RACHUNEK WYKREŚLNY

NA PŁASZCZYZNIE

CZĘŚĆ PIERWSZA.

PRZEZ

M. SZYSTOWSKIEGO

Inżyniera Komunikacyj

b. ucznia Szkoły Politechnicznéj w Rydze i Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu

i

A. MARTYNOWSKIEGO

Inżyniera

b. ucznia Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu.

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, 7 czerwca 1877.)

TREŚĆ CZĘŚCI PIERWSZÉJ :

BIBLIOGRAFIA

PODRĘCZNIKÓW, BROSZUR I ARTYKUŁÓW DOTYCZĄCYCH

RACHUNKU WYKREŚLNEGO

ORAZ

STATYKI I DYNAMIKI WYKREŚLNÉJ.

Rachunek Wykreślny i jego zastosowania zyskują obecnie coraz większe koło zwolenników, uważaliśmy więc za stosowne podać tu bibliografię prac dotyczących téj gałęzi wiedzy. Posługiwaliśmy się tu głównie pracą p. WEYRAUCH'a *Ueber die graphische Statik*, ogłoszoną w 1874 r., którą staraliśmy się dopełnić pracami nowszemi aż do dni dzisiejszych.

SPIS ALFABETYCZNY.

—

A. — STATYKA WYKREŚLNA

(WRAZ Z RACHUNKIEM WYKREŚLNYM)

—

I. — PODRĘCZNIKI STATYKI WYKREŚLNÉJ.

1. **ABAKANOWICZ Bruno.** *Zarys Statyki Wykreślnéj.* Część pierwsza. Lwów, 1876. (Dzieło dotychczas jedyne w języku polskim. Autor posiłkuje sią przeważnie dziełem p. Culmann'a. Wykład elementarny nie odznacza się dokładnością matematyczną.

2. **BAUSCHINGER.** *Elemente der Graphischen Statik, mit Atlas von* 20 *Tafeln.* München, Oldenburg, 1871. (Dzieło to nie posługuje się wcale wyższą geometryą.)

3. **CREMONA.** *Elementi di calcolo grafico.* Torino, 1864.

4. **CULMANN K.** *Die Graphische Statik mit Atlas von* 36 *Tafeln.* Zürich, Meyer und Zeller, 1866. (Dzieło wiekopomne i najzupełniejsze; obecnie znajduje się w druku wydanie drugie, którego tom pierwszy ukazał się już w roku 1875.)

5. **LÉVY Maurice.** *La Statique graphique et ses applications aux constructions, texte et atlas.* Paris, Gauthier-Villars, 1874. (Podręcznik opracowany na zasadach elementarnych, jedyny w języku francuzkim. Dzieło p. Levy'ego, według naszego zdania, prędzéj można nazwać dziełem traktującém o nauce niż samą naukę, główną jego ozdobą jest część pierwsza.)

6. v. **OTT. K.** *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik.* Prag, Calwe, 1870. Wydanie drugie w 1872. (Dziełko bardzo przystępne dla początkujących, na zasadach całkiem elementarnych.)

7. **REULEAUX**. *Hilfslehren aus der Graphostatik*, w wydaniu trzeciém dzieła *der Constructeur*. Braunschweig, Vieweg, 1872.

8. **ROLLA.** *Elementi di Statica grafica.* Milano, 1874.

II. DZIEŁA TRAKTUJĄCE O STATYCE WYKREŚLNÉJ.

1. **Dr WEYRAUCH**. *Ueber die graphische Statik.* Leipzig, Teubner, 1874. (Dziełko to jest przedrukiem, opatrzonym przypiskami, artykułu tegoż autora uprzednio wydanego pod tymże tytułem w *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1874, 5 Heft.)

III. — ARTYKUŁY I BROSZURY ZE STATYKI WYKREŚLNÉJ.

1. **CREMONA B.** *Le figure reciproche nella Statica grafica.* Milano, Længer, 1872. (Wolny przekład niemiecki tego dzieła znajdujemy w *Ztsch. d. œstr. Arch. und Ing. Vereines,* 1873, str. 230.)

2. **COUSINERY E.-B.** *Application des procédés du calcul graphique à divers problèmes de stabilité.* Paris, 1839. (Zasługuje na uwagę szczególnie dla podanego sposobu do obliczania grubości łożysk oporowych.)

3. **COTTERILL J.-H.** *On the graphic construction of bending moments. Engineering.* London, 1869. (Autor wykłada teoryę belek prostych, uwzględniając prace Culmann'a i Reuleaux.)

4. **CULMANN K.** *Ueber das Parallelogramm und über die Zusammensetzung der Kræfte. Vierteljahrschrift d. Naturforsch Ges. zu Zürich,* 1870, str. 1.

5. **EGGERS H.** *Grundzüge einer graphischen Arithmetik.* Schaffhausen, 1865. (Służy do wykreślania równań i szeregów.)

6. **FRÆNKEL W.** *Zur Theorie des elastischen Bogentræger. Ztsch. d. hannœv. Arch. u. Ing. Vereins.* 1869, str. 115.

7. **GRUNERT J.-A.** *Ueber eine graphische Methode zur Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen Vierecks. Archiv d. Math. und Phys.*, LII, 1871, str. 494.

8. **HARLACHER A.-R.** *Die Stützlinie im Gewœlbe. Tech. Blætter*, 1870, str. 49. (Artykuł ten ułożony jest według Culmann'a.)

9. **HÆSELER C.** *Beitrag zur Theorie der Futter- nnd Stützmauern. Ztsch. d. hannœv. Arch. u. Ing. Vereins.* 1873, str. 36. (Według Culmann'a.)

10. **HEUSER.** *Zur Stabilitätsuntersuchung der Gewœlbe. Deutsche Bauzeit.* 1872, str. 365.

— *Graphische Ermittelung der Ordinaten des Schwedlerschen Trægers. Ztscht. für Bauwesen v. Erbkam.* 1873, str. 523. (Sposób ułatwiony.)

11. **JÆGER Eug.** *Das graphische Rechnen* (*Promotions-Dissertation*). Speyer, 1865. (Służy do wykreślania równań i szeregów.)

12. **H. JENKINS.** *On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains of fromwork. Transact. of the R. Soc. of Edinbnrgh*, 1870 (XXV), str. 441.

13. **MOHR**, *Beitræge zur Theorie der Holz und Eisenconstructionen. Ztsch. d. hannæv. Arch. u. Ing.-Vereins.* 1868, str. 19 i tamże, 1870, str. 41.

— *Theorie der Bogenfachwerkstræger. Hannæ-Bauz*, 1874, str. 223.

— *Beitrag zur Theorie der elastischen Bogentræger. Ztsch. d. hannæv. Arch. u. Ing.-Vereins.* 1870, str. 389. (Artykuł ten zawiera w sobie także i krytykę metody p. Frœnkel'a.)

— *Beitrag zur Theorie des Erddruckes. Ztschr des hannæv. Arch. u. Ing.-Vereins.* 1871, str. 334. (Z uwzględnieniem nowych teoryj analitycznych.)

14. **MOST**. *Ueber eine allgemeine Methode, geometrisch den Schwerpunkt beliebiger Polygone und Polyeder zu bestimmen. Arch. d. Math. und Phys.* 1869, str. 355.

15. **PONCELET T.-V**. *Mémoire sur la stabilité des revêtements et leurs fondations. Mém. de l'off. du Génie.* 1838, XIII. (Jest to pierwsza teorya analityczno-wykreślna w tym przedmiocie, tłomaczenie niemieckie, w 1842, p. Lahmeyer odbitka w Paryżu 1842.)

16. **RANKINE**. *Manuel of civilengineering.* London. 4 ed., 1865. (Metoda wykreślna do obliczania parcia ziemi na mury oporowe.)

17. **RITTER W**. *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken.* Zurich, 1871, Meyer und Zeller. (Ta praca p. Ritter'a odznacza się wielką jasnością wykładu. Autor w dziełku tém przedstawia nam metodę Mohra, której znaczenie jest niezaprzeczalném.)

— *Anwendung der neuen Theorie des continuirlichen Trægers auf Drehbrücken. Notizblatt des techn. Vereins zu Riga.* 1874, VII u. VIII.

18. **SAINT-GUILHEM**. *Mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharges. Ann. des ponts et chaussées.* 1858, I sem., str. 319. (Ułożony według metody Poncelet'a.)

19. **SCHÆFFER**. *Graphische Ermittelung der Ordinaten des Schwedlerschen Trægers. Erbkam's Ztschr.* 1873, str. 237, a także w 1874, str. 391.

20. **SCHEFFLER H**. *Der Situátions-Calcul.* Braunschweig, 1851.

21. **SOLIN J**. *Geometrische Theorie der continuirlichen Träger. Mitth. d. Arch. und Ing. Vereins in Böhmen*, 1873.

22. **STAMM E**. *Sul calcolo graphico dei polinomi intieri et rationali della forma* $x^m+x^{m-1}+\ldots qx+l$. W czasopismie *Rendi conti del Reale Instituto Lombardo.* Milano, 1864. (Służy do wykreślenia równań i szeregów.)

23. **SZYSTOWSKI M**. *Teorya sklepień. — Nowy sposób kreślenia krzywéj ciśnień w sklepieniach.* Paryż, 1877, *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych*, t. IX.

— *Nouvelle théorie de la courbe de pression. Ann. Industrielles*, 1877. Drugie półrocze.

24. **VÓLA**. *Beitræge zur graphischen Berechnung elastischer Bogentræger mit Kæmpfergelenken. Mitth. d. Arch. und Ing. Vereins in Bœhmen*, 1873.

25. **WINKLER E**. *Theorie der Brücken.* Wien, Gerold, 1872. (Dzieło to zasługuje na szczególną uwagę specyalistów.)

— *Neue Theorie des Erddruckes.* Wien, Waldheim, 1872.

B. — DYNAMIKA WYKREŚLNA.

1. **KOPP.** *Zur graphischen Phoronomie, Ztsch. f. Math. und Phys.* 1872, str. 12.

2. **PRŒLL.** *Begründung graphischer Methoden zur Lœsung dynamischer Probleme. Givil-Ingenieur*, 1873.

3. **PRŒLL.** *Versuch einer graphischen Dynamik mit* 10 *Tafeln.* Leipzig, Felix, 1874.

4. **SEEBERGER.** *Ableitung der Theorie der oberschlæchtigen Wasserræder. Civilingenieur*, 1869, str. 398, tamże, 1870. str. 439.

SPIS CHRONOLOGICZNY DZIEŁ POWYŻÉJ PRZYTOCZONYCH.

(Cyfra rzymska oznacza dział do którego praca autora jest zaliczoną; cyfra zwyczajna, N° porządku.)

1838 — Poncelet J.-V (III, 15), Metz.
1839 — Cousinery E.-B. (III, 2), Paris.
1851 — Scheffler H. (III, 20), Braunschweig.
1858 — Saint-Guilhem (III, 18), Paris.
1864 — Stamm E. (III, 22), Milano.
1865 — Eggers H. (III, 5), Schaffhausen.
1865 — Jæger Eug (III, 11), Speyer.
1865 — Rankine (III, 16), London.
1866 — Culmann K. (I, 4), Zürich.
1868 — Mohr (III, 13).
1869 — Cotterill T.-H. (III, 3).
— Frænkel W. (III, 6).
— Most (III, 14).
— Seeberger (*Dyn. Wykr.*, 4).
1870 — Culmann K. (III, 4), Zürich.
— Harlacher A. R. (III, 8).
— Jenkin (III, 12), Edinburgh.
— Mohr (III, 13).
— v. Ott K. (I, 6), Prag.
— Seeberger (*Dyn. Wykr*, 4).
1871 — Bauschinger (I, 2), München.
— Grunert T.-A (III. 7).
— Mohr (III, 13).
— Ritter W, (III. 21). Zürich.
1872 — Cremona B. (III, 1), Medyolan.
— Heuser (III, 10).
— Kopp (*Dyn. Wykr.*, 1).
— v. Ott K. (I. 4), Prag.
— Reuleaux (I, 7), Braunschweig.
— Winkler E. (III, 25), Wien.
1873 — Hæseler C. (III, 9).
— Heuser (III, 10).
— Prœl (*Dyn. Wykr*, 2), Leipzig.
— Schæffer (III, 19).
— Solin T. (III, 21).
— Vóla (III, 24).
1874 — Cremona (I, 3), Milano.
— Lévy Maurice (I, 5), Paris.
— Mohr (III, 13).
— Prœll (*Dyn. Wykr.*, 3), Leipzig.
— Ritter W. (III, 17), Riga.
— Rolla (I, 8), Milano.
— Schæffer (III, 19).
— Dr Weyrauch (II, 1), Leipzig,
1875 — Culmann K. (I, 4), Zürich.
1876 — Abakanowicz Br. (I, 1), Lwów.
1877 — Szystowski M. (III, 23), Paryż.

WSTĘP

Przedmiot nauk wykreślnych i ich podział. — Nauki wykreślne, są to nauki podające sposoby rozwiązywania kwestyj nauk matematycznych za pomocą wykreślenia geometrycznych figur.

Nauki Wykreślne dzielą się na :

A) Nauki Wykreślne w ścisłém znaczeniu tego wyrazu :

a) Geometrya Wykreślna, (Géometrie Déscriptive, Darstellende Geometrie) ;

b) Geometrya położenia (Géométrie perspective, Geometrie der Lage),

c) Rachunek Wykreślny (Calcul graphique, Graphisches Rechnen).

B) Nauki Wykreślne stosowane :

Nauki z tego działu, studyowane dotychczas są :

a) Statyka Wykreślna (Statique graphique, Graphische Statik) ;

b) Dynamika Wykreślna (Dynamique graphique,Graphische Dynamik) ;

a w przyszłości może one obejmą : Fizykę, Statystykę, i t. p.

Zadanie Rachunku Wykreślnego i jego podział. — Rachunek Wykreślny ma za przedmiot podać sposoby rozmaitych działań na liniach za pomocą liniału i cyrkla i wykazać związki otrzymanych ztąd wypadków z danemi liniami.

Rachunek Wykreślny dzieli się na :

I. Rachunek Wykreślny na płaszczyznie;

II. Rachunek Wykreślny w przestrzeni.

W niniejszéj pracy mamy zamiar traktować część pierwszą Rachunku Wykreślnego, czyli Rachunek Wykreślny na płaszczyznie.

Analitycznie każda wielkość wyraża się liczbą, otrzymaną z porównania danéj wielkości z pewną wielkością téj saméj natury wziętą za jedność. Graficznie wszelka ilość rzeczywista $\pm$ A, a nawet wszelka ilość urojona $\pm B\sqrt{-1}$ lub wieloraka $\pm A \pm B\sqrt{-1}$ może być przedstawiona linią prostą, na podstawie pewnéj wielkości, wziętéj za jedność porównania. I tak naprzykład : dla ilości rzeczywistych, jeżeli pewną siłę, objętość lub ciężar przedstawimy długością 1go centymetra, to prosta, któréj długość równą jest n centymetów, przedstawiać nam będzie siłę, objętość, ciężar n razy większy. I odwrotnie, oznaczywszy powierzchnię 1go metra kwadratowego, ciśnienie 1éj atmosfery, przeciąg czasu równy 1éj godzinie i t. p., długością k milimetrów, wypadnie wtedy powierzchnię n metrów kwadratowych, ciśnienie n atmosfer, przeciąg n godzin i t. p., przedstawić prostą nk milimetrów długości.

Linia prosta, prócz znaczenia czysto geometrycznego, może więc być uważana jako *wykreślenie* wszelkiéj *ilości wielorakiéj* i rozpatrywana z tego punktu widzenia, staje się ona potężném narzędziem do badania rozmaitych związków istniejących między wielkościami wchodzącemi w zakres nauk matematycznych. Linia prosta stanowi zatém naturalny punkt wyjścia Nauk Wykreślnych.

ROZDZIAŁ I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

§ 1. **Cechy określające linie wchodzące w zakres Rachunku Wykreślnego.**— Cechy określające linię prostą podlegającą studyom Rachunku Wykreślnego są następujące :

1° *Jéj położenie*, to jest jéj nachylenie i odległość od pewnych, wyznaczonych na płasczyznie linij. Analitycznie wyraża się ono równaniem : $ax+by+c=0$, stosującém się, jak wiadomo, do każdéj linii prostéj.

2° *Jéj początek*, to jest punkt wzięty na jéj położeniu, od którego się odkłada w jedną lub w drugą stronę, liczebna wielkość linii.

3° *Jéj kierunek*, to jest stronę w którą *dana* linia została przebieżoną przez punkt idealny posuwający się po położeniu téj linii, to jest, po nieograniczonéj prostéj otrzymanéj z przedłużenia danéj linii.

4° *Jéj wielkość*, to jest stosunek długości przedstawionéj na rysunku do przyjętéj skali, czyli do długości wziętéj za jedność miary.

Zestawiając pojęcie o kierunku linii z pojęciem o ruchu wypada, że *Początek danéj linii* jest punkt w którym punkt ruchomy jéj dosięga. *Koniec linii* jest punkt w którym punkt ruchomy ją opuszcza.

Ztąd wynika, że mając początek *danéj* linii, znamy przez to jéj kierunek.

Dla oznaczenia początku linii będziemy się posługiwali kreską prostopadłą do położenia téj linii tak naprzykład na (fig. 1) punkt m przecięcia się kreski ab z linią A jest początkiem linii A.

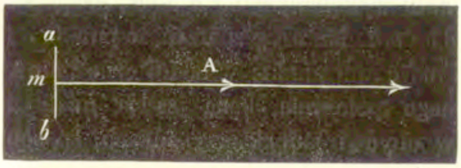

Fig. 1.

Dla oznaczenia kierunku linii będziemy używali strzałki wykreślonéj na saméjże linii i zwróconéj swém ostrzem w stronę odbytego idealnego ruchu.

Strzałka ta może być ustawiona bądź przy końcu linii, bądź téż w dowolnym jéj punkcie, jak wskazuje fig. 1.

§ 2. Używanie strzałek jest nadzwyczaj dogodném we wszystkich kwestyach gdzie wchodzi pojęcie o ruchu. Jako przykład, uważajmy dwa punkta A i B (fig. 2) i oznaczmy kierunek możliwego ich ruchu odpowiednią strzałką nakreśloną przy każdym punkcie. Z podanych przypadków widzimy natychmiast, że w pierwszym razie, strzałki mające kierunki przeciwne lecz dośrodkowe oznaczają *przy-*

ciąganie, albowiem możliwy ruch punktu A jest skierowany ku B, a ruch punktu B jest zwrócony ku A.

W drugim razie, strzałki kierunku przeciwnego, lecz odśrodkowego, oznaczają *odpychanie*, gdyż tak punkt A jak i punkt B mają dążność do oddalenia się od obecnego ich położenia, punkt A — na lewo, a punkt B — na prawo.

Nareszcie, w trzecim razie, gdzie strzałki obu punktów są zwrócone w tę samą stronę widzimy, że punkt A dąży do zbliżenia się do punktu B, ponieważ jego strzałka oznacza kierunek do B; zaś punkt B dąży do oddalenia się od punktu A, gdyż strzałka punktu B oznacza właśnie kierunek od A. Krócéj mówiąc możliwy ruch punktów A i B ma za kierunek prostę AB.

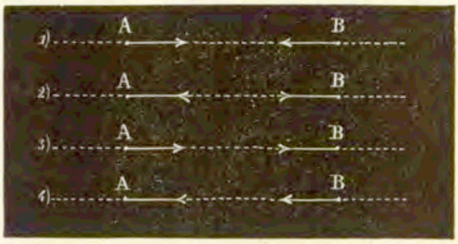

Fig. 2.

Co się tyczy przypadku czwartego, różni się on od przypadku poprzedniego tylko tém, że kierunkiem ruchu punktów A i B jest tutaj prosta BA.

Jeżeli punkta A i B, brane dotąd w znaczeniu geometryczném, uważać będziemy za punkta materyalne, posiadające same w sobie własność wzajemnego na siebie oddziaływania, wtedy rysunek będzie wyrażać :

W pierwszym przypadku wzajemne przyciąganie się punktów A i B;

» 2^{gim} » wzajemne ich odpychanie się;

» 3^{cim} » punkt A, przyciągany przez punkt B, odpycha od siebie punkt B;

» 4^{tym} » punkt A, odpychany przez punkt B, przyciąga punkt B.

§ 3. **Równość linij. — Linie dodatne i odjemne.** — Na zasadzie wskazanego zapatrywania się na linie proste, powiadamy że : Dwie linie są *równe*, czyli że pomiędzy niemi istnieje własność tożsamości, jeżeli wszystkie cechy określające linię, są dla nich jedne i te same. I tak linie A i B są równe, jeżeli ich wielkości są równe, a ich położenie, początki i kierunki są te same, co znaczy, że dwie linie zlewają się z sobą i stanowią jedną linię.

Rozpatrywanie przypadków, gdzie tylko niektóre z cech są wspólne danym liniom, prowadzi nas do określenia linij dodatnych, odjemnych, linij tego samego lub też przeciwnego sobie kierunku.

Uważajmy dwie linie A i B (fig. 3) mające to samo położenie MN; ale jedna z nich została utworzona ruchem punktu wykonanym od a do a', druga zaś ruchem punktu od b do b'. Może się zdarzyć że punkta a i b stanowią jeden i tenże sam punkt; w takim razie linie A i B, prócz wspólnego położenia, będą jeszcze miały i spólny początek; w obydwu jednak przypadkach, sposób tworzenia się linii A jest przeciwny sposobowi utworzenia linii B. Dla odróżnienia więc natury linij A i B, używamy w Rachunku Wykreślnym strzałek zwróconych swém ostrzem w stronę odbytego ruchu; w analizie zaś nadajemy takim liniom znaki pewne : $+$ i $-$. Linie A i B zowią się w Rachunku Wykreślnym liniami *przeciwnego kierunku*, zaś w analizie noszą one nazwę linii *dodatnéj* i linii *odjemnéj*.

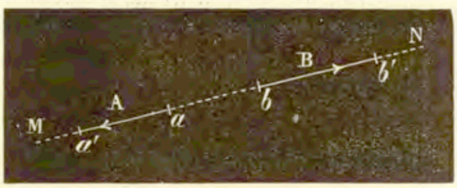

Fig. 3.

§ 4. Kierunek dodatny lub odjemny, również jak linie dodatne lub odjemne, nie istnieją same przez się. Jest to pojęcie względne, zależące od porównania dwóch linij między sobą; to jest, linia może być nazwana odjemną tylko w obec drugiéj linii przyjętéj za dodatną i odwrotnie. Tak naprzykład, na fig. 3, linia B będzie odjemną, jeżeli A jest dodatną, dodatną, jeżeli linię A weźmiemy za odjemną. To co mówimy o znaku linij A i B, stosuje się do kierunku tych linij.

§ 5. **Linie tego samego, przeciwnego i rozmaitego kierunku.** — Rozpatrując wzajemne położenia linij równoległych możemy podać następujące ogólne określenia:

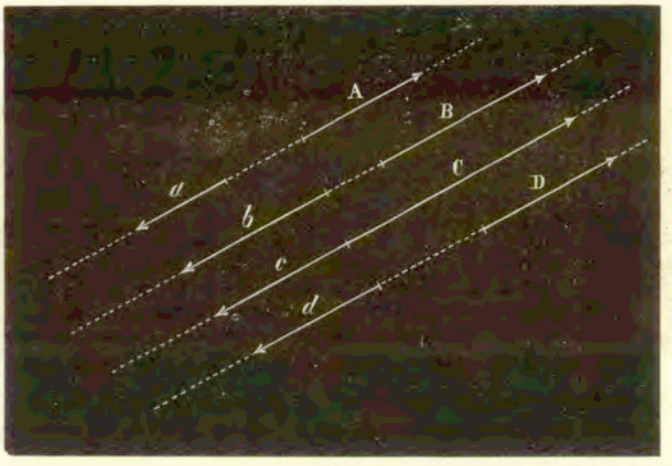

Fig. 4.

1° Dwie, lub jakakolwiek liczba *linij* są liniami *jednakowego kierunku*, jeżeli ich położenia są równoległe, a strzałki zwrócone w tę samą stronę. I tak (fig. 4), linie (A, B, C,...), jak również linie (*a*, *b*, *c*,...) są liniami tego samego kierunku.

2° Dwie, lub jakakolwiek liczba linij są liniami *kierunku przeciwnego*, jeżeli one mają położenie *równoległe* ale strzałki zwrócone w przeciwną sobie stronę. Jeżeli zaś linie będą *tego samego położenia* nazwiemy je, dla odróżnienia, liniami kierunku *wprost przeciwnego*. Tak np., system linij (A, B, C) jest kierunku przeciwnego kierunkowi linij systemu (*a*, *b*, *c*, *d*); i każda z osobna linia pierwszego systemu np. A jest kierunku przeciwnego z jakąkolwiek linią *c* drugiego systemu. Linie zaś A i *a*, B i *b*, C i *c* są liniami kierunku wprost sobie przeciwnego.

Z punktu widzenia analitycznego, jeżeli system linij (A, B, C, D) jest *dodatny*, system (*a*, *b*, *c*, *d*) będzie *odjemny*, i każda z osobna linia tego systemu np. *d* będzie *odjemną* względem jakiejkolwiek linii B systemu (A, B, C, D).

3° Linie *rozmaitego kierunku* są to linie (fig. 5), których położenia nie są równoległe, jakaby zresztą nie była oryentacya ich strzałek.

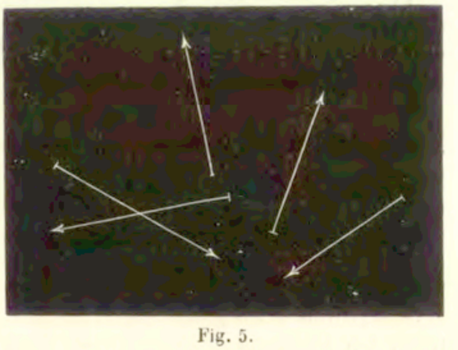

Fig. 5.

Określenie linij tego samego, przeciwnego lub rozmaitego kierunku, wynikające z innego punktu widzenia, podamy w jednym z następujących paragrafów.

§ 6. **Pęk linij; ich węzeł.** — W Rachunku Wykreślnym system linij, których *położenia* przechodzą przez jeden i ten sam punkt, będziemy nazywali *pękiem*, a sam punkt, spólny wszystkim liniom, nazwiemy *węzłem*.

Takie określenie pęku jest ogólne, albowiem :

1° Jest niezależne od kierunku linij, co znaczy, że kierunek każdéj z danych linij może być dowolny;

2° Nie odróżnia ono przypadku, kiedy węzeł leży na saméj linii, od tego, kiedy punkt ten znajduje się na jéj przedłużeniu;

3° Nareszcie, stosuje się ono i do tego szczególnego przypadku, kiedy wszystkie dane linie wychodzą z jednego punktu, lub téż wszystkie zbiegają się w jednym punkcie.

Fig. 6.

Na objaśnienie powyższego określenia podajemy fig. 6, która przedstawia nam rozmaite pęki linij i gdzie punkt O oznacza węzeł danego systemu linij.

§ 7. Pęk kierunków. Wielobok kierunków. — Widzieliśmy, że dla zupełnego wyznaczenia jakiejkolwiek linii potrzeba mieć :

1) Jéj *położenie* (wyrażające się analitycznie znajomością spółczynników równania: $ax + by + c = 0$);

2) Jéj *początek* (to jest spółrzędne x, y tego punktu) ;

3) Jéj *kierunek*, wskazany strzałką (a analitycznie wyrażony kątem liczonym według pewnéj ugody) ;

4) Jéj *wielkość*, dana liczebnie, wraz ze skalą na jéj przedstawienie.

Ale mogą się zdarzyć kwestye, gdzie niektóre z wymienionych cech stają się obojętnemi, to jest, gdzie się rozpatrują już nie linie *wyznaczone*, ale cały system linij, mających pewien spólny charakter.

I tak, naprzykład, możemy mieć do roztrząsania takie zadania, w które wchodzić będą tylko niektóre elementa linii, a mianowicie :

a) Bądź położenie linii i jej kierunek,

b) Bądź wielkość linii i jéj kierunek.

Studyowanie linij może być jeszcze więcéj skrócone i ograniczyć się na rozpatrywaniu samego tylko ich kierunku.

1° W przypadku kiedy dane nam jest położenie linii i jéj kierunek, a właściwiéj kierunek tego położenia, *wielkość* linii nie odgrywa żadnéj roli; przypadek taki obejmuje zatém nieskończoną ilość linij *dowolnéj wielkości*, wziętych na danéj prostéj, i każdy jéj punkt od $-\infty$ do $+\infty$, lub téż od $+\infty$

do $-\infty$, stosownie do strony danego kierunku, może być obrany za *początek* linii, na któréj mają się opierać wymagane zadaniem rozumowania.

Wynika ztąd, że jeżeli w skutek badań przyjdziemy do odkrycia jakiejkolwiek własności tyczącej się danego *położenia*, własność ta przysługiwać będzie całemu szeregowi linij *skończonych*, wziętych na tém położeniu.

Ponieważ w uważanym przypadku prosta $ax+by+c=0$ jest do naszego rozporządzenia na całéj swéj rozległości od $-\infty$ do $+\infty$, więc strzałka oznaczająca kierunek danego położenia, może być postawioną w dowolnym punkcie téj prostéj.

2° W przypadku, kiędy *rzeczywiste* położenie linii na płasczyznie jest dla kwestyi obojętném i gdzie elementa wchodzące w zadanie są tylko: wielkość linii i jéj kierunek, nieskończona ilość prostych do siebie równoległych i zoryentowanych według strzałki oznaczającéj dany nam kierunek (fig. 7, *a* i *b*),

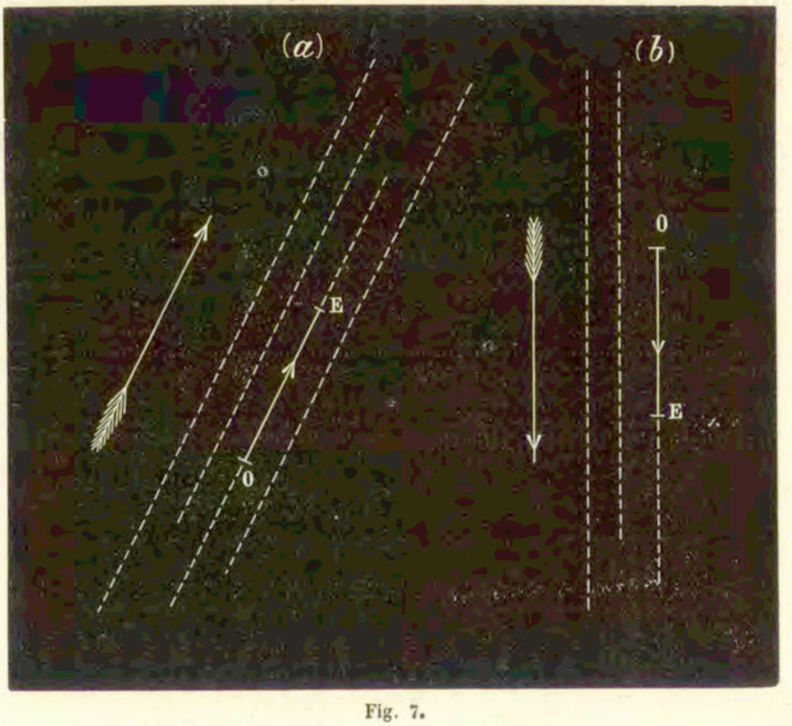

Fig. 7.

może być uważaną za położenie linii, któréj wielkość l wchodzi do naszego zadania. Ale raz obrawszy jednę z tych prostych i odłożywszy na niéj od danego punktu O, jako początku, w stronę wskazaną przez daną nam strzałkę, długość $l=$ OE, przystoi dla oznaczenia kierunku *téj linii* umieścić strzałkę między jéj skrajnościami O i E, gdyż teraz obrana prosta jest do naszego rorporządzenia, tylko w rozległości OE i na téj tylko długości obchodzi nas jéj kierunek.

§ 8. **Pęk kierunków.** — **Wielobok kierunków.** — System dany może się składać z linij najrozmaitszego kierunku (tak naprzykład rysunek może przedstawiać pewną grupę sił działających w różne strony. Kierunki tych linij mogą być porównywane bądź względem siebie, bądź téż względem pewnego, wyznaczonego kierunku przyjętego za kierunek oryentacyjny. Nadto, biorąc linie dane w pewnym porządku, możemy szukać w jaki sposób kierunki ich następują po sobie, w miarę następstwa samych linij składających system.

Studyowanie kierunku danych linij, może być wykonane za pomocą wykreślenia figur pomocniczych. Figury te mogą być dwojakiego rodzaju : *a*) *pęk kierunków* danych linij ; *b*) *wielobok kierunku* tych linij.

Pęk kierunków służy do porównania rozmaitych kierunków pomiędzy sobą z prostego spojrzenia. Dosyć będzie dla tego z dowolnego punktu W płaszczyzny [fig. 8 (*b*)] jako węzła, wyprowadzić linie *a*, *b*, *c*, . . . *h* równoległe do linij danych A, B, C, . . . H i opatrzyć je odpowiedniemi strzałkami. Jeżeli przyjmiemy sposób liczenia kątów powszechnie używany, wtedy zboczenie jednego jakiegokolwiek kierunku W*a*, względem drugiego W*d*, wyrazi się różnicą kątów XW*d* — XW*a*, to jest będzie się ono mierzyło kątem *a*W*d* linij danych A i D. Podobnie, zboczenie kierunku linii H, względem kierunku linii C, wyrazi się różnicą kątów : (180° + X′W*h*) — XW*c*, i t. p,

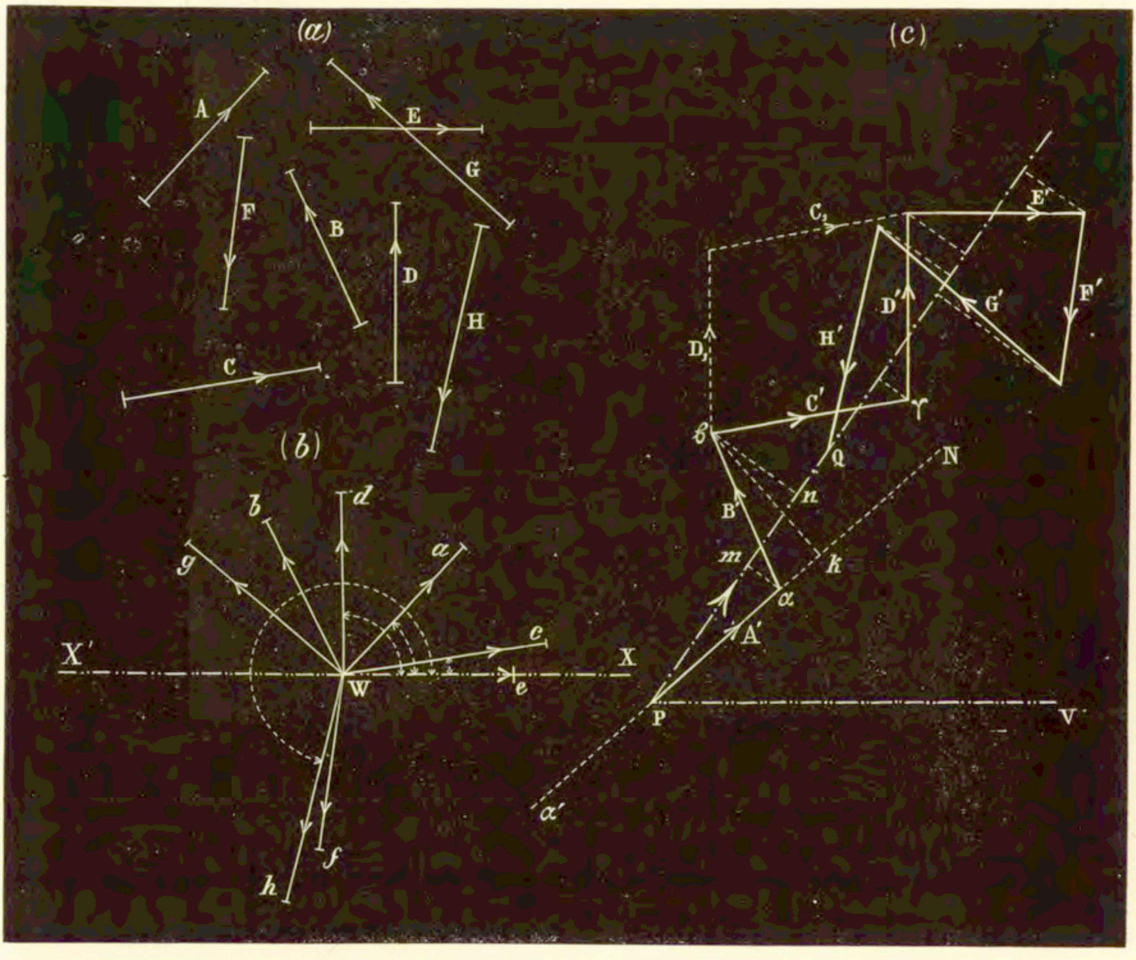

Fig. 8.

Wielobok kierunków służy do wykazania następstwa kierunków linij wziętych w pewnym porządku. W tym celu wyprowadzamy z dowolnego punktu P płaszczyzny (*c*) prostę A′ równoległę do linii A danego systemu i dajemy jéj strzałkę linii A ; potém z dowolnego punktu α tak wykreślonéj prostéj, prowadzimy równoległę B′ do linii B i opatrujemy ją również strzałką linii B i t. d , aż do ostatniéj linii A systemu. Otrzymany ztąd wielobok Pαϐ. . . Q, przedstawiać będzie zestawienie wszystkich kierunków wchodzących w skład danego systemu i może być w skutek tego nazwany *wielobokiem kierunków* danych linij, A, B, . . . H.

Jako szczególny przypadek może się zdarzyć taki system, w którym rozmaite składające go linie układają się tak, że początek każdéj linii, jest zarazem końcem linii poprzedzającéj. Przebiegając wtedy utworzoną ztąd linię łamaną od jéj *początku* do *końca*, postępujemy w kierunku rozmaitych linij systemu, który będzie zatém swym własnym wielobokiem kierunków.

Przy studyowaniu kierunku linij, ich wielkość zostanie z zadania usuniętą, a zatém strony $P\alpha$, $\alpha\beta$... wieloboku kierunków $P\alpha\beta$. . . H mogą być jakiejkolwiek długości. Jednakże, zważając, że ta dowolność w wykreśleniu linij A′, B′, . . . , nie przedstawia żadnéj korzyści, a mając przy tém wzgląd na to, że wielobok kierunków którego strony są odpowiednio równéj wielkości z liniami danemi znajduje nadzwyczaj często i pożyteczne zastosowania, będziemy taki tylko rodzaj wieloboków uważali na przyszłość.

Rozpatrując wielobok $P\alpha\beta$... Q zupełnie niezależnie od systemu linij danych A, B, C...H (fig. *a*), możemy go uważać jako figurę utworzoną ruchem punktu wychodzącego z A, przebiegającego kolejno drożne (trajectoires) : $P\alpha$, $\alpha\beta$, . . . i stającego w punckie Q. Ostateczny wynik tego ruchu jest przeniesienie się punktu ruchomego z jego pierwotnego położenia P na odległość PQ w kierunku linii PQ. Oczywistém jest, że miejsce przybycia punktu ruchomego będzie w zupełności wyznaczone znajomością odległości PQ i jéj kąta QPV z pewną osią PV, przyjętą za kierunek oryentacyjny. Widocznćm jest nadto, że od punktu P do punktu Q można przejść nieskończoną ilością sposobów; ale jest wiadomo, wszystkie zboczenia ruchomego punktu od kierunku linii PQ wykonane podczas jego przebiegu sprowadzają się ostatecznie do zera, a rozmaite jego odległości od punktu wyjścia P dają na ostateczny wynik długość PQ, jakakolwiek byłaby droga przebieżona przez punkt ruchomy między skrajnościami P i Q.

Wielobok $P\alpha\beta$ . . . Q powstał z danych linij, wziętych w alfabetycznym porządku oznaczających je liter ; nic nam jednak nie przeszkadza wykreślić wielobok kierunków linij A, B, . . . H, biorąc je w innym jakimkolwiek porządku, tak na przykład, po wykreśleniu linii A′ równolegle do A i B′ równolegle do B, możemy zmienić porządek następstwa i wykreślić naprzód linię D_1 równoległą do D, a potém C_1 równoległą do C i t. p. O téj zmianie porządku wypadnie nam późniéj mówić szczegółowo ; możemy jednak tu nadmienić, że raz obrany punkt wyjścia P, punkt przybycia Q pozostaje punktem stałym dla wszelkiego możliwego porządkowania linij danych ; czyli jakbyśmy, zacząwszy od punktu P, nie zmieniali drogę ruchomego punktu, przybędzie on zawsze w końcu swego ruchu do punktu Q, byleby tylko rozmaite części téj drogi składały się z linij równych i równoległych do linij danych.

Zapatrując się na wielobok kierunków i na odległość PQ z punktu widzenia dynamicznego i uważając, że ostateczny rezultat odbytego po tym wieloboku ruchu, jest taki sam, jakiby wynikł z poruszania punktu po liuii PQ, w kierunku od P do Q, możemy linię PQ, łączącą punkt wyjścia z punktem przybycia nazwać *drogą wypadkową*, a kierunek od P do Q *kierunkiem wypadkowym* uważanego wieloboku.

§ 9. **Tok linij**. — **Tok postępowy, cofny, zamknięty**. — Uważając jakąkolwiek linię $P\alpha$ (fig. 8) jako utworzoną ruchem punktu, należy odrożniać kierunek, w którym ten ruch został dokonanym, czyli innemi słowy, wypada zwracać uwagę na *tok* linii ; gdyż jedna i ta sama linia $P\alpha$, zachowując tę samą *wielkość* i to samo *położenie*, może być utworzoną tak ruchem punktu od P do α, jako téż od α do P. Otóż, podobnie jak w analizie odróżniamy kierunek osi XX′ i uważamy kierunek OX, idąc od punktu O na prawo, za dodatny, a kierunek OX′, idąc na lewo od punktu O, za odjemny, — w Rachunku Wykreślnym nazywamy ruch punktu w jedną stronę od punktu wyjścia *tokiem postępowym*, a ruch w stronę przeciwną — *tokiem cofnym*. I tak, że jeśli tok linii Pα będziemy uważali za postępowy, ta tok linii αP należy uważać za cofny. Tok postępowy i tok cofny jakiejkolwiek linii, jest coraz większe oddalanie się punktu ruchomego od punktu wyjścia w jedną lub w drugą stronę, to jest od P do α, lub téż od P do α'.

Jeśli punkt ruchomy, wychodząc z P, posuwa się ciągle w jedną i tę samą stronę, np. przebiega linię PN, tok tego punktu jest tokiem postępowym w całéj swéj doskonałości, gdyż odległość jego od punktu wyjścia, uważana w kierunku przyjętego przez ten punkt początkowego ruchu, powiększa się nieograniczenie. Podobnie, idąc ciągle w przeciwną stronę, to jest od P do α', tok punktu ruchomego byłby tokiem cofnym doskonałym.

Z tego poglądu łatwo nam będzie ocenić rodzaj toku dwóch linij Pα i $\alpha\beta$. I tak, punkt ruchomy, przyszedłszy do α, zmienia swój pierwotny kierunek PN na inny kierunek $\alpha\beta$; nic nam jednak nie przeszkadza uważać jednocześnie z ruchem punktu po linii $\alpha\beta$ inny ruch, odbywający się po linii αN i taki, że w każdéj chwili położenie punktu ruszającego się po linii αN, jest rzutem na kierunek PN punktu przebiegającego linię $\alpha\beta$.

Powiemy wtedy, że droga $\alpha\beta$, *oceniona według kierunku prostéj* PN; jest długość $\alpha k = \alpha\beta \cos(\alpha\beta, \mathrm{PN})$ i że tok dwóch linij Pα i $\alpha\beta$ jest tokiem postępowym w kierunku PN, albowiem wynikiem jego jest oddalenie się ruchomego punktu od punktu wyjścia P.

Jeżeli teraz będziemy uważali cały wielobok kierunków P$\alpha\beta$... Q, nie doznamy najmniejszéj trudności w oznaczeniu rodzaju toku jakiejkolwiek liczby linij, względem danego pierwotnego kierunku; dosyć jest bowiem odrzucić w każdéj chwili uważane położenie punktu ruchomego na kierunek dany i patrzeć w jaką stronę, względem punktu wyjścia P, punkt ten upada. Tak naprzykład, biorąc za kierunek oryentacyjny drogę wypadkową PQ widzimy, że rzut punktu α wpada na prostę PQ w punkcie m, idąc od P do Q, tok więc linii Pα jest postępowym względem kierunku PQ; podobnież zobaczymy, że tok linii $\alpha\beta$ również będzie postępowy i że tok dwóch linij Pα i $\alpha\beta$ razem wziętych pozostawał ciągle postępowym, gdyż rzut linii $\alpha\beta$ idzie w kierunku od m do n, i t. p. Widzimy przytém, że ponieważ rzut niektórych z linij przekracza punkt Q, tok pewnych stron wieloboku będzie tokiem *zwrotnym*, gdyż summa rzutów wszystkich jego stron : Pα, $\alpha\beta$... na kierunek PQ, powinna być równą długości PQ.

Jeżeli punkt ruchomy przychodzi w końcu swego ruchu do punktu wyjścia P, wtedy tok całego wieloboku jest *zamknięty* i summa rzutów wszystkich dróg w ten sposób przebieżonych, na jakikolwiek kierunek, jest zerem. Te wiadomości znane powszechnie z analizy, nie potrzebują dalszego nad niemi zastanowienia się,

§ 10. Oznaczenie wieloboku. — Dla oznaczenia rozmaitych części wieloboku będziemy, zamiast liter używali cyfer po sobie następujących : 1, 2, 3, 4, . . . ; każdą stronę wieloboku będziemy oznaczali *jedną* tylko cyfrą. Nadło, zgodzimy się, *raz na zawsze*, ustawiać te cyfry w taki sposób ażeby ich naturalny wzrastający porządek wskazywał nam kierunek cyklu, to jest porządek w którym rozmaite strony wieloboku zostały kolejno przebieżone przez punkt idealny.

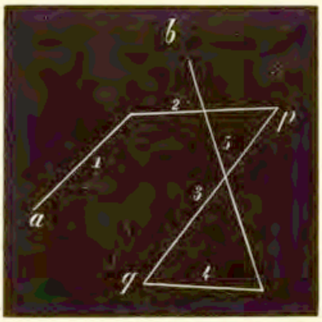

Fig. 10.

Punkt przecięcia się dwóch stron wieloboku po sobie następujących i oznaczonych cyframi n i $n+1$, będziemy zwykle oznaczać przez punkt $(n, n+1)$.

Przyjąwszy powyższą ugodę, używanie strzałek staje się wtedy niekonieczném, albowiem znajomość początku i końca każdéj strony, wypływa ztąd samo przez się, a mianowicie :

Początek jekiéjkolwiekbądź strony danego wieloboku będzie jéj przecięcie się ze stroną oznaczoną przez cyfrę bezpośrednio niższą, a koniec jéj przecięcie się ze stroną oznaczoną przez cyfrę bezpośrednio wyższą.

Jednak, ustawianie strzałek jest zawsze dogodném i chroni od pomyłek mogących zajść podczas kreślenia rysunków.

Figura 10 przedstawia wielobok utworzony z pięciu stron : 1, 2, 3, 4, 5.

Widzimy od razu, że początek wieloboku jest w punkcie *a*, a jego koniec w punkcie *b*. Początek naprzykład strony 3 jest jéj przecięcie się z linią 2, czyli punkt (3, 2), to jest punkt *p*; koniec zaś strony 3 jest jéj przecięcie się z linią 4, czyli punkt (3,4), to jest *p*.

ROZDZIAŁ II

DZIAŁANIA NA LINIACH.

§ 11. **Wielobok pierwszego rzędu danych linij.** — Uważajmy system linij dowolnie na płasczyznie ugrupowanych i danych, co do ich położenia, kierunku, początku i wielkości (§ 1). Jeżeli z jakiegokolwiek punktu, dowolnie na téj płasczyznie obranego, wyprowadzimy linię równoległą do jednéj z linij danych i mającą jéj wielkość i jéj kierunek a następnie, jeżeli wychodząc z końca tak otrzymanéj linii, powtórzymy podobne wykreślenie dla innéj z linij danych i t. d. aż do wyczerpania wszystkich danych linij, to otrzymamy ztąd szereg linij po sobie następujących, z których każda będzie równoległą do jednéj z linij danych i będzie miała jéj wielkość i kierunek. Taki szereg linij będziemy nazywali *wielobokiem pierwszego rzędu danych linij*.

Punkt od którego się zaczyna wykreślenie tego wieloboku to jest jego *początek* nazwiemy *biegunem danych linij*.

Zauważmy, że ponieważ wykreślenie wieloboku pierwszego rzędu jest tylko *przeniesieniem* (translation) linij danych i zestawieniem ich skrajności, więc na mocy określenia równości linij (§ 3) wypada, że każda strona tego wieloboku jest *równa* linii danéj jéj odpowiadającéj. Z paragrafu zaś 8 widzimy, że *wielobok pierwszego rzędu* danych linij, jest to cykl albo *wielobok kierunków*, którego strony mają wielkość linij danych im odpowiednich.

Linie dane zwykle oznaczać będziemy cyframi zwyczajnemi : 1, 2, 3, 4 . . . , a odpowiednie im strony wieloboku 2go rzędu tych linij cyframi kreskowanemi 1′, 2′. 3′, 4′.

Fig. 11.

Figura 11 (*a*) przedstawia system złożony z siedmiu linij, danych co do ich położenia, kierunku i wielkości; figura (*b*) wyraża wielobok 1go rzędu tych siedmiu linij. Strona 1′ jest równoległą do linii 1 i ma wielkość téj linii; strona 2′ jest równoległą do linii 2, i jest téj saméj co i linia 2 wielkości, i t. d. Rozmaite strony wieloboku mają kierunek odpowiednich im linij danych; strony te nie są opatrzone strzałkami, albowiem kierunek każdéj z nich wynika sam przez się (§ **10**) z porządku w jakim cyfry 1′ 2′ 3′, . . . , po sobie następują. Punkt O, *początek* wieloboku jest *biegunem* linij danych; punkt E jest *końcem* wieloboku.

§ 12. Charakter działań Rachunku Wykreślnego. — Prosty rzut oka na określenie linii prostéj, podane w poprzedzających paragrafach, jest dostatecznym aby ocenić całą doniosłość przyjętego przez nas systemu. Linia prosta, rozumiana co do jéj położenia, kierunku, początku i wielkości posiada niezaprzeczalne przymioty do przedstawienia każdéj pomyślanéj wielkości, a system linij ułożonych podług pewnych zasad, może służyć do badania rozmaitych związków między ilościami.

Określenia nasze stawiają zatém Rachunek Wykreślny na poziomie czystéj analizy z tą tylko różnicą, że działania jego ograniczają się na ilościach skończonych i dostatecznie wielkich, ażeby przy zwyczajnie używanych skalach, mogły one być przeniesione na papier, to jest, ażeby ich wartość przedstawiona na rysunku, mogła być ocenioną jeżeli nie z zupełną dokładnością, to z dostateczném przybliżeniem, którego granica zależeć będzie od ważności samego zadania i od dokładności wchodzących w nie ilości danych.

Co się zaś tyczy stosunku, jaki zachodzi między Rachunkiem Wykreślnym i zwyczajnemi wykreśleniami geometrycznemi możemy zrobić tę uwagę, że w geometryi miano tylko na celu uzmysłowić twierdzenia i wnioski wykazane poprzednio analitycznie, wtedy gdy w Rachunku Wykreślnym postawimy twierdzenia i dojdziemy do wniosków bez żadnéj wiedzy równań algebraicznych. Rachunek Wykreślny ma więc za cel zastąpić, *w zakresie ilości skończonych*, i analizę i pomocnicze jéj wykreślenia geometryczne.

Widoczném jest, ze wypadki otrzymane z rozmaitych działań Rachunku Wykreślnego powinny przedstawiać tę samą liczbę cech lub własności, jaką się charakteryzowały wielkości dane do rachunku. Warunek ten jest tylko prawem *jednorodności* (homogénéité) znaném w analizie.

I tak naprzykład, jeżeli dane ilości są warunkowane nie tylko ich wielkością bezwzględną, ale nadto ich położeniem i kierunkiem, więc i rezultat działań Rachunku Wykreślnego winien być wyznaczonym co do jego wielkości, położenia i kierunku.

Wychodząc z tak ogólnego punktu widzenia, mającego przewodniczyć wszystkim działaniom na liniach, należy przedewszystkiém zwrócić szczególną uwagę na *określenia* rozmaitych działań. Określenia te, dla saméj już ogólności poglądu, będą oczywiście różnić się od zwyczajnych określeń arytmetycznych ; z zasady zaś naszéj nauki wypada, że powinny one być przytém takiéj natury, ażeby ich ogólna postać sprowadziła się do określenia arytmetycznego w tym szczególnym przypadku linij, kiedy wprowadzony w Rachunek Wykreślny element, ugólniający pojęcie o linii, to jest, jéj *położenie*, nie będzie odgrywać żadnéj roli.

I. — DODAWANIE LINIJ,

§ **13 Dodawanie linij. Określenie.** — *Dodać do siebie linie dane jest to wykreślić ich wielobok pierwszorzędny i połączyć jego początek z końcem.* Linia ztąd otrzymana przedstawiać nam będzie *summę* linij danych.

Zaczniemy od rozpatrzenia systemu dwóch tylko linij.

Niech będą linie dane : 1 i 2 (fig. 12). Ażeby znaleźć ich summę wyprowadźmy z dowolnego punktu O(fig. 12 *b*) linię O*a* czyli 1', równoległą do 1, jéj równą i tego samego kierunku; następnie z punktu *a* poprowadźmy w podobny sposób linię *a*E czyli 2', odpowiadającą danéj lini 2. Początkiem otrzymanego wieloboku jest punkt O, a jego końcem punkt E; tak że na mocy powyższego określenia, linia OE, czyli S, jest summą danych linij : 1 i 2.

Z podanego określenia summy dwóch linij wypływa znajomość *wielkości* téj summy i jéj *kierunku* ; gdyż jéj wielkość wyrównywa odległości punktów O i E, a jéj kierunek idzie od O do E, jak wskazuje strzałka na (fig. *b*).

Należy jeszcze określić *położenie* téj summy. Otóż, pod *położeniem summy dwóch linij* rozumieć będziemy *położenie prostéj przeprowadzonéj przez punkt przecięcia się położeń danych linij* 1 *i* 2 *równolegle do lini* OE; tak, że położeniem summy S będzie położenie lini PQ.

Z tego określenia położenia summy dwóch linij wypada natychmiast, jako wniosek, że położenie summy systemu linij zbiegających się w jednym punkcie przechodzi przez ten punkt; czyli, innemi słowy : *summa pęku linij przechodzi przez ich węzeł.*

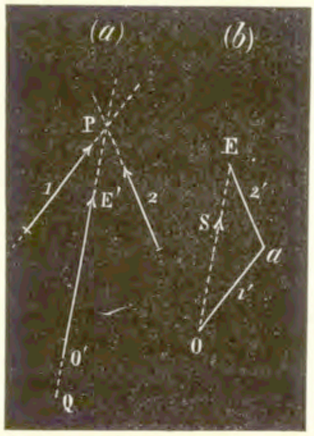

Fig. 12.

Fig. *b* jest figurą pomocniczą, nie należącą do danego systemu linij. Wypada zatém *wielkość* summy S i jéj *kierunek* przenieść na *położenie* téj summy, to jest włączyć do *danego* systemu wypadek otrzymany z wykonanego na nich działania. Idzie tylko o znajomość punktu prostéj PQ od którego mamy odłożyć wielkość OE, czyli innemi słowy, należy wiedzieć, gdzie jest *początek* summy dwóch linij. Otóż do pewnego czasu, początek summy zostawimy niewyznaczonym, to jest że wielkość summy O'E' = OE, będziemy odkładać na linii PQ od punktu O', dowolnie na niéj wziętego.

§ **14.** Rozpatrzmy teraz, jak na mocy podanego określenia wykonywać się będzie dodawanie jakiejkolwiek liczby linij.

Dla bliższego wyjaśnienia przedmiotu będziemy tu odróżniać następujące przypadki.

I. Dane linie są rozmaitego położenia i różnego kierunku. . . . . . .
II. « położenia równoległego { a) tego samego kierunku. } rozmaitéj wielkości. / b) różnego kierunku. . . .

PRZYPADEK I. — Niech będą (fig. 13) linie 1, 2, 3, ... , 6 dane co do wielkości, położenia i kierunku. Idzie o znalezienie wielkości, kierunku i położenia summy tych linij.

1° Wielkość i kierunek szukanéj summy otrzymamy odrazu, wykreślając z dowolnego punktu O (fig. 13) jako bieguna, wielobok pierwszego rzędu danych linij (§ 9). Linia OE łącząca początek O wieloboku 1′, 2′, 3′, ... , 6′ z jego końcem E, przedstawiać będzie *wielkość* summy, a jéj kierunek idzie zawsze od punktu O do punktu E ([1]).

Linia OE jest summą linij danych : 1, 2, ... , 6 z samego określenia. Łatwo jednak spostrzedz, że dostatecznem by było podać określenie summy *dwóch* tych linij, ażeby ztąd przyjść do ogólnego wniosku, iż summą jakiejkolwiek liczby linij jest prosta łącząca początek ich wieloboku pierwszego rzędu z jego końcem. W saméj rzeczy dodać do siebie ilości dane 1, 2, ... , 6, jest to dodać linię 2 do linii 1, poczém do otrzymanéj ztąd summy $(1+2)$ dodać linię 3, następnie do nowéj summy $(1+2+3)$ dodać linię 4 i t. d.

Zatém summa linij $1+2+3$ będzie summą linij $(1+2)+3$, czyli $Oa+3=Ob$

» $1+2+3+4$ » $(1+2+3)+4$, » $Ob+4=Oc$

» $1+2+3+4+5$ » $(1+2+3+4)+5$ » $Oc+5=Od$

$$S=1+2+3+4+5+6=Od+6=OE.$$

Linie Oa, Ob, Oc, Od, wyprowadzone z bieguna O do rozmaitych wierzchołków wieloboku pierwszego rzędu : 1′, 2′, 3′, ... , 6′, będziemy nazywać *promieniami* tego wieloboku.

2° Druga część zadania polega na znalezieniu *położenia* summy $S=OE$.

Położenie summy jakiejkolwiek liczby linij wyznaczy się stopniowo z określenia podanego w § 11 i tyczącego się położenia summy *dwóch* tylko linij. I tak [fig. 12(*a*)] :

Położenie summy linij $1+2$ będzie położenie prostéj AB, poprowadzonéj przez punkt przecięcia się A położeń linij danych 1 i 2, równolegle do promienia Oa.

Położenie summy linij $(1+2)+3$ będzie położenie prostéj BC, poprowadzonéj przez punkt przecięcia się B położeń summy linij $(1+2)$ i linii 3, równolegle do promienia Ob.

Położenie summy linij $(1+2+3)+4$ będzie położenie prostéj CD, poprowadzonéj przez punkt przecięcia się C położeń summy linij $(1+2+3)$ i linii 4, równolegle do promienia Oc.

Położenie summy linij $(1+2+3+4)+5$ będzie położenie prostéj DE, przeprowadzonéj przez punkt przecięcia się D położeń summy linij $(1+2+3+4)$ i linii 5, równolegle do promienia Od.

([1]) Zróbmy tu raz na zawsze uwagę że w *tekscie*, przy oznaczaniu linij dwiema literami, będziemy wstawiać je w takim porządku iż pierwsza litera wyrażać będzie początek linii a druga jéj koniec, w skutek czego wymienianie kierunku stanie się zbytecznem. I tak np. mówiąc o linii BA rozumieć będziemy że początek jéj jest w punkcie B, a koniec w punkcie A.

Położenie summy linij (1+2+3+4+5)+6 będzie położenie prostéj EP, przeprowadzonéj przez punkt przecięcia się E położeń summy linij (1+2+3+4+5) i linii 6, równolegle do promienia OE.

Prosta EP przedstawiać będzie zatém szukane *położenie* summy linij danych 1, 2, 3, ... , 6. Pozostaje nam tylko odłożyć na téj prostéj, od dowolnego jéj punktu P *wielkość* summy znalezioną poprzednio i wskazać jéj *kierunek:* tak że linia PQ=OE=S wyraża zupełne rozwiązanie naszego zadania.

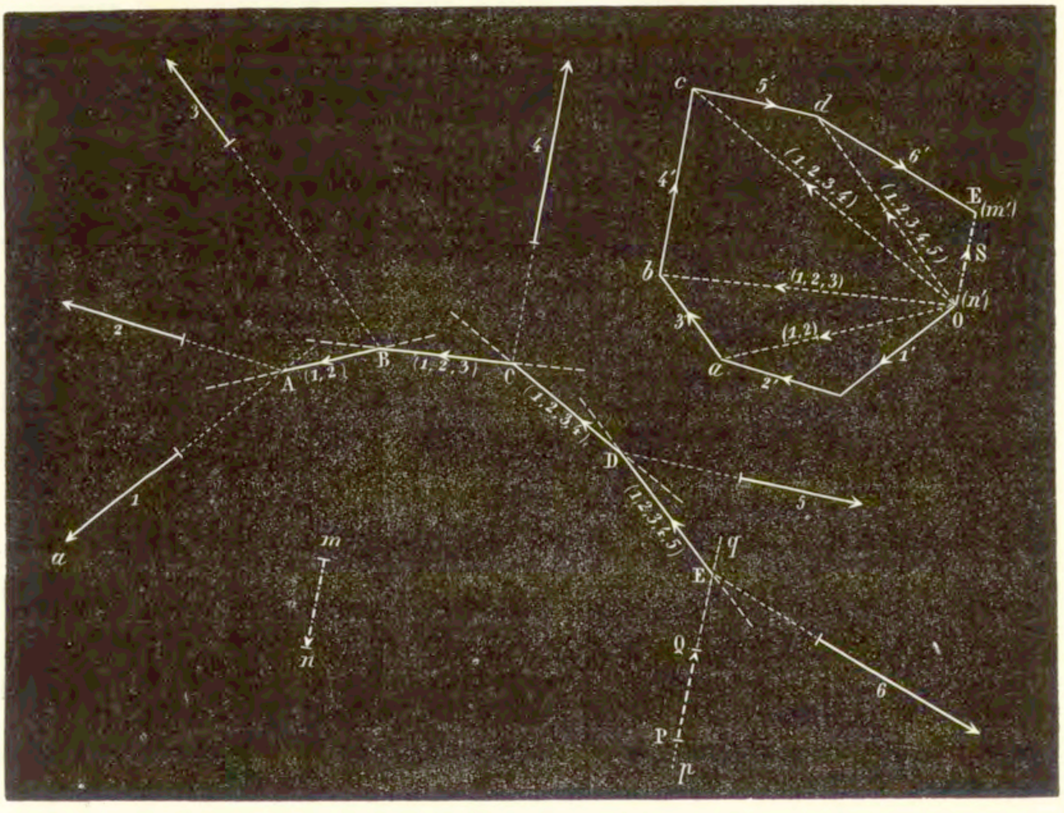

Fig. 13.

Uwaga 1. — Wielobok *a*ABCDEP, otrzymamy z przecięcia się położenia linii 1, od któréj zacząłem było dodawanie, z położeniem summy dwóch pierwszych linij (1+2), a następnie ze wzajemnego przecięcia się położeń kolejno idących po sobie summ: (1+2), (1+2+3),... (1+2+3+4+5+6), będziemy nazywali *wielobokiem drugiego rzędu* linij danych : 1, 2, 3, ... , 6 (franc. polygone funiculaire; niemiec. Seilpolygon).

Ponieważ jakakolwiek linia *k* może być uważana za swą własną summę (czyli za summę linij O+*k*, możemy więc powiedzieć, że *wielobok 2go rzędu danych linij jest wielobok utworzony ze wzajemnego przecięcia się położeń summ tych linij, branych w liczbie wzrastającéj postępowo o jedną linię.* I tak, jeżeli liczba linij danych jest np. 5, więc nazywając je bądź cyframi : 1, 2, 3, 4, 5, bądź literami A, B, C, D, E, wielobok 2go rzędu tych linij będzie pięciobokiem, którego

1szy bok będzie położenie summy	linii	1	lub też linii	A	
2gi «	linij	1 + 2	«	A + B,	
3ci «	«	1 + 2 + 3	«	A + B + C,	
4ty «	«	1 + 2 + 3 + 4 . .	«	A + B + C + D,	
5ty «	«	1 + 2 + 3 + 4 + 5 .	«	A + B + C + D + E.	

Uwaga 2. — Gdyby do danego systemu, składającego się obecnie z linij : 1, 2, 3,... , 6, wprowadzoną była siódma linia *mn* [fig. 13 (*a*)], równoległa do linii łączącéj początek wieloboku O z jego końcem E, i jéj równa, ale kierunku przeciwnego kierunkowi linii OE, wtedy przy wykreśleniu wieloboku 1go rzędu nowego systemu linij, należałoby, przyszedłszy do punktu E [fig. 13 (*b*)] wyprowadzić linię $EO = m'n'$, równoległą, równą i mającą kierunek linii *mn*, przez co koniec *n'* wieloboku 1go rzędu zlałby się wtedy z jego początkiem O. Wypada zatém, że *summa linij których wielobok 1go rzędu zamyka się sam przez się, równą jest zeru.*

Ponieważ promień O*d* przedstawia zawsze summę linij 1 + 2... + 5, więc i w razie wieloboku zamykającego się sam przez się, linia OE, czyli promień OE nie przestaje wyrażać summę linij 1 + 2 + 3... + 6. Zatém przy systemie linij 1, 2, 3, ... , 6, *mn*, których wielobok 1go rzędu jest zamknięty, summa pierwszych sześciu linij : (1 + 2 + ... + 6) jest *równą* (określenia § 5) ostatniéj linii *mn* tego systemu.

Ta uwaga, widoczna przy rozpatrywanym przykładzie, zostanie uogólnioną w paragrafie 16.

Uwaga 3. — Wielobok 2go rzędu α ABCDEP, stosujący się do systemu linij 1, 2, 3, 4, 5, 6, których wielobok 1go rzędu 1' 2' 3' 4' 5' 6' jest niezamknięty, będzie zarazem wielobokiem 2go rzędu lini 1, 2, 3, 4, 5, 6, *mn*, dających wielobok 1go rzędu zamknięty, gdyż wykreślając według podanéj zasady, wielobok 2go rzędu dla systemu linij 1, 2, 3, ... 6, *mn*, należałoby, przyszedłszy do położenia *pq* summy linij 1 + 2 + ... + 6, przedłużając prostę *pq* do spotkania się jéj z daną linią *mn* i z punktu ich przecięcia się, wyprowadzić równoległę do linii wyrażającéj summę linij 1 + 2 + 3 + ... + 6 + *mn*; otóż ta summa jest zero, a punkt przecięcia się linij *pq* i *mn* znajduje się w nieskończoności. Gdyby linia *mn*, zamiast położenia przedstawionego na fig. 13, *a*, znajdowała się na prostéj *pq*, wtedy ostatnią stroną wieloboku 2go rzędu tak zmodyfikowanego systemu, byłaby zawsze linia PE, tylko w tym razie proste *pq* i *mn* miałyby nieskończoną ilość punktów spólnych.

§ **15.** — Określenie summy linij nie miałoby praktycznéj dogodności, gdyby przy wykreśleniu wieloboku 1go rzędu, mającego służyć do wyznaczenia téj summy, należało brać linie dane w pewnym tylko porządku. Otóż, w Rachunku Wykreślnym, podobnie jak i w Arytmetyce, dodawanie linij jest działaniem jednowartościowém, to jest, że *summa jakiejkolwiek liczby linij jest niezależną od porządku w jakim zostały dodane.* Istotnie, widzimy najprzód, że summa linij danych nie zmieni się, jeżeli przy ich dodawaniu zmienimy porządek *dwóch* linij po sobie następujących. I tak (fig. 14), zmieńmy porządek następstwa dwóch linij, naprzykład linii 4 i linii 5, co znaczy, że po wykreśleniu linii 3', zamiast prowadzenia linii 4', a po niéj linii 5', prowadźmy najprzód linię 5_1, równą i równoległą do linii danéj 6, a potém, z końca 6 linii 5', wykreślamy linię 4_1, równą i równoległą linii danéj 4. Otóż, ponieważ z wykreślenia czworobok $5_1 4_1 5' 4'$ jest równoległobokiem, więc nowy obwód $5_1 4_1$ zakończy się w tym samym punkcie *a*, co i obwód dawny 4'5'; zatém linie następne 6' i 7' pozostają na swém dawném miejscu, bez żadnéj zmiany, a w skutek tego prosta OE, idąca od początku do końca wieloboku danego $1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,6'\,7'$ jest zarazem prostą łączącą początek i koniec wieloboku nowego $1'\,2'\,3'\,5_1 4_1 6'\,7'$; co znaczy że dwie summy:

$$(1'+2'+3'+4'+5''+6'+7') \text{ i } (1'+2'+3'+5_1+4_1+6'+7')$$

są sobie równe.

Ponieważ, zamieniając porządek jakiejkolwiek linii wieloboku na porządek linii ją poprzedzającéj, lub po niéj następującéj, summa danych linij się nie zmienia; możemy powtórzyć podobną prze-

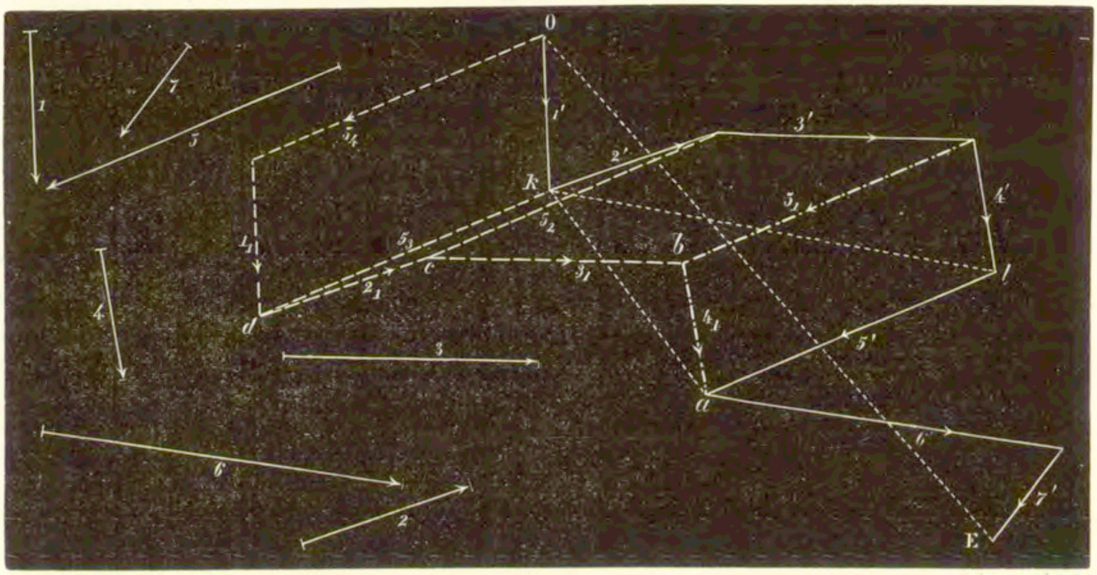

Fig. 14.

mianę porządku po raz drugi, trzeci i t.d. w skutek czego linia ta będzie kolejno zajmować bliższe lub dalsze położenie względem punktu O. Powtarzając więc taką przemianę odpowiednią liczbę razy, będziemy mogli bez naruszenia summy doprowadzić jakąkolwiek linię danego systemu do zajmowania jakiegokolwiek miejsca w wieloboku 1go rzędu tego systemu. I tak, naprzykład linia 5′ była najprzód *piątą* stroną wieloboku 1go rzędu; w skutek pierwszéj przemiany, linia ta zajęła miejsce linii 5_1, to jest stała się ona *czwartą* stroną tego wieloboku; zrobiwszy drugą przemianę, to jest przemieniwszy porządek linij 5_1 i 3′, linia 5′ stanie się linią 5_2, to jest *trzecią* stroną wieloboku; za trzecią przemianą staje się ona, jak wskazuje rysunek, linią 5_3, czyli *drugą* stroną wieloboku; nareszcie za czwartą przemianą, przyprowadzimy dawną linię 5′ do położenia 5_4, stanowiącego *pierwszą* stronę naszego wieloboku.

Wielobok pierwotny:

$$1'\,2'\,3'\,4'\,5'\,6'\,7',$$

i wieloboki otrzymane w skutek kolejnych przemian:

$$1'\,2'\,3'\,5_1\,4_1\,6'\,7',$$

$$1'\,2'\,5_2\,3_1\,4_1\,6'\,7',$$

$$1'\,5_3\,2_1\,3_1\,4_1\,6'\,7',$$

$$5_4\,1_1\,2_1\,3_1\,4_1\,6'\,7',$$

są równowarte, albowiem każdy z nich daje linię OE na summę linij danych.

Widzimy zatém, że porządek w jakim linie dane są wzięte, do wykreślenia ich wieloboku 1go rzędu, nie ma żadnego wpływu na summę tych linij, czyli że *zmiana porządku linij nie zmienia wartości ich summy.*

Należy jednak nie zapominać, że dowodzenie nasze wykazuje tylko, że porządek w jakim linie są dodawane, nie ma żadnego wpływu na *wielkość i kierunek* summy. Okażemy późniéj (§ **26**) że porządek dodawania linij nie zmienia równości i dwóch innych charakterystycznych cech summy to jest *położenia i początku.*

Zrobiwszy tu uwagę ogólną, że system jest złożony z n linij, danych co do ich położenia, kierunku i wielkości, możemy dla każdego punktu O, obranego za początek, czyli biegun, wykreślić tyle wieloboków 1go rzędu równoległych pomiędzy sobą, jaką jest liczba *przemian* z n przedmiotów, a ta liczba $\mathfrak{P}_n$ równą jest, jak wiadomo z algebry, iloczynowi ciągu naturalnego liczb całkowitych od 1 aż do n, tak że liczba możliwych wieloboków 1go rzędu będzie :

$$\mathfrak{P}_n = 1, 2, 3, \ldots, (n-1).n.$$

Dla systemu powyżéj rozpatrywanego i złożonego z siedmiu linij, liczba możliwych wieloboków wyrazi się iloczynami .

$$1.2.3.4.5.6.7 = 5040.$$

§ **16** — Z twierdzenia niezmienności summy wypływają rozmaite wnioski :

Wniosek 1. — *Summa jakiejkolwiek liczby linij nie zmieni się, jeżeli przy ich dodawaniu, zastąpimy pewną grupę tych linij przez ich summę cząstkową.*

To jest widoczném, jeżeli linie, które zastępujemy przez ich summę, są po sobie następujące, tak że (fig. 13),

$$(1'+2'+3'+4'+5'+6'+7') = 1'+kl+5'+6'+7' = 1'+ka+6'+7';$$

a ponieważ, na mocy poprzedniego, możemy przyprowadzić jakiekolwiek linie do takiego położenia, ażeby one po sobie następowały, zatém wniosek nasz stosuje się do linij jakichkolwiek.

Wniosek 2. — Jeżeli w skład danego systemu wchodzą dwie linie równe (§ **3**), ale przeciwnego sobie kierunku, wtedy, przy dodawaniu, nie ma potrzeby wprowadzać je do wieloboku 1go rzędu, albowiem uczyniwszy linie takie liniami następnemi, koniec jednéj z nich zleje się z początkiem drugiéj, ich summa będzie zatém zero i dolne wykreślenie wieloboku 1go rzędu będzie się wykonywać tak jak gdyby linie te wcale do systemu nie wchodziły. Zresztą moglibyśmy linie, o których mowa, wprowadzić do wieloboku dopiero po wyczerpaniu wszystkich innych linij danego systemu, przez co więcéj jeszcze uwydatnioném by było, że przytomność linij *równych* i przeciwnego sobie kierunku nie ma żadnego wpływu na ostateczną summę wszystkich linij danych. Wypada ztąd, na odwrót, następująca uwaga, korzystna w wielu razach : *summa linij danych zostanie bez zmiany, jeżeli do systemu tych linij wprowadzimy dwie linie równe i przeciwnego sobie kierunku.* Analityczne wysłowienie téj uwagi byłoby następujące : *summa jakichkolwiek ilości nie zmieni się, jeżeli do nich dodamy i od nich odejmiemy jednę i tę samą ilość.*

Wniosek 3. — *Jeżeli wielobok* 1go *rzędu linij, danych co do ich położenia, kierunku i wielkości, zamyka* *się sam przez się przy wykreśleniu jego stron w pewnym porządku, wielobok ten będzie zamkniętym i dla wszelkiego innego porządku następstwa tych linij.*

Albowiem, ponieważ summa linij jest niezależna od ich porządku, więc jeżeli ona była zerem dla pewnego wykreślenia wieloboku 1go rzędu, pozostanie ona zerem i przy wszystkich innych możliwych tego rodzaju wykreśleniach.

Wniosek 4. — Ponieważ w razie wieloboku zamkniętego, summa linij danych jest zero, zatém każda linia takiego systemu, uważana z osobna, jest *równa* summie wszystkich innych pozostałych linij tego systemu; kierunki zaś ich są sobie *przeciwne* (uwaga 2, § **14**).

§ **17**. — Systemy rozpatrywane w poprzednich paragrafach składały się z linii rozmaitego położenia i kierunku. Wypada nam teraz zająć się dodawaniem linij których położenie przedstawia pewną szczególność, a mianowicie wybierzmy przypadek, kiedy położenia rozmaitych linij są do siebie równoległe.

Przypadek I. — *Linie do dodawania są położenia równoległego i jednakowego kierunku.*

Niech więc będą [fig. 15, (*a*)] linie dane 1, 2, 3, 4; mamy znaleźć ich summę : $S = 1 + 2 + 3 + 4$; to jest : 1° jéj wielkość i kierunek, 2° jéj położenie.

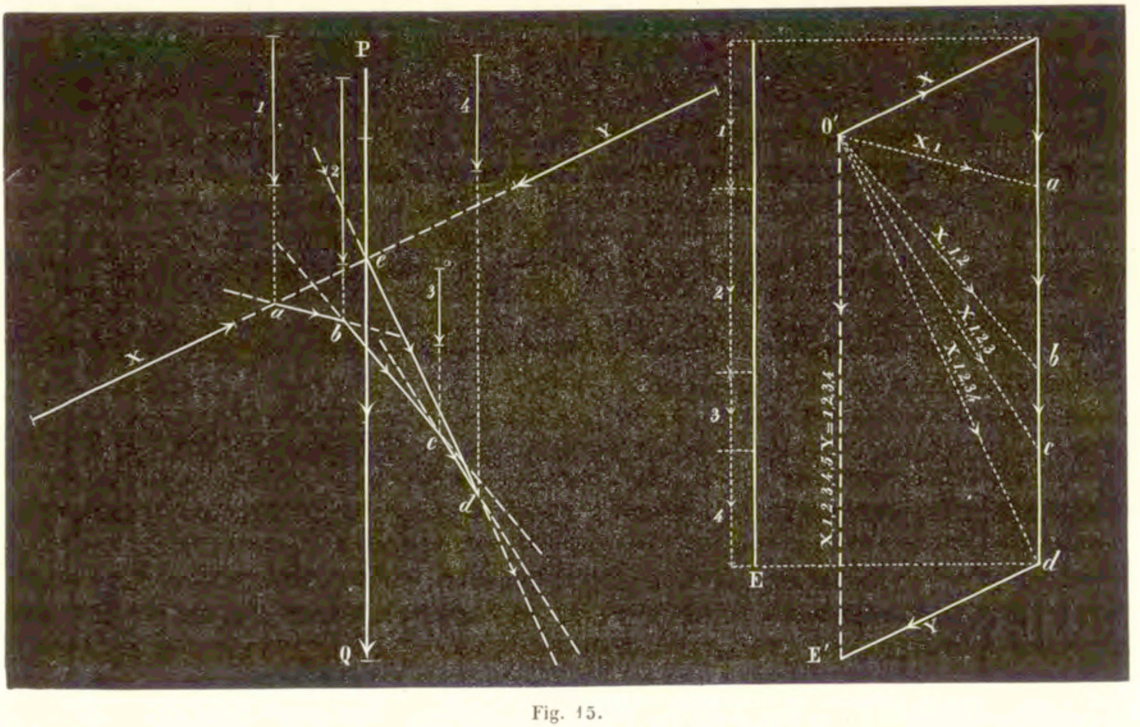

Fig. 15.

W tym celu wykreślamy, wielobok 1go rzędu [fig. 15, (*b*)] danych linij, który w obecnym przypadku będzie prostą OE równoległą do ich położenia. Linia OE przedstawiać będzie wielkość summy i jéj kierunek. Pozostaje znaleźć położenie téj summy.

Oczywiście, szukane położenie będzie równoległém do położenia linij danych, gdyż z samego wykreślenia, linia OE jest równoległą do tych linij. Dla wyznaczenia zaś tego położenia na rysunku, należy wykreślić wielobok 2go rzędu danego systemu linij, a zatém potrzeba mieć punkta przecięcia się linij 1 i 2, potém summy (1 + 2) i linii 3, następnie summy (1 + 2 + 3) i linii 4. Otóż punkta przecięcia się znajdują się w nieskończoności, więc ogólna metoda w tym razie zastosowaną wprost być nie może. Ale trudność tę obejdziemy, posługując się wnioskiem 2, § 16. W tym celu do danego systemu linij : 1, 2, 3, 4, wprowadzamy dwie linie X i Y, równe, przeciwnego sobie kierunku i tego samego położenia. Przez to, jak wiadomo, wielkość summy nadwerężoną nie będzie, tak że przy *dodawaniu*, możemy zastąpić system dawny przez system nowy, jemu równowarty : 1, 2, 3, 4, X, Y. Wykreślenie wieloboku 1go rzędu nowego systemu [fig. 15, (*c*)] daje nam wielkość i kierunek summ cząstkowych linij tego systemu i ich summę ostateczną O'E' = OE; wykreślenie zaś wieloboku 2go rzędu da nam położenie summy linij : X, 1, 2, 3, 4, Y, które będzie zarazem położeniem summy linij danych 1, 2, 3, 4. Wykreślenie to wykonywa się znanym już nam sposobem a mianowicie : przedłużamy [fig. 15, (*a*)] linię X do spotkania się z linią 1 i przez punkt przecięcia się położeń tych linij prowadzimy prostę *ab* równoległą do summy (X + 1), to jest do promienia O'*a*, a następnie przedłużamy położenia summy (X + 1), czyli prostę *ab* do spotkania się jéj z położeniem linii 2 i przez punkt *b* prowadzimy prostę *bc* równoległą do promienia O'*b* = (X + 1 + 2); postępujemy podobnież z położeniem *bc* summy (X + 1 + 2) i z położeniem linii 3, co da nam punkt *c*; prowadzimy *cd* równolegle do promienia O'*c*, położenie *cd* summy (X + 1 + 2 + 3) przedłużamy do spotkania się z położeniem linii 4, a z otrzymanego ztąd punktu *d* wykreślamy *dc* równolegle do promienia O'*d*; nareszcie spotkanie się położenia *dc* summy linij (X + 1 + 2 + 3 + 4) z linią Y', daje punkt *e*, z którego poprowadziwszy prostę PQ równolegle do O'E', będziemy mieć położenie summy linij 1, 2, 3, 4, składających dany nam system.

Łatwo jest przewidzieć, że wielkość, kierunek i położenie linii X nie ma żadnego wpływu na położenie linii PQ, byleby druga linia Y odpowiadała wskazanym warunkom, to jest aby te dwie linie były równe co do wielkości, miały kierunki przeciwne i były tego samego położenia. Własność tę wykażemy jednakże w następujących paragrafach, przy rozpatrywaniu własności wieloboków pierwszego i drugiego rzędu.

PRZYPADEK II. — *Linie do dodawania są położenia równoległego i rozmaitego kierunku.*

Wykreślenie położenia summy takich linij wykona się za pomocą powyższéj metody, to jest przez wprowadzenie do systemu danych linij [fig. 16, (*a*)] : 1, 2, 3, 4, 5, 6, dwóch linij pomocniczych X i Y, równych, przeciwnego sobie kierunku i tego samego położenia.

Wielobok 1go rzędu tak zmodyfikowanego systemu wykreśli się sposobem zwyczajnym, odkładając linie dane w jedną lub drugą stronę, stosownie do ich kierunku. I tak, wychodząc z bieguna O prowadzimy [fig. 16 (*b*)] linię O*n* = Y, potém linię *na* = linii 1; daléj, od punktu *a* odkładamy linię *ab* = linii 2; z końca téj linii prowadzimy w kieruuku linii 3, linię *bc* = linii 3; następnie bierzemy linię *cd* = linii 4, i t. d. ; nareszcie prowadzimy linię *f*E = linii X. Punkt E będzie końcem wieloboku; linia OE przedstawiać będzie *wielkość i kierunek* summy linij danego nam systemu, a promienie O*a*, O*b*, ..., O*c* dają wielkość i kierunek rozmaitych summ cząstkowych.

Wykreślenie wieloboku 2go rzędu również żadnéj trudności nie przedstawia; promienie O*a*, O*b*, O*c*, ..., O*f* służą do wykreślenia *położenia* rozmaitych summ cząstkowych, a punkt *g*, w którym położenie summy linij : (Y + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) przecina ostatnią linię X nowego systemu, rozwiązuje nasze zadanie, gdyż prosta PQ równolegle do OE przez ten punkt poprowadzona i będąca ostatnią stroną wieloboku 2go rzędu, będzie szukaném położeniem linij danych : (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6).

W przypadku roztrząsanym również jak i w poprzedzającym wielkość, położenie i kierunek jednéj z linij pomocniczych X jest bez wpływu na położenie linii PQ, byleby druga Y odpowiadała wyżéj przytoczonym warunkom.

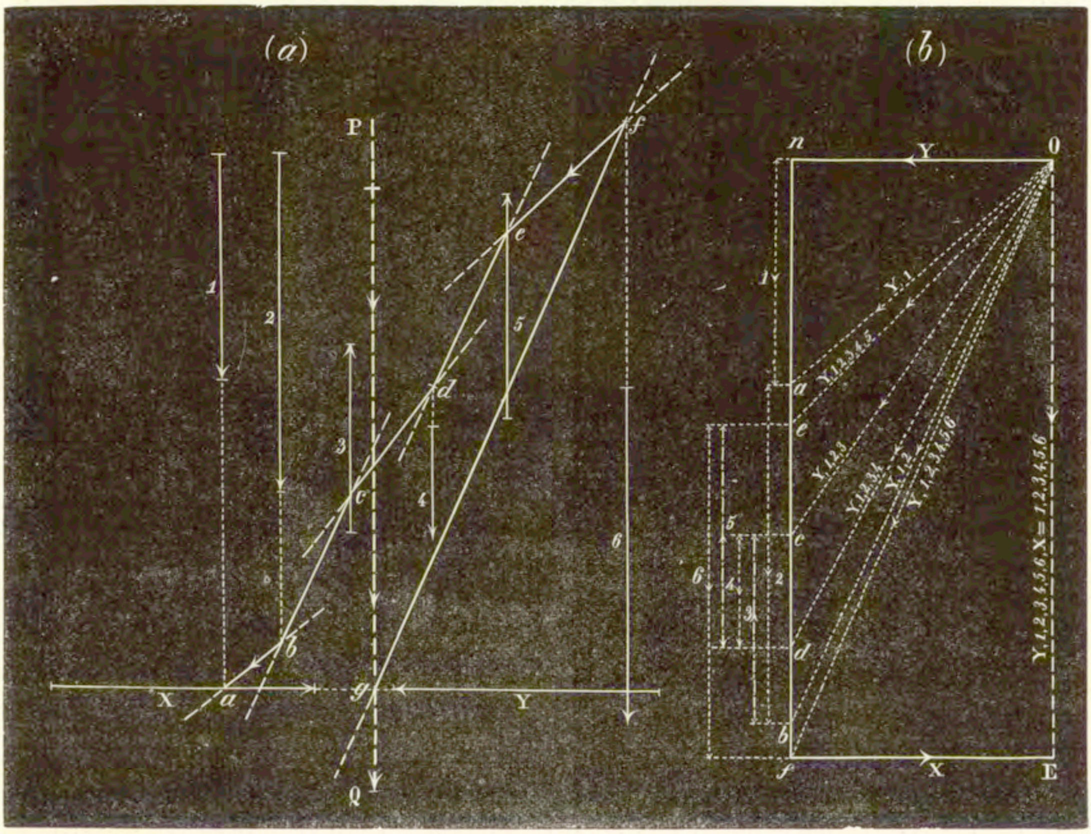

Fig. 16.

§ 18. Rozbiór linij położenia równoległego okazuje, że w tym razie wypadki otrzymane z *ogólnego* określenia summy linij, podanego w § 13, zgadzają się najzupełniéj z wypadkami wynikającemi ze *zwyczajnego* arytmetycznego określenia summy danych wielkości.

Ale, prócz wielkości i kierunku (czyli znaku) summy, działanie nasze daje nam także i jéj *położenie*, ulegające pewnemu prawu, znanemu z Mechaniki. Uważajmy np. dwie linie [fig. 17 (*a*)] 1 i 2. Położenie tych linij na płasczyznie wyznacza się ich odległością mA i nA od pewnego punktu A téj płasczyzny; znajomość zaś położenia PQ summy tych linij daje nam odległość pA. Linie 1 i 2 możemy uważać za linie składowe wypadkowéj linii OE$=(1+2)$; a zatém summa momentów linij 1 i 2 względem punktu A będzie równą momentowi względem tegoż punktu, linii wypadkowéj OE. Oznaczając więc wielkość linij (1) i (2) przez L′ i L″, a ich summę OE przez S, będziemy mieli :

$$L'.m\text{A}+L''.n\text{A}=S.p\text{A}=(L'+L'').p\text{A},$$

zkąd znajdziemy

$$L'(m\text{A}-p\text{A})+L''(n\text{A}-p\text{A})=0,$$

czyli

$$L''.np = L'mp,$$

zatém

$$mp : np = L'' : L' = (2) : (1).$$

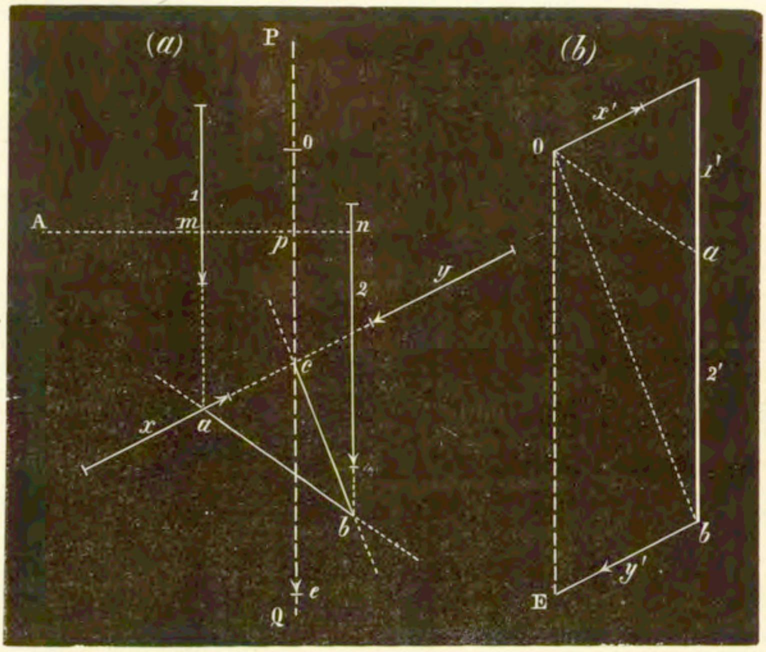

Fig. 17.

Wypada ztąd, że jeżeli dwie linie do dodawania mają wielkości równe, położenie ich summy przechodzi przez środek ich odległości *mn*, co zresztą widoczném jest à priori, gdyż nie ma żadnéj przyczyny, ażeby położenie summy było więcéj oddaloném od jednéj z linij jak od drugiéj. Wykreślenie summy dwóch linij równych zwyczajną naszą metodą, sprawdziłoby tę uwagę na rysunku.

§ **19**. Dodawanie linij równoległych daje nam bardzo prosty i praktyczny sposób *wykreślenia* położenia ich summy, czyli położenia linii wypadkowéj, wtedy gdy znalezienie tego położenia drogą analityczną wymaga dłuższéj pracy. I tak, mając system linij równoległych : L', L'', ... , $L^{(n)}$, których odległość od pewnego punktu O jest Ol', Ol'', ... , $Ol^{(n)}$; oznaczmy summę tych linij przez R; odegłość jéj od punktu O przez Or; niewiadoma Or wyznaczy się z równania momentów :

$$R.Or = L'.Ol' + L''.Ol'' + ... + L^{(n)}.Ol^{(n)},$$

wymagającego (n) mnożeń $(n-1)$ dodawań i jedno dzielenie; rozwiązanie zaś graficzne tegoż samego zadania nie wymaga znajomości liczebnych wartości rozwiniętych w powyższe równanie i posługuje się samym tylko rysunkiem.

§ **20**. Rozpatrując dodawanie dwóch linij 1 i 2 (fig. 18) równoległych i przeciwnego sobie kierunku, widzimy, że położenie PQ ich summy pozostawia linie dane po jednéj stronie, czyli że znajduje się ono zawsze na zewnątrz tych linij i po stronie linii większéj.

Jeżeli przypuścimy, że linia 1 pozostaje *stała*, a linia 2 zmienia swą wielkość, zobaczymy, że położenie summy $(1+2)$ tém bardziéj oddala się od linij 1 i 2, czém więcéj wielkość linii 2 zbliża się do

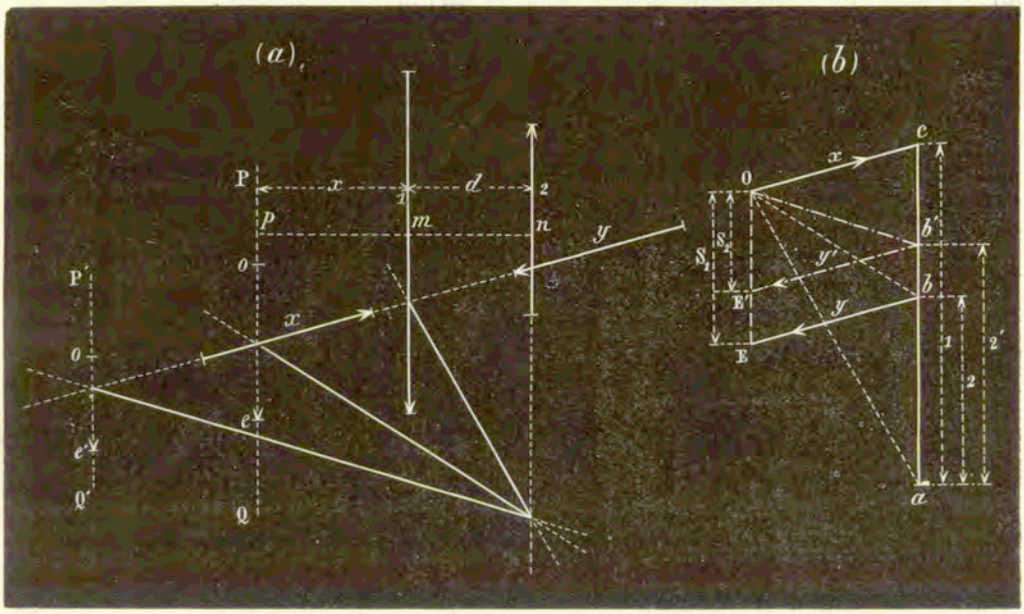

Fig. 18.

wielkości linii 1. I tak, dla linij 1 i 2 położeniem summy $OE = cb = (1+2)$ jest prosta PQ; dla linij 1 i 2', położenie summy $OE' = cb' = (1+2')$ staje się prostą P'Q' i punkt b przechodzi do punktu b'. W ogólności, z powiększeniem się linii 2 punkt b będzie się zbliżał do punktu c i zleje się z nim przy granicy, t. j. kiedy linia 2 stanie się równą linii 1, a summa takich linij stanie się wtedy *zerem* i jéj położenie znajdować się będzie w *nieskończoności* (1).

Wypadek ten wskazuje nam, że dwie linie równe, równoległe i przeciwnego kierunku nie mogą być zastąpione *jedną linią*, czyli nie mają one linii wypadkowéj, gdyż uważając jak najmniejszą nawet linię w odległości jak największéj od linij danych, ta linia nieskończenie mała, położona w odległości nieskończenie wielkiéj, wyrażać będzie summę dwóch linij *nierównych*.

System dwóch linij równoległych i przeciwnego sobie kierunku, nazywa się *dwojanem* (parą) linij.

Jeżeli linia 2, dosięgnąwszy wielkości linii 1, będzie daléj się powiększać, odległość położenia summy $(1+2)$ od linij danych przeskakuje od $-\infty$ do $+\infty$, położenie summy $(1+2)$, znajdując się teraz po stronie linii 2, będzie się zbliżać do położenia téj linii w miarę zwiększania się jéj wielkości.

Jeżeli nakoniec wielkość linii 2 dosięgnie nieskończoności, to przy każdéj skończonéj wielkości linii 1 położenie summy $(1+2)$ zleje się z linią 2.

---

(1) Że składanie dwóch linij równoległych, równych i przeciwnego sobie kierunku daje na wypadek zero, a położenie jego umieszcza w nieskończoności jest to widoczném od razu. Rozpatrywanie linij nierównych i nadanie dla jednéj z linij charakteru zmiennego co do jéj wielkości, maluje nam tylko ruch położenia summy w miarę zdążania wartości zmiennéj ku swéj granicy.

§ 21. Jeżeli różnica $L'-L''$ wielkości linij 1 i 2 ma wartość *skończoną*, położenie summy $S=(1+2)=L'-L''$ może być wyznaczoném, bądź sposobem graficznym podanym na fig. 18, bądź też rachunkiem, za pomocą równania momentów linij składowych i linii wypadkowéj :

$$Sx=L'l'+L''l'',$$

w którém l', l'' i x oznaczają odległości linij danych i ich summy od jakiegokolwiek punktu, dowolnie na płaszczyznie obranego. Biorąc momenty względem punktu m, położonego na jednéj z linij danych i oznaczając odległość tych linij $mn=d$ i $pm=x$, mamy równanie :

$$Sx=L''d,$$

czyli

(1) $$Sx=(L'-S)d,$$

ztąd

$$x=d\left(\frac{L'}{S}-1\right).$$

Wzór (1) istnieje dopóty dopóki dwie linie L' i L'' zostają nierówne, jakkolwiek małą jest ich rożnica.

Ponieważ między ilościami S i x mamy jedno tylko równanie, wartość jednéj z tych ilości zależeć będzie od wartości jaką będziemy nadawać drugiéj ilości. I tak, jeżeli chcemy żeby odległość x summy linij względem linii 1 (fig. 18) była $=a$, potrzeba wziąć linię 2 takiéj wielkości, ażeby $S=L'-L''=\frac{L'd}{a+d}$, to jest $L''=\frac{a}{a+d}L'$; jeżeli x ma być $=d$, czyli jeżeli odległość summy S od linij większéj L', ma być równą wzajemnéj odległości linij L' i L'', należy wtedy wziąć linię $L''=\frac{1}{2}L'$, w podobny sposób zobaczymy, że dla $x=0$, to jest dla zlania się położenia summy dwóch linij z linią L', wielkość summy S powinna być równą linii L', czyli $S=L'-L''=L'$: zatém linia L'' musi być zerem, co jest widoczne ; odwrotnie, dając sobie z góry summę S linij, znajdziemy odległość x jéj położenia od linii 1 ; odległość ta zawsze będzie miała pewną wartość, dopóty dopóki S będzie różném od zera, to jest dopóki dane dwie linie będąc równoległe i przeciwnego kierunku zostaną nierówne ; ale dla $S=0$, odległość x istnieć przestaje, gdyż wyrazi się ona wtedy symbolem ∞ (1). Zatém położenie summy dwojanu linij wyrazi się takim samym symbolem, jak położenie punktu przecięcia się dwóch linij równoległych.

Roztrząsanie wzoru (1) nic nam nowego nie daje, jest ono analityczném sprawdzeniem tego, co już nam okazało wykreślenie fig. 17.

---

(1) Szukanie summy dwóch *linij* równych, równoległych i przeciwnego sobie kierunku stanowi w Mechanice składanie dwóch *sił*, równych, równoległych i działających w strony przeciwne. Co do wartości siły wypadkowéj, i odległości jéj położenia od linij danych, przytaczamy tu słowa autora *Kursu Mechaniki Rozumowéj*, Paryż, 1873, p. G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO (str. 24) :

« Te osobliwe wyniki nie są dowodem, ale tylko niejakim wskazem, że dwie siły równoległe, równe i działające » w strony przeciwne nie mają wynikowéj. Układ takich dwóch sił będziemy nazywali *dwojanem*. »

(Str. 26) « Przez działanie dwojanu trzeba rozumieć działanie jego sił, każdéj osobno, nie zaś ich działanie złożone, » które nie przedstawia żadnego określonego sensu. »

Dowiedzenie, że dwojan nie ma wynikowéj (albo innemi słowy, że jedna siła nie może trzymać w równowadze dwojanu) i nie jest w równowadze, — oparte na teoryi momentów, — podane jest na str. 28.

Jeżeli zastosujemy wzór (1) do przypadku dwóch linij równych, przybierze on wtedy postać:

$$L'd = 0 \,.\, \infty,$$

co nam tylko wskazuje, że symbol $0 \,.\, \infty$ wyraża ilość *stałą*, gdyż $L'd$ jest momentem dwojanu, który, jak wiadomo, ma wartość *stałą*, niezależną od punktu płasczyzny, względem jakiego moment dwóch linij składających dwojan jest wzięty.

§ **22**. Wiemy, że dwie linie równe, równolegle i przeciwnego sobie kierunku, wprowadzone do jakiegokolwiek systemu linij, nie zmieniają *wielkości* summy danego systemu; ale ztąd bynajmniéj nie wynika, że wprowadzony dwojan linij pozostaje bez wpływu na inne elementa summy, to jest, że nie zmienia on jéj *położenia*, *kierunku* i *początku*. Zajmiemy się teraz zbadaniem wpływu dwojanu linij na wypadki dodawania i w tym celu rozpatrzymy dodawanie trzech linij 1 2, i 3 (fig. 19), z których dwie: 2 i 3 składają dwojan, a trzecia linia 1 jest jakakolwiek.

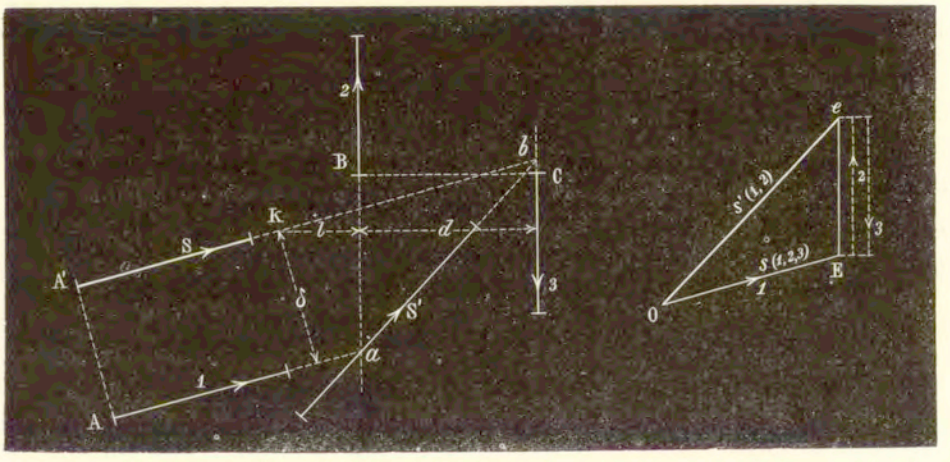

Fig. 19.

Wielobok 1^{go} rzędu danych linij wskazuje, że summa linij 1 i 2 będzie linią Oe (co do wielkości i kierunku), a summą trzech linij $1+2+3$, linia OE równa linii 1.

Dla znalezienia położenia $(1+2+3)$ wykreślamy wielobok 2^{go} rzędu, to jest, przez punkt a przecięcia się linij 1 i 2 prowadzimy ab równolegle do Oe, a przez punkt b przecięcia się linij ab i 3, kreślimy linię bA' równoległą do linii OE; linia $A'b$ będzie szukanem *położeniem* summy linij danych $(1+2+3)$ a jéj *wielkość* i *kierunek* są te same jak wielkość i kierunek linii 1. Widzimy zatém, że dodanie do linii 1 dwóch linij 2 i 3 równych, równoległych i przeciwnego kierunku, zmienia *położenie* téj linii (zostawiając nienaruszonemi jéj wielkość i kierunek) przenosząc ją od Aa do $A'b$. Wartość tego przeniesienia, to jest odległość δ znajdziemy za pomocą równania momentów wziętych względem jakiegokolwiek punktu płasczyzny na któréj znajdują się dane linie.

Oznaczając wielkości linij 1, 2 i 3 przez L'; L'' i L''', i biorąc momenty względem jakiegokolwiek punktu K, położonego na lini wypadkowéj S będziemy mieli:

$$L'\delta + L''l + L'''(d+l) = 0,$$

a że L'' i L''' są równe i przeciwnego sobie kierunku, to biorąc L''' ze znakiem $+$, należy brać L'' ze znakiem $-$; w skutek czego równanie zamieni się na:

$$L'\delta + L'''d = 0.$$

ztąd, odrzucając kreski i niezwracając uwagi na znak iloczynu $L'\delta$ liczebna wartość przeniesienia δ będzie następująca :

$$\delta = \frac{L}{L'} d, \tag{1}$$

gdzie L oznacza wielkość linii, wchodzącéj w skład dwojanu.

Wzór (1) wskazuje :

1) Że $\delta = d$ przy $L' = L$; tak więc jeżeli wielkość linii 1 jest równą wielkości linii dwojanu, summą trzech linij L', L i — L będzie linia L' przeniesiona ze swojego położenia na odległość równą ramieniowi dźwigni dwojanu;

2) Dla jednego i tegoż samego dwojanu wielkość przeniesienia linij L' rośnie w stosunku odwrotnie proporcyonalnym do wielkości téj linii ;

3) Dla jednéj i téjże saméj wielkości linij L i L', przeniesienie δ zmienia się proporcyonalnie do ramienia d.

4) Przeniesienie δ będzie równém zeru : 1° albo przy $L = 0$, to jest, jeżeli do danego systemu linij nie wprowadzamy dwojanu, co jest widoczne samo przez się ; 2° albo też przy $d = 0$, to jest, jeśli wprowadzone linie L i — L' mają to samo położenie, czyli znajdują się na jednéj i téjże saméj prostéj.

Widzimy więc, że *położenie* summy danego systemu linij nie zmieni się tylko w tym razie, gdy wprowadzone linie są równe, przeciwnego kierunku i *mają to samo położenie* [1].

Wzór (1) wskazuje nam jeszcze, że jeżeli linia L' jest nieskończenie mała, wypadkowa téj linii i dwojanu (L, — L) jest ta sama nieskończenie mała linia L', przeniesiona tylko na odległość nieskończenie wielką ; tak że przy $L' = 0$, wielkość wypadkowéj z dodawania linij dwojanu i linii 0 będzie *zerem*, a jéj położenie znajdować się będzie w *nieskończoności*, co już było okazaném.

UWAGA. — Na figurze 18 linia *oe* przedstawia wielkość, kierunek, położenie i *rzeczywisty* początek summy linij 1, 2 i 3. O sposobie wyznaczenia początku summy danego systemu linij będzie mowa późniéj (§ 26).

§ **23**. Zajmowaliśmy się powyżéj dodawaniem linij położenia równoległego, tak w razie jednakowego ich kierunku, jako też kierunku rozmaitego. Dla wyczerpania wszystkich przypadków dodawania, pozostaje nadmienić, że linie dane mogą być jednego i tego samego położenia, to jest znajdować się na jednéj i téjże prostéj PQ ; ale przypadku tego roztrząsać nie ma potrzeby, gdyż różnić się on będzie od przypadków poprzednio rozebranych tylko tém, że położenie summy takich linij będzie położeniem saméjże prostéj PQ, albowiem przedłużenie linij danych, a zatém i punkt im spólny (§ **13**) nie wychodzi z linii PQ.

§ **24**. Uważajmy dwie linie L' i L'' bądź równoległe, bądź też tego samego położenia i przeciwnego sobie kierunku i ograniczmy się tylko na rozpatrywaniu wielkości ich summy : $S = L' + L''$, bez względu na jéj położenie. Jeśli kierunek linii L' wyrazimy znakiem +, wtedy kierunek linii L'' przeciwny pierwszemu, należy oznaczyć przez — . Zachowując znak + dla oznaczenia dodawania i przypuszczając, że linia $L' =$ linii L'', wyrażenie $S = L' + L''$, uwydatnione co do kierunku linij,

---

(1) Zastosowanie tego wniosku znajdujemy w Mechanice. Na str. 7 dzieła p. Niewęgłowskiego czytamy : « w układzie punktów materyalnych » wolnych, dwie siły nie mogą nigdy czynić sobie równowagi, jeśli nie są równe i *wprost przeciwne* ».

przyjmie postać :

$$S = (+L') + (-L'') = 0.$$

czyli, po prostu

$$(a) \qquad S = L' + (-L'') = 0.$$

Otóż, wychodząc z poglądu arytmetycznego, niezależnego od pojęcia o kierunku, dwie wielkości równe dają na wypadek zero tylko przez ich wzajemne odejmowanie; tak że nie robiąc żadnéj różnicy co do kierunku linij L' i L'' (to jest przypuszczając, że są one obie tego samego kierunku) i używając znaku -- dla oznaczenia odejmowania, z równości linij $L' = L''$ wypadnie że :

$$(b) \qquad L' - L'' = 0,$$

ztąd, porównywając (*a*) i (*b*) otrzymujemy :

$$L' + (-L'') = L' - L'',$$

Zatém : *dodać* do linii L' linię L'', któréj kierunek jest przeciwny kierunkowi linii L', znaczy to samo, co *odjąć* od linii L' linię L'' , wziętą w tym samym co i linia L' kierunku; i odwrotnie : odjąć od linij L' linię L'', mającą z linią L' jednakowy kierunek, jest to samo co dodać do linii L' linię $-L''$).

II. — ODEJMOWANIE LINIJ.

§ **25. Określenie.** W Rachunku Wykreślnym, podobnie jak i w rachuku algebraicznym, *odejmowanie* nie ma charakteru działania osobnego. W Algebrze, odejmowanie jest dodowanie ilości wziętych z przeciwnym *znakiem;* w Rachunku Wykreślnym odejmowanie będzie dodawaniem linij wziętych w przeciwnym *kierunku.*

Określenie odejmowania linij będzie zwyczajne arytmetyczne określenie odejmowania dwóch ilości, mianowicie :

Odjąć linię B *od linii* A *jest to znaleźć trzecią linię* D, *która będąc dodaną do linii* B *daje na summę linię* A. Rozumiemy że summa o któréj tu mowa ma być taka jaka wynika z określenia dodawania podanego w § **13**.

Niech będą linie dane A i B (fig. 20); mamy znaleźć wielkość, kierunek i położenie różnicy: $D = A - B$ tych linij.

Jeżeli z dowolnego punktu O [fig. 20 (*b*)] wyprowadzimy linię O*e*, równą i równoległą do linii A i tegoż kierunku, a z punktu *e* linię *e*E′, równą i równoległą do linii B, ale kierunku jéj przeciwnego, wtedy linia OE wynikająca z dodania linij O*e* i *e* E będzie szukaną różnicą, gdyż dodając do linii OE′ linię E′*e* (to jest linię tego samego kierunku co i dana linia B), otrzymamy na ich summę linię O*e*. Możemy więc powiedzieć :

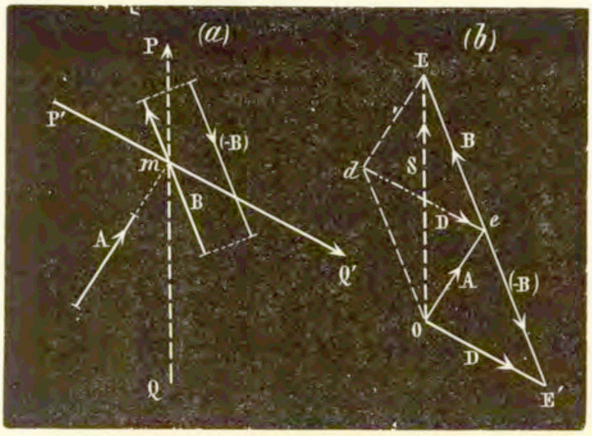

Fig. 20.

Odjąć linię B *od linii* A *jest to wziąć linię* B *z kierunkiem przeciwnym jéj kierunkowi danemu i dodać ją do linii* A; tak że szukanie różnicy linij A i B sprowadza się do szukania summy linij A i —B.

Linia OE = D przedstawia wielkość i kierunek szukanéj różnicy; położenie zaś jéj otrzymamy prowadząc przez punkt *m* przecięcia się położeń linij danych A i B, linię P′Q′ równoległą do linii OE′.

Szukając summy S = A + B danych linij, to jest prowadząc z punktu *e* linię *e*E = B i jednakowego z nią kierunku, otrzymujemy linię S = OE; dopełniając zaś równoległoboku O*e* E*d*, widzimy, że linia *de* jest równą lini OE′ = D. Zatém, *summa i różnica danych linij* A *i* B, *wyrazi się, co do ich wielkości, przekątnemi równoległoboku na tych liniach wystawionego.*

Wiemy, że położenie summy S = A + B będzie położeniem prostéj PQ; możemy przytém nadmienić, że kąt jaki czynią między sobą położenie summy i położenie różnicy zależeć będzie od położenia wielkości linij danych.

Uwaga 1. — Gdyby, zamiast odejmowania linii B od linii A, potrzeba było odjąć linię A od linii B, należałoby dodać do siebie linie : B i — A ; to jest, wykreśliwszy z punktu *e* [fig. 20 (*b*)] jako bieguna, linię *e*E = B, poprowadzilibyśmy późniéj linie E*d* (to jest wzięlibyśmy tę linię ze strzałką idącą od E do *d* połączylibyśmy początek *e* wieloboku z jego końcem *d*; linia *ed* (czyli linia któréj strzałka jest skierowaną od *e* do *d*) wyraziłaby nam wielkość i kierunek różnicy : B — A. Z figury widać że E*d* = — D, i wypadek taki jest tylko wykreśleniem algebraicznego wzoru :

$$A - B = -(B - A).$$

Widocznem jest nadto, że położenie tak różnicy A — B, jako téż różnicy B — A, jest jedną i tą samą prostą P′Q′

Uwaga 2. — Linie dane do odejmowania mogą być położenia równoległego albo też tego samego. Lecz po tém, co było powiedzianém przy dodawaniu podobnych linij, zastanawianie się nad takiemi przypadkami byłoby zbytecznėm.

POCZĄTEK SUMMY LUB RÓŻNICY DANYCH LINIJ.

§ **26**. Przy dodawaniu i odejmowaniu linij określiliśmy trzy elementa ich summy lub różnicy : wielkość, kierunek i położenie. Czwarty element, to jest *początek*, zostawiliśmy dowolnym. Zajmiemy się więc teraz wyznaczeniem początku summy *dwóch* linij ; poczém z łatwością będziemy mogli przyjść do jakiegokolwiek systemu linij.

Niech będą dane dwie linie : 1 i 2 (fig. 21), mające swe początki w A i B, i których położenia tworzą kąt ACB. Wielobok 1^{go} rzędu *oae* (fig. *a*) da nam wielkość i kierunek summy $oe = S = (1+2)$, jéj zaś

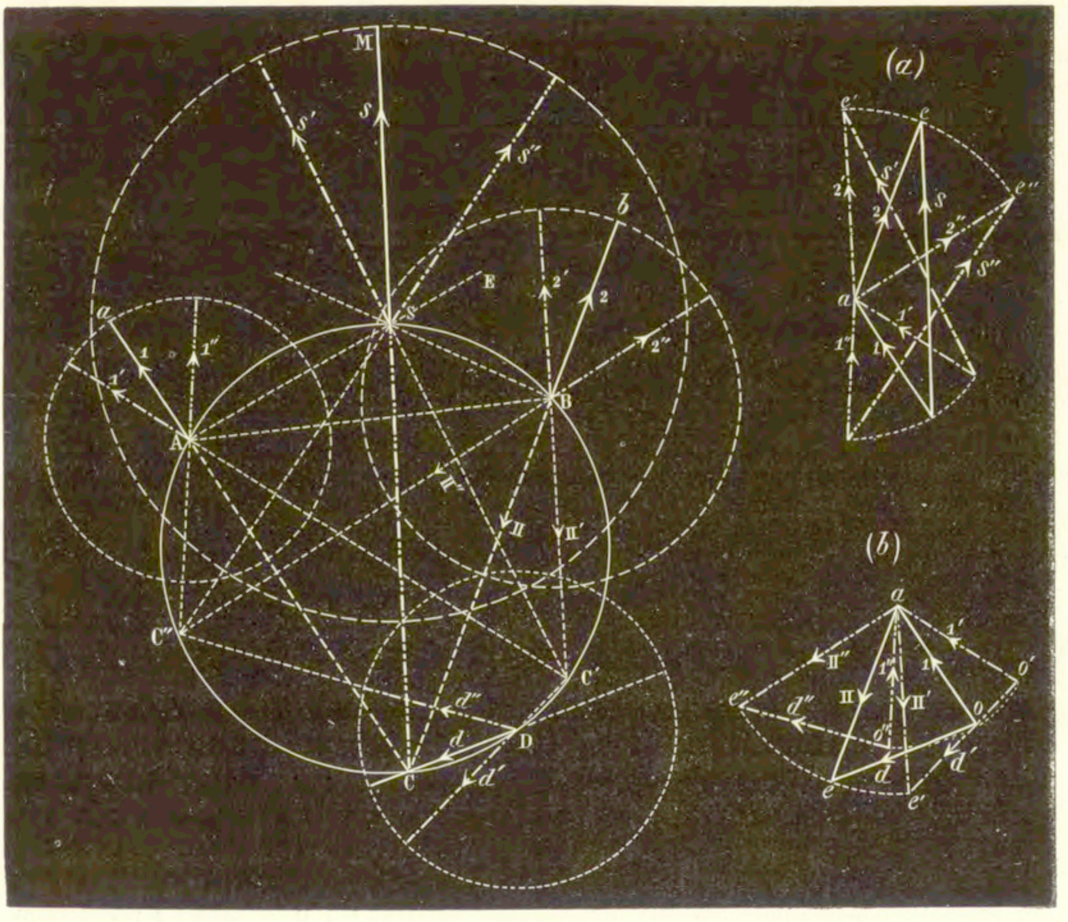

Fig. 21.

położenie CM przechodzi, jak wiadomo, przez punkt C wzajemnego przecięcia się linij 1 i 2, i jest równoległém do linii *oe*.

Z kąta *oae* widzimy, że ponieważ wielkość *oe* summy zależy od wielkości *oa* i *ae* linij 1 i 2, i od ich wzajemnego nachylenia (gdyż kąt *oae* jest *spełnieniem* ACB), pozostanie ona bez zmiany, jeżeli wielkość linij danych, a także ich kąt ACB zachowują tę samą wartość. Jeżeli więc wykreślimy na linii AB odcinek koła zawierający kąt ACB, a z punktów A i B, promieniami $Aa=1$ i $Bb=2$ opiszemy koło, to dla wszystkich położeń linij : 1 i 2, 1' i 2', 1'' i 2'', przecinających się na odcinku koła ACB i mających swe początki w punktach A i B, a swe końce na okręgach Aa i Bb, wielkość ich summy zachowa tę samą wartość; zmieniać się będzie tylko *położenie* téj summy, gdyż powinna ona zawsze przechodzić przez punkt przecięcia się linij do siebie dodawanych.

Rozpatrzmy więc jakie jest prawo według którego zmienia się *położenie* téj summy.

Z fig. (21 *a*) widzimy, że przy *położeniu linij* oznaczoném przez 1 i 2, *położenie ich summy* tworzy z linią 1 kąt $aoe=$ ACS$=$łukowi $\frac{AS}{2}$, — oznaczając przez S punkt przecięcia się położenia CM summy $(1+2)$ z kołem ABC; przy położeniu zaś 1' i 2', położenie summy $S'=(1'+2')=S$ tworzy z linią 1' kąt $ao'e'$; ale ten kąt jest równy kątowi aoe, gdyż trójkąty aoe i $ao'e'$ są sobie równe, zatém, ażeby mieć położenie summy S' dla systemu 1' i 2', należy przez punkt C' ich przecięcia się, poprowadzić linię tworzącą z linią AC kąt$=$ACS, to jest, połączyć poprostu punkt C' z punktem S poprzednio otrzymanym. W podobny sposób zobaczymy, że dla otrzymania położenia summy linij 1'' i 2'' dosyć będzie połączyć punkt ich przecięcia się C'' z punktem S; tak że *wszystkie położenia summy :* S, S', S'',... *przechodzą przez punkt* S.

Zobaczmy teraz jaka jest zależność kąta dwóch położeń summy od kąta na który linie 1 i 2 zostały obrócone około ich początków A i B.

Widocznem jest najprzód, że ponieważ wzajemne nachylenie linij 1 i 2, 1' i 2',... pozostaje zawsze to samo, linie 1 i 2 obracają się około punktów A i B na jeden i ten sam kąt, to jest, że kąt linij (1, 1') równy jest kątowi linij (2, 2');.... Otóż kąt obrotu (1, 1') mierzy się połową łuku CC', a ten łuk służy zarazem za miarę dla kąta CSC' na który obróciło się położenie summy S, zatém: *wirowanie linij danych* 1 *i* 2 *około ich początków* A i B *na jakikolwiek kąt* θ, *pociąga za sobą wirowanie około punktu* S, *w tę samą stronę i na ten sam kąt* θ *położenia ich summy.*

Punkt S, mający tę własność że zostaje stałym dla wszystkich położeń danych linij, racyonalnie może być nazwany *początkiem summy* tych linij.

Dla wyznaczenia początku summy dwóch linij 1 i 2 mamy więc następujące prawidło : *przedłużamy linie dane do ich wzajemnego przecięcia się w punkcie* C, *przez który prowadzimy linię* CM *równoległą do summy* $oe=s=(1+2)$ *tych linij; punkt* S *w którym linia* CM *przecina koło przechodzące przez początki* A i B *danych linij i przez punkt* C, *będzie początkiem summy tych linij.*

§ **27.** Początek summy linij 1 i 2 może być wyznaczony, nie kreśląc wcale koła ABC. Dla okazania tego rozpatrzmy kąty utworzone przez linie 1 i 2 z położeniem CM ich summy; przyczém będziemy odróżniać przypadki kiedy linia CM znajdzie się : 1) wewnątrz położeń linij 1 i 2; 2) na ich zewnątrz; 3) kiedy linia CM stanie się styczną do koła ABC w punkcie C.

1° W pierwszym przypadku (fig. 21) połączywszy punkta A i B z sobą i z początkiem S naszéj summy, otrzymujemy trójkąt ABS, w którym linia AS jest nachylona do położenia AB pod tym samym kątem pod jakim linia 2 jest nachylona do położenia CM, gdyż obydwa kąty, mają za miarę połowę łuku SB. To samo możemy powiedzieć o kącie SBA równym kątowi linij : 1 i CM. Ztąd wypada że *mając początki* A i B *dwóch linij otrzymamy początek* S *ich summy, wykreślając na linii* AB *i w początku jednéj z linij danych, naprzykład w* A, *kąt* EAB *równy kątowi* BCM, *utworzonemu przez drugą linię* (to jest przez linię mającą swój początek w B) *z położeniem* CM *summy tych linij*; punkt S spotkania się linii AE z linią CM będzie szukanym początkiem.

2° Powyższe wykreślenie stosuje się również do przypadku drugiego. W saméj rzeczy [fig. 22 (*a*)], kąt linii 1 z położeniem CM, przecinającém koło ABC w punkcie S, jest to ∢MCN, spełniający ∢ ACM. Lecz ∢ ACM $=\frac{1}{2}$ łuku ABS; zatém ∢MCN = łukowi ACS = ∢ABS utworzonemu przez linię AB z linią łączącą punkt B drugiéj linii z punktem S. Tak samo, kąt linij (2, CM) = ∢ BCM $=\frac{1}{2}$ łuku BS = ∢ BAS. Zatém, mając punkty A i B i położenie CM, dość jest, dla otrzymania punktu S, wykreślić na linii AB kąt BAE = kątowi linij (2, CM) i przecięcie się linij AE i CM da nam szukany początek S.

3° Jeżeli linie 1 i 2 są tak dobrane, że położenie ich summy CM [fig. 22 (*b*)] staje się styczném do

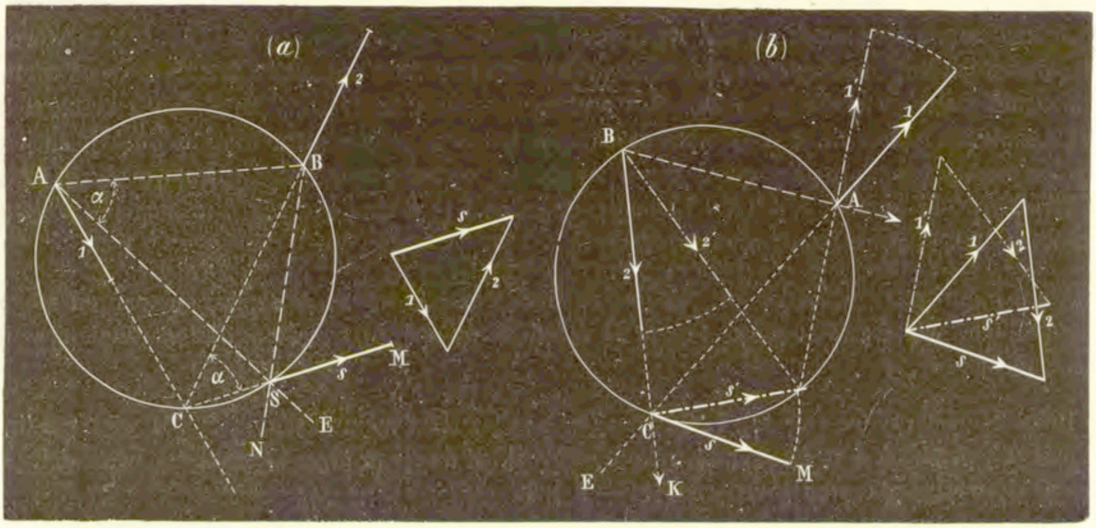

Fig. 22.

koła ABC w punkcie C, wtedy punkt S zlewa się z punktem C, i punkt przecięcia się linij danych będzie zarazem początkiem ich summy.

Punkt C pozostaje zawsze początkiem summy dla wszelkiego innego położenia linij 1 i 2, naprzykład dla 1′ i 2′. Nie *wykreślając* koła ABC, nie wiemy o tém szczególném położeniu linii CM; ale wykreślenie kątów, wskazane w pierwszych dwóch przypadkach, natychmiast nas o niém ostrzeże. W saméj rzeczy, kąt linij (1, CM) = ∢ ACM $=\frac{1}{2}$ łuku AC = ∢ ABC = kątowi linij (2, BA); a kąt linij (2, CM) = kąt MCK = spełnieniu kąta BCM, ma za miarę $\frac{1}{2}$ łuku BC = ∢BAC = kątowi linij (1, BA) = kątowi linij (—1, AB).

Ztąd widzimy, że jeżeli przy wykreśleniu w jednym z początków, naprzykład w A, linii AE tworzącéj z linią AB kąt równy kątowi linij (2, CM) ramie wykreślonego kąta zlewa się, lub się staje przedłużeniem linii 1, wychodzącéj z tego początku A, wtedy jesteśmy ostrzeżeni że szukany początek summy : (1 + 2) jest punktem przecięcia się C danych do dodawania linij.

§ **28.** To cośmy powiedzieli o początku summy dwóch linij może być rozszerzoném i zastosowaném do początku summy jakiegokolwiek systemu linij, jako téż do początku różnicy dwóch linij.

Początek summy jakiejkolwiek liczby linij : 1, 2, 3, 4,... otrzyma się stopniowo, wyznaczając naprzód początek summy dwóch linij 1 i 2; późniéj początek summy linij : S = (1 + 2) i linii 3; następnie, początek summy linij $S=(1+2+3)$ i linii 4, i t. d. aż do wyczerpania wszystkich linij danego nam systemu.

Początek summy linij równoległych. Dla linij równoległych, zastosować wprost naszéj metody nie możemy, gdyż nie mamy punktu przecięcia się tych linij. Ale tę trudność obejść potrafimy sprowadzając do systemu danych linij linie pomocnicze odpowiednio obrane.

Oczywiście linie te powinny być takie, ażeby ich istnienie w systemie nie zaciemniało *żadnéj charakterystycznéj cechy szukanéj summy*. Ztąd wynika, jako pierwszy warunek, że linie pomocnicze powinny być równe, równoległe i przeciwnego sobie kierunku; gdyż tylko wtedy *wielkość* i *kierunek* summy linij systemu *zmodyfikowanego* będą jedne i te same, co i w systemie *danym*.

Jednak sam ten warunek nie jest wystarczającym, gdyż okazaliśmy w § **20** i (fig. 18), że wprowadzenie dwóch linij składających dwojan do systemu danych linij, pozostając bez wpływu na wielkość i kierunek summy *zmienia jéj położenie*, i ażeby położenie summy zmodyfikowanego systemu było takie same jak położenie summy systemu danego, potrzeba żeby sprowadzone linie leżały na jednéj i tejże prostéj. Dla téj to przyczyny, przy wyznaczeniu *położenia* summy linij równoległych (§§ **17** i **18**) używaliśmy linij pomocniczych X i Y, mających jedno i to samo położenie, bez względu zresztą na jego oryentacyę, która żadnéj nie odgrywa roli.

Ale dwa powyższe warunki nie są jeszcze dostateczne, gdyż nie zabezpieczają one od mogącéj zajść zmiany w *początku* summy. Figura 23 wskaże nam jaki jest trzeci i ostatni warunek niezmienności téj summy.

Rozpatrzmy trzy linie (fig. 23) 1, 2 i 3 mające swe początki w punktach A, B i C; wielkość linii 1 oznaczymy przez L', a wielkość linii wchodzącéj w skład dwojanu przez L. Szukajmy wielkości, położenia, kierunku i początku summy $S=(1+2+3)$.

Znalazłszy wiadomym sposobem wielkość i kierunek summy $S'=Oe$ dwóch linij 1 i 2, prowadzimy przez punkt przecięcia się G linij 1 i 2 prostę GF równoległą do linii Oe; punkt D w którym ta prosta spotka koło przechodzące przez punkta A, B i G, będzie, jak wiemy, początkiem summy $S'=(1+2)$; szukamy następnie summy linij : S' i 3; jéj wielkość będzie linia $OE=S=(1+2+3)$ równa linii danéj 1; jéj położenie — prosta FA'' poprowadzona równolegle do OE przez punkt przecięcia się F linij S' i 3; jéj początek — punkt A'' w którym położenie FA'' spotyka koło przechodzące przez początki D i C linij S' i 3 i przez punkt ich przecięcia się F.

Widzimy zatém, że wprowadzenie do danego systemu (który w obecnym razie składa się z jednéj linii 1) dwojanu linij naruszyło położenie i początek summmy tego systemu. Wiemy już z poprzedniego (§ **22**), że odległość $A'A''=\delta$ nowego położenia od dawnego wyraża się wzorem.

$$\delta=\frac{L}{L'}d, \tag{1}$$

gdzie $d=CC'$ jest wzajemna odległość linij składających dwojan. Pozostaje więc ocenić zmianę zaszłą w *początku* summy.

Przed wprowadzeniem dwojanu początek summy danego systemu znajdował się w punkcie A; istnienie dwojanu sprawiło przemieszczenie tego początku od A do A''. Otóż, przemieszczenie AA'' może być uważane jako wypadkowa dwóch przemieszczeń : 1° od punktu A do A'; następnie 2° od A' do A''.

Przemieszczenia od A′ do A″ odbywające się prostopadle do położenia linii danéj 1, nazwiemy *przemieszczeniem poprzeczném;* jego wartość $A'A'' = \delta$ jest nam znaną; wyraża się ona bowiem wzorem (1). Pozostaje zatém znaleźć wartość przemieszczenia od A do A′, odbywającego się wzdłuż saméj linii 1 a które nazwiemy dla tego *przemieszczeniem podłużném.*

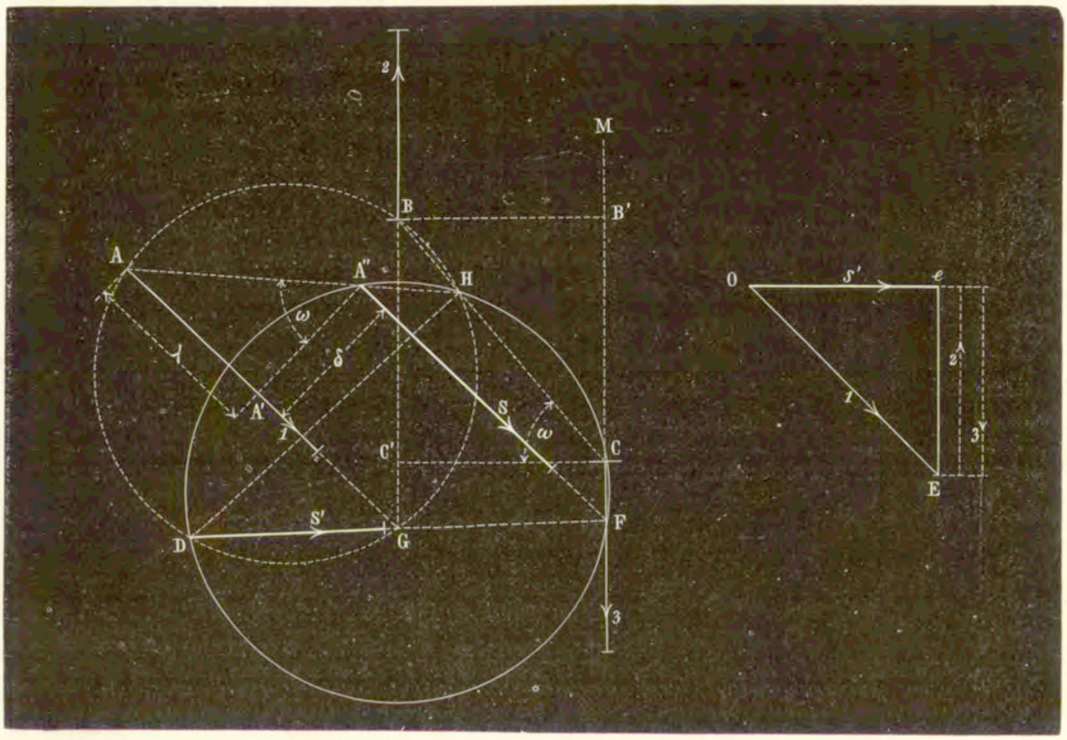

Fig. 23

Oczywiście, przemieszczenie $AA' = \lambda$ będzie nam znaném skoro znajdziemy wartość kąta A″AA′, utworzonego przez prostę AA″, łączącą dawny początek z nowym, z położeniem AG danéj linii 1. Otoż, twierdzimy że :

Kąt A″AA′ *równym jest kątowi* CBG, *utworzonemu przez prostę* BC, *łączącą początki linij składających dwojan, z położeniem* BG *samej że linii dwojanu.*

Widocznem jest, że twierdzenie równości tych kątów będzie dowiedzioném, jeżeli okażemy, że

1° Linia BC łącząca początki składowych linij dwojanu przechodzi przez punkt H przecięcia się dwoch kół : ABG i DCF ;

2° Linia AA″ łącząca początek summy danego systemu z początkiem summy systemu zmodyfikowanego, przechodzi również przez ten punkt H.

Pierwsza kwestya. — Połączmy punkta H i D przecięcia się dwóch kół między sobą, i uważajmy że :

a) połączywszy punkt H z początkiem B, mamy w kole ABG :

(1) $$\text{kąt HBG} = \text{kąt HDG} = \text{kąt HDF} = \frac{1}{2} \text{ łuku HCF w kole DCF,}$$

b) połączywszy punkt H z początkiem C, mamy w kole DCF :

$$\text{kąt}HCF = \frac{1}{2} \text{ łuku } HA''DF,$$

zatém kąt HCM, który jest jego spełnieniem, ma za miarę

$$(2) \qquad \frac{1}{2} \text{ łuku } HCF,$$

ztąd wypada że :

$$\text{kąt}\,HBG = \text{kąt}HCM.$$

Ponieważ zaś linie BG i CM są do siebie równoległe, więc linie HB i HC, tworzące z dwóma równoległemi kąty równe, muszą być albo do siebie równoległe, albo téż stanowić jedną i tę samą prostę. Miejsce mieć musi właśnie ten ostatni przypadek, gdyż obydwie linie HB i HC mają spólny punkt H. Zatém punkt H leży na linii BC.

Druga kwestya. — Postępujemy w podobny sposób, to jest dowodzimy, że linie HA i HA″ stanowią jedną i tę samą prostę. W saméj rzeczy :

a) połączywszy punkt H z początkiem A, mamy :

$$\text{kąt}HAG = \text{kąt}HDF = \frac{1}{2} \text{ łuku } HCF,$$

albowiem, z samego wykreślenia, linia GF jest przedłużeniem linii DG,

b) połączywszy następnie punkt H z początkiem A″, otrzymujemy :

$$\text{kąt}HA''F = \frac{1}{2} \text{ łuku } HCF$$

więc

$$\text{kąt}\,HAC = \text{kąt}HA''F;$$

a ponieważ linie AG i A″F są równoległe z wykreślenia, zatém linie HA i HA″ czyniące z temi liniami kąty równe, muszą stanowić jedną i tę samą prostę, gdyż mają już one jeden punkt H spólny.

Twierdzenie nasze zostało więc dowiedzionėm, albowiem możemy teraz powiedzieć, że kąty A″AA′ i CBG są sobie równe, jako mające swe wierzchołki A i B na jedném i témże samém kole ABG, a ramionami swemi opierające się na jednym i tymże samym łuku HG tego koła.

Uwaga. — Na fig. 23 punkt H przecięcia się dwóch kół znajdował się *między* początkami B i C linij składających dwojan. Na fig. zaś 24 różniącéj się od fig. poprzedniéj, co do położenia i początków linij danych 1, 2, 3 i ich summy S, punkt H pada na *zewnątrz* początków B i C dwojanu. Ale równość kątów AA″A′ i BCB′ zawsze istnieje i dowiedzie się bez żadnéj trudności. Jakoż, połączywszy punkta H i D (fig. 21), przecięcia się kół ABG i DCF prostą HD i idąc w porządku dopiero co wykazanym, będziemy mieli :

$$(1) \qquad \text{kąt}\,HBG = \text{spełnieniu kąta } HDC = \text{spełnieniu kąta } HDF = \text{kąt}\,HCF,$$

więc z powodu równoległości linij BG i CF, linie HB i HC stanowią jedną i tę samą prostę.

Dowiedzie się podobnież, że HA i HA″ są również na jednéj i téjże prostéj, gdyż

$$\text{kąt}\, HAG = \text{kąt}\, HBG \text{ (w kole HABGD)},$$

i

$$\text{kąt}\, HA''F = \text{kąt}\, HCF \text{ (w kole HA''CFD)},$$

ztąd, na mocy (1)

$$(2) \qquad \measuredangle HAG = \measuredangle HA''F;$$

a więc, trzy punkta : początek dawny A, początek nowy A″ i punkt H leżą w jednéj prostéj.

Ztąd wnosimy, że kąty AA″A′ i BCB′ są równe, gdyż na mocy (1) i (2), mamy prawo powiedzieć, że obydwa te kąty są wpisane w odcinek HDF koła HA″CFDH.

§ **29.** Przemieszczenie podłużne początku A (fig. 23) linii 1, jest teraz znane, wyraża się ono bowiem w funkcyi ilości danéj, to iest przez kąt ω pod jakim linia BC, łącząca początki B i C dwojanu jest

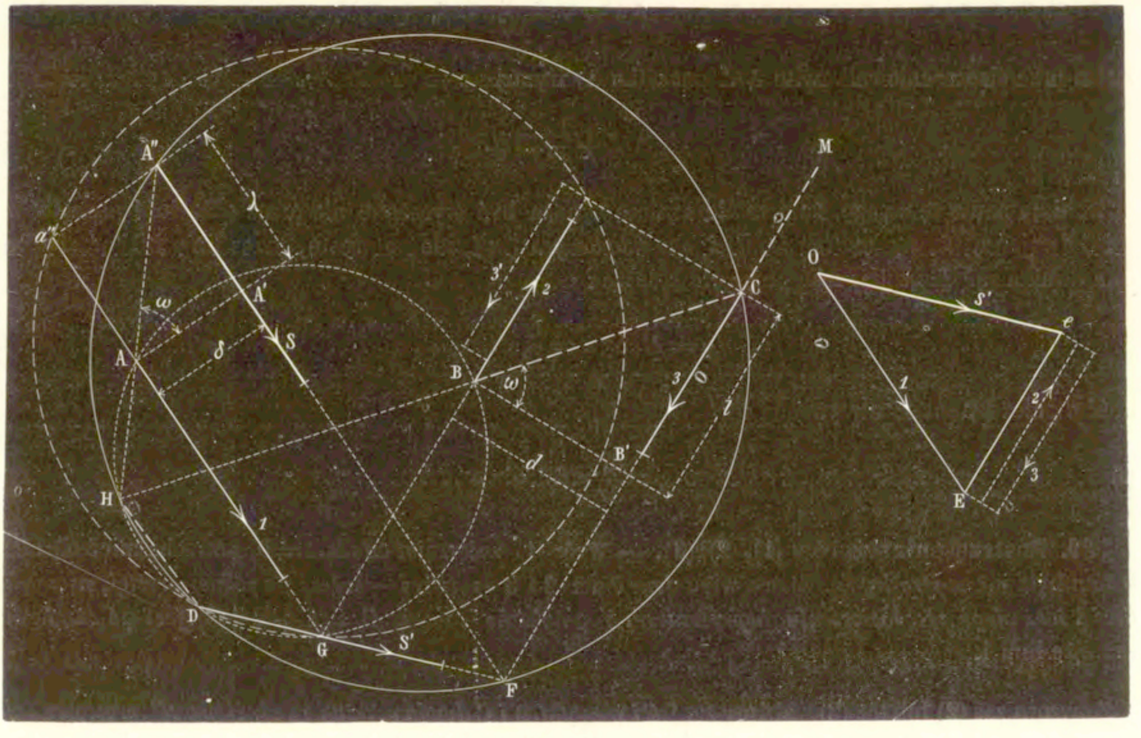

Fig. 24.

nachylona do prostéj BB′, prostopadle poprowadzonéj do składowéj linii tegoż dwojanu. Zachowując literę L na oznaczanie długości linii dwojanu, L′ — na długość linii 1 ; oznaczając przytém odległość BB′ $= d$, przemieszczenie poprzeczne A′A″ $= \delta$, a przemieszczenie podłużne AA′ $= \lambda$, mamy

$$(1) \qquad \delta = \frac{L}{L'} \quad d \text{(patrz § 22)},$$

$$\lambda = \delta \operatorname{tang} \omega ;$$

ztąd, podstawiwszy wartość δ, i zważywszy, że w trójkącie BCB', $d\operatorname{tang}\omega = \mathrm{CB}'$, to jest odległości dwóch punktów C i B, *liczonéj wzdłuż jednéj z linij dwojanu*, otrzymamy, nazywając tę odległość $\mathrm{CB}' = l$, wzór następujący :

$$\lambda = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}'}\, l. \tag{2}$$

Nadmieńmy, że do wzoru (2) możnaby było przyjść od razu, gdyż z podobieństwa trójkątów AA'A″ i BCB' mamy :

$$\mathrm{AA}' : \mathrm{BB}' = \mathrm{A}'\mathrm{A}'' : \mathrm{B}'\mathrm{C} = \mathrm{AA}'' : \mathrm{BC},$$

a ponieważ wiemy, że

$$\mathrm{AA}' = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}'}\, \mathrm{BB}',$$

czyli

$$\mathrm{AA}' = \lambda = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}'} \,.\, \mathrm{B}'\mathrm{C},$$

zatém przemieszczenie całkowite AA″ początku A, wyrazi się :

$$\mathrm{AA}'' + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}'} \,.\mathrm{B}'\mathrm{C}.$$

Zrobimy nadto tę uwagę, że przemieszczenie λ może być wyrażone nie przez odległość początków B i C dwojanu, *liczoną według jednéj z jego składowych linij*, ale po prostu, przez linię BC łączącą te dwa punkta między sobą, zastępując we wzorze :

$$\gamma = \delta \operatorname{tang}\omega = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}'}\, d \operatorname{tang}\omega$$

ilość d przez $\mathrm{BC}\cos\omega$; otrzymamy :

$$\gamma = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}'} \,.\, \mathrm{BC}.\, \sin\omega \tag{3}$$

§ 30. **Roztrząsanie wzorów** (1), (2) i (3). — Wzór (1) wskazuje, że dla $\delta = 0$, potrzeba mieć $d = 0$. O tém była już mowa wyżéj. Skoro więc *dwie linie* 2 *i* 3 *czyli* L *i* — L *leżą na jednéj prostéj, początek linii* 1 *nie ulega przemieszczeniu poprzecznemu* i położenie summy $\mathrm{S} = (1 + 2 + 3)$ jest położeniem saméjże linii 1.

Ze wzoru zaś (2) lub téż (3) widzimy że, *jeśli początki* B *i* C *dwojanu leżą na jednéj prostéj, prostopadłéj do jego linii składowéj*, — to jest jeżeli np. początek linii 3 zamiast być w punkcie C, znajduje się w B', — wtedy we wzorze (2) $l = 0$; a we wzorze (3) linia B'C staje się prostą BB', a kąt ω zerem ; zatém $\lambda = 0$. W tym więc przypadku *początek* A *danéj linii nie będzie miał żadnego przemieszczenia podłużnego* i zostanie on tylko przeniesionym do punktu A' na odległość AA' daną przez wzór (1).

Przemieszczenia δ i y są od siebie niezależne ; to jest, że $d = 0$, nie pociąga za sobą koniecznie $\lambda = 0$. To nam wskazuje kształt wzorów (1) i (2). Co zaś do wzoru (3), przybierze on przy $d = 0$, postać wzoru (2). W saméj rzeczy, jeżeli niezmieniając długości linii BC, przypuścimy, że d się zmniejsza, czyli że linia 3 zbliża się do położenia linii 2, wtedy punkt C będzie się zbliżał do punktu C′, a kąt ω będziesię powiększał, tak że przy granicy, kiedy $d=0$, linia BC stanie się linią BC′, a kąt $\omega=90°$. Fig. 24 przedstawia nam właśnie przemieszczenie podłużne początku linii 1 od A do a'', jakie zachodzi dla przypadku, kiedy linia 3, zlewając się z położeniem linii 2, staje się linią 3′, mającą swój początek w punkcie C′. Wartość $Aa''=\frac{L}{L'}\,C'B=\frac{L}{L'}\,CB'=\frac{L}{L'}\cdot l$.

Z powyższéj dyskusyi wypada: ażeby nie było żadnego przemieszczenia co do położenia linii 1 jako też co do jéj początku, warunki konieczne i wystarczające są dwa następujące:

1° $\delta=0$, co wymaga $d=0$,

2° $\lambda=0$, co wymaga $C'B=l=0$;

to jest: *niezmienimy żadnéj charakterystycznéj cechy summy linij danego systemu dodaniem do niego dwóch linij wtedy tylko, kiedy wprowadzone do systemu linie są położone na jednéj i tejże prostéj, są równe co do ich wielkości a przeciwne co do kierunku i mają ten sam punkt za ich wspólny początek.*

Jak widzimy, oryentacya położenia dwóch linij, wprowadzanych do systemu, nie jest objęta żadnym warunkiem, co znaczy, że pozostaje ona dowolną.

Zaledwie potrzebujemy nadmieniać, że możemy dodać do systemu tyle linij ile się podoba, byle tylko każda grupa dwóch linij zadość czyniła powyższym warunkom.

Uwaga. — Warunki niezbędne dla tego, ażeby *położenie* i *początek* summy trzech linij: 1, 2 i 3, z których dwie ostatnie są równe i przeciwnego sobie kierunku było takie same, jak położenie i początek linii 1, mogą być wyprowadzone geometrycznie, niezależnie od wzorów (1) i (2).

1° *Co do położenia.* Ponieważ położenie summy dwóch linij przechodzi przez punkt ich wzajemnego przecięcia się, więc ażeby położenie summy trzech linij $(1+2+3)$ zlewało się z położeniem linii 1, potrzeba, żeby punktem przecięcia się położenia DF summy dwóch linij $(1+2)$ z położeniem linii 3 był punkt G, czyli innemi słowy, żeby linia 3 spotykała linię 1 w tym samym punkcie co i linia 2; a że linie 2 i 3 muszą zostawać równoległemi (gdyż w przeciwnym razie *wielkość* summy systemu zmodyfikowanego nie byłaby równą *wielkości* summy linij danych), zatém *położenie linii 3 i położenie linii 2 muszą stanowić jedną i tę samą prostę.*

2° *Co do początku.* Przyjąwszy, że ten warunek ma być wypełniony, i wiedząc, że początek summy dwóch linij jest punkt, w którym położenie summy spotyka koło poprowadzone przez początki dwóch linij dodawanych i przez ich wzajemne przecięcie się, widzimy: aby początek A linii 1 pozostał początkiem summy $(1+2+3)$, potrzeba żeby koło, przeprowadzone przez początek D linii $S'=(1+2)$, początek x linii 3 (któréj obecne położenie zlewa się z położeniem linii 2) i punkt G przecięcia się linij S' i 3, spotykało położenie summy $S=(1+2+3)$, to jest linię 1 w punkcie A; więc punktem x może być tylko punkt B, gdyż koło przechodzące już przez trzy punkta: A, D i G, jest najzupełniéj wyznaczoném.

§ 31. **Początek summy dwóch linij równoległych.** — Tu mogą zajść dwa przypadki: 1° dane dwie linie są tego samego kierunku (fig. 25) i 2° dane dwie linie są kierunku przeciwnego (fig. 26).

W pierwszym razie wprowadzeniem do systemu danych linij 1 i 2 (fig. 25) dwóch linij x i y (których oryentacya może być wziętą dowolnie) tego samego położenia, téjże wielkości, przeciwnego sobie kierunku i mających spólny początek P, nie zmienimy w niczém summy linij $1+2$; to jest, że wszystkie charakterystyczne cechy summy linij: $(x+1+2+y)$ będą te same jak summy linij danych : $(1+2)$. Wyznaczywszy więc stopniowo : początek summy linij x i 1, potém początek summy linij : $(x+1)$ i 2, następnie początek summy linij $(x+1+2)$ i linii y, otrzymamy początek S summy linij : $(x+1+2+y)$, który będzie zarazem początkiem summy linij $(1+2)$.

Rysunek wskazuje nam, że początek S summy SM danych linij 1 i 2 znajduje się na prostéj AB łączącéj początki A i B tych linij. Tak być powinno, gdyż wiemy z § 33, że w ogólności, dla znalezienia początku summy dwóch jakichkolwiek linij, dosyć jest połączyć ich początki A i B; wykreślić w jednéj ze skrajności linii AB kąt równy temu, jaki czyni linia dana, przechodząca przez drugą

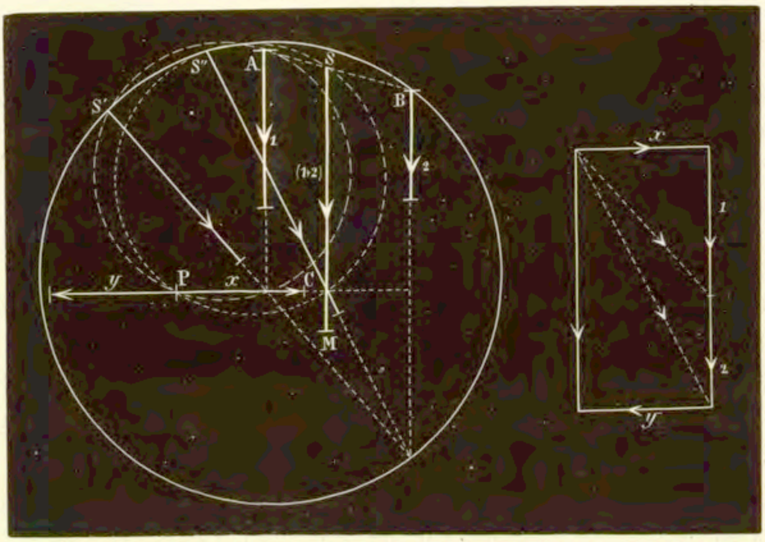

Fig. 25.

skrajność linii AB, z położeniem summy danych linij; punkt w którym to położenie spotyka ramię tak zbudowanego kąta, będzie szukanym początkiem. Otóż, w przypadku linij równoległych 1 i 2 (fig. 25) położenie SM summy $(1+2)$ tworzy z każdą z linij danych kąt równy $0°$, ramię więc kąta, o którym mowa, zlewa się z samą że linią AB; zatém początkiem summy $(1+2)$ będzie punkt przecięcia się linij SM i AB.

W skutek téj własności, linie pomocnicze x i y, przy szukaniu początku summy linij równoległych, mogą nie mieć spólnego początku P, ale powinny one leżeć zawsze na jednéj prostéj. Nadto, nie mamy potrzeby wykreślać koła służącego do wyznaczania początków summ częściowych $(x+1)$, $(x+1+2)$, albowiem chodzi nam tylko o znalezienie *położenia* snmmy $(1+2)$, które przecięciem się swojém z linią AB da nam początek téj summy. Zatém *położenie i początek summy dwóch linij równoległych wyznaczy się z samego tylko wykreślenia wieloboku 2go rzędu tych linij.*

Powyższa uwaga stosuje się najzupełniéj i do wyznaczenia początku summy dwóch linij równoległych przeciwnego sobie kierunku. Przykład takich linij podajemy na fig. 26. Wykreślenie kół dających początki summ częściowych i summy szukanéj SM$=(1+2)$ wskazuje, że i w tym przypadku początek summy S jest punktem przecięcia się położenia SM_2 z prostą łączącą początki dane A i B. Tłomaczy się to tém, że kąt linii 1 z położeniem SM równym jest 0, a kąt linii 2 z témże położeniem równa się $180°$; w obydwu więc razach, ramię kąta wykreślonego bądź w punkcie A, bądź też w punkcie B, zlewa się z prostą AB.

§ 32. **Początek różnicy dwóch linij.** — Pozostaje nam wrócić do fig. 21 i powiedzieć słów kilka o początku różnicy dwóch linij.

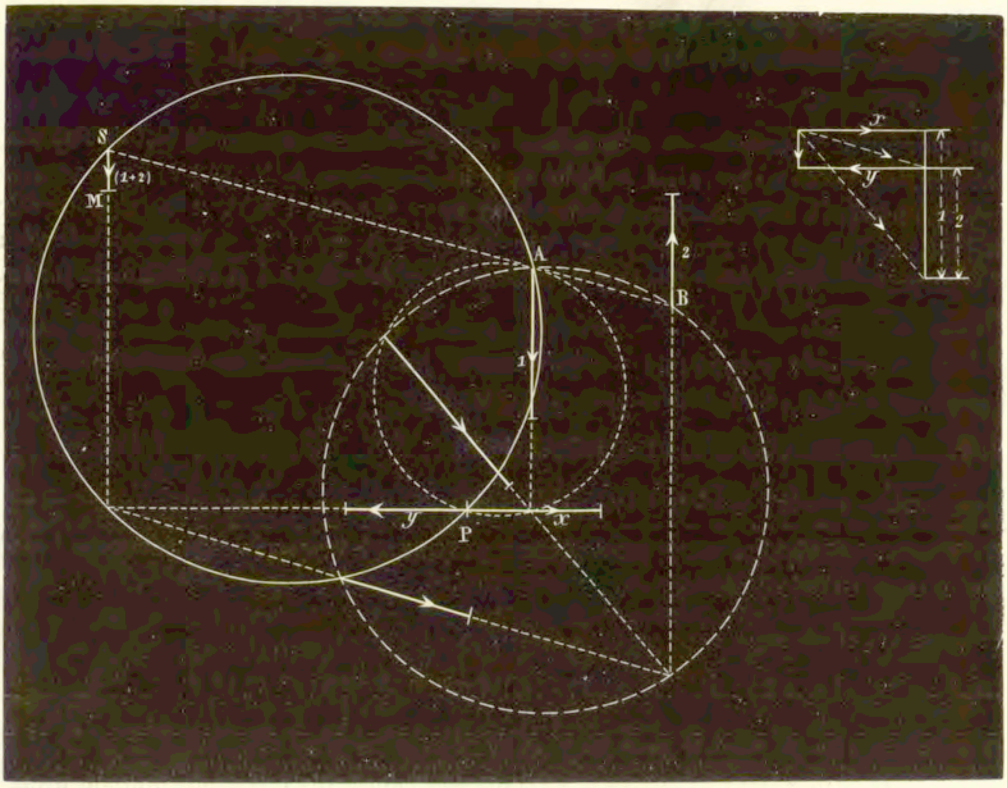

Fig. 26.

Ponieważ odejmowanie jest to dodawanie linii wziętéj w przeciwnym kierunku, zatém różnica linij 1 i — 2, odpowiada 1 i II; początek więc D téj różnicy $d = (1 - 2)$ znajdziemy szukając początku D summy linij (I + II). I w ogólności, wszystko co było powiedziané mo punkcie S, stosuje się również i do punktu D.

§ 33. **Początek summy linij systemu dowolnego.** — Niech będzie dany system linij : 1, 2, 3,... $(n-1)$, n, których początki leżą w punktach A, B, C, ... , N. Początek O_{n-1} linii $(1+2+3\ldots + (n-1) + n)$, powstałéj z dodawania danych linij w *porządku oznaczonym*, na zasadzie praw wyłożonych w poprzedzających paragrafach, otrzyma się w sposób następujący :

Przedłużamy linie 1 i 2 do ich przecięcia się w punkcie Q_1, przez trzy punkta A, B i Q_1 opisujemy koło K_1, które przecina linię $(1+2)$ w punkcie O_1. Punkt O_1 jest początkiem linii $(1+2)$. Następnie przedłużamy linie $(1+2)$ i 3 do ich przecięcia się w punkcie Q_2; przez trzy punkta O_1, C i Q_2 opisujemy koło K_2, które przecina linię $(1+2+3)$ w puncie O_2. Punkt O_2 jest początkiem linii $(1+2+3)$. Daléj przedłużamy linie $(1+2+3)$ i 4 do ich przecięcia się w punkcie Q_3; przez trzy punkta O_2, D i Q_3 opisujemy koło K_3, które przecina linię $(1+2+3+4)$ w punkcie O_3. Punkt O_3 jest początkiem linii $(1+2+3+4)$. Postępując daléj w taki sposób przyjdziemy nakoniec do linii $[1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)]$, mającéj swój początek w punkcie O_{n-2} i do ostatniéj linii n danego systemu, któréj początek N jest nam dany. Przedłużamy więc te linie do ich przecięcia się w punkcie Q_{n-1} i przez trzy punkta O_{n-2}, N i Q_{n-1} opisujemy koło K_{n-1}, które przecina linię $[1+2+\ldots+(n-1)+n]$ w punkcie O_{n-1}

Punkt O_{n-1} jest początkiem summy danych linij 1, 2, 3, ..., $(n-1)$, n, dodawanych w *porządku oznaczonym.*

Dla krótkości będziemy nazywali koła $K_1, K_2, \ldots K_{n-1}$, *kołami początków*, a punkta $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$ *początkami summ częściowych :* 1 i 2, (1 + 2) i 3, (1 + 2 + 3) i 4, ..., [1 + 2 + ... + $(n-1)$] i n *snmmami częściowemi.*

Łatwo przewidzieć, że wyznaczenie początku summy linij danego systemu nie jest działaniem *jednowartościowém*, lecz zależy od porządku, w jakim dane linie będziemy dodawać. W ogólności, dla każdego nowego porządku linij dodawanych otrzymamy nowy początek i każdy z takich początków leży na jednej i téj saméj prostéj wyznaczającéj położenie summy danych linij. Tylko w niektórych razach wszystkie te warunki mają miejsce i wtedy wyznaczenie początku summy jest działaniem jednowartościowém.

Przypadki, w których wyznaczenie początku summy jest działaniem jednowartościowém, to jest niezależném od porządku linij dodawanych, są następujące :

1) Dany system składa się z dwóch linij jakichkolwiek ;

2) Dany system składa się z trzech linij jakichkolwiek;

3) Dany system składa się z linij równoległych tego samego lub przeciwnego kierunku i mających swe początki na jednéj prostéj ;

4) Dany system składa się z linij mających spólny początek ;

5) Dany system składa się z linij, których początki leżą na jednéj prostéj ;

6) Dany system składa się z linij, których wszystkie koła początków mają jeden punkt spólny.

Dowodzenie tych twierdzeń zostawiamy czytelnikowi, jednak dla ułatwienia dowodu uważamy za stosowne nadmienić.

ad 1) Przypadek 1szy jest wymiarem samego określenia początku summy dwóch linij;

ad 2) Przypadek 2gi, będzie prostym wymiarem następującéj własności : Skoro dany system składa się *tylko* z trzech linij, to wszystkie koła początków mają jeden punkt spólny, który będąc połączonym z początkami danych linij, daje nam kąty równe kątom nachylenia tychże linij,

ad 3) Przypadek 3ci opiera się na znajoméj nam własnosci początku dwóch linij równoległych, a mianowicie : Początek dwóch linij równoległych leży na linii, łączącéj początki tychże linij ;

ad 4) Przypadek 4ty jest widocznym i nie potrzebuje dalszego objaśnienia ;

ad 5) Przypadek 5ty może być sprowadzony do 3go, rozkładając dany system na dwa inne o liniach równoległych;

ad 6) Przypadek 6ty (najwięcéj ogólny) wynika z przypadku 3go.

WIADOMOŚCI POMOCNICZE SŁUŻĄCE DO ZBADANIA WŁASNOŚCI WIELOBOKÓW DRUGIEGO RZĘDU.

§ 34. Wiadomości, o których tu mówić zamierzamy, są powszechnie oparte na zasadach Geometryi położenia, my zaś przedstawiamy dowody elementarne, a tém samém więcéj przystępne dla szerszego koła czytelników.

TWIERDZENIE I. — *Mając figurę utworzoną z sześciu linij łączących między sobą cztery punkta płas-*

czyzny, można zawsze wykreślić drugą figurę, również złożoną z sześciu linij łączących cztery inne punkta, i taką że : 1° Każdemu bokowi jednéj figury, odpowiada w drugiéj figurze bok bądź prostopadły, bądź do niego równoległy; 2° Każdemu pękowi trzech linij jednéj figury odpowiadają w drugiéj figurze trzy boki trójkąta, prostopadłe lub równoległe do trzech linij pęku.

W saméj rzeczy, niech będą (fig. 27) cztery punkta dane : A, B, C i D; figura utworzona z ich połączenia będzie składać się z sześciu linij, albowiem z połączenia trzech punktów A, B, C otrzymamy trójkąt ABC, a z połączenia punktu D z trzema poprzedniemi punktami, będziemy mieli inne trzy linie DA, DB, DC. Figura ABCD zawierać będzie cztery trójkąty :

(1) ABC, DAB, DBC, DAC

Niech punkta :

D', A', B' C',

będą odpowiedniemi środkami kół opisanych około trójkątów (1). Jeśli połączymy między sobą

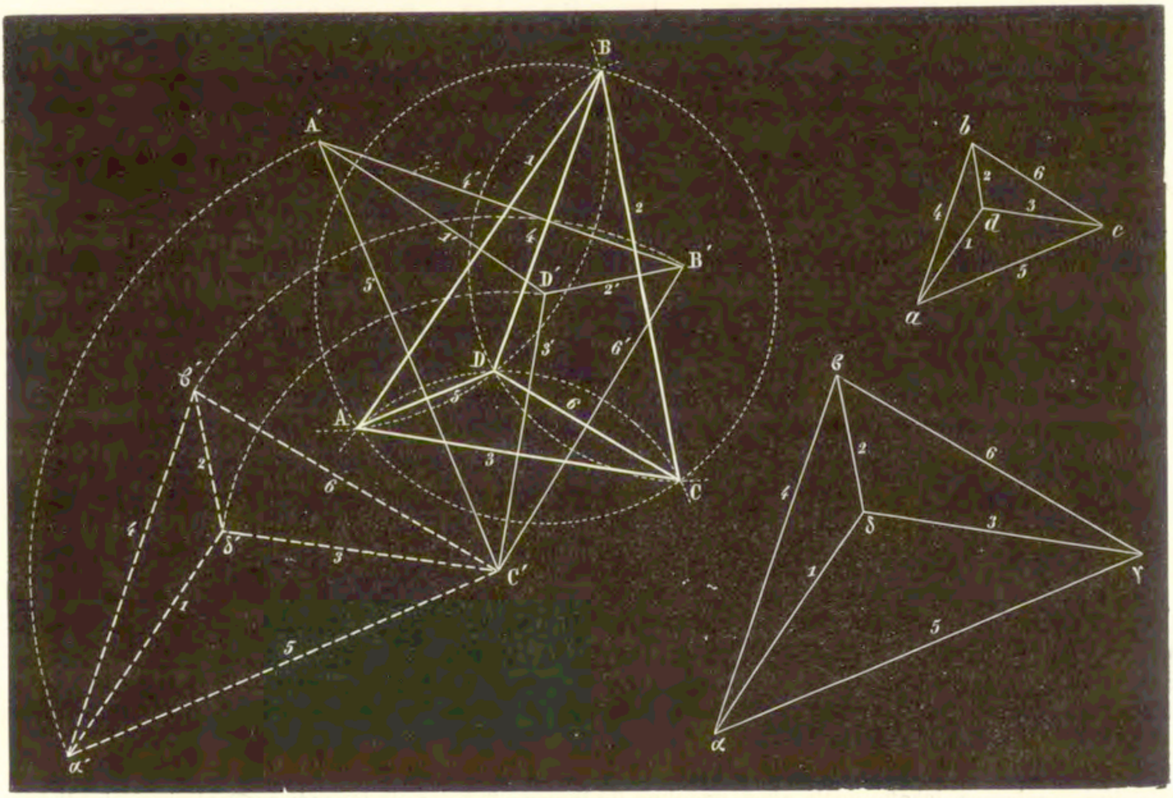

Fig. 27.

punkta D', A', B' i C', otrzymamy figurę A'B'C'D', złożoną z sześciu linij, z których : 1°) Każda jest *prostopadłą* do jednéj z linij figury danéj ABCD (co wynika z samego wykreślenia środków kół); 2°) Każdy pęk trzech linij nowéj figury, odpowiada trzem bokom trójkąta w figurze danéj (gdyż jak wiadomo, prostopadłe do trzech boków trójkąta, wystawione w ich środkach, zbiegają się w jednym punkcie).

Rozmaite boki figury A'B'C'D' i prostopadłe do nich boki figury danéj ABCD, są oznaczone temi samemi cyframi, tylko te cyfry dla figury A'B'C'D' są kreskowane.

Tak więc : 1) linia $AC = 3$ na figurze danéj jest prostopadłą do linii $D'C' = 3'$ na figurze w téj chwili otrzymanéj ; linia $BD = 4$ dawnéj figury jest prostopadłą do linii $A'B' = 4'$ nowéj figury i t. d. i odwrotnie : bok $A'D' = 1'$ figury nowéj prostopadłym jest do boku $AB = 1$ figury danéj i t. p. Oprócz tego : 2) na figurze danéj, trzy linie $AB = 1$, $BD = 4$, $BC = 2$ stanowią pęk trzech linij, mających punkt B za węzeł ; na figurze nowéj trzy linie odpowiadające liniom 1, 4, 2, są boki 1', 4', 2', trójkąta A'B'D'; i odwrotnie : pękowi trzech linij $C'A' = 5'$, $C'D' = 3'$, $C'B' = 6'$ figury nowéj, odpowiadają na figurze danéj trzy boki 5, 3, 6 trójkąta ADC.

Figury ABCD i A'B'C'D' posiadające przytoczone dopiero własności, zowią się *figurami wzajemnemi* (1).

Jeżeli obrócimy figurę A'B'C'D' na 90°, jak wskazuje nasz rysunek, przybierze ona położenie $\alpha'\beta'C'\delta'$, a jéj rozmaite boki z prostopadłych staną się *równoległemi* do odpowiednich boków figury danéj ABCD; ale obrót ten nie zmienia względnego położenia linij figury A'B'C'D' ; to jest, że każdemu pękowi figury $\alpha'\beta'C'\delta'$ odpowiada trójkąt na figurze ABCD i odwrotnie. Nadto, przenosząc równolegle figurę $\alpha'\beta'C'\delta'$ do jakiegokolwiek miejsca płasczyzny, np. do położenia $\alpha\beta\gamma\delta$, nic nie zmienimy w jéj charakterze, tak że figury ABCD i $\alpha\beta\gamma\delta$ będą figurami wzajemnemi.

Przypadek, kiedy boki dwóch figur wzajemnych są *równoległe*, jest właśnie ten, jaki najczęściéj wypadnie nam rozpatrywać.

Uwaga. — Dowiodłszy założonego twierdzenia, należy nam jeszcze zrobić następującą uwagę :

1° Wszelka figura *abcd* podobna do figury $\alpha\beta\gamma\delta$, jest wzajemną względem figury ABCD i odwrotnie.

2° Wszelka figura *abcd*, wzajemna względem figury ABCD, jest podobną do figury $\alpha\beta\gamma\delta$.

Istotnie, ponieważ charakter otrzymanéj figury $\alpha\beta\gamma\delta$, nie zależy wcale od wielkości jéj boków, zatém wszelka figura podobna do $\alpha\beta\gamma\delta$ i dowolnie na płasczyznie umieszczona, może być sprowadzona do takiego położenia że będzie ona wzajemną względem figury ABCD. Ale ztąd bynajmniéj nie wypada, że figura ABCD ma nieoznaczoną liczbę figur wzajemnych i *różnych*, albowiem natura wszystkich figur do siebie podobnych, pozostaje jedna i ta sama, i różnica między niemi jest tylko czysto *metryczna*, powstająca z wyboru *jedności* dla mierzenia długości linij, czyli zależąca od przyjętéj skali.

Że zaś wzięta figura *abcd* wzajemna względem figury ABCD, jest podobną do $\alpha\beta\gamma\delta$, wynika ztąd, że dwie figury *abcd* i $\alpha\beta\gamma\delta$ będą się składały z téjże saméj liczby trójkątów podobnych i w podobny sposób ułożonych.

§ 35. Widzieliśmy, jak mając figurę ABCD, łączącą po dwa cztery punkta A, B, C, D, wykreśla się figurę wzajemną jakąkolwiek *abcd*, podobną do figury $\alpha\beta\gamma\delta$ raz otrzymanéj ze znalezienia środków D', A', B', C' kół opisanych około trójkątów składających figurę daną ABCD. Ale ta droga jest za długa;

(1) Figury te stanowią szczególny tylko przypadek *figur wzajemnych* w ogólności. Ale ponieważ teorya takich figur nie wchodzi obecnie do naszego programu, przeto nie będziemy jéj rozwijać obszerniéj.

możemy wykreślić *wprost* figurę *abcd*, na mocy samego określenia figur wzajemnych. W saméj rzeczy, uważajmy najprzód że :

1° Trójkąt ABC utworzony z linij 1, 2, 3 będzie miał na figurze wzajemny węzeł, złożony z trzech linij, odpowiednio równoległych do linij 1, 2, 3. Zatém z jakiegokolwiek punktu d płasczyzny należy poprowadzić trzy proste $da=1$, $db=2$ i $dc=3$, nieokreślonéj długości, równolegle do trzech boków trójkąta ABC.

2° Następnie, linie 1, 5, 3, tworząc na figurze ABCD węzeł A, będą miały za figurę wzajemną trójkąt. Mamy już położenie dwóch boków $da=1$ i $dc=3$ tego trójkąta; należy więc wkreślić między linie da i dc prostę równoległą do linii 5; prosta ac może być długości dowolnéj, gdyż określenie figur wzajemnych w niczém nie warunkuje długości odpowiednich sobie boków.

3° Daléj, trzy linie 1, 4, 2 tworzą węzeł B na figurze danéj. zatém odpowiednie im trzy linie figury wzajemnéj muszą tworzyć trójkąt. W szukanym trójkącie, jeden bok $da=1$ jest już wyznaczonym co do położenia i wielkości, a drugi $db=2$ — co do położenia; zatém, ażeby mieć bok odpowiadający linii 4, należy przez punkt a (jnż wyznaczony) poprowadzić prostę ab równoległą do linii 4 aż do jéj spotkania się w punkcie b z linią 2.

4° Nakoniec, linie 2, 6, 3 stanowią węzeł C na figurze ABCD, więc muszą mieć na figurę wzajemną trójkąt. Otóż, dwa boki tegoż trójkąta $dc=3$ i $db=2$, są już wyznaczone co do położenia i wielkości dla utworzenia więc trójkąta, pozostaje nam tylko połączyć punkta b i c (zupełnie już wyznaczone) linią $bc=6$. Lecz, ażeby *cała* tak otrzymana figura *abcd* była *rzeczywiście* wzajemną względem figury danéj ABCD, potrzeba ażeby szósta linia $bc=6$, —która znalazła się najzupełniéj już wyznaczoną przez pięć innych linij, była *równoległą* do odpowiadającéj linii DC$=6$, na figurze danéj [1].

Otóż nic nie dowodzi *à priori*, że linia bc jest równoległą do linij DC. Należy zatém dowieść następującego twierdzenia :

§ 36. Twierdzenie II. — *Jeżeli :* 1) *z sześciu linij łączących cztery punkta płasczyzny, pięć linij jednej figury są równoległe* (lub prostopadłe) *do pięciu linij drugiéj figury, złożonéj również z sześciu linij łączących cztery inne punkta ;* i jeżeli oprócz tego, 2) *Linie te są tak wykreślone, że pękowi trzech linij, jednéj figury odpowiadają na drugiéj figurze trzy boki trójkąta*, to twierdzimy że i *szóste linie dwóch figur będą także do siebie równoległe* (lub prostopadłe), a zatém figury takie będą wzajemnemi.

Niech w dwóch figurach ABCD i *abcd* (fig. 27), pięć linij : 1, 2, 3, 4, 5 pierwszéj figury, będą równoległe do pięciu linij 1, 2, 3, 4, 5 drugiéj, i niech stosownie do założenia, pękowi trzech linij figury ABCD odpowiadają trzy boki trójkąta w figurze *abcd* [2]. Mamy dowieść, że szóste linie : bc DC są względem siebie równoległe.

---

(1) Możemy tu nadmienić że skala do któréj odniesione są długości rozmaitych boków figury *abcd*, wynika właśnie z długości nadanéj pionowéj linii ac, to jest z długości, na jakiéj tę linię prowadzimy względem punktu d.

(2) O ile, w ogólności, ważnym jest ten warunek, pokazuje nam to figura 28. Dwie figury ABCD i *abcd* mają pięć linij równoległych : 1, 2, 3, 4, 5; jednak szósta linia CD figury ABCD nie będzie równoległą do szóstéj linii cd figury *abcd* i linią równoległą do CD będzie inna linia ck. Figury te nie mogą być *wzajemnemi*, gdyż naprzykład, trójkątowi 145 figury ABCD, odpowiada również trójkąt 145 na figurze *abcd;* pęk trzech linij 4, 1, 2 pierwszéj figury nie ma nic wzajemnego na figurze drugiéj i t. p. Główną jednak przyczyną że linie DC i dc nie są równoległe jest to, że na figurze ABCD czwarty punkt D jest zewnątrz trójkąta ABC, wtedy gdy na figurze *abcd*, punkt d leży wewnątrz trójkąta *abc*.

W tym celu wyobraźmy sobie figurę $\alpha\beta\gamma\delta$ *wzajemną* względem figury danéj ABCD (okazaliśmy, że wykreślenie figury $\alpha\beta\gamma\delta$ jest zawsze możebném). Linia $\beta\gamma$ będzie zatém, z samego wykreślenia, równoległą do linij DC. Porównywając między sobą figury $\alpha\beta\gamma\delta$ i *abcd*, spostrzegamy natychmiast, że są one do siebie podobne, jako złożone z trójkątów podobnych i w podobny sposób ułożonych.

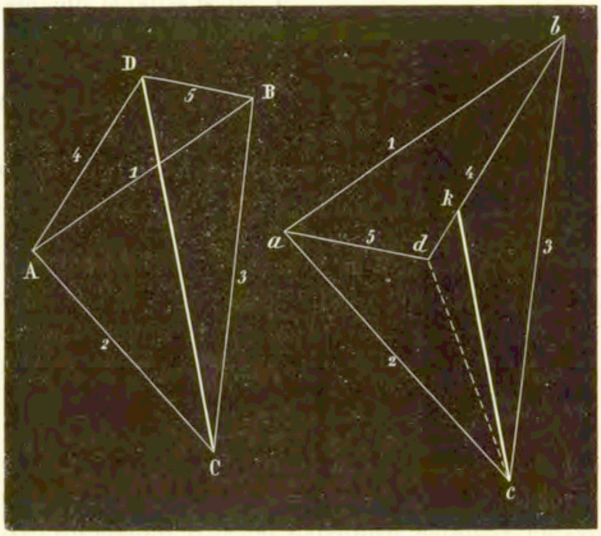

Fig. 28.

W saméj rzeczy, mamy najprzód :

$$\Delta\, \alpha\beta\delta \backsim \Delta\, abd; \quad \text{i} \quad \Delta\, \alpha\gamma\delta \backsim \Delta\, acd$$

gdyż te trójkąty mają po trzy boki równoległe z wykreślenia; ztąd wynika proporcya

$$\alpha\delta : ad = \delta\beta : db$$

i

$$\alpha\delta : ad = \delta\gamma : dc,$$

więc

$$\delta\beta : db = \delta\gamma : dc;$$

a że kąty $\beta\delta\gamma$ i bdc są sobie równe, zatém trójkąty $\beta\delta\gamma$ i bdc będą do siebie podobne, a w skutek tego i trzecie ich boki $b\gamma$ i bc muszą być równoległe. Więc bc równoległa do $\gamma\beta$, będzie tém samém równoległą do linii DC.

Pięć linij figury mogą być wzięte w porządku jakimkolwiek; dowodzenie równoległości szóstych linij zostanie to samo. Tak naprzykład, jeżeli na figurach ABCD i *abcd* linie odpowiednio równoległe są 1, 3, 4, 5, 6, wtedy uważając figurę pomocniczą $\alpha\beta\gamma\delta$ i trójkąty podobne :

$$\Delta\, \alpha\gamma\delta \quad \text{i} \quad \Delta\, acd\,; \; \Delta\, acb \quad \text{i} \quad \Delta\, \alpha\gamma\beta$$

Zobaczymy w następnym paragrafie, że w niektórych przypadkach dwie figury mogą nie być *wzajemnemi*, ale z tém wszystkiém, równoległość pięciu ich boków pociąga za sobą równoległość i szóstych linij.

otrzymujemy

$$\alpha\gamma : ac = \alpha\delta : ad,$$

$$\alpha\gamma : ac = \alpha\beta : ab,$$

zkąd

$$\alpha\delta : ad = \alpha\beta : ab;$$

więc trójkąty $\alpha\beta\delta$ i abd mające kąty $\beta\alpha\delta$ i bad równe, zawarte między bokami proporcyonalnemi, są podobne; a że już dwa ich boki 1 i 4 są równoległe, przeto i trzecie boki $\beta\delta$ i bd także będą równoległe; ztąd wynika, że linia $bd = 2$ jest równoległą do linii BC = 2.

W ogólności, jakkolwiek będą nam dane pięć linij równoległych (np. 2, 6, 3, 5, 1), tworzą one zawsze z konieczności dwa trójkąty bcd, adc, mające jeden bok (cd) spólny, a zatem spólne dwa wierzchołki (c i d); ztąd wyprowadzimy proporcyonalność dwóch boków (da i db) do odpowiednich im boków figury $\alpha\beta\gamma\delta$, a w skutek tego równoległość linij (ab i $\alpha\beta$) łączących trzecie wierzchołki tych dwóch trójkątów.

Własność wyrażona twierdzeniem II będzie często nadzwyczaj dla nas użyteczną i posłuży do wyprowadzenia bardzo ważnych wniosków.

Uwaga. — Na figurze ABCD (fig. 27) czwarty punkt płasczyzny D, znajduje się wewnątrz trójkąta ABC, łączącego punkta A, B, C; otóż punkt D może być położony zewnątrz trójkąta jak np. na fig. 28. Ale dla obu przypadków twierdzenie nasze stosuje się bez żadnéj zmiany; kształt zewnętrznéj figury zamiast trójkąta ABC (fig. 26) będzie czworobokiem ADBC (fig. 27); lecz jak w jednym tak i w drugim przypadku cała figura zawsze się składać będzie z czterech trójkątów.

§ 37. Równoległości szóstéj linii dwóch figur łączących cztery punkta płasczyzny, można dowieść niezależnie od pojęcia o *figurach niezależnych*, stawiając twierdzenie w sposób następujący:

Twierdzenie III. *Jeżeli pięć linij jednego czworoboku są równoległe do pięciu linij drugiego, to i szóste linie będą także do siebie równoległe.*

Niech będzie dany (fig. 29) czworobok $oabc$ i jego przekątne ob i ac. Jeżeli przez dowolny punkt O płasczyzny, poprowadzimy linię OB równoległą do ob, to dla utworzenia nowego czworoboku, linie równoległe do czterech stron 1, 2, 3, 4 czworoboku danego, mogą być wzięte w jednym z czterech następujących porządków:

$$1^{\circ})\ \begin{matrix} & 4 & \\ 3 & & 1; \\ & 2 & \end{matrix} \qquad 2^{\circ})\ \begin{matrix} & 2 & \\ 1 & & 3; \\ & 4 & \end{matrix}$$

$$3^{\circ})\ \begin{matrix} & 4 & \\ 1 & & 3; \\ & 2 & \end{matrix} \qquad 4^{\circ})\ \begin{matrix} & 2 & \\ 3 & & 1. \\ & 4 & \end{matrix}$$

1szy przypadek oznacza, że przez punkt O prowadzimy linię OA″ równolegle do strony czworoboku danego, oznaczonéj cyfrą 3, a następnie z dowolnego punktu B prostéj OB kreślimy BC‴ równolegle do strony 1; poczém pozostanie przez punkt O poprowadzić OC‴ równolegle do linii 2 i przedłużyć ją do spotkania się w punkcie C‴ z linią BC‴ poprzednio wykreśloną, a także z punktu B wykreślić linię BA″ równoległą do linii 4, do jéj spotkania się w punkcie A″ z prostą OA″. Otrzymamy więc czworobok OA″BC‴, którego jedną przekątną jest linia OB równoległa z wykryślenia do przekątnéj $ob=5$, a drugą będzie linia A″C‴, stanowiąca szóstą stronę tego czworoboku. Widocznèm jest, że w uważanym przypadku, linia A″C‴ będzie równoległą do linii $ac=6$, gdyż czworoboki OA″BC‴ i *oabc* są złożone z trójkątów podobnych, a nadto w podobny sposób ułożonych,

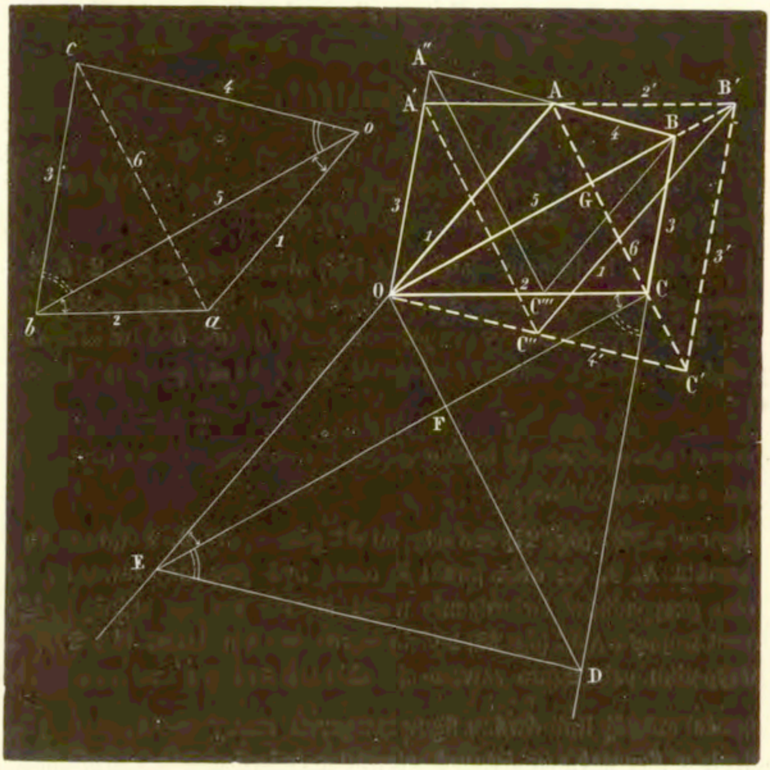

Fig. 29.

W 2^{im} PRZYPADKU, wykreślamy z punktu O prostę OA równoległą do linii 1, a z dowolnego punktu B′ prostéj OB, prowadzimy B′C′ równolegle do linii 3; poczém przez O kreślimy OC′ równolegle do linii 4, a przez B′ kreślimy B′A równolegle do linii 2; otrzymamy ztąd czworobok OAB′C′ złożony z trójkątów OAB′ i OB′C′ podobnych odpowiednio do trójkątów *oab* i *obc* składających czworobok dany *oabc*. Wypadnie w skutek tego że przekątna AC′ jest równoległą do przekątnéj $ac=6$.

Wykreślone w tych dwóch przypadkach czworoboki OA″BC‴ i OAB′C′ nie są wzajemne względem czworoboku danego *oabc*.

Idąc wskazaną drogą otrzymamy : w 3^{im} *przypadku* czworobok OABC,

» a w 4^{ym} » » OA′B′C″.

Ostatnie dwa czworoboki będą *wzajemne* względem czworoboku *oabc*, jak się o tém także możemy przekonać.

Mamy więc do roztrząsania tylko dwa przypadki 3^{ci} i 4^{ty}. Ograniczamy się przeprowadzeniem dowodzenia równoległości $6^{\text{éj}}$ linii czworoboku, dla jednego z tych przypadków, naprzykład dla 3^{go}.

Niech w czworobokach *oabc* i OABC, pięc linij jednego :

oa *ab* *bc* *co* *ob*

będą równoległe do pięciu linij drugiego :

AO OC CB BA OB;

należy dowieść że szóste linie : *ca* i AC, *będą także do siebie równoległe.*

W tym celu wykreślmy czworobok pomocniczy OCDE, w sposób następujący:

W czworoboku OABC przedłużmy dowolnie strony AO i BC, a następnie przez punkta O i C poprowadźmy OD równolegle do AC, i CE równolegle do OB; linie OD i CE przecinają proste CD i OE w punktach D i E, które połączone linią ED dadzą nam czworobok OCDE.

Oczywiście, twierdzenie nasze będzie dowiedzione, jeżeli okażemy, że linia *ca* jest równoległą do linii OD.

1° Dla tego, powiadamy najprzód, że wszystkie strony czworoboku pomocniczego OCDE są równoległe do odpowiednich im stron w czworoboku OABC.

Otóż, ze sposobu w jaki czworobok OCDE został wykreślony widzimy, że pięć linij tego czworoboku są równoległe do pięciu linij czworoboku OABC; pozostaje więc dowieść, że szóste strony, o jest AB i ED są równoległe; czyli że trójkąty AGB i EFD, mające już po dwa boki równoległe (AG równoległą do FD i GB do EF) są podobne, a dla tego dosyć będzie okazać że dwa boki AG i GB są proporcyonalne do FD i EF, albowiem kąty między temi bokami zawarte : AGB i EFD widocznie są sobie równe.

Trójkąty podobne EFO i OGA, jako też FDC i GBC dają nam proporcye :

$$EF : OF = OG : AG$$

$$FD : FC = GC : GB,$$

a że w równologłoboku OGCF, $OF = GC$ a $OG = FC$, zatém

$$EF . AG = FD . GB,$$

ztąd :

$$EF : GB = FD : AG,$$

co było do okazania, więc linia ED jest równoległą do linii AB.

2° Powiadamy następnie, że wszystkie strony czworoboku pomocniczego OCDE są równoległe do stron czworoboku danego *oabc*.

Ponieważ pięć stron czworoboku OCDE :

OC, CD, DE, EO, CE,

są już równoległe do pięciu stron czworoboku *oabc* :

ab, *bc*, *oc*, *ao*, *ob*,

pozostaje dowieść że szóste strony OD i *ac* będą także równoległe, czyli okazać, że trójkąty OED i *oca*, mające już dwa boki (EO i *ao*, DE i *oc*) równoległe, są podobne.

Otóż trójkąty OCE i DCE, mające spólną stronę CE, są odpowiednio podobne do trójkątów *abo* *cbo*, mających spólną stronę *ob*. Ztąd będziemy mieli proporcyę :

$$CE : ob = OE : oa,$$

i

$$CE : ob = ED : oc,$$

zatém :

(1) $$OE : oa = ED : oc.$$

Ponieważ zaś

$$\text{kąt } OEC = \text{kątowi } aob$$

a

$$\text{kąt } CED = \text{kątowi } cob$$

więc ich summy będą także równe, czyli że :

(2) $$\text{kąt } OED = \text{kątowi } coa,$$

zatém, na mocy (1) i (2) trójkąty OED i *coa* są podobne, a więc ich trzecie boki OD i *ca* są równoległe.

Otóż linia OD jest z wykreślenia równoległą do linii AC; zatém AC jest równoległą do *ac*, — co było do okazania.

Uwaga. Dowodzenie nasze wykazuje że jeśli cztery boki i przekątne jednego czworokąta są równoległe do czterech boków i przekątnéj drugiego czworoboku, to i drugie przekątne będą równoległe. Ale szóste strony czworoboków mogą nie być przekątnemi i założone twierdzenie pozostanie prawdziwém, to jest że równoległość szóstych linij dwóch czworoboków wynika z rownoległości pięciu jakichkolwiek ich stron.

Tę własność moglibyśmy wykazać bezpośrednio postępując w wyżéj przytoczony sposób, to jest dając sobie z góry *położenie* dwóch linij (mających być przekątnemi nowego czworoboku) poprowadzonych równolegle do przekątnych *ob* i *ac* czworoboku *oabc* i rozbierając cztery możliwe przypadki grupowania boków 1, 2, 3 i 4; trzy linii nowego czworoboku zawsze mogą być poprowadzone *à priori* równolegle do trzech stron czworoboku danego *oabc*, ale linia czwarta będzie już najzupełniéj wyznaczoną przez wykreślenie trzech innych linij ; otóż łatwo będzie okazać że ta linia czwarta nowego czworoboku będzie równoległą do linii czwartéj czworoboku *oabc*.

§ 38. Dowiedźmy teraz powyższego twierdzenia dla dwóch figur łączących cztery punkta płasczyzny, w przypadku kiedy kontur tych figur, zamiast czworoboku, jest trójkątem.

Niech figury ABCD i *abcd* (fig. 30) mają pięć linij równoległych : 1, 3, 4, 5, 6. Dostrzegamy że te figury czynią zadość warunkom *wzajemności*, zatém z góry wiemy że szóste ich linie BC i *bc* będą także równoległe : ale chcemy dowieść tego bezpośrednio.

W tym celu wykreślamy figurę pomocniczą $\beta\gamma da$ w sposób następujący :

Przez punkt *d* prowadzimy $d\gamma$, równolegle do *ac*, do spotkania się jéj w punkcie γ z przdłużeniem linii *ba*; następnie, przez punkt γ kreślimy $\gamma\beta$, równolegle do $b\beta$, do przecięcia się jéj w punkcie β z przedłużoną linią *dc* i potém łączymy β z *a* i otrzymujemy w skutek tego figurę $\beta\gamma da$.

Dowodzenie nasze przeprowadzimy tak samo jak w paragrafie poprzednim, to jest okażemy : 1°) że sześć linij figury pomocniczéj są równoległe do sześciu linij figury $abdc$, i 2°) że sześć linij tejże figury pomocniczéj są równoległe do sześciu linij figury danéj ABCD.

1° Z wykreślenia samego, pięć linij figury $\beta\gamma da$ są równoległe do pięciu linij figury $abdc$; ażeby więc dowieść że szóste ich linie : βa i bd są równoległe, dosyć będzie, połączywszy punkta β i b linią

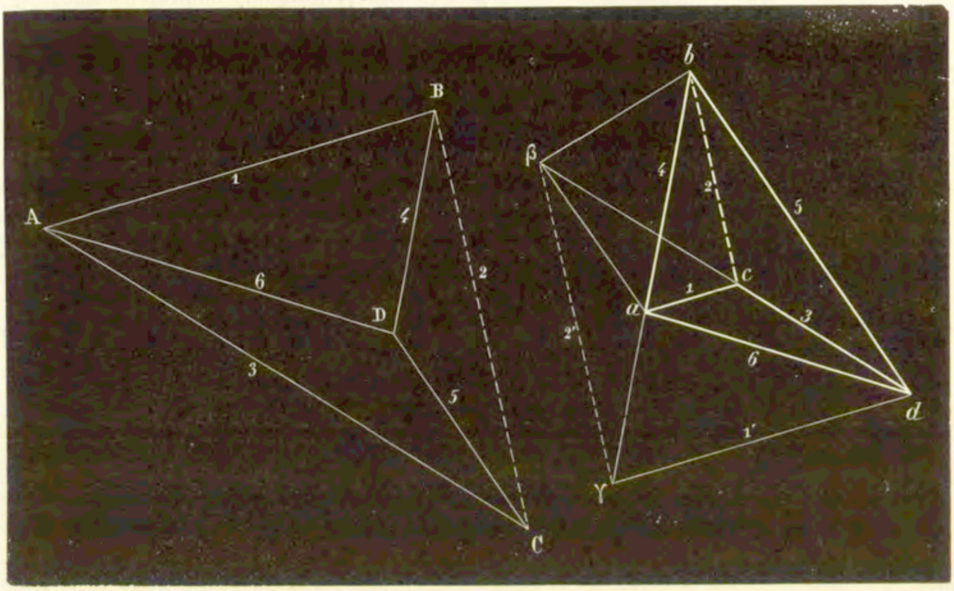

Fig. 30.

βb, uważać dwa czworoboki : $b\beta d\gamma$ i βbca w których :

$$\left.\begin{array}{rl}\text{strony} & \left\{\begin{array}{ccc}\beta b & d\gamma & \gamma\beta\\ \gamma\beta & ca & cb\end{array}\right.\\ \text{i przekątne} & \left\{\begin{array}{cc}\gamma b & \beta d\\ ab & \beta c\end{array}\right.\end{array}\right\}\ \text{są odpowiednio równoległe,}$$

a zatém i szóste ich linie : βa i bd będą także równoległe.

2° W figurach $\beta\gamma da$ i ABCD, pięć linij jednéj są równoległe do pięciu linij drugiéj z wykreślenia, powiadamy że i szóste ich linie, to jest $\beta\gamma$ i BC, będą także równoległe.

W saméj rzeczy, trójkąty ADB i ADC mające spólną stronę AD, są odpowiednio podobne do trójkątów $ad\gamma$ i $ad\beta$ mających spólny bok ad; ztąd wynika proporcya :

$$a\gamma : \mathrm{DB} = a\beta : \mathrm{DC},$$

oprócz tego, kąt $\beta a\gamma =$ kątowi BDC,

więc trójkąty $\alpha a\gamma$ i BDC są podobne, a że mają już one podobne boki równoległe ($a\gamma$ do DB i $a\beta$ do DC), zatém i trzecie ich strony będą równoległe; to jest $\gamma\beta$ będzie równoległą do BC. Otóż $\beta\gamma$ jest równoległą do linii bc z samego wykreślania, więc szóste strony BC i bc figur ABCD i $abcd$ są do siebie równoległe; co było do okazania.

O WIELOBOKACH PIERWSZEGO I DRUGIEGO RZĘDU.

§ **39.** W poprzedzających paragrafach, przy szukaniu wielkości i kierunku summy danych linij, uważaliśmy pewien szereg linij po sobie następujących, czyli tak zwany *wielobok* 1go *rzędu;* przy szukaniu zaś położenia téj summy, otrzymaliśmy pewną figurę, którąśmy nazwali *wielobokiem* 2go *rzędu*. W niniejszych paragrafach zamierzamy :

1° Ugrupować własności wieloboku 1go rzędu, napotykane już przez nas pojedynczo przy rozmaitych kwestyach tyczących się dodawania linij.

2° Poznać bliżéj własności wieloboku 2go rzędu, to jest wykazać zależność jego części : od wieloboku 1go rzędu, od danych linij, nakoniec od bieguna samego.

§ **40. Własności wieloboku pierwszego rzędu.** — Własności wieloboku 1go rzędu są następujące :

Własność I. — Mając dany system linij, każdy punkt płaszczyzny może być wzięty za ich *biegun*, czyli za *początek* wieloboku 1go rzędu, gdyż strony tego wieloboku charakteryzują się tylko *wielkością*

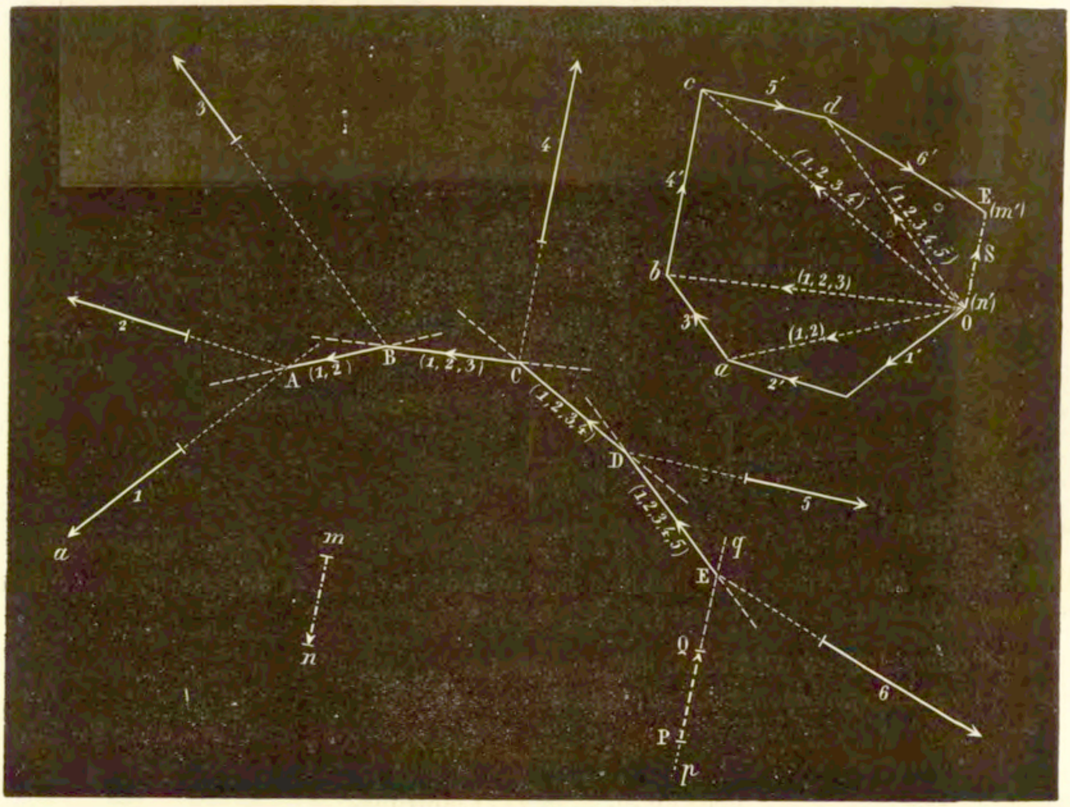

Fig. 31.

i *kierunkiem* a bynajmniéj nie ich *rzeczywistém* na płaszczyznie *położeniem* (§ 11). Wypada ztąd, że *dla jednego i tegoż samego systemu linij przysługuje nieskończona ilość wieloboków* 1go *rzędu.*

Jeżeli wychodząc *z rozmaitych biegunów*, i wykreślając rozmaite wieloboki rzędu 1go danych linij, zachowamy dla każdego z nich jeden i ten sam *porządek następstwa* jego stron, otrzymane ztąd wieloboki, będą wszystkie pomiędzy sobą *równe*, to jest, że przez nadanie tym figurom odpowiedniego przenośnego ruchu (translation), możemy zawsze przyprowadzić rozmaite wieloboki do wzajemnego ich pokrywania się. Jeżeli zaś, wychodząc z *tegoż samego bieguna zmieniamy porządek* następstwa linij, w skład wieloboku 1go rzędu wchodzących, otrzymane figury będą tylko *równowarte* (§ **15**) tak pomiędzy sobą, jako téż wielobokom równym, wykreślonym z rozmaitych biegunów.

Dla danego systemu, składającego się z n linij wieloboków *równych* 1go rzędu, jest ilość nieskończona : wieloboków zaś *równowartych*, będzie liczba P_n wyrażona (§ **15**) iloczynem :

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1) \,.\, n \,.$$

Własność II. — Z samego określenia wieloboku 1go rzędu (§ **11**) wypada, że jego strony nie tylko są *równe co do wielkości* odpowiednim im liniom danym ale i *jednakowego z niemi kierunku*, czyli że wielobok 1go rzędu jest także *wielobokiem kierunków* danego systemu.

Własność III. — Strzałka summy OE (fig. 27) danych linij jest *przeciwna* cyklowi strzałek wieloboku 1go rzędu jeżeli ten wielobok jest *niezamknięty*, to jest jeżeli summa linij danych jest różną od zera. Jeżeli zaś summa linij jest zero, ich wielobok 1go rzędu *zamyka* się sam przez się i strzałki rozmaitych stron jego stanowią cykl zupełny, to jest idą one ciągle w jednym porządku.

Własność IV. — Rozmaite promienie wieloboku 1go rzędu tworzą pęk linij w kierunku *odśrodkowym* względem bieguna O (fig. 27). Wielkość i kierunek jakiegokolwiek promienia przedstawia wielkość i kierunek summy wszystkich linij *wziętych w kierunku cykla*, i zawartych między biegunem, a końcem tego promienia. Jeżeli zaś wielobok 1go rzędu jest zamknięty, wtedy każdy promień wyraża *wielkość* summy linij położonych bądź po jednéj jego stronie, bądź téż po drugiéj, tylko dwie te summy będą przeciwnego sobie kierunku. Tak np. (fig. 31), widzimy że

promień Ob jest summą linij $(1+2+3)$,

» Od » » $(1+2+3+4+5)$,

» $Oc =$ » » $+(1+2+3+4)$,

albo téż

» $Oc =$ » » $-(5+6+EO)$;

czyli że

$$(1+2+3+4) = +Oc = Oc,$$

$$(5+6+EO) = -Oc = cO.$$

Własność V. — Każdy promień wieloboku 1 rzędu jest równoległy do *rzeczywistego* na płasczyznie położenia summy linij zawartych między biegunem O, a końcem promienia, i wziętych w kierunku toku.

Własność VI. — Wszelka linia łącząca dwa jakiekolwiek wierzchołki wieloboku 1go rzędu, czyli innemi słowy, wszelka *cięciwa* wieloboku, przedstawia wielkość i kierunek summy linij tą cięciwą objętych. I tak (fig. 14).

cięciwa $kl =$ summie linij : $(2+3+4)$,

» $ka =$ » : $(2+3+4+5)$.

Własność VII. — Każda strona wieloboku *zamkniętego* 1^{go} rzędu, jest równą co do wielkości, summie wszystkich innych pozostałych stron tego wieloboku, ale kierunek jéj jest przeciwny kierunkowi téj symmy (Wn. 4, § **16**).

§ 41. O wielobokach 2^{go} rzędu. — Wiemy (§ **14**, uw. 1), że wielobok 2^{go} rzędu danych linij 1, 2, 3, . . . 6, (fig. 32), jest to wielobok ABCDFGH, utworzony ze wzajemnego przecięcia się *położeń* summ tych linij, branych w liczbie wzrastającéj postępowo o jedną linię. I tak

1^{sza} strona AB wieloboku 2^{go} rzędu przedstawia położenie summy linij $(0+1)$, to jest linii 1

2^{ga} » BC » » $1+2$

3^{cia} » CD » » $1+2+3$

. . . .

n^{ta} » » » $1+2+\ldots+(n-1)+n$,

Ostatnia strona GH » » $1+2+3+4+5+6$.

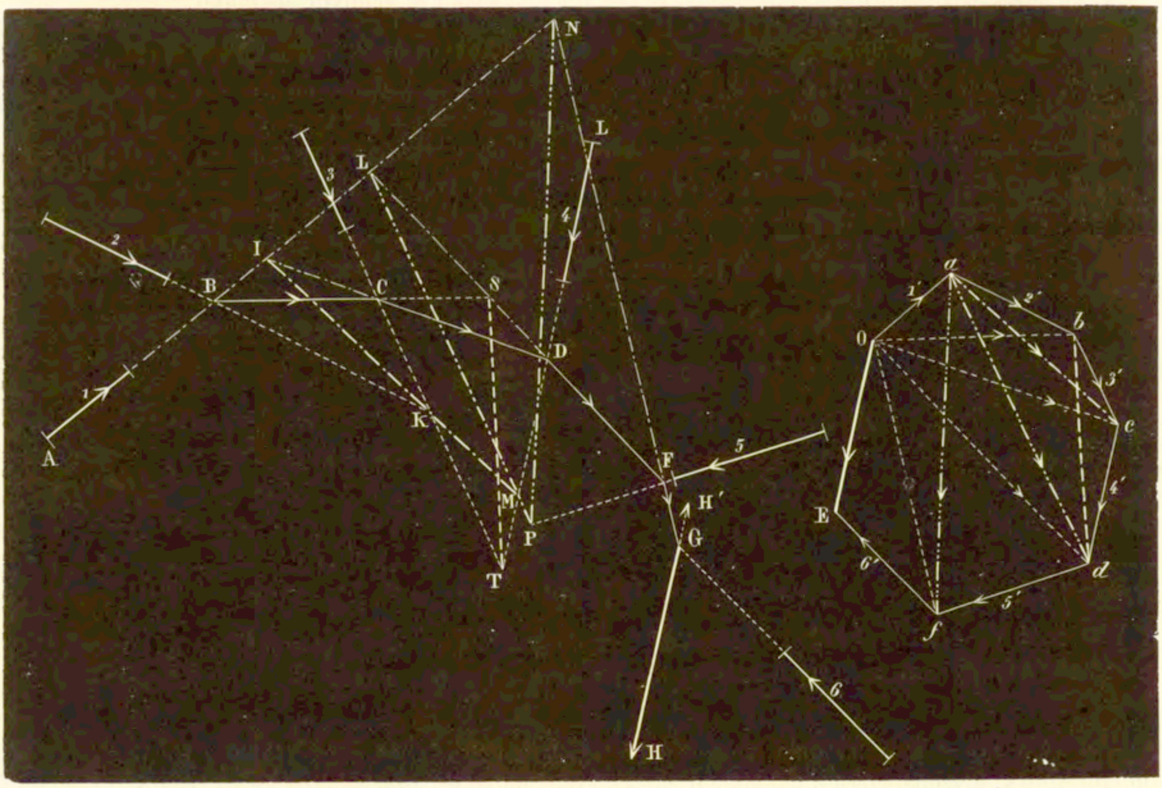

Fig. 32.

Z samego określenia wieloboku 2^{go} rzędu, strony jego są nie tylko równoległe do odpowiednich promieni wieloboku 1^{go} rzędu, ale mają one i kierunek tych promieni; to jest :

Strona AB jest równoległa do Oa, i tego samego kierunku co promień $Oa = 1$,

» BC » Ob » $Ob = 1 + 2$,

» CD » Oc » $Oc = 1 + 2 + 3$,

. . . .

» GH » OE » $OE = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.

Ze sposobu wykreślenia rozmaitych stron wieloboku 2go rzędu widzimy, że kwestya takiego wieloboku jest jedną z tych, gdzie wchodzą do rozpatrywania dwie tylko charakterystyczne cechy linii, t. j.: *położenie* i *kierunek;* wielkość zaś i rzeczywisty początek rozmaitych stron wieloboku 2go rzędu żadnéj tu nie odgrywają roli (§ 7).

Na fig. 32 wielobok 2go rzędu jest zarazem *wielobokiem kierunków summ* częściowych : 1, (1 + 2), (1 + 2 + 3). . . danych linij, gdyż strzałki rozmaitych stron jego AB, BC, . . . , stanowią tok nieprzerwany, czyli idą po sobie ciągle w jednym porządku. Ale tak zawsze nie jest i fig. 29 naprzykład, przedstawia wielką rozmaitość w oryentacyi strzałek stron wieloboku 2go rzędu ABCDEFGHK. W każdym jednak razie, wykreślenie wieloboku kierunków summ danych linij, który możemy nazwać *wielobokiem kierunków 2go rzędu*, nie może spotkać żadnéj trudności, gdyż mamy potemu wszystkie dane, a niemi są promienie Oa, Ob, . . . wieloboku 1go rzędu, wychodzące z bieguna O i przedstawiające wielkość i kierunek tak summ częściowych, jako téż i summy ostatecznéj. Na fig. 33 wielobok $\Omega\alpha\beta \ldots \gamma\Sigma$ jest wielobokiem kierunków dla wieloboku 2go rzędu ABC . . . HK. Strony $\Omega\alpha$, $\alpha\beta \ldots$ otrzymane prowadząc z dowolnego punktu Ω linie $\Omega\alpha$, $\alpha\beta$. . . $\lambda\Sigma$ równolegle do Oa, Ob, . . . OE, mogą być wzięte, bądź równe stronom Oa, Ob, . . . OE, bądź im proporcyonalne, a nawet dowolnéj długości.

Należy zauważyć że strzałki stron w *wieloboku kierunków* 2go *rzędu* stanowią tok nieprzerwany, jeżeli wielobok 1go rzędu jest niezamknięty, to jest jeżeli summa linij danych jest różną od zera. Jeśli zaś wielobok 1go rzędu zamyka się sam przez się, wtedy strzałka ostatniéj strony wieloboku kierunków 2go rzędu jest przeciwną tokowi strzałek stron poprzedzających. Tak naprzykład, na fig. 28 wielobok 1go rzędu $Oabcdf$E danych linij 1, 2, 3 . . . 6 jest niezamknięty i strzałki wszystkich stron AB, BC, . . ., FG, GH wieloboku kierunków 2go rzędu tworzą tok nieprzerwany; gdyby zaś wielobok 1go rzędu był zamknięty, linia EO byłaby wtedy ostatnią jego stroną i miałaby strzałkę skierowaną od E do O; zatém strzałka strony GH byłaby skierowaną od H do G, to jest poprowadzilibyśmy wtedy zamiast linii GH linię GH′ w górę względem punktu G; cykl dwóch linij FG i GH stałby się FG i GH′, czyli z postępowego zamieniłby się na cofny. Podobna uwaga stosuje się do promienia OE i strony $\lambda\Sigma$ na fig. 33. (O wieloboku 1go rzędu zamkniętym i odpowiadającym mu wieloboku 2go rzędu była mowa w (§ 14, uw. 3).

§ 42. **Uwaga o wielobokach wyższych rzędów.** — *Wielobok kierunków 2go rzędu* nastręcza uwagę następującą :

Jeżeli wykreślając wielobok $\Omega\alpha\beta \ldots \lambda\Sigma$ (fig. 33), weźmiemy wszystkie jego strony równemi odpowiednim promieniom wieloboku 1go rzędu $Oabc$ . . . E, to jest jeśli

$$\Omega\alpha = Oa; \quad \alpha\beta = Ob, \quad \beta\gamma = Oc, \ldots \lambda\Sigma = OE,$$

to wielobok tak utworzony $\Omega\alpha\beta \ldots \lambda\Sigma$ może być uważany jako wielobok 1go rzędu linij : A1, CB, DC, . . . HK, których trzy charakterystyczne cechy : położenie, kierunek i wielkość są nam znane ; a że ich początek jest dla obecnéj kwestyi rzeczą obojętną, możemy odłożyć *rzeczywiste* wielkości $\alpha\beta, \beta\gamma \ldots \lambda\Sigma$ tych linij od dowolnego punktu wziętego na ich *rzeczywistych* położeniach : CB, DC, . . . HK.

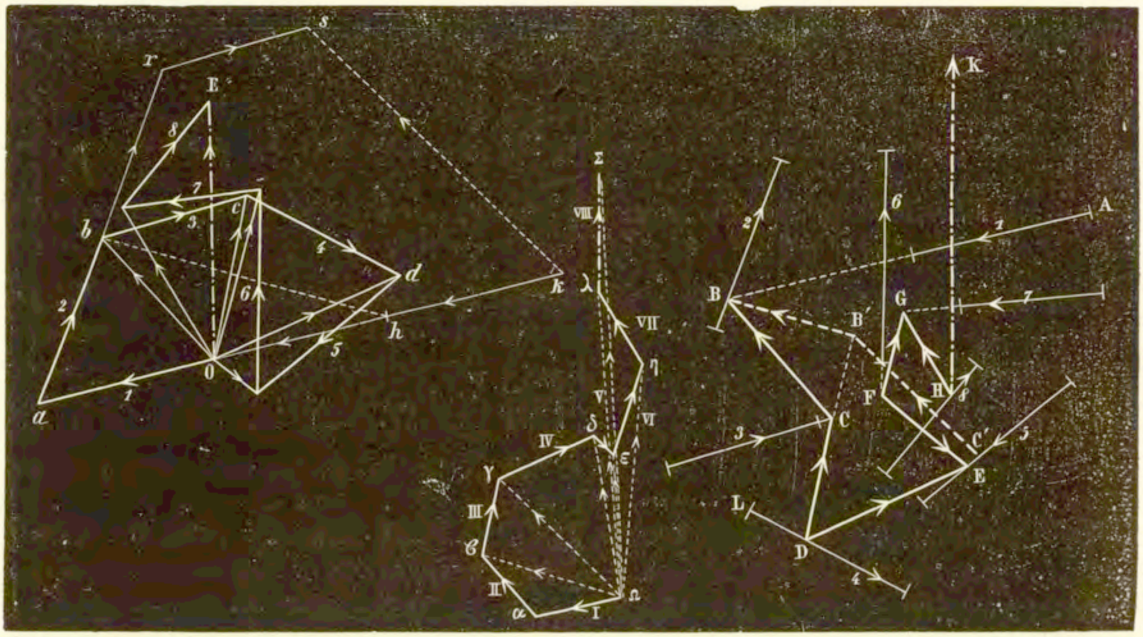

Fig. 33.

Jeśli więc teraz poprowadzimy promienie : $\Omega\beta, \Omega\gamma, \ldots \Omega\Sigma$, to

promień $\Omega\beta$ przedstawiać będzie wielkość i kierunek summy linij $\Omega\alpha + \alpha\beta$, czyli I + II,

» $\Omega\gamma$ » » $\Omega\beta + \beta\gamma$, czyli $\Omega\alpha + \alpha\beta + \beta\gamma$
= I + II + III.

. . . .

promień $\Omega\Sigma$ przedstawiać będzie wielkość i kierunek summy linij $\Omega\alpha + \alpha\beta + \beta\gamma + \ldots \eta\lambda + \lambda\Sigma$
= I + II + III + . . . + VII + VIII.

Nadto, położenie BB′ summy linij (I + II) jest z samego określenia (§ **13**) równoległém do promienia $\Omega\beta$ przechodzi przez punkt B przecięcia się linij A1 i BC; podobnież położenie B′C′ summy lini (I + II + III) jest równoległe do $\Omega\gamma$ i przechodzi przez przecięcie się B′ położenia summy linij (I + II) z położeniem linii DC i t. d. Tak, że za pomocą linij A1, BC, CD ... HK i promieni $\Omega\alpha, \Omega\beta, \Omega\gamma, \ldots \lambda\Sigma$ wykreślimy wielobok ABB′C′. . . w taki sam sposób jak za pomocą linij danych 1, 2, 3, . . . 8 i promieni O*a*, O*b*, O*c*. . . OE wykreślonym był wielobok 2go rzędu ABCD. . . HK. Ten nowy wielobok ABB′C′, . . . (którego nie wykreślamy w zupełności dla uproszczenia naszego rysunku), może być w skutek tego nazwany *wielobokiem* 3*go rzędu danych linij*, 1, 2, 3, . . . 7, 8.

Zobaczmy teraz, co wyrażają rozmaite strony BB′, B′C′, . . . nowo otrzymanego wieloboku.

Z wieloboku $\Omega\alpha\beta\gamma \ldots \lambda\Sigma$ mamy następujące wyrażenia :

Promień $\Omega\alpha$, wyrażający 1szą stronę A1 wieloboku 3go rzędu równym jest danéj linii 1, więc $\Omega\alpha = 1$;

» $\Omega\beta$, » 2gą » B′B » » wyraża summę linij $\Omega\alpha + \alpha\beta$, czyli, podstawiwszy ich wartość, znajdziemy że $\Omega\beta = 1 + (1 + 2)$;

Promień $\Omega\beta$, wyrażający 3cią stronę B′C′ wieloboku 3go rzędu wyraża summę linij $\Omega\beta + \beta\gamma = \Omega\alpha + \alpha\beta + \beta\gamma$, czyli podstawiwszy ich wartości znajdziemy że $\Omega\gamma = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3)$;

Promień $\Omega\delta$, wyrażający 4tą stronę wieloboku 3go rzędu wyraża summę linij $\Omega\gamma + \gamma\delta = \Omega\alpha + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta$, czyli podstawiwszy ich wartości znajdziemy że $\Omega\delta = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4)$.

. . . .

Promień $\Omega\Sigma$, wyrażający 8mą i ostatnią stronę wieloboku 3go rzędu wyraża summę linij $\Omega\alpha + \alpha\beta + \beta\gamma$, czyli podstawiwszy ich wartości znajdziemy że $\Omega\Sigma = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.

Ponieważ wiemy, że porządek dodawania linij nie ma wpływu na wielkość i kierunek summy, a okażemy późniéj że nie zmienia on również i jéj położenia, więc uporządkowawszy linie kilkakrotnie do siebie dodawane i postawiwszy pod każdą z nich cyfrę wskazującą ile razy linia, umieszczona w nawiasie, była do siebie dodaną, powyższe wyrażenia przybiorą następującą postać:

1sza strona A1 wieloboku 3go rzędu, przedstawia położenie danéj linii. . . 1

2ga » BB′ » » summy linij $2(1) + 1(2)$,

3cia » B′C′ » » » $3(1) + 2(2) + 1(3)$,

4ta » » » » $4(1) + 3(2) + 2(3) + 1(4)$,

5ta » » » » $5(1) + 4(2) + 3(3) + 2(4) + 1(5)$.

. . . .

8ma » » » » $8(1) + 7(2) + 6(3) + 5(4) + 4(5) + 3(6) + 2(7) + 1(8)$.

Te wypadki mogą być sprawdzone na wieloboku 1go rzędu $0abc \ldots E$. W saméj rzeczy, strona BB′ wieloboku 3go rzędu, wyrażająca położenie i kierunek summy linij: $2(1) + 1(2)$, powinna być równoległą do promienia hb łączącego początek h linii $ha = 2(0a) = 2(1)$ z końcem b linii 2; podobnież strona B′C′ przedstawiająca położenie summy linij: $3(1) + 2(2) + 1(3)$, będzie równoległą do prostéj ks, wyrażającéj wielkość summy linij: $ka + ar + rs$, gdzie

$$ka = 3(0a) = 3(1);\quad ar = 2(ab) = 2(2);\quad rs = \text{linii } 3, \text{ i t.d.}$$

Nadmieńmy że na rysunku wszystkie strony $\Omega\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma \ldots \eta\lambda$, $\lambda\Sigma$ wieloboku 3go rzędu, równe są połowie odpowiednich promieni $0a$, $0b$, $0c$, ... $0E$, zatém $\Omega\beta$, $\Omega\gamma$, ... $\Omega\Sigma$ przedstawiają połowę rzeczywistéj wielkości summ:

$$1,\ 2(1) + 1(2),\ 3(1) + 2(2) + 1(3),\ \ldots,$$

to jest

$$\Omega\alpha = \frac{1}{2}\,0a,\quad \Omega\beta = \frac{1}{2}\,hb,\quad \Omega\gamma = \frac{1}{2}\,ks,\ \ldots$$

ale to się nie zmienia w rzeczywistém *położeniu* stron BB′, B′C′, . . . , które pozostają równoległemi do promieni $\Omega\beta$, $\Omega\gamma$, . . .

§ **43**. W podobny sposób, wykreślając wielobok kierunku 3^{go} rzędu, to jest wielobok kierunków dla wieloboku ABB′C′, . . . , otrzymamy wielkość i kierunek stron wieloboku rzędu 4^{go}; *położenie* zaś tych stron (czyli nowo otrzymanych summ) na płaszczyźnie. znajdzie się za pomocą metody zwy-

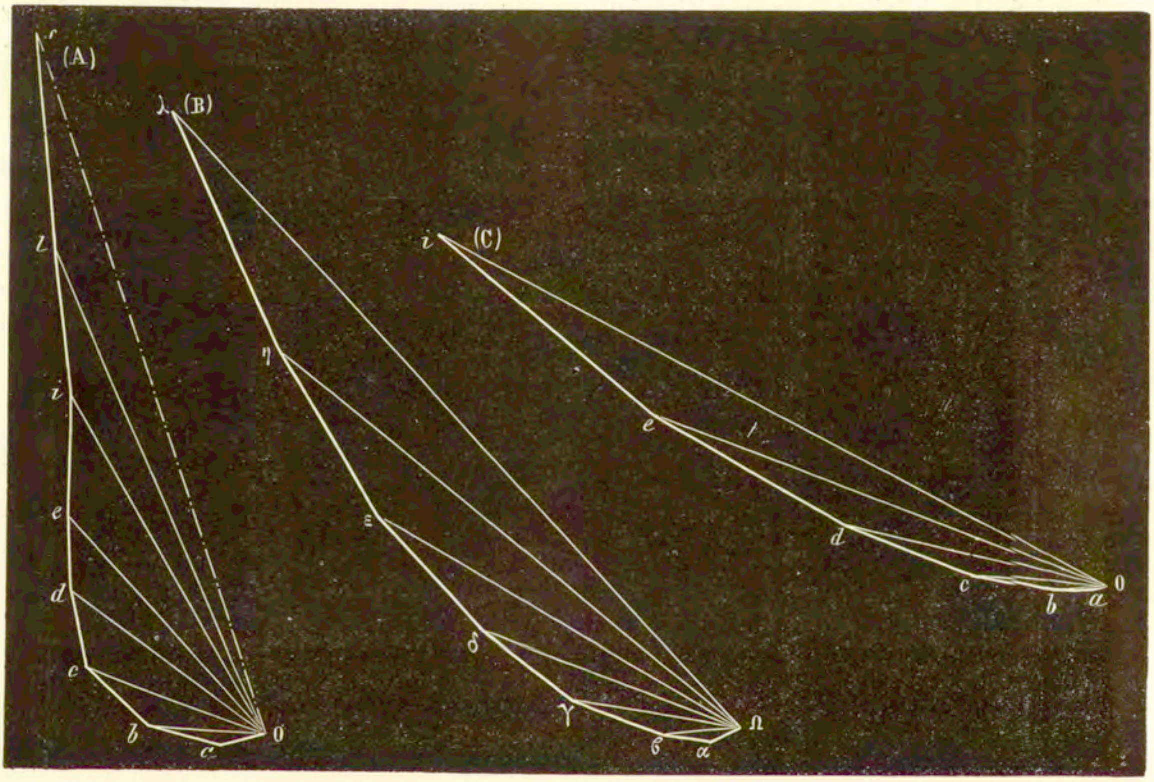

Fig. 34.

czajnéj; lecz tak dla braku dostatecznego miejsca na naszéj figurze, jako téż z powodu, że położenie stron nie interesuje bezpośrednio kwestyi, którą mamy zamiar rozwinąć, będziemy tu mówić jedynie tylko o ich wielkości.

Poprowadźmy więc [fig. 34, (A)] zacząwszy od dowolnie wziętego punktu O, linie :

$$Oa,\ ab,\ ac,\ cd,\ de,\ ei,\ il,\ ls,$$

równe (lub proporcyonalne) do promieni wieloboku $\Omega\alpha\beta\gamma \ldots \lambda\Sigma$ przedstawionego na figurze 29 :

$$\Omega\alpha,\ \Omega\beta,\ \Omega\gamma,\ \Omega\delta,\ \Omega\varepsilon,\ \Omega\eta,\ \Omega\lambda,\ \Omega\Sigma.$$

Linie Oa, ab, ac, . . . ls figury (A) wyrażać będą wielkości [rozmaitych summ, których położenia stanowią strony wieloboku 3^{go} rzędu, mianowicie :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
1^{sza} & \text{strona wyraża położenie summy linij :} & & Oa = 1(1) \\
2^{ga} & \text{»} & \text{»} & ab = 1(2) + 2(1) \\
3^{cia} & \text{»} & \text{»} & bc = 1(3) + 2(2) + 3(1) \\
4^{ta} & \text{»} & \text{»} & cd = 1(4) + 2(3) + 3(2) + 4(1) \\
5^{ta} & \text{»} & \text{»} & de = 1(5) + 2(4) + 3(3) + 4(2) + 5(1) \\
6^{ta} & \text{»} & \text{»} & ei = 1(6) + 2(5) + 3(4) + 4(3) + 5(2) + 6(1) \\
7^{ma} & \text{»} & \text{»} & il = 1(7) + 2(6) + 3(5) + 4(4) + 5(3) + 6(2) + 7(1) \\
8^{ma} & \text{»} & \text{»} & ls = 1(8) + 2(7) + 3(6) + 4(5) + 5(4) + 6(3) + 7(2) + 8(1)
\end{array}
\right.
$$

Rozmaite zaś promienie : $Oa, Ob, Oc, \ldots Os$ będą przedstawiać wielkości stron wieloboku 4go rzędu (¹). Zobaczmy jak się te wielkości wyrażą w funkcyi danych nam linij.

Znajdziemy tu za pomocą wzorów (3) i otrzymamy, po przyzwoitém ugrupowaniu linij do siebie dodawanych, na wielkość stron wieloboku 4go rzędu, wyrażenie następujące :

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\text{Strona } 1^{sza} & Oa = & 1(1) \\
\text{«}\quad 2^{ga} & Ob = Oa + ab = & 1(2) + 3(1) \\
\text{»}\quad 3^{cia} & Oc = Ob + bc = & 1(3) + 3(2) + 6(1) \\
\text{»}\quad 4^{ta} & Od = Oc + cd = & 1(4) + 3(3) + 6(2) + 10(1) \\
\text{»}\quad 5^{ta} & Oe = Od + de = & 1(5) + 3(4) + 6(3) + 10(2) + 15(1) \\
\text{»}\quad 6^{ta} & Oi = Oe + ei = & 1(6) + 3(5) + 6(4) + 10(3) + 15(2) + 21(1) \\
\text{»}\quad 7^{ma} & Ol = Oi + il = & 1(7) + 3(6) + 6(5) + 10(4) + 15(3) + 21(2) + 28(1) \\
\text{»}\quad 8^{ma} & Os = Ol + ls = & 1(8) + 3(7) + 6(6) + 10(5) + 15(4) + 21(3) + 28(2) + 36(1).
\end{array}
\right.
$$

Prawo podług którego układają się spółczynniki rozmaitych linij, wchodzących w jakąkolwiek stronę, jest bardzo proste i od razu widoczne dla stron wieloboku 3go rzędu. Co do stron wieloboku 4go rzędu, prawo to również daje się dostrzedz z łatwością i pozwoli nam napisać natychmiast spółczynniki takiéj strony wieloboku jaką zechcemy. W saméj rzeczy, widzimy że dla otrzymania spółczynników naprzykład 6téj strony Oi, dosyć jest napisać dwa szeregi liczb jak następuje :

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
(6) & (5) & (4) & (3) & (2) & (1)
\end{array}
$$

i postawić w drugim szeregu przed każdym nawiasem spółczynnik utworzony z dodania do spółczynnika poprzedniego tę cyfrę 1go szeregu, jaka się znajduje nad rozpatrywanym nawiasem. Więc przed (6) postawimy 1; przed (5) położymy spółczynnik poprzedzający, to jest 1, dodany do cyfry stojącéj

(¹) Właściwiéj należałoby powiedzieć że promienie te dadzą nam wielkości rozmaitych summ, których położenia, kolejném z sobą przecięciem się, utworzą rozmaite strony wieloboku 4go rzędu. Podobnież zamiast wyrażenia się poprawnego że np. *4ta strona wieloboku 3go rzędu przedstawia położenie summy linij* : $1(4) + 2(3) + 3(2) + 4(1)$, będziemy na przyszłość, dla skrócenia mowy, używali wyrażenia że 4ta strona wieloboku 3go rzędu $= 1(4) + 2(3) + 3(2) + 4(1)$ i t. p.

nad (5), to jest do 2, co da na szukany spółczynnik $(1+2)=3$; podobnież, spółczynnik linii (4) otrzymamy biorąc $(3+3)=6$; następnie przed (3) postawimy $(6+4)=10$, daléj, przed (2) stanie $(10+5)=15$, nakoniec linia (1) będzie miała na spółczynnik $15+6=21$.

Na mocy tego prawa, jeżeli system danych linij składa się z np. 15 linij, i jeżeli zechcemy wiedzieć jakich linij 15[ta] strona wieloboku 4[go] rzędu przedstawia *położenie*, otrzymamy wprost spółczynniki téj strony, pisząc jak wyżéj dwa szeregi liczb :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ (15) & (14) & (13) & (12) & (11) & (10) & (9) & (8) & (7) & (6) & (5) & (4) & (3) & (2) & (1) \end{array}$$

i formując szereg odpowiednich spółczynników :

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ 55,\ 66,\ 78,\ 91,\ 105,\ 120.$$

§ 44. Jeżeli teraz wykreślimy figurę (34 B) biorąc :

$$\Omega\alpha,\ \alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\delta,\ \delta\varepsilon,\ \varepsilon\eta,\ \eta\lambda,\ \lambda\Sigma,$$

odpowiednio równe, proporcyonalne lub równoległe i tego samego kierunku co i promienie figury (34 B) :

$$Oa,\ Ob,\ Oc,\ Od,\ Oe,\ Oi,\ Ol,\ Os,$$

wtedy wielobok $\Omega\alpha\beta\gamma\ldots\lambda\Sigma$ będzie wielobokiem kierunków 4[go] rzędu, a promienie $\Omega\alpha$, $\Omega\beta$, $\Omega\gamma\ldots\Omega\lambda$, $\Omega\Sigma$ dadzą wielkość i kierunek stron wieloboku 5[go] rzędu. Wyrażenie tych wielkości otrzymamy ze wzoru (2) i znajdziemy że :

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{lll}
\text{Strona } 1^{\text{sza}} & \Omega\alpha\ldots\ldots\ldots & =1(1) \\
\quad\text{»}\quad 2^{\text{ga}} & \Omega\beta=\Omega\alpha+\alpha\beta & =1(2)+4(1) \\
\quad\text{»}\quad 3^{\text{cia}} & \Omega\gamma=\Omega\beta+\beta\gamma & =1(3)+4(2)+0(1) \\
\quad\text{»}\quad 4^{\text{ta}} & \Omega\delta=\Omega\gamma+\gamma\delta & =1(4)+4(3)+10(2)+20(1) \\
\quad\text{»}\quad 5^{\text{ta}} & \Omega\varepsilon=\Omega\delta+\delta\varepsilon & =1(5)+4(4)+10(3)+20(2)+35(1) \\
\quad\text{»}\quad 6^{\text{ta}} & \Omega\eta=\Omega\varepsilon+\varepsilon\eta & =1(6)+4(5)+10(4)+20(3)+35(2)+56(1) \\
\quad\text{»}\quad 7^{\text{ma}} & \Omega\lambda=\Omega\eta+\eta\lambda & =1(7)+4(6)+10(5)+20(4)+35(3)+56(2)+84(1) \\
\quad\text{»}\quad 8^{\text{ma}} & \Omega\zeta=\Omega\lambda+\lambda\zeta & =1(8)+4(7)+10(6)+20(5)+35(4)+56(3)+84(2)+120(1).
\end{array}\right.$$

Widzimy tu, że prawo tworzenia się spółczynników rozmaitych stron wieloboku 5[go] rzędu jest mniéj proste, jak dla wieloboku 4[go] rzędu; jednak daje się ono dostrzedz bez trudności. Weźmy naprzykład 7[mą] stronę $\Omega\lambda$ i napiszmy trzy szeregi, z których dwa pierwsze stanowić będą, jak poprzednio, szereg cyfr po sobie następujących, tylko wziętych w porządku odwrotnym :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ (7) & (6) & (5) & (4) & (3) & (2) & (1) \end{array}$$

a trzeci będzie szeregiem odpowiednich i znalezionych wyżéj spółczynników

$$1.\quad 4.\quad 10.\quad 20.\quad 35.\quad 56.\quad 84.$$

Widzimy najprzód, że pierwszy spółczynnik jest zawsze 1;

Drugi spółczynnik jest zawsze równy summie dwóch pierwszych cyfr 1go szeregu, więcéj spółczynnik poprzedzający, to jest spółczynnik pierwszy $=(1+2)+1=3+1=4$;

Trzeci spółczynnik jest zawsze równy summie trzech pierwszych cyfr 1go szeregu, więcéj spółczynnik poprzedzający, to jest spółczynnik drugi $=(1+2+3)+4=6+4=10$;

Czwarty spółczynnik jest zawsze równy summie czterech pierwszych cyfr 1go szeregu więcéj spółczynnik poprzedzający, to jest spółczynnik trzeci $=(1+2+3+4)+10=10+10=20$;

Piąty spółczynnik jest zawsze równy summie pięciu pierwszych cyfr 1go szeregu więcéj spółczynnik poprzedzający, to jest spółczynnik czwarty $=(1+2+3+4+5)+20=15+20=35$;

Szósty spółczynnik jest zawsze równy summie sześciu pierwszych cyfr 1go szeregu więcéj spółczynnik poprzedzający, to jest spółczynnik piąty $=(1+2+3+4+5+6)+35=21+35=56$;

Siódmy spółczynnik jest zawsze równy summie sześciu pierwszych cyfr 1go szeregu więcéj spółczynnik poprzedzający, to jest spółczynnik szósty $=(1+2+3+4+5+6+7)+56=28+56=84$.

Ztąd wypada, że dla 8éj strony, 8my spółczynnik $=\begin{bmatrix} 28 \\ +8 \end{bmatrix}+84=120$.

A jeżeli dany system składać się będzie z większéj liczby linij, znajdziemy bez żadnéj trudności spółczynniki 9téj, 10éj i t. d. strony. Tak naprzykład 10ta strona wieloboku 5go rzędu wyrazi się w sposób następujący:

$$1(10)+4(9)+10(8)+20(7)+35(6)+56(5)+84(4)+120(3)+165(2)+220(1).$$

Przechodząc do wieloboku 5go rzędu, prawo układu spółczynników staje się zawilszém. Figura (34. C) przedstawia nam wielobok kierunków 5go rzędu, to jest linie:

$$0a,\quad ab,\quad bc,\quad cd,\quad de,\quad ei,\quad il,\quad ls,$$

są równe (proporcyonalne) i równoległe do promienia figury (B):

$$\Omega\alpha,\quad \Omega\beta,\quad \Omega\gamma,\quad \Omega\delta,\quad \Omega\varepsilon,\quad \Omega\eta,\quad \Omega\lambda,\quad \Omega\Sigma,$$

zatém promienie $0a$, $0b$, $0c \ldots 0l$, $0s$ wyrażać będą wielkość i kierunek stron wieloboku 5go rzędu. Znajdziemy:

$$(4)\left\{\begin{array}{lll}
\text{Strona } 1^{\text{sza}} & 0a = \ldots\ldots.1(1) \\
\quad\text{»}\quad 2^{\text{ga}} & 0b=0a+ab=1(2)+5(1) \\
\quad\text{»}\quad 3^{\text{cia}} & 0c=0b+bc=1(3)+5(2)+15(1) \\
\quad\text{»}\quad 4^{\text{ta}} & 0d=0c+cd=1(4)+5(3)+15(2)+35(1) \\
\quad\text{»}\quad 5^{\text{ta}} & 0e=0d+de=1(5)+5(4)+15(3)+35(2)+70(1) \\
\quad\text{»}\quad 6^{\text{ta}} & 0i=0e+ei=1(6)+5(5)+15(4)+35(3)+70(2)+126(1) \\
\quad\text{»}\quad 7^{\text{ma}} & 0l=0i+il=1(7)+5(6)+15(5)+35(4)+70(3)+126(2)+210(1) \\
\quad\text{»}\quad 8^{\text{ma}} & 0s=0l+ls=1(8)+5(7)+15(6)+35(5)+70(4)+126(3)+210(2)+330(1).
\end{array}\right.$$

Tu prawo tworzenia się spółczynników przestaje być wyraźném; pojmujemy jednak, że nie powinno ono być zawikłaném, albowiem sam sposób powstawania wieloboków jeden z drugiego jest bardzo prosty. Dla odkrycia więc tego prawa, zestawmy między sobą strony wieloboków rozmaitych rzędow, zauważywszy przedtém, że ponieważ wielobok 1go rzędu nie obejmuje *położenia linij* danych, i że *położenie summ* linij branych w pewném ich ugrupowaniu, zjawia się dopiero w wieloboku rzędu 2go i zachowuje się we wszystkich wielobokach rzędów wyższych, przeto w obecnéj kwestyi, wielobok zwany dotychczas wielobokiem 2go rzędu nazwiemy *wielobokiem położenia summ* 1go *porządku*; podobnie, dawny wielobok 3go rzędu będzie teraz miał nazwę *wieloboku położenia summy* 2go *porządku* i t. d., tak że wzory (1), (2), (3) i (4) wyrażać będą wielkość stron wieloboków położenia summ 2go, 3go, 4go i 5go porządku.

To pojąwszy, porównajmy między sobą wyrażenia jakiejkolwiek strony naprzykład 5téj, w wielobokach rozmaitych porządków. Otrzymamy ztąd następującą tablicę :

5ta strona wieloboku położenia summ	1go	porządku	$= 1(5) + 1(4) + 1(3) + 1(2) + 1(1)$
»	2go	»	$= 1(5) + 2(4) + 3(3) + 4(2) + 5(1)$
»	3go	»	$= 1(5) + 3(4) + 6(3) + 10(2) + 15(1)$
»	4go	«	$= 1(5) + 4(4) + 10(3) + 20(2) + 35(1)$
»	5go	»	$= 1(5) + 5(4) + 15(3) + 35(2) + 70(1).$

Z tablicy téj spostrzegamy, że sposób tworzenia rozmaitych spółczynników jest bardzo prosty, mianowicie :

1° Jakakolwiek strona $n$ta wieloboku każdego porządku, zawiera w sobie n wyrazów, czyli n rozmaitych linij danego systemu.

Jeśli zgodzimy się pisać zawsze te linie w porządku zmniejszającym się cyfr je oznaczających, to jest w porządku takim : (n), $(n-1)$, $(n-2)\ldots$, widzimy, że :

2° Spłóczynnik 1go wyrazu, to jest spółczynnik linii (n), któréj cyfra jest najwyższa, równa się zawsze jedności.

3° Każda strona $n$ta *wieloboku* 1go *porządku,* ma przed każdym ze swych n wyrazów spółczynnik równy jedności, czyli że każda linia systemu wchodzi tylko raz jeden w dodawaniu.

Spółczynnik jakiegokolwiek $k$go wyrazu w $n$téj stronie *wieloboku* 2go *porządku,* otrzymuje się ze spółczynnika $k$go wyrazu $n$téj strony wieloboku 1go porządku, dodając do niego spółczynnik $(k-1)$go wyrazu w wieloboku 2go porządku. W taki sam sposób tworzy się spółczynnik jakiegokolwiek wyrazu $n$téj strony wieloboku 3go porządku ze spółczynnika wyrazu poprzedniego téjże strony i w tymże samym wieloboku i spółczynnika tegoż wyrazu $n$téj strony wieloboku 2go porządku; i t. d.

Naprzykład, spółczynnik 3ci linii (3) w 5téj stronie wieloboku 2go porządku, otrzymuje się z dodania spółczynika 3go linii (3) w 5téj stronie wieloboku 1go porządku ze spółczynnikiem 2im wyrazu 2go w wieloboku 2go porządku. Tak samo spółczynnik 35 linii (2) w 5téj stronie wieloboku 5go porządku, otrzymuje się dodając spółczynnik 20 linii (2) w 5téj stronie wieloboku 4go porządku ze spółczynnikiem 15, poprzedzającym spółczynnik pisany w wieloboku 5go porządku.

4° Nawiasy w każdéj kolumnie pionowéj obejmują jedną i tę samą linię; tak np. 1sza kolumna pionowa obejmuje linię (5) ; 2ga —(4), 3cia — (3) . . . , a ostatnia — linię (1).

5° Spółczynniki jakiejkolwiek kolumny pionowéj stanowią szereg spółczynników rozmaitych wyrazów wieloboku takiego porządku, jakim jest porządek (liczony od lewéj ręki ku prawéj) téj kolumny pionowéj. Na przykład, biorąc kolumnę 4ta, spółczynniki w niéj zawarte są :

1 4 10 20 35,

a te cyfry są właśnie spółczynnikami strony wieloboku 4go porządku.

Zresztą sama tablica przedstawia rozmaite własności, o których mowa, dobitniéj jak przytoczone objaśnienia.

Jesteśmy więc teraz w stanie napisać od razu, bez żadnych poprzednich rachunków, taką stronę i wieloboku takiego rzędu, jaką tylko zechcemy. Na przykład, jeżeli dany system składa się z ośmiu linij i jeżeli chcemy napisać 8ma (to jest ostatnią) stronę wieloboków rozmaitych porządków 1, 2, 3...8 to ułożymy bez najmniejszéj trudności następującą tablicę :

8ma strona wieloboku 1go porządku przedstawia położenia summy linij :

		1(8)+1(7)+1(6)+1(5)+1(4)+1(3)+1(2)+1(1)
»	2go	1(8)+2(7)+3(6)+4(5)+5(4)+6(3)+7(2)+8(1)
«	3go	1(8)+3(7)+6(6)+10(5)+15(4)+21(3)+28(2)+36(1)
»	4go	1(8)+4(7)+10(6)+20(5)+35(4)+56(3)+84(2)+120(1)
»	5go	1(8)+5(7)+15(6)+35(5)+70(4)+126(3)+210(2)+330(1)
»	6go	1(8)+6(7)+21(6)+56(5)+126(4)+252(3)+462+(2)+792(1)
»	7go	1(8)+7(7)+28(6)+84(5)+210(4)+462(3)+924(2)+1716(1)
»	8go	1(8)+8(7)+36(6)+120(5)+330(4)+792(3)+1716(2)+3432(1).

Oczywiście wieloboków położenia summ rozmaitych porządków danego systemu linij, może być ilość nieskończona, gdyż nic nie przeszkadza dla utworzenia wieloboków 9go, 10go, 11go ... porządku, to jest dodawania do siebie liczb aż do nieskończoności.

Uwaga. — Zamieniliśmy nazwę wieloboku 2go rzędu na wielobok położenia summ 1go porządku tylko dla niniejszego paragrafu; w paragrafach zaś następujących zachowamy nazwisko dawne, co zresztą przedstawia tę dogodność, że odróżniamy dobitniéj wielobok dający *wielkość* i *kierunek* summ danych linij (wielobok 1go rzędu) od wieloboku dającego *położenie* tych summ na płasczyznie (wielobok 2go rzędu).

§ 45. Własności wieloboku 2go rzędu. — Z określenia wieloboku 2go rzędu i z zależności jego stron od linij danych i od promieni wieloboku 1go rzędu, wypływają rozmaite własności. I tak : przebiegając wielobok 2go rzędu w porządku tworzenia się jego stron i nazywając *początkiem* jakiejkolwiek strony punkt jéj przecięcia się ze stroną poprzedzającą (bez względu na strzałki stron), możemy zauważać następujące własności :

Własność I. — *a*) *Każda strona wieloboku 2go rzędu, daje nam położenie i kierunek summy takiéj liczby linij, jaki jest porządek téj strony;* tak na przykład na fig. 25, strona BC będąc 2gą stroną wieloboku, przedstawia położenie i kierunek summy *dwóch* linij; strona FE jest 5ta stroną wieloboku, przedstawia ona zatém położenie i kierunek *pięciu* linij; w ogólności *n*ta strona daje położenie i kierunek summy n linij a *ostatnia strona wieloboku 2go rzędu przedstawia położenie i kierunek summy wszystkich linij systemu.*

b) Uważając zamiast porządku stron porządek wierzchołków, czyli *węzłów* wieloboku 2go rzędu, możemy powiedzieć, że strona wychodząca z $n$go węzła wyraża położenie i kierunek summy $n+1$ linij; na przykład strona BC wychodzi z 1go węzła — będzie ona zatém położeniem summy *dwóch* linij; strona FG ma swój początek w 5ym węzle F, wyraża więc ona położenie summy *sześciu* linij; nakoniec *strona* HK *wychodząca z ostatniego węzła wyraża położenie i kierunek summy wszystkich linij systemu.*

Własność II. — Jeśli, co zwykle ma miejsce, porządek kolejnego dodawania linij : 1, 2, 3, ..., jest wzrastający, porządek cyfr przez które linie dane są oznaczone (to jest, jeżeli dodajemy najprzód linie 1 i 2, potém do summy $(1+2)$ dodajemy linię 3, następnie, do summy $(1+2+3)$ linię 4,..., zamiast dodawania tychże linij w porządku jakimkolwiek, biorąc naprzykład najprzód $(3+1)$, późniéj $(3+1)+4$ i t. p. wtedy jakakolwiek strona $n$ta wieloboku 2go rzędu przedstawia położenie i kierunek summy n linij oznaczonych cyframi : $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$. Albo innemi słowy, każda strona tego wieloboku daje położenie i kierunek takiéj liczby linij, jaką liczbę wyraża cyfra oznaczająca linię przechodzącą przez początek téj strony, tak naprzykład, zobaczymy od razu, że strona EF przedstawia położenie i kierunek summy pięciu linij : 1,3,4,5, albowiem przez początek F téj strony przechodzi linia oznaczona cyfrą 5; pierwsza strona AB wieloboku wyraża położenie i kierunek summy jednéj tylko linii 1, przechodzącéj przez początek A téj strony i zlewającéj się ze stroną AB.

Własność III. — W każdym *węzle* wieloboku 2go rzędu zbiegają się trzy linie, z których dwie stanowią dwie strony samego wieloboku, a trzecia — jednę z linij danego nam systemu. I tak naprzykład, przez węzeł D przechodzą trzy linie DC, DE i DL, z których dwie pionowe są stronami wieloboku ABCDE . . . HK, a trzecia DL przedstawia położenie i kierunek linii 4, należącéj do danego systemu. Zauważmy, że gdybyśmy nadali stronom DC i DE długość odpowiednich im promieni Oc i Od, wtedy linia 4 dodana do CD dałaby nam położenie strony DE, zaś odjęta od DE dałaby położenie strony DC.

Własność IV. — Wiemy, że dla danego systemu złożonego z n linij, możemy wykreślić nieskończoną liczbę wieloboków 1go rzędu *równych* i $P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1) \,.\, n$, wieloboków 1go rzędu równowartych.

a) Wieloboki 1go rzędu równe powstają z *przemienienia* wieloboku, raz wykreślonego, do rozmaitych miejsc płaszczyzny, czyli innemi słowy, z przemienienia początku O tego wieloboku do rozmaitych punktów O′, O″. . . ., płaszczyzny.

Ponieważ w każdym takim wieloboku *porządek* następstwa jego stron jest ten sam, a odpowiadające sobie strony wieloboków i ich promienie są równe i równoległe, a zatém *system linij dodanych do siebie w porządku dowolnym, ale raz obranym, ma tylko jeden wielobok 2go rzędu, jakikolwiek byłby jego biegun, czyli punkt płaszczyzny wzięty za punkt wieloboku 1go rzędu.*

To jest widoczném à priori, gdyż strony wieloboku 2go rzędu przedstawiają *rzeczywiste położenie* summ częściowych i summy ostatecznéj danych linij. Położenie to jest funkcyą samych tylko linij składowych, i nie może zależeć od *miejsca,* w jakiém kreślimy figurę pomocniczą zwaną wielobokiem 1go rzędu.

b) Rzecz się ma inaczéj, przy wielobokach 1go rzędu *równowartych.* Wieloboki równowarte mają wszystkie jeden i ten sam punkt O za początek, ale porządek następstwa ich stron jest różny. Oczywiście, dodając w jednym razie linie dane 1, 2, 3, 4... w porządku $1+2+3+4+\ldots$ a w drugim — w porządku jakimkolwiek, na przykład : $3+4+1+2$ *położenia* summ częściowych, czyli strony wieloboków 2go rzędu, wykreślonych dla obu przypadków, będą różne; ale (co wkrótce okażemy) ważną rzeczą jest to, *że położenie summy wszystkich linij systemu zostaje zawsze jedno i to samo*, bez względu na porządek w jakim linie są do siebie dodawane.

Więc dla danego systemu n linij, możemy wykreślić $P_n = 1, 2, 3, \ldots (n-1).n$ wieloboków 2go rzędu, różniących się między sobą, co do położenia stron, ale mających *ostatnią swą stronę spólną*, gdyż ostatnia strona przedstawia właśnie położenie summy wszystkich linij systemu.

Wieloboki 1go rzędu równowarte co do *wielkości* i *kierunku* summy danych linij, dają więc wieloboki 2go rzędu również równowarte co do *położenia* téj summy.

Własność V. — Przy wyliczaniu własności wieloboku 1go rzędu wymienionóm było, że wszelka cięciwa (fig. 24) ac, ad, af..., łącząca dwa jakiekolwiek wierzchołki wieloboku 1go rzędu, przedstawia *wielkość* i *kierunek* summy linij tą cięciwą podpartych. Wiemy nadto, z określenia, że *położenie* summy ac dwóch linij $ab = 2$, $bc = 3$ przechodzi przez przecięcie się K tych linij i jest równoległém do cięciwy ac. Otóż, wyznaczenie położenia summy $(2+3)$ wykreśleniem przez punkt K linii równoległéj do ac, może być zastąpione innóm wykreśleniem, a mianowicie połączeniem punktu K z punktem I przecięcia się dwóch stron AB i CD wieloboku 2go rzędu. Tę własność możemy wyrazić za pomocą następującego twierdzenia,

Twierdzenie. — *Położenie summy dwóch linij k i $k+1$ po sobie następujących, przechodzi przez punkt przecięcia się dwóch stron wieloboku 2go rzędu, z których jedna przedstawia położenie summy wszystkich linij wziętych do dodawania przed linią k, a druga — położenie summy wszystkich linij aż do linii $k+1$ włącznie.* Czyli, wyrażając się inaczéj :

Położenie summy linij k i $k+1$ przechodzi przez przecięcie się tych stron wieloboku 2go rzędu, między któremi k i $k+1$ są zawarte.

Tak naprzykład, linie 2 i 3 są zawarte między stronami AB i CD, zatém położenie summy $(2+3)$ przechodzić będzie przez punkt I; podobnież linie 3 i 4, są zawarte między stronami BC i DF, więc ich summa przejdzie przez przecięcie się S stron BC i DF, i t. p. Prosty rzut oka wskaże nam, jakie są strony zawierające linie dane; naprzykład jest widocznóm natychmiast, że linie 4 i 5 są zawarte między stronami CD i FG.

Dla okazania, że np. położenie summy linij 2 i 3 przechodzi przez punkt I przecięcia się dwóch skrajnych stron AB i CD wieloboku 2go rzędu, połączmy punkta I z K i uważajmy dwie figury (które w obecnym przypadku są czworobokami) :

1° BICK łączącą cztery punkta B, C, I, K (z których punkta B i C są węzłami wieloboku 2go rzędu, K przecięcie się linij danych 2 i 3; I przecięcie się stron skrajnych wieloboku względem linij 2 i 3).

2° Oabc łączącą cztery punkta O, a, b, c w wieloboku pierwszego rzędu.

Z ich porównania między sobą spostrzegamy natychmiast, że pięć linij czworoboku Oabc są równoległe do pięciu linij czworoboku BICK, a mianowicie :

Strona BI jest równoległą do Oa, ponieważ BI jest przedłużeniem linii $1 = Oa$;

» IC » Oc, gdyż IC będąc przedłużeniem strony CD, wyraża położenie summy linij $(1 + 2 + 3)$, których wielkość i kierunek dane są przez promień Oc;

CK » bc, albowiem CK jest przedłużeniem linii 3;

KB » ab, » KB » 2;

» BC » Ob, gdyż BC wyraża położenie summy linij $(1 + 2)$ przedstawionéj co do wielkości i kierunku promieniem Ob;

zatém, na mocy twierdzenia wykazanego w Wiadomościach pomocniczych § 34-§ 38, i szóste strony tych czworoboków będą równoległe, czyli że KI będzie równoległą do ac.

Więc prosta KI, łącząca punkt K przecięcia się linij danych 2 i 3 z punktem I przecięcia się skrajnych stron wieloboku 2go rzędu, odpowiadających tym liniom, jest sama z siebie równoległą do cięciwy ac; zatém prosta KI przedstawia położenie summy dwóch linij 2 i 3 po sobie następujących.

Dla wykreślenia *położenia* summy $(2 + 3)$ mamy więc trzy następujące sposoby :

1° Przeprowadzenie przez punkt K linij równoległych do cięciwy ac

2° » I » ac co może być dogodném wtedy tylko, kiedy nie znamy punktu K, to jest, gdy linie 2 i 3 nie przecinają się na rysunku.

3° Połączenie punktów K i I linią prostą.

Stosownie do graficznéj dogodności, możemy się posługiwać jednym z tych trzech sposobów do wyznaczenia położenia KI; a przez to samo mamy możność sprawdzenia dokładności już użytego sposobu.

Powyższe twierdzenie daje się uogólnić i rozszerzyć do jakiejkolwiek liczby linij po sobie następujących. Łatwo jest okazać, że położenie summy trzech linij 2, 3 i 4 po sobie następujących, przechodzić będzie przez punkt L przecięcia się skrajnych stron AB i DF wieloboku 2go rzędu, między któremi linie 2, 3, 4 są zawarte,

W saméj rzeczy, wiemy że wielkość i kierunek summy linij $(2 + 3 + 4)$, dane są przez wielkość i kierunek cięciwy ad, a położenie téj summy przechodzi przez punkt M przecięcia się położenia K summy $(2 + 3)$ z położeniem linii $LM = 4$, i jest ono równoległe do cięciwy ad. Powiadamy teraz, że prosta ML jest właśnie równoległą do ad.

Aby to okazać, zastąpmy w wieloboku 1go rzędu linie 2 i 3 przez ich summę ac, a w wieloboku 2go rzędu położenie linij 2 i 3 przez położenie IM ich summy; sprowadzamy przez to zadanie o trzech liniach 2, 3, 4 do przypadku dwóch linij po sobie następujących :

ac i cd, co do wielkości i kierunku

IM i LM, co do położenia ;

skrajne strony wieloboku 2go rzędu obejmujące sobą dwie linie IM i $LM = 4$ są AI i DF, zatém ich przecięcie się L będzie punktem należącym do szukanego położenia summy linij $(2 + 3 + 4)$ i tém położeniem będzie linia LM.

Równoległość linij LM i ad może być jeszcze okazaną używając czworoboków : ILDM i $Oacd$, mających po pięć linij :

IL, LD, DM, MI, ID

Oa, *Od*, *cd*, *ac*, *Oc*

odpowiednio równoległych ; zatém i szóste ich linie LM i *ad* będą równoległe.

Więc w ogólności, *położenie summy* (*wypadkowéj*) *jakiejkolwiek liczby linij po sobie następujących :* k, $(k+1)$, $(k+2)$, ... $(k+p)$ *przechodzi przez punkt przecięcia się skrajnych stron wieloboku 2*^go^ *rzędu, między któremi te linie są zawarte : pierwsza z tych stron wyraża położenie summy linij wziętych do dodawania przed linią k, a druga — położenie summy wszystkich linij aż do* $(k+p)$ *włącznie.*

Czyli innemi słowy : *punkt przecięcia się dwóch jakichkolwiek stron wieloboku 2go rzędu jest jednym z punktów położenia summy linij danych, między temi stronami zawartych*, tak, że dla wykreślenia położenia téj summy dosyć jest przez punkt przecięcia się uważanych stron wieloboku 2go rzędu poprowadzić prostę równoległą do cięciwy podpierającéj w wieloboku 1go rzędu, linie rzeczonemi stronami objęte.

Na przykład strony AB i FG wieloboku 2go rzędu obejmują linie : 2, 3, 4 i 5, zatém punkt ich przecięcia się N będzie punktem należącym do *położenia* summy linij $2+3+4+5$; samo to zaś położenie otrzymamy prowadząc przez N prostę NP równoległą do cięciwy *af* podpierającéj strony 2, 3, 4 i 5 w wieloboku 1go rzędu.

Własność VI. — Widzieliśmy w § **16**, że summa jakiejkolwiek liczby linij nie zmieni się, jeśli przy ich dodawaniu zastąpimy pewną grupę linij przez ich summę częściową. Lecz tam była mowa tylko o *wielkości* i *kierunku* summy. Pozostaje więc teraz wykazać ogólność tego twierdzenia, to jest dowieść że obejmuje ono również i *położenie* summy.

W tym celu okażemy najprzód że :

1° *Położenie summy danego systemu linij zostanie bez zmiany, jeśli zastąpimy położenie dwóch lub pewnéj liczby linij po sobie następujących przez położenie ich summy.*

W saméj rzeczy, zastąpmy dwie linie po sobie następujące (fig. 24) 3 i 4 przez ich summę, któréj wielkość i kierunek wyraża się cięciwą *bd*, a położenie linią ST. W skutek tego system sześciu linij 1, 2, 3, 4, 5, 6, zamienia się na pięć linij 1, 2, ST, 5, 6; zamiast wieloboku O*abcdf*E, będziemy teraz mieli wielobok G*abdf*E, a wielobokiem 2go rzędu tak zmodyfikowanego systemu linij będzie wielobok ABSGH ; albowiem po wykreśleniu strony BC wyrażającéj położenia summy dwóch linij $(1+2)$ należy przedłużyć tę stronę do spotkania się jéj w punkcie S z *trzecią* linią systemu, to jest z linią ST i poprowadzić przez punkt S linię równoległą do promienia O*d* przedstawiającego wielkość summy linij $(1+2+bd)$. Otóż linia DF czyli SF, która jest czwartą stroną w danym wieloboku 2go rzędu, jest właśnie równoległą do O*d*; linia SF będzie więc trzecią stroną w nowym wieloboku, którego strony następne FG i GH zostaną na swém dawném miejscu. Ostatnia strona GH nie zmieniając wcale swego położenia, usprawiedliwia tém samém nasze twierdzenie.

W podobny sposób zastępując szereg linij po sobie następujących : 2, 3, 4, 6 przez ich summę wyrażoną co do wielkości i kierunku przez cięciwę *af*, a co do położenia przez prostę NP, system pierwotny zamieni się na system złożony z trzech tylko linij : 1, NP, 6; wielobok 1go rzędu sprowadzi się do O*af*E, a wielobokiem 2go rzędu będzie teraz AMGH ; otrzymamy go przedłużając położenie linij 1 NP do ich spotkania się w punkcie N, prowadząc przez N linię NG równoległą do promienia O*f* wyrażającego wielkość summy linij $(1+af)=(1+2+3+4+5)$ i przedłużając stronę NG do jéj spotkania się w punkcie G z trzecią linią nowego systemu, którą jest linia oznaczona cyfrą 6. Widzimy więc, że położenie summy, tak danego systemu linij : 1, 2, 3, 4, 5, 6, jako téż systemu zmodyfikowanego, jest jedną i tąż samą prostą GH.

2° *Położenie summy danego systemu linij zostanie bez zmiany, jeśli pierwotny porządek dodawania tych linij zamienimy na inny jakikolwiek.*

Twierdzenie to będzie dowiedzioném, jeśli okażemy że położenie summy linij dodanych w pewnym porządku nie zmieni się, zmieniając porządek dodawania *dwóch* linij po sobie następujących, gdyż przestawiając jedną linię z drugą po niéj następującą, albo ją poprzedzającą, i wykonawszy dostateczną liczbę razy przestawienie *dwóch tylko linij*, możemy przyjść do takiego ugrupowania linij jakie sobie zgóry obierzemy. Tak naprzykład jeśli dowiedziemy że

położenie summy linij 1, 2 3, 4, 5 jest to samo co

» 1, 3, 4, 2, 5

okażemy przez to że położenie summy : 1, 2, 3, 4, 5

i położenie summy : 4, 1, 5, 3, 2 tychże linij wziętych w porządku dowolnym, jest jedną i tąż samą prostą; albowiem ten porządek wyniknie z następującego szeregu przestawień :

1, 2, 3, 4, 5

1, 2, 4, 3, 5

1, 4, 2, 3, 5

4, 1, 2, 3, 5

3, 1, 2, 5, 3

4, 1. 5, 2, 3

4, 1, 5, 3, 2

Otóż, zmienić porządek w dodawaniu dwóch linij po sobie następujących, np. linij 3 i 4 (fig. 35), znaczy wykreślić w wieloboku 1^{go} rzędu linię 3 po linii 4, to jest zamiast wieloboku 12345 uważać wielobok 12435, i zamiast wieloboku 2^{go} rzędu W=ABCDEH dającego położenie summ częściowych i summy ostatecznéj linij 1, 2, 3, 4, 5, wykreślić inny wielobok W′ odpowiadający nowemu porządkowi w jakim te same linie są wzięte; ostatnia strona wieloboku W′ przedstawiać nam wtedy będzie położenie summy linij : $(1+2+3+4+5)$. Mamy dowieść że ostatnie strony wieloboków W i W′ zlewają się w jedną i tę samą prostę.

Wielobok nowy W′ wykreśla się sposobem zwyczajnym, to jest przedłużamy linie dane 1 i 2 do ich przecięcia się w punkcie B z którego prowadzimy linię BC równolegle do promienia O*b* ; przez punk J przecięcia się strony BC z *linią* 4, prowadzimy JK równolegle do O*g*, a przez punkt K w którym strona JK spotyka *linię* 3, kreślimy prostę KL równolegle do promienia O*d*, i przedłużamy ją do spotkania się z linią 5. A że z wykreślenia wieloboku dawnego ABCDE strona DE jest równoległą do tegoż promienia O*d*, zatém strona KL nowego wieloboku, którą mamy teraz prowadzić, będzie równoległą do DE. Otóż chcemy dowieść, że dwie strony KD i DE są nie tylko równoległe, ale zlewają się z sobą i stanowią jedną i tę samą prostę; a dla tego dosyć będzie okazać że te dwie liniemają punkt spólny, albo, co wychodzi na jedno, że dwie równoległe KL i DE spotykają trzecią linię BC w jednym i tymże samym punkcie.

W tym celu zauważmy najprzód, że położeniem summy linij $(3+4)$
i » $(4+3)$ jest jedna i ta sama prosta MN;
gdyż w obydwóch razach przechodzi ona przez przecięcie się linij 3 i 4, to jest przez ten sam punkt N i jest równoległą do cięciwy *bd*, przedstawiającéj wielkość i kierunek tak summy linij $bc+cd=(3+4)$, jako téż summy linij $bg+gd=(4+3)$.

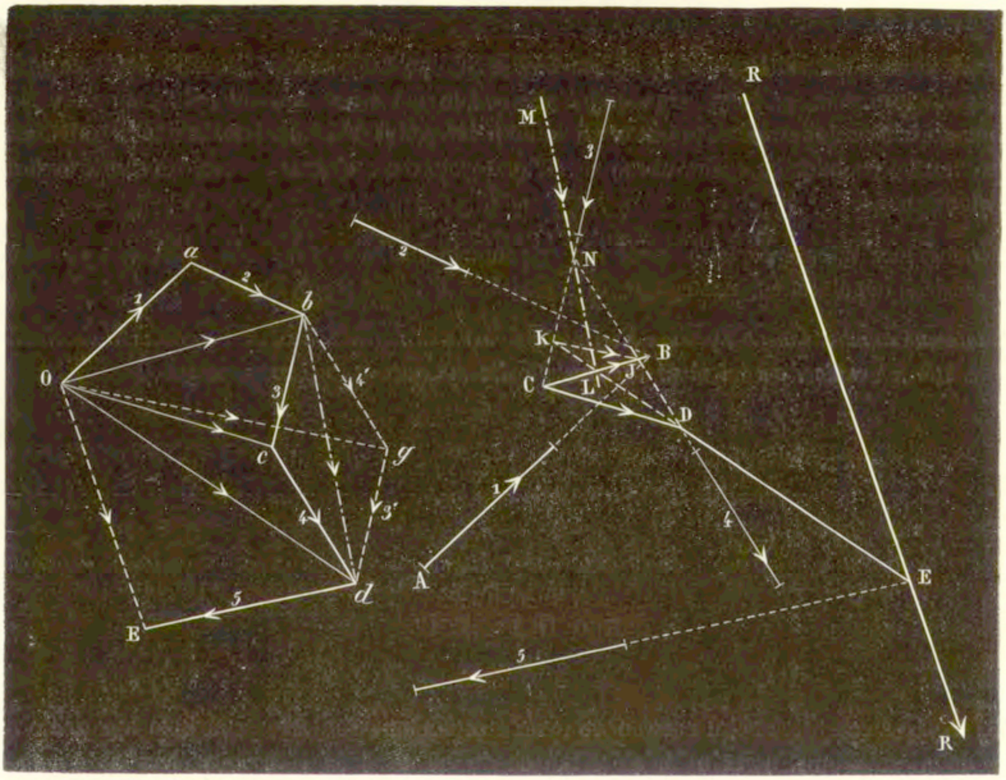

Fig. 35.

Zauważmy następnie że:

1) Prosta MN rozpatrywana jako położenie summy linij $(3+4)$ przechodzi (§ **14**) przez przecięcie się skrajnych stron BC i ED *dawnego* wieloboku 2^go^ rzędu, między któremi zawarte są linie 3 i 4.

2) Ta sama prosta MN, rozpatrywana jako położenie summy linij $(4+3)$, przechodzi (na mocy tegoż §) przez przecięcie się skrajnych stron *nowego* wieloboku 2^go^ rzędu, zawierających linie 4 i 3; a temi stronami są tu: linia BJ czyli BC (wyrażająca położenie summy linij wziętych do linii 4) to jest $(1+2)$ i strona KL [wyrażająca położenie summy $(1+2+4+3)$].

Zatém jedna i ta sama prosta MN powinna przechodzić przez punkt spólny liniom CB i DE
i » CB i KL;
więc linie DE i KL muszą spotykać linię BC w jednym i tym samym punkcie L; a że linie DE i KL

są *równoległe*, zatém mając jeden punkt spólny, zleją się one w jedną linię prostą, co było do okazania.

Następne więc strony wieloboku nowego W', będą te same co i w wieloboku dawnym; a w skutek tego położeniem summy linij (1 + 2 + 3 + 4 + 5) i linij (1 + 2 + 4 + 3 + 5) będzie ta sama prosta RR.

Z dowiedzionego w téj chwili twierdzenia wypada nadto twierdzenie następujące:

3° *Położenie summy danego systemu linij zostanie bez zmiany jeżeli zastąpimy pewną liczbę tych linij przez ich summę cząstkową.*

W saméj rzeczy, okazaliśmy już tę własność dla linij po sobie następujących; otóż, na mocy poprzedniego twierdzenia, możemy, nie zmieniając przez to ani wielkości, ani położenia summy ostatecznéj, przestawić w dodawaniu (to jest w wieloboku 1go rzędu) jakiekolwiek linie tak, że będą one iść jedna po drugiéj w porządku z góry obranym. Więc twierdzenie obecne sprowadza się do twierdzenia już dowiedzionego.

To twierdzenie wyrażające całą swobodę w grupowaniu linij przy ich dodawaniu, może być jeszcze bardziéj uogólnioném nastepującym wnioskiem z niego wypływającym:

4° *Ostateczna summa danego systemu linij zostanie bez zmiany jeśli zastąpimy pewne linie dane przez inne linie, których summa ma wielkość, kierunek i położenie summy linij zastąpionych.*

WIELOBOKI BIEGUNOWE

§ **46.** Wykreślenie wieloboku nazwanego przez nas wielobokiem 2go rzędu było logiczném następstwem dodawania linij, uważanych nie tylko co do ich *wielkości* i *kierunku*, lecz także i co do ich rzeczywistego na płaszczyznie *położenia;* gdyż wychodząc z takiego punktu zapatrywania się na linie, ich *summa* powinna być również wyznaczoną, tak co do jéj wielkości i kierunku, jako téż co do jéj położenia. Raz więc *określiwszy* wielkość, kierunki i *położenie* summy dwóch linij (o początku była mowa w § **26**), należało zastosować i przeprowadzić to określenie dla summy jakiéjkolwiek liczby linij.

Wynikający, z tak postawionego zadania i z przyjętego określenia położenia summy dwóch jakichkolwiek linij, sposób kreślenia wieloboku, mającego dać nam położenie summy linij, przedstawiał wprawdzie trudność otrzymania tą drogą położenia summy linij równoległych; ale niedogodność tę potrafiliśmy obejść wprowadzeniem do danego systemu dwóch linij pomocniczych, sobie równych przeciwnego kierunku i tego samego położenia.

Otóż, jest sposób kreślenia wieloboków (które nazwiemy *wielobokami biegunowemi*) ([1]), prowadzą-

---

([1]) Te wieloboki zwykle są nazywane *wielobokami sznurkowemi* (polygone funiculaire, Seilpolygon). My zaś nazcych do otrzymania położenia summy danych linij, stosujący się również do linij jakichkolwiek i do linij równoległych. Wprawdzie, kreślenie *wieloboku biegunowego*, nie jest bezpośrednim wynikiem samego określenia położenia summy dwóch linij, jak to ma miejsce przy kreśleniu wieloboku 2go rzędu, ale w gruncie jest ono oparte na téjże saméj podstawie.

Z innéj strony *wieloboki biegunowe*, będąc już przez to ogólniejsze od wieloboku 2go rzędu że stosują się one do wszelkich linij, dają w skutek tego wypadki *mniéj zupełne;* i tak, wtedy gdy rozmaite strony wieloboku 2go rzędu przedstawiają nam *zupełne* położenie, bądź summ częściowych, bądź summy ostatecznéj wszystkich linij systemu, — strony wieloboku biegunowego dają nam tylko *jeden punkt* tego położenia. Pospieszamy dodać, że ten punkt wystarcza jednak do natychmiastowego wykreślenia *całego* położenia summy, co wynika z własności jakie posiadają rozmaite strony wieloboku biegunowego. Ściśle więc mówiąc, przez wyznaczenie położenia summy linij, wielobok biegunowy może zastąpić w zupełności wielobok 2go rzędu, wyłącznie dotychczas przez nas używany.

Należy nam teraz podać określenie wieloboku biegunowego i zająć się wykazaniem głównych jego własności.

§ 47. Wychodząc z punktu widzenia czysto geometrycznego, możemy powiedzieć, że *określenie* wieloboku biegunowego, nastręcza się z rozpatrywania wieloboków 2go rzędu, jako prosta uwaga. Zobaczymy, że wielobok 2go rzędu jest tylko szczególny wielobok biegunowy i odwrotnie : wielobok biegunowy jest nic więcéj jak uogólniony wielobok 2go rzędu. Nie mniéj jednak, wielobok biegunowy jest jedném z potężniejszych narzędzi, któremi się posługuje Rachunek Wykreślny i jego wprowadzenie przedstawia korzyści, które wielobok 2go rzędu nie zawsze dać jest w stanie.

Niech będzie dany system czterech linij : 1, 2, 3, 4 (fig. 36) ; O*abcd*O — ich wielobok 1go rzędu; a HABCE — wielobok 2go rzędu.

Wprowadźmy do systemu nową linię x dowolną co do swéj wielkości,położenia i kierunku. Jeśli dodawanie linij zaczniemy od x, to jest wykonamy je w porządku x, 1, 2, 3, 4, wtedy dawny początek O wieloboku 1go rzędu stanie się końcem linii x, a początek nowego wieloboku będzie w punkcie P, leżącym zewnątrz wieloboku O*abcd*O (gdyby zaś, przytém samém położeniu linii x, jéj strzałka była skierowaną w stronę przeciwną, to jest od O do P, puukt P znalazłby się wewnątrz tego wieloboku).

Jeżeli następnie, wyprowadzimy z punktu P promienie do rozmaitych wierzchołków a, b, c, d i wykreślimy, sposobem zwyczajnym, wielobok 2go rzędu $x\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ dla naszego wieloboku 1go rzędu PO*abcd*P, to rozmaite strony : x, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, nowego wieloboku 2go rzędu przedstawiać nam będą położenie summ linij : x, $x+1$, $x+1+2$, $x+1+2+3$, $x+1+2+3+4$.

Otóż, powiadamy teraz że :

1° Położenie GH summy dwóch linij 2 i 3, — które jak wiadomo przechodzi przez przecięcie się H położeń linii (1) z położeniem summy linij $(1+2+3)$, — przechodzić będzie również przez przecięcie się K położenia summy linij : $(x+1)$, czyli strony $\alpha\beta$, z położeniem summy linij : $(x+1+2+3)$, to jest ze stroną $\delta\gamma$.

---

wiemy je *wielobokami biegunowemi* dlatego, że nazwisko wieloboków *sznurkowych* jest ściśle związane z pojęciem o siłach mechanicznych ; a u nas linia nie koniecznie ma oznaczać siłę i kwestyę traktujemy z punktu widzenia czysto geometrycznego.

W saméj rzeczy, połączywszy punkta G i K linią GK i rozpatrując dwa czworoboki :

$G\beta K\gamma G$ i $PabcP$ widzimy, że mają one pięć linij odpowiednio równoległych :

βK,	$G\beta$,	$G\gamma$,	$K\gamma$,	$\beta\gamma$
Pa	ab	bc	cP	Pb

więc linia GK jest równoległą do linii *ac* ; a że linia GK była przeprowadzoną przez punkt G przecięcia

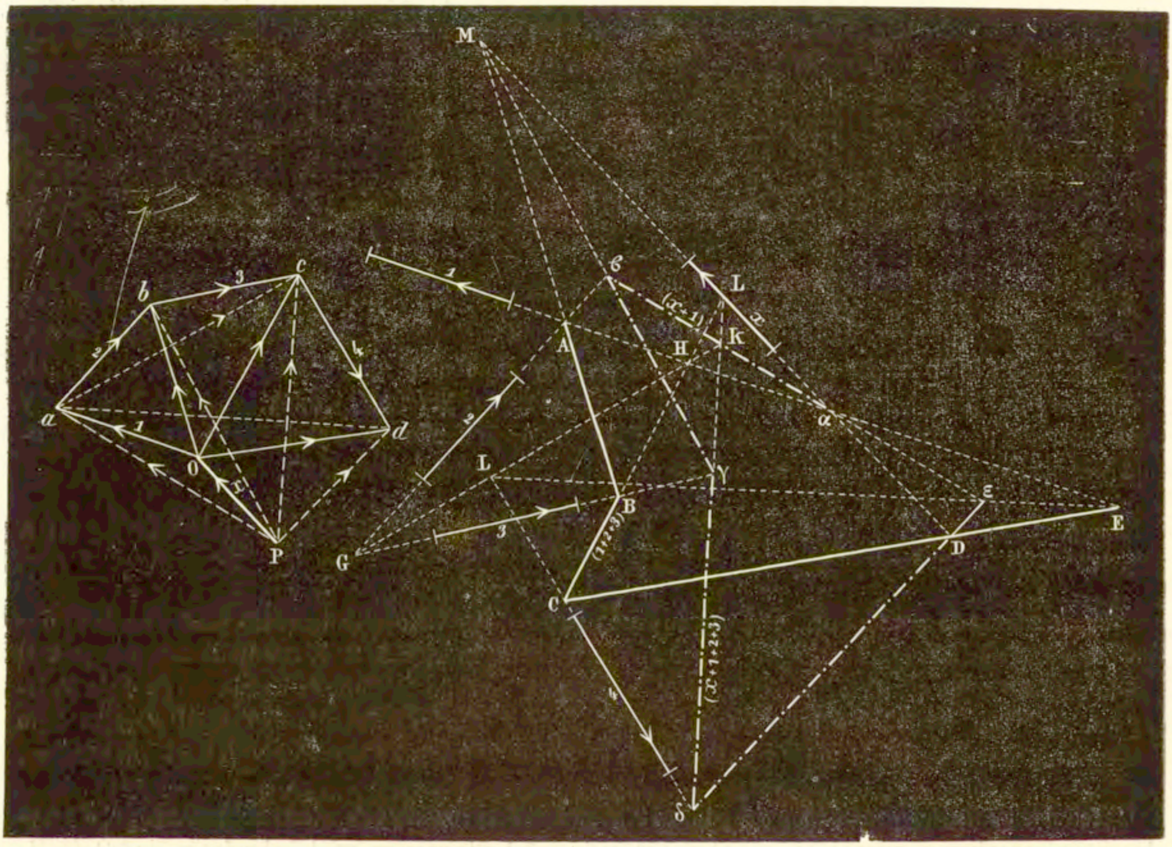

Fig. 35.

się linij 2 i 3, zatém GK wyraża położenie summy linij $(2+3)$; czyli że trzy punkta :

$$\left.\begin{array}{ll} G\text{ — przecięcia się linij danych 2 i 3,} & \\ H\text{ — przecięcia się summ linij : } & (1) \text{ i } (1+2+3) \\ K\text{ — } \quad » & (x+1) \text{ i } (x+1+2+3) \end{array}\right\} \text{leżą w linii prostéj.}$$

2° Okażemy w podobny sposób, że położenie summy linij 2, 3 i 4, przechodzące już, jak wiemy, przez przecięcie się (E) stron, z których jedna przedstawia położenie linii 1, a druga — położenie summy linij $1+2+3+4$, — przejdzie również przez punkt przecięcia się stron :

$\beta\varepsilon$ wyrażającéj położenie summy $(x+1)$,

$\delta\varepsilon$ » $(x+1+2+3+4)$.

W tym celu przedłużmy linię 4 do spotkania się jéj w punkcie L z położeniem summy (2+3), i połączywszy punkta L i ε linią $L\varepsilon$, uważmy dwa czworoboki : $LK\varepsilon\delta L$ i $PacdP$, w których linie :

$$LK, \quad K\varepsilon \quad \varepsilon\delta \quad \delta L, \quad K\delta,$$

$$ac, \quad aP \quad Pd, \quad cd \quad Pc$$

są odpowiednio równoległe; a więc linia $L\varepsilon$ jest równoległą do ad.

3° Nakoniec położenie summy wszystkich danych nam linij : $(1+2+3+4)$ przechodzi przez przecięcie się skrajnych stron nowego wieloboku 2go rzędu, to jest przez przecięcie się pierwszéj z jego stron $x\alpha = x$ z ostatnią stroną $\delta\varepsilon = (x+1+2+3+4)$.

Dla okazania tego należy przedtém dowieść, że odpowiadające sobie strony :

CB wyrażająca położenie summy $(1+2+3)$, w wieloboku dawnym i

$\delta\gamma'$ » $(x+1+2+3)$ » nowym,

przecinają się na linii $x\alpha = x$.

Wiemy już, że strona $\delta\gamma$ przedłużona, spotyka stronę $\alpha\beta$ w punkcie K, leżącym na linii GH. Przedłużmy teraz stronę CB, czyli linię CH do spotkania się jéj w punkcie L z linią x a połączywszy punkt L z punktem K, uważmy dwa czworoboki : $HL\alpha K$ i $acPO$, w których mamy pięć linij odpowiednio równoległych :

$$HL, \quad HK, \quad L\alpha, \quad K\alpha, \quad H\alpha,$$

$$Oc \quad ac \quad OP \quad aP \quad aO$$

więc LK jest równoległą do cP, a przeto będzie ona równoległą i do $\delta\gamma$; otóż linia LK ma ze stroną $\delta\gamma$ jeden punkt K spólny, więc linia LK jest przedłużeniem strony $\delta\gamma$; co okazuje że przedłużenie strony $\delta\gamma$ nowego wieloboku spotyka linię x w tymże samym punkcie L co i przedłużona strona CB dawnego wieloboku.

Moglibyśmy w podobny sposób dowieść, że strony AB i $\beta\gamma$ przecinają również linię x w jednym i tymże punkcie M, ale o tém będziemy mówili ogólniéj w następnym paragrafie.

Z łatwością teraz się przekonamy że punkt D, w którym przecinają się dwie skrajne strony $x\alpha$ i $\delta\varepsilon$ nowego wieloboku, znajduje się w położeniu CE summy danych linij : $1+2+3+4$. Dosyć będzie, połączywszy punkta D i C prostą DC, uważać dwa czworoboki $LC\delta D$ i $cOPd$, mające pięć linij odpowiednio równoległych

$$CL, \quad LD, \quad D\delta, \quad C\delta, \quad L\delta$$

$$Oc \quad OP \quad Pd \quad dc \quad Pc,$$

ztąd wypada, że CD jest równoległą do Od; a więc linie CD i CE wychodzące z tego samego punktu C i równoległe do Od, muszą stanowić jedną i tę samą prostę ; czyli że punkt D leży na linii DE.

Z powyższego rozbioru widzimy, że wielobok 2go rzędu $x\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ zmodyfikowanego systemu linij wyznacza położenie summ częściowych : $(2+3)$, $(2+3+4)$ . . . tak dobrze, jak wielobok 2go rzędu 1ABCE systemu danego; gdyż mając punkta : K, ε, . . . dosyć jest poprowadzić równolegle KG, εL,.. do cięciw ac, ad, . . . Co zaś do położenia CE summy wszystkich linij $1+2+3+4$ wielobok 2go rzędu dawny daje nam wprawdzie całą linię CE, wtedy gdy wielobok nowy daje tylko jeden punkt D téj linii; ale punkt D wystarcza do wykreślenia prostéj CE, także samo jak punkta wyżéj wymienione K, ε wystarczają do wykreślenia linij KL, εL...

Dogodność rozpatrywania wieloboku $x\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, zamiast wieloboku 1ABCE, staje się dotykalną wtedy naprzykład, kiedy dane linie 1, 2, 3, 4... są równoległe; w tym razie wykreślenie wieloboku 1ABCE jest nawet niemożebne, z powodu, że linie dane przecinać się nie będą; otóż, wprowadzenie linii pomocniczéj x pozwoli nam wykreślić wielobok 2go rzędu systemu zmodyfikowanego i otrzymać jeden punkt położenia bądź summ częściowych, bądź summy ostatecznéj; a przez to znaném nam będzie całe położenie tych summ, albowiem ono jest równoległe do linij składających dany nam system. Podobna uwaga stosuje się jeszcze i do przypadku kiedy niektóre tylko z linij są równoległe, jako téż kiedy linie dane, chociaż nie będąc równoległe, nie przecinają się w granicach naszego rysunku.

Uwaga. — Figurę 36 i dotyczące ją objaśnienia rozwinęliśmy w celu uzasadnienia geometrycznego określenia wieloboków biegunowych. Określenie to, podawane w niektórych dziełach niezależnie od pojęcia o *położeniu* summy linij, wydaje się samo przez się za suche i przyczyna określenia zostaje przez pewien czas dla czytelnika ukrytą. Otóż, uczyniony przez nas niejako wstęp do teoryi wieloboków biegunowych pozwoli przeczuć natychmiast całą jéj ważność i znaczenie, a towarzyszące wielobokom biegunowym twierdzenia wykażą, samém już wysłowieniem, potrzebę ich wyprowadzenia i użytek na jaki one mogą być przeznaczone.

§ 48. **Geometryczne określenie wieloboku biegunowego danego systemu linij.** — Niech będą linie dane : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... (fig. 37) dowolnego położenia i kierunku.

Wychodząc z dowolnego punktu O, wykreślmy wielobok 1go rzędu tych linij : $O\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta E$; punkt O będzie jego początkiem, punkt E — jego końcem; linia OE przedstawiać będzie wielkość i kierunek summy wszystkich linij systemu, a rozmaite promienie wychodzące z początku O i skierowane ku rozmaitym wierzchołkom : α, β, γ, η, E [czyli, używając oznaczania § **10**, ku wierzchołkom (1, 2), (2, 3), ... (6, 7), (E)], dadzą nam wielkość i kierunek summ częściowych :

$$1,\ (1+2),\ (1+2+3)\ldots$$

Weźmy teraz na płaszczyznie wieloboku 1go rzędu jakikolwiek punkt P i poprowadźmy promienie; PO, $P\alpha$, $P\beta$, ... $P\eta$, PE; otrzymamy pęk linij mających punkt P za węzeł.

Weźmy nakoniec na płaszczyznie wieloboku 2go rzędu punkt dowolny A i poprowadźmy linię AB równolegle do promienia PO; następnie z punktu B przecięcia się prostéj AB z linią 1, wykreślmy prostę BC równolegle do promienia następującego po PO to jest do $P\alpha$; poczém z punktu C przecięcia się prostéj BC z linią 2 poprowadźmy linię CD równolegle do promienia $P\beta$, ... , nakoniec z punktu H poprowadźmy prostę HK równolegle do ostatniego promienia PE. W skutek takiego wykreślenia otrzymujemy wielobok ABCDEFGHK, którego wszystkie strony są równoległe do odpowiednich promieni wychodzących z punktu P, a wszystkie wierzchołki : B, C, D, E, F, G, H leżą na danych liniach 1, 2,... 6, 7.

Wielobok ABC ... HK będziemy nazywyli *wielobokiem biegunowym względem punktu* P; sam aś punkt P nazwiemy *biegunem* tego wieloboku.

Prosta AB (poprowadzona ku pierwszéj linii 1 systemu) i HK (wyprowadzona od ostatniéj linii 7 systemu) są *skrajnemi* stronami wieloboku biegunowego i równoległemi do skrajnych promieni PO i PE.

§ **49.** Zauważmy, że : 1° Sposób określenia wieloboku biegunowego względem punktu P nie wyznacza wcale *położenia* jego stron na płasczyznie, gdyż biorąc zamiast punktu A, inny punkt A′ za punkt wyjścia i prowadząc równoległe : A′B′ do promienia PO; B′C′ do Pα, . . . , otrzymamy inny wielobok biegunowy A′B′C′ , . . . , H′K′ względem tegoż samego punktu P; tak, że dla jednego i tegoż samego

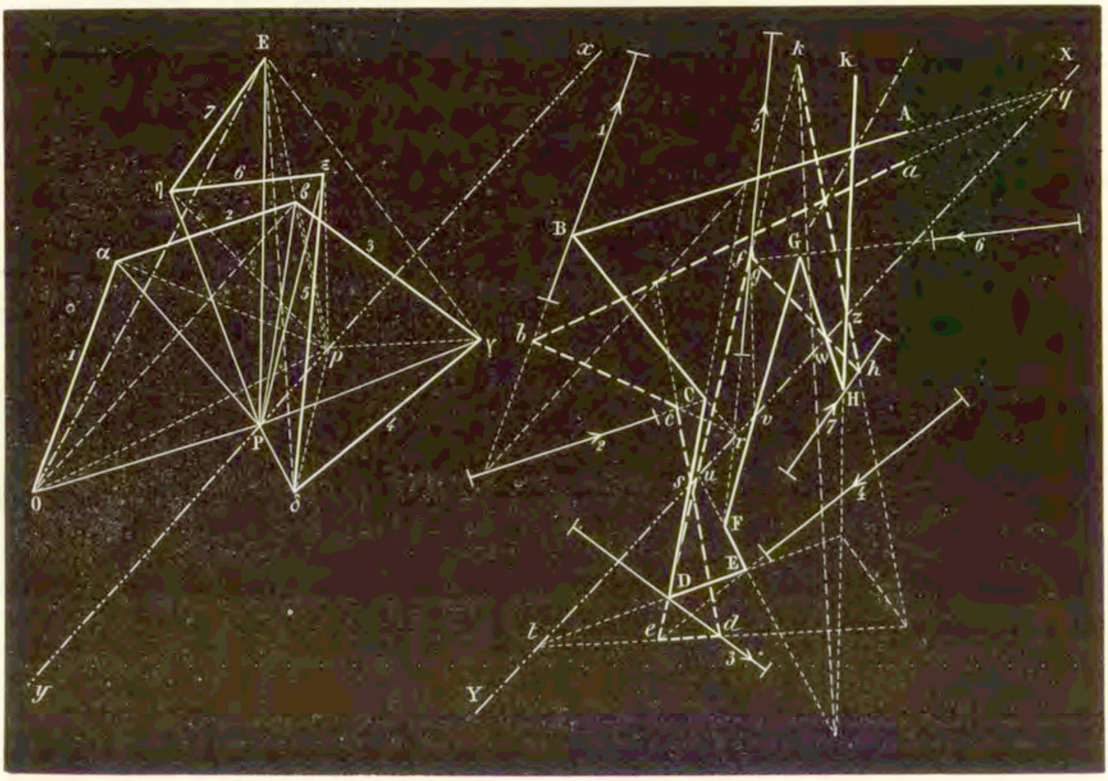

Fig. 37.

bieguna, wieloboków biegunowych może być ilość nieskończona. Ale wszystkie możliwe wieloboki biegunowe wspólne względem punktu P mają ten spólny charakter, że odpowiednie ich strony, są względem siebie równoległe, gdyż są one równoległe, z samego określenia, do jednych i tychże samych promieni PO, Pα, Pβ ... PE.

2° Z innéj strony, biegun P jest także punktem dowolnym; możemy wziąć inny jakikolwiek biegun p i utworzywszy pęk linij pO, $p\alpha$, $p\beta$, . . . , pE, — wykreślić wielobok biegunowy względem punktu p. Widzimy zatém, że wieloboków biegunowych, dla jednego i tegoż systemu linij 1, 2, . . . 6, 7, może być ilość nieskończona, tak ze względu na swobodę jaką mamy w wyborze punktu A (to jest *położenia* pierwszéj strony wieloboku biegunowego), jako też w skutek wolności co do obrania bieguna P.

Jednocześnie zmiana punktów A i P pociąga za sobą : 1) zmianę w *położeniu* stron wieloboku biegunowego i 2) zmianę w ich *nachyleniu* do linii danego nam systemu. Widoczném jest, że wszelka prosta AB z góry i dowolnie poprowadzona, byleby przecinała ona linię 1, winna być uważana jako pierwsza strona wieloboku biegunowego; dosyć będzie tylko wziąć za biegun jeden z punktów linii OP, poprowadzonéj przez O równolegle do prostéj BA; ale wszystkie inne strony wieloboku będą już wskutek tego najzupełniéj wyznaczone.

§ 50. **Wzajemna zależność rozmaitych wieloboków biegunowych.** — Rozmaite wieloboki biegunowe, dla jednego i tegoż systemu linij, są między sobą w tak ścisłéj zależności, że znając jeden jakikolwiek, będziemy mogli wykreślić natychmiast tyle innych wieloboków ile zechcemy. Okażemy to na mocy twierdzenia następującego.

TWIERDZENIE. — *Odpowiednie strony wieloboków biegunowych wykreślonych dla danego systemu linij, przecinają się wszystkie po dwie, w punktach leżących na jednéj prostéj równoległéj do téj, która łączy biegun tych wieloboków.*

Niech będzie wielobok biegunowy ABC... HK, danego systemu linij : 1, 2, 3, ..., 6, 7, wykreślony względem punktu P;

Niech będzie wielobok bieguuowy *abc* ... *hk*, wykreślony względem punktu *p*.

Przedłużmy odpowiednie strony : AB i *ab*, BC i *bc*, ..., tych dwóch wieloboków, do spotkania się w punktach : *q*, *r*, ... Z przecięcia się rozmaitych stron otrzymamy szereg punktów następujący :

$$\left.\begin{matrix}AB\\ ab\end{matrix}\right\}q \quad \left.\begin{matrix}BC\\ bc\end{matrix}\right\}r \quad \left.\begin{matrix}CD\\ cd\end{matrix}\right\}s \quad \left.\begin{matrix}DE\\ de\end{matrix}\right\}t \quad \left.\begin{matrix}EF\\ ef\end{matrix}\right\}u \quad \left.\begin{matrix}FG\\ fg\end{matrix}\right\}v \quad \left.\begin{matrix}GH\\ gh\end{matrix}\right\}w \quad \left.\begin{matrix}HK\\ hk\end{matrix}\right\}z$$

Mamy dowieść, że wszystkie punkta : *q*, *r*, *s*, ..., *w*, *z*, znajdują się na prostéj XY, równoległéj do P*p*, czyli do prostéj *xy*, poprowadzonéj przez dwa bieguny : P i *p*.

1) Rozpatrując pierwsze dwie strony (AB, *ab*) i (BC. *bc*) okaże się z łatwością, że linia *qr*, łącząca punkta *q* i *r*, jest równoległa do linii P*p*; gdyż uważając dwa czworoboki :

*q*B*brq*, o przekątnych *qb* i B*r*,

POα*p*P, » O*p* i αP,

wnosimy, na mocy równoległości pięciu stron :

*q*B,	B*b*,	*br*,	*qb*,	B*r*,
PO	Oα	Pα	*p*O	*p*α,

że i szóste strony : *qr* i P*p* będą także równoległe.

2) Rozpatrując daléj dwie następne strony wieloboków : (BC, *bc*) i (CD, *cd*) i łącząc punkta *r* i *s* prostą *rs*, znajdziemy dwa czworoboki :

*c*C*rsc*, o przekątnych *cr* i *s*C,

$\alpha\beta$*p*Pα, » *p*α i Pβ;

gdzie, z równoległości pięciu linij :

*c*C,	C*r*,	*cs*,	*cr*,	C*s*,
$\alpha\beta$	Pα	*p*β	*p*α	Pβ

wypada równoległość linij *rs* i P*p*, a zatém linia *rs* jest przedłużeniem prostéj *qr*.

W podobny sposób okażemy, że linia *st* jest przedłużeniem linii *rs*, i t. d., to jest, że wszystkie punkta *q*, *r*, i *s*, ..., *w*, *z*, leżą w jednéj linii prostéj, równoległéj do linii P*p*.

Uwaga. — Jeżeli na prostéj xy weźmiemy inny punkt P′ za nowy biegun i wykreślimy względem niego wielobok biegunowy A′B′ . . . H′K′, wtedy strony tego nowego wieloboku przetną się z odpowiedniemi stronami bądź wieloboku AB . . . HK, bądź téż wieloboku *ab* . . . *hk*, w punktach leżących zawsze na liniach równoległych do xy. X′Y′ i X″Y″ będą różne, gdyż ich położenie zależeć będzie od położenia obranego przez nas po wykreśleniu 1ej strony nowego wieloboku A′B′ . . . H′K′. Może się nawet zdarzyć takie szczególne wykreślenie, przy którém jedna z prostych X′Y′ lub X″Y″ zleje się z prostą xy. Ale, jeżeli dla każdego punktu wziętego na prostéj xy będziemy wykreślać wieloboki biegunowe w taki sposób, ażeby 1sza ich strona przechodziła zawsze przez punkt q, wtedy na mocy powyższego twierdzenia, będziemy pewni, że wszystkie inne strony wieloboków spotkają się z odpowiedniemi stronami wieloboków AB . . . HK i *ab* . . . *hk* w punktach : $r, s, \ldots w, z$, położonych na prostéj XY poprowadzonéj przez punkt q równolegle do xy. Więc dla *takiego sposobu wykreślania wieloboków biegunowych* twierdzenie nasze może być wyrażone w sposób następujący :

Jeśli biegun wieloboku biegunowego opisuje linię prostą jakąkolwiek, rozmaite strony tego wieloboku wirują około punktów STAŁYCH, *położonych na prostéj równoległéj do téj, którą opisuje biegun.*

Kąty, na jakie obracają się rozmaite strony wieloboku biegunowego ABC . . . HK, w czasie przejścia bieguna od punktu P do punktu p, są inne dla każdéj strony, gdyż

kąt Bqb = kątowi POp,

» Brb = » $P\alpha p$,

» Csc = » $\mathfrak{G}p$;

a wielkość kątów POp, $P\alpha p$, $P\mathfrak{G}p$, . . . , zależy od położenia punktu O, α, $\mathfrak{G}$, . . . , jako téż od wzajemnéj odległości biegunów P i p. Więc dla danego wieloboku 1go rzędu $O\alpha\mathfrak{G}$ . . . E, zmiana kątów wirowania zależy tylko od przemieszczenia bieguna P na prostéj xy.

Jeśli punkt p zbliża się do punktu P, wtedy wszyskie kąty wirowania Bqb, Brb, będą się zmniejszać i punkta $b, c, \ldots$ zbliżać do punktów B, C, . . . , tak że przy granicy, to jest przy zlaniu się punktu p z P, wszystkie punkta staną się zerem i dwa wieloboki biegunowe zleją się w jeden wielobok ABC . . . HK biegunowy względem punktu P. Prosta XY przestaje wtedy mieć swoje znaczenie.

Ale jeśli zamiast prowadzenia strony *ab* przez punkt q (czyli, innemi słowy zamiast *ustalenia* na płasczyznie punktu q, a tém samém i prostéj XY), będziemy kreślić, dla każdego bieguna p', linię *ba*, zawsze z tego samego punktu *b*, wtedy przy zmniejszaniu się kąta $P\theta p$, prosta *ba* spotka dawną stronę BA pod kątem coraz mniejszym, czyli że punkt 1 coraz bardziéj będzie się oddalać w stronę prawą rysunku ; lecz przy każdém położeniu q' tego punktu, odpowiednie strony dwóch wieloboków biegunowych zawsze się będą przecinały na prostéj X′Y′ poprowadzonéj przez punkt q' równolegle do Pp; w miarę zbliżania się punktu p do P, X′Y′ będzie coraz więcéj się oddalać od prostéj XY i kiedy punkt p zleje się z P, prosta na któréj będą leżeć punkta przecięcia się odpowiednich stron dwóch wieloboków ABC . . . HK i *abc* . . . *hk* znajdzie się w nieskończoności, to znaczy że te strony staną się równoległemi ; ale teraz obydwa wieloboki są *biegunowemi względem punktu* P ; więc wieloboki biegunowe względem jednego i tego samego punktu, mają swe strony odpowiednio równoległe.

Ta konkluzya nie przedstawia nam nic nowego, gdyż jest już ona zawartą w samém określeniu wieloboku biegunowego ; wiemy bowiem z góry, że nie tylko strony wieloboku *obc* . . . *hk*, ale i wszelkiego innego w podobny sposób wykreślonego, staną się równoległemi do odpowiednich stron wieloboku ABC . . . HK, przy zlaniu się punktu p z punktem P.

§ 51. Twierdzenie. — *Mając wykreślony jeden jakikolwiek wielobok biegunowy, dla danego systemu linij, będziemy mogli wykreślić natychmiast tyle innych wieloboków ile się podoba* dla tegoż systemu; to jest wszystkie inne wieloboki biegunowe otrzymamy drogą daleko prędszą od téj, która służy do bezpośredniego ich wykreślenia.

W saméj rzeczy, niech będzie dany (fig. 37) wielobok biegunowy ABC . . . HK, względem punktu P. Ażeby wykreślić wielobok biegnnowy względem innego jakiegokolwiek punktu p, nie ma potrzeby ani prowadzenia pęku *linij*, czyli przecięcia wychodzących z punktu p i skierowanych ku rozmaitym wierzchołkom O, α, β, . . . , η, E wieloboku 1go rzędu, ani też kreślenia linij równoległych do tych promieni; dosyć będzie

1) Poprowadzić równolegle do linii Pp prostę XY *dowolnego położenia*;

2) Przedłużyć wszystkie strony AB, BC, . . . , GH, HK danego nam wieloboku do przecięcia się z prostą XY w punktach q, r, s, . . . w, z;

3) Poprowadzić przez punkt q linię qb równoległą do promienia pO.

Uskuteczniwszy trzy te wykreślenia, rozmaite strony nowego wieloboku zejdą się, że tak powiemy jednym ciągem, a mianowicie: mając punkt b łączymy go z punktem r i bierzemy część bc otrzymanéj ztąd linii br, zawartą między linią 1 i linią 2; bc będzie drugą stroną szukanego wieloboku. Tak samo postępujemy z punktem c; który połączony z punktem s da nam prostę cs; ta prosta przedłużona do spotkania się z linią 3 w punkcie d, stanowić będzie trzecią stronę naszego wieloboku; w podobny sposób znajdziemy czwartą stronę wieloboku, łącząc otrzymany w téj chwili punkt d z punktem t i ograniczając prostę dt w punkcie e, w którym jest ona spotkaną przez położenie linii 4. i t. d., aż przyjdziemy do ostatniego punktu h, leżącego na ostatniéj linii 7; punkta h i z wyznaczą nam ostatnią stronę hk szukanego wieloboku.

Należy teraz okazać, że tak znalezione strony bc, cd, . . . hk będą stronami wieloboku biegunowego względem punktu p, to jest, że są one równoległe do promieni wyprowadzonych z bieguna p do rozmaitych wierzchołków wieloboku 1go rzędu O$\alpha\beta$ . . . $q\Sigma$. Otóż poprowadziwszy promień $p\alpha$, widzimy, że w dwóch czworobokach qBbrq i POαpP, wszystkie strony prócz stron br i $p\alpha$ są odpowiednio równoległe zatém i br będzie równoległą do promienia $p\alpha$. W podobny sposób okaże się, że strona cs, czyli cd jest równoległą do promienia $p\beta$ i t. d., wielobok abc. . . hk będzie zatém wielobokiem biegunowym względem punktu p.

Jeżeli punkt p, względem którego szukany wielobok ma być biegunowym, nie jest nam z góry oznaczony, to jest, jeśli mamy wykreślić jakikolwiek wielobok biegunowy dla danego systemu linij, w takim razie będziemy mieli więcéj wolności, gdyż poprowadzimy wtedy:

1) Prostę XY nie tylko dowolnego położenia, ale i *dowolnego nachylenia*,

2) Z punktu q linię qb zupełnie *dowolną co do jéj nachylenia* względem innych linij.

Poczém dalsze wykreślenia wykonamy jak wyżéj. Ażeby znaleźć punkt, względem którego wielobok tak wykreślony będzie biegunowym, dosyć jest przez biegun dany P poprowadzić prostę xy równolegle do prostéj XY w téj chwili przez nas obranéj, a przez początek O wieloboku 1go rzędu nakreślić, równolegle do linii qb, prostę Op; punkt p w którym linia Op spotyka linię xy, będzie biegunem nowowykreślonego wieloboku.

KONIEC CZĘŚCI PIERWSZEJ.