B_{ijkl} \epsilon_{ij},$$

gdzie:

$$(19) \quad B_{ijkl} = \frac{\xi k_n \bar{l}_0 m_v}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} (n_i n_j n_k n_l + \lambda t_i n_j t_k n_l) d\theta.$$

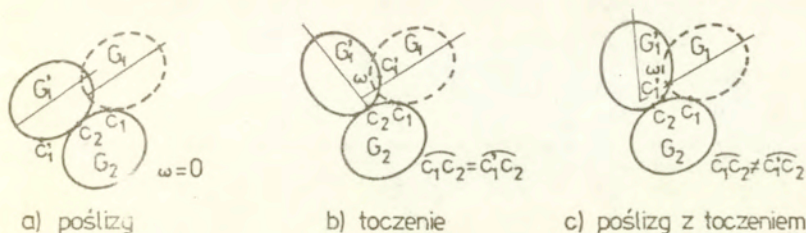
Wielkość  $m_v$  oznacza ilość kontaktów na jednostkę objętości,  $k_n$  - sztywność normalną kontaktu,  $\lambda$  - stosunek sztywności stycznej do normalnej dla pojedynczego kontaktu,  $\xi$  - parametr materiałowy zaś  $\bar{l}_0$  jest średnią długością wektorów kontaktowych. Tak więc tensor dany równaniem (19) zależy od pewnych parametrów struktury materiału ( $m_v$ ,  $\bar{l}_0$ ), lecz nie od tensora struktury.

### 2.1.c. Deformacja struktury

Deformacja plastyczna układu złożonego z cząstek polega na ich wzajemnej reorientacji, czemu towarzyszy na ogół jednoczesne tworzenie nowych jak i zanikanie starych kontaktów. Efekty wynikające z deformacji sprężystej lub plastycznej poszczególnych ziaren lub ich kruszenia są na ogół pomijane ze względu na stosunkowo małe wartości naprężeń (poniżej wytrzymałości materiału ziarna) występujące w rzeczywistych problemach inżynierskich. Przeważająca większość omawianych w tym rozdziale modeli z założenia zaniedbuje wpływ tych efektów, a jedynie kilka z nich (przedstawionych dalej) uwzględnia sprężystą lub plastyczną deformację elementów w obszarze graniczącym z powierzchnią kontaktu. Niektórzy autorzy zwracają jednak uwagę na wpływ efektów kruszenia ziaren na własności i strukturę materiału (Miura et al. (1984), Supel (1985)). Niektóre

aspekty deformacji struktury złożonej z odkształcalnych plastycznie długich prętów badali przy zastosowaniu metody linii poślizgów Szczepiński i Petryk (1977).

Cząstki, które pozostają w kontakcie w czasie procesu deformacji mogą zmieniać wzajemne położenie poprzez poślizg, toczenie się lub połączony poślizg z toczeniem (mogą również nie zmieniać wzajemnego położenia) jak to przedstawiono na Rys. 10). W przeszłości wielu autorów zakładało, że poślizgi między ziarnami są dominującym zjawiskiem na granicach ziaren (Oda (1974), Tokue (1979a)). Tymczasem późniejsze prace eksperymentalne (Oda, Konishi i Nemat-Nasser (1982)) wskazują na decydujący wpływ mechanizmów deformacji, polegających na wzajemnych obrotach ziaren (prawie bez poślizgu), zwłaszcza dla dużych wartości współczynnika tarcia międzycząsteczkowego, potwierdzając tym samym wcześniejsze przypuszczenia Skinnera (1969).

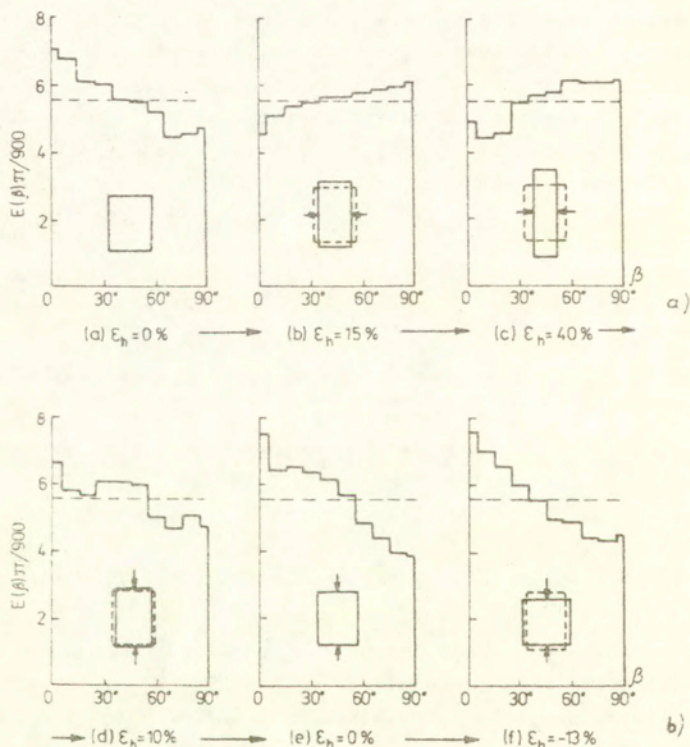


Rys. 10. Mechanizmy zmiany wzajemnego położenia cząstek.

W czasie badań deformacji postaciowej w układzie złożonym z 1200 elastooptycznych krążków o różnych średnicach, Drescher i de Josselin de Jong (1972) obserwowali tworzenie się grup cząstek przemieszczających się blokami względem siebie. Podobny efekt obserwował Tokue (1979 b).

W celu zbadania zmian orientacji powierzchni kontaktów w czasie procesu deformacji, Oda (1972 a-c) prowadził badania dla naturalnego pisaku, dochodząc do wniosku, że powierzchnie te dążą do usytuowania prostopadłego do kierunku największego naprężenia głów-

nego. Rys. 11a przedstawia zmiany funkcji gęstości rozkładu normalnych do kontaktów przy poziomym obciążeniu próbki, zaś Rys. 11b przebieg tej funkcji po gwałtownej zmianie kierunku największego naprężenia głównego na pionowy. Identyczne wyniki przy raptownych zmianach kierunku naprężenia głównego otrzymali dla losowych układów dysków o nieregularnych kształtach Biarez i Wiendieck (1963).



Rys. 11. Zmiany funkcji gęstości rozkładu normalnych do kontaktów, a) przy poziomym obciążeniu próbki, b) po gwałtownej zmianie kierunku największego naprężenia głównego (wg Ody (1972b)).



Zjawisko usytuowania się normalnych do kontaktów w kierunku zgodnym z maksymalnym naprężeniem głównym obserwowali również przy ciągłych zmianach tych kierunków Matsuoka (1974a, b, c) i Oda i Konishi (1974a, b) w czasie doświadczeń prostego ścinania układów złożonych z elastoptycznych prętów.

Kąt orientacji struktury również zmienia się w trakcie procesu deformacji, dążąc do położenia prostopadłego do kierunku największego naprężenia głównego. Oda et al. (1985) obserwowali jednak także przypadki deformacji, dla których zmiana kąta orientacji nie była istotna.

Wielu autorów zwracało uwagę (na podstawie prac teoretycznych) na niewspółosiowość tensorów naprężenia i przyrostu odkształcenia (de Josselin de Jong (1971, 1977), Spencer (1964)). Hipotezę niewspółosiowości tych tensorów dla ośrodków sypkich potwierdzili eksperymentalnie Drescher i de Josselin de Jong (1972), Oda i Konishi (1974a, b) i Drescher (1976). Spencer (1964) podał warunek współosiowości tensorów naprężenia i przyrostów odkształcenia spełniony jednak jedynie wtedy, gdy kąt tarcia wewnętrznego równy jest 0. Wychodząc z równania mocy dysypowanej Christoffersen et al. (1981) otrzymał równanie potwierdzające niewspółosiowość tensorów przyrostu naprężenia i gradientu deformacji dla płaskich układów mikrostrukturalnych.

## 2.2. Modele naprężeniowo-odkształceniowe

### 2.2.a. Modele naprężeniowe - odkształceniowe dla ścinania

Deformacja postaciowa ośrodków sypkich jest procesem bardzo złożonym ze względu na towarzyszące jej takie zjawiska jak poślizgi i obroty na granicach ziaren (w skali mikro) czy zmiany objętości i związane z tym wzmocnienie lub osłabienie (w skali makro). Wielu autorów (Drucker (1954), Hashiguchi (1985)) przestrzega przed stosowaniem teorii tarcia Coulombowskiego do opisu deformacji postaciowej gruntów w skali makro. Istnieje natomiast duża klasa modeli opisujących tę teorią niektóre zjawiska kontaktowe. Modele te z założenia pomijają obroty ziaren na powierzchniach kontaktów, co koliduje z omawianymi już wynikami eksperymentalnymi (Oda, Konishi i Nemat-Nasser (1982)). Pomimo tak daleko idących uproszczeń prezentowane poniżej modele często z dobrym przy-

bliżeniem opisują pewne zjawiska obserwowane w czasie prób ścinania przy zmieniającym się stosunku naprężeń głównych.

Porównanie niektórych z modeli można znaleźć w pracach Pradhana i Tatsuoki (1989), Wooda (1987) i innych.

Newland i Alley (1957) jako jedni z pierwszych podjęli próbę opisu zjawiska ścinania próbek z materiałów sypkich przy uwzględnieniu tarcia międzycząsteczkowego jak i zmian struktury. Badali różnicę pomiędzy maksymalną  $\tau_{max}$  i residualną  $\tau_R$  wytrzymałością na ścianie, proponując następujące zależności:

$$(20) \quad \tau_{max}/\sigma_N = tg(\phi_\mu + \theta),$$

$$(21) \quad \tau_R/\sigma_N = tg \phi_\mu,$$

$$(22) \quad (\delta V/\delta \Delta)_{max} = tg \theta,$$

gdzie  $\sigma_N$  jest efektywnym naprężeniem normalnym na płaszczyźnie poślizgu,  $\phi_\mu$  - kątem tarcia międzycząsteczkowego,  $\theta$  - kątem ukierunkowania struktury, zaś  $\delta V/\delta \Delta$  oznacza stosunek przyrostu odkształceń objętościowych do przyrostu przemieszczenia w czasie ścinania.

Przez wiele lat prace nad wyjaśnieniem mechanizmów rządzących procesem ścinania gruntów prowadził Rowe (1962, 1969, 1971), początkowo dla regularnych układów prętów i kul. Dla rozszerzenia opisu na układy o nieregularnych kształtach cząstek, Rowe wprowadził tzw. zasadę minimum stosunku energii. Wyszedł z warunku równowagi granicznej dwóch ślizgających się po sobie sztywnych bloków (będących przybliżeniem poślizgu między dwiema cząstkami - Rys. 12a) opisanej zależnością:

$$(23) \quad tg \phi_s = L/L_x = tg(\phi'_\mu + \beta),$$

gdzie  $\beta$  jest kątem nachylenia płaszczyzny kontaktowej do kierunku przyłożonej siły  $L$ ,  $\phi'_\mu$  kątem tarcia między blokami, zaś  $L_x$  siłą

w kierunku prostopadłym do L. Stosunek przemieszczenia dx w kierunku siły  $L_x$  do przemieszczenia dl w kierunku siły L równy jest (patrz Rys. 12b):

$$(24) \quad \frac{dx}{dl} = -\operatorname{tg}\beta.$$

W teorii bazującej na analizie poślizgu między dwoma blokami kąt  $\beta$  pełni rolę kąta dylatacji. Łącząc (23) i (24) otrzymuje się:

$$(25) \quad \frac{-L dl}{L_x dx} = \frac{\operatorname{tg}(\phi_\mu + \beta)}{\operatorname{tg}\beta} = \bar{E},$$

gdzie  $\bar{E}$  jest stosunkiem zmian energii zdefiniowanym przez iloraz przyrostu pracy sił wewnętrznych na kontakcie i przyrostu pracy wykonanej przeciwko siłom zewnętrznym. Przy założeniu, że cząstki ślizgają się po sobie z zachowaniem minimum stosunku zmian energii ( $\bar{E}(d\bar{E}/d\beta = 0)$ ) otrzymać można:

$$(26) \quad \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2},$$

$$\bar{E}_{\min} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2}\right),$$

zaś w przypadku trójwymiarowym:

$$(27) \quad \frac{\sigma_1 d\epsilon_{1s}}{-(\epsilon_2 d\epsilon_{2s} + \sigma_3 d\epsilon_{3s})} = \bar{E}_{\min},$$

gdzie  $d\epsilon_{1s}$ ,  $d\epsilon_{2s}$ ,  $d\epsilon_{3s}$  są składowymi poślizgowymi przyrostów odkształceń głównych ( $d\epsilon_{1s} > 0$ ,  $d\epsilon_{2s} \leq 0$ ,  $d\epsilon_{3s} < 0$ ) lub:

$$(28) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d\epsilon_{vs}}{d\epsilon_{1s}} - \frac{d\epsilon_{2s}}{d\epsilon_{1s}} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - 1\right)} = \bar{E}_{\min}.$$

W przypadku osiowosymetrycznego stanu naprężenia ( $\sigma'_2 = \sigma'_3$ ) równanie dylatacji (23) daje się przedstawić dla teorii wychodzącej z poślizgu dwóch bloków (Pradhan i Tatsuoka (1989)) przy użyciu dwóch niezmienników stanu efektywnego naprężenia:



$$(29a) \quad p' = - \frac{\sigma_1' + 2\sigma_2'}{3}$$

$$(29b) \quad q = \sigma_2' - \sigma_1'$$

w postaci (dla osiowosymetrycznego ściskania):

$$(30) \quad \frac{q}{p'} = \frac{6 \operatorname{tg}(\phi_\mu + \beta)}{\operatorname{tg}(\phi_\mu + \beta)(3 \sin \beta - 1) + 3 \cos \beta},$$

gdzie  $\beta$  dane jest zależnością:

$$(31) \quad - \frac{dv^p}{d\gamma^p} = \frac{4 \sin \beta}{3 - \sin \beta}.$$

W równaniu (31)  $dv^p$  i  $d\gamma^p$  oznaczają plastyczny przyrost odkształcenia objętościowego i postaciowego. W przypadku osiowosymetrycznego rozciągania otrzymać można:

$$(32) \quad \frac{q}{p'} = \frac{-6 \operatorname{tg}(\phi_\mu + \beta)}{\operatorname{tg}(\phi_\mu + \beta)(3 \sin \nu + 1) + 3 \cos \nu},$$

gdzie:

$$(33) \quad \frac{dv^p}{d\gamma^p} = \frac{4 \sin \beta}{3 + \sin \beta}.$$

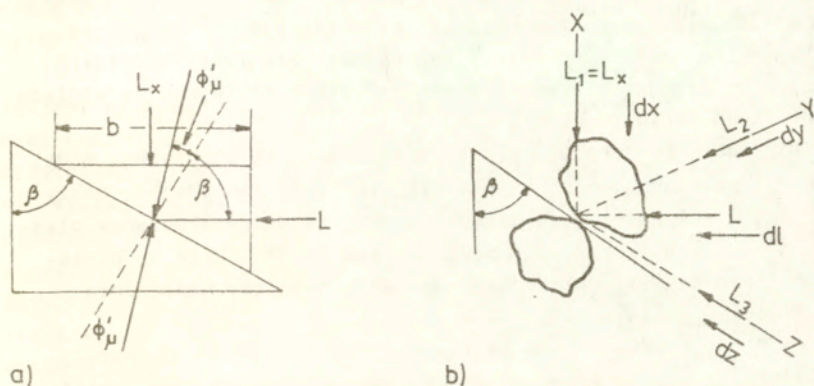
W przypadku teorii Rowe'a równania (30) i (32) przyjmują postać: dla osiowosymetrycznego ściskania:

$$(34) \quad \frac{q}{p'} = \frac{3}{2} \left[ \frac{(2\bar{E} + 1)(-dv^p/d\gamma^p) + 2(\bar{E} - 1)}{(\bar{E} - 1)(-dv^p/d\gamma^p) + (\bar{E} + 2)} \right],$$

dla osiowosymetrycznego rozciągania:

$$(35) \quad \frac{q}{p'} = \frac{3}{2} \left[ \frac{(2 + \bar{E})(-dv^p/d\gamma^p) - 2(\bar{E} - 1)}{(1 - \bar{E})(-dv^p/d\gamma^p) + 2\bar{E} + 1} \right].$$

Zakładając, że poślizg jest jedynym rodzajem oddziaływania na granicach ziaren oraz uwzględniając rozkład wektorów normalnych do kontaktów, Oda (1974) otrzymał następującą zależność dla osiowosymetrycznego stanu naprężenia:



Rys. 12a) Dwa sztywne bloki ślizgające się po sobie,  
 b) dwie części ślizgające się po sobie  
 (wg Rowe'a (1971)).

$$(36) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1}{Q} \left( 1 - \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \right) \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_\mu}{2} \right),$$

gdzie:

$$(37) \quad Q = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{\Delta U} P(\beta) E(\alpha, \beta) \cos \alpha |\sin 2\beta| d\alpha d\beta}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \overline{\Delta U} P(\beta) E(\alpha, \beta) \sin^2 \beta d\alpha d\beta}$$

$E(\alpha, \beta)$  jest omawianą wcześniej funkcją gęstości prawdopodobieństwa opisującą przestrzenny rozkład wektorów normalnych do płaszczyzn kontaktowych,  $\overline{\Delta U}$  średnią długością poślizgu na kontaktach, zaś  $P(\beta)$  prawdopodobieństwem zajęcia poślizgu na kontakcie o orientacji opisanej kątem  $\beta$ . Jak widać, otrzymana zależność (36) różni się od zależności (28) (dla osiowosymetrycznego stanu naprężenia  $\sigma_2 = \sigma_3$ ) jedynie o mnożnik  $1/Q$ . Wyznaczone na podstawie eksperymentów (Oda 1972b, c) wartości parametru  $Q$  wahają się w granicach 0.78 - 0.9.

Równanie analogiczne do (27) otrzymał de Josselin de Jong (1976), zakładając zarys płaszczyzny ścięcia podobny do zębów

piły. Autor ten interpretuje jednak zasadę minimum stosunku energii jako iloraz pracy wykonanej nad próbką przez główne naprężenia ściskające do pracy wykonanej przez próbkę przeciwko pozostałym naprężeniom głównym. Taka interpretacja jest ogólniejsza ze względu na dowolność kształtu próbki.

De Josselin de Jong (1971, 1977) zaproponował i rozwinął model płaskiego płynięcia ośrodka idealnie sypkiego, zakładający pokrywanie się linii poślizgu z płaszczyznami, na których warunek plastyczności Coulomba przyjmuje postać prawa tarcia. Może to prowadzić do różnic między kierunkami głównymi tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia.

Inną formą równania (23) wyprowadził Taylor (1948) w oparciu o równanie energii dysypowanej. Dla prostego ścinania pod działaniem obciążenia monotonicznego otrzymał:

$$(38) \quad \tau_g \phi_s = \tau_g \phi_r + \tau_g \beta.$$

Na podstawie teorii Taylora równania (30) i (32) w osiowosymetrycznym stanie naprężenia przyjmują postać:

$$(39) \quad \frac{q}{P'} = \frac{6(\tau_g \phi_r + \tau_g \beta)}{(\tau_g \phi_r + \tau_g \beta)(3 \sin \beta - 1) + 3 \cos \beta},$$

przy uwzględnieniu (31) oraz:

$$(40) \quad \frac{q}{P'} = \frac{-6(\tau_g \phi_r + \tau_g \beta)}{(\tau_g \phi_r + \tau_g \beta)(3 \sin \beta + 1) + 3 \cos \beta}$$

przy uwzględnieniu (33).

Nieco inny model płaskiego płynięcia zaproponował Tokue (1979b). Zakładając, że warunek równowagi granicznej między cząstkami określa jednocześnie ukierunkowanie stref poślizgu w całym układzie, otrzymał:

$$(41) \quad \frac{d\varepsilon_v}{d\delta} = \frac{1}{\mu} - \frac{(\frac{1}{\mu})^2 + 1}{\tau/\varepsilon_n + 1/\mu},$$



gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia między cząsteczkami. Weryfikację eksperymentalną modelu przeprowadził jednak na podstawie tylko jednej krzywej, co wydaje się być niewystarczające.

Tokue (1979 a) zaproponował również model dla rzeczywistego trójosiowego stanu naprężenia, wychodząc z relacji między efektywnymi naprężeniami głównymi, a siłami międzycząsteczkowymi oraz przyrostem odkształceń wynikających z poślizgów między cząsteczkami. Wyprowadzona w konsekwencji zależność na przyrost odkształceń plastycznych uwzględnia w ogólnej postaci wpływ drogi obciążenia w przestrzeni naprężeń, co różni ją od zależności prezentowanych dotychczas. Model zweryfikowano dla proporcjonalnych dróg obciążenia wykorzystując wyniki doświadczeń dla standardowego i rzeczywistego apartu trójosiowego stanu naprężenia. Uwzględniono jednak jedynie uproszczoną zależność na wartość wskaźnika dylatacji.

Równanie identyczne z (41) wyprowadził na podstawie rozważań energetycznych Nemat-Nasser (1980) przy założeniu, że w ramach rozpatrywanej objętości próbki rozkład częstotliwości występowania kąta dylatacji jest jednorodny.

Rozważając przebiegi charakterystyk dylatacyjnych dla gruntów, Matsuoka (1974 c) zaproponował, aby dylatację materiału opisywać poprzez stosunki wartości naprężeń głównych  $\sigma_1/\sigma_3$ ,  $\sigma_2/\sigma_3$ ,  $\sigma_1/\sigma_2$  lub stosunek naprężenia ścinającego do normalnego  $\tau/\sigma_n$  na tzw. "płaszczyźnie uruchomionej". Była to nowa koncepcja polemizująca z dotychczasową teorią, iż odkształcenia objętościowe zależą od ilorazu różnicy naprężeń głównych i efektywnego naprężenia średniego ( $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_m}$ ,  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ ) lub (równoważnie) od stosunku naprężenia ścinającego do normalnego na płaszczyźnie oktaedrycznej  $\tau_{oct}/\sigma_n$ .

W oparciu o rozważania mikroskopowe deformacji układu prętów aluminiowych w czasie bezpośredniego i prostego ścinania, a konkretnie zmian rozkładu ukierunkowania płaszczyzn kontaktowych, Matsuoka (1974a, b) wyprowadził następujące zależności, obowiązujące na potencjalnej płaszczyźnie poślizgu:

$$(42) \quad \frac{\tau}{\sigma_n} = \lambda \left( - \frac{d\varepsilon_n}{d\delta} \right) + \mu,$$

$$(43) \quad \frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \left( - \frac{\epsilon_N}{\delta} \right) + \mu',$$

gdzie  $\tau$  i  $\sigma_N$  oznaczają ścinające i normalne naprężenia, zaś  $\delta$  i  $\epsilon_N$  ścinające i normalne odkształcenia na tej płaszczyźnie. Parametr  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia międzycząsteczkowego, a  $\lambda$  i  $\mu'$  są stałymi materiałowymi.

Rozwiązując układ równań (42) i (43) przy założeniu, że  $\delta_0^X$  jest parametrem będącym wartością  $\delta^X$  przy ekstremalnej wartości  $\epsilon_N$  ( $d\epsilon_N/d\delta^X = 0$ ) można otrzymać:

$$(44) \quad d\delta^X = \frac{\delta_0^X}{\mu' - \mu} \exp\left(\frac{x - \mu}{\mu' - \mu}\right) dX,$$

$$(45) \quad d\epsilon_N = \frac{\mu - X}{\lambda} d\delta^X,$$

gdzie  $X \equiv \tau/\sigma_N = (\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_3})/2$ , lub:

$$(46) \quad \frac{\tau}{\sigma_N} = (\mu' - \mu) \ln \delta^X / \delta_0^X + \mu,$$

$$(47) \quad \epsilon_N = \frac{\mu - \mu'}{\lambda} \delta^X (\ln \delta^X / \delta_0^X - 1).$$

W celu rozszerzenia omawianego tu zagadnienia płaskiego na przypadki trójwymiarowe, Matsuoka (1974 b) wprowadził koncepcję trzech "płaszczyzn uruchomionych" (tzw. "złożone płaszczyzny uruchomione") przedstawionych na Rys. 13a. Są to płaszczyzny, na których stosunek naprężenia ścinającego do normalnego osiąga, dla danego rozkładu naprężeń głównych, wartość maksymalną (Rys. 14). Matsuoka założył, że równania (42) - (47) stosują się niezależnie od każdej z trzech płaszczyzn uruchomionych, a każde z odkształceń głównych jest sumą dwóch składowych generowanych na odpowiednich płaszczyznach uruchomionych (np. odkształcenie główne  $\epsilon_1$  na Rys. 13b jest sumą dwóch odkształceń wynikających z poślizgów wzdłuż AB i AC).

Koncepcja "złożonych płaszczyzn uruchomionych" była z powodzeniem stosowana w późniejszych pracach (Matsuoka i Takeda (1980),

Matsuoka et al. (1986), Chang et al. (1989) do opisu zachowania piasku poddanego działaniu zarówno prostych jak i złożonych dróg obciążenia w rzeczywistym trójosiowym stanie naprężenia jak również do opisu obciążeń cyklicznych (Matsuoka i Geka (1983), Matsuoka et al. (1985, Miura i Finn (1989)). Zwłaszcza skuteczna okazała się metoda wyprowadzenia praw lokalnych dla pojedynczych kontaktów i uśredniania ich na potencjalnych płaszczyznach poślizgu, a następnie na całej objętości próbki (Chang (1989)), z uwzględnieniem prawdopodobieństwa znalezienia na danej płaszczyźnie kontaktu poruszającego się w zadanym kierunku. Model Changa (1989) wymaga jednak przyjęcia 14 parametrów, z których tylko 6 wyznaczyć można jednoznacznie na podstawie prostych testów laboratoryjnych.

Matsuoka i Nakai (1974, 1977, 1985) zaproponowali, w oparciu o t.zw. "przestrzenną płaszczyznę uruchomioną" (Spatial Mobilized Plane - SMP) uśredniającą w pewien sposób trzy płaszczyzny uruchomione, nową postać warunku plastyczności dla gruntów. Na Rys. 13b przedstawiono położenie "przestrzennej płaszczyzny uruchomionej" ABC względem trzech płaszczyzn: AB, BC i AC, na bokach których została oparta. Stan naprężenia na płaszczyźnie SMP odpowiada punktowi P na Rys. 14. Cosinusy kierunkowe tej płaszczyzny wynoszą odpowiednio:

$$(48) \quad \alpha_i = \sqrt{J_3 / (\sigma_i J_2)}, \quad (i=1,2,3),$$

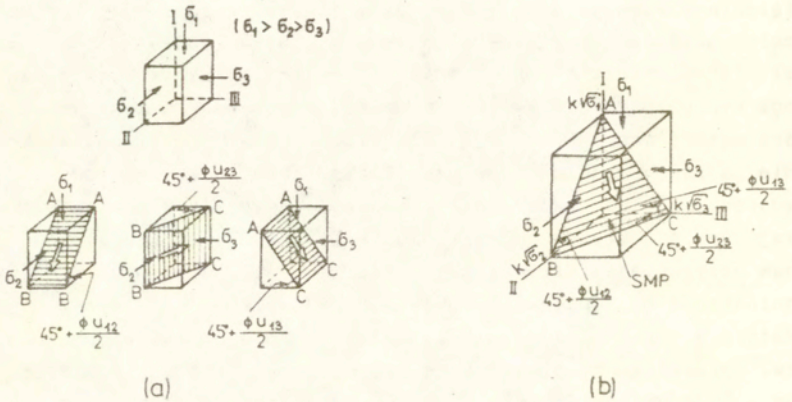
gdzie  $J_2, J_3$  oznaczają drugi i trzeci niezmiennik stanu efektywnego naprężenia;  $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ ;  $J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}$ , gdzie  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  jest dwiatorem naprężenia.

Należy podkreślić, że omawiana płaszczyzna jest tworem geometrycznym, a nie płaszczyzną naprężenia, zaś w izotropowym stanie naprężenia pokrywa się z płaszczyzną oktaedryczną ( $\phi_{uij} = 0$ , znaczenie kątów  $\phi_{uij}$  wyjaśniają Rys. 13 i Rys. 14).

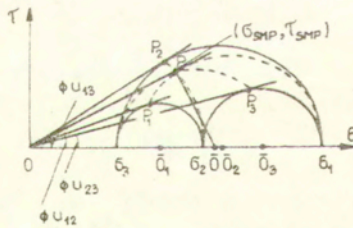
Naprężenie normalne, ścinające oraz ich stosunek na płaszczyźnie SMP wyrazić można wzorami:

$$(49) \quad \sigma_{SMP} = \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \alpha_2^2 + \sigma_3 \alpha_3^2 = \frac{3J_3}{J_2},$$





Rys. 13a) Trzy płaszczyzny uruchomione,  
 b) przestrzenna płaszczyzna uruchomiona (wg Matsuoki (1974b)).



Rys. 14. Stan naprężenia na przestrzennej płaszczyźnie uruchomionej (wg Matsuoki (1974b)).

$$(50) \quad \tau_{SMP} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_3^2 a_1^2} = \frac{\sqrt{J_1 J_2 J_3 - 9 J_3^2}}{J_2}$$

$$(51) \quad \frac{\tau_{SMP}}{\bar{\sigma}_{SMP}} = \sqrt{\frac{J_1 J_2}{9J_3} - 1}.$$

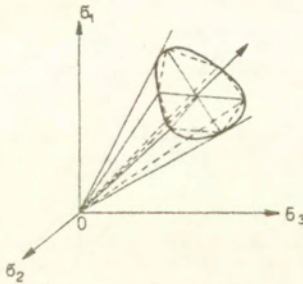
Przy założeniu, że grunt doznaje plastycznego płynięcia gdy stosunek  $\tau_{SMP}/\bar{\sigma}_{SMP}$  osiągnie wartość graniczną, kryterium uplastycznienia da się przedstawić w postaci:

$$(52) \quad \frac{\tau_{SMP}}{\bar{\sigma}_{SMP}} = \text{const.}$$

lub

$$(53) \quad \frac{J_1 J_2}{J_3} = \text{const.}$$

Porównanie kształtów omawianego warunku z kryterium Coulomba-Mohra w przestrzeni naprężeń głównych przedstawia Rys. 15.



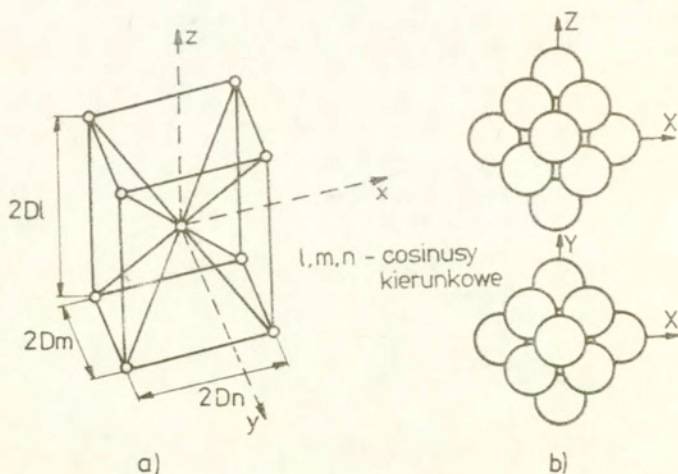
Rys. 15. Porównanie kształtów warunku plastyczności Nakai-matsuoki z kryterium Coulomba-Mohra (wg Matsuoki i Nakai (1985)).

Prezentowana koncepcja płaszczyzny SMP była rozwijana (Nakai i Matsuoka (1983)) dla dokładniejszego opisu obciążeń, których drogi leżą na płaszczyźnie dewiatorowej.

Omawiany model Matsuoki jest obecnie jednym z najskuteczniejszych (opisujących pewne zjawiska zarówno jakościowo, jak i ilościowo) modeli bazujących na wewnętrznej strukturze materiału.

Nadaje się zwłaszcza do opisu testów przeprowadzonych w warunkach obracających się kierunków głównych stanu naprężenia. Nie wyjaśnia on jednak takich efektów, jak osłabienie materiału i związanej z nim stabilizacji dylatacji. Dlatego też stosowany jest przede wszystkim do opisu zachowania piasków luźnych. (Matsuoka i Suzuki (1989)) oraz ośrodków sztucznych utworzonych z dużej ilości cienkich wałeczków (Matsuoka, Suzuki i Sakakibara (1988)).

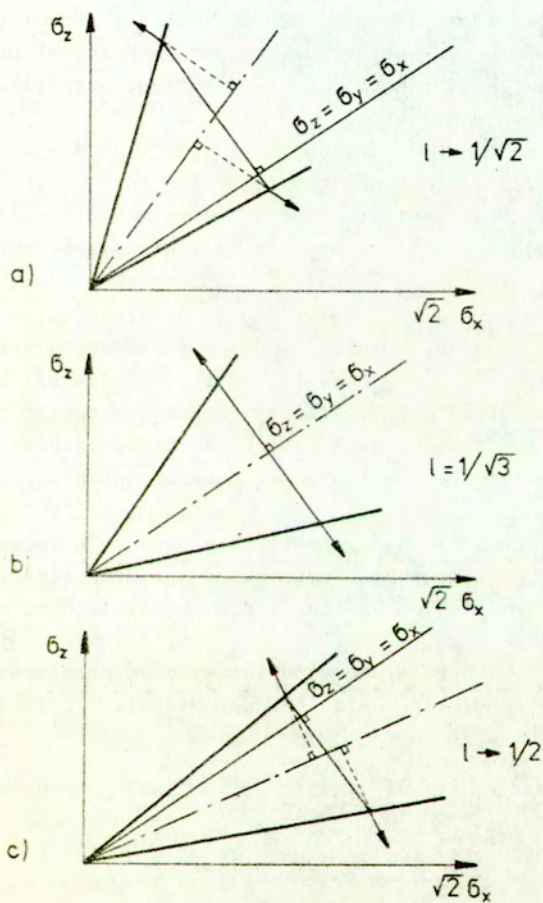
Deformację prostych struktur, na przykładzie układu rombowego przestrzennie centrycznego (Rys. 16a), rozważali Thornton (1979) i Thornton i Blackburn (1987), ograniczając się jedynie do piętnastu nieodkształcalnych elementów (Rys. 16b). Jak uprzednio, plastyczne płynięcie utożsamiali ze zmianą geometrii struktury.



Rys. 16. Układ rombowy przestrzennie centryczny:  
a) schemat przestrzenny,  
b) jego realizacja fizyczna z piętnastu sfer.

Rozważając zmianę odległości sąsiadujących sfer, spowodowaną przyrostem odkształcenia, otrzymano teoretyczne potwierdzenie współosiowości tensorów przyrostu odkształcenia i naprężenia, powodującego plastyczne płynięcie. Wyznaczona teoretycznie dla ukła-





Rys. 17. Stożkowe powierzchnie plastycznego płynięcia oraz odpowiadające im wektory przyrostu odkształcenia dla układów rombów przestrzennych (wg Thorntona i Blackburna (1987)).

du regularnego, przestrzennie centrycznego, powierzchnia plastyczności jest stożkiem o osi pokrywającej się z osią ciśnień hydrostatycznych. Dla innych układów nachylenie stożka zmienia się. Powierzchnia potencjału plastycznego jest walcem, o osi pokrywającej się z osią powierzchni plastyczności. Otrzymane przez Thorntona i Blackburna przekroje powierzchni plastyczności płaszczyną  $\sqrt{2} \bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_z$  oraz odpowiadające im kierunki przyrostów odkształceń dla danego naprężenia średniego przedstawiono na Rys. 17 (odpowiednio dla układów:

a - regularnego ściennie centrowanego:  $l = 1/\sqrt{2}$ ,  $m = n = 1/2$ ,  
 b - regularnego przestrzennie centrycznego:  $l = m = n = 1/\sqrt{3}$ ,  
 c - regularnego ściennie centrowanego:  $l = 1/2$ ,  $m = n = \sqrt{3}/2\sqrt{2}$ ).  
 Thornton i Blackburn uzyskali zależności rozmiaru wyznaczonej powierzchni plastyczności od tarcia międzycząsteczkowego oraz nachylenia tej powierzchni od struktury układu (a przez to wpływ na wskaźnik dylatacji). Badany materiał wykazywał zarówno wzmocnienie, jak i osłabienie kinematyczne, objawiające się obrotem osi stożka, umożliwiające zagęszczenie i dylatację. Ponadto, w sposób naturalny otrzymano efekt Bauschingera, ponieważ zmiany anizotropii strukturalnej powodowały przesuwanie się powierzchni plastyczności.

Inną próbę opisu materiałów ziarnistych w oparciu o rozważania zjawisk kontaktowych na granicach cząstek podjął Mróz (1980a), zakładając rozkład przyrostów przemieszczeń na kontaktach na część sprężystą i plastyczną  $\dot{\gamma}_n = \dot{\gamma}_n^e + \dot{\gamma}_n^p$ ,  $\dot{\gamma}_t = \dot{\gamma}_t^e + \dot{\gamma}_t^p$ , gdzie indeksy n i t oznaczają odpowiednio składowe prostopadłe i styczne do powierzchni styku cząstek. Wprowadzając kontaktowe zależności konstytutywne:

$$(54) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_n^e &= \frac{1}{K_n} \dot{N}, \quad \dot{\gamma}_{t_1}^e = \frac{1}{K_t} \dot{T}_1, \quad \dot{\gamma}_{t_2}^e = \frac{1}{K_t} \dot{T}_2, \\ \dot{\gamma}_n^p &= \dot{\lambda} g_n, \quad \dot{\gamma}_{t_1}^p = \dot{\lambda} g_{t_1}, \quad \dot{\gamma}_{t_2}^p = \dot{\lambda} g_{t_2}, \end{aligned}$$

gdzie  $K_n$  i  $K_t$  są kontaktowymi modułami podatności sprężystej, zaś  $\dot{N}$ ,  $\dot{T}_1$  i  $\dot{T}_2$  oznaczają przyrosty składowych sił na granicach ziaren oraz zakładając kontaktowy warunek płynięcia postaci:

$$(55) \quad f(N, T_1, T_2, \alpha, \beta) = 0,$$



gdzie  $\alpha$  opisuje wzmocnienie kontaktu wynikające z jego pośligu, zaś  $\beta$  opisuje wzmocnienie i osłabienie wynikające ze zmian efektywnej powierzchni kontaktu, Mróz (1980a) otrzymał następującą postać modułu wzmocnienia na granicy cząstek:

$$(56) \quad H = - \left[ \frac{\partial f}{\partial \alpha} (g_{t_1}^2 + g_{t_2}^2)^{1/2} + \frac{\partial f}{\partial \beta} B(\beta) g_n \right]$$

(Przy założeniu następującej postaci przyrostów parametrów wzmocnienia:

$$(57) \quad \dot{\alpha} = (\dot{\delta}_{t_1}^2 + \dot{\delta}_{t_2}^2)^{1/2}, \quad \dot{\beta} = B(\beta) \dot{\delta}_n^p.$$

Dla stowarzyszonego prawa płynięcia:

$$(58) \quad g_n = \frac{\partial f}{\partial N}, \quad g_{t_1} = \frac{\partial f}{\partial T_1}, \quad g_{t_2} = \frac{\partial f}{\partial T_2}.$$

Bazując na przytoczonych powyżej zależnościach, Mróz dyskutował również pewne postaci warunku plastyczności i potencjału plastycznego dla reprezentatywnej grupy cząstek.

## 2.2.b. Modele naprężeniowo-odkształceniowe dla ściskania

Omawiane w poprzedniej części modele naprężeniowo-odkształceniowe opisują deformację plastyczną ośrodków sypkich przy zmieniającym się stosunku naprężeń głównych. Ponieważ większość z nich zakłada, że materiał sypki składa się ze sztywnych cząstek, których zachowanie opisane jest poprzez warunek tarcia (a zatem stosunek naprężeń), w przypadku stałego stosunku naprężeń poślizg między cząstkami nie występuje i odkształcenia nie zmieniają się. Odkształcenia plastyczne powstają jednak zarówno przy izotropowym ściskaniu, jak i tzw. konsolidacji  $K_0$ . Modele te z założenia nie są również w stanie wyjaśnić deformacji struktury, wynikającej ze sprężystego zachowania się pojedynczych ziaren.

Wychodząc z zagadnienia Hertza kontaktu dwu sprężystych kul (rozwijanego między innymi przez Mindlina (1949), Mindlina i Dereśiewicza (1953) i Dereśiewicza (1973)), Ko i Scott (1967) badali deformację piasku spowodowaną izotropowym ściskaniem. Doszli do



wniosku, że zależność między odkształceniami objętościowymi, a średnim ciśnieniem hydrostatycznym jest nieliniowa (lecz prawie sprężysta), zaś rzeczywisty piach zachowuje się sztywniej niż to wynika z teorii Hertza. Dobry et al. (1982) rozważał małe deformacje sześcienniej struktury przestrzennej, uzyskując teoretyczną wartość granicznego odkształcenia postaciowego tj. takiego, dla którego nie występuje zmiana upakowania struktury. Z założenia ograniczono się zatem do odkształceń, które nie powodują poślizgów na kontaktach.

W celu opisanego odkształceń sprężystych spowodowanych obciążeniem, przy stałym stosunku naprężenia, Rowe (1971) zmodyfikował równanie Hertza wyprowadzone dla dwóch kul w kontakcie. Zaproponował postać:

$$(59) \quad \epsilon_{ie} = S_i \left( \bar{\sigma}_i / E \right)^m, \quad (i=1,2,3),$$

gdzie  $\epsilon_{ie}$  oznacza sprężystą składową odkształcenia na kierunku odpowiadającym naprężeniom  $\bar{\sigma}_i$ , zaś  $E$  moduł Younga materiału kul. Współczynniki  $S_i$  i  $m$  są funkcjami przestrzennego rozkładu kontaktów międzycząsteczkowych. Stosując uogólnione prawo Hooke'a oraz zależność (59), Rowe zaproponował postać równań opisujących sprężysty stan odkształcenia. Już pierwsze przybliżenie, polegające na przyjęciu, iż wielkości  $S_i$  oraz  $m$  są stałymi parametrami, dało dobry opis eksperymentalnych krzywych sprężystej deformacji piasku zarówno przy stałym jak i zmieniającym się stosunku naprężeń.

Rowe (1971) podjął również próbę wyjaśnienia zachowania się piasku w osiowosymetrycznym stanie naprężenia przy stałym stosunku naprężeń  $R = \bar{\sigma}_a / \bar{\sigma}_r$ , gdzie  $\bar{\sigma}_a$  i  $\bar{\sigma}_r$  oznaczają odpowiednio naprężenia osiowe i promieniowe. Przy założeniu, że  $\lambda$  oznacza stosunek sztywności w kierunku osiowym do sztywności w kierunku promieniowym, Rowe otrzymał równanie dylatacji w postaci:

$$(60) \quad \left( \frac{dv}{d\epsilon_a} \right)_s = \frac{R \bar{E}_{min} - 1}{R^2 (\bar{E}_{min} - 1)} \cdot \frac{1}{\frac{2 R \bar{E}_{min} - 1}{R^2} \lambda + R \bar{E}_{min} - R^2} - 1$$

Wskaźnik  $s$  oznacza składową związaną z poślizgiem, zaś  $\bar{E}_{\min}$  dane jest wzorem (26). Równanie (60) zostało wyprowadzone przy założeniu, że stałą wartość stosunku  $R$  można otrzymać ze złożenia dwóch niezależnych zmian naprężenia: przyrostu  $\sigma_a$  przy stałym  $\sigma_r$  oraz przyrostu  $\sigma_r$  przy stałym  $\sigma_a$ .

### 2.3. Modele stochastyczne i dyskretne modele numeryczne

Wprawdzie modele opisane w tym rozdziale nie mają omawianej wcześniej struktury modeli konstytutywnych (zależność między obciążeniami zewnętrznymi a odpowiedzią materiału), jednak również opisują pewne zjawiska, zachodzące w układach złożonych z pojedynczych cząstek, takie jak ruch elementów struktury czy zmianę ich prędkości w czasie procesu.

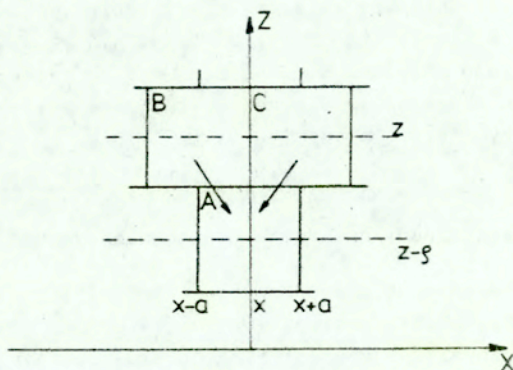
Należy podkreślić, że pomimo raczej informacyjnego potraktowania tej klasy modeli, ich znaczenie w ostatnim czasie rośnie ze względu na dynamiczny rozwój techniki komputerowej, dający nowe możliwości w zakresie dostępnych mocy obliczeniowych.

#### 2.3.a Modele stochastyczne

W mechanice gruntów wiele zjawisk takich jak: przepływy cieczy, konsolidacja czy deformacja postaciowa może być analizowanych przy użyciu metod stochastycznych, gdyż rozkład wielu parametrów tych materiałów, jak również kształtu i wielkości cząstek, ma charakter losowy (Harr (1982)).

Jako jeden z pierwszych zastosował procesy stochastyczne do analizy przemieszczeń elementów (oraz pustek) w materiałach sypkich Litwiniszyn (1963). Bazując na prostym modelu skrzynkowym (Rys. 18) rozważał możliwy przepływ cząstek z komór B i C po uprzednim usunięciu materiału z komory A, w wyniku czego otrzymał równanie na funkcję  $P = P(x, z)$  opisującą kształt rynny utworzonej na skutek przemieszczenia się materiału sypkiego:

$$(61) \quad \frac{\partial^2 P(x, z)}{\partial z^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial P(x, z)}{\partial z} = E^2 \frac{\partial^2 P(x, z)}{\partial x^2}.$$



Rys. 18. Prosty, skrzynkowy model przepływu cząstek (wg Litwiniszyna (1963)).

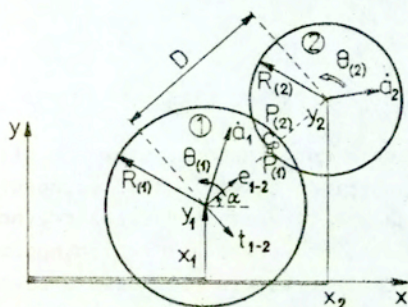
Rozpatrując procesy deformacji materiałów sypkich, Kitamura (1981) zastosował procesy Markova. Podobnie jak Horne (1965) i Oda (1972a) korzystał z pojęcia funkcji gęstości prawdopodobieństwa, opisującej rozkład wektorów normalnych do płaszczyzn kontaktowych, uzależniając ją jednak dodatkowo od parametrów stanu naprężenia.

Stosując w mechanice gruntów procesy stochastyczne należy brać pod uwagę takie problemy jak: wybór zmiennych i parametrów, które należy traktować jako wielkości losowe oraz interpretację fizyczną i sposób identyfikacji współczynników, pojawiających się w równaniach tych procesów.

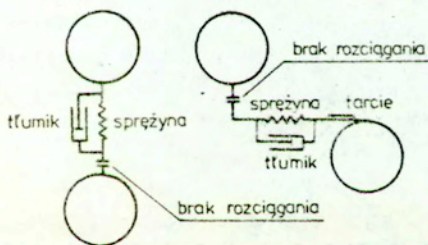
### 2.3.b. Dyskretne modele numeryczne

Coundall i Starck (1979) zaproponowali model tzw. elementów wyróżnionych i zastosowali go do opisu zachowania układów złożonych z płaskich krążków. Model bazuje na bezpośrednim wykorzystaniu algorytmu numerycznego, w którym oddziaływania między cząstkami wyznaczone są kontakt po kontakcie, a przemieszczenia cząstek - element po elemencie. Na Rys. 19 przedstawiono prosty do zapisu numerycznego schemat oddziaływań między cząstkami.





Rys. 19. Model oddziaływań międzycząsteczkowych (wg Coundalla i Starcka (1979)).



Rys. 20. Uproszczony schemat oddziaływań międzycząsteczkowych.

W modelu tym oddziaływania na kontaktach zastąpiono elementami uproszczonymi: sprężyną, tłumikiem i elementem poślizgowym. Schemat tak przyjętego uproszczenia przedstawia Rys. 20. Stosując metodę różnic skończonych, autorzy otrzymali ostatecznie wartości sił na kontaktach i przemieszczeń dla całego układu. Uzyskane wyniki teoretyczne porównano z rezultatami badań elastooptycznych nad tego typu układami krążków.

Oprócz modelu Coundalla i Starcka istnieją jeszcze inne modele numeryczne.

### 3. MODELE FENOMENOLOGICZNE NIEZALEŻNE OD CZASU

Większość stosowanych obecnie modeli konstytutywnych dla piasku, bazujących na podstawowych pojęciach z teorii plastyczności, ma wiele cech wspólnych. Współczesna literatura naukowa przynosi szereg modeli będących nieznacznymi modyfikacjami swoich poprzedników, coraz wierniej odwzorowujących rzeczywiste zachowanie piasku. Ze względu na bogactwo i podobieństwo proponowanych rozwiązań, niniejszy przegląd sporządzono pod kątem ich porównania, nie zaś kolejnych szczegółowych prezentacji.

Wspomniane podobieństwo jest wynikiem tego, że omawiane modele są na ogół rozwinięciem koncepcji zaproponowanej i rozwijanej na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych przez pracowników Uniwersytetu w Cambridge (Wielka Brytania), znanej pod nazwą modelu "Cam-clay". Szczegółowy opis tej teorii znaleźć można w pracach Roscoe i Burlanda (1968) oraz Schofielda i Wortha (1968). Wprawdzie, jak sama nazwa wskazuje, koncepcja ta zaproponowana została do opisu zachowania się glin, współczesne modele dla piasków stanowią jej modyfikację. Dlatego też przedstawimy obecnie jej podstawowe założenia.

#### 3.1. Model Cam-clay

Model Cam-clay zakłada istnienie w przestrzeni  $(p, q, e)$ :

- powierzchni granicznej otaczającej wszystkie możliwe stany występowania gruntu,
- linii stanów krytycznych (w skrócie c.s.l. - critical state line), na której występuje nieograniczony przyrost odkształceń postaciowych bez dalszych zmian naprężenia i objętości.

Wielkości  $p$  i  $q$  dane są wzorami:

$$(62) \quad \begin{aligned} p &= -\frac{1}{3} \text{tr} \tilde{\sigma} \\ q &= \sqrt{\tilde{\sigma} + \rho \tilde{I}} \\ q &= |\underline{q}|, \end{aligned}$$

zaś  $e$  jest wskaźnikiem porowatości.

Równanie na przyrost pracy odkształceń plastycznych:

$$(63) \quad \dot{W}^p = \text{tr}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^p)$$

redukuje się w przypadku osiowosymetrycznego stanu naprężenia do postaci:

$$(64) \quad \dot{W}^p = -\rho \dot{\epsilon}_v^p + q \dot{\epsilon}_q^p,$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_v^p$  i  $\dot{\epsilon}_q^p$  oznaczają przyrosty plastycznych odkształceń objętościowych i dwiatorowych Roscoe, Schofield i Thurairajah (1963) założyli następującą postać równania na przyrost pracy odkształceń plastycznych:

$$(65) \quad \dot{W}^p = M \rho \dot{\epsilon}_q^p,$$

gdzie  $M$  jest pewną stałą materiałową. Podstawienie (65) do (64) prowadzi do następującej formy równania dylatacji:

$$(66) \quad \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p} = \eta - M,$$

gdzie:

$$(67) \quad \eta = \frac{q}{\rho}.$$

Korzystając z klasycznych równań teorii plastyczności:

$$(68) \quad \dot{\epsilon}_v^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial p}; \quad \dot{\epsilon}_q^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial q},$$

gdzie  $\lambda$  jest wskaźnikiem proporcjonalności, otrzymuje się po podstawieniu ich do (66) i scałkowaniu, równanie opisujące kształt powierzchni plastyczności:

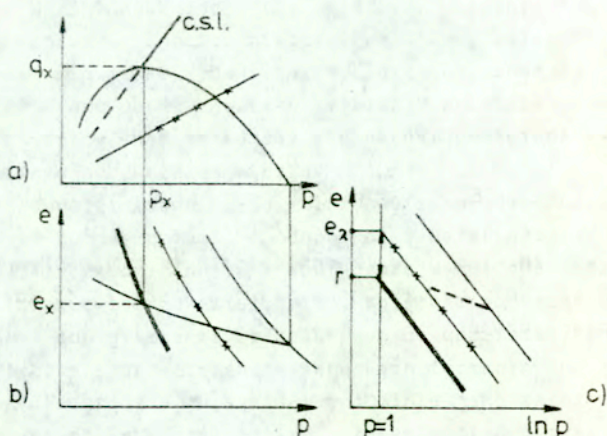
$$(69) \quad f = p \exp\left(\frac{\eta}{M} - 1\right) - p_x = 0.$$



Parametr  $p_x$  decyduje o rozmiarze tej powierzchni. Zarys jej górnej części przedstawiono na Rys. 21.a. Punkt  $^0$  współrzędnych  $(p_x, q_x, e_x)$  jest punktem przecięcia powierzchni plastyczności linią stanów krytycznych (c.s.l.). Stąd na podstawie (66) otrzymuje się wzór na wartość współczynnika kierunkowego linii stanów krytycznych, która z założenia jest linią prostą na płaszczyźnie  $(p, q)$ :

$$(70) \quad \frac{q_x}{p_x} = M$$

(przy stowarzyszonym prawie płynięcia,  $\dot{\epsilon}_v^p = 0$  na c.s.l.). Model Cam-clay zakłada również, że c.s.l. jest linią prostą także na płaszczyźnie  $e - \ln p$ , równoległą do linii pierwotnej izotropowej konsolidacji (Rys. 21c). Linia pierwotnej izotropowej konsolidacji jest linią przecięcia powierzchni granicznej płaszczyzną  $q = 0$  (Rys. 22) i z założenia jest prostą o współczynniku kierunkowym 1 (we współrzędnych  $e - \ln p$ ). Kolejnym założeniem omawianego modelu jest przyjęcie kształtu linii opisującej deformację sprężystą w postaci prostej (również na płaszczyźnie  $e - \ln p$ ) o współczynniku kierunkowym  $k$ . Prosta ta, rządząca procesami odciążania i dociążania, przedstawiona została na Rys. 21c w postaci linii przerywanej.



Rys. 21 a) Powierzchnia plastyczności modelu Cam-clay, b) i c) linie izotropowej konsolidacji.

Powyższe założenia, dotyczące kształtu linii: stanów krytycznych, izotropowej konsolidacji i stanów sprężystych prowadzą do układu równań:

$$(71) \quad \begin{aligned} e + k \cdot \ln p &= e_x + k \cdot \ln p_x \\ e_x &= \Gamma - \ln p_x \end{aligned}$$

definiującego zmianę parametru  $p_x$  w zależności od aktualnego stanu materiału:

$$(72) \quad p_x = \exp\left(\frac{e - \Gamma + k \ln p}{k - l}\right),$$

gdzie  $\Gamma$  jest wartością wskaźnika porowatości w stanie krytycznym dla  $p = 1$ . Równanie (72) poprzez definicję zmian wielkości powierzchni plastyczności, opisuje również izotropowe (gęstościowe) wzmocnienie i osłabienie materiału w zależności od poziomu odkształceń plastycznych  $\epsilon_V^p$ , skorelowanego z aktualnym wskaźnikiem porowatości  $e$  ( $e = e_0 - k \ln p/p_0 - (1 + e_0)\epsilon_V^p$ ):

$$(73) \quad p_x = \exp\left(\frac{e_0 + l \ln p_0 - \Gamma - (1 + e_0)\epsilon_V^p}{k - l}\right),$$

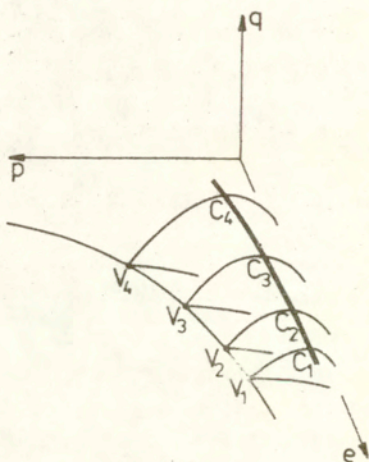
gdzie  $e_0$  i  $p_0$  oznaczają początkowe wartości  $e$  i  $p$ . Podstawienie zależności (72) do (69) prowadzi, po odpowiednich przekształceniach, do równania:

$$(74) \quad q = \frac{Mp}{l - k} (\Gamma + l - k - e - 1 - l \ln p),$$

opisującego powierzchnię graniczną w przestrzeni  $(p, q, e)$ . Jej zarys przedstawia Rys. 22:

Stosując klasyczne w teorii plastyczności równanie na przyrost odkształceń plastycznych otrzymuje się:

$$(75) \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \left[ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \right]}{- \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}}$$



Rys. 22. Powierzchnia graniczna w przestrzeni (p, q, e) (wg Schofielda i Wortha (1968)).

Równanie (75) wraz z (69) i (73) tworzy model Cam-clay.

Jedną z wad tego modelu jest istnienie na powierzchni plastyczności naroża, które nie ma żadnego sensu fizycznego. Dla uniknięcia związanych z nim trudności, Burland (1965) założył następującą postać równania na przyrost pracy odkształceń plastycznych:

$$(76) \quad \dot{W}^p = [(\rho \dot{\epsilon}_v^p)^2 + (M \rho \dot{\epsilon}_q^p)^2]^{1/2}$$

Na podstawie powyższej zależności wyprowadził równanie dylatacji:

$$(77) \quad \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p} = \frac{\eta^2 - M^2}{2\mu}$$

oraz powierzchni plastyczności:

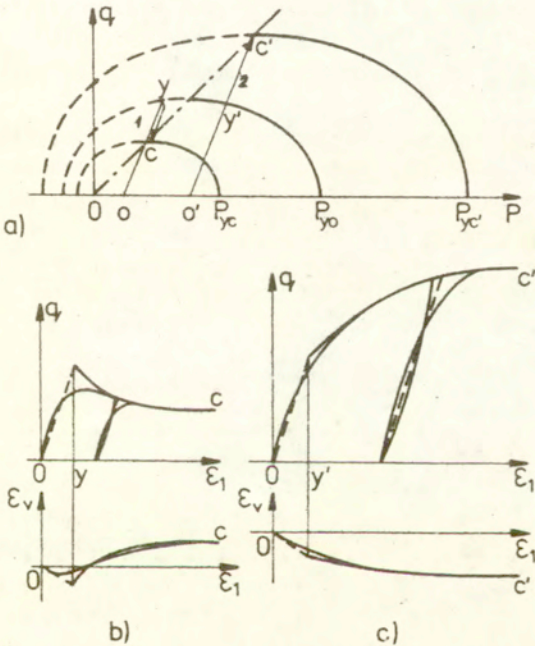
$$(78) \quad f = \frac{1}{2} p \left(1 + \frac{\eta^2}{M^2}\right) - p_x = 0.$$

Tak wprowadzona powierzchnia plastyczności jest elipsą na płaszczyźnie (p, q). Równania: (75), oraz (73) i (78) tworzą tzw. zmo-



dyfikowany model Cam-clay.

Rys. 23 przedstawia zachowanie materiału wynikające z przyjęcia zmodyfikowanego modelu Cam-clay w osiowosymetrycznym stanie naprężenia, dla dwóch różnych ścieżek obciążenia 1 i 2, jak na Rys. (a). Odpowiedź materiału dla stanu gęściejszego niż krytyczny (ścieżka 1) przedstawia Rys. (b), natomiast dla luźniejszego niż krytyczny (ścieżka 2) - Rys. (c).



Rys. 23. Zachowanie materiału wynikające z przyjęcia zmodyfikowanego modelu Cam-clay:  
a) ścieżki obciążenia i zmiany powierzchni plastyczności,  
b) odpowiedź materiału dla stanu gęściejszego niż krytyczny,  
c) odpowiedź dla stanu luźniejszego niż krytyczny.

Na Rys. (b) i (c) linią przerywaną oznaczono stan sprężysty, zaś ciągłą pogrubioną - sprężysto-plastyczny. Cienką linią ciągłą

zaznaczono orientacyjnie rzeczywisty przebieg krzywych  $\sigma - \epsilon$ .

Części powierzchni plastyczności zaznaczone na Rys. (a) linią przerywaną mają jednostkowy wektor normalny z ujemną składową wzdłuż osi ciśnień hydrostatycznych. Stąd materiał obciążony według ścieżki 1 wykazuje osłabienie (powierzchnia plastyczności kurczy się). Pozostałe części powierzchni plastyczności mają wektor normalny ze składową dodatnią wzdłuż osi ciśnień hydrostatycznych. W wyniku obciążenia zgodnie ze ścieżką 2 materiał wzmacnia się (powierzchnia plastyczności rozrasta się). Przyrost obciążenia od punktu początkowego  $O''$  powoduje początkowo deformację sprężystą aż do rozpoczęcia plastycznego płynięcia w punkcie  $Y'$  lub  $Y''$ . Następnie, w wyniku osłabienia lub wzmocnienia materiału, naprężenie osiąga wartość krytyczną odpowiednio w punkcie  $C'$  lub  $C''$ .

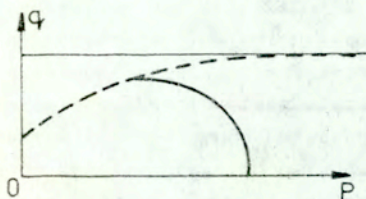
Model Cam-clay opisuje dość dobrze zjawisko umocnienia się gruntów luźnych. Efekty związane z osłabieniem są jednak przybliżone dużo gorzej, ze względu na zbyt wysokie wartości naprężenia powodującego plastyczne płynięcie i za szybką dylatację materiału. Wpływ parametrów modelu na jakość jego przewidywań przedyskutowali Tam i Woods (1989).

### 3.2. Propozycje rozwijające koncepcję Cam-clay

#### 2.2.a. Modele ze stowarzyszonym prawem płynięcia

Jedną z modyfikacji modelu Cam-clay jest model zaproponowany przez Dimaggio i Sadlera (1971), w którym autorzy zastąpili część powierzchni plastyczności znajdującą się po stronie stanów gęściejszych od krytycznego poprzez krzywoliniową powierzchnią zniszczenia materiału (z ang. failure surface). W przeciwieństwie do tradycyjnej (eliptycznej) powierzchni plastycznego płynięcia, ograniczającej obszar stanów sprężystych po stronie stanów luźniejszych od krytycznego, powierzchnia ta ma zawsze stałe położenie i wymiary (Rys. 24). Model ten prawidłowo opisuje poziom naprężeń maksymalnych i zagęszczania materiału przy założeniu, że linia stanów krytycznych pokrywa się z linią zniszczenia materiału. Nie jest jednak w stanie odwzorować takich zjawisk jak osłabienie materiału dla stanów gęściejszych od krytycznego. Ze względu na swoją prostotę





Rys. 24. Tzw. "Cap model" (wg Dimaggio i Sandlera (1971)).

był dość często stosowany w analizie numerycznej rzeczywistych problemów inżynierskich (np. Baladi i Sandler (1980)).

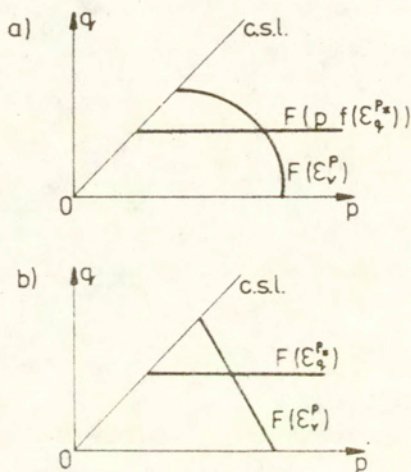
Aby uwzględnić wpływ przyrostu plastycznych odkształceń postaciowych, Roscoe i Burland (1968) uzupełnili zmodyfikowany model Cam-clay o powierzchnię plastyczności typu Misesa (jak na Rys. 25a). Założyli, że powierzchnia ta może ulegać wzmocnieniu (rozszerzać się) w zależności od zmian wielkości  $pf(\epsilon_q^*)$ , gdzie  $f(\epsilon_q^*)$  jest pewną funkcją zakumulowanej długości ścieżki dewiatorowych odkształceń plastycznych ( $\epsilon_q^* = \int |\dot{\epsilon}_q^p| dt$ ). Tradycyjna (eliptyczna) powierzchnia plastyczności doznaje natomiast wzmocnienia gęstościowego (objętościowego). Tak więc, występujące w tym modelu powierzchnie wykazują wzmocnienie zarówno gęstościowe jak i dewiatorowe (lecz każda tylko jednego typu), co wykorzystano do opisu zachowania się średnio zagęszczonych glin.

Prevost i Høeg (1975) zaproponowali uproszczoną wersję tego modelu, zastępując tradycyjną, eliptyczną powierzchnię plastyczności odcinkiem prostej, również zmieniającym położenie w zależności od poziomu odkształceń objętościowych (Rys. 25.b).

Inną próbę uzależnienia wzmocnienia materiału od historii plastycznych odkształceń objętościowych i dewiatorowych podjęli niezależnie Nova (1977) i Wilde (1977, 1983). Nova zaproponował parametr wzmocnienia (tzw. wzmocnienie mieszane) w postaci:

$$(79) \quad K = \epsilon_v^p + D\epsilon_q^p^*$$



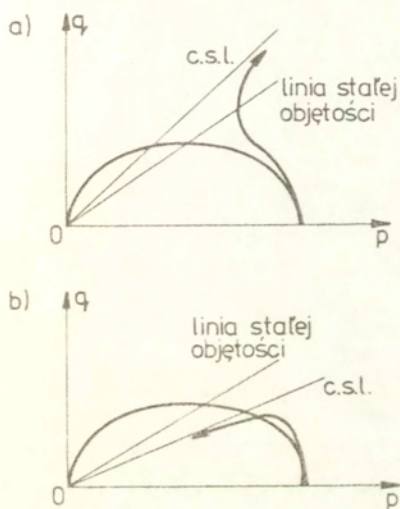


Rys. 25. Modele ze stowarzyszonym prawem płynięcia:  
 a) Roscoe i Burland (1968),  
 b) Prevost i Hdeg (1975).

gdzie  $D$  jest stałą materiałową. Przyjęcie parametru wzmocnienia w postaci (79) powoduje, iż linia stanów krytycznych (na których moduł wzmocnienia = 0) i linia zerowych zmian odkształceń objętościowych nie pokrywają się, jak to ma miejsce w modelu Cam-clay. Pozwala to na dokładniejsze odwzorowanie takich zjawisk jak wzmocnienie i osłabienie materiału połączone ze stabilizacją dylatacji. Na Rys. 26 przedstawiono dwa przykładowe przebiegi historii obciążenia dla procesów bez odpływu wody:

- a) dla piasków gęstych ( $D < 0$ )
- b) dla piasków luźnych ( $D > 0$ ).

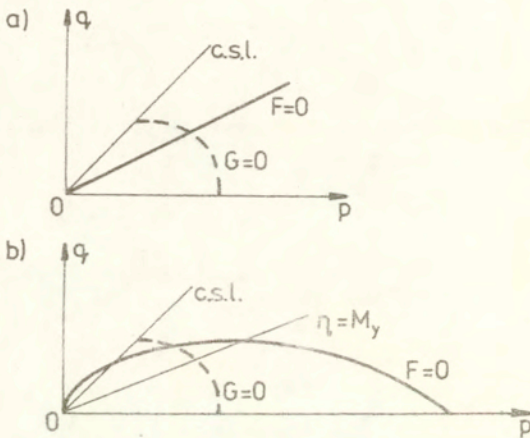
Wynika z tego, że  $D$  jest parametrem materiałowym, zależnym od gęstości gruntu.



Rys. 26. Przewidywanie zachowania się próbki dla procesu bez odpływu wody przy zastosowaniu modelu ze wzmocnieniem mieszanym:  
a) dla piasku gęstego,  
b) dla piasku luźnego.

### 3.2.b Model z niestowarzyszonym prawem pływnięcia

Poorooshab, Holubec i Sherbourne (1966, 1967) zaproponowali powierzchnię plastyczności typu stożka Coulomba-Mohra oraz powierzchnię potencjału plastycznego typu eliptycznego (Rys. 27a). Model ten nie jest jednak w stanie opisać zachowania materiału zarówno przy izotropowej jak i anizotropowej konsolidacji czyli dla obciążeń proporcjonalnych. Dlatego też Poorooshab (1971) zmodyfikował go stosując powierzchnię plastyczności o kształcie wydłużonym jak na Rys. 27.b. Powierzchnię tę opisuje równanie (69), w którym  $M$  zastąpiono parametrem materiałowym  $M_y$  ( $M_y < M$ ). W dalszym ciągu jednak model ten nie odwzorowywał poprawnie testów proporcjonalnych dla małych wartości współczynnika  $\eta$ .



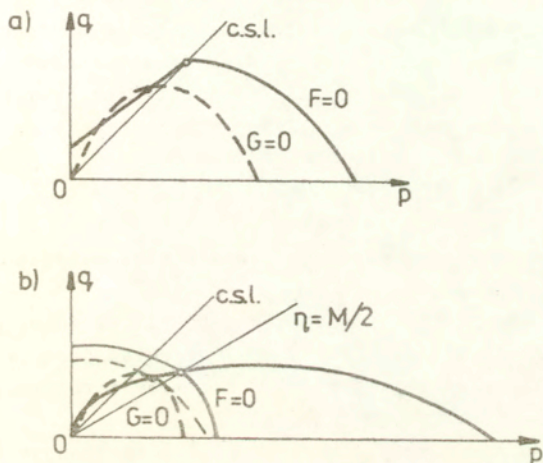
Rys. 27. Modele z niestowarzyszonym prawem płynięcia:  
 a) Poorooshab et al. (1966),  
 b) Poorooshab (1971).

Naturalną modyfikacją modeli przedstawionych na Rys. 27 były modele, w których powierzchnia plastyczności składała się z dwu części: połączonych fragmentów stożka i wydłużonej figury obrotowej zamykającej go od strony ciśnień hydrostatycznych. W modelach tych stosuje się zwykle dwie koncepcje wzmocnienia: jedną, w której obie części składowe doznają identycznych zmian kształtów i drugą w której części składowe powierzchni plastyczności mogą rozszerzać się lub kurczyć niezależnie.

Model tego typu zaproponowali Banerjee i Stipho (1979) z powierzchnią plastyczności w kształcie paraboli, której wierzchołek leży zawsze na linii stanów krytycznych jak na Rys. 28a.

Nova i Wood (1979) oraz Nova (1982) wprowadzili model z niestowarzyszonym prawem płynięcia dla ośrodków sypkich w oparciu o koncepcję mieszanego parametru wzmocnienia danego równaniem (79). W modelu tym powierzchnia plastycznego płynięcia składa się z dwóch części: dla  $\eta \leq \frac{M}{2}$  jest fragmentem elipsy ze stowarzyszonym prawem





Rys. 28. Modele z niestowarzyszonym prawem płynięcia, w których powierzchnia plastyczności stanowi kompozycję powierzchni o różnych kształtach:  
 a) Banerjee i Stipho (1978),  
 b) Nova i Wood (1979).

płynięcia, której równanie wyprowadzono zakładając równanie dylatacji typu:

$$(80) \quad \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p} = \frac{M^2}{4\bar{m}\eta}$$

gdzie  $\bar{m}$  jest stałą materiałową, zaś dla  $\eta > \frac{M}{2}$  ma kształt identyczny z zaproponowanym przez Poorooshasba (1971) (porównaj Rys. 27.b.). Kształt powierzchni potencjału plastycznego dla tego fragmentu powierzchni plastyczności otrzymano w oparciu o równanie dylatacji w postaci:

$$(81) \quad \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p} = \frac{\eta - M}{\bar{m}}$$

Pierwszy model ze wzmocnieniem mieszanym wprowadził Lade (1977), jako rozwinięcie wcześniejszych koncepcji Ladego i Duncana (1975). W modelu tym powierzchnia plastyczności składała się z dwu części:

jednej o kształcie zbliżonym do stożka i drugiej, zamykającej część stożkową od strony osi  $p$ . Efekt wzmocnienia mieszane­go uzyskano poprzez uzależnienie rozmiarów powierzchni od pracy na odkształceniach plastycznych  $W^P$  (patrz Rys. 29.a). Ponadto, dzięki przyjęciu, iż kształt powierzchni plastyczności oraz powierzchni potencjału plastycznego zależy od parametru  $\theta$  :

$$(82) \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{\sqrt{J_2}}\right), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Model ten uwzględniał wpływ trzeciego niezmiennika naprężenia  $J_3$  na zachowanie się materiału.

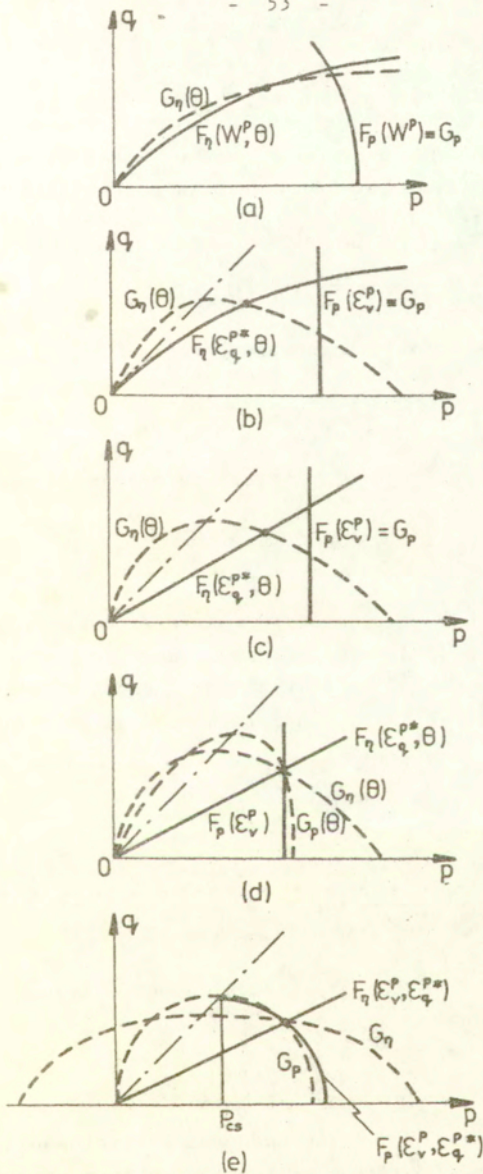
Na Rys. 29 literami  $F_p$  i  $F_\eta$  oznaczono części składowe powierzchni plastyczności, zaś literami  $G_p$  i  $G_\eta$  odpowiadające im powierzchnie potencjałów plastycznych. Ich kształty i rozmiary zależą od parametrów umieszczonych w nawiasach.

Nieco inny model zaproponował Varmeer (1978) zastępując sferyczną część powierzchni plastyczności  $F_p$  fragmentem płaszczyzny prostopadłej do osi ciśnień hydrostatycznych (Rys. 29.b). Część oznacza  $F_\eta$  jest w tym modelu wykładniczą funkcją  $p$  i  $\eta$  z uwzględnieniem parametru  $\theta$ . Powierzchnię potencjału plastycznego wyprowadzono z równania dylatacji Rowe'a (1962).

Niezależnie od Vermeera prostszą wersję tego modelu zaproponowali Nishi i Esashi (1978) stosując jako część  $F_\eta$  stożek typu Coulomba-Mohra o podstawie sześciokąta (Rys. 29.c). Powierzchnia potencjału plastycznego ma w tym modelu identyczny przekrój płaszczyzną  $(p, q)$ , jak w modelu Cam-clay, zaś jej przekrój płaszczyzną dewiatorową  $\pi$  ma identyczny sześciokątny kształt, jak powierzchnia plastyczności.

Nieznaczną modyfikację ostatniego modelu zaproponował Ohmaki (1979, 1980), wprowadzając niestowarzyszone prawo płynięcia dla płaskiej części powierzchni plastyczności (Rys. 29.d) i uzyskując pojawienie się odkształceń dewiatorowych dla proporcjonalnych dróg obciążenia.

Dość złożony model zaproponował Pender (1978), zakładając powierzchnie plastyczności w kształcie stożka Coulomba-Mohra ze wzmocnieniem mieszanym. Postać funkcji potencjału plastycznego wyprowadził z równania dylatacji, będącego modyfikacją modelu Cam-clay:



Rys. 29. Modele z niestowarzyszonym prawem płynięcia i wzmocnieniem mieszanym: a) Lade (1977), b) Vermeer (1978), c) Nishi i Esashi (1978), d) Ohmaki (1979), e) Pender (1978).



$$(83) \quad \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p} = \left( \frac{p_0}{p} - 1 \right) \left( M - \frac{q}{p_{cs}} \right),$$

gdzie  $p_0$  oznacza ciśnienie początkowe, zaś  $p_{cs}$  jest ciśnieniem w stanie krytycznym przy aktualnym wskaźniku porowatości. Po przekształceniach otrzymał:

$$(84) \quad G_\eta = p - \frac{p_{cs}}{p/p_{cs} - 1} \ln(M p_{cs} - q).$$

Natomiast dla gruntów normalnie zagęszczonych:

$$(85) \quad \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p} = \frac{\eta}{M - \eta},$$

równanie powierzchni potencjału plastycznego przyjmuje postać:

$$(86) \quad G_p = \ln p + \frac{1}{2} \ln(\eta^2 + \eta + M) + \frac{1}{\sqrt{2M-1}} t_9^{-1} \left( \frac{2\eta-1}{\sqrt{2M-1}} \right).$$

Model Pendera stosowany był dla przewidywania zachowania glin zarówno przy monotonicznych jak i cyklicznych obciążeniach.

Model z jedną powierzchnią plastyczności i dwoma potencjałami plastycznymi zaproponował Nakai (1989), formułując go w przestrzeni tensora  $t_{ij}$ :

$$(87) \quad t_{ij} = \bar{\sigma}_{ik} a_{kj},$$

gdzie:

$$(88) \quad a_{kj} = \sqrt{J_3/J_2} (\bar{\epsilon}_{ki} + I_2 \delta_{ki}) (I_1 \bar{\sigma}_{ij} + I_3 \delta_{ij})^{-1}.$$

Wielkości  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$  oznaczają pierwszy, drugi i trzeci niezmiennik tensora  $r_{ij}$ , takiego, że:

$$(89) \quad r_{ik} r_{kj} = \bar{\sigma}_{ij}.$$

Dwa parametry tensora  $t_{ij}$  zastosowane do zdefiniowania modu ( $t_N$  i  $t_S$ ) są składowymi (normalną i styczną) wektora wartości głównych  $t_j$  tensora  $t_{ij}$  na przestrzenną płaszczyznę uruchomioną (patrz Rys. 13.b) i dane są zależnościami:

$$(90) \quad t_N = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 = t_{ij} a_{ij}$$

$$(91) \quad t_s = \sqrt{(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) - t_N^2} = \sqrt{t_{ij} t_{ij} - (t_{ij} a_{ij})^2},$$

gdzie  $a_i$  dane jest wzorem (48).

Istotą modelu jest założenie o dekompozycji tensora przyrostu odkształceń plastycznych na dwie składowe:

$$(92a) \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^{p(AF)} + d\varepsilon_{ij}^{p(IC)},$$

$$(92b) \quad d\varepsilon_{ij}^{p(AF)} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial t_{ij}},$$

$$(92c) \quad d\varepsilon_{ij}^{p(IC)} = K \langle dp \rangle \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (92b) \\ (92c) \end{matrix}} \right\} f=0, df > 0,$$

gdzie:

$$(93) \quad \langle dp \rangle = \begin{cases} dp & \text{dla } dp > 0 \\ 0 & \text{dla } dp \leq 0 \end{cases}, \quad p = \sigma_{ii}/3,$$

oraz zastosowanie wielkości  $W^{*p}$ :

$$(94) \quad W^{*p} = \int t_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \int (t_N d\varepsilon_{SMP}^{*p} + t_s d\delta_{SMP}^{*p}),$$

jako parametru wzmocnienia, gdzie wielkości  $d\varepsilon_{SMP}^{*p}$  i  $d\delta_{SMP}^{*p}$  oznaczają składowe normalną i styczną wektora wartości głównych tensora przyrostu odkształceń plastycznych na przestrzenną płaszczyznę uruchomioną i dane są zależnościami analogicznymi do (90;91):

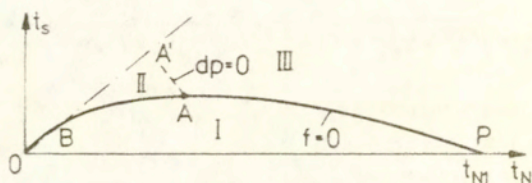
$$(95) \quad d\varepsilon_{SMP}^{*p} = d\varepsilon_{ij}^p a_{ij}$$

$$(96) \quad d\delta_{SMP}^{*p} = \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p - (d\varepsilon_{ij}^p a_{ij})^2}.$$

Szczegółowe wyprowadzenie zależności na wielkości  $\Lambda$ ,  $K$  i  $f$  znajdzie czytelnik w pracy Nakai (1989).

Położenie powierzchni plastyczności  $f = 0$  w przestrzeni  $(t_N, t_s)$  oraz trzy-możliwe obszary zachowania modelu dla przyrostowego

programu obciążenia wychodzącego z dowolnego punktu A przedstawiono na Rys. 30.



Rys. 30. Zaproponowana powierzchnia plastyczności oraz trzy możliwe obszary różnego zachowania materiału (Nakai (1989)).

Dla programów obciążenia skierowanych do środka powierzchni plastyczności (obszar I) zachowanie jest czysto sprężyste:

$$(97) \quad d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e \quad (f < 0 \text{ lub } f = 0 \text{ i } df \leq 0).$$

Dla programów skierowanych do wnętrza obszaru II obowiązuje stowarzyszone prawo płynięcia:

$$(98) \quad d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^{p(AF)} \quad (f = 0 \text{ i } df > 0 \text{ oraz } dp \leq 0).$$

Dla programów przyrostowych skierowanych w stronę obszaru III obowiązuje niestowarzyszone prawo płynięcia:

$$(99) \quad d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^{p(AF)} + d\epsilon_{ij}^{p(IC)} \quad (f = 0 \text{ i } df > 0 \text{ oraz } dp > 0).$$

Prezentowany model skutecznie opisuje zachowanie gruntów sypkich poddanych obciążeniom monotonicznym w rzeczywistym, trójosiowym stanie naprężenia. Ma jednak te same wady co prezentowany wcześniej model Matsuoki (zob. rozdział 2.2.a).



### 3.3. Zaawansowane modele teorii plastyczności

Prezentowane w poprzednim rozdziale modele gruntów, bazujące na omawianej wcześniej koncepcji Cam-clay, wprowadzone były głównie do opisu obciążeń monotonicznych. Ze względu na założenie dotyczące kształtu i zasięgu powierzchni plastyczności nie są bowiem w stanie przedstawić takich cech materiału, jak tworzenie się pętli histerezy czy efektu Masinga. Modele te mają jednak duże znaczenie historyczne i do dzisiaj stanowią inspirację w poszukiwaniach właściwego kształtu powierzchni plastyczności oraz powierzchni potencjału plastycznego.

Wraz z gwałtownym rozwojem techniki obliczeniowej (a zwłaszcza mocy obliczeniowej komputerów i ich popularności) zyskały na atrakcyjności bardziej złożone modele, trudniejsze do zlogarytmizowania, lecz dające dużo lepsze efekty przy symulacji zachowania się rzeczywistych materiałów.

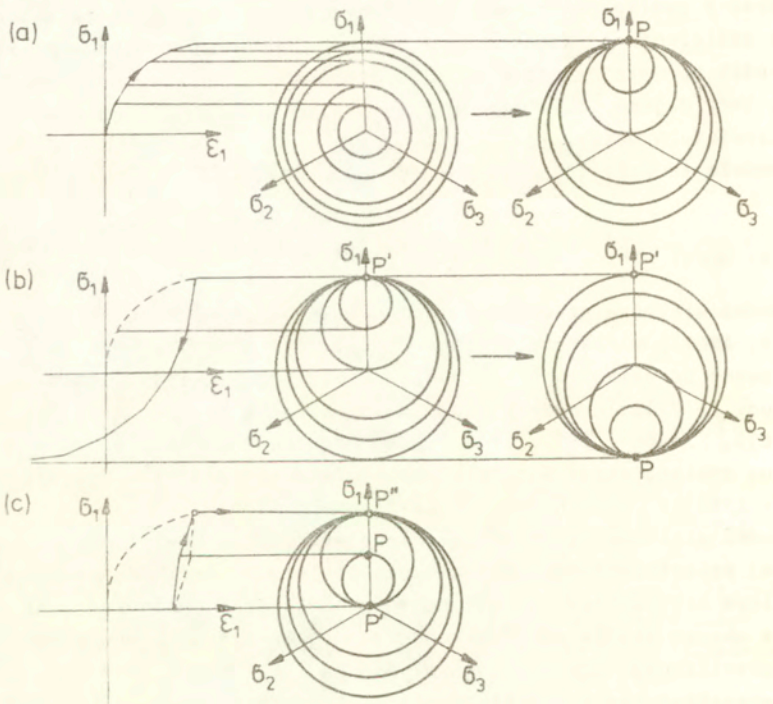
Modele te będą treścią niniejszego rozdziału.

#### 3.3.a. Model wielopowierzchniowy

Model wielopowierzchniowy zaproponowany został przez Mroza (1966, 1967), a następnie Iwana (1967). Był on początkowo szeroko stosowany do opisu zachowania się metali (Mróz, 1969), Peterson i Popov (1977)), a później adaptowany dla gruntów (Mróz et al. (1978)), Prevost (1977, 1978)). Jego dokładną strukturę matematyczną znaleźć można w późniejszych pracach Mroza et al. (1978, 1979, 1981) i innych autorów (Hashiguchi (1981)).

Model wielopowierzchniowy zakłada wypełnienie (w stanie początkowym) przestrzeni naprężeń kilkoma powierzchniami podobnymi o wspólnym środku (Rys. 31.a). Najmniejsza z tych powierzchni ogranicza obszar stanów sprężystych, zaś największa jest powierzchnią nieograniczonego plastycznego płynięcia. Powierzchnie te mogą przemieszczać się w trakcie procesu obciążania wchodząc kolejno w kontakt (stają się wewnętrznie styczne), jak na Rys. 31. W modelu tym przyjmuje się, że każda kolejna powierzchnia ogranicza obszar, wewnątrz którego wartość modułu plastycznego wzmocnienia jest stała. wartości te maleją wraz ze wzrostem wielkości kolejnych powierzchni i są definiowane poprzez stosunek rozmiarów po-

wierzchni aktualnej do największej (granicznej). Dlatego model ten nazywany jest modelem z polem modułów wzmocnienia. Poprzez ruch kolejnych powierzchni wewnątrz powierzchni granicznej (limiting surface) wyraża się koncepcja kinematycznego wzmocnienia, po raz pierwszy wprowadzona w tym modelu. Ideę modelu przedstawia Rys.31, na którym dla uproszczenia użyto okręgów oraz zaniedbano wzmocnienie izotropowe (stałe rozmiary powierzchni).



Rys. 31. Koncepcja modelu wielopowierzchniowego:  
a) obciążenie,  
b) odciążenie,  
c) dociążenie.

### 3.3.b. Model z nieskończoną ilością powierzchni

Mróz et al. (1981) oraz Mróz i Norris (1982) rozwinęli model wielopowierzchniowy, zakładając nieskończoną ilość powierzchni wypełniających powierzchnię graniczną i uzyskując przez to gładkie charakterystyki obciążenia. Poprzez wprowadzenie koncepcji powierzchni zwrotu obciążenia i powierzchni aktywnej, powstał model z pamięcią histroii obciążenia, opisany szczegółowo przez obecnego autora (1988). Model ten stosowany był do opisu zachowania zarówno glin (Pietruszczak i Mróz (1983)) jak i piasków (Mróz i Pietruszczak (1983)), Jarzębowski i Mróz (1989)). W pracy tej przedstawiono koncepcję obrotu eliptycznej powierzchni granicznej na płaszczyźnie  $(p, q)$ , w celu lepszego opisu efektów wynikających z początkowej anizotropii materiału. Model z nieskończoną ilością powierzchni (INS - infinite number of surfaces) daje jednak gwałtowną zmianę wartości modułu wzmocnienia w czasie procesu dociążenia przy przejściu przez punkt zwrotu naprężenia po częściowym odciążeniu (podobnie jak model wielopowierzchniowy - Rys. 31.c). Dlatego też doczekał się licznych modyfikacji opisanych w paragrafie 3.4 i wprowadzonych w paragrafie 3.6. pracy doktorskiej obecnego autora (1988).

### 3.3.c. Model dwupowierzchniowy

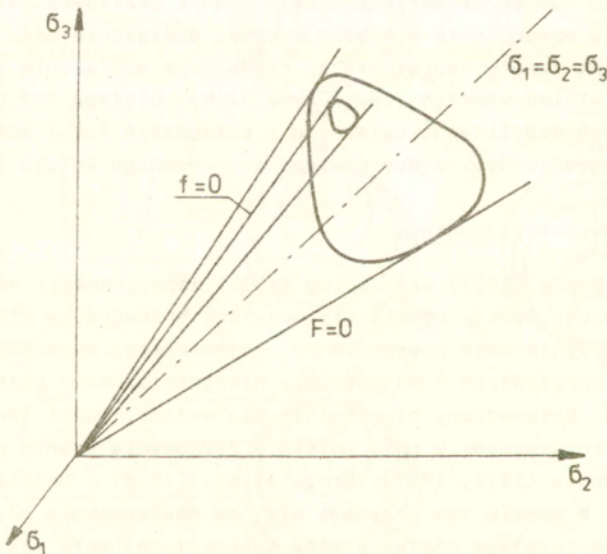
Dafalias i Popov (1975) oraz Krieg (1975) zaproponowali niezależnie uproszczoną wersję modelu wielopowierzchniowego, w której wykorzystali jedynie dwie powierzchnie: najmniejszą, ograniczającą obszar stanów sprężystych i największą, nieograniczonego plastycznego płynięcia. Wprowadzony oryginalnie dla metali, model ten został następnie rozszerzony w celu opisanego zachowania gruntu przez Dafaliasa i Popova (1976, 1977), Mroza et al. (1979) i Hashiguchiego (1981). W modelu tym przyjmuje się, że powierzchnia plastyczności (ograniczająca obszar stanów sprężystych) może się swobodnie poruszać wewnątrz powierzchni granicznej oraz być z nią wewnętrznie styczna. Powierzchnie te nie mogą się jednak przecinać. Parametrem rządzącym zmianami modułu plastycznego wzmocnienia jest w modelu dwupowierzchniowym odległość między punktem aktualnego obciążenia na powierzchni plastyczności, a punktem z nim sprzężo-



nym, leżącym na powierzchni granicznej, nie zaś stosunek wielkości tych powierzchni. Koniecznym jest również wprowadzenie odpowiedniego prawa translacji powierzchni plastyczności wewnątrz powierzchni granicznej. Jedną z możliwości jest zastosowanie zaproponowanej przez Mroza (1967) zależności:

$$(100) \quad \dot{\underline{\epsilon}} = \underline{\beta} \dot{\mu},$$

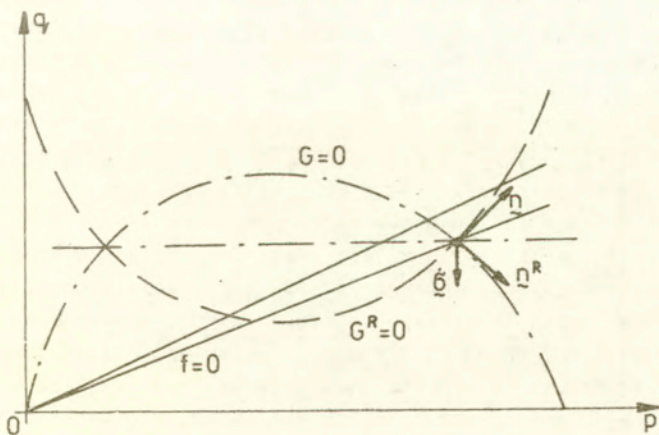
gdzie  $\underline{\beta}$  jest wektorem łączącym punkt aktualnego obciążenia z punktem z nim sprzężonym, zaś  $\mu$  - wskaźnikiem proporcjonalności.



Rys. 32. Kształty powierzchni plastyczności i powierzchni ograniczającej w modelu Ghaboussi i Momena (1979, 1982).

W konsekwencji, model dwupowierzchniowy wykazuje gwałtowną zmianę modułu wzmocnienia przy dociążeniu po uprzednim odciążeniu oraz nie jest w stanie opisać efektu Masinga (1926) przy odciążaniu (patrz Rys. 36.c). Z uwagi na łatwość zalgorytmizowania tego modelu i szybkość obliczeń, jest on jednak nadal stosowany do symulacji zachowania piasku. Poorooshasb i Pietruszczak (1985) zastosowali go wykorzystując wcześniejszą koncepcję Ghaboussi i Momena (1979, 1982), zgodnie z którą obie powierzchnie są otwartymi stożkami, o przekroju dewiatorowym zbliżonym do wyoblonego trójkąta (Rys.32).

Powierzchnia potencjału plastycznego ma w modelu Poorooshasba i Pietruszczaka kształt identyczny z kształtem powierzchni plastyczności w modelu Cam-clay (równanie analogiczne do 69). Przy obliczaniu odkształceń plastycznych dla procesu odciążania, autorzy zastosowali wprowadzoną przez Pande i Pietruszczaka (1982) koncepcję powierzchni odbitej (Reflecting Surface Model), wg której powierzchnia potencjału plastycznego  $G^R$  dla odciążania jest wizerunkiem lustrzanym powierzchni potencjału  $G$  dla obciążania. Koncepcję tę ilustruje Rys. 33.



Rys. 33. Model z powierzchnią odbitą (wg Pande i Pietruszczaka (1982)).

Model z powierzchnią odbitą pozwala na uzyskanie zagęszczania materiału w czasie procesu odciążania, co jest zgodne z wynikami eksperymentalnymi dla piasków. Koncepcja ta jest jednak pewnego rodzaju metodą geometryczną, nie mającą interpretacji fizycznej. Model dwupowierzchniowy stosowali również Zienkiewicz et al. (1985) zakładając eliptyczną powierzchnię plastyczności i stowarzyszone prawo płynięcia oraz Pastor et al. (1985), przyjmując niestowarzyszone prawo płynięcia, a kształty powierzchni zaczerpnięte z modelu Poorooshasba (1971) (patrz Rys. 27.b). Obie prace poświęcono analizie zachowania się piasku poddanego działaniu obciążeń cyklicznych w procesach bez odpływu wody.

### 3.3.d. Model jednopowierzchniowy

Dafalias i Popov (1977) zaproponowali dalsze uproszczenie modelu dwupowierzchniowego, w którym wewnętrzna powierzchnia plastyczności sprowadzona jest do punktu. W modelu tym nie ma zatem obszaru czysto sprężystego zachowania się materiału, zaś znalezienie punktu sprężonego z punktem aktualnego obciążenia wymaga przyjęcia dodatkowych założeń. Dafalias i Popov założyli, że punkt sprężony leży na przecięciu powierzchni granicznej prostą równoległą do wektora przyrostu naprężenia, wychodzącą ze środka tej powierzchni. W wyniku tak przyjętej koncepcji kierunek przyrostu odkształceń plastycznych zależy od kierunku wektora przyrostu naprężenia, lecz nie zależy od aktualnego stanu naprężenia. Dlatego Mróz et al. (1979) założyli, że punkt sprężony leży na przecięciu powierzchni granicznej półprostą równoległą do wektora przyrostu naprężenia, lecz wychodzącą z punktu aktualnego naprężenia.

Model jednopowierzchniowy jest w stanie uwzględnić wzajemną zależność pomiędzy kierunkami przyrostów naprężenia i odkształcenia. W modelu tym kształty krzywych obciążenia, odciążenia i dociążenia są identyczne (Rys. 36). Ponieważ odległość między punktem aktualnego naprężenia, a punktem sprężonym jest większa w przypadku odciążenia niż dociążenia, model generuje otwarte pętle histerezy oraz postępujące odkształcenie przy małych cyklach naprężenia.

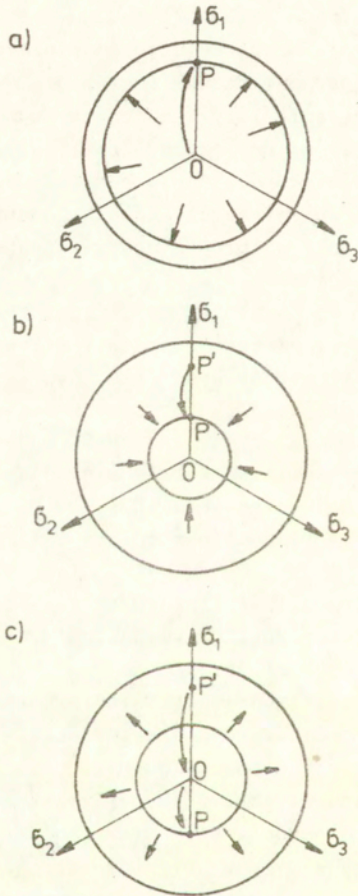


### 3.3.e. Model z chwilową powierzchnią obciążenia

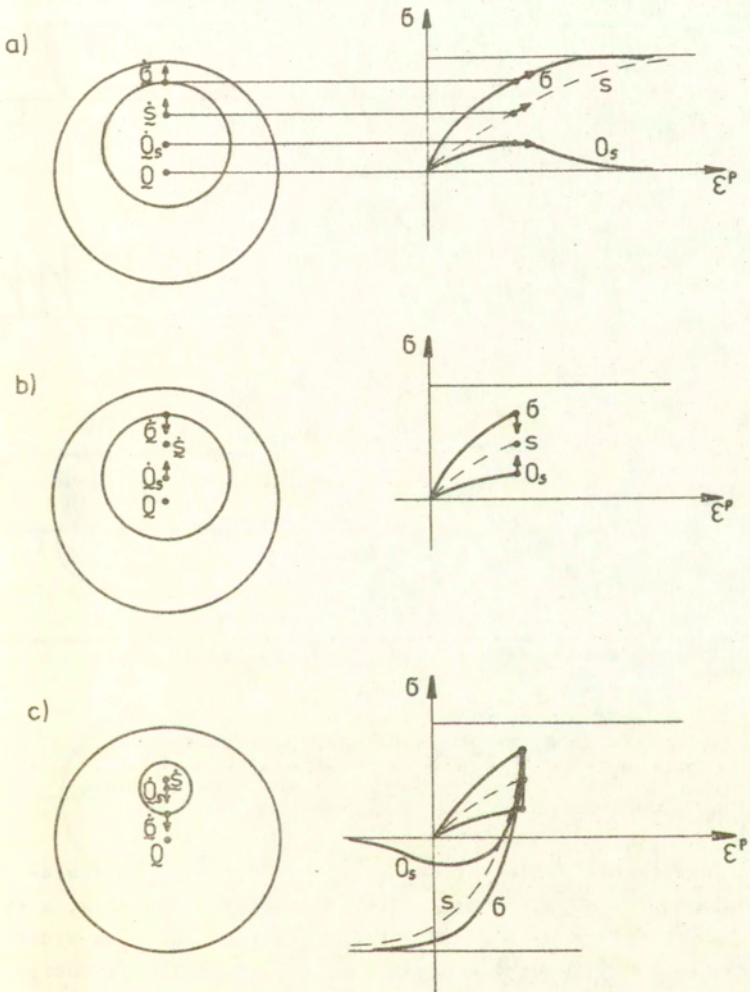
Model z chwilową powierzchnią obciążenia (subloading surface) został zaproponowany przez Hashiguchiego i Ueno (1977) i rozwinęty przez Hashiguchiego (1980). Zakłada on istnienie dwóch powierzchni: zewnętrznej - nieograniczonego plastycznego płynięcia i chwilowej (aktualnej) powierzchni obciążenia. W modelu tym punkt aktualnego stanu naprężenia leży zawsze (zarówno w przypadku obciążenia jak i odciążenia) na powierzchni chwilowej nigdy nie wchodząc do jej środka, jak to miało miejsce w modelach z poprzednich paragrafów. W początkowej wersji modelu środek podobieństwa tych powierzchni ma zawsze stałe położenie pokrywające się z ich środkiem geometrycznym. Koncepcję modelu w przypadku obciążenia i odciążenia przedstawia Rys. 36, na którym dla uproszczenia przyjęto, że przekroje powierzchni są okręgami. Kształt krzywych  $\bar{\sigma}-\bar{\epsilon}$ , generowanych przez model ilustruje Rys. 36.e. Wprawdzie w modelu nie ma powierzchni ograniczającej obszar stanów sprężystych, autorzy przyjęli, iż odkształcenia czysto sprężyste mają miejsce każdorazowo, gdy powierzchnia chwilowa kurczy się, jak to ma miejsce w przypadku odciążenia na odcinku  $P'O$  (Rys. 34 b). Przy przejściu przez punkt  $O$  powierzchnia chwilowa ściąga się do punktu, po czym znowu się rozszerza.

Identyczny model przedstawili nieco później Dafalias i Herrmann (1980) i Dafalias (1984, 1986) nazywając go modelem z powierzchnią ograniczającą (bounding surface).

Model z chwilową powierzchnią obciążenia ma jednak te same wady co model jednopowierzchniowy (odciążenie sprężyste, otwarte pętle histerezy, niemożność opisanie efektu Masinga). Dlatego Hashiguchi et al. (1987) i Hashiguchi (1989) zmodyfikował go dopuszczając przemieszczenie środka podobieństwa wraz z postępującą deformacją plastyczną. Autor przyjął, że w przypadku obciążenia środek podobieństwa przesuwa się w kierunku punktu aktualnego naprężenia, dla odciążenia zaś, środek podobieństwa pozostaje na swoim miejscu, aż do momentu przejścia aktualnego naprężenia przez ten punkt. Wzajemne położenie punktu podobieństwa oraz środków omawianych powierzchni prezentuje dla przypadku prostych obciążeń Rys. 35.

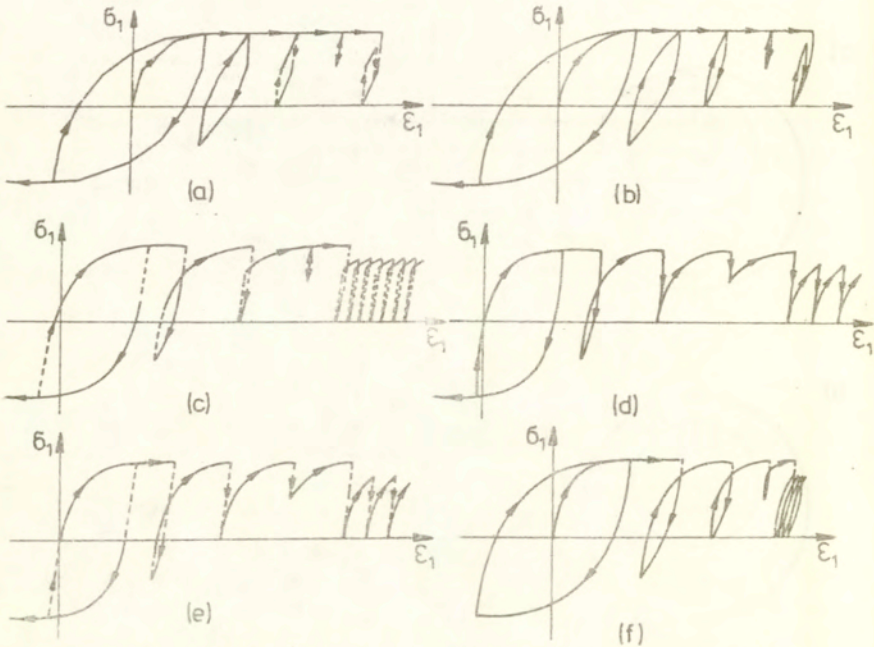


Rys. 34. Model z chwilową powierzchnią obciążenia (wg Hashiguchiego i Ueno (1977)):  
a) obciążenie,  
b) i c) odciążenie.



Rys. 35. Zmodyfikowany model z chwilową powierzchnią obciążenia (wg Hashiguchiego (1989):  
a) obciążenie,  
b) i c) odciążenie.

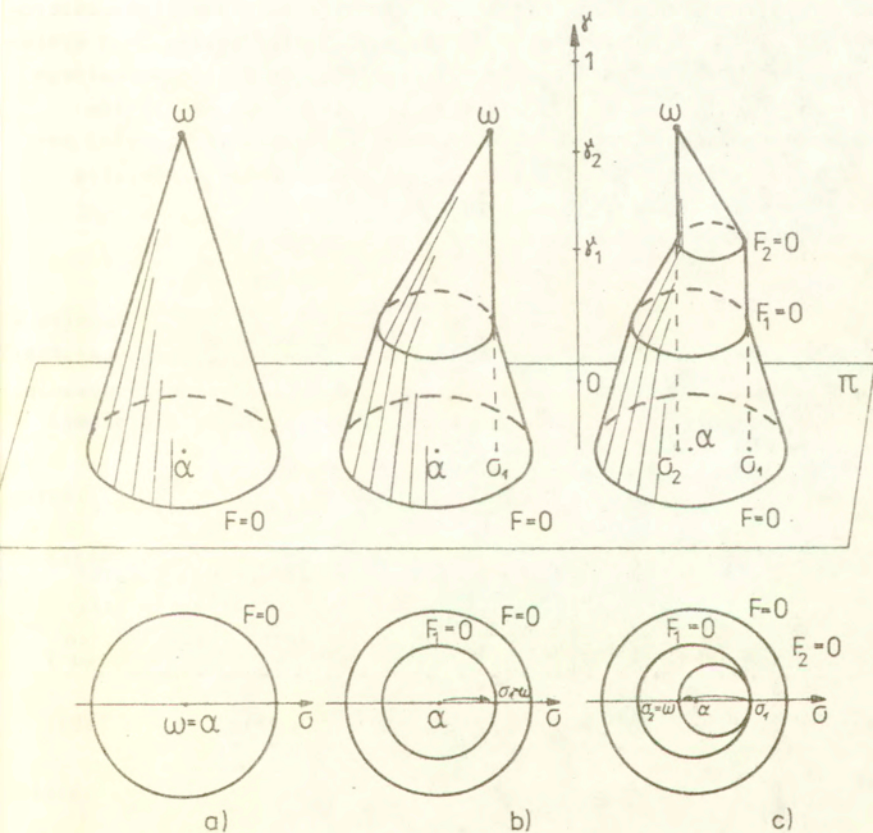




Rys. 36. Porównanie zaawansowanych modeli teorii plastyczności:  
a) model wielopowierzchniowy, b) model z nieskończoną ilością powierzchni, c) model dwupowierzchniowy, d) model jednopowierzchniowy, e) model z chwilową powierzchnią obciążeniową, f) zmodyfikowany model z chwilową powierzchnią obciążeniową.

Rys. 36 prezentuje porównanie wyników otrzymanych z omawianych modeli teorii plastyczności. Dla ułatwienia porównania, w wynikach tych zaniedbano efekt wzmocnienia izotropowego. Jak widać na Rys. 36 f, zmodyfikowany model z chwilową powierzchnią obciążeniową dość dobrze opisuje zachowanie rzeczywistych materiałów. Jego wadą jest natomiast generowanie zbyt silnych odkształceń przy małych cyklach naprężenia (nie stabilizujący się ratchetting).

Zjawisko stabilizujących się odkształceń cyklicznych można natomiast opisać za pomocą modelu z nieskończoną ilością powierzchni, przy założeniu odpowiednich parametrów izotropowego wzmocnienia, co zostanie zrobione w następnych rozdziałach tej pracy.



Rys. 37. Koncepcja rozmytej powierzchni plastycznego płynięcia (wg Klisińskiego (1988)):  
 a) stan początkowy, b) obciążenie, c) odciążenie.

Ogólny opis prezentowanych w tym rozdziale zaawansowanych modeli teorii plastyczności zaproponował Klisiński (1988), wprowadzając koncepcję rozmytej powierzchni plastycznego płynięcia. Powierzchnia ta ma kształt stożka (Rys. 37) o podstawie równoległej do płaszczyzny naprężenia, którego przekroje poziome są obrazem kolejnych położzeń powierzchni aktywnej. Przyjmując odpowiednie prawo przemieszczania się punktu będącego wierzchołkiem stożka oraz zmiany jego wymiarów opisać można zarówno modele materiałów z pamięcią maksymalnego przeciążenia jak i brak tej pamięci, a także modele materiałów z różnym rodzajem wzmocnienia. Koncepcję zastosowania rozmytej powierzchni plastycznego płynięcia do opisu materiałów z pamięcią maksymalnego przeciążenia ilustruje Rys. 37.

### 3.4. Własności sprężyste gruntów sypkich

W prezentowanych dotychczas modelach fenomenologicznych skoncentrowano się na koncepcjach opisujących ich plastyczne zachowanie. Obecnie zajmiemy się opisem ich własności sprężystych. Zapiszemy równania konstytutywne w postaci:

$$(101) \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{\sigma}}},$$

gdzie  $\underline{\underline{C}}$  jest macierzą podatności. W naszym przypadku  $\underline{\underline{C}}$  jest macierzą sprężysto-plastyczną ( $\underline{\underline{C}}^{ep}$ ). Rozkładając całkowity przyrost odkształcenia na część sprężystą i plastyczną (Rys. 38), co w ramach teorii małych odkształceń jest uzasadnione, mamy:

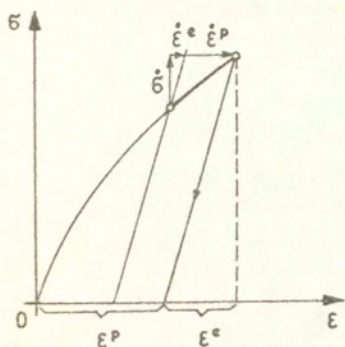
$$(102) \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}^e} + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}^p} = \underline{\underline{C}}^e \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{C}}^p \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = (\underline{\underline{C}}^e + \underline{\underline{C}}^p) \dot{\underline{\underline{\sigma}}}$$

$$(103) \quad \underline{\underline{C}}^{ep} = \underline{\underline{C}}^e + \underline{\underline{C}}^p,$$

gdzie  $\underline{\underline{C}}^e$  i  $\underline{\underline{C}}^p$  oznaczają sprężystą i plastyczną macierz podatności.

Dla odróżnienia osiowosymetrycznego stanu naprężenia, którym się obecnie zajmujemy, od dowolnego trójosiowego stanu naprężenia, skorzystamy z wygodnej notacji stosowanej przez Klisińskiego (1984).





Rys. 38. Rozkład odkształceń na część sprężystą i plastyczną.

W osiowosymetrycznym stanie naprężenia, wektory naprężenia i odkształcenia wyglądają następująco:

$$(104) \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} p' \\ q \end{bmatrix} ; \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_v \\ \varepsilon_q \end{bmatrix} ,$$

gdzie:

$$(105) \quad \varepsilon_v = -(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) ; \quad \varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) ,$$

zaś  $p'$  i  $q$  dane są wzorami (29).

Z uwagi na to, że odkształcenia sprężyste dane są równaniami:

$$(106) \quad \varepsilon_v^e = \frac{p}{K} ; \quad \varepsilon_q^e = \frac{q}{3G_e} ,$$

sprężysta macierz podatności ma postać:

$$(107) \quad \bar{C}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G_e} \end{bmatrix} ,$$

gdzie  $K$  oznacza moduł ściśliwości objętościowej, zaś  $G_e$  moduł ścinania.

Między modułami  $K$  i  $G_e$ , a modułem Younga  $E$  i stałą Poissona  $\nu$  istnieją następujące związki:

$$(108) \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad G_e = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

zaś między modułami  $K$  i  $G_e$ , a stałymi Lamego  $\lambda$  i  $\mu$ :

$$(109) \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu; \quad G_e = \mu.$$

Własności sprężyste materiału opisuje zatem dowolna para wielkości:  $K$  i  $G_e$ ,  $E$  i  $\nu$  lub  $\lambda$  i  $\mu$ .

Wielu autorów dyskutowało, czy w przypadku piasku moduły  $K$  i  $G_e$  mają wartości stałe (Łoret (1985)). Walters i Thomas (1982), Poorooshasb i Pietruszczak (1985) oraz Faruque i De-sai (1985) przyjmują w swoich pracach stałe wartości dla modułów  $K$  i  $G_e$ , natomiast Łade i Boonyachut (1982), Łoret i Luong (1982), Matsuoka (1982), Zienkiewicz et al. (1985) oraz wielu innych zwracają uwagę na zależność parametrów sprężystych od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia i początkowego stopnia zagęszczenia materiału.

Rozważmy obecnie wpływ efektywnego ciśnienia hydrostatycznego na stopień zagęszczenia gruntu w procesie izotropowego ściskania. Schofield i Wroth (1968) zaproponowali następującą zależność łączącą efektywne ciśnienie hydrostatyczne  $p'$  i wskaźnik porowatości  $e = \frac{V_v}{V_m}$  (objętość pustek do objętości szkieletu):

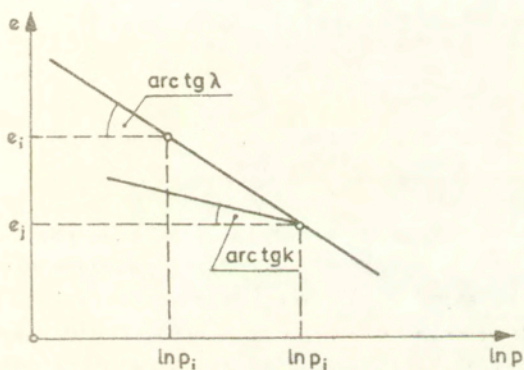
$$(110) \quad -\lambda (\ln p' - \ln p'_i) = e - e_i,$$

gdzie  $p'_i$  i  $e_i$  oznaczają wartość  $p'$  i  $e$  w znanym punkcie obciążenia. Równanie (110) jest jedną z najszerzej stosowanych zależności empirycznych w mechanice gruntów, a w przestrzeni  $e - \ln p'$  przedstawia linię prostą o współczynniku kierunkowym  $-\lambda$ . Dla odciążenia przyjmuje się natomiast bardzo podobną zależność:

$$(111) \quad -k (\ln p' - \ln p'_j) = e - e_j,$$

gdzie  $p'_j$  i  $e_j$  są odpowiednimi wartościami w punkcie odciążenia. Obraz równań (110) i (111) przedstawia Rys. 39. Liniowa zależność w przestrzeni  $e - \ln p'$  została dobrze potwierdzona eksperymentalnie dla glin (Henkel (1956), Parry (1960)), jednakże jej rozumienie w formie (110) i (111) powoduje pewne trudności. Równanie prostej izotropowego zagęszczenia jest bowiem następujące:

$$(112) \quad e = -\lambda \ln p' + e_1,$$



Rys. 39. Linia izotropowej konsolidacji i sprężystego odciążenia dla modelu Cam clay (wg Schofielda i Wrotha (1968)).

gdzie  $e_1$  oznacza wskaźnik porowatości odpowiadający jednostkowemu ciśnieniu hydrostatycznemu. Równanie to nie ma rozwiązania na początku procesu tj. dla  $p' = 0$ . Podobna trudność pojawia się przy wyprowadzeniu modułu ścisłości objętościowej  $K$  na podstawie równania (111). Przyjmując, że odciążenie przebiega sprężysto:

$$(113) \quad de = -k \frac{1}{p'} dp'.$$



Dla materiału porowatego o nieściśliwym szkielecie, mamy:

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_v &= \frac{-\Delta V}{V_t} = \frac{-(V_2 - V_1)}{V_t} = \frac{-(V_{v_2} + V_m - V_{v_1} - V_m)}{V_t} = \\ (114) \quad &= -\frac{V_{v_2} + V_{v_1}}{V_{v_1} + V_m} = \frac{-e_2 + e_1}{e_1 + 1} = \frac{-\Delta e}{1 + e_1}. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy dobrze znany wzór:

$$(115) \quad \Delta e = -(1 + e_0) \Delta \epsilon_v$$

lub

$$(116) \quad de = -(1 + e_0) d\epsilon_v.$$

Podstawiając wzór (116) do (113) mamy:

$$(117) \quad K = \frac{dp'}{d\epsilon_v^e} = \frac{1 + e_0}{k} p'.$$

Wzór ten, aczkolwiek stosowany przez wielu autorów (Mróz i Pietruszczak (1982), Zienkiewicz et al. (1985)) powoduje niedogodności przy interpretacji własności sprężystych materiału na początku procesu obciążenia (dla  $p' = 0$ ,  $K = 0$ ). Ponadto wynika z niego, że dla dwóch różnych początkowych wskaźników porowatości  $e_{01} > e_{02}$  (oraz tego samego  $p'$ ) zachodzi  $K_{01} > K_{02}$ , co jest sprzeczne z doświadczeniem (Mohkam (1983)). Trudności tych można uniknąć wprowadzając efektywne ciśnienie odniesienia  $\hat{p}$ .

Koncepcja wprowadzenia takiego ciśnienia  $\hat{p}$  wiąże się z założeniem, że dla glin każdemu początkowemu wskaźnikowi porowatości  $e_0$  odpowiada jednoznacznie pewne hydrostatyczne ciśnienie odniesienia  $\hat{p}$ .

Proponowana zależność pomiędzy  $e$  i  $\hat{p}$  jest analogiczna do (110):

$$(118) \quad -\lambda (\ln \hat{p} - \ln \hat{p}_0) = e - e_0.$$

Punktem startowym procesu obciążenia dla początkowego wskaźnika porowatości  $e_0$  jest zatem punkt  $(e_0, \hat{p}_0)$  (patrz Rys. 40), przy czym:

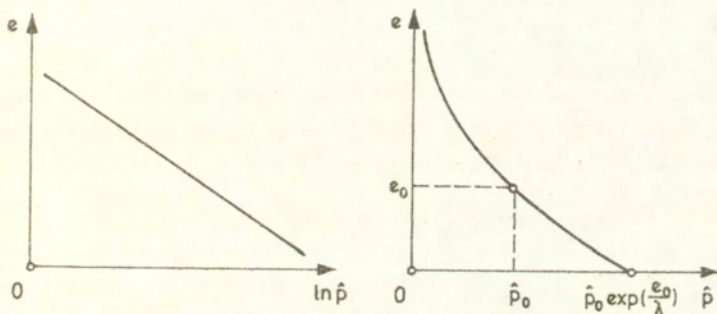
$$(119) \quad \hat{p}_0 = \exp\left(\frac{e_1 - e_0}{\lambda}\right).$$

Parametr  $e_1$  jest wskaźnikiem porowatości dla jednostkowego ciśnienia odniesienia  $\hat{p}$  i podobnie jak  $\lambda$  jest stałą materiałową.

Wówczas:

$$(120) \quad \hat{p} = \hat{p}_0 + p'.$$

Obraz zależności (118) przedstawia Rys. 40.



Rys. 40. Linia izotropowej konsolidacji dla modelu Cam-clay zmodyfikowanego poprzez wprowadzenie efektywnego ciśnienia odniesienia  $\hat{p}$ .

Odciążaniem rządzi natomiast prawo analogiczne do (111):

$$(121) \quad -k(\ln \hat{p} - \ln \hat{p}_j) = e - e_j.$$

Zależność na moduł ściśliwości objętościowej wyprowadzić można tak jak uprzednio przyjmując, że odciążanie przebiega sprężystie:

$$(122) \quad \begin{aligned} K &= \frac{dp}{d\varepsilon_v^e} = \frac{1+e_0}{k} \hat{p} = \frac{(1+e_0)(\hat{p}_0 + p)}{k} = \\ &= \frac{1+e_0}{k} p + \frac{(1+e_0) \exp\left(\frac{e_1 - e_0}{\lambda}\right)}{k}. \end{aligned}$$

Jak łatwo sprawdzić sformułowanie zależności (110) z wprowadzeniem ciśnienia hydrostatycznego odniesienia  $\hat{p}$  pozwala na uniknięcie obydwu poprzednich trudności, gdyż dla  $p' = 0 : K \neq 0$  oraz dla  $e_{j1} > e_{j2} : k_{j2} < k_{j1}$ .

Analogicznie do (122) dla izotropowej konsolidacji mamy:

$$(123) \quad \frac{1}{m_v} = \frac{dp'}{d\varepsilon_v} = \frac{1+e_0}{\lambda} \hat{p} = \frac{(1+e_0)(\hat{p}_0 + p')}{\lambda} = \\ = \frac{1+e_0}{\lambda} p' + \frac{(1+e_0) \exp\left(\frac{e_1 - e_0}{\lambda}\right)}{\lambda}$$

Rozwiązanie równania (123) jest standardowo stosowane do identyfikacji stałych materiałowych. Współczynnik  $m_v$  jest współczynnikiem ściśliwości objętościowej.

Zwracając uwagę na pewne niedogodności zależności (110) oraz niezgodność z niektórymi wynikami eksperymentalnymi, Butterfield (1979) podał alternatywną formułę opisującą izotropową kondolidację:

$$(124) \quad \ln\left(\frac{1+e}{1+e_0}\right) = -\phi_c \ln\left(\frac{p'}{p'_0}\right),$$

gdzie  $e_0$  i  $p'_0$  są znanymi wartościami wskaźnika porowatości i hydrostatycznego ciśnienia efektywnego w pewnym punkcie procesu. Zależność (124) przedstawia na płaszczyźnie  $\ln(1+e) - \ln p'$  linię prostą.

Dla odciążania:

$$(125) \quad \ln\left(\frac{1+e_j}{1+e_i}\right) = -\phi_u \ln\left(\frac{p'_j}{p'_i}\right).$$

Zaproponowane równania (124) i (125) nie rozwiązują jednak dyskutowanych wcześniej trudności, bowiem analogicznie jak poprzednio mamy:

$$(126) \quad K = \frac{dp'}{d\varepsilon_v} = \frac{1+e_0}{(1+e_i)\phi_u} p'^{\phi_u+1},$$

gdzie  $e_1$  jest wskaźnikiem porowatości odpowiadającym jednostkowemu ciśnieniu hydrostatycznemu.



Koncepcja efektywnego ciśnienia odniesienia  $\hat{p}$  pozwala na usunięcie tych usterek również dla propozycji Butterfielda. Jeśli bowiem zapostulujemy analogicznie do (124) i (125):

$$(127) \quad \ln\left(\frac{1+e}{1+e_0}\right) = -\phi_c \ln\left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_0}\right)$$

dla izotropowej konsolidacji oraz:

$$(128) \quad \ln\left(\frac{1+e}{1+e_j}\right) = -\phi_u \ln\left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_j}\right)$$

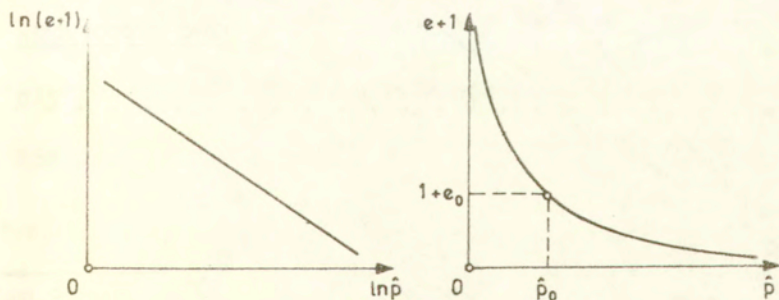
dla odciążenia, pamiętając o (120) w konsekwencji otrzymamy:

$$(129) \quad K = \frac{dp'}{d\varepsilon_v^e} = \frac{1+e_0}{(1+e_1)\phi_u} \hat{p}^{\phi_u+1} = \frac{1+e_0}{(1+e_1)\phi_u} \left(p' + \left(\frac{1+e_1}{1+e_0}\right)^{\frac{1}{\phi_c}}\right)^{\phi_u+1}$$

Tutaj  $e_1$  oznacza wskaźnik porowatości dla jednostkowego ciśnienia  $\hat{p}$ . Na podstawie (124):

$$(130) \quad \hat{p}_0 = \left(\frac{1+e_1}{1+e_0}\right)^{\frac{1}{\phi_c}}$$

Obraz zależności (127) przedstawia Rys. 41.

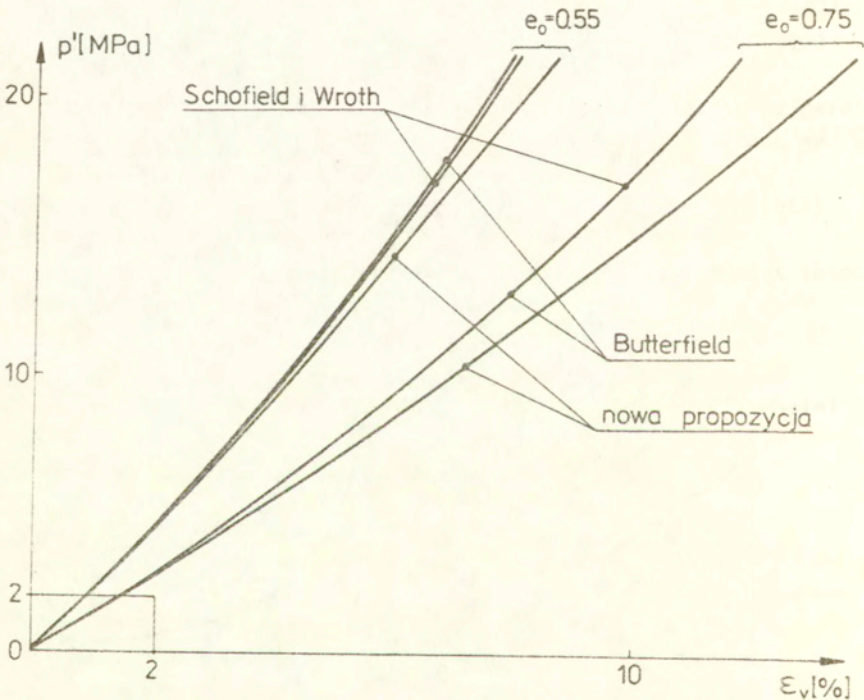


Rys. 41. Linia izotropowej konsolidacji dla zmodyfikowanego modelu Butterfielda (1979).

Natomiast dla izotropowej konsolidacji otrzymamy:

$$(131) \quad \frac{1}{m_v} = \frac{dp}{d\varepsilon_v} = \frac{1+e_0}{(1+e_1)\Phi_c} \hat{p}^{\Phi_c+1} = \frac{1+e_0}{(1+e_1)\Phi_c} \left( p' + \left( \frac{1+e_1}{1+e_0} \right)^{\frac{1}{\Phi_c}} \right)^{\Phi_c+1}$$

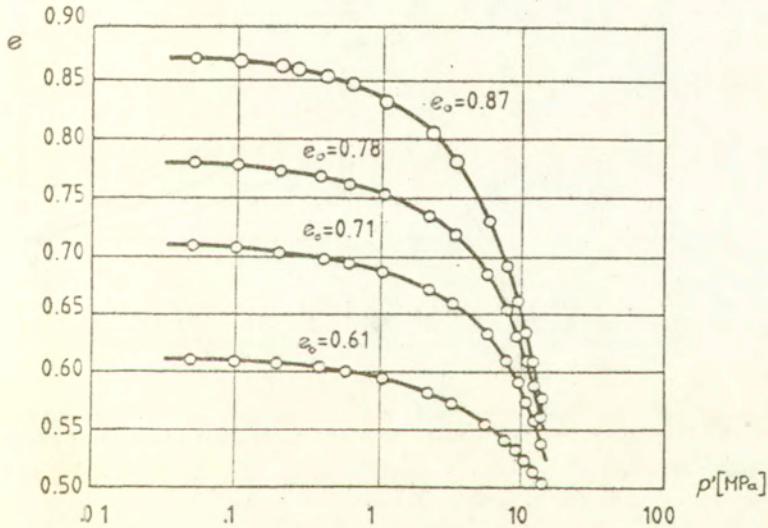
Porównanie rozwiązania równania (131) z innymi propozycjami, dla różnych gęstości początkowych materiału, przedstawiono na Rys. 42.



Rys. 42. Porównanie wyników teoretycznych próby trójosiowego, hydrostatycznego ściskania w oparciu o trzy różne koncepcje.

Jak wynika z Rys. 42, w zakresie realnie występujących ciśnień hydrostatycznych (tj. do ok. 2MPa), wyniki otrzymane ze wszystkich koncepcji są praktycznie identyczne.

Przedyskutowane dotychczas dwie alternatywne zależności empiryczne (110) i (124) wiążące efektywne ciśnienie hydrostatyczne ze wskaźnikiem porowatości znajdują potwierdzenie eksperymentalne w przypadku glin (Henkel (1956), Parry (1966)), jednak dla piasku zależność ta przedstawiona na płaszczyźnie  $e - \ln p'$  odbiega dość znacznie od linii prostej. Na Rys. 43 przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych (wg Lee i Seeda (1967)), przeprowadzonych dla piasku z rzeki Sacramento przy różnych stopniach zagęszczenia, korzystając z tradycyjnych współrzędnych  $e - \ln p'$ .



Rys. 43. Linie izotropowej konsolidacji dla piasku z rzeki Sacramento we współrzędnych  $e - \ln p'$  (dane eksperymentalne wg Lee i Seeda (1967)).

Aby lepiej opisać zachowanie piasku, obecny autor zaproponował (1988) inną zależność między  $e$  i  $p'$  w przypadku izotropowego zagęszczenia:

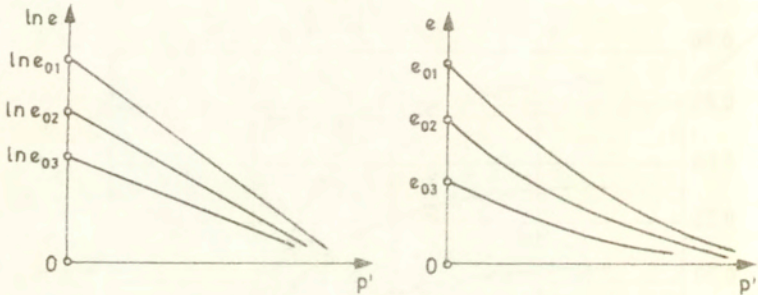


$$(132) \quad \ln\left(\frac{e}{e_0}\right) = -l p',$$

będącą we współrzędnych  $\ln e - p'$  linią prostą o współczynniku kierunkowym  $-l$ . Ponadto przyjęto, że współczynnik kierunkowy  $l$  zależy od początkowego wskaźnika porowatości  $e_0$ :

$$(133) \quad l = l(e_0).$$

Obraz prostych izotropowego zagęszczenia wynikający z równań (132) i (133) dla różnych początkowych wskaźników porowatości przedstawiono na Rys. 44.



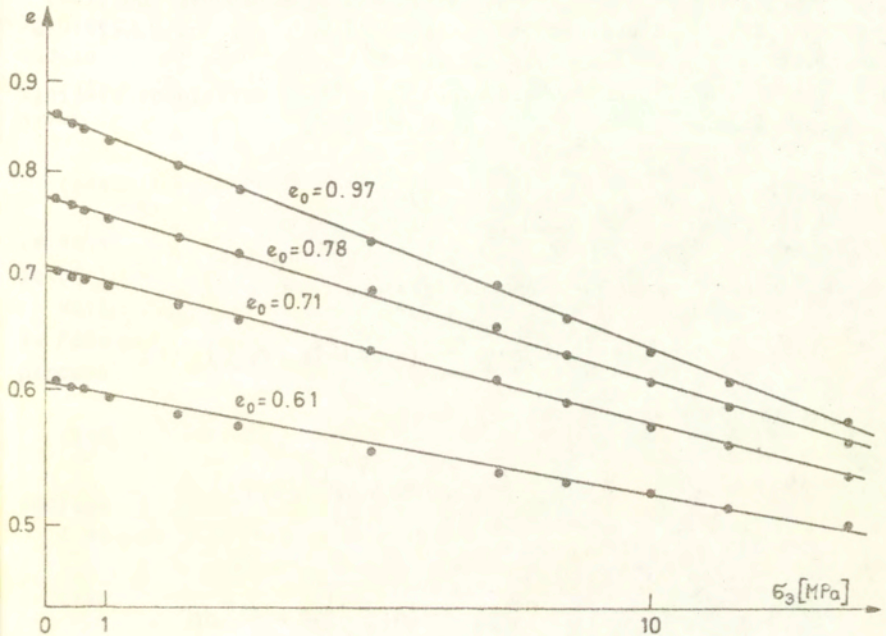
Rys. 44. Linie izotropowej konsolidacji dla różnych gęstości początkowych próbek we współrzędnych  $\ln e - p'$  oraz  $e - p'$ .

Założmy również, że odciążenie przebiega początkowo sprężycie zgodnie z formułą:

$$(134) \quad \ln\left(\frac{e}{e_j}\right) = -k_e(p' - p'_j).$$

Na Rys. 45 przedstawiono te same dane eksperymentalne (Lee i Seed (1967)) co na poprzednim wykresie (Rys. 43), w nowo zaproponowanych współrzędnych  $\ln e - p'$ . Jak widać aproksymacja punktów doświadczalnych linią prostą jest obecnie dużo bardziej zadawalająca.

Różniczkując (132) otrzymamy:



Rys. 45. Linie izotropowej konsolidacji dla piasku z rzeki Sacramento we współrzędnych  $\ln e - p'$  (dane eksperymentalne wg Lee i Seeda (1967) - porównaj Rys. 43).

$$(135) \quad de = -e_0 l \exp(-l \cdot p') dp'$$

oraz

$$(136) \quad \frac{1}{m_v} = \frac{1+e_0}{e_0 l} \exp(l \cdot p')$$

Na podstawie wyników eksperymentalnych (Lee i Seed (1967)) przyjęto następującą postać zależności (133):

$$(137) \quad l(e_0) = l^*(e_0 - e_{0_{\min}}),$$

gdzie  $e_{0_{\min}}$  jest wskaźnikiem porowatości przy maksymalnym zagęszczeniu danego piasku i podobnie jak  $l^*$  pełni rolę stałej ma-

teriałowej. Przykładowe rozwiązanie (136) z uwzględnieniem (137) oraz porównanie z poprzednimi koncepcjami, dla różnych wskaźników porowatości przedstawia Rys. 42.

W modelu przyjęto, że parametr  $k_e$  zależy od aktualnego wskaźnika porowatości:

$$(138) \quad k_e = k_e(e),$$

przy czym, ponieważ dla  $p' = 0$ ,  $e = e_0$  powinno być:

$k_e(e_0) = l(e_0)$ , zaproponowano następującą zależność:

$$(139) \quad k_e(e) = \frac{e - e_{0min}}{e_0 - e_{0min}} l(e_0) = l^*(e - e_{0min}).$$

Podstawiając (139) do (134) otrzymamy:

$$(140) \quad \frac{1}{e_0 - e_{0min}} \ln\left(\frac{e}{e_j}\right) = -l^*(p' - p'_i),$$

a następnie, po zróżniczkowaniu:

$$(141) \quad \frac{1}{e - e_{0min}} \left[ \frac{1}{e} - \frac{1}{e - e_{0min}} \ln\left(\frac{e}{e_j}\right) \right] de = -l^* dp'$$

Stąd po podstawieniu  $de = -(1 + e_j) d\varepsilon_v$  mamy:

$$(142) \quad K = \frac{1 + e_j}{l^*(e - e_{0min})} \left[ \frac{1}{e} - \frac{1}{(e - e_{0min})} \ln\left(\frac{e}{e_j}\right) \right].$$

Natomiast dla obciążenia (pamiętając, że  $e = e_j$ ) otrzymamy:

$$(143) \quad K = \frac{1 + e}{l^*(e - e_{0min})e}$$

Wzór ten można stosować zarówno dla obciążenia, odciążenia jak i dociążania z uwagi na to, że  $\frac{1}{e} \gg \frac{1}{e - e_{0min}} \ln\left(\frac{e}{e_j}\right)$ .

Jak łatwo widać:  $K(e_{01}) < K(e_{02})$  dla  $e_{01} > e_{02}$ , co jest zgodne z doświadczeniem.

Omówimy teraz jak zmienia się drugi z modułów sprężystych - moduł ścinania  $G_e$ . Wielu autorów przyjmuje w swoich pracach, że wartość modułu ścinania  $G_e$  jest stała dla danego materiału (Poorooshast i Pietruszczak (1985), Faruque i Desai (1985)).



Takie założenie prowadzi jednak do niezbyt dobrego odwzorowania eksperymentalnych krzywych ścinania. Dlatego też, w celu zbliżenia modelu teoretycznego do rzeczywistości, często przyjmuje się, że  $G_e$  zależy od ciśnienia hydrostatycznego  $p$  podobnie jak  $K$ , przy czym:

$$(144) \quad \frac{K}{G_e} = \text{const.} = \alpha.$$

(W świetle wzorów (133) i (134) wartość modułu ściśliwości objętościowej zależy od ciśnienia hydrostatycznego).

Warto podkreślić, że wzór (144), wynikający z przyjęcia iż stała Poissona  $\nu$  jest parametrem materiałowym niezmiennym w czasie procesu:

$$(145) \quad \alpha = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$$

pociąga za sobą poważne konsekwencje.

Z zależności (115) wynika, że:

$$(146) \quad e = e_0 - (1+e_0)\epsilon_v$$

zatem

$$(147) \quad K = \frac{(1+e_0)(1-\epsilon_v)}{t^*(e_0 - e_{0\min} - (1+e_0)\epsilon_v)(e_0 - (1+e_0)\epsilon_v)}.$$

Ponieważ dla odkształceń sprężystych mamy:

$$(148.a) \quad dp' = K d\epsilon_v^e$$

$$(148.b) \quad dq = 3G_e d\epsilon_q^e$$

oraz

$$(149.a) \quad p' = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_v^e}$$

$$(149.b) \quad q = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_q^e},$$

potencjał sprężysty  $\Psi(\epsilon_v^e, \epsilon_q^e)$  może być dany następującym wzorem:

$$\Psi = \frac{1}{l^* e_{o_{min}} (1+e_o)} \left\{ \left( \epsilon_v - \frac{e_o}{1+e_o} \right) (\ln[e_o - (1+e_o)\epsilon_v] - 1) - \right. \\ (1+e_{o_{min}}) \left( \epsilon_v - \frac{e_o + e_{o_{min}}}{1+e_o} \right) (\ln[e_o - e_{o_{min}} - (1+e_o)\epsilon_v] - 1) - \\ \left. - (\ln e_o - (1+e_{o_{min}}) \ln(e_o - e_{o_{min}})) \epsilon_v \right\} + \\ + \frac{3(1+e_o)(1-\epsilon_v)}{2\alpha l^* (e_o - e_{o_{min}} - (1+e_o)\epsilon_v) (e_o - (1+e_o)\epsilon_v)}.$$

(150)

Wzory (149) przyjmą zatem konkretną postać:

$$\rho' = \frac{1}{l^* e_{o_{min}} (1+e_o)} \left\{ \ln[e_o - (1+e_o)\epsilon_v] - (1+e_{o_{min}}) \ln[e_o - e_{o_{min}} - (1+e_o)\epsilon_v] - \right. \\ \left. - \ln e_o - (1+e_{o_{min}}) \ln(e_o - e_{o_{min}}) \right\} + \\ + \frac{3(1+e_o)[2e_o + e_o^2 - e_{o_{min}} + (1+e_o)^2(\epsilon_v^2 - 2\epsilon_v)] \epsilon_q^2}{2\alpha l^* [e_o - e_{o_{min}} - (1+e_o)\epsilon_v]^2 [e_o - (1+e_o)\epsilon_v]^2};$$

(151.a)

$$q = \frac{3(1+e_o)(1-\epsilon_v)}{\alpha l^* [e_o - e_{o_{min}} - (1+e_o)\epsilon_v] [e_o - (1+e_o)\epsilon_v]} \epsilon_q$$

(151.b)

Różniczkując wzory (131) otrzymamy wyrażenie na składowe macierzy sztywności sprężystej:

$$E_{vv} = \frac{(1+e_o)(1-\epsilon_v)}{l^* [e_o - e_{o_{min}} - (1+e_o)\epsilon_v] [e_o - (1+e_o)\epsilon_v]} + \\ + \frac{2(1+e_o)\epsilon_v [2e_{o_{min}} - 4e_o - e_o^2 - e_o e_{o_{min}}] + (1+e_o)^2 \epsilon_v (6e_{o_{min}} - 8e_o) + \\ + (1+e_o)^3 \epsilon_v^2 (8 - 4\epsilon_v) + 6e_o^2 + 2e_{o_{min}}^2 + 3e_o^3 - 6e_o e_{o_{min}}}{[e_o - e_{o_{min}} - (1+e_o)\epsilon_v]^3 [e_o - (1+e_o)\epsilon_v]^3} (1+e_o)$$

(152.a)

$$E_{qv} = E_{qv} = \frac{3(1+e_o)[2e_o + e_o^2 - e_{o_{min}} + (1+e_o)^2(\epsilon_v^2 - 2\epsilon_v)] \epsilon_q}{2\alpha l^* [e_o - e_{o_{min}} - (1+e_o)\epsilon_v]^2 [e_o - (1+e_o)\epsilon_v]^2}$$

(152.b)

$$E_{qq} = \frac{3(1+e_o)(1+\epsilon_v)}{\alpha l^* [e_o - e_{o_{min}} - (1+e_o)\epsilon_v] [e_o - (1+e_o)\epsilon_v]} = 3G_c$$

(152.c)

Macierz sztywności sprężystej przedstawiona jest wzorem następująco:

$$\underline{\underline{E}}^e = \begin{bmatrix} E_{vv} & E_{vq} \\ E_{qv} & E_{qq} \end{bmatrix},$$

(153)

a równanie (148) przybiera formę:

$$(154) \quad \begin{bmatrix} dp' \\ dq \end{bmatrix} = \tilde{M}^e \begin{bmatrix} d\varepsilon_v^e \\ d\varepsilon_q^e \end{bmatrix}$$

Macierz podatności sprężystej dana jest wzorem:

$$(155) \quad \tilde{C}^e = \begin{bmatrix} -\frac{E_{qq}}{E_s} & \frac{E_{vq}}{E_s} \\ \frac{E_{vq}}{E_s} & -\frac{E_{vv}}{E_s} \end{bmatrix}$$

gdzie:  $E_s = E_{qv}^2 - E_{vv}E_{qq}$ .

Porównując (152.1) z (147) widać wyraźnie, że  $E_{vv} \neq K$ . Tak więc do wyprowadzonego przez nas wyrażenia na moduł ściśliwości objętościowej  $K$  dochodzi jeszcze jeden człon wynikający z założenia, że moduł ścinania  $G_e$  zależy od ciśnienia hydrostatycznego. Ponadto dochodzą niezerowe elementy poza przekątną macierzy sztywności sprężystej, powodujące wpływ ciśnienia hydrostatycznego na odkształcenia objętościowe. Wynika z tego, że chcąc uzależnić wartość modułu ścinania od ciśnienia hydrostatycznego, własności sprężyste materiału należy opisać poprzez podanie funkcji potencjału sprężystego lub sprężystej macierzy podatności (lub sztywności).

### 3.5. Inne modele

Prezentowane w tym rozdziale modele i teorie mają (w porównaniu z modelami bazującymi na założeniach teorii plastyczności, prezentowanymi w poprzednim rozdziale) usterki natury matematycznej lub logicznej. Modele tego typu mają jednak duże znaczenie ze względu na łatwość zalgorytmizowania, a przez to ułatwioną weryfikację eksperymentalną.

W rozdziale tym przedstawione zostaną krótko założenia wybranych modeli, potraktowane jedynie informacyjnie.



### 3.5.a. Hyposprężystość

Równania przyrostowe teorii hyposprężystości dadzą się zapisać w postaci zaproponowanej przez Greena (1956):

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{D}_2(\underline{\epsilon})\dot{\underline{\epsilon}} \quad \text{dla} \quad \dot{\omega} = \sigma^T \dot{\underline{\epsilon}} > 0$$

(156)

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{D}_1(\underline{\epsilon})\dot{\underline{\epsilon}} \quad \text{dla} \quad \dot{\omega} = \sigma^T \dot{\underline{\epsilon}} < 0.$$

Jak widać tensory  $\underline{D}_1$  i  $\underline{D}_2$  zależą jedynie od aktualnego stanu naprężenia, w odróżnieniu od teorii plastyczności, zgodnie z którą tensory te zależą również od pewnych parametrów wzmocnienia. nierówności (156) stanowią warunki rozgraniczające przypadek obciążenia i odciążenia. Decyduje o tym znak wartości przyrostu pracy naprężeń na nowopowstających odkształceniach, a nie kierunek przyrostu naprężenia względem powierzchni plastyczności. W teorii hyposprężystości w ogóle nie zakłada się istnienia powierzchni plastyczności.

Próbę zastosowania teorii hyposprężystości dla gruntów podejmowali Stutz (1973), Romano (1974) i Davis i Mullenger (1978), przy czym Stutz (1973) jako pierwszy zaproponował uzależnienie tensora  $\underline{D}$  od parametru  $\xi$  opisującego gęstość materiału:

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{D}(\underline{\epsilon}, \xi)\dot{\underline{\epsilon}}.$$

(157)

Z założeń teorii hyposprężystości wynikają jednak liczne niedogodności, które nie pozwalają na opisanie wielu efektów rzeczywistego zachowania gruntów. Na wady te zwracał uwagę Mróz (1980 b) robiąc jednocześnie szczegółowe porównanie modeli bazujących na teoriach hyposprężystości i plastyczności. Do podstawowych braków teorii hyposprężystości należy identyczny kształt charakterystyk obciążenia i odciążenia (gdyż odpowiednik modułu plastycznego wzmocnienia zależy jedynie od stanu naprężenia), co nie pozwala na opisanie efektu Masinga (1926) oraz niestabilizujący się przyrost odkształceń plastycznych przy obciążeniach cyklicznych o małej amplitudzie (ratchetting). Ponadto, zaproponowane dotychczas modele gruntów wynikające z teorii hyposprężystości nie spełniają warunku zgodności.

### 3.5.b. Model ze zmiennymi modułami sprężystości

Rozważmy jedną z najprostszych form równania hyposprężystości (156):

$$(158) \quad \dot{\bar{\sigma}} = h_1 (\text{tr} \dot{\bar{\epsilon}}) \bar{I} + h_{40} \dot{\bar{\epsilon}},$$

zakładając jednocześnie

$$(159) \quad \begin{aligned} h_1 &= \bar{K} - \frac{2}{3} \bar{G} \\ h_{40} &= 2\bar{G}. \end{aligned}$$

Wówczas z równania (158) otrzymuje się:

$$(160) \quad \begin{aligned} \dot{p} &= -\bar{K} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{q} &= 2\bar{G} \dot{\epsilon}_q. \end{aligned}$$

W modelu ze zmiennymi modułami sprężystymi przyjmuje się, że moduł ściśliwości objętościowej  $\bar{K}$  oraz moduł ścinania  $\bar{G}$  mają zmienne wartości i są funkcjami niezmienników stanu naprężenia lub odkształcenia. Zakłada się również różne wartości tych modułów w przypadkach obciążenia, odciążenia i dociążenia, a kryterium obciążenia otrzymuje się traktując powierzchnie  $p = \text{const.}$  i  $q = \text{const.}$  tak jak powierzchnie plastyczności. Przy definiowaniu modelu ze zmiennymi modułami (variable moduli models) stosuje się dodatkowe założenia jak np. (wg Kondnera (1963)):

$$(161) \quad \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3 = \frac{-\epsilon_1}{\frac{1}{\bar{E}_i} - \frac{\epsilon_1}{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)_{as}}},$$

gdzie  $\bar{E}_i$  jest początkową wartością modułu stycznego, zaś  $(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)_{as}$  - asymptotyczną (maksymalną) wartością różnicy naprężeń. Duncan i Chang (1970) wykorzystali równanie (161) do wyprowadzenia zależności na wartość chwilowego modułu stycznego:

$$(162) \quad \bar{E}_t = \frac{\partial(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)}{\partial \epsilon_1} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{E}_i} - \frac{\epsilon_1}{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)_{as}}^2},$$

a po wyznaczeniu  $\epsilon_1$  z (161) i podstawieniu do (162) otrzymali:

$$(163) \quad \bar{E}_t = \bar{E}_i \left[ 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{as}} \right]^2.$$

Wykorzystując dodatkowe zależności na początkową wartość modułu stycznego:

$$(164) \quad \bar{E}_i = Y_i P_a \left| \frac{\sigma_1}{P_a} \right|^\infty,$$

gdzie  $Y_i$  i  $\infty$  są stałymi materiałowymi, zaś  $P_a$  ciśnieniem atmosferycznym oraz asymptotyczną wartość różnicy naprężeń:

$$(165) \quad (\sigma_1 - \sigma_3)_{as} = \frac{1}{R_f} \cdot \frac{2c \cos \phi - 2\sigma_1 \sin \phi}{1 - \sin \phi},$$

otrzymuje się ostatecznie:

$$(166) \quad \bar{E}_t = \left[ 1 - \frac{R_f (1 - \sin \phi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \phi - 2\sigma_1 \sin \phi} \right]^2 Y_i P_a \left| \frac{\sigma_1}{P_a} \right|^\infty.$$

We wzorach tych  $c$  jest kohezją,  $\phi$  kątem tarcia wewnętrznego, zaś  $R_f$  parametrem materiałowym. Dla przypadków odciążania i dociążania przyjęto, że moduł styczny opisywany jest zależnością:

$$(167) \quad \bar{E}_{ur} = Y_{ur} P_a \left| \frac{\sigma_1}{P_a} \right|,$$

gdzie  $Y_{ur}$  jest stałą materiałową, podobnie jak stała Poissona  $\bar{\nu}$ . Omawiany model nie jest w stanie opisać wzajemnego sprzężenia części objętościowych i dewiatorowych, charakterystycznego dla materiałów takich jak grunty. Nie spełnia też warunku zgodności. Ze względu jednak na swoją prostotę był dość często stosowany w obliczeniach budowlanych metodą elementów skończonych.

### 3.5.c. Teoria endochroniczna

Teoria endochroniczna zaproponowana została przez Valanisa (1971a, 1971b) dla metali, a następnie zastosowana przez Bazanta i Krizka (1976) i Bazanta (1978) do opisu zachowania się piasku.

Rozważmy jednowymiarowy model Maxwella opisany równaniem:



$$(168) \quad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{E} \left( \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\tau} \right),$$

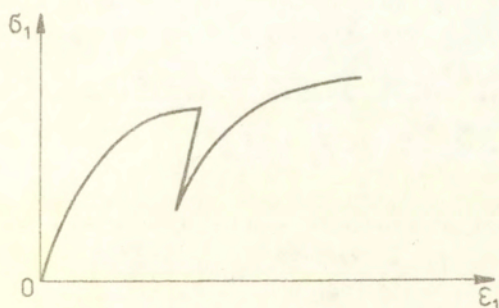
gdzie  $\tau$  jest czasem relaksacji dla danego materiału. Jeśli teraz czas rzeczywisty  $t$  zastąpiony zostanie przez wewnętrzny parametr czasopodobny  $\xi$ , zdefiniowany jako  $|\varepsilon_1|$ , to otrzymuje się równanie endochroniczne:

$$(169) \quad d\varepsilon_1 = \frac{1}{E} d\sigma_1 + \frac{\sigma_1}{\tau} |d\varepsilon_1|$$

lub

$$(170) \quad d\varepsilon_1 = \frac{d\sigma_1}{E(1 \pm \frac{\sigma_1}{\tau})}, \begin{cases} - \text{ dla } d\varepsilon_1 > 0 \\ + \text{ dla } d\varepsilon_1 < 0. \end{cases}$$

Krzywą  $\sigma$ - $\varepsilon$  otrzymywaną z modelu endochronicznego w przypadku jednowymiarowym przedstawia Rys. 46. Otwarta pętla histerezy jest efektem tego, że wartość modułu stycznego w przypadku dociążenia jest mniejsza niż w przypadku odciążenia. Warunek zgodności nie jest spełniony.



Rys. 46. Odpowiedź materiału przy zastosowaniu modelu endochronicznego.

### 3.5.d. Nieliniowy model przyrostowy

Rozważmy równanie odwrotne do równania (156):

$$(171) \quad \underline{\dot{\epsilon}} = \underline{g}(\underline{\epsilon}, \underline{\dot{\epsilon}}).$$

Szczególną formą tego równania rozważał Darve et al. (1976):

$$(172) \quad \underline{\dot{\epsilon}} = \underline{G} \underline{\dot{\epsilon}},$$

zakładając, że  $\underline{G}$  jest tensorem czwartego rzędu, -przy czym:

$$(173) \quad \underline{G} = \underline{G}(\eta), \quad \eta = \frac{\dot{\epsilon}}{|\dot{\epsilon}|}.$$

Tak więc przyrost odkształcenia zależy zarówno od wartości jak i kierunku przyrostu naprężenia. Autorzy zaproponowali bardziej szczegółową formę równania (172):

$$(174) \quad \underline{\dot{\epsilon}} = \underline{M} \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{N} \underline{\dot{\epsilon}} \eta,$$

w której tensory  $\underline{M}$  (czwartego rzędu) i  $\underline{N}$  (szóstego rzędu) są funkcjami naprężenia i wskaźnika porowatości.

Bezpośrednią formę równania (156) zaproponowali w odniesieniu do gruntów Kolymbas (1977, 1982) i Gudehus i Kolymbas (1979):

$$(175) \quad \underline{\dot{\epsilon}} = h \left( \underline{\dot{\epsilon}} + C_1 \frac{\dot{\epsilon}^2}{|\dot{\epsilon}|} + C_2 |\dot{\epsilon}| \underline{I} + C_3 \frac{S}{\sigma_M} |\dot{\epsilon}| + \right. \\ \left. + C_4 \frac{\text{tr}(S \cdot \dot{\epsilon})}{\sigma_M} \underline{I} + C_5 \frac{\text{tr}(S \cdot \dot{\epsilon}^2)}{\sigma_M^2 |\dot{\epsilon}|} \underline{I} \right),$$

gdzie

$$(176) \quad h = C_6 \sigma_M \left( 1 + C_7 \frac{\text{tr}(S \cdot \dot{\epsilon})}{\sigma_M |\dot{\epsilon}|} + C_8 \frac{\text{tr}(S \cdot \dot{\epsilon}^2)}{\sigma_M |\dot{\epsilon}|^2} \right),$$

$$(177) \quad \sigma_M = \text{tr} \underline{\epsilon} = -3p.$$

Parametry  $C_1$  do  $C_8$  są bezwymiarowymi stałymi materiałowymi, nie mającymi żadnej interpretacji fizycznej, zaś  $\underline{S}$  i  $\underline{\dot{\epsilon}}$  tensorami naprężenia i przyrostu odkształcenia.

Opisywane tu modele nie spełniają warunku ciągłości oraz nie są w stanie opisać osłabienia materiału. Do ich zalet należy zaliczyć stosowanie jednego równania, co nie wymaga wprowadzenia

dodatkowego warunku obciążenia oraz uniknięcie rozkładania przyrostu odkształceń na składowe sprężystą i plastyczną.

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono historię badań nad modelami konstytutywnymi dla gruntów sypkich oraz krótki przegląd tych modeli, starając się uwypuklić istotne ich cechy, bez każdorazowego powtarzania często bardzo podobnej struktury matematycznej. Jak wynika z przedstawionego materiału, liczna grupa modeli poprawnie opisuje zachowanie materiału pod wpływem obciążeń monotonicznych. Opisanie odpowiedzi materiału pod wpływem obciążeń cyklicznych jest zadaniem dużo trudniejszym i (z modeli bazujących na teorii plastyczności) jedynie trzy typy modeli spełniają je zadawalająco: modele z nieskończoną ilością powierzchni, modele dwupowierzchniowe oraz zmodyfikowany model z chwilową powierzchnią obciążenia.

Wśród modeli bazujących na mikrostrukturze materiału najefektywniejsze wydają się modele opierające się na koncepcji płaszczyzn uruchomionych. Obszerne porównanie skuteczności wielu z prezentowanych tu modeli i ich pochodnych w przewidywaniu zachowania gruntów sypkich dla identycznych testów laboratoryjnych znaleźć można w materiałach konferencyjnych (Saada i Bianchini (1989)) międzynarodowej konferencji nt.: "Modeli Konstytutywnych dla Bezkohezyjnych Gruntów Sypkich" (Cleveland, USA, 1987).



## 5. LITERATURA

1. BALADI, G. Y. i SANDLER, I. S., (1980), Examples of the use of the cap model for simulating the stress-strain behaviour of soils. Proc. Workshop Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotech. Engng., Ed. R. K. Yong i H. Y. Ko, ASCE, Montreal, 650-683.
2. BANERJEE, P. K. i STIPHO, A. S., (1979), An elastic-plastic model for undrained behaviour of heavily overconsolidated clays. Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, (3), 97-103.
3. BATHURST, R. J. i ROTHENBURG, L., (1988), Micromechanical Aspects of Isotropic Granular Assemblies With Linear Contact Interactions. J. Appl. Mech. ASME, (55), 17-23.
4. BAZANT, Z. P. i KRIZEK, R. J., (1976), Endochronic constitutive law for liquefaction of sand. J. EM Div., ASCE, (102), 225-238.
5. BAZANT, Z. P., (1978), Endochronic inelasticity and incremental plasticity. Int. J. Solids Structures, (14), 691-714.
6. BIAREZ, J. i WIENDIECK, K., (1963), La comparaison qualitative entre l'anisotropie mecanique et l'anisotropie de structure des milieux pulverulents., C. R. Hebd., Seanc. Acad. Sci., 256, Paris.
7. BURLAND, J. B., (1965), The yielding and dilatation of clay. (Correspondence), Geotechnique, (15), 211-214.
8. BUTTERFIELD, R., (1979), A natural compression law for soils (an advance on  $e\text{-log } p'$ ). Geotechnique, (29), 4, 469-480.
9. CHANG, C. S., (1989), Micromechanical approach to constitutive modelling for granular soils based on slip mechanism. Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive Soils, Saada, A. i Bianchini, G. (Eds.), Balkema, Rotterdam, 183-200.
10. CHANG, C. S., MISRA, A. i WEERARATNE, S. P., (1989), Deformation analysis of sand in cubical and hollow cylinder devices. Int. J. Anal. and Num. Meth. Geomech., (13), 493-510.
11. CHRISTOFFERSEN, J., MEHRABADI, M., M. i NEMAT-NASSER, S., (1981), A Micromechanical Description of Granular Material Behavior. J. Appl. Mech. ASME, (48), 339-344.
12. COWIN, S. C., (1974), A theory for the flow of granular materials. Powder Technology, (9), 61-69.
13. CUNDALL, P. A. i STRACK, O. D. L., (1979), A discrete numerical model for granular assemblies. Geotechnique, (29), 1, 47-65.
14. DAFALIAS, Y. F. i POPOV, E. P., (1975), A model of nonlinearly hardening materials for complex loading. Acta Mechanica, (21), 173-192.
15. DAFALIAS, Y. F. i POPOV, E. P., (1978), Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. J. Appl. Mech., ASME, (43), 645-651.
16. DAFALIAS, Y. F. i POPOV, E. P., (1977), Cyclic loading for materials with a vanishing elastic region. Nucl. Eng. Design, (41), 293-302.
17. DAFALIAS, Y. F. i HERRMAN, L. R., (1980), A bounding surface soil plasticity model. Proc. Int. Symp. Soils under Cyclic Transient Loading, Pande, G. N. i Zienkiewicz, O. C. (Eds.), Swansea, Balkema, Rotterdam, 335-345.

18. DAFALIAS, Y.F., (1984), Modelling cyclic plasticity: simplicity versus sophistication. Mechanics of Engineering Materials, 153-178.
19. DAFALIAS, Y.F., (1986), Bounding surface plasticity. I: Mathematical foundation and hypoplasticity. J. Eng. Mech., (112), 9, 966-987.
20. DARVE, F., LABANIEH, S. i CHAMBON, R., (1976), Incremental stress-strain relationship for cohesionless soil. Proc. 2nd Int. Conf. Numer. Meth. Geomech., Ed. C.S. Desai, ASCE, Blacksburg, 264-369.
21. DAVIS, R.O. i MULLENGER, G., (1978), A rate-type constitutive model for soil with a critical state. Int. J. Num. and Anal. Meth. Geomech., (2), 255-282.
22. de JOSSELIN de JONG, G., (1971), The double sliding, free-rotating model for granular assemblies, Geotechnique, (21), 2, 155-163.
23. de JOSSELIN de JONG, G., (1976), Rowe's stress-dilatancy relation based on friction. Geotechnique, (26), 3, 527-534.
24. de JOSSELIN de JONG, G., (1977), Mathematical elaboration of the double-sliding, free-rotating model. Archives of Mechanics, (29), 4, 561-591.
25. DERESIEWICZ, H., (1973), Bodies in contact with applications to granular media. R. D. Mindlin and Applied Mechanics, Ed. G. Herrman, Pergamon Press.
26. DIMAGGIO, F.L. i SANDLER, I.S., (1971), Material model for granular soils. J. EM Div., ASCE, (97), 935-950.
27. DOBRY, R., LADD, R.S., YOKEL, F.Y., CHUNG, R.M. i POWELL, D., (1982), Prediction of pore water pressure buildup and liquefaction of sands during earthquakes by the cyclic strain method. NBS Building Science Series, No. 138.
28. DRESCHER, A. i de JOSSELIN de JONG, G., (1972), Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. Jour. Mech. Phys. Solids, (20), 337-351.
29. DRESCHER, A., (1976), An experimental investigation of flow rules for granular materials using optical sensitive glass particles. Geotechnique, (26), 591-601.
30. DRUCKER, D.C., (1954), Coulomb friction plasticity and limit load. J. Appl. Mech., ASME, (76), 71-71.
31. DUNCAN, J.M. i CHANG, C.Y., (1970), Nonlinear analysis of stress and strain in soils. J. SMF Div., ASCE, (96), 1629-1653.
32. FARUQUE, M.O. i DESAI, C.S., (1985), Implementation of a general constitutive model for geological materials. Int. J. for Num. and Anal. Meth. Geomech., (9), 415-436.
33. GHABOUSSI, J. i MOMEN, H., (1979), Plasticity model for cyclic behaviour of sands. Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Meth. Geomech. (1), Ed. W. Wittke, Aachen, A. A. Balkema, Rotterdam, 423-434.
34. GHABOUSSI, J. i MOMEN, H., (1982), Modelling and analysis of cyclic behaviour of sands. Soil Mechanics-Transient Cyclic Loads, Pande, N.G. i Zienkiewicz, O.C. (Eds.), John Wiley & Sons Inc., Chichester, 313-343.
35. GRAY, W.A., (1968), The packing of solid particles. Chapman and Hall, London
36. GREEN, A.E., (1956), Hypo-elasticity and plasticity. Proc. Royal Soc. London, Sr. A, (234), 46-60.
37. GUDEHUS, G. i KOLYMBAS, D., (1979), A constitutive law of the rate type for soils. Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Meth. Geomech., Ed. W. Wittke,



Aachen, A. A. Balkema, Rotterdam, 319-329.

38. HARR, M. E., (1982), Mechanics of Particulate Media: A Probabilistic Approach McGraw-Hill.
39. HASHIGUCHI, K. i UENO, M., (1977), Elasto-plastic constitutive laws of granular materials. Constitutive equations of soils, Proc. 9th ICSMFE, Spec. Section 9, Murayama, S. i Schofield, A. N. (Eds.), JSSMFE, Tokyo, 73-82.
40. HASHIGUCHI, K., (1980), Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition. J. Appl. Mech., ASME, (47), 2, 266-272.
41. HASHIGUCHI, K., (1981), Constitutive equations of elastoplastic materials with anisotropic hardening and elastic-plastic transition. J. Appl. Mech., ASME, (48), 297-301.
42. HASHIGUCHI, K., (1985), Macrometric approaches -static-intrinsically time independent. Constitutive Laws of Soils, Ed. by S. Murayama, XI ICSMFE, San Francisco, 25-65.
43. HASHIGUCHI, K., UENO, M. i IMAMURA, T., (1989), Prediction of deformation behaviors of sands by the Subloading Surface Model. Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive Soils, Saada, A. i Blanchini, G. (Eds.), A. A. Balkema, Rotterdam, 293-306.
44. HASHIGUCHI, K., (1989), Subloading surface model in unconventional plasticity. Int. J. Solids and Structures, (25), 8, 917-945.
45. HENKEL, D. J., (1956), The effect of overconsolidation on the behaviour of clay during shear. Geotechnique, (6), 2, 139-150.
46. HORNE, M. R., (1965), The behaviour of assembly of round, rigid, cohesionless particles (I and II). Proc. Roy. Soc. A., (286), 62-97.
47. IZBICKI, R. J. i MRÓZ, Z., (1976), Metody Nośności Granicznej w Mechanice Gruntów i Skał. PWN, Poznań.
48. IWAN, W. D., (1967), On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems. J. Appl. Mech., ASME, (34), 612-617.
49. JARZEBOWSKI, A. i MRÓZ, Z., (1987), A constitutive model for sands and its application to monotonic and cyclic loadings. Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive Soils, Saada, A. i Blanchini, G. (Eds.), A. A. Balkema, Rotterdam, 307-324.
50. JARZEBOWSKI, A., (1988), Modele konstytutywne dla materiałów rozdrobnionych i ich zastosowanie. Praca doktorska, IPPT PAN.
51. KANATANI, K., (1981), A theory of contact force distribution in granular materials. Powder Technology, (28), 2, 167-172.
52. KITAMURA, R., (1981), A mechanical model of particulate material based on stochastic processes. Soils and Found., (21), 2, 63-72.
53. KLISIŃSKI, M., (1984), Degradacja i odkształcenia plastyczne betonu. Prace IPPT, 38/1984, (Praca doktorska).
54. KLISIŃSKI, M., (1988), Plasticity Theory Based on Fuzzy Sets. J. Eng. Mech. ASCE, (114), 4, 563-582.
55. KO, H. Y. i SCOTT, R. F., (1967), Deformation of sand in hydrostatic compression. Proc. ASCE, (93), SM3, 137-156.



56. KOLYMBAS, D., (1977), A rate-dependent constitutive equation for soils. Mech. Res. Comm., (4), 367-372.
57. KOLYMBAS, D., (1982), A constitutive law of the rate type for soil-position, calibration and prediction. Proc. Int. Workshop on Constitutive Relations for Soils, (Eds.) Gudehus, G., Darve, F. i Vardoulakis, I., Grenoble, A.A. Balkema, Rotterdam, 419-437.
58. KONDNER, R.L., (1963), Hyperbolic stress-strain response: Cohesive soils. J. SMF Div. ASCE, (89), 115-143.
59. KRIEG, R.D., (1975), A practical two surface plasticity theory. J. Appl. Mech. ASME, (42), 641-646.
60. LADE, P.V. i DUNCAN, J.M., (1975), Elastoplastic stress-strain theory for cohesive soil. J. GE Div. ASCE, (101), 1037-1053.
61. LADE, P.V., (1977), Elasto-plastic stress-strain theory for cohesive soil with curved yield surfaces. Int. J. Solids Structure, (13), 1019-1035.
62. LADE, P.V. i BOONYACHUT, S., (1982), Large stress reversals in triaxial tests on sand. Proc. 4th Int. Conf. Numerical Methods in Geomech., Edmonton, Canada, (1).
63. LEE, K.L. i SEED, H.B., (1967), Drained strength characteristic for sands. J. Soil Mech. and Found. Div. ASCE, (93), No SM6, 117-141.
64. LITWINISZYN, J., (1963), The model of a random walk of particles adapted to researches on problems of mechanics of loose media. Bull. de l'Acad. Pol. des Sci. Tech., XI, 10, 593-602.
65. LORET, B. i LUONG, M.P., (1982), A double deformation mechanism model for sand. Proc. 4th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics Edmonton, Canada, (1).
66. LORET, B., (1985), On the choice of elastic parameters for sand. Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomech., (9), 285-292.
67. MASING, G., (1926), Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing. Proc. 2-nd Int. Congr. Appl. Mech., Zurich.
68. MATSUOKA, H., (1974a), A microscopic study on shear mechanism of granular materials. Soils and Foundations, (14), 1, 29-43.
69. MATSUOKA, H., (1974b), Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane. Soils and Foundations, (14), 2, 47-61.
70. MATSUOKA, H., (1974c), Dilatancy characteristics of soil. Soils and Found., (14), 3, 13-24.
71. MATSUOKA, H. i NAKAI, T., (1974), Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stress. Proc. Japan Soc. Civil Engrs., 232, 59-70.
72. MATSUOKA, H. i NAKAI, T., (1977), Stress-strain relationship of soil based on the SMP. Proc. 9th ICSMFE, Speciality Session 9, 153-162
73. MATSUOKA, H. i TAKEDA, K., (1980), A stress-strain relationship for granular materials derived from microscopic shear mechanism. Soils and Foundations, (20), 3, 45-58.
74. MATSUOKA, H., (1982), Constitutive Equation and FE Analysis for anisotropic soil. Proc. 4th Int. Conf. Numerical Methods Geomech., Edmonton, Canada, (1).

75. MATSUOKA, H. i GEKA, H., (1983), A stress-strain model for granular materials considering mechanism of fabric change. Soils and Foundations, (23), 2, 83-97.
76. MATSUOKA, H., KOYAMA, H. i YAMAZAKI, H., (1985), A constitutive equation for sands and its application to analyses of rotational stress path and liquefaction resistance. Soils and Foundations, (25), 1, 27-42.
77. MATSUOKA, H. i NAKAI, T., (1985), Relationship among Tresca, Mises, Mohr-Coulomb and Matsuoka-Nakai failure criteria. Soils and Foundations, (25), 4, 123-128.
78. MATSUOKA, H., IWATA, Y. i SAKAKIBARA, K., (1986), A constitutive model of sands and clays for evaluating the influence of rotation of the principal stress axes. Proc. 2nd Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics, Ghent, Belgia, 67-78.
79. MATSUOKA, H., SUZUKI, Y. i SAKAKIBARA, K., (1988), A constitutive model for soils for evaluating principal stress rotation. Numerical Methods in Geomechanics, (Ed.) Swoboda, G., A. A. Balkema, 343-348.
80. MATSUOKA, H. i SUZUKI, Y., (1989), A constitutive model of sands directly expressed in general coordinates for evaluating principal stress rotation and the comparison of its predicted values with the measured values. Constitutive Equations for Non-Cohesive Soils, Saada, A. i Bianchini, G. (Eds.), Balkema, 403-426.
81. MEHRABADI, M. M., NEMAT-NASSER, S. i ODA, M., (1982), On statistical description of stress and fabric in granular materials. Int. J. for Num. Anal. Meth. in Geom., (6), 95-108.
82. MINDLIN, R. D., (1949), Compliance of elastic bodies in contact. J. Appl. Mech. Trans. A. S. M. E., 259-268.
83. MINDLIN, R. D. i DERESIEWICZ, H., (1953), Elastic spheres in contact under varying oblique forces. J. of Appl. Mech. Trans. A. S. M. E., 203-208.
84. MIURA, N., MURATA, H. i YASUFUKU, N., (1984), Stress-strain characteristic of sand in a particle crushing region. Soils and Foundations, (24), 1.
85. MIURA, K. i LIAM FINN, W. D., (1989), A multi-directional sliding model of soil deformation. Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive Soils, Saada, A. i Bianchini, G. (Eds.), A. A. Balkema, Rotterdam, 465-480.
86. MOGAMI, T., (1965), A statistical approach to the mechanics of granular materials. Soils and Foundations, (5), 2, 26-36.
87. MOHKAM, M., (1983), Contribution à l'étude expérimentale et théorique du comportement des sables sous chargements cycliques (praca doktorska), L'Institut National Polytechnique de Grenoble.
88. MRÓZ, Z., (1966), On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids. Archives of Mechanics, (18), 1, 3-35.
89. MRÓZ, Z., (1967), On the description of anisotropic workhardening. J. Mech. Phys. Solids, (15), 163-175.
90. MRÓZ, Z., (1969), An attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loads using a more general workhardening model. Acta Mechanica, (7), 199-212.
91. MRÓZ, Z., NORRIS, V. A. i ZIENKIEWICZ, O. C., (1978), An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading. Int. J. Numerical and Analytical Meth. in Geomech., (2), 203-221.



92. MRÓZ, Z., NORRIS, V.A. i ZIENKIEWICZ, O.C., (1979), Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils. Geotechnique, (29), 1-34.
93. MRÓZ, Z., (1980a), Deformation and flow of granular materials, XV Kongres IUTAM, Toronto, 119-132.
94. MRÓZ, Z., (1980b), On hypoelasticity and plasticity approaches to constitutive modelling of inelastic behaviour of soils. Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, (4), 45-55.
95. MRÓZ, Z., (1981), Three-dimensional constitutive relations and ductile fracture. Discussion on Session 7. Proc. IUTAM Symp., Ed. S. Nemat-Nasser, North Holl. Publ. Co., 391-395.
96. MRÓZ, Z., NORRIS, V.A. i ZIENKIEWICZ, O.C., (1981), An anisotropic, critical state model for soils subject to cyclic loadings. Geotechnique, (31), 451-469.
97. MRÓZ, Z. i NORRIS, V.A., (1982), Elastoplastic and viscoplastic constitutive models for soils with anisotropic loading. Soil Mechanics-Transient Cyclic Loadings, Pande, G.N. i Zienkiewicz, O.C. (Eds.), John Wiley & Sons Inc., Chichester, 219-252.
98. MRÓZ, Z. i PIETRUSZCZAK, S., (1982), A constitutive model for clays and sands with account of anisotropic hardening. Proc. Int. Workshop on Constitutive Relations for Soils, (Eds.) Gudehus, G., Darve, F. i Vardoulakis, I., Grenoble, Balkema, Rotterdam, 331-345.
99. MRÓZ, Z. i PIETRUSZCZAK, S., (1983), A constitutive model for sand with anisotropic hardening rule. Int. J. Num. and Anal. Meth. Geomech., (7), 305-320.
100. MRÓZ, Z. i ZIENKIEWICZ, O.C., (1984), Uniform formulation of constitutive equations for clays and sands. Mechanics of Materials, Eds. Desai, C.S. i Gallagher, R.H., John Wiley & Sons Inc., 415-451.
101. NAKAI, T. i MATSUOKA, H., (1983), Shear behaviors of sand and clay under three-dimensional stress condition. Soils and Foundations, (23), 2, 26-41.
102. NAKAI, T., (1989), An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stress path dependency in three-dimensional stresses. Soils and Foundations, (29), 1, 119-137.
103. NEMAT-NASSER, S., (1980), On behavior of granular materials in simple shear. Soils and Foundations, (20), 3, 59-73.
104. NEWLAND, P.L. i ALLELY, B.H., (1957), Volume changes in drained triaxial tests on granular materials. Geotechnique, (7), 1, 17-34.
105. NISHI, K. i ESASHI, Y., (1978), Stress-strain relationships of sand based on elastic-plasticity theory. Proc. JSCE, 280, 111-122.
106. NOVA, R., (1977), On the hardening of soils. Arch. Mech., (29), 445-458.
107. NOVA, R. i WOOD, D.M., (1979), A constitutive model for sand in triaxial compression. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., (3), 255-278.
108. NOVA, R., (1982), A constitutive model for soils under monotonic and cyclic loadings. Soil Mechanics-Transient Cyclic Loads, Eds. Pande, G.N. i Zienkiewicz, O.C., John Wiley & Sons Inc., 343-373.



109. ODA.M.,(1972a), Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material.Soils and Foundations, (12),1, 17-36.
110. ODA.M.,(1972b),The mechanism of fabric changes during compressional deformation od sand.Soils and Foundations,(12),2,1-18.
111. ODA.M.,(1972c),Deformation mechanism of sand in triaxial compression tests.Soils and Foundatio., (12),4,45-63.
112. ODA.M.,(1974), A mechanical and statistical model of granular material. Soils and Foundations,(14),1,13-27.
113. ODA.M. i Konishi.J.,(1974a), Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear.Soils and Foundations,(14),4, 1-14.
114. ODA.M. i KONISHI.J.,(1974b), Relation of principal stresses in granular material during simple shear.Soils and Foundations, (14),4,39-53.
115. ODA.M., (1977), Co-ordination number and its relation to shear strength of granular material.Soils and Foundations,(17),2, 29-42.
116. ODA.M.,(1978), Significance of fabric in granular materials. Proc. U.S.-Japan Seminar on Continuum-Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, Gakujuitsu Bunken Fukyu-kai, Tokyo,7-26.
117. ODA,M., KOISHIKAWA,I. i HIGUCHI,T.,(1978), Experimental study of anisotropic shear strength of sand by plane strain test. Soils and Foundations,(18),1,25-38.
118. ODA.M.,KONISHI,J. i NEMAT-NASSER,S.,(1980), Some experimentally based fundamental results on the mechanical behaviour of granular materials. Geotechnique, (30),4,479-495.
119. ODA.M.,(1982),Geometry and discontinuity and its relation to mechanical properties of discontinuous materials. IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials, Delft.
120. ODA,M.,KONISHI,J. i NEMAT-NASSER,S.,(1982),Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials: effects of particle rolling. Mechanics of Materials,1,269-283.
121. ODA.M.,NEMAT-NASSER,S. i MEHRABADI,M.M.,(1982), A statistical study of fabric in a random assembly of spherical granules. Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomech.,6,77-94.
122. ODA,M.,NEMAT-NASSER,S. i KONISHI,J.,(1985), Stress-induced anisotropy in granular masses. Soils and Foundations,(25),3,85-97.
123. OHMAKI,S.,(1979),A mechanical model for the stress-strain behaviour of normally consolidated cohesive soil. Soils and Foundations,(19),3,29-44.
124. OHMAKI,S.,(1980),A stress-strain relationships of normally consolidated cohesive soils and generalized stress conditions. Soils and Found., (21),1,29-43.
125. PANDE,G.N. i PIETRUSZCZAK,S.,(1982),Reflecting surface model for soils. Proc. Int. Symp. on Num. Meth. in Geomech.,Eds.Dungar,R., Pande,G.H. i Studer,J.A., Zurich, A.A.Balkema, Rotterdam,50-64.
126. PARRY,R.H.G., (1960), Triaxial compression and extension tests on remoulded saturated clay. Geotechnique,(10),4,166-180.
127. PASTOR,M., ZIENKIEWICZ,O.C. i LEUNG,K.H., (1985), Simple model for transient soil loading in earthquake analysis.II Non-associative

models for sands. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., (9), 477-498.

128. PASTOR, M. i ZIENKIEWICZ, O.C., (1986), A generalized plasticity, hierarchical model for sand under monotonic and cyclic loading. Proc. 2nd Int. Symp. Numerical Models Geomech., Ghent, 131-150.
129. PENDER, M.J., (1978), A model for the behaviour of overconsolidated soil. Geotechnique, (28), 1-25.
130. PETERSSON, H. i POPOV, E.P., (1977), Constitutive equations for generalized loading. J. Eng. Mech., ASCE, (103), 611-627.
131. PIETRUSZCZAK, S., (1979), Problemy brzegowe dla sprężysto-plastycznych modeli gruntów. Prace IPPT, 23/1979, (Praca doktorska).
132. PIETRUSZCZAK, S. i MRÓZ, Z., (1983), On hardening anisotropy of Ko-consolidated clays. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., (7), 19-38.
133. POOROOSHASB, H.B., HOLUBEC, I. i SHERBOURNE, A.N., (1966), Yielding and flow of sand in triaxial compression: Part I. Canadian Geotech. Journ., (3), 179-190.
134. POOROOSHASB, H.B., HOLUBEC, I. i SHERBOURNE, A.N., (1967), Yielding and flow of sand in triaxial compression: Parts II & III. Canadian Geotech. Journ., (4), 376-397.
135. POOROOSHASB, H.B., (1971), Deformation of sand in triaxial compression. Proc. 4th Asian Conf. SMFE, Bangkok, 63-66.
136. POOROOSHASB, H.B. i PIETRUSZCZAK, S., (1985), On yield and flow of sand; A generalized Two-Surface Model. Computers and Geotechnics (1), 33-58.
137. PRADHAN, T.S.B. i TATSUOKA, F., (1989), On stress-dilatancy equations of sand subjected to cyclic loading. Soils and Foundations, (29), 1, 65-81.
138. PRADHAN, T.S.B., TATSUOKA, F. i SATO, Y., (1989), Experimental stress-dilatancy relations of sand subjected to cyclic loading. Soils and Foundations, (29), 1, 45-64.
139. PREVOST, J.H. i HÖEG, K., (1975), Effective stress-strain-strength model for soils. J. GE Div., ASCE, (101), 259-278.
140. PREVOST, J.H., (1977), Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., (1), 195-216.
141. PREVOST, J.H., (1978), Plasticity theory for soil stress-strain behaviour. J. EM Div., ASCE, (104), 1177-1194.
142. REYNOLDS, O., (1885), On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. Phil. Mag. (20), 469-481.
143. ROMANO, M., (1974), A continuum theory for granular media with a critical state. Archives of Mechanics, (26), 1011-1028.
144. ROSCOE, K.H., SCHOFIELD, A.N. i THURAIRAJAH, A., (1963), Yielding of clays in stress wetter than critical. Geotechnique, (13), 211-240.
145. ROSCOE, K.H. i BURLAND, J.B., (1968), On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay. Engineering Plasticity, Eds. Heyman i Leckie, F.A., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 535-608.
146. ROWE, P.W., (1962), The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contacts. Proc. Roy. Soc. A., (269), 500-527.



147. ROWE, P. W., (1969), The relation between the shear strength of sands in triaxial compression, plane strain and direct shear. Geotechnique, (19), 1, 75-86.
148. ROWE, P. W., (1971), Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil. Stress Strain Behaviour of Soils, Proc. Roscoe Memorial Symp., Cambridge Univ., U.K., 143-194.
149. SAADA, A. i BIANCHINI, G., (1989), Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive Soils. A. A. Balkema, Rotterdam.
150. SATAKE, M., (1978), Constitution and mechanics of granular materials through graph representation. Theoretical and Applied Mechanics, 26, 257-266, University of Tokyo Press, Tokyo.
151. SATAKE, M., Fabric tensor in granular materials., (w druku).
152. SCHOFIELD, A. N. i WROTH, C. P., (1968), Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill, London.
153. SKINNER, A. E., (1969), A note on the influence of interparticle friction on the shearing strength of a random assembly of spherical particles. Geotechnique, (19), 1, 155-157.
154. SPENCER, A. J. M., (1964), A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions. Jour. Mech. Phys. Solids, 12, 337-351.
155. STUTZ, P., (1973), Comportement elastoplastique des milieux pulverulents. Science et Techniques de l'Armement, (47), 475-499.
156. SUPEL, J. A., (1985), Local destruction of granular media caused by crushing a single grain. Archives of Mechanics, (37), 4-5, 535-548.
157. SZCZEPIŃSKI, W., (1974), Stany Graniczne i Kinematyka Ośrodków Sypkich. PWN, Warszawa.
158. SZCZEPIŃSKI, W., i PETRYK, H., (1977), On the mechanism of deformation of density hardening granular materials. Symposium franco-polonais: Problemes non-lineaires de mecanique, Kraków, 577-584.
159. TAM, H. K. i WOODS, R. I., (1989), A parametric study of Cam-clay. Proc. 3-rd Int. Symp. Num. Meth. Geomech., Pietruszczak, S. i Pande, G. N. (Eds.), Elsevier App. Sc. Publ. LTD.
160. TAYLOR, D. W., (1948), Fundamentals of Soil Mechanics, John Wiley, N.Y.
161. THORNTON, C., (1979), The conditions for failure of a face-centred cubic array of uniform rigid spheres. Geotechnique, (29), 4, 441-459.
162. THORNTON, C. i BLACKBURN, D. J., (1987), A microstructural approach to soil plasticity theory. Proc. IUTAM Symp. on Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids, Grenoble.
163. TOKUE, T., (1979a), A stress-dilatancy model of granular material under general stress conditions. Soils and Foundations, (19), 1, 63-80.
164. TOKUE, T., (1979b), Deformation behaviour of dry sand under cyclic loading and a stress-dilatancy model. Soils and Foundations, (19), 2, 63-78.
165. VALANIS, K. C., (1971a), Theory of viscoplasticity without a yield surface, I. General theory. Archives of Mechanics, (23), 517-533.
166. VALANIS, K. C., (1971b), Theory of viscoplasticity without a yield surface, II. Application to mechanical behaviour of metals. Arch. of Mech., (23), 535-551.



167. VERMEER, P. A., (1978), A double hardening model for sand. Geotechnique, (28), 413-433.
168. WALTERS, J. V. i THOMAS, J. N., (1982), Shear zone development in granular materials. Proc. 4th Int. Conf. Numerical Methods Geom. Edmonton, Canada, (1).
169. WILDE, P., (1977), Two invariants depending models of granular media Arch. of Mech., (29), 799-809.
170. WILDE, P., (1983), Elastic-plastic behaviour in plane strain problem for granular media. Ingenieur-Archiv, (53), 2, 85-100.
171. WOOD, D. M., (1987), Discussion, Soils and Foundations, (27), 4, 164-166.
172. ZIENKIEWICZ, O. C., LEUNG, K. H. i PASTOR, M., (1985), Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. I Basic model and its application. Int. J. Num. Anal. Methods Geomech., (9), 453-476.

S P I S T R E Ś C I

1.	WSTĘP .....	3
2.	MODELE MIKROSKOPOWE .....	5
2.1.	Modele strukturalne .....	5
2.1.a.	Opis struktury ośrodków sypkich .....	6
2.1.b.	Tensor struktury .....	13
2.1.c.	Deformacja struktury .....	18
2.2.	Modele naprężeniowo-odkształceniowe .....	21
2.2.a.	Modele naprężeniowo-odkształceniowe dla ścianania .....	21
2.2.b.	Modele naprężeniowo-odkształceniowe dla ściskania .....	35
2.3.	Modele stochastyczne i dyskretne modele numeryczne .....	37
2.3.a.	Modele stochastyczne .....	37
2.3.b.	Dyskretne modele numeryczne .....	38
3.	MODELE FENOMENOLOGICZNE NIEZALEŻNE OD CZASU	40
3.1.	Model Cam-clay .....	40
3.2.	Propozycje rozwijające koncepcję Cam-clay ....	46
3.2.a.	Modele ze stowarzyszonym prawem płynięcia ..	46
3.2.b.	Modele z niestowarzyszonym prawem płynięcia .....	49
3.3.	Zaawansowane modele teorii pływistości .....	57
3.3.a.	Model wielopowierzchniowy .....	57
3.3.b.	Model z nieskończoną ilością powierzchni ...	59
3.3.c.	Model dwupowierzchniowy .....	59
3.3.d.	Model jednopowierzchniowy .....	62
3.3.e.	Model z chwilową powierzchnią obciążenia ...	63
3.4.	Własności sprężyste gruntów sypkich .....	68
3.5.	Inne modele .....	83
3.5.a.	Hyposprężystość .....	84
3.5.b.	Model ze zmiennymi modułami sprężystymi ....	85
3.5.c.	Teoria endochroniczna .....	86
3.5.d.	Nieliniowy model przyrostowy .....	88
4.	UWAGI KOŃCOWE .....	89
5.	LITERATURA .....	90