

4.41 — optymalizacja  
4.42 — plastyczne i lepkie efekty  
w konstrukcjach. Stany graniczne,  
nośność, przystosowanie

K. A. Sikorski, A. Borkowski

ZASTOSOWANIE  
PROGRAMOWANIA STOCHASTYCZNEGO  
W ZAGADNIENIACH  
NOŚNOŚCI GRANICZNEJ KONSTRUKCJI

51/1985

P. 269

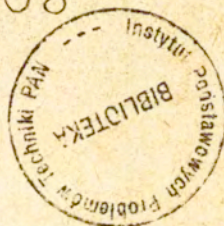


WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 31 stycznia 1985 r.

56898



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 160 egz. Ark.wyd. 1,57 Ark.druk. 2,25  
Oddano do drukarni w styczniu 1986 r.  
Nr zamówienia 118786

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa  
ul. Śniadeckich 8



Zakład Teorii Konstrukcji  
K.A. Sikorski, A. Borkowski

ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA STOCHASTYCZNEGO  
W ZAGADNIENIACH NOŚNOŚCI GRANICZNEJ KONSTRUKCJI

Streszczenie

Praca dotyczy statycznego podejścia do probabilistycznej analizy i optymalizacji konstrukcji sztywno-plastycznych. Rozważono w niej dwa warianty. Pierwszy odpowiada tzw. metodzie ograniczeń losowych w teorii programowania stochastycznego. Pozwala on określić mnożnik obciążenia granicznego lub znaleźć optymalny rozkład modułów plastycznych przy ustalonym prawdopodobieństwie statycznej dopuszczalności stanu naprężeń. Wariant drugi polega na wyznaczeniu dolnej granicy współczynnika niezawodności z uwzględnieniem możliwych korelacji między wielkościami losowymi.

W pracy pokazano, że dla dyskretnego modelu konstrukcji rozważane przypadki prowadzą się do odpowiednich deterministycznych liniowych lub nieliniowych problemów programowania matematycznego. Podano numeryczne przykłady analizy i optymalizacji ram ilustrujące proponowane procedury.

## Wstęp

Niezawodność nierozzerwalnie związana jest z budownictwem i teorią konstrukcji. Projektując określony układ konstrukcyjny stawiano mu pewne wymagania. Czasem zdarzało się, że warunki te nie zostały spełnione. Wówczas zmieniano albo wymagania, albo elementy konstrukcji lub reorganizowano układ tak, by w efekcie był on mniej zawodny. Popełniane błędy wносиły, obok groźnych czasem następstw, doświadczenie. Dzięki pracy pokoleń uczono się konstruować budowle coraz bardziej bezpieczne.

Umiejętność budowania wielkich świątań, grobowców, budowli strategicznych ludzie posiadli już w czasach starożytności. Powszechnie podziwiane są osiągnięcia najstarszych cywilizacji w tym zakresie. Wiele z ówczesnych budowli zachowało się do czasów obecnych i często są one nadal używane.

Równoległe z nabywaniem doświadczeń w konstruowaniu budowli rodziły się podstawy teorii niezawodności konstrukcji. Timoszenko [1] podaje, że już Egipcjanie stawiali sobie pytanie, dlaczego jeden obiekt jest bardziej niezawodny od drugiego. Próby wyjaśnienia tego problemu podejmował Leonardo da Vinci. Jego notatniki są pierwszymi znanymi pracami, w których proponowano naukowe metody badania wytrzymałości materiałów. Badania te nie były jednak szerzej znane. Dopiero Galileusz opublikował metody wyznaczania wytrzymałości. Jego następcami byli m.in. Belidor, Gerard, Young. Praktyczne wykorzystanie wyników badań wytrzymałości polega na stosowaniu współczynników bezpieczeństwa. Pierwszym, który w swoich obliczeniach projektowych zastosował intuicyjne współczynniki bezpieczeństwa, był prawdopodobnie Coulomb. Późniejsi inżynierowie powszechnie stosowali takie współczynniki przy projektowaniu budowli i maszyn. Wartość współczynników wahała się od 2 do około 20. Konieczność projektowania coraz lżejszych konstrukcji zmusiła inżynierów do krytycznego spojrzenia na współczynnik bezpieczeństwa. Trudność w wyborze współczynnika bezpieczeństwa polegała na znalezieniu związku między nim a niezawodnością. Wiadomo było, że większy współczynnik odpowiada większej niezawodności. Nie znano jednak obiektywnych metod wybo-



ru współczynnika bezpieczeństwa oraz oceny niezawodności. Porównywano więc projektowane konstrukcje z innymi istniejącymi, a w przypadkach budowli znacznie różniących się od już znanych kierowano się głównie intuicją.

Prekursorami w teorii niezawodności konstrukcji byli W. Wierzbicki i N.S. Strelecki, którzy równocześnie wskazali, że normy projektowania należy oprzeć na rachunku prawdopodobieństwa. Obecnie w literaturze przedmiotu wyróżnia się trzy /Ferry-Borges [2] / lub cztery /Murzewski, Sowa [3] / poziomy metod analizy probabilistycznej. Jednak ocena bezpieczeństwa złożonych układów konstrukcyjnych nie wykracza obecnie poza poziom drugi, tzn. poziom metod, które w sposób przybliżony pozwalają ocenić zapas bezpieczeństwa.

Probabilistyczne podejście do analizy konstrukcji prętowych stosowało wielu autorów. Augusti i Baratta [4] uogólnili twierdzenia graniczne uwzględniając czynniki losowe. Ogólne wzory na prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji podane m.in. przez Jorgensona, ... [5] wymagają liczenia całek wielokrotnych. Jednak czasochłonność i stopień trudności obliczeń wykonanych według tak sformułowanych wzorów powodują, że nie są one stosowane w praktyce. Problem upraszcza się znacznie przy przyjęciu wzajemnej niezależności lub pełnej zależności mechanizmów zniszczenia konstrukcji /dolne i górne oszacowanie/. Granice tak policzone są zadawalające w przypadku istnienia jedynie kilku mechanizmów znaczących lub jednego dominującego. Niektórzy autorzy uważają, że górne oszacowanie jest bezpieczne i wystarczające w praktycznych zastosowaniach. Przytaczane są przy tym obliczenia Stevenzona, ... [6] dla ram o liczbie mechanizmów dochodzących do 51. Górne oszacowanie, jako bezpieczne i wygodne w użyciu, bardzo często jest wykorzystywane w zagadnieniach optymalizacji konstrukcji m.in. przez Davidsona, ... [7], Mau [8], Mosesa [9], Frangopola, ... [10]. Lepsze oszacowania wymagają uwzględnienia korelacji mechanizmów zniszczenia. Ditlevsen [11] otrzymuje bliższe oszacowanie uwzględniając korelację między parami mechanizmów. Vanmarke [12] uwzględnia korelacje dzięki sprowadzeniu prawdopodobieństwa zniszczenia konstrukcji do sumy prawdopodobieństw

warunkowych poszczególnych mechanizmów zniszczenia. Taka metoda okazuje się w wielu przypadkach lepsza niż metoda proponowana przez Ditlevsena, Murotsu, ... [13] i Ang, ... [14] redukują wymiary zagadnienia łącząc wysoce skorelowane mechanizmy w grupy. Autorzy ci, a także Watwood [15] i Gorman [16] podali też metody automatycznej generacji mechanizmów. Natomiast Dunnet, ... [17], Sidak [18] i Ractwitz [19] otrzymali prostszą macierz korelacji zmiennych losowych transformując je do nowej przestrzeni.

Wspomniane wyżej metody opierają się na znajomości wszystkich mechanizmów zniszczenia konstrukcji. Stwarza to /szczególnie w wypadkach dużych konstrukcji/ niebezpieczeństwo przecenienia istotnego mechanizmu zniszczenia. Są one również bardzo pracochłonne. Z tych powodów przydatność powyższych metod jest ograniczona. Prostszy rozwiązaniem jest natomiast uwzględnienie tylko jednego mechanizmu zniszczenia. Tak rozumując Klingmüller [20] wykorzystuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Szacuje globalne prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji na podstawie prawdopodobieństwa zniszczenia według mechanizmu odpowiadającego deterministycznemu rozwiązaniu zupełnemu i na podstawie prawdopodobieństwa wystąpienia tego mechanizmu. Metoda ta wymaga znacznie mniejszego wysiłku. Jednak nie zawsze mechanizm odpowiadający deterministycznemu rozwiązaniu zupełnemu dla średnich wartości zmiennych losowych jest mechanizmem modalnym, tzn. takim, że jego prawdopodobieństwo zniszczenia jest największe spośród wszystkich mechanizmów.

Niniejsza praca przedstawia zastosowanie programowania matematycznego w zagadnieniach nośności granicznej konstrukcji. W rozdziale 1 przytoczono deterministyczne podejście do zastosowania programowania liniowego w nośności granicznej. Matematyczne metody sprowadzenia stochastycznego programowania liniowego do równoważnych mu układów deterministycznych zawiera rozdział 2. W rozdziałach następnych pokazane są zastosowania tych metod przy obliczaniu nośności granicznej /rozdział 3/, optymalnego rozkładu modułów plastycznych /rozdział 4/ i niezawodności konstrukcji /rozdział 5/.



We wszystkich przypadkach otrzymane rezultaty są oszacowaniami ze strony bezpiecznej. Podejście dualne, szacujące niezawodność od strony przeciwnej, wymaga jeszcze dalszych badań.

## 1. Nośność graniczna a programowanie matematyczne

### 1.1. Dyskretny model konstrukcji

Rozważmy dowolną konstrukcję zdyskretyzowaną w taki sposób, że jej stan określają jednokolumnowe macierze /wektory/ uogólnionych naprężeń  $\underline{s} \in R^m$ , odkształceń  $\underline{q} \in R^m$ , obciążeń  $\underline{p} \in R^n$  i przemieszczeń  $\underline{w} \in R^n$ . Wektory te są dobrane tak, aby zasada pracy wirtualnej miała postać równości iloczynów skalarowych:

$$/1.1/ \quad \underline{p}^T \underline{w} = \underline{s}^T \underline{q} .$$

Związki między przemieszczeniami a odkształceniami przyjmujemy w postaci liniowej

$$/1.2/ \quad \underline{q} = \underline{C} \underline{w} ,$$

gdzie  $\underline{C}$  jest macierzą zgodności o wymiarach  $m \times n$ . Z zasady /1.1/ wynika natychmiast, że równania równowagi mają macierz transponowaną w stosunku do równań /1.2/ :

$$/1.3/ \quad \underline{p} = \underline{C}^T \underline{s} .$$

Ogólne rozwiązanie równania /1.3/ wyraża się w postaci:

$$/1.4/ \quad \underline{s} = \underline{C}^{-T} \underline{p} + \underline{C}_0^T \underline{z} ,$$

gdzie  $\underline{C}^{-T} \in R^{m \times m}$  jest uogólnioną macierzą odwrotną macierzy  $\underline{C}$ , macierz  $\underline{C}_0^T \in R^{m \times n}$  jest macierzą jądra operatora  $\underline{C}$ , a wektor  $\underline{z} \in R^r$  zawiera wolne parametry ( $r = m - n > 0$ ).

Linijowe równania macierzowe /1.2/, /1.3/ zachowują ważność dla dyskretnego modelu konstrukcji wykonanej z dowolnego materiału przy założeniu małych przemieszczeń. Ponieważ interesuje nas zagadnienie nośności granicznej, określimy teraz macierzową postać relacji konstytutywnych dla konstrukcji wykonanej z materiału sztywno-plastycznego z pominięciem wzmocnienia. Skorzystamy przy tym z modelu zaproponowanego przez Maiera [21]. Pomijając szczegóły wyprowadzenia, które można znaleźć w cytowanej publikacji, przytaczamy jedynie ostateczne wzory w odniesieniu do całej konstrukcji:

$$\begin{aligned} /1.5/ \quad \underline{f} &= \underline{N}^T \underline{s} - \underline{k} \leq \underline{0}, \\ \dot{\underline{q}} &= \underline{N} \dot{\underline{\lambda}}, \\ \dot{\underline{\lambda}} &\geq \underline{0}, \\ \underline{f}^T \dot{\underline{\lambda}} &= \underline{0}. \end{aligned}$$

Występują w nich wektory potencjałów  $\underline{f} \in R^l$ , modułów  $\underline{k} \in R^l$  i mnożników  $\underline{\lambda} \in R^l$  plastycznych, jak również macierz gradientów powierzchni granicznej  $\underline{N}$  o wymiarach  $m \times l$ . Nierówność /1.5/<sub>1</sub> określa dopuszczalne stany  $\underline{s}$  mieszczące się wewnątrz odcinkowo-liniowej powierzchni granicznej. Równanie /1.5/<sub>2</sub> wraz z warunkami /1.5/<sub>3</sub>, /1.5/<sub>4</sub> wynika ze stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia. Pominięto przy tym możliwość odciążania przekrojów, ponieważ nie wpływa ono na stan graniczny.

## 1.2. Problem granicznego mnożnika obciążenia

Niech obciążenie narasta w sposób proporcjonalny :

$$/1.6/ \quad \underline{p} = \mu \underline{p}_0,$$

gdzie  $\underline{p}_0$  jest ustalonym obciążeniem odniesienia, a  $\mu$  - monotonicznie rosnącym mnożnikiem. Na podstawie twierdzeń teorii nośności granicznej można wykazać, że graniczną wartość mnożnika  $\mu^*$ , stan naprężeń  $\underline{s}$  w chwili plastycznego zniszczenia konstrukcji i mechanizm tego zniszczenia  $\dot{\underline{w}}^*$ ,  $\dot{\underline{\lambda}}^*$  można określić rozwiązując następującą parę dualnych zadań programo-



wania liniowego:

$$/1.7/ \quad \max \{ \mu \mid \mu \underline{p}_0 - \underline{C}^T \underline{s} = \underline{0}, \underline{N}^T \underline{s} \leq \underline{k}^* \},$$

$$\min \{ \underline{k}^* \underline{\dot{\lambda}} \mid \underline{N} \underline{\dot{\lambda}} - \underline{C} \underline{\dot{w}} = \underline{0}, \underline{p}_0^T \underline{\dot{w}} = 1, \underline{\dot{\lambda}} \geq \underline{0} \}.$$

Pierwsze z nich jest po prostu macierzowym zapisem twierdzenia statycznego, drugie zaś wynika z twierdzenia kinematycznego po pewnych przekształceniach. Minimalizujemy w nim bowiem moc dysponowaną przy jednostkowej mocy obciążenia  $\underline{p}_0$ , co jest równoznaczne z poszukiwaniem najmniejszego mnożnika kinematycznego

$$/1.8/ \quad \mu_k = \frac{\underline{k}^* \underline{\dot{\lambda}}}{\underline{p}_0^T \underline{\dot{w}}}$$

### 1.3. Problemy optymalizacji

Wyznaczenie granicznej wartości mnożnika obciążenia należy do zagadnień analizy konstrukcji. Macierzowy model i programowanie matematyczne pozwalają w prosty sposób zapisać i rozwiązać również szereg problemów typu syntezy.

Rozważmy najpierw problem tzw. optymalizacji plastycznej. Zakładamy w nim, że konstrukcja ma mieć ustalony współczynnik bezpieczeństwa  $\mu^*$  względem zniszczenia plastycznego. Znamy zatem obciążenie niszczące  $\underline{p}^* = \mu^* \underline{p}_0$ . Problem polega na doborze takiego rozkładu modułów plastycznych  $\underline{k}^*$ , który zapewnia bezpieczeństwo przy  $\mu < \mu^*$  i jednocześnie minimalizuje koszt lub ciężar konstrukcji. Modułami plastycznymi możemy sterować za pośrednictwem zmiennych decyzyjnych zgrupowanych w wektorze  $\underline{c} \in \mathbb{R}^T$ , ponieważ zakładamy relację

$$/1.9/ \quad \underline{k} = \underline{G}^T \underline{c}$$

We wzorze tym  $\underline{G} \in R^{t \times l}$  jest macierzą konfiguracji konstrukcji. Z reguły liczba zmiennych decyzyjnych  $t$  jest znacznie mniejsza od  $l$  /ze względu na powtarzalność elementów, przekrojów, etc./.

Niech minimalizowany wskaźnik jakości  $g$  /np. koszt lub ciężar/ będzie liniową funkcją zmiennych decyzyjnych:

$$/1.10/ \quad g = \underline{a}^T \underline{c} .$$

gdzie  $\underline{a} \in R^t$  oznacza wektor ustalonych współczynników wagi. Wówczas optymalny projekt konstrukcji  $\underline{c}^*$ , stan naprężenia  $\underline{s}^*$  w chwili plastycznego zniszczenia oraz mechanizm  $\underline{\dot{w}}^*$ ,  $\underline{\dot{\lambda}}^*$  można wyznaczyć rozwiązując taką parę dualnych zadań programowania liniowego [22]:

$$\min \{ \underline{a}^T \underline{c} \mid \underline{C}^T \underline{s} = \underline{p}^* , \underline{G} \underline{c} - \underline{N} \underline{s} \geq \underline{0} , \underline{c} \geq \underline{0} \} ,$$

/1.11/

$$\max \{ \underline{p}^{*T} \underline{\dot{w}} \mid \underline{C} \underline{\dot{w}} - \underline{N} \underline{\dot{\lambda}} = \underline{0} , \underline{G} \underline{\dot{\lambda}} \leq \underline{a} , \underline{\dot{\lambda}} \geq \underline{0} \} .$$

Zadanie /1.11/<sub>1</sub> polega na bezpośrednim minimalizowaniu  $g$  przy ograniczeniach wynikających z warunku statycznej dopuszczalności  $\underline{s}$ . Problem dualny /1.11/<sub>2</sub> odpowiada podejściu kinematycznemu: poszukuje się maksimum mocy obciążenia przy ograniczeniach wynikających z kinematycznej zgodności  $\underline{\dot{w}}$  i  $\underline{\dot{\lambda}}$ . Więzy nierównościowe  $\underline{G} \underline{\dot{\lambda}} \leq \underline{a}$  odpowiadają stosowanemu niekiedy tzw. kryterium optymalności /por. kryterium stałej dysypacji/.

W sytuacjach praktycznych prosty model /1.11/ jest często niewystarczający. Może się bowiem okazać konieczne uwzględnienie więzów typu  $\underline{c}^- \leq \underline{c} \leq \underline{c}^+$ , dyskretnej wartości  $\underline{c}$  lub nieliniowego charakteru funkcji  $g$ . Są to jednakże modyfikacje wykraczające poza ramy niniejszej pracy, nie wnoszą one bowiem istotnych zmian w podejściu probabilistycznym.



## 2. Elementy teorii liniowego programowania stochastycznego

### 2.1. Ogólne sformułowanie zagadnienia

Postać problemu liniowego programowania stochastycznego w zapisie macierzowym jest następująca:

problem pierwotny -

$$/2.1/ \quad \max \{ \tilde{c}^T \underline{x} \mid \tilde{A} \underline{x} \leq \tilde{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \},$$

problem dualny -

$$/2.2/ \quad \min \{ \tilde{b}^T \underline{y} \mid \tilde{A}^T \underline{y} = \tilde{c}, \underline{y} \geq \underline{0} \}.$$

We wzorach tych elementy macierzy  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{c}$  są zmiennymi losowymi o znanych rozkładach prawdopodobieństwa. W literaturze spotykamy kilka metod rozwiązywania tego rodzaju zagadnień [23,24,25,26,27].

Metody, które zostaną podane w tym rozdziale, zostały wybrane i przekształcone pod kątem zastosowań w teorii nośności granicznej konstrukcji. Wszystkie rozważania będą prowadzone dla problemu pierwotnego /2.1/, mogą jednakże być analogicznie wykorzystane w problemie dualnym. Przypadek ogólny /2.1/ - /2.2/, w którym wszystkie macierze współczynników mają charakter losowy, jest trudny do rozwiązania i w praktycznych zastosowaniach rzadziej spotykamy. Z tego względu przechodzimy teraz do rozważenia przypadków szczególnych o mniejszej liczbie wielkości losowych.

## 2.2. Przypadek losowych ograniczeń

Niech  $\tilde{\underline{A}}$  i  $\tilde{\underline{b}}$  będą losowe, a wektor  $\underline{c}$  - deterministyczny. Ograniczenia w problemie /2.1/ są w tym przypadku stochastyczne. Metoda ograniczeń losowych pozwala sprowadzić takie ograniczenia do warunków deterministycznych, w ogólnym przypadku nieliniowych. Została ona opracowana przez Charnesa i Coopera [28], a następnie rozwinięta przez Rao [23].

W metodzie ograniczeń losowych dopuszczamy możliwość przekroczenia  $i$ -tego ograniczenia z danym prawdopodobieństwem  $\gamma_i$ . Tak więc zamiast problemu /2.1/ rozwiązujemy zagadnienie:

$$/2.3/ \quad \max \{ \underline{c}^T \underline{x} \mid \text{Prob} [ \tilde{\underline{A}} \underline{x} \leq \tilde{\underline{b}} ] \geq \gamma, \underline{x} \geq \underline{0} \}.$$

Zakładamy, że rozkład wielkości losowych jest rozkładem normalnym o znanych parametrach. Rozpatrzmy teraz szczególne przypadki zagadnienia /2.3/.

### 2.2.1. Zmiennymi losowymi są jedynie elementy macierzy $\tilde{\underline{A}}$ .

Oznaczmy wielkość średnią i wariancję normalnego rozkładu zmiennej losowej  $\tilde{A}_{ij}$  odpowiednio  $\bar{A}_{ij}$  i  $\mathcal{A}_{ij}$ . W ogólnym przypadku losowe elementy macierzy  $\tilde{\underline{A}}$  mogą być statystycznie zależne. Niech  $\text{cov}(\tilde{A}_{ij}, \tilde{A}_{kl})$  będzie kowariancją zmiennych  $\tilde{A}_{ij}$  i  $\tilde{A}_{kl}$ . Wprowadźmy oznaczenie

$$/2.4/ \quad \tilde{\underline{d}} = \tilde{\underline{A}} \underline{x}.$$

Ponieważ elementy macierzy  $\tilde{\underline{A}}$  mają rozkład normalny, a składowe wektora  $\underline{x}$  są wielkościami deterministycznymi, zatem elementy wektora  $\tilde{\underline{d}}$  mają również rozkład normalny o następujących parametrach:

$$/2.5/ \quad \bar{d}_i = \sum_{\alpha=1}^n \bar{A}_{i\alpha} x_{\alpha},$$



$$/2.6/ \quad \mathcal{D}_i = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n x_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^i x_{\beta},$$

gdzie

$$/2.7/ \quad \underline{\mathcal{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{i_1} & , & \text{cov}(\tilde{A}_{i_1}, \tilde{A}_{i_2}), \dots, \text{cov}(\tilde{A}_{i_1}, \tilde{A}_{i_n}) \\ \text{cov}(\tilde{A}_{i_2}, \tilde{A}_{i_1}), & \mathcal{F}_{i_2} & , \dots, \text{cov}(\tilde{A}_{i_2}, \tilde{A}_{i_n}) \\ \vdots & & & & \\ \text{cov}(\tilde{A}_{i_n}, \tilde{A}_{i_1}), & \text{cov}(\tilde{A}_{i_n}, \tilde{A}_{i_2}), \dots, & & & \mathcal{F}_{i_n} \end{bmatrix}$$

jest 1-tą kowariancją macierzy  $\tilde{\underline{\mathcal{A}}}$ .

Za pomocą wektora  $\tilde{\underline{d}}$  układ ograniczeń problemu /2.3/ można zapisać następująco:

$$/2.8/ \quad \text{Prob} [\tilde{\underline{d}} \leq \underline{b}] \geq \underline{\gamma}$$

Wielkości losowe standaryzujemy:

$$/2.9/ \quad \text{Prob} [\tilde{d}_i \leq b_i] = \text{Prob} \left[ \frac{\tilde{d}_i - \bar{d}_i}{\sqrt{\mathcal{D}_i}} \leq \frac{b_i - \bar{d}_i}{\sqrt{\mathcal{D}_i}} \right]$$

gdzie  $(\tilde{d}_i - \bar{d}_i) / \sqrt{\mathcal{D}_i}$  jest nową zmienną standaryzowaną o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji. Korzystając z /2.9/ prawdopodobieństwo realizacji warunku  $\tilde{d}_i \leq b_i$  można zapisać następująco:

$$/2.10/ \quad \text{Prob} (\tilde{d}_i \leq b_i) = \Phi \left( \frac{b_i - \bar{d}_i}{\sqrt{\mathcal{D}_i}} \right)$$

gdzie  $\Phi(\beta_i)$  jest funkcją rozkładu zmiennej standaryzowanej w punkcie  $\beta_i$ , czyli tzw. funkcją Laplace'a.

Oznaczmy przez  $\beta_i$  wartość zmiennej standaryzowanej, dla

której

$$/2.11/ \quad \phi(\beta_i) = \gamma_i.$$

Wówczas warunek /2.8/ można zapisać tak:

$$/2.12/ \quad \phi\left(\frac{\underline{b} - \underline{d}}{\sqrt{\underline{D}}}\right) \geq \phi(\underline{\beta}).$$

Nierówność /2.12/ zostanie spełniona tylko wtedy, gdy

$$/2.13/ \quad \frac{\underline{b} - \underline{d}}{\sqrt{\underline{D}}} \geq \underline{\beta},$$

czyli

$$/2.14/ \quad \underline{A}\underline{x} + \underline{\beta} \sqrt{\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}} \leq \underline{b},$$

gdzie  $\underline{\beta}$  spełnia warunek /2.11/.

Sprowadziliśmy zatem stochastyczny warunek Prob  $[\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}] \geq \gamma$  do warunku deterministycznego /2.14/. W przypadku, gdy elementy macierzy  $\underline{A}$  są statystycznie niezależne, uzyskujemy prostsze warunki ze względu na zerowanie się kowariancji zmiennych losowych.

2.2.2 . Zmiennymi losowymi są jedynie elementy wektora  $\underline{b}$ .

Oznaczmy przez  $\bar{b}$ ,  $\underline{\beta}$  znane parametry rozkładu normalnego wektora  $\underline{b}$ . Zmienną losową występującą w nierówności wyjściowej Prob  $[\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}] \geq \gamma$  standaryzujemy analogicznie jak w 2.2.1 . Ostatecznie rozważamy warunek przyjmie postać następującą:

$$/2.15/ \quad \phi\left[\frac{\underline{A}\underline{x} - \bar{b}}{\sqrt{\underline{D}}}\right] \leq \phi(\underline{\beta}),$$

gdzie funkcja Laplace'a dla danego poziomu niezawodności  $\gamma_i$



$$/2.16/ \quad \phi(\beta_i) = 1 - \gamma_i$$

Nierówność /2.15/ zostanie spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$/2.17/ \quad \underline{Ax} \leq \underline{b} + \beta \sqrt{\underline{B}}$$

Tak więc stochastyczny warunek Prob  $[\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}] \geq \gamma$  zastąpiony został deterministyczną nierównością liniową /2.17/.

2.2.3 . Zmiennymi losowymi są macierze  $\tilde{\underline{A}}$  i  $\tilde{\underline{b}}$ .

Wprowadźmy wektor  $\tilde{\underline{h}}$  zdefiniowany następująco:

$$/2.18/ \quad \tilde{\underline{h}} = \tilde{\underline{A}}' \underline{x}'$$

gdzie:

$$\tilde{\underline{A}}' = [\tilde{\underline{A}}, -\tilde{\underline{b}}]$$

$$\underline{x}'^T = [\underline{x}^T, 1]$$

Wektor  $\tilde{\underline{h}}$  jest wektorem losowym o rozkładzie normalnym, ponieważ jest on liniową kombinacją zmiennych o takim rozkładzie. Niech  $\bar{h}_i$ ,  $\mathcal{H}_i$  będą odpowiednio wartością oczekiwaną oraz wariancją elementu  $\tilde{h}_i$ , wówczas

$$/2.19/ \quad \bar{h}_i = \sum_{\alpha=1}^n \bar{A}_{i\alpha} x_{\alpha} - \bar{b}_i,$$

$$/2.20/ \quad \mathcal{H}_i = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{\beta=1}^{n+1} x'_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{ii} x'_{\beta}$$

gdzie:

$$/2.21/ \quad \underline{\mathcal{A}}^{ii} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{i1}^{ii} & , & \text{cov}(\tilde{A}_{i1}^{\prime}, \tilde{A}_{i2}^{\prime}) & , \dots , & \text{cov}(\tilde{A}_{i1}^{\prime}, \tilde{A}_{i,n+1}^{\prime}) \\ \text{cov}(\tilde{A}_{i2}^{\prime}, \tilde{A}_{i1}^{\prime}) & , & \mathcal{A}_{i2}^{ii} & , \dots , & \text{cov}(\tilde{A}_{i2}^{\prime}, \tilde{A}_{i,n+1}^{\prime}) \\ \vdots & & & & \\ \text{cov}(\tilde{A}_{i,n+1}^{\prime}, \tilde{A}_{i1}^{\prime}) & , & \text{cov}(\tilde{A}_{i,n+1}^{\prime}, \tilde{A}_{i2}^{\prime}) & , \dots , & \mathcal{A}_{i,n+1}^{ii} \end{bmatrix}$$

jest 1-tą kowariancją macierzy  $\tilde{A}$ .

Po dokonaniu przekształceń analogicznych do przekształceń w poprzednich punktach, ograniczenie  $\text{Prob}[\bar{A} \underline{x} \leq \tilde{\underline{b}}] \geq \underline{\gamma}$  można sprowadzić do warunku deterministycznego

$$/2.22/ \quad \bar{h} + \beta \sqrt{\underline{d}} \leq 0.$$

Zauważmy, że jest to warunek nieliniowy ze względu na pierwiastkowanie zmiennych.

W przypadku niezależności statystycznej zmiennych losowych  $\tilde{A}_{ij}$  warunek /2.22/ redukuje się do prostszej postaci.

### 2.3. Przypadek losowej funkcji celu

W 2.2 poszukiwaliśmy maksymalnej wartości funkcji celu przy losowych ograniczeniach. Obecnie zajmiemy się zagadnieniem niejako odwrotnym: wyznaczaniem maksimum funkcji o losowych współczynnikach  $\tilde{\underline{c}}$  przy deterministycznych ograniczeniach. Jak poprzednio przyjmiemy założenie, że rozkład wielkości losowych jest normalny.

Niech  $\bar{c}$ ,  $\underline{C}$  będą odpowiednio wartością oczekiwaną i kowariancją wektora losowego  $\tilde{\underline{c}}$ .

Oznaczmy

$$/2.23/ \quad \tilde{f} = \tilde{\underline{c}}^T \underline{X}$$

Wielkość  $\tilde{f}$  jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, ponieważ jest kombinacją losową zmiennych o tym rozkładzie. Wartość oczekiwana i wariancja nowej zmiennej są odpowiednio równa:

$$/2.24/ \quad \bar{f} = \bar{c}^T \underline{X},$$

$$/2.25/ \quad \underline{f} = \underline{X}^T \underline{C} \underline{X},$$

gdzie:



$$/2.26/ \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & , & \text{cov}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) & , \dots & , & \text{cov}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_n) \\ \text{cov}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) & , & \mathcal{L}_2 & & , \dots & , & \text{cov}(\tilde{c}_2, \tilde{c}_n) \\ \vdots & & & & & & \\ \text{cov}(\tilde{c}_n, \tilde{c}_1) & , & \text{cov}(\tilde{c}_n, \tilde{c}_2) & , \dots & , & & \mathcal{L}_n \end{bmatrix}$$

jest kowariancją wektora  $\tilde{c}$ .

Wprowadźmy nową deterministyczną funkcję

$$/2.27/ \quad F(\underline{x}) = l_1 \bar{f} - l_2 \mathcal{F}.$$

Współczynniki wagowe  $l_1 \geq 0$ ,  $l_2 \geq 0$  wskazują na znaczenie, jakie przypisujemy wartości oczekiwanej funkcji celu problemu  $\bar{f}$  lub jej wariancji  $\mathcal{F}$ . Jeśli zastąpimy funkcję celu modelu /2.1/ funkcją /2.27/, to zagadnienie programowania stochastycznego przyjmie postać następującą:

$$/2.28/ \quad \max \{ l_1 \bar{c}\underline{x} - l_2 \underline{x}^T \underline{C} \underline{x} \mid \underline{A}\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \}$$

W ten sposób stochastyczna funkcja celu została sprowadzona do funkcji deterministycznej, a całe zagadnienie do deterministycznego programowania.

Rozważmy możliwe przypadki szczególne. Współczynnik  $l_2 = 0$  wskazuje, że maksymalizacji podlega wartość oczekiwana  $\bar{f}$  bez uwzględnienia wariancji. Otrzymany układ jest deterministycznym zadaniem programowania liniowego:

$$/2.29/ \quad \max \{ \bar{c}^T \underline{x} \mid \underline{A}\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \}$$

Takie maksymalizowanie wartości oczekiwanej funkcji celu jest uzasadnione w przypadku wielokrotnego podejmowania decyzji opisanych modelem /2.1/. Zgodnie z prawem wielkich liczb przeciętna wartość funkcji celu uzyskana z wielu decyzji będzie dążyć do wartości otrzymanej z rozwiązania problemu /2.29/.

W przypadku decyzji podejmowanych jednokrotnie opisane podejście jest błędne. Może się bowiem okazać, że dla rozwiązania optymalnego  $\underline{x}^*$  problemu /2.28/ faktyczna wartość funkcji celu  $\underline{c} \underline{x}^*$  będąca realizacją zmiennej losowej  $\tilde{c}$ , znacznie odbiega od wartości oczekiwanej  $\bar{c} \underline{x}^*$ .

Trafniejszy jest więc wybór innego rozwiązania dopuszczalnego  $\underline{x}^0$ , dla którego wartość oczekiwana funkcji celu  $\bar{c} \underline{x}^0$  jest wprawdzie mniejsza od  $\bar{c} \underline{x}^*$ , lecz jednocześnie ryzyko osiągnięcia zbyt małej wartości funkcji celu jest mniejsze, niż dla rozwiązania  $\underline{x}^*$ . Jako miarę ryzyka przyjmuje się wielkość wariancji funkcji celu  $\tilde{F}$ . Mniejsza wariancja zmiennej losowej oznacza na ogół większe prawdopodobieństwo, że zmieniana ta jest skupiona, tzn. pociąga za sobą mniejsze ryzyko.

Powyższe rozumowanie oddaje przypadek, gdy współczynnik  $l_1 = 0$ . Jest to wówczas zadanie programowania kwadratowego

$$/2.30/ \quad \min \left\{ \underline{x}^T \underline{C} \underline{x} \mid \bar{c} \underline{x} \geq f^*, \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \right\}$$

gdzie  $f^*$  jest oczekiwaną wartością funkcji celu, jaką można zaakceptować. Dodatkowy warunek  $\bar{c} \underline{x} \geq f^*$  chroni przed uzyskaniem rozwiązania trywialnego  $\underline{x} = \underline{0}$ .

Przypadki szczególowe /2.29/, /2.30/ układu /2.28/ wskazują na strategię postępowania w zależności od wielokrotności decyzji oraz skłonności do ryzyka /większe  $l_2$  w stosunku do  $l_1$  odpowiada większej niechęci do ponoszenia ryzyka/. Kwestie te omówione są szeroko w książce Sadowskiego [29]. Jeżeli elementy wektora losowego  $\tilde{c}$  są statystycznie niezależne, wówczas  $\text{cov}(\tilde{c}_i, c_j) = 0$  dla  $i \neq j$  i układ /2.28/ znacznie się upraszcza.

#### 2.4. Problem niezawodności

Dotychczas stochastyczne programowanie liniowe /2.1/ było traktowane jako matematyczne narzędzie do opisu układu, w którym każdemu elementowi składowemu odpowiada probabilistyczne ograniczenie. Narzucone niezawodności poszczególnych elementów określały niezawodność całego systemu. Obecnie rozważmy problem oszacowania maksymalnej niezawodności takiego systemu.



Tak sformułowane zadanie można przedstawić następująco:

$$/2.31/ \quad \max \left\{ \underline{a}^T \underline{y} \mid \text{Prob} [\tilde{\underline{A}} \underline{x} \leq \tilde{\underline{b}}] \geq \underline{\gamma}, \right. \\ \left. \text{Prob} [\tilde{\underline{c}}^T \underline{x} \geq f^*] \geq \underline{\nu}^*, \underline{x} \geq \underline{0} \right\},$$

gdzie:  $\underline{a}$  - deterministyczny wektor wag,  $\underline{\gamma}$  prawdopodobieństwa spełnienia ograniczeń,  $f^*$  - akceptowany poziom funkcji celu modelu /2.1/,  $\underline{\nu}^*$  prawdopodobieństwo uzyskania  $f^*$ .

Rozpatrzmy przypadki, w których wielkościami losowymi są macierze  $\tilde{\underline{A}}$ ,  $\tilde{\underline{b}}$ ,  $\tilde{\underline{c}}$ , a następnie przypadek ogólny, w którym wszystkie trzy macierze są zmiennymi losowymi. Zakładamy przy tym jak poprzednio, że wielkości losowe mają rozkład normalny, którego parametry są znane.

2.4.1 . Zmiennymi losowymi są jedynie elementy wektora  $\tilde{\underline{c}}$ .

Ograniczenie  $\text{Prob} [\tilde{\underline{c}}^T \underline{x} \geq f^*] \geq \underline{\nu}^*$  układu przekształcamy analogicznie jak w 2.2 korzystając z procedury standaryzowania zmiennej losowej oraz funkcji Laplace'a. Otrzymana w ten sposób nierówność jest deterministyczna i ma następującą postać:

$$/2.32/ \quad \underline{\underline{c}}^T \underline{x} - \beta^* \sqrt{\underline{x}^T \underline{C} \underline{x}} \geq f^*$$

Losowe ograniczenie wyjściowe zastąpione zostało nieliniową deterministyczną nierównością /2.32/.

2.4.2 . Zmiennymi losowymi są jedynie elementy macierzy  $\tilde{\underline{A}}$ .

W tym przypadku stochastyczny układ /2.31/ może zostać sprowadzony do następującego modelu deterministycznego

$$/2.33/ \quad \max \left\{ \underline{a}^T \underline{\phi}(\underline{\beta}) \mid \Phi \left( \frac{\underline{b} - \underline{d}}{\sqrt{\underline{D}}} \right) \geq \Phi(\underline{\beta}), \underline{x} \geq \underline{0} \right\},$$

gdzie  $\underline{d}$ ,  $\underline{D}$ ,  $\underline{\phi}(\underline{\beta})$  - wielkości zdefiniowane w 2.2 .

Jeżeli wektor  $\tilde{c}$  jest również losowy to do modelu /2.33/ dołączamy dodatkowe ograniczenie /2.32/. Funkcja celu  $\underline{a}^T \phi(\underline{\beta})$  oszacowuje niezawodność układu opisanego modelem /2.1/.  $\phi(\underline{\beta})$  jest optymalizowanym prawdopodobieństwem spełnienia ograniczeń, natomiast wektor, wag  $\underline{a}$  określa strukturę rozważanego układu. Model /2.33/ jest równoważny następującemu układowi deterministycznemu z liniową funkcją celu i nieliniowymi ograniczeniami:

$$/2.34/ \quad \max \{ \underline{a}^T \underline{\beta} \mid \underline{A} \underline{x} + \underline{\beta} \sqrt{\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \}$$

Zmiennymi decyzyjnymi są tu wektory  $\underline{x}$ ,  $\underline{\beta}$ , natomiast macierze  $\underline{a}$ ,  $\underline{A}$ ,  $\underline{A}$ ,  $\underline{b}$  są dane.

2.4.3. Zmianymi losowymi są jedynie elementy wektora  $\underline{\beta}$ .

Dla tak postawionego problemu stochastyczny układ /2.31/ można sprowadzić do następującego modelu deterministycznego:

$$/2.35/ \quad \min \{ \underline{a}^T \phi(\underline{\beta}) \mid \phi\left(\frac{\underline{A} \underline{x} - \underline{b}}{\sqrt{\underline{B}}}\right) \leq \phi(\underline{\beta}), \underline{x} \geq \underline{0} \}$$

gdzie

$$/2.36/ \quad \phi(\beta_i) = 1 - \gamma_i$$

Model /2.35/, podobnie jak poprzednio, określa niezawodność układu opisanego przez /2.1/.  $\phi(\underline{\beta})$  jest ryzykiem przekroczenia ograniczeń, natomiast wektor wag  $\underline{a}$  określa strukturę rozważanego układu. Model /2.35/ jest równoważny następującemu zadaniu programowania liniowego:

$$/2.37/ \quad \max \{ \underline{a}^T \underline{\beta} \mid \underline{A} \underline{x} + \underline{\beta} \sqrt{\underline{B}} \leq \underline{\bar{b}}, \underline{x} \geq \underline{0} \}.$$

Zmiennymi decyzyjnymi są tu wektory  $\underline{x}$ ,  $\underline{\beta}$ . Macierze  $\underline{a}$ ,  $\underline{A}$ ,  $\underline{\bar{b}}$ ,  $\underline{B}$  są dane.



2.4.4. Zmiennymi losowymi są elementy macierzy  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{c}$ .

Łącząc przypadki poprzednie oraz korzystając z oznaczeń wprowadzonych w 2.2 otrzymamy deterministyczny układ równań-ny modelowi stochastycznemu /2.31/

$$\begin{aligned} /2.38/ \quad \max \left\{ \underline{a}^T \beta \mid \bar{h} + \beta \sqrt{H} \leq \underline{Q}, \right. \\ \left. \bar{c}^T x - \beta^* \sqrt{x^T C x} \geq f^*, x \geq \underline{Q} \right\} \end{aligned}$$

Model /2.38/ jest silnie nieliniowy. Ulegnie on uproszczeniu jedynie w przypadku statystycznie niezależnych elementów losowych.

3. Nośność graniczna konstrukcji z uwzględnieniem czynników losowych.

3.1. Matematyczny model problemu

W rozdziale 1 pokazano, że zagadnienia nośności granicznej w ujęciu deterministycznym sprowadzają się do problemów programowania liniowego. Jak wiadomo, w rzeczywistych konstrukcjach mamy zwykle do czynienia z wielkościami losowymi. Należą do nich obciążenia działające na konstrukcję, cechy wytrzymałościowe materiału oraz wymiary układu.

Z praktyki wiadomo, że intensywność obciążenia i własności materiału mogą mieć wartości znacznie bardziej odbiegające od średniej, niż wartości wymiarów geometrycznych. Stąd w dalszych rozważaniach wymiary konstrukcji będziemy uważali za wielkości deterministyczne.

Założmy zatem, że wektory  $\tilde{p}$  i  $\tilde{k}$  zawierają zmienne losowe. Porównując modele /1.7/ i /2.1/ widzimy, że w przypadku losowych  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{k}$  zagadnienie granicznego mnożnika obciążeń możemy opisać za pomocą modelu programowania stochastycznego. Wówczas odpowiednikiem deterministycznego zadania /1.6/ jest następujący problem:

$$/3.1/ \quad \max \{ \mu \mid \underline{D} \underline{\tilde{p}}_0 + \underline{B} \underline{z} \leq \underline{\tilde{k}} \},$$

gdzie:  $\underline{D} = \underline{N}^T \underline{C}^{-T} \quad \underline{B} = \underline{N}^T \underline{C}^T.$

Stosując metodę ograniczeń losowych można to zagadnienie sprowadzić do równoważnej postaci deterministycznej. Otrzymany w ten sposób wynik będzie mnożnikiem obciążenia granicznego przy założonym prawdopodobieństwie statycznej dopuszczalności naprężeń. Możliwe są przy tym następujące przypadki szczególne /w nawiasach podane są numery wzorów z p. 2.2 definiujących deterministyczny problem zastępczy/:

a/ Zmiennymi losowymi są jedynie moduły plastyczne konstrukcji  $\underline{\tilde{k}}$  /wzór 2.17/

$$/3.2/ \quad \max \{ \mu \mid \underline{D} \underline{p}_0 + \underline{B} \underline{z} \leq \underline{\bar{k}} + \beta \sqrt{\text{diag}(\underline{\mathcal{K}})} \}$$

b/ Zmienną losową jest jedynie obciążenie odniesienia  $\underline{\tilde{p}}_0$  /wzór 2.14/

$$/3.3/ \quad \max \{ \mu \mid \underline{D} \underline{\tilde{p}}_0 + \underline{B} \underline{z} + \mu \beta \sqrt{\text{diag}(\underline{d}_i \underline{P} \underline{d}_i^T)} \leq \underline{\bar{k}} \}$$

gdzie  $\underline{d}_i$  - jest i-tym wierszem macierzy  $\underline{D}$ .

c/ Zmiennymi losowymi są jednocześnie wektory  $\underline{\tilde{k}}$  i  $\underline{\tilde{p}}_0$  /wzór 2.22/

$$/3.4/ \quad \max \{ \mu \mid \underline{D} \underline{\tilde{p}}_0 + \underline{B} \underline{z} + \beta \sqrt{\mu^2 \text{diag}(\underline{d}_i \underline{P} \underline{d}_i^T) + \text{diag}(\underline{\mathcal{K}})} \leq \underline{\bar{k}} \}$$

Modele /3.2/, /3.3/, /3.4/ różnią się od modelu wyjściowego /1.7/ zmodyfikowanym warunkiem płynięcia. Zarówno w przypadku losowości modułów plastycznych jak i losowości obciążenia obszar dopuszczalnych naprężeń zmniejsza się. Redukcja ta



jest tym większa, im żądamy większej pewności nieprzekroczenia warunków dopuszczalności naprężeń /czyli im większa jest wartość  $\beta_i$  /. Niewiadomymi parametrów /3.2/ + /3.4/ są uogólnione naprężenia  $\underline{s}$  i mnożnik obciążenia  $\mu$  . Natomiast danymi są macierze dyskretnego modelu  $\underline{C}$  i  $\underline{N}$ , charakterystyki losowe  $\underline{k}$ ,  $\underline{X}$  ,  $\underline{p}_0$ ,  $\underline{P}$  oraz wektor współczynników niezawodności  $\underline{\beta}$  .

### 3.2. Nośność graniczna ramy dwunawowej

Przykład, który zostanie przedstawiony w/3.2/ pokazuje zależność mnożnika nośności granicznej od narzuconego poziomu niezawodności.

Rozważono dwunawową ramę /rys.1/ wykonaną z dwuteownika I 200 PE. Założono losową wartość modułu plastycznego kształtownika z następującymi charakterystycznymi wartościami: wartością średnią  $\bar{M}_0 = 5390$  kNm i odchyleniem standardowym  $\sigma_M = 428.0$ . Wykorzystując model /3.2/ uzyskano rezultaty przedstawione na rys.2. Łatwo zauważyć, że wyższy poziom niezawodności pociąga za sobą niższą nośność graniczną.

Te same zadanie rozwiązano również dla losowej siły  $\bar{p}_0 = 1$ ,  $\sigma_p = 0.2$ . Wyniki pokazane na rys.2 są jakościowo zgodne z rezultatami z poprzedniego przykładu, ilościowo natomiast są znacznie niższe. Należy to tłumaczyć większym wpływem losowości obciążenia ma nośność graniczną oraz przyjętym jego stosunkowo dużym rozrzutem. Wydaje się, że jest to zgodne z praktyką, gdyż o ile odchylenie standardowe własności materiałowych kształtownika wykonanego w hucie jest niewielkie o tyle odchylenie standardowe obciążenia może być znacznie większe.

Dla porównania na rys.2 oznaczono linią przerywaną nośność graniczną uzyskaną według modelu deterministycznego/1.7/ dla średnich wartości momentów plastycznych i obciążenia. Rysunki 3 i 4 ukazują natomiast mechanizm zniszczenia i odpowiadający mu rozkład momentów zginających.

### 3.3. Nośność graniczna ramy dwupiętrowej

Rozważmy teraz dwupiętrową ramę pokazaną na rys.5. Założono, że konstrukcję wykonano z tego samego materiału jak w przykładzie 3.2. Pomijając losowy charakter modułu plastycznego otrzymano współczynnik nośności granicznej  $\mu^* = 8085.0$ . Z drugiej strony  $\mu^* = 7024.5$  dla poziomu niezawodności 0.95 w każdym przekroju granicznym. Zatem uwzględnienie losowości zmniejsza nośność graniczną w tym przypadku o 13%. Rysunki 6 i 7 pokazują mechanizm zniszczenia i odpowiadający mu rozkład momentów zginających.

## 4. Optymalizacja plastyczna z uwzględnieniem warunków losowych

### 4.1. Proponowana metoda obliczeń

W poprzednim rozdziale omówiono stochastyczne odpowiedniki problemu wyznaczenia granicznego mnożnika obciążenia. Teraz omówiony zostanie problem optymalizacji konstrukcji, czyli wyznaczenia optymalnego rozkładu modułów plastycznych przy założonym prawdopodobieństwie statystycznej dopuszczalności naprężeń.

Niech zatem wektory  $\tilde{p}^*$ ,  $\tilde{k}$  zawierają zmienne losowe. Wówczas odpowiednikiem deterministycznego modelu /1.11/<sub>1</sub> jest problem

$$/4.1/ \quad \min \{ a^T \tilde{c} \mid G \tilde{c} - Bz \geq D \tilde{p}^*, \tilde{c} \geq 0 \}.$$

Stosując metody opisane w p. 2.2 i p. 2.3 możemy to zagadnienie sprowadzić do postaci deterministycznej. Możliwe są przy tym następujące przypadki szczególne:

a/ Zmienną losową jest jedynie obciążenie  $\tilde{p}^*$

Zmienność obciążenia konstrukcji jest w naszych rozważaniach jednoparametrowa

$$/4.2/ \quad \tilde{p}^* = \mu^* \tilde{p}_0.$$



Współczynnik bezpieczeństwa względem zniszczenia plastycznego  $\mu^*$  jest ustalony i stanowi wielkość deterministyczną. Natomiast obciążenie odniesienia  $\tilde{p}_0$  może być losowe. Przy ustalonym  $\mu^*$  przejście z wielkości losowych  $\tilde{p}_0$  do  $\tilde{p}^*$  jest natychmiastowe. Na podstawie wzorów /4.1/ oraz /2.14/ i /2.17/ optymalny rozkład modułów plastycznych w konstrukcji w przypadku losowego obciążenia wyznacza układ:

$$/4.3/ \min \{ \underline{a}^T \underline{c} \mid \underline{G} \underline{c} - \underline{B} \underline{z} \geq \underline{D} \tilde{p}^* + \beta \sqrt{\text{diag}(d_i, p d_i^T)}, \underline{c} \geq \underline{0} \}.$$

b/ Zmiennymi losowymi są jedynie moduły plastyczne  $\underline{k}$ .

W tym przypadku poszukiwany będzie optymalny rozkład średnich wartości modułów plastycznych, których wariancja jest znana. Podobnie sformułowane zadanie optymalizacji konstrukcji rozważane było przez Frangopola i Rondala [10] i wydaje się, że tak postawiony problem jest przydatny w zastosowaniach praktycznych. Korzystając z wzorów /2.17/ i /2.28/ zadanie /4.1/ można przekształcić w tym przypadku do postaci

$$/4.4/ \min \{ \underline{a}^T \underline{c} \mid \underline{G} \underline{c} - \underline{B} \underline{z} \geq \underline{D} \tilde{p}^* + \beta \sqrt{\text{diag}(-\underline{C})}, \underline{c} \geq \underline{0} \}.$$

c/ Zmiennymi losowymi są jednocześnie wektory  $\tilde{p}^*$  i  $\underline{k}$ .

Łącząc przypadki a/ i b/ uzyskano /wzór 2.21 /:

$$/4.5/ \min \{ \underline{a}^T \underline{c} \mid \underline{G} \underline{c} - \underline{B} \underline{z} \geq \underline{D} \tilde{p}^* + \sqrt{\text{diag}(\underline{C}) + \text{diag}(d_i, p d_i^T)}, \underline{c} \geq \underline{0} \}.$$

Zauważmy, że podobnie jak w rozdziale 3, tak i w zadaniu optymalizacji konstrukcji uwzględnienie losowości pociąga za sobą zmianę obszaru dopuszczalnych naprężeń. Niewiadomymi problemów /4.3/ + /4.5/ są uogólnione naprężenia  $\underline{s}$  i moduły plastyczne  $\underline{c}$  lub ich wartości średnie  $\underline{c}$ . Natomiast danymi są ma-

cierze modelu dyskretnego  $\underline{C}$  i  $\underline{N}$ , charakterystyki losowe  $\underline{p}^*$ ,  $\underline{P}$ ,  $\underline{L}$  oraz wektor współczynników niezawodności  $\underline{\beta}$ .

#### 4.2. Optymalizacja ramy portalowej

W przykładzie tym omówione będzie optymalne projektowanie ramy portalowej /rys.8/. Założono deterministyczne siły zewnętrzne  $V = H = 100.0$  kNm. Zmiennymi decyzyjnymi są wartości średnie momentów plastycznych ryglu  $\bar{M}_b$  i kolumn  $\bar{M}_c$ , przy czym ich współczynnik zmienności  $\xi_3 = 0.10$  jest znany. Minimalizujemy liniową funkcję momentów plastycznych

$$/4.8/ \quad f = \bar{M}_c + \bar{M}_b,$$

co odpowiada przypadkowi, w którym funkcja celu jest proporcjonalna do wielkości  $2(\bar{M}_c + \bar{M}_b)a$ .

Wyniki  $\bar{M}_c^*$ ,  $\bar{M}_b^*$  otrzymane wg modelu /4.4/ przedstawiają rysunki 9 i 10. Jak łatwo zauważyć, wyższy poziom niezawodności pociąga za sobą wyższy koszt konstrukcji. Momenty plastyczne uzyskane na drodze czysto deterministycznej /1.11/, tj. dla średniej wartości zmiennych losowych, pokazuje linia przerywana.

### 5. Zagadnienie niezawodności konstrukcji

#### 5.1. Matematyczny model problemu

Przedmiotem tej części pracy jest zastosowanie programowania stochastycznego do wyznaczania dolnej granicy niezawodności konstrukcji. Znane są w tym przypadku charakterystyki losowe zarówno modułów plastycznych  $\underline{k}^*$ ,  $\underline{K}$  jak i obciążenia  $\underline{p}^*$ ,  $\underline{P}$ .

Za Ditlevsenem, ... [30] wprowadzimy pojęcie marginesu bezpieczeństwa dla poszczególnych przekrojów krytycznych. W zapisie macierzowym margines ten określa wektor:

$$/5.1/ \quad \underline{m} = \underline{k} - \underline{N}^T \underline{s}$$



Warunkiem dopuszczalności stanu naprężeń w całej konstrukcji jest  $\underline{m} \geq 0$ . Naprężenia i obciążenia muszą spełniać przy tym równania równowagi /1.3/. Oznaczmy prawdopodobieństwo zniszczenia  $i$ -tego przekroju ze względu na losowość przez  $\text{Prob}[m_i < 0]$ . Prawdopodobieństwo plastycznego zniszczenia całej konstrukcji można oszacować od góry następująco:

$$/5.2/ \quad \gamma_f \leq \sum_{i=1}^{r+1} \text{Prob}(m_i < 0)$$

Strategia wyboru najlepszego oszacowania polega wg. Ditlevsena na minimalizacji największego z prawdopodobieństw  $P(m_i < 0)$ . Albo też alternatywnie, wykorzystując funkcję Laplace'a

$$/5.3/ \quad \text{Prob}[m_i < 0] = \Phi(-\beta_i)$$

gdzie  $\beta_i = \bar{m}_i / \sqrt{M_i}$  indeks niezawodności.

Problem ten można sprowadzić do zagadnienia maksymalizacji najmniejszego z indeksów  $\beta_i$ . Proponowany przez Ditlevsena algorytm jest iteracyjnym poszukiwaniem pól samonaprężeń, maksymalizujących najmniejszy z indeksów  $\beta_i$  w każdym kroku, tak że w efekcie otrzymujemy najniższe górne oszacowanie nierówności /5.2/.

Wykorzystując aparat matematyczny opisany w p.1 można to samo zagadnienie rozwiązać bezpośrednio. Zadanie niezawodności konstrukcji można opisać następującym układem:

$$/5.4/ \quad \min \{ \underline{1}^T \underline{\gamma} \mid \underline{\gamma} \geq \text{Prob}(\underline{k}^* - \underline{Dp}^* - \underline{Bz} \leq \underline{0}) \}$$

Zadanie /5.4/ polega na wyznaczeniu takich prawdopodobieństw przekroczenia warunku dopuszczalności w poszczególnych przekrojach krytycznych, że ich suma stanowi dolną granicę prawdopodobieństwa zniszczenia całej konstrukcji. Stosując metody opisane w p. 2.4 można zagadnienie /5.4/ sprowadzić do postaci deterministycznej. Oto przypadki szczególne problemu:

a/ Zmiennymi losowymi są jedynie moduły plastyczne  $\underline{\underline{k}}^*$   
/wzór 2.36/

$$/5.5/ \quad \max \left\{ \frac{1}{\beta} \left| \underline{\underline{Bz}} + \beta \sqrt{\text{diag}(\underline{\underline{K}})} \right| \leq \underline{\underline{k}}^* - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{p}}^* \right\}.$$

b/ Zmiennymi losowymi jest jedynie obciążenie  $\underline{\underline{p}}^*$  /wzór 2.34/

$$/5.6/ \quad \max \left\{ \frac{1}{\beta} \left| \underline{\underline{Bz}} + \beta \sqrt{\text{diag}(d_i \underline{\underline{p}} d_i^T)} \right| \leq \underline{\underline{k}}^* - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{p}}^* \right\}.$$

c/ Zmiennymi losowymi są jednocześnie wektory  $\underline{\underline{p}}^*$  i  $\underline{\underline{k}}^*$  /wzór 2.37/

$$/5.7/ \quad \max \left\{ \frac{1}{\beta} \left| \underline{\underline{Bz}} + \beta \sqrt{\text{diag}(\underline{\underline{K}}) + \text{diag}(d_i \underline{\underline{p}} d_i^T)} \right| \leq \underline{\underline{k}}^* - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{p}}^* \right\}.$$

Należy podkreślić, że głównym celem tak postawionego zadania jest nie tylko oszacowanie niezawodności pewnej konstrukcji, lecz również możliwość porównania kilku różnych konstrukcji i wyboru najbezpieczniejszej.

## 5.2. Niezawodność ramy portalowej

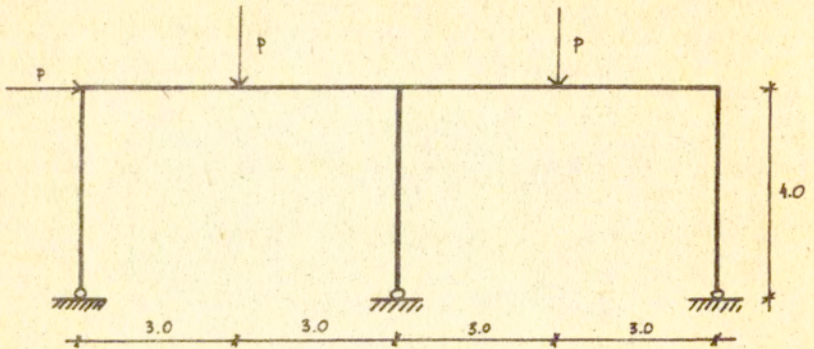
Dla ramy portalowej rozważanej poprzednio w przykładzie 4.2 należy wyznaczyć teraz jej całkowite niezawodności. Siły zewnętrzne są te same co poprzednio, wartości średnie momentów plastycznych  $\bar{M}_B = \bar{M}_C = 70.0 \text{ kNm}$ , natomiast współczynnik zmienności  $\xi = 0.20$ . Model /5.5/ prowadzi do górnego oszacowania współczynnika niezawodności  $\beta^* \geq 2.73$ , co wg /5.2/ odpowiada  $\gamma_f \leq 0.0027$ .



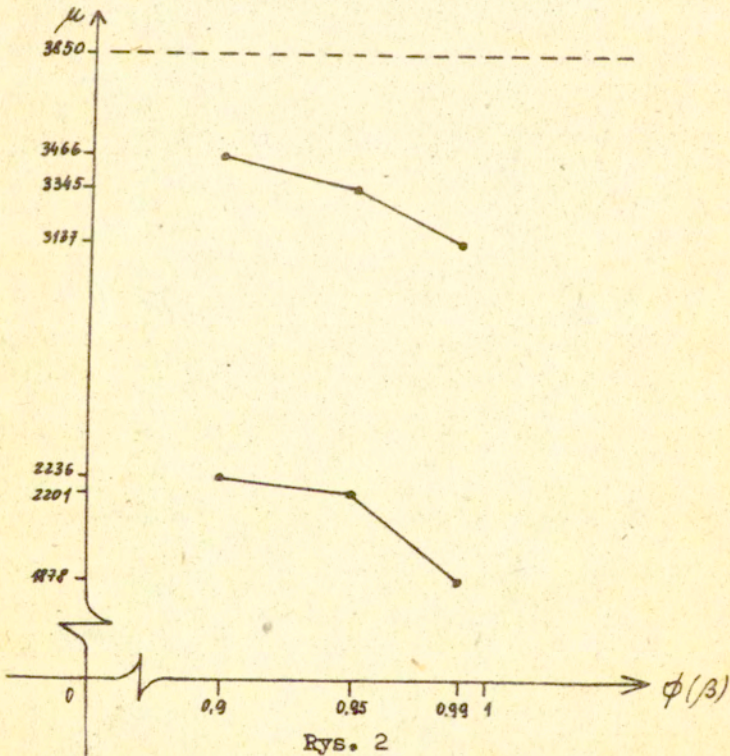
## Wnioski

Przedstawione w pracy metody analizy i optymalizacji konstrukcji opierają się na podejściu statycznym. Otrzymane rezultaty są więc w efekcie bezpieczne. Pokazano, że dla dyskretnego modelu konstrukcji rozważone przypadki sprowadzają się do odpowiednich deterministycznych liniowych i nieliniowych problemów programowania matematycznego. Analiza przeprowadzonych wyników pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków. Mnożnik nośności granicznej odpowiadający deterministycznemu rozwiązaniu dla średnich wartości zmiennych losowych w każdym przypadku przewyższa analogiczny mnożnik dla modelu uwzględniającego losowe momenty plastyczne i /lub losowe obciążenie. Różnica zależy od przyjętego poziomu niezawodności spełnienia warunków dopuszczalności naprężeń w przekrojach krytycznych oraz od charakterystycznych wartości rozkładów losowych. Wyniki pokazały też, że nośność graniczna jest bardziej wrażliwa na losowość sił niż momentów plastycznych.

W pracy zaproponowano również metodę wyznaczenia dolnej granicy współczynnika niezawodności całej konstrukcji, która - wydaje się - może znaleźć zastosowanie w praktyce przy porównywaniu różnych konstrukcji i wyborze najbezpieczniejszej.

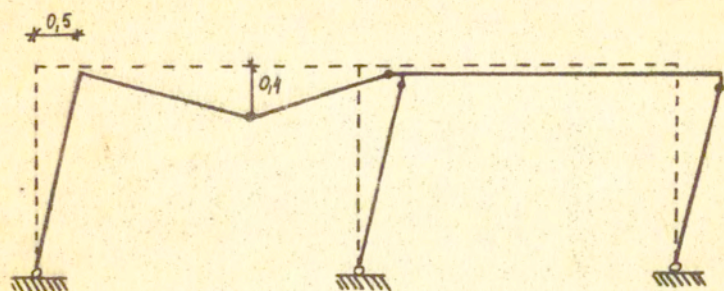


Rys. 1

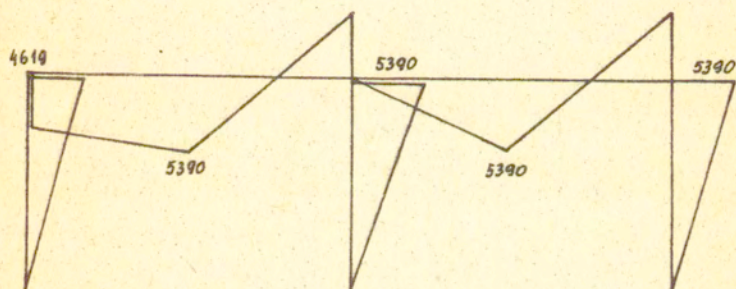


Rys. 2

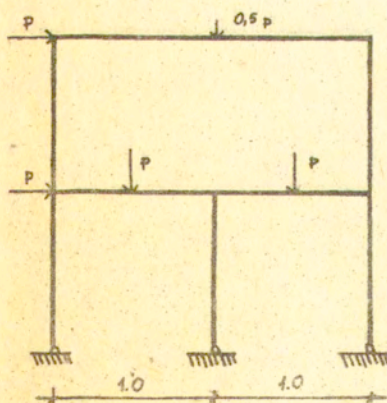




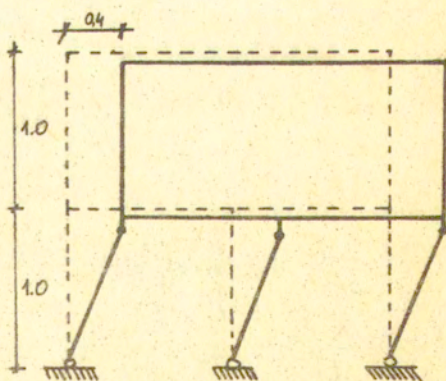
Rys. 3



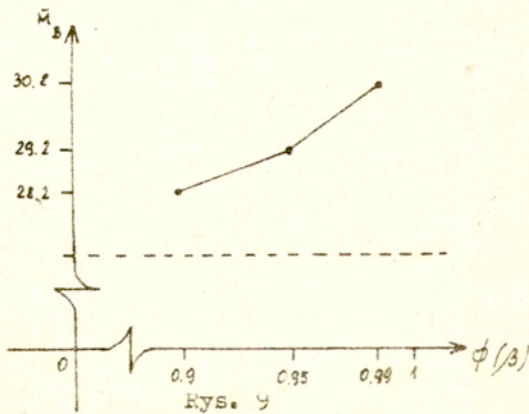
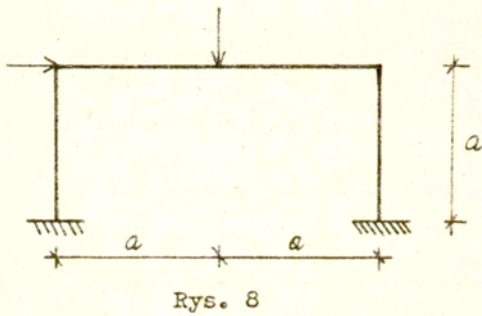
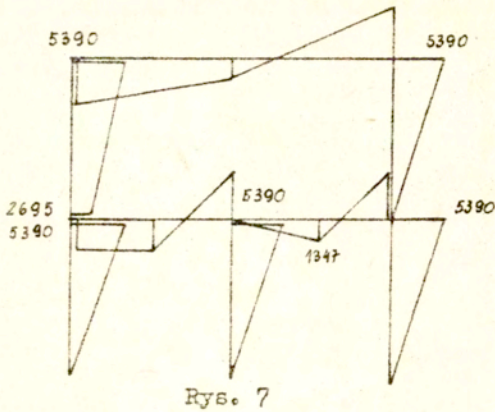
Rys. 4



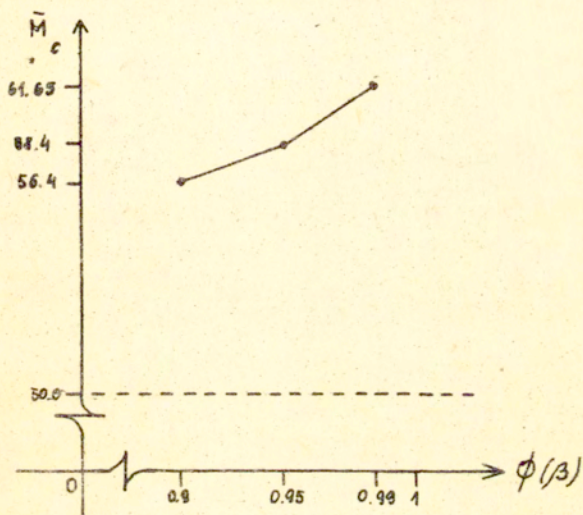
Rys. 5



Rys. 6







Rys. 10

Literatura

1. S.P. Timoshenko, Historia wytrzymałości materiałów, Arkady, Warszawa 1966.
2. J. Ferry - Borges, Checking safety at level 2, Joint Committee on Structural Safety, CEB Document IV-2.4, Lisboa 1973.
3. J. Murzewski, A. Sowa, Zarys teorii niezawodności konstrukcji, Skrypt Polit. Krakowskiej, Kraków 1983.
4. G. Augusti, A. Baratta, Theory of probability and limit analysis of structures under multi-parameter loading, Int. Symp. Foundations of Plasticity, 347 - 364, Warsaw 1972.
5. J. L. Jorgenson, J. E. Goldberg, Probability of plastic collapse failure, Journ. of Struc. Div. ASCE, ST8, 95, 1743 - 1761, 1969.
6. J. Stevenson, F. Moses, Reliability of frame structures, Journ. of Struc. Div. ASCE, ST8, 96, 2409 - 2427, 1970.
7. J.W. Davidson, L.P. Felton, G.G. Hart, Optimum design of structures with random parameters, Computers and Structures, 3, 7, 481 - 486, 1977.
8. S. Mau, R.G. Sexsmith, Minimum expected cost optimization, Journ. of Struc. Div. ASCE, 4, 10, 551 - 553, 1972.
9. F. Moses, Structural system reliability and optimization, Computers and Structures, 2, 7, 283 - 290, 1977.
10. D. Frangopol, J. Rondal, Optimum probability-based design of plastic structures, Eng. Opt., 1, 3, 17 - 25, 1977.
11. O. Ditlevsen, Narrow reliability of structural systems, Journ. of Struc. Mech., 4, 7, 453 - 472, 1979.
12. E.H. Vanmarke, Matrix formulation of reliability analysis and reliability-based design, Computers and Structures, 3, 757 - 770, 1977.
13. Y. Murotsu, M. Yonezawa, F. Oba, K. Niwa, Method for reliability analysis of structure, in: Advances in reliabi-



- lity and stress analysis, ed. S. Burns, ASME, 3 - 21, 1979.
14. A.H.S. Ang, H. F. Ma, On the reliability of structural systems, Proc. ICOSSAR'81, Trondheim, 295 - 301, 1981.
  15. V.B. Watwood, Mechanism generation for limit analysis of frames, Journ. of Struc. Div. ASCE, ST1, 109, 1979.
  16. M.R. Gorman, Automatic generation of collapse mode equation, Journ. of Struc. Div. ASCE, ST7, 107, 1350 - 1354 1981.
  17. C.W. Dunnet, M. Sobel, Approximations to the probability integral and certain percentage points of multivariate analogue of Student's t-distribution, Biometrika, 42, 258 - 260, 1955.
  18. Z. Sidak, On multivariate normal probabilities of rectangles, their dependence on correlations, Ann. Math. Statist., 39, 5, 1425 - 1434, 1968.
  19. R. Rackwitz, Close bounds for the reliability of structural systems, Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Tech. Univ. München, Heft 29, 1978.
  20. O. Klingmüller, Anwendung der Traglastberechnung für die Beurteilung der Sicherheit von Konstruktionen, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Gesamthochschule Essen, Heft 9, 1979.
  21. G. Maier, Metody programowania matematycznego w analizie konstrukcji sprężysto-plastycznych, Arch. Inż. Łąd., 21, 3, 387 - 411, 1975.
  22. A.A. Cyras, A.E. Borkauskas, R. P. Karkauskas, Teorija i metody optimizacii uprugo-plastycznych sistem, Stroizdat, Leningrad, 1974.
  23. S.S. Rao, Optimization, theory and applications, Wiley Eastern Limited, New Delhi 1978.
  24. J. K. Sengupta, Stochastic programming, methods and applications, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1972.

25. M.J.L. Kirby, The current state of chance-constrained programming, in: Proceedings of the Princeton Symp. on Math. Programming, ed. H.W. Kuhn, Princeton University Press, Princeton 1970.
26. V.V. Kolbin, Stochastic programming, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1977.
27. S. Vajda, Probabilistic programming, Academic Press 1972.
28. A. Charnes, W.W. Cooper, Chance constrained programming, Management Science, 6, 73 - 79, 1959.
29. W. Sadoweki, Decyzje i prognozy, PWE, Warszawa 1977.
30. O. Ditlevsen, P. Bjerager, Reliability of highly redundant plastic structures, DCALM Report No. 263, The Technical University of Denmark, 1983.