O MNOŻENIU

FUNKCYJ KOŁOWYCH I HIPERBOLICZNYCH

NAPISAŁ

W. TRZASKA

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Scisłych w Paryżu, dnia 21 Sierpnia 1877 roku.)

Zadanie mnożenia funkcyj kołowych i hiperbolicznych, można uważać dzisiaj za zupełnie wyczerpane a szczególniéj w przypadku mnożenia przez liczby całkowite, o którym właśnie poniżéj mówić będę. Jeżeli więc dotykam tego zadania to dla tego jedynie, że wzory jakie podaję, pomimo użytecznego kształtu i łatwości z jaką wyprowadzić się dają, nie zwróciły zdaje mi się na siebie uwagi.

Zamierzam między innemi podać dowód następującego twierdzenia:

Jeżeli w wyznaczniku l^{go} stopnia (równym 1)

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & 1, & 0, \ldots, & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0, & 1, & a, & 1, \ldots, & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 1, & a, \ldots, & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, \ldots, & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \;\; . \;\; . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

podstawimy za a raz $-2\operatorname{dos}k$, drugi raz $-2\operatorname{dosh}k$, następnie jeżeli za pierwszy, przedostatni i ostatni składnik pierwszego wiersza pionowego, podstawimy w pierwszym razie kolejno to

$$0,\ -1,\ \operatorname{dos}k \qquad \text{to znowu} \quad 0,\ 0,\ \operatorname{wst}k$$

i podobnie w drugim razie

$$0,\ -1,\ \operatorname{dosh}k, \quad \text{oraz} \qquad 0,\ 0,\ \operatorname{wsth}k,$$

to otrzymane w ten sposób cztery wyznaczniki l^{go} stopnia wyrażają odpowiednio

$$\operatorname{dos}lk,\quad \operatorname{wst}lk;\quad \operatorname{dosh}lk,\quad \operatorname{wsth}lk.$$

Wzory stosują się i do l ujemnego, tylko trzeba zmienić znaki przed odpowiedniemi wyznacznikami wyrażającemi wstawy.

Aby dowieść powyższego twierdzenia zwróćmy uwagę naprzód na tożsamość oczywistą

(1) $$0 = z^l - (z + z^{-1})z^{l-1} + z^{l-2}$$

z której (w przypuszczeniu że i oznacza pierwiastek dodatni drugiego stopnia z jedności ujemnéj a zaś e zasadę logarytmów naturalnych) przez kolejne podstawienie e^{ki} i e^{-ki} zamiast z i pamiętając że [1]

(2) $$\begin{cases} \operatorname{dos}k = \dfrac{1}{2}\left\{e^{ki} + e^{-ki}\right\} \\[2ex] \operatorname{wst}k = \dfrac{1}{2i}\left\{e^{ki} - e^{-ki}\right\} \end{cases}$$

otrzymamy

$$0 = e^{lki} - 2\operatorname{dos}k\, e^{(l-1)ki} + e^{(l-2)ki},$$

$$0 = e^{-lki} - 2\operatorname{dos}k\, e^{-(l-1)ki} + e^{-(l-2)ki},$$

poczém dodając je do siebie odpowiedniemi stronami i dzieląc przez 2 obie strony, lub téż odejmując drugie równanie od pierwszego odpowiedniemi stronami i dzieląc obie strony otrzymane przez $2i$, wypada

(3) $$0 = \operatorname{dos}lk - 2\operatorname{dos}k \operatorname{dos}(l-1)k + \operatorname{dos}(l-2)k$$

(4) $$0 = \operatorname{dos}lk - 2\operatorname{dos}k \operatorname{wst}(l-1)k + \operatorname{wst}(l-2)k.$$

Podobnież podstawiając w tożsamości (1) e^k i e^{-k} zamiast z i postępując tak jak wyżéj i pamiętając że [2]

(5) $$\begin{cases} \operatorname{dosh}k = \dfrac{1}{2}\left\{e^{k} + e^{-k}\right\} \\[2ex] \operatorname{wsth}k = \dfrac{1}{2}\left\{e^{k} - e^{-k}\right\} \end{cases}$$

---

[1] *Trattato di Algebra superiore di Giovanni Novi.* Parte prima *Analisi algebrica.* Firenze, Felice LE MONNIER, 1863. 8-ka, stronic VIII i458. Na stronicy 205, w wierszu 17.

[2] Tamże, na stronicy 246, w wierszu 7. — Używam tu znakowania znakomitego MOSSOTTI'ego przetłomaczywszy

otrzymamy naprzód

$$0 = e^{lk} - 2\,\mathrm{dosh}\,k\; e^{(l-1)k} + e^{(l-2)k}$$

$$0 = e^{-lk} - 2\,\mathrm{dosh}\,k\; e^{-(l-1)k} + e^{-(l-2)k}$$

a następnie

$$0 = \mathrm{dosh}\,lk - 2\,\mathrm{dosh}\,k\,\mathrm{dos}\,(l-1)k + \mathrm{dosh}\,(l-2)k \tag{6}$$

$$0 = \mathrm{wsth}\,lk - 2\,\mathrm{dosh}\,k\;\mathrm{wsth}\,(l-2)k + \mathrm{wsth}\,(l-2)k. \tag{7}$$

Widzimy więc ze wzorów (3), (4), (6), (7), że oznaczywszy dla krótkości $-2\,\mathrm{dos}\,k$, lub $-2\,\mathrm{dosh}\,k$ a przez a, zaś $\mathrm{dos}\,lk$, $\mathrm{wst}\,lk$, $\mathrm{dosh}\,lk$, lub $\mathrm{wsth}\,lk$ przez w_l, cztery wspomniane wzory mają wspólny kształt.

$$0 = w_l + a w_{l-1} + w_{l-2}. \tag{8}$$

Ponieważ na mocy wzorów (2) i (5) jest

$$\mathrm{dos}\,0 = 1, \qquad \mathrm{wst}\,0 = 0, \qquad \mathrm{dosh}\,0 = 1, \qquad \mathrm{wsth}\,0 = 0,$$

przeto nadając we wzorze (8) na l wszystkie znaczenia całkowite dodatnie od uważanego l aż do 2, otrzymamy układ równań:

$$\begin{array}{rl}
0 = & w_l + a w_{l-1} + w_{l-2} \\
0 = & \quad w_{l-1} + a w_{l-2} + w_{l-3} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = & \qquad\qquad w_3 + a w_2 + w_1 \\
-1 \text{ lub } 0 = & \qquad\qquad\quad w_2 + a w_1 \\
w_1 = & \qquad\qquad\qquad w_1
\end{array}$$

który rozwiązany względem w_l dowodzi oczywiście twierdzenia w razie l dodatniego

Ponieważ dostawy są funkcjami parzystemi a wstawy nieparzystemi, widocznėm jest przeto, że gdy l jest całkowitą ujemną wzory nie ulegną żadnėj zmianie w razie dostaw, a przeciwnie w razie dla utrzymania wstaw równości, należy zmienić znaki wyznaczników odpowiednich.

Twierdzenie jest więc w zupełności dowiedzionėm, zrobię jednakże jeszcze tu kilka uwag ubocznych.

---

takowe na język polski. Znakowanie to ogólnie dzisiaj przyjęte, posiada wielką zaletę że uwydatnia podobieństwo pomiędzy funkcjami kołowemi i hiperbolicznemi, ale za to przedstawia niedogodność podobną do niedogodności znakowania funkcyj kołowych, mianowicie rozwlekłość. Pożądaném byłoby znakowanie zwięzlejsze tak dla funkcyj kołowych jako téż i dla hiperbolicznych, np. jednozgłoskowe, tak jak to zrobili dla funkcyj eliptycznych Abel oraz pp. Briot i Bouquet, a mianowicie:

$$\lambda(r), \quad \mu(r), \quad \nu(r),$$

ub téż p. Despeyrous

$$S(z), \quad C(z), \quad R(z),$$

które sprawiają że wzory stają się prawie trzy razy krótsze aniżeli gdy używa się rozwlekłego znakowania Jacobi'ego

$$\sin \mathrm{am}\, z, \quad \cos \mathrm{am}\, z, \quad \Delta \mathrm{am}\, z.$$

I tak zwrócę uwagę naprzód, że tożsamość (1) prowadzi do ciekawéj tożsamości

$$\begin{vmatrix} 0, & -z+z^{-1}, & 1, & 0, & \ldots & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -z+z^{-1}, & 1, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & -z+z^{-1}, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \\ 0, & 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, & -z+z^{-1}, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & -z+z^{-1}, & 1 \\ -1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1, & -z+z^{-1} \\ z, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = z$$

gdzie pierwsza strona jest wyznacznikiem l^{go} stopnia. Dodam następnie, że jeżeli we wzorach na $\operatorname{dos} lk$ i $\operatorname{dos h} lk$ podstawimy za ostatnie składniki pierwszego wiersza pionowego a mianowicie za $\operatorname{dos} k$ i $\operatorname{dosh} k$ w pierwszym e^{ki} lub e^{-ki} a w drugim e^{k} lub e^{-k}, bo odpowiednie cztery wyznaczniki wyrażając funkcye e^{lki}, e^{-lki}, e^{lk}, e^{-lk}.

Co do wzorów (3), (4), (6), (7), to takowe można wyprowadzić z wzorów zasadniczych [1]

$$\operatorname{dos}(k_1+k_2) = \operatorname{dos} k_1 \operatorname{dos} k_2 - \operatorname{wst} k_1 \operatorname{wst} k_2 \tag{9}$$

$$\operatorname{wst}(k_1+k_2) = \operatorname{dos} k_1 \operatorname{wst} k_2 + \operatorname{wst} k_1 \operatorname{dos} k_2 \tag{10}$$

$$\operatorname{dosh}(k_1+k_2) = \operatorname{dosh} k_1 \operatorname{dosh} k_2 + \operatorname{wsth} k_1 \operatorname{wsth} k_2 \tag{11}$$

$$\operatorname{wsth}(k_1+k_2) = \operatorname{dosh} k_1 \operatorname{wsth} k_2 + \operatorname{wsth} k_1 \operatorname{dosh} k_2 \tag{12}$$

w sposob prosty. Zakładając że $k_1 = k$ i $k_2 = (l-1)k$ jest odpowiednio

$$\operatorname{dos} lk = \operatorname{dos} k \operatorname{dos}(l-1)k - \operatorname{wst} k \operatorname{wst}(l-1)k$$

$$\operatorname{wst} lk = \operatorname{dos} k \operatorname{wst}(l-1)k + \operatorname{wst} k \operatorname{wst}(l-1)k$$

$$\operatorname{dosh} lk = \operatorname{dosh} k \operatorname{dosh}(l-1)k + \operatorname{wsth} k \operatorname{wsth}(l-1)k$$

$$\operatorname{wsth} lk = \operatorname{dosh} k \operatorname{wsth}(l-1)k + \operatorname{wsth} k \operatorname{wsth}(l-1)k$$

następnie zakładając we wzorach zasadniczych $k_1 = k$, $k_2 = (l-2)k$, nadamy wyrazom drugim drugich stron ostatnich równań kolejno kształty

$$-\operatorname{wst} k \left\{ \operatorname{dos} k \operatorname{wst}(l-2)k + \operatorname{wst} k \operatorname{dos}(l-2)k \right\} = -\operatorname{dos} k \operatorname{wst} k \operatorname{wst}(l-2)k - (\operatorname{wst} k)^2 \operatorname{dos}(l-2)k$$

$$\operatorname{wst} k \left\{ \operatorname{dos} k \operatorname{dos}(l-2)k - \operatorname{wst} k \operatorname{wst}(l-2)k \right\} = \operatorname{dos} k \operatorname{wst} k \operatorname{dos}(l-2)k - (\operatorname{wst} k)^2 \operatorname{wst}(l-2)k$$

$$\operatorname{wsth} k \left\{ \operatorname{dosh} k \operatorname{wsth}(l-2)k + \operatorname{wsth} k \operatorname{dosh}(l-2)k \right\} = \operatorname{dosh} k \operatorname{wsth} k \operatorname{wsth}(l-2)k + (\operatorname{wsth} k)^2 \operatorname{dosh}(l-2)k$$

$$\operatorname{wsth} k \left\{ \operatorname{dosh} k \operatorname{dosh}(l-2)k + \operatorname{wsth} k \operatorname{wsth} k(l-2)k \right\} = \operatorname{dosh} k \operatorname{wsth} k \operatorname{dos} h(l-2)k + (\operatorname{wsth} k)^2 \operatorname{wsth}(l-2)k$$

---

[1] Tamże, na stronicach 198 do 200, 227 do 228, 245.

lecz ponieważ (¹)

$$(\mathrm{wst}k)^2 = -(\mathrm{dos}k)^2 + 1$$

$$(\mathrm{wst\,h}k)^2 = (\mathrm{dos\,h}k)^2 - 1$$

przeto drugie wyrazy drugich stron przedostatnich równań zamieniają się odpowiednio na

$$(\mathrm{dos}k)^2\,\mathrm{dos}(l-2)k - \mathrm{dos}(l-2)k$$

$$(\mathrm{dos}k)^2\,\mathrm{wst}(l-2)k - \mathrm{wst}(l-2)k$$

$$(\mathrm{dos\,h}k)^2\,\mathrm{dos\,h}(l-2)k - \mathrm{dos\,h}(l-2)k$$

$$(\mathrm{dos\,h}k)^2\,\mathrm{wst\,h}(l-2)k - \mathrm{wst\,h}(l-2)k$$

przez co otrzymamy ostatecznie

$$\mathrm{dos}\,lk = \mathrm{dos}\,k\;\mathrm{dos}(l-1)k + \mathrm{dos}k\left\{\mathrm{dos}k\;\mathrm{dos}(l-2)k - \mathrm{wst}\,k\;\mathrm{wst}(l-2)k\right\} - \mathrm{dos}\,(l-2)k$$

$$\mathrm{wst}\,lk = \mathrm{dos}\,k\;\mathrm{wst}(l-1)k + \mathrm{dos}\,k\left\{\mathrm{dos}k\;\mathrm{wst}(l-2)k + \mathrm{wst}\,k\;\mathrm{wst}(l-2)k\right\} - \mathrm{wst}(l-2)k$$

$$\mathrm{dos\,h}lk = \mathrm{dos\,h}k\;\mathrm{dos\,h}(l-1)k + \mathrm{dos\,h}k\left\{\mathrm{dos\,h}k\;\mathrm{dos\,h}(l-2)k + \mathrm{wst\,h}k\;\mathrm{wst\,h}(l-2)k\right\} - \mathrm{dos\,h}\,(l-2)k$$

$$\mathrm{wst\,h}lk = \mathrm{dos\,h}k\;\mathrm{wst\,h}(l-1)k + \mathrm{dos\,h}k\left\{\mathrm{dos\,h}k\;\mathrm{wst\,h}(l-2)k + \mathrm{wst\,h}k\;\mathrm{dos\,h}(l-2)k\right\} - \mathrm{wst\,h}\,(l-2)k$$

zkąd już wzory (3), (4), (6), (7) stają się widocznemi.

Nakoniec dodam, że gdy $l > 1$ można wyrazić wstawy przez wyznaczniki $(l-1)$ stopnia. Dosyć bowiem rozwinąć odpowiednie wyznaczniki podług pierwszego wiersza pionowego, który jest złożony z samych zer z wyjątkiem ostatniego składnika, który jest wst$k$ lub też wsth$k$. Otrzymujemy w ten sposób za pomocą wyznaczników $(l-1)$ stopnia :

$$\mathrm{wsth}\,lk - -(-1)\,\mathrm{wst}\,k \begin{vmatrix} -2\mathrm{dos}\,k, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -2\mathrm{dos}\,k, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & -2\mathrm{dos}\,k, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1, & -2\mathrm{dos}\,k \end{vmatrix}$$

$$-\mathrm{wst}\,lk = -(-1)^l\,\mathrm{wst\,h}k \begin{vmatrix} -2\mathrm{dosh}k, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -2\mathrm{dosh}k, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & -2\mathrm{dosh}k, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1, & -2\mathrm{dosh}k \end{vmatrix}$$

dla l dodatnego większego od 1, dla l ujemnego, należałoby zmienić znaki drugich stron. Dosta-

(¹) Tamże, na stronicach 205 wiersz 8 i 246 wiersz 17.

wom zaś korzystniéj jest zostawić kształt wyznaczników l^{go} stopnia, a mianowicie

$$\operatorname{dos} lk = \begin{vmatrix} 0, & -2\operatorname{dos}k, & 1, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -2\operatorname{dos}k, & 1, & 0, \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0. & 0, & 0, \ldots, & 0, & 1, & -2\operatorname{dos}k, & 1 \\ -1, & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, & 1, & -2\operatorname{dos}k \\ \operatorname{dos}k, & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{dos\,h} lk = \begin{vmatrix} 0, & -2\operatorname{dos\,h}k, & 1, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -2\operatorname{dosh}k, & 1, & 0, \ldots, & 0, & 0, & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0. & 1, & -2\operatorname{dosh}k, & 1 \\ -1, & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, & 1, & -2\operatorname{dosh}k \\ \operatorname{dos\,h}k, & 0, & 0, & 0, & 0 \ldots, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

i to dla wszelkiego l całkowitego dodatniego lub ujemnego z wyjątkiem $l = 0$.

Twierdzenie wypowiedziane na początku niniejszéj pracy można łatwo przedstawić w innym kształcie, zastępując k odpowiednio przez $\frac{\pi}{2} - k$ lub téż $\frac{\pi}{2} i - k$, stosownie do tego czy chodzi nam o wzory dla funkcyj kołowych lub téż hiperbolicznych. Przekształcone twierdzenie można tak wysłowić :

Jeżeli w wyznaczniku 1^{go} stopnia (wypisanym już poprzednio) podstawimy za a raz $-2\operatorname{wst}k$, drugi raz $2i\operatorname{wsth}k$, a następnie za pierwszy, przedostatni i ostatni składnik pierwszego wiersza pionowego podstawimy w pierwszym razie, to

$$0, \quad -1. \quad \operatorname{wst}k \qquad \text{to znowu} \qquad 0, \quad 0, \quad \operatorname{dos}k$$

i podobnież w drugim razie

$$0, \quad -1, \quad -i\operatorname{wsth}k \qquad \text{oraz} \qquad 0, \quad 0, \quad i\operatorname{dosh}k,$$

to otrzymane w ten sposób cztery wyznaczniki l^{go} stopnia wyrażają odpowiednio w razie l parzystego

$$(-1)^{\frac{l}{2}} \operatorname{dos} lk, \quad -(-1)^{\frac{l}{2}} \operatorname{wst} lk, \quad (-1)^{\frac{l}{2}} \operatorname{dosh} lk, \quad -(-1)^{\frac{l}{2}} \operatorname{wsth} lk,$$

w razie zaś l nieparzystego

$$(-1)^{\frac{l-1}{2}} \operatorname{wst} lk, \quad (-1)^{\frac{l-1}{2}} \operatorname{dos} lk, \quad -(-1)^{\frac{l-1}{2}} i \operatorname{wsth} lk, \quad (-1)^{\frac{l-1}{2}} i \operatorname{dosh} lk.$$

W razie l ujemnego i parzystego należałoby zmienić znaki przy drugim i czwartym wyznaczniku w razie zaś l ujemnego i nieparzystego tylko przy pierwszym i trzecim.

W razie gdy l różni się od jedności, można zniżyć wyznaczniki drugie i czwarte z l^{go} do $l-1^{go}$ stopnia, rozwijając je podług składników pierwszego wiersza pionowego, albowiem z pomiędzy tych składników tylko ostatnie różnią się od zera.