

4.43 — pręty, belki, układy prętowe,  
ciągna, dźwigary siatkowe

Katarzyna Cabańska

UPROSZCZONY MODEL  
PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO

18/1990

P. 269



WARSZAWA 1990

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 11 maja 1989 r.



56790



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd. 1,7 Ark.druk. 2,25

Oddano do drukarni w kwietniu 1990 r.

Nr zamówienia 162/90

---

Warszawa Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Katarzyna Cabańska  
Wyższa Szkoła Pedagogiczna  
Wydział Matematyki i Techniki

## UPROSZCZONY MODEL PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO

### Streszczenie

W pracy zaproponowano uproszczony model podłoża sprężystego. Modelem geometrycznym tego podłoża jest pasmo o szerokości  $b$ , grubości  $h$  i nieograniczonej długości. W pierwszej części pracy sformułowano, a następnie rozwiązano zagadnienie deformacji uproszczonego podłoża, które znajduje się pod wpływem obciążenia normalnego. W drugiej części pracy wyznaczono ugięcie belki posadowionej na uproszczonym podłożu i dowolnie obciążonej. Wyniki obliczeń porównano z wynikami modelu Własowa i Winklera.

### 1. Wstęp

Niektóre elementy konstrukcyjne posadowione są na podłożu sprężystym. Zjawisko wzajemnego oddziaływania podłoża i elementu konstrukcyjnego jest problemem ciągle nurtującym badaczy. Głównym aspektem zagadnienia jest deformacja podłoża sprężystego i, adekwatne do niej, odkształcenie współpracującego elementu. W procesie rozwoju tego zagadnienia stworzono szereg modeli podłoża sprężystego. Cechy podłoża rzeczywistego uwzględnia najlepiej model klasycznej półprzestrzeni sprężystej [1], [4], lecz ze względu na trudności matematyczne nie jest on powszechnie stosowany. Najprostszym i najczęściej stosowanym w praktyce jest model WINKLERA. Posiada on jednak szereg wad. Mianowicie nie uwzględnia budowy monolitycznej podłoża, a tym samym wyklucza wzajemne oddziaływanie na siebie sąsiednich cząsteczek, co powoduje, w niektórych przypadkach, przekroczenie dopuszczalnych

błędów. Pośrednia hipoteza WIEGHARDTA, np. [11], również nie w każdym przypadku daje zadawalające wyniki.

Znaczny postęp w teorii hipotez podłoża sprężystego można znaleźć w pracach WŁASOWA [10], PASTERNAKA [5], MURAWSKIEGO [3], ŚWITKI [9], RUTY i LANGERA [6], [7].

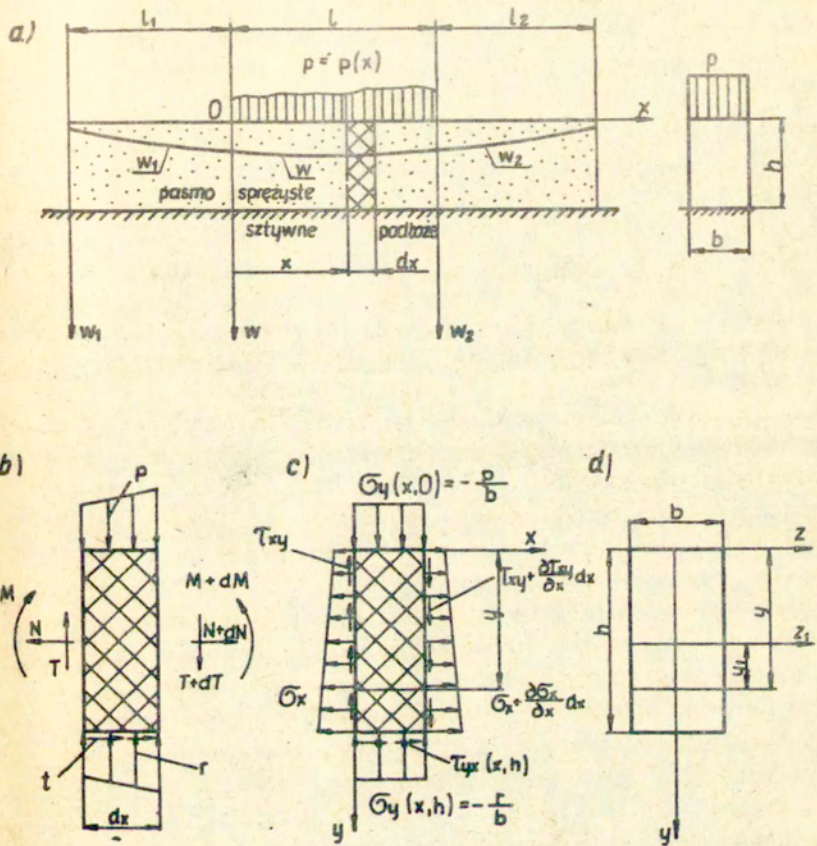
Jednak i te modele nie są wolne od wad, są one albo zbyt uproszczone albo nader skomplikowane. Uzasadnia to podjęcie próby poszukiwania bardziej efektywnego modelu podłoża sprężystego.

## 2. Sformułowanie problemu i cel pracy

W praktyce spotyka się różne rodzaje podłoży. Pewną wspólną grupę podłoży stanowią: tarcze prostokątne, mury, listwy, uszczelki itp. Modelem geometrycznym tej grupy podłoży jest pasmo o ograniczonej szerokości  $b$  i grubości  $h$  oraz o długości rozciągającej się nieograniczenie /rys. 1a/. Wydzielona część robocza pasma jest ograniczona długością  $l$ . Założono, że to podłoże jest monolityczne, jednorodne, izotropowe i liniowo-sprężyste. Przyjęto ponadto, że pasmo, swą dolną powierzchnię, spoczywa na nieodkształcalnym podłożu i jest z tym podłożem związane. Na górną powierzchnię pasma działa normalne obciążenie  $p = p(x)$ . Zauważono, że głównym mechanizmem wpływu siły  $p(x)$  na przemieszczenie pionowe sąsiadnych punktów pasma jest naturalnie występująca, w przekrojach poprzecznych pasma, siła styczna  $T = T(x)$ . Uproszczenie modelu podłoża jest również uzasadnione postawieniem hipotezy /z uwagi na relatywnie małą grubość pasma do jego długości/ liniowego rozkładu naprężeń normalnych  $\sigma_x$  w przekrojach poprzecznych pasma /rys. 1c/.

Deformację podłoża zdefiniowano jako zmniejszenie grubości pasma o wartość  $w = w(x)$  /rys. 1a/.

Celem pracy jest wyznaczenie funkcji  $w = w(x)$  będącej równaniem linii deformacji podłoża dla dowolnie przyjętego obciążenia  $p = p(x)$  /rys. 1a/ oraz znalezienie funkcji ugięcia belki posadwionej na podłożu i obciążonej siłą  $q = q(x)$  i momentem  $\mu = \mu(x)$  /rys. 6/. Zakłada się przy tym, że belka, w trakcie obciążenia, styka się na całej swej długości, swą dolną powierzchnią z podłożem sprężystym.



Rys. 1. Uproszczony model podłoża sprężystego; a/ schemat pasma sprężystego, b/ siły działające na wydzielony element pasma, c/ naprężenia występujące w przekrojach poprzecznych pasma i na jego zewnętrznych powierzchniach, d/ przekrój poprzeczny pasma.

W celu dokonania analizy zagadnienia proponuje się zastosować konstrukcyjnie adekwatny model WŁASOWA i WINKLERA.

### 3. Linia deformacji pasma

#### 3.1. Równania różniczkowe problemu

W celu wyprowadzenia równań różniczkowych opisujących zagadnienie... deformacji pasma wydzielono element o długości  $dx$  tego pasma /rys. 1a i 1b/. Na wycięty element działa płaski układ sił złożony z rozłożonego obciążenia  $p = p / x /$ , rozłożonej reakcji normalnej  $r = r / x /$  oraz stycznej  $t = t / x /$  od sztywnego podłoża, sił wewnętrznych przyłożonych do lewej strony, tj. siły normalnej  $N = N / x /$ , siły stycznej  $T = T / x /$  i momentu gnącego  $M = M / x /$  oraz odpowiednio z prawej strony:  $N + dN$ ,  $T + dT$  i  $M + dM$  /rys. 1b/. Stosując warunki równowagi dla opisanego układu sił otrzymano, pomijając małe wyższych rzędów, następujące zależności różniczkowe:

$$/1/ \quad \frac{dN}{dx} = -t,$$

$$/2/ \quad \frac{dT}{dx} = r - p,$$

$$/3/ \quad \frac{dM}{dx} = T - \frac{h}{2} t.$$

Naprężenia styczne w przekroju pasma, dla  $y = h$ , określono wzorem

$$/4/ \quad \tau_{xy}(x, h) = k \frac{T}{F_0},$$

gdzie  $k$  jest parametrem, natomiast

$$/5/ \quad F_0 = bh$$

oznacza pole poprzecznego przekroju pasma /rys. 1d/.

Naprężenia styczne w podstawie pasma są zależne od reakcji stycznej, tzn.

$$/6/ \quad \tau_{yx}(x, h) = \frac{t}{b}$$

Wykorzystując fakt równości naprężeń stycznych w przekrojach wzajemnie prostopadłych porównano /4/ z /6/, a stąd uzyskano zależność

$$/7/ \quad t = k \frac{T}{h} .$$

Uwzględniając hipotezę liniowego rozkładu naprężeń  $\sigma_x$  na kierunku osi  $y$ , można wyznaczyć przyrost tych naprężeń ze wzoru

$$/8/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx = \frac{dN}{F_0} + \frac{dM}{J_{z_1}} y_1 ,$$

gdzie

$$/9/ \quad J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}$$

jest momentem bezwładności poprzecznego przekroju względem osi  $z_1$  /rys. 1d/.

Podstawiając /1/, /3/, /5/, /7/ i /9/ do /8/ otrzymuje się pochodną

$$/10/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \left[ -\frac{6(k-2)}{bh^3} y + \frac{2(k-3)}{bh^2} \right] T .$$

Po podstawieniu /10/ do równania Naviera

$$/11/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

i następnie scałkowaniu tego równania względem  $y$ , otrzymuje się równanie rozkładu naprężeń stycznych, a mianowicie

$$/12/ \quad \tau_{xy} = \frac{3(k-2)}{bh^3} T y^2 - \frac{2(k-3)}{bh^2} T y .$$

Stałą całkowania  $C = 0$  wyznaczono z warunku brzegowego  $\tau_{xy}(x, 0) = 0$

Podstawiając /12/, zróżniczkowane względem  $x$ , do drugiego równania Naviera

$$/13/ \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 ,$$

a następnie całkując to równanie względem  $y$  i wyznaczając z warunku brzegowego  $\sigma_y(x,0) = -\frac{p}{b}$  /rys. 1c/ drugą stałą całkowania  $D = -\frac{p}{b}$ , uzyskuje się naprężenia normalne w przekroju poziomym pasma

$$/14/ \quad \sigma_y = \frac{(k-2)}{bh^3} \frac{dT}{dx} y^3 + \frac{(k-3)}{bh^2} \frac{dT}{dx} y^2 - \frac{p}{b}.$$

Odształcenie liniowe sprężystego pasma w kierunku osi  $x$ , zgodnie z prawem Hooke'a można napisać w postaci

$$/15/ \quad \epsilon_x = \frac{1}{E_0} (\sigma_x - \nu_0 \sigma_y),$$

gdzie  $E_0$  i  $\nu_0$  oznacza odpowiednio, moduł Younga i liczbę Poiseona materiału pasma.

Odształcenie  $\epsilon_x$  przyjmuje dla  $y = h$ , z uwagi na nierozdzielność pasma sprężystego z podłożem sztywnym, wartość równą zero, czego implikacją, po zróżniczkowaniu /15/ względem  $x$ , jest równanie

$$/16/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \nu_0 \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = 0.$$

Po podstawieniu /10/ i /14/, zróżniczkowanego względem  $x$ , do /16/ oraz wykonaniu algebraicznych przekształceń otrzymano następujące równanie różniczkowe

$$/17/ \quad \frac{d^2 T}{dx^2} - \lambda^2 T = -\frac{dp}{dx},$$

gdzie

$$/18/ \quad \lambda = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{k-1.5}{\nu_0}}$$

jest stałym współczynnikiem.



Podstawową zależnością do wyprowadzania funkcji deformacji pasma jest równanie Cauchy'ego

$$/19/ \quad \epsilon_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

i wzór na prawo Hooke'a

$$/20/ \quad \epsilon_y = \frac{1}{E_0} (\sigma_y - \nu_0 \sigma_x)$$

gdzie  $\epsilon_y$  jest odkształceniem liniowym w kierunku osi  $y$ .

Podstawiając /10/ i /14/ do relacji wynikającej z porównania /19/ i /20/ i całkując tę relację względem  $y$ , w granicach od  $h$  do zera, otrzymuje się równanie

$$/21/ \quad w = \frac{h}{E_0 b} \left( p + \frac{6-k}{12} \frac{dT}{dx} - \frac{\nu_0 k}{h^2} \int T dx \right).$$

W celu zbadania zakresu wartości liczbowej parametru  $k$  przeanalizowano najpierw spostrzeżoną nierówność

$$/22/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} < 0, \text{ dla } y=h \text{ i } T > 0.$$

Znak nierówności /22/ wynika z istnienia naprężeń stycznych w podstawie pasma  $\tau_{yx}(x, h) > 0$  dla  $T > 0$ , które równoważone są przez ujemny przyrost naprężeń normalnych  $\sigma_x$  w kierunku osi  $x$ . Podstawiając /10/ do nierówności /22/ otrzymuje się ograniczenie wielkości  $k$ , mianowicie

$$/23/ \quad k > 1,5$$

co potwierdza istnienie rzeczywistej wartości współczynnika określonego wzorem /18/.

Ponieważ naprężenia styczne w przekroju pasma mają ten sam znak co siła tnąca, to drugie miejsce zerowe paraboli /12/ musi być większe lub równe grubości pasma, tzn., że istnieje nierówność

$$/24/ \quad \frac{2h(k-3)}{3(k-2)} \geq h ,$$

z której wyznacza się dwustronne ograniczenie dla  $k$ , mianowicie

$$/25/ \quad 0 \leq k \leq 2 .$$

Sumując przedziały /23/ i /25/ otrzymuje się ostatecznie

$$/26/ \quad k \in (1,5 ; 2) .$$

### 3.2. Rozwiązywanie równań różniczkowych problemu

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego /17/ składa się z całki ogólnej

$$/27/ \quad T_0 = A \operatorname{Ch}(\lambda x) + B \operatorname{Sh}(\lambda x)$$

równania różniczkowego jednorodnego

$$/28/ \quad \frac{d^2 T}{dx^2} - \lambda^2 T = 0 ,$$

oraz całki szczególnej

$$/29/ \quad T_S = T_G * \left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

równania różniczkowego niejednorodnego /17/, a mianowicie

$$/30/ \quad T = T_0 + T_S ,$$

lub

$$/31/ \quad T = A \operatorname{Ch}(\lambda x) + B \operatorname{Sh}(\lambda x) + T_S ,$$

gdzie  $A$  i  $B$  - stałe całkowania

Po wyznaczeniu funkcji Greens  $T_G$ , np. metodą operatorową lub sposobem Cauchy'ego [8] tj. z równania /27/ dla warunków

brzegowych:

$$/32/ \quad T_0(0) = 0 ; \quad \left. \frac{dT_0}{dx} \right|_{x=0} = 1$$

splot /29/ daje się przedstawić w sposób jawny, mianowicie

$$/33/ \quad T_s = -\frac{1}{\lambda} \int_0^x \text{Sh}[\lambda(x-\bar{x})] \frac{dp}{d\bar{x}} d\bar{x}.$$

Podstawiając teraz /17/ i /31/ do /21/ otrzymuje się funkcję deformacji pasma w postaci

$$/34/ \quad w = c \left\{ p(1-\psi) + (\gamma-\psi)\lambda [A \text{Sh}(\lambda x) + B \text{Ch}(\lambda x)] + (\gamma-\psi) \frac{dT_s}{dx} \right\},$$

gdzie:

$$/35/ \quad c = \frac{h}{E_0 b}, \quad \gamma = \frac{6-k}{12}, \quad \psi = \frac{\nu_0^2 k}{4(k-1.5)}.$$

Równania /31/ i /34/ dotyczą obciążonej części pasma, natomiast dla nie obciążonych części pasma /rys. 1a/ przyporządkowane są odpowiednio równania:

$$/36/ \quad T_1 = A_1 \text{Ch}(\lambda x_1) + B_1 \text{Sh}(\lambda x_1),$$

$$/37/ \quad w_1 = c(\gamma-\psi) [A_1 \text{Sh}(\lambda x_1) + B_1 \text{Ch}(\lambda x_1)] \lambda,$$

oraz

$$/38/ \quad T_2 = A_2 \text{Ch}(\lambda x_2) + B_2 \text{Sh}(\lambda x_2),$$

$$/39/ \quad w_2 = c(\gamma-\psi) [A_2 \text{Sh}(\lambda x_2) + B_2 \text{Ch}(\lambda x_2)] \lambda.$$

Stałe całkowania wyznacza się z następujących warunków brzegowych:

$$/40/ \quad \begin{array}{l} \text{I.} \quad T_1 = 0 \quad \text{dla } x_1 = 0, \\ \text{II.} \quad T_1 = T \quad \text{dla } x_1 = l_1 \text{ i } x = 0, \end{array}$$

$$\text{III. } T = T_2 \quad \text{dla } x = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = 0 ,$$

$$\text{IV. } T_2 = 0 \quad \text{dla } x_2 = l_2 ,$$

$$\text{V. } W_1 = W \quad \text{dla } x_1 = l_1 \quad \text{i} \quad x = 0 ,$$

$$\text{VI. } W = W_2 \quad \text{dla } x = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = 0 .$$

Rugując z układu równań /40/ stałe całkowania  $A_1, B_1, A_2, B_2$  otrzymuje się zredukowany układ równań, z którego wyznacza się stałe całkowania  $A$  i  $B$ .

W przypadku pasma o nieograniczonej długości, tj. dla  $l_1$  i  $l_2$  dążących do nieskończoności, oblicza się graniczne stałe całkowania z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} /41/ \quad A &= \frac{(1-\psi)[\Gamma p(0) - p(l)] - \lambda(\gamma-\psi)[\Gamma T_s(0) + T_s(l)] + (\gamma-\psi)\left[\Gamma \frac{dT_s(0)}{dx} - \frac{dT_s(l)}{dx}\right]}{2\lambda(\gamma-\psi)\Gamma} \\ B &= \frac{-(1-\psi)[\Gamma p(0) + p(l)] + \lambda(\gamma-\psi)[\Gamma T_s(0) - T_s(l)] - (\gamma-\psi)\left[\Gamma \frac{dT_s(0)}{dx} + \frac{dT_s(l)}{dx}\right]}{2\lambda(\gamma-\psi)\Gamma} \end{aligned}$$

gdzie

$$/42/ \quad \Gamma = \text{Sh}(\lambda l) + \text{Ch}(\lambda l) .$$

### 3.3. Analize rozwiązania zagadnienia

W celu przeprowadzenia analizy rozwiązania zagadnienia proponuje się przedstawić to rozwiązanie w ujęciu teorii podobieństwa mechanicznego. W tym celu zdefiniowano kryterialną funkcję podobieństwa linii deformacji podłoża następującym wzorem

$$/43/ \quad W(\xi, \eta) = \frac{W}{\epsilon_s} ,$$

gdzie

$$/44/ \quad \epsilon_s = \frac{P}{E_0 b}$$

jest średnim właściwym odkształceniem liniowym, w kierunku osi  $y$ , wyizolowanego pasma o długości  $l$ ,

natomiast

$$/45/ \quad P = \int_0^l p(x) dx ,$$

oznacza wypadkową siłę działającą prostopadle do górnej powierzchni wyizolowanego pasma,

oraz

$$/46/ \quad \xi = \omega \frac{x}{l}$$

ma znaczenie bezwymiarowej współrzędnej,

zaś

$$/47/ \quad \eta = \frac{h}{l}$$

jest liczbę kryterialną podobieństwa geometrycznego pasma, a  $\omega$  jest dowolnie dobraną liczbą.

W celu wyeliminowania wielkości wymiarowych  $\lambda$  i  $l$  zdefiniowano liczbę kryterialną podobieństwa fizycznego

$$/48/ \quad \vartheta = \frac{\lambda l}{\omega}$$

Funkcje kryterialne podobieństwa deformacji pasma oraz modelu WŁASOWA i WINKLERA opracowano dla trzech różnych obciążeń.

Występujące wielkości w modelu WŁASOWA zaopatrzone jedną gwiazdką, a w modelu WINKLERA dwiema gwiazdkami.

W przypadku obciążenia stałego wyrażonego wzorem

$$/49/ \quad p = p_0 = \text{const.} ,$$

funkcja kryterialna podobieństwa deformacji pasma ma postać

$$/50/ \quad W^* = g\eta \left[ 1 + \mathcal{K} \text{Ch}(\vartheta \xi) + \mathcal{L} \text{Sh}(\vartheta \xi) \right] ,$$

gdzie:

$$/51/ \quad g = 1 - \psi , \quad \mathcal{K} = -\frac{\Gamma + 1}{2\Gamma} , \quad \mathcal{L} = \frac{\Gamma - 1}{2\Gamma} ,$$

natomiast

$$/52/ \quad W^* = g^* \eta \left[ 1 + K^* \operatorname{Ch}(\nu^* \xi) + \mathcal{L}^* \operatorname{Sh}(\nu^* \xi) \right],$$

gdzie:

$$/53/ \quad g^* = 1 - \nu_0^2, \quad K^* = -\frac{\Gamma^* + 1}{2\Gamma^*}, \quad \mathcal{L}^* = \frac{\Gamma^* - 1}{2\Gamma^*},$$

oraz

$$/54/ \quad W^{**} = \eta.$$

W przypadku obciążenia liniowo-zmiennego opisanego równaniem

$$/55/ \quad p = p_0 \left( 1 + \frac{x}{l} \right),$$

funkcja kryterialna podobieństwa deformacji pasma przyjmuje następującą formę

$$/56/ \quad W = g\eta \left[ \left( 1 + \frac{\xi}{\omega} \right) + K \operatorname{Ch}(\nu \xi) + \mathcal{L} \operatorname{Sh}(\nu \xi) \right],$$

gdzie:

$$g = \frac{2}{3} (1 - \psi), \quad K = \frac{-(\Gamma + 2) + d(\Gamma - 1)}{2\Gamma},$$

/57/

$$d = \frac{\nu - \psi}{\nu \omega (1 - \psi)}, \quad \mathcal{L} = \frac{(\Gamma - 2) - d(\Gamma + 1)}{2\Gamma},$$

natomiast

$$/58/ \quad W^* = g^* \eta \left[ \left( 1 + \frac{\xi}{\omega} \right) + K^* \operatorname{Ch}(\nu^* \xi) + \mathcal{L}^* \operatorname{Sh}(\nu^* \xi) \right],$$

gdzie:

$$/59/ \quad g^* = \frac{2}{3} (1 - \nu_0^2), \quad K^* = \frac{-(\Gamma^* + 2) + d^*(\Gamma^* - 1)}{2\Gamma^*},$$

$$d^* = \frac{1}{\vartheta^* \omega}, \quad \alpha^* = \frac{(\Gamma^* - 2) - d^* (\Gamma^* + 1)}{2 \Gamma^*},$$

oraz

$$/60/ \quad W^{**} = \frac{2}{3} \eta \left(1 + \frac{\xi}{\omega}\right).$$

W przypadku obciążenia skupionego

$$/61/ \quad p = P \delta(x - x_0),$$

gdzie  $\delta$  jest deltą Diraca,

funkcja kryterialna podobieństwa deformacji pasma ma zapis dystrybucyjny, mianowicie

$$/62/ \quad W = g \left\{ \mathcal{K} [\text{Ch}(\vartheta \xi) + \text{Sh}(\vartheta \xi)] - \text{Sh}[\vartheta(\omega - \xi_0)] H(\xi - \xi_0) \right\},$$

gdzie:

$$g = 2(1 - \psi) \sqrt{\frac{k - 1.5}{\nu_0}},$$

$$/63/ \quad \mathcal{K} = \frac{\text{Sh}[\vartheta(\omega - \xi_0)] + \text{Ch}[\vartheta(\omega - \xi_0)]}{2 \Gamma},$$

natomiast

$$/64/ \quad W^* = g^* \left\{ \mathcal{K}^* [\text{Ch}(\vartheta^* \xi) + \text{Sh}(\vartheta^* \xi)] - \text{Sh}[\vartheta^*(\omega - \xi_0)] H(\xi - \xi_0) \right\},$$

gdzie:

$$g^* = (1 + \nu_0) \sqrt{6(1 - \nu_0)},$$

/65/

$$\mathcal{K}^* = \frac{\text{Sh}[\vartheta^*(\omega - \xi_0)] + \text{Ch}[\vartheta^*(\omega - \xi_0)]}{2 \Gamma^*},$$

arczę

$$/66/ \quad W^{**} = \delta(\xi - \xi_0).$$

Wielkości występujące w /50/ - /65/, dotychczas nie zdefiniowane, mają następującą postać:

$$/67/ \quad \Gamma = Sh(v\omega) + Ch(v\omega), \quad v = \frac{2}{\omega\eta} \sqrt{\frac{k-1,5}{\nu_0}},$$

$$\Gamma^* = Sh(v^*\omega) + Ch(v^*\omega), \quad v^* = \frac{1}{\omega\eta} \sqrt{\frac{6}{1-\nu_0}}.$$

Obliczenia numeryczne wykonano przy następujących danych liczbowych:

$$\omega = 100, \quad k = 2, \quad \nu_0 = 0,2, \quad \xi \in (0, 100),$$

$$\eta = 0,25; 0,50; 1,00; 2,00.$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 2, 3, 4 i 5.

Rysunek 2 zawiera krzywe deformacji pasma dla kilku wartości  $\eta$  i przy różnych obciążeniach, mianowicie:

a/ - stałym, b/ - liniowo-zmiennym i c/ - skupionym.

Na rysunku 3 porównano graficznie wyniki uzyskane dla pasma przy stałym obciążeniu z wynikami dla modelu WŁASOWA i WINKLERA, przy czym a/ dotyczy  $\eta = 0,25$ , b/ -  $\eta = 0,5$ , c/ -  $\eta = 1,00$ .

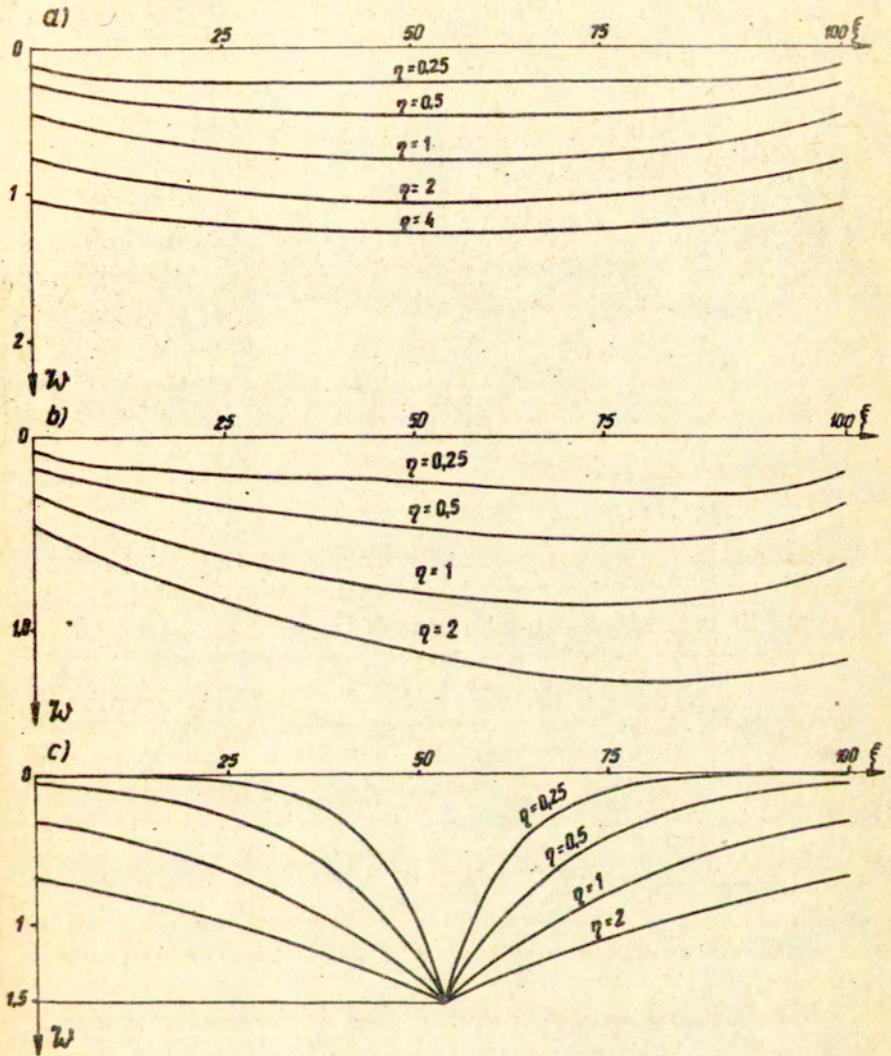
Podobne porównanie, przy obciążeniu liniowo-zmiennym, przedstawiono na rys. 4a, b i c.

Porównanie wyników w przypadku obciążenia skupionego pokazano na rys. 5a, b i c.

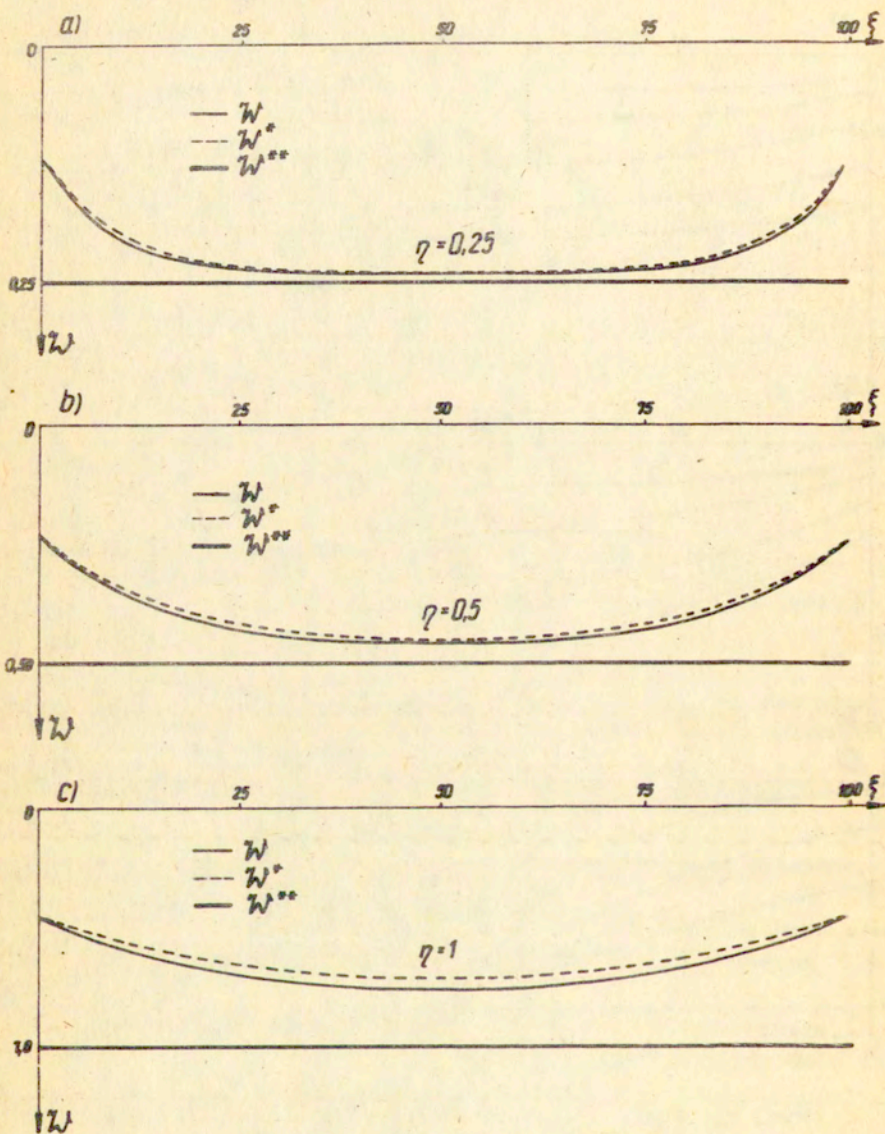
Rzeczywiste linie deformacji uproszczonego podłoża uzyskuje się przez odwzorowanie krzywych deformacji pasma za pomocą zależności /43/ - /49/.

Występujące w części graficznej krzywe deformacji pasma mają znaczenie funkcji kryterialnych podobieństwa linii deformacji uproszczonego podłoża sprężystego.

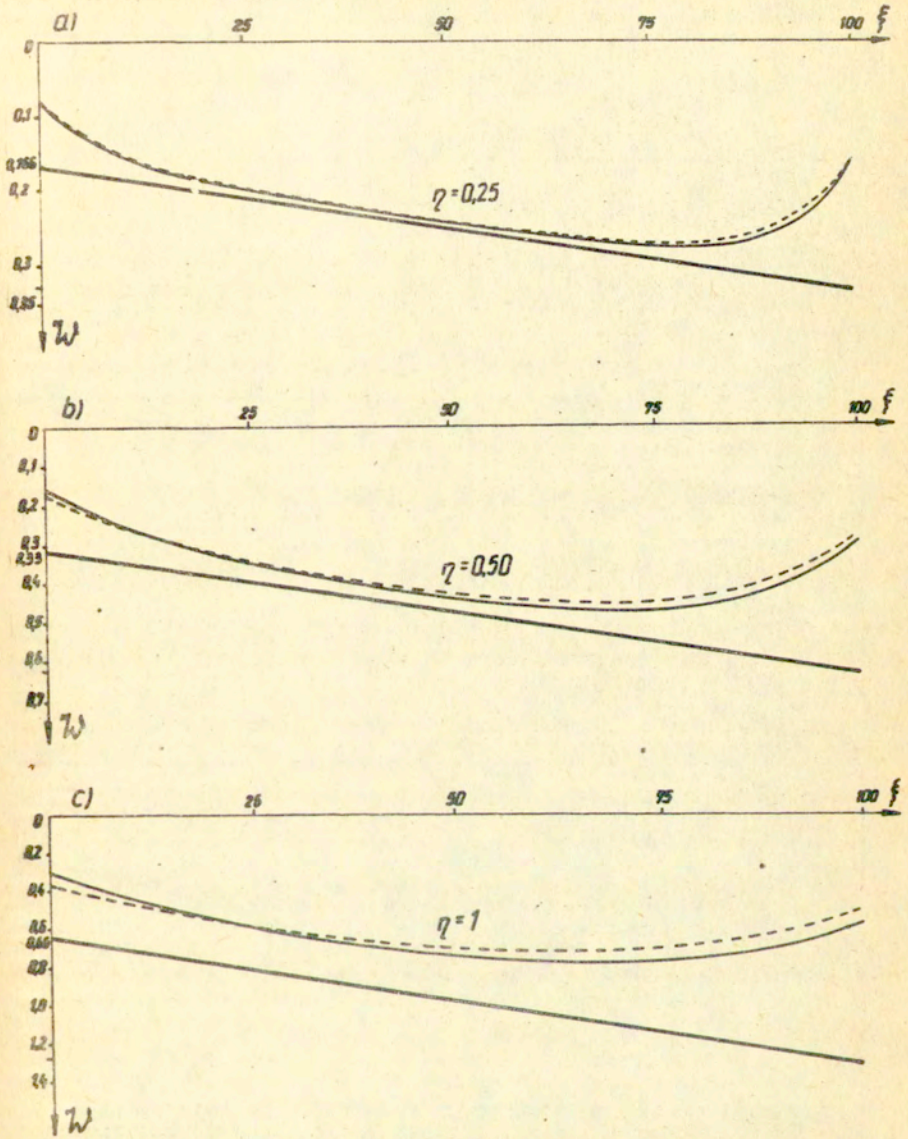




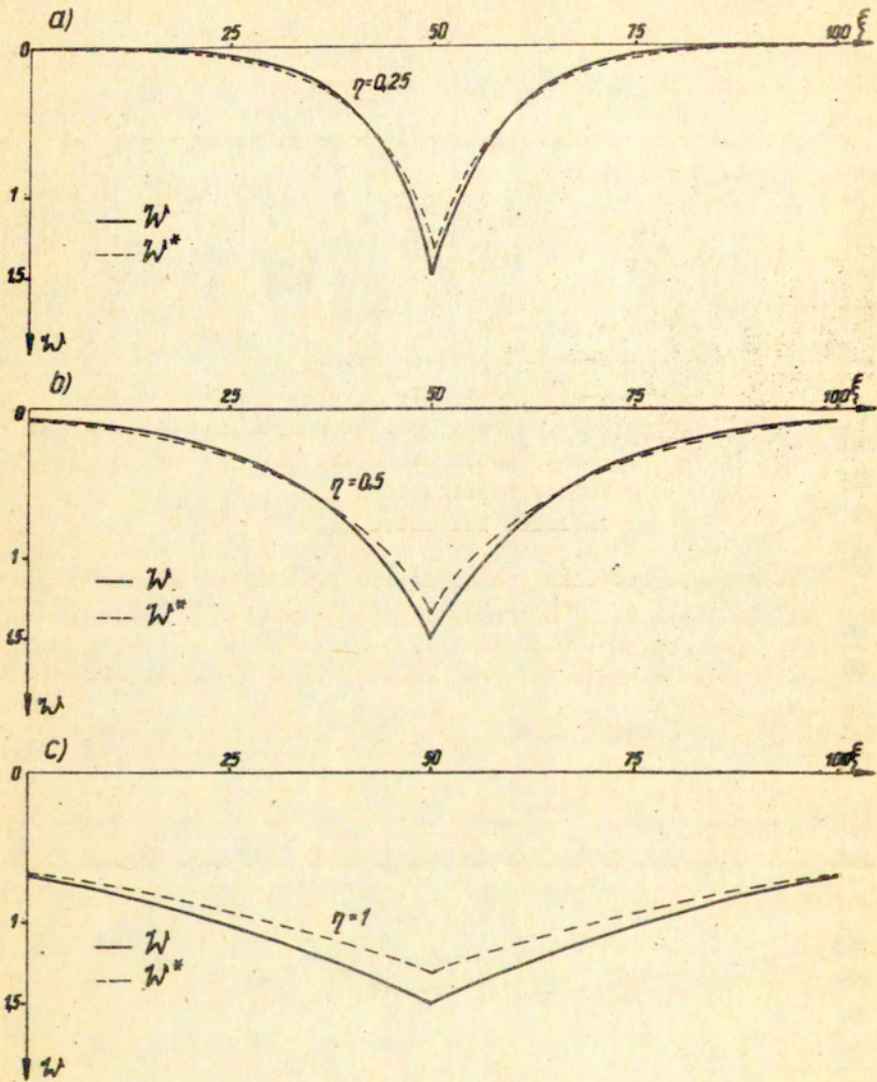
Rys. 2. Rodzina krzywych deformacji pasma sprężystego; a/ dla obciążenia stałego, b/ -liniowo-zmiennego i c/ -skupionego.



Rys. 3. Porównanie krzywych deformacji podłoża sprężystego dla trzech różnych modeli przy obciążeniu stałym;  
a/ dla  $\eta = 0,25$ ; b/ -  $\eta = 0,50$  i c/ -  $\eta = 1,00$ .



Rys. 4. Porównanie krzywych deformacji podłoża sprężystego dla trzech różnych modeli przy obciążeniu liniowo-zmiennym; a/ dla  $\eta = 0,25$ , b/ -  $\eta = 0,50$  i c/ -  $\eta = 1,00$ .



Rys. 5. Porównanie krzywych deformacji podłoża sprężystego dla trzech różnych modeli, przy obciążeniu skupionym;  
a/ dla  $\eta=0,25$  , b/ -  $\eta=0,50$  i c/ -  $\eta=1,00$ .

#### 4. Belka na uproszczonym podłożu sprężystym

##### 4.1. Równanie różniczkowe zagadnienia

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki posadwionej na pasmie /rys. 6/ ma postać

$$/68/ \quad EJ \frac{d^4 w^*}{dx^4} + p^* = q - \frac{d\mu}{dx}$$

gdzie:  $w^* = w^*(x)$  - ugięcie belki,  
 $q = q(x)$  - siła obciążająca belkę,  
 $\mu = \mu(x)$  - moment obciążający belkę,  
 $p^* = p^*(x)$  - odpór pasma sprężystego;  
 $E$  - moduł Younga materiału belki,  
 $J$  - moment bezwładności przekroju belki  
 względem osi obojętnej.

Zakładając, że belka jest w stałym kontakcie z pasmem sprężystym, tzn., że  $w^*(x) = w(x)$  i  $p^*(x) = p(x)$ , a następnie rugując  $T(x)$  i  $p(x)$  z równań /17/, /21/ i /68/ otrzymuje się ostateczną postać równania różniczkowego linii ugięcia belki, a mianowicie

$$/69/ \quad \frac{d^6 w}{dx^6} + a_1 \frac{d^4 w}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_3 w = b_1 \left( q - \frac{d\mu}{dx} \right) + b_2 \left( \frac{d^2 q}{dx^2} - \frac{d^3 \mu}{dx^3} \right)$$

$$\text{gdzie:} \quad a_1 = - \frac{\lambda^2 (1 - \psi)}{1 - \gamma^2}, \quad b_1 = - \frac{\lambda^2 (1 - \psi)}{(1 - \gamma^2) EJ},$$

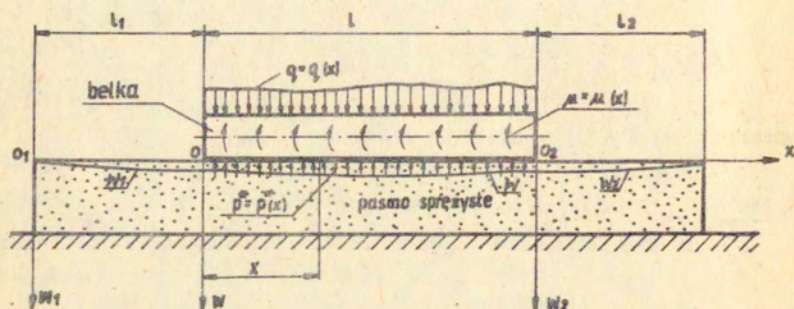
$$a_2 = \frac{1}{c(1 - \gamma^2) EJ}, \quad b_2 = \frac{1}{EJ}$$

/70/

$$a_3 = - \frac{\lambda^2}{c(1 - \gamma^2) EJ},$$

Siłę styczną określono z /17/ i /68/ następującym wzorem

$$/71/ \quad T = \frac{1}{c(\gamma - \psi)} \int w dx - \frac{1 - \psi}{\gamma - \psi} \int q dx + \frac{1 - \psi}{\gamma - \psi} \left( EJ \frac{d^3 w}{dx^3} + \mu \right).$$



Rys. 6 Schemat belki na paśmie sprężystym

#### 4.2. Rozwiązanie równania różniczkowego zagadnienia

Podstawiając

$$/72/ \quad w = e^{\lambda x}$$

do jednorodnego równania różniczkowego

$$/73/ \quad \frac{d^6 w}{dx^6} + a_1 \frac{d^4 w}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_3 w = 0,$$

uzyskuje się równanie charakterystyczne

$$/74/ \quad \lambda^6 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_3 = 0,$$

którego pierwiastki wynoszą:

$$/75/ \quad \lambda_{1,2,3,4} = \pm (\alpha \pm i\beta); \quad \lambda_{5,6} = \pm \varphi,$$

gdzie oznaczone:

/75/

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\theta^2 + \phi^2} + \theta^2)}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\theta^2 + \phi^2} - \theta^2)}$$

$$\varphi = \sqrt{u + z + s}$$

natomiast:

/77/

$$\theta = -\frac{1}{2}(u + z) + s$$

$$\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}(u - z)$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{m^3}{27} + \frac{n^2}{4}}}$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{m^3}{27} + \frac{n^2}{4}}}$$

$$s = -\frac{a_1}{3}$$

$$m = -\frac{1}{3}a_1^2 + a_2$$

$$n = \frac{2}{27}a_1^3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + a_3$$

Po podstawieniu /75/ do /72/ i zastosowaniu wzorów Eulera otrzymuje się całkę ogólną jednorodnego równania różniczkowego /73/, która przybiera następującą postać

/78/

$$w = A \operatorname{Ch} \alpha x \cos \beta x + B \operatorname{Ch} \alpha x \sin \beta x + C \operatorname{Sh} \alpha x \cos \beta x + D \operatorname{Sh} \alpha x \sin \beta x + F \operatorname{Ch} \varphi x + G \operatorname{Sh} \varphi x$$

Wyznaczając z /78/ funkcję wpływu Greensa

/79/

$$w_0 = A^* \operatorname{Ch} \alpha x \sin \beta x + B^* \operatorname{Sh} \alpha x \cos \beta x + C^* \operatorname{Sh} \varphi x$$

można otrzymać rozwiązanie szczególne niejednorodnego równania

różniczkowego /69/ sposobem Cauchy'ego /8/, a mianowicie

$$/80/ \quad W_s = \int_0^x [A^* \text{Ch}\alpha(x-\bar{x}) \sin \beta(x-\bar{x}) + B^* \text{Sh}\alpha(x-\bar{x}) \cos \beta(x-\bar{x}) + C^* \text{Sh}\varphi(x-\bar{x})] f(\bar{x}) d\bar{x}$$

gdzie:

$$/81/ \quad A^* = \frac{\alpha^2 - 3\beta^2 - \varphi^2}{2\beta[\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2 - \varphi^2)^2 + \beta^2(\beta^2 - 3\alpha^2 + \varphi^2)^2]},$$

$$B^* = \frac{\beta^2 - 3\alpha^2 + \varphi^2}{2\alpha[\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2 - \varphi^2)^2 + \beta^2(\beta^2 - 3\alpha^2 + \varphi^2)^2]},$$

$$C^* = \frac{1}{\varphi[(\alpha^2 - \beta^2 - \varphi^2) + 4\alpha^2\beta^2]},$$

oraz

$$/82/ \quad f(\bar{x}) = b_1 \left( q - \frac{d\mu}{d\bar{x}} \right) + b_2 \left( \frac{d^2 q}{d\bar{x}^2} - \frac{d^3 \mu}{d\bar{x}^3} \right).$$

Rozwiązanie równania różniczkowego /69/ przyjmie teraz postać

$$/83/ \quad w = A \text{Ch}\alpha x \cos \beta x + B \text{Ch}\alpha x \sin \beta x + C \text{Sh}\alpha x \cos \beta x + D \text{Sh}\alpha x \sin \beta x + F \text{Ch}\varphi x + G \text{Sh}\varphi x + W_s.$$

Rozwiązania równań /17/ i /21/ dla nieobciążonych części pasma /rys. 6/ wynoszą odpowiednio:

$$/84/ \quad T_1 = A_1 \text{Ch}\lambda x_1 + B_1 \text{Sh}\lambda x_1, \\ w_1 = c(\gamma - \psi)\lambda (A_1 \text{Sh}\lambda x_1 + B_1 \text{Ch}\lambda x_1),$$

oraz

$$/85/ \quad T_2 = A_2 \text{Ch}\lambda x_2 + B_2 \text{Sh}\lambda x_2, \\ w_2 = c(\gamma - \psi)\lambda (A_2 \text{Sh}\lambda x_2 + B_2 \text{Ch}\lambda x_2).$$



W celu wyznaczenia stałych całkowania występujących w /83/, /84/ i /85/ przyjęto następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=0} = 0, & T_1(0) &= 0, \\
 & \left[ \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{\mu}{EJ} \right]_{x=0} = 0, & T_1(l_1) &= T(0), \\
 & & w_1(l_1) &= w(0), \\
 /86/ & \left[ \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x=l} = 0, & T_2(0) &= T(l), \\
 & & w_2(0) &= w(l), \\
 & & T_2(l_2) &= 0, \\
 & \left[ \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{\mu}{EJ} \right]_{x=l} = 0,
 \end{aligned}$$

Po wyrugowaniu z /86/ stałych całkowania  $A_1, B_1, A_2$  i  $B_2$  uzyskano zredukowany układ liniowych niejednorodnych równań algebraicznych, który w zapisie macierzowym przybiera postać

$$/87/ \quad \Psi X = Q,$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 /88/ \quad X &= [A, B, C, D, F, G]^T, \\
 Q &= [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6]^T, \\
 \Psi &= [\Psi_{ij}]_{6 \times 6}.
 \end{aligned}$$

Elementy macierzy kolumnowej  $Q$  będące wyrazami wolnymi układu równań /87/ są wyznaczane z następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
 /89/ \quad Q_1 &= \left[ -\frac{d^2 W_5}{dx^2} \right]_{x=0}, \\
 Q_2 &= \left[ -\frac{d^3 W_5}{dx^3} - \frac{\mu}{EJ} \right]_{x=0}, \\
 Q_3 &= \left[ -\frac{d^2 W_5}{dx^2} \right]_{x=l},
 \end{aligned}$$

$$Q_4 = \left[ -\frac{d^3 W_s}{dx^3} - \frac{\mu}{EJ} \right]_{x=l} ,$$

$$Q_5 = \left[ \lambda \int W_s dx - c\lambda \int q dx - W_s \right]_{x=0} ,$$

$$Q_6 = \left[ -\lambda \int W_s dx + c\lambda \int q dx + W_s \right]_{x=l} .$$

Elementy macierzy kwadratowej  $\Psi$  tj. macierzy współczynników przy niewiadomych układu równań /87/ są obliczane z zależności podanych w tab. 1. W wyrażeniach występujących w tab. 1 przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} /90/ \quad K &= Ch\alpha l \cos\beta l , & L &= Ch\alpha l \sin\beta l , \\ R &= Sh\alpha l \cos\beta l , & S &= Sh\alpha l \sin\beta l . \end{aligned}$$

Operacje różniczkowania i całkowania wielkości funkcyjnych rozumiane tu są w sensie dystrybucyjnym.

#### 4.3. Przykład rozwiązywania zadania.

W zadaniu przyjęto obciążenie równomiernie rozłożone  $q_0$  oraz skoncentrowane  $P$  w punkcie  $x_0$ , co można zapisać

$$/91/ \quad q = q_0 + P\delta(x-x_0) .$$

Rozwiązanie szczególne /80/ przyjmie tu postać

$$\begin{aligned} /92/ \quad W_s &= cq_0 + P[UCh\alpha(x-x_0)\sin\beta(x-x_0) + VSh\alpha(x-x_0)\cos\beta(x-x_0) \\ &+ ZSh\alpha(x-x_0)]H(x-x_0) , \end{aligned}$$

Tab. 1.

Macierz współczynników  $\Psi_{ij}$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	$\alpha^2 - \beta^2$	0	0	$2\alpha\beta$	$\varphi^2$	0
2	0	$3\alpha^2\beta - \beta^3$	$\alpha^3 - 3\alpha\beta^2$	0	0	$\varphi^3$
3	$(\alpha^2 - \beta^2)K + 2\alpha\beta S$	$(\alpha^2 - \beta^2)L + 2\alpha\beta R$	$(\alpha^2 - \beta^2)R + 2\alpha\beta L$	$(\alpha^2 - \beta^2)S + 2\alpha\beta K$	$\varphi^2 Ch\varphi L$	$\varphi^2 Sh\varphi L$
4	$(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)R + (3\alpha^2\beta - \beta^3)L$	$(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)S + (3\alpha^2\beta - \beta^3)K$	$(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)K + (3\alpha^2\beta - \beta^3)S$	$(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)L + (3\alpha^2\beta - \beta^3)R$	$\varphi^3 Sh\varphi L$	$\varphi^3 Ch\varphi L$
5	-1	$-\frac{\beta\lambda}{\alpha^2 + \beta^2}$	$\frac{\alpha\lambda}{\alpha^2 + \beta^2}$	0	-1	$\frac{\lambda}{\varphi}$
6	$\lambda \frac{\alpha R + \beta L}{\alpha^2 + \beta^2} + K$	$\lambda \frac{\alpha S - \beta K}{\alpha^2 + \beta^2} + L$	$\lambda \frac{\alpha K + \beta S}{\alpha^2 + \beta^2} + R$	$\lambda \frac{\alpha L - \beta R}{\alpha^2 + \beta^2} + S$	$\frac{\lambda}{\varphi} Sh\varphi L + Ch\varphi L$	$\frac{\lambda}{\varphi} Ch\varphi L + Sh\varphi L$

gdzie oznaczono:

/93/

$$U = \frac{(\alpha^2 - 3\beta^2 - \varphi^2)[b_1 + b_2(\alpha^2 - \beta^2) - 2(\beta^2 - 3\alpha^2 + \varphi^2)\beta^2 b_2]}{2\beta[\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2 - \varphi^2) + \beta^2[(\beta^2 - 3\alpha^2 + \varphi^2)^2]}$$

$$V = \frac{(\beta^2 - 3\alpha^2 + \varphi^2)[b_1 + b_2(\alpha^2 - \beta^2)] + 2(\alpha^2 - 3\beta^2 - \varphi^2)\alpha^2 b_2}{2\alpha[\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2 - \varphi^2)^2 + \beta^2(\beta^2 - 3\alpha^2 + \varphi^2)^2]}$$

$$Z = \frac{b_1 + b_2 \varphi^2}{\varphi[(\alpha^2 - \beta^2 - \varphi^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2]}$$

Wyrazy wolne /89/ wynoszą tu odpowiednio:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0,$$

$$Q_3 = -P \left\{ [U(\alpha^2 - \beta^2) - 2V\alpha\beta] \operatorname{Ch}\alpha(l-x_0) \sin\beta(l-x_0) + [V(\alpha^2 - \beta^2) + 2U\alpha\beta] \operatorname{Sh}\alpha(l-x_0) \cos\beta(l-x_0) + Z\varphi^3 \operatorname{Ch}\varphi(l-x_0) \right\},$$

/94/

$$Q_4 = -P \left\{ [V\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) - U\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)] \operatorname{Ch}\alpha(l-x_0) \cos\beta(l-x_0) + [U\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) + V\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)] \operatorname{Sh}\alpha(l-x_0) \sin\beta(l-x_0) + Z\varphi^3 \operatorname{Ch}\varphi(l-x_0) \right\},$$

$$Q_5 = q_0 c,$$

$$Q_6 = -P \left\{ \lambda \left[ \frac{V\alpha - U\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{Ch}\alpha(l-x_0) \cos\beta(l-x_0) + \frac{U\alpha + V\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{Sh}\alpha(l-x_0) \sin\beta(l-x_0) + \frac{Z}{\varphi} \operatorname{Ch}\varphi(l-x_0) \right] - \frac{V\alpha - U\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ \frac{Z}{\varphi} - c \right] + U \operatorname{Ch}\alpha(l-x_0) \sin\beta(l-x_0) + V \operatorname{Sh}\alpha(l-x_0) \cos\beta(l-x_0) + Z \operatorname{Sh}\varphi(l-x_0) \right\} - q_0 c.$$

W celu zweryfikowania algorytmu zaprezentowanego w drugiej części pracy oraz zbadania efektywności tego algorytmu zaproponowano przykład liczbowy rozwiązania postawionego zadania.

Przykładowe obliczenia przeprowadzono dla belki posadowionej na paśmie sprężystym oraz dla belki opartej na podłożu WŁASOWA i WINKLERA.

Obliczenia numeryczne wykonano przy następujących danych liczbowych:

$$E_0 = 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad b = 0,05 \text{ m}, \quad x_0 = 0,5 \text{ m},$$

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad l = 1 \text{ m},$$

$$\nu_0 = 0,2, \quad h = 0,25; 0,50; 1,00 \text{ m},$$

$$k = 2, \quad q = 5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$I = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4, \quad P = 2,5 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono na rys. 7 i 8 w postaci wykresów obrazujących linie ugięcia belki posadowionej na podłożu sprężystym.

Na rys. 7 pokazano porównanie graficzne wyników uzyskanych dla belki posadowionej na paśmie sprężystym z wynikami dla belki posadowionej na podłożu WŁASOWA i WINKLERA w przypadku obciążenia stałego, przy czym a/ dotyczy  $h=0,25\text{m}$ , b/  $-h=0,50\text{m}$  i c/  $-h=1,00\text{m}$ .

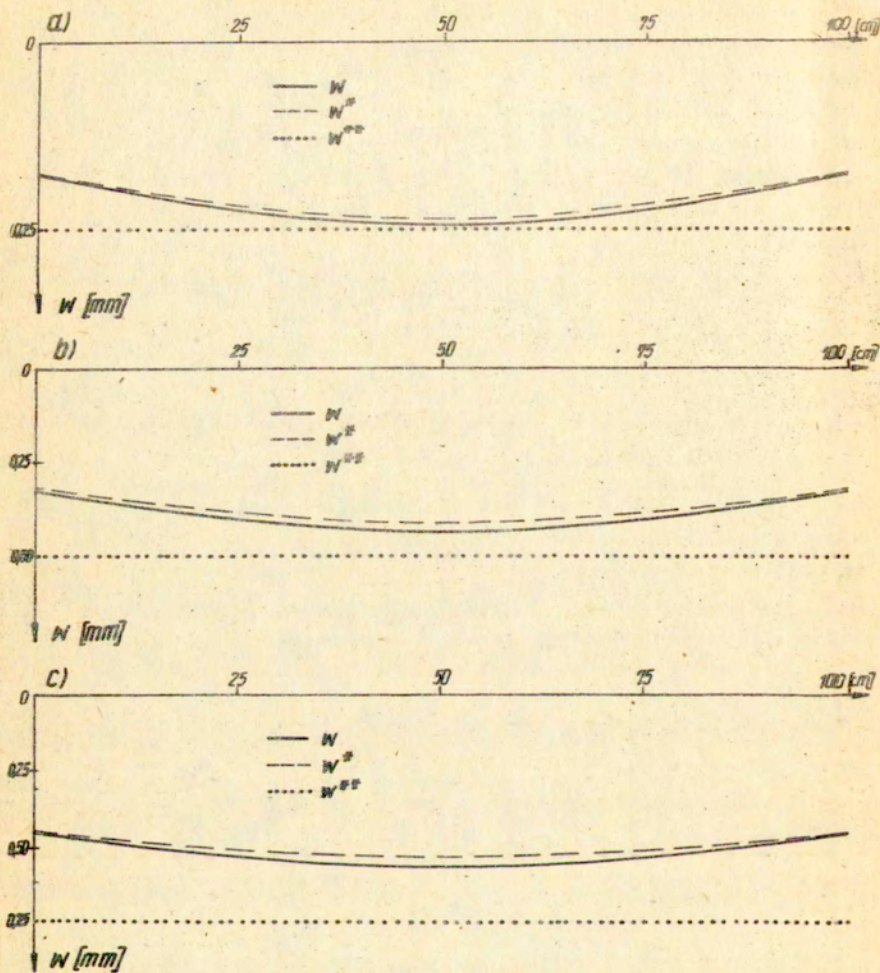
Podobne porównanie wyników w przypadku obciążenia skupionego zilustrowano na rys. 8a, b i c.

W celu odróżnienia graficznych wyników oznaczono je w modelu WŁASOWA jedną gwiazdką, a w modelu WINKLERA dwiema gwiazdkami.

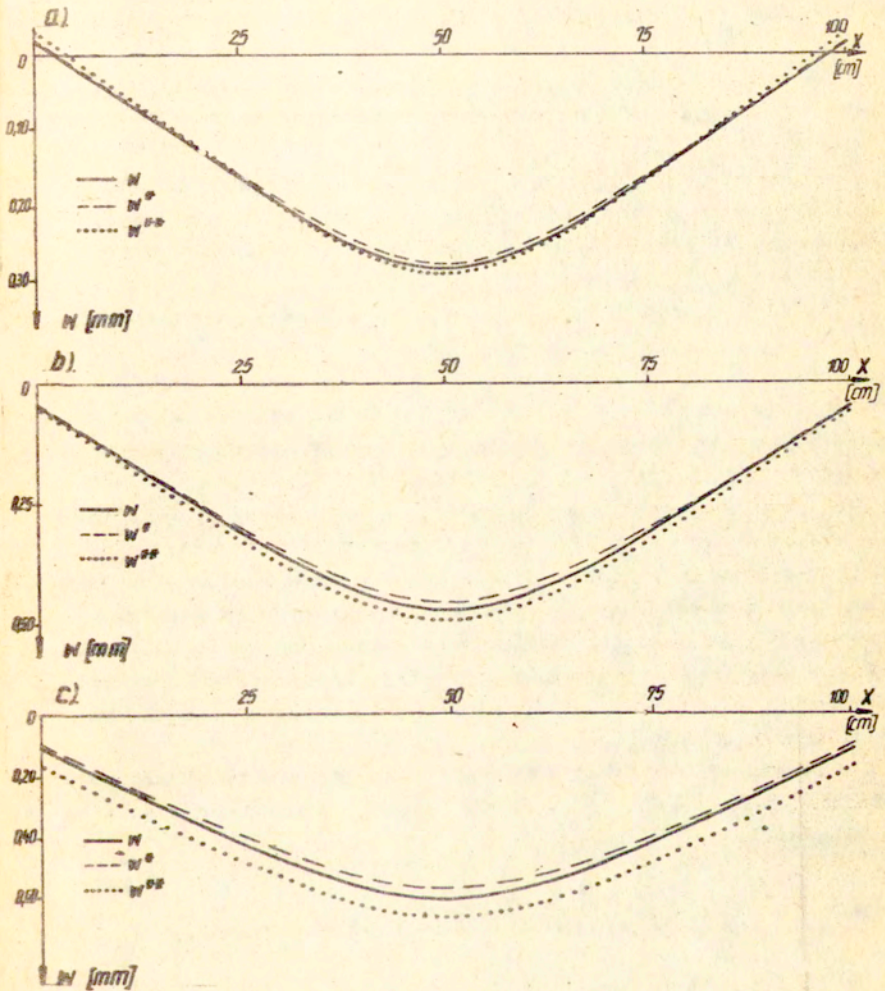
## 5. Podsumowanie

Wyniki obliczeń numerycznych przedstawione w postaci krzywych deformacji podłoża sprężystego świadczą o efektywności i poprawności nowej koncepcji podłoża sprężystego.

Znaczne rozbieżności występujące pomiędzy wynikami otrzymanymi dla modelu zaproponowanego w pracy, a wynikami uzyskanymi dla klasycznego modelu WINKLERA były oczekiwane i są uzasadnione uwzględnieniem sił stycznych w przekrojach poprzecznych pasma sprężystego.



Rys. 7. Linie ugięcia belki posadowionej na podłożu sprężystym w przypadku obciążenia stałego; a/ dla  $h=0,25\text{m}$ , b/  $-h=0,50\text{m}$  i c/  $-h=1,00\text{m}$ .



Rys. 8. Linie ugięcia belki posadowionej na podłożu sprężystym w przypadku obciążenia skupionego; a/ dla  $h=0,25\text{m}$ , b/ dla  $h=0,50\text{m}$  i c/ dla  $h=1,00\text{m}$ .

Jeszcze lepszym potwierdzeniem prawidłowości opracowanego modelu jest prawie całkowita zgodność wyników dla tego modelu z wynikami dla modelu WŁASOWA. Ta niepełna zgodność wyników jest tłumaczona uproszczeniem tych modeli. Uproszczenie modelu WŁASOWA jest znane [10]. Natomiast niedoskonałość modelu, będącego tematem pracy, jest spowodowana następującymi ważniejszymi przyczynami:

1. przyjęciem hipotezy liniowego rozkładu naprężeń normalnych w przekrojach poprzecznych pasma sprężystego, czego implikacją jest paraboliczny rozkład naprężeń stycznych w tych przekrojach,
2. nieznanością formuły określającej dokładną wartość parametru  $k$ .

Praktycznym spostrzeżeniem w drugiej części pracy jest dobra zgodność wyników uzyskanych dla belki opartej na paśmie sprężystym z wynikami dla belki znajdującej się na podłożu WŁASOWA. Wydaje się jednak, że równanie różniczkowe szóstego rzędu, wyprowadzone w pracy, lepiej opisuje linię ugięcia belki posadowionej na podłożu sprężystym, aniżeli równanie różniczkowe czwartego rzędu występujące w modelu WŁASOWA, zwłaszcza, że w tym ostatnim zdefiniowano, na końcach belki, tzw. zastępcze siły skupione oraz w przekrojach poprzecznych belki tzw. zastępcze siły tnące, gdyż inaczej ilość stałych całkowania byłaby niezgodna z ilością, naturalnie występujących, warunków brzegowych.

Główną zaletą nowej koncepcji jest jej efektywny algorytm obliczeń przy jednocześnie zadawalającej, w wielu przypadkach, dokładności.



Literatura

- [1] BOUSSINESQ J.: Application des potentiels a l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Gauthier-Villars, Paris 1885.
- [2] MACZKA J., SZEFER G.: Belka Timoszenki przedziałami spoczywająca na podłożu typu Wieghardta. Archiwum Inżynierii Lądowej, t. 17, z. 1 PWN, Warszawa 1971.
- [3] MURAWSKI G. B.: O modeli uprugowo osnowania, Stroitelna mekhanika i raszcziot serużeniej, 6, 1967.
- [4] NOWACKI W.: Mechanika budowli. PWN, Warszawa 1975.
- [5] PASTERNAK P. L.: On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. Gosudarvennoe Izdatelstwo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekure, Moscow, USSR 1954.
- [6] RUTA P., LANGER J.: Uproszczony model inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika, 13, z. 5, 1983.
- [7] RUTA P.: Uproszczony model inercyjnego podłoża sprężystego i jego zastosowania. Raport Inst. Inż. Ląd. Politechniki Wrocławskiej, 52, PRE, 1984.
- [8] STIEPANOW W.W.: Równania różniczkowe. PWN, Warszawa 1964.
- [9] SWITKA R.: Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego. Politechnika Poznańska, Rozprawy 31, Poznań 1968.
- [10] WŁASOW V. Z., LEONTIEV U. N.: Balki, płyty i obożoczki na uprugom osnowani. Moskwa 1960.
- [11] YLINENA., MIKKOLA M.: Beam on a Wieghardt - type elastic foundation. Int. 7. Sol. Struct., 3, 1967.