DOWÓD

PEWNEGO WZORU LAMÉ'GO

PODAŁ

W. TRZASKA

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Scisłych w Paryżu, dnia 11 sierpnia 1877 roku.

W dziele : *Examens des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géometrie ; par* G. LAMÉ, *élève ingénieur au corps royal des mines. Paris Mme Vve Courcier, imprimeur-libraire, rue du Jardinet-Saint-André-des-Arts.* 1818; in-8°, stronic XII i 124 z 2 tablicami figur, na stronicach 101 do 104, podaje autor zdaje się po raz pierwszy, wzór służący do oznaczenia pochyłości warstwy kopalnéj naprzykład pokładu węgla, mając dane głębokości trzech otworów świdrowych, oraz ich wzajemne odległości poziome. Znakomity późniéj autor, będąc jeszcze uczniem Szkoły Górniczéj w Paryżu jakkolwiek rzucił już w tém dziele wiele myśli, zapowiadających jednę z pierwszorzędnych gwiazd nauki, skutkiem zapewne okoliczności o jakich mówi w przedmowie, podał dowód wspomnianego wzoru, nie odznaczający się symetrją i prostotą jakich można by się od niego spodziewać. Czytając powyższe dzieło, nasunęła mi się myśl dowodu innego i takowy ośmielam się poniżéj opisać.

Oznaczmy przez A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 punkty w których otwory świdrowe pionowe spotykają płaszczyznę poziomu i powierzchnię pokładu; przez A, B, powierzchnie trójkątów $A_1 A_2 A_3$ i $B_1 B_2 B$ oraz długości

$$(1) \qquad \begin{cases} A_2A_3=a_1, & A_3A_1=a_2, & A_1A_2=a_3, \\ A_1B_1=b_1, & A_2B_2=b_2, & A_3B_3=b_3, \\ B_2B_3=c_4, & B_3B_1=c_2, & B_1B_2=c_3, \\ b_2-b_1=d_1, & b_3-b_1=d_2, & b_1-b_2=d_3, \\ & a_1+a_2+a_3=2a. & \end{cases}$$

Wiadomo wtedy, że ponieważ trójbok $A_1 A_2 A_3$ jest rzutem prostopadłym trójboku $B_1 B_2 B_3$, zatém kąt k pomiędzy ich płaszczyznami czyli szukane nachylenie, wyrazi się wzorem

$$\operatorname{dos} k = \frac{A}{B}$$

że ztąd

$$(\operatorname{sty} k)^2 = \frac{(4B)^2 - (4A)^2}{(4A)^2}. \tag{2}$$

Wiadomo także, że jest

$$(4B)^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & c_3^2, & c_2^2 \\ 1, & c_3^2, & 0, & c_1^2 \\ 1, & c_2^2, & c^2_1, & 0 \end{vmatrix} \text{(1)} \tag{3}$$

gdzie

$$c_1^2 = a_1^2 + d_1^2, \quad c_2^2 = a_2^2 + d_2^2, \quad c_3^2 = a_3^2 + d_3^2, \tag{4}$$

i że nadto

$$(4A)^2 = (a_1 + a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3) \text{(2)}$$

czyli

$$A = a(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3).$$

We wzorze (3) zastąpmy c_1^2, c_2^2, c_3^2 przez ich wyrażenia (4) i rozwińmy wyznacznik podług znanéj własności wyznaczników [3], a otrzymamy summę ośmiu wyznaczników czwartego stopnia jako rozwinięcie drugiéj strony równania (3) podług wierszy pionowych

$$-\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a_3^2, & a_2^2 \\ 1, & a_3^2, & 0, & a_1^2 \\ 1, & a_2^2, & a_1^2, & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & a_3^2, & d_2^2 \\ 1, & a_2^2, & 0, & d_1^2 \\ 1, & a_2^2, & d_1^2, & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & d_3^2, & a_2^2 \\ 1, & a_3^2, & 0, & a_1^2 \\ 1, & a_2^2, & d_1^2, & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & d_3^2, & d_2^2 \\ 1, & a_3^2, & 0, & d_4^2 \\ 1, & a_2^2, & d_1^2, & 0 \end{vmatrix} +$$

$$-\begin{vmatrix} 0, & 0, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a_3^2, & a_2^2 \\ 1, & d_3^2, & 0, & a_1^2 \\ 1, & d_2^2, & a_1^2, & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & a_3^2, & d_2^2 \\ 1, & d_3^2, & 0, & d_1^2 \\ 1, & d_2^2, & a_1^2, & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & d_3^2, & a_2^2 \\ 1, & d_3^2, & 0, & a_1^2 \\ 1, & d_2^2, & d_1^2, & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & d_3^2, & d_2^2 \\ 1, & d_3^2, & 0, & d_1^2 \\ 1, & d_2^2, & d_1^2, & 0 \end{vmatrix}$$

---

(1) *Teoria de determinanti e loro applicazioni di Nicola Trudi*. Napoli, B. PELLERANO, 1862. 8-ka stronic XII i 268. Na stronicach 258 i 259, pod liczbą 10.

(2) Tamże, na stronicy 34, w wierszach 4 i 5.

(3) Tamże, na stronicach 26 i 27, pod liczbą 47.

Pierwszy z tych wyznaczników jest równy $(4A)^2$, summa zaś czwartego, szóstego i siódmego (rozwijając je podług pierwszych wierszy poziomych), daje się przedstawić przez

$$\begin{vmatrix} 1, & d_3^2, & d_2^2 \\ 1, & 0, & d_1^2 \\ 1, & d_1^2, & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & 0, & d_2^2 \\ 1, & d_3^2, & d_1^2 \\ 1, & d_2^2, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 0, & d_3^2 \\ 1, & d_3^2, & 0 \\ 1, & d_2^2, & d_1^2 \end{vmatrix}$$

i jest rozwinięciem (podług pierwszego wiersza poziomego) wyznacznika

$$-\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & d_3^2, & d_2^2 \\ 1, & d_3^2, & 0, & d_1^2 \\ 1, & d_2^2, & d_1^2, & 0 \end{vmatrix}$$

będącego zerem, albowiem wyraża on kwadrat poczwórnéj powierzchni trójboku, w którym summa boków d_1, d_2, d_3 jest zerem, a zatém powierzchni będącéj także zerem. Ósmy wyznacznik jest także zerem, gdyż ma pierwszy wiersz poziomy, złożony z samych zer. Tak więc $(4B)^2 - (4A)^2$ wyraża się przez summę trzech wyznaczników tylko, a mianowicie : drugiego, trzeciego i piątego. Rozwinąwszy te ostatnie wyznaczniki podług pierwszych wierszy poziomych, otrzymamy summę sześciu wyznaczników trzeciego stopnia, które już łatwo rozwinąć. Po uporządkowaniu otrzymamy na $(4B)^2 - (4A)^2$ wyrażenie następujące

$$2\,[-a_1^2(+a_2^2+a_3^2)d_1^2+(a_1^2+a_2^2+a_3^2)d_2^2+(a_1^2+a_2^2-a_3^2)d_3^2]$$

lub téż

$$2\,[a_1^2(-d_1^2+d_2^2+d_3^2)+a_2^2(d_1^2-d_2^2+d_3^2)+a_3^2(d_1^2+d_2^2-d_3^2)]\,,$$

lub, bacząc na czwarty układ równań (1),

$$-4(a_1^2\,d_2\,d_3+a_2^2\,d_3\,d_1+a_3^2\,d_1\,d_2).$$

Mamy więc ostatecznie na mocy wzoru (2)

$$-4(\text{sty}\,k)^2 = \frac{a_1^2\,d_2\,d_3+a_2^2\,d_3\,d_1+a_3^2\,d_1\,d_2}{a(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)}\,,$$

a ztąd wzór Lamé'go

$$\text{sty}\,k = 2\sqrt{\frac{a_1^2(b_2-b_1)(b_3-b_1)+a_2^2(b_3-b_2)(b_1-b_2)+a_3^2(b_2-b_3)}{(b_1-b_3)a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)}}$$

którego zamierzyłem dowieść.

PARIS. — IMPRIMERIE DE E. MARTINET, RUE MIGNON,