O ZASADZIE
ZACHOWANIA POWIERZCHNI

PRZEZ

EDWARDA HABICHA

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych, dnia 8 marca 1877 roku.)

I

Niech będzie OM prosta poruszająca się na płaszczyznie, a mająca długość zmienną r. Oznaczając przez x, y, ξ, η i θ współrzędne końców M i O tej prostej i kąt jaki ona tworzy z osią stałą xx, mamy

$$
(1) \qquad \begin{cases} r\cos\theta = x - \xi \\ r\sin\theta = y - \eta \end{cases}
$$

i po zróżniczkowaniu

$$
(2) \qquad \begin{cases} \left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \\ \left(\frac{dz}{d\theta}\sin\theta - r\cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{dt}. \end{cases}
$$

Ilości $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ są składowemi prędkości, z jaką się poruszają punkta M i O podczas ruchu prostéj. Tak samo, różniczkując równanie (2) znaleźlibyśmy składowe przyspieszeń odpowiadających punktom M i O, mianowicie $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ ... i t. d.

Przypuśćmy (fig. 1) że droga przebieżona przez punkt O jest obwiednią (E) kolejnych położeń linii prostéj OM, a tém samém, że O jest obecnie punktem dotknięcia (¹). Na zasadzie tego przypuszczenia

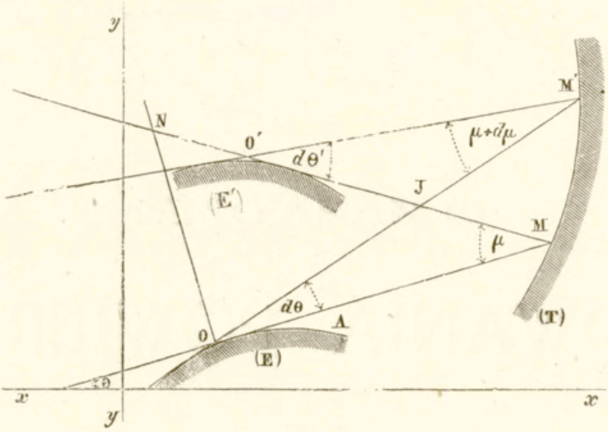

Fig. 1.

znajdziemy łatwo odnosząc się do figury **1**.

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{d\sigma}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\cos\theta, \\[2ex] \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{d\sigma}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta. \end{cases}$$

gdzie $d\sigma$ oznacza element łuku obwiedniéj (E). Biorąc teraz za osie współrzędne styczną OM i normalną ON obwiedniéj (E) i oznaczając przez v_r, v_p, j_r, j_p,... składowe prędkości v, przyspieszenia j, i t. d., stosownie do kierunku, otrzymamy

$$(4)\qquad \begin{cases} v_r = \dfrac{dr - d\sigma}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \\[2ex] v_p = r\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} j_r = \left(\dfrac{d^2r - d^2\sigma}{d\theta^2} - r\right)\dfrac{d\theta^2}{dt^2} + \dfrac{dr - d\sigma}{d\theta}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\[2ex] j_p = \dfrac{2dr - d\sigma}{d\theta}\dfrac{d\theta^2}{dt^2} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

. . . .

Nie zatrzymując się nad rozbiorem tych wartości przechodzimy natychmiast do wyznaczenia warunków, które koniecznie zadowolnić należy, jeżeli przyśpieszenie j a raczéj prosta przedstawiająca jego kierunek ma obwijać krzywę (E).

(¹) *Annali di Matematica pura*, etc., Milano, 1868, str. 134, diretti de F. Briochi e L. Cremona. — *Roczników Towarzystwa Naukowego Krakowskiego* tom XXXIX, 1868. — *Les Mondes*, t. XIV, 1867, p. 84, etc.

W tym celu przyjmiemy $j_p = 0$; zkąd wynika

$$2\frac{dr}{r} + \frac{d^2\theta}{d\theta} - \frac{d\sigma}{r} = 0, \tag{6}$$

albo całkując

$$2\log r + \log\frac{d\theta}{dt} = \int\frac{d\sigma}{r} + C, \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = C_1 e^{\int\frac{d\sigma}{r}} \tag{7}$$

Ponieważ znowu element powierzchni płaskiéj zrodzonej ruchem promienia wodzącego OM jest

$$d\Omega = \frac{1}{2}r^2 d\theta, \tag{8}$$

a *prędkość powierzchniowa*

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}, \tag{9}$$

wynika z połączenia równań (7) i (9)

$$2\frac{d\Omega}{dt} = C_1 e^{\int\frac{d\sigma}{r}}, \tag{10}$$

albo też, po zróżniczkowaniu tego ostatniego i podzieleniu go przez (10):

$$r\frac{d^2\Omega}{d\Omega} = d\sigma. \tag{11}$$

Związek (10) przedstawia warunek, na mocy którego krzywa (E) jest obwiednią stopniowych kierunków przyspieszenia.

Równanie (11) jest szczególném wyrażeniem prędkości punktu dotknięcia O w funkcyi przyspieszenia i prędkości powierzchniowych $\left(\frac{d^2\Omega}{dt^2} \text{ i } \frac{d\Omega}{dt}\right)$, tudzież promienia wodzącego r.

Ażeby kierunek przyspieszenia opisywał powierzchnie proporcyonalne do czasu, trzeba żeby prędkość $\frac{d\Omega}{dt}$ była stałą w równaniu (10), a tém samém żeby (11)

$$\frac{d^2\Omega}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{r} = 0, \tag{12}$$

Zatém musimy mieć albo $d\sigma = 0$, to jest punkt O musi być *środkiem stałym*; albo też $r = \infty$, to jest *przyspieszenie musi mieć stały kierunek*, co sprowadza się do tego że punkt zbieżności znajduje się w nieskończoności. Zatem:

Prosta przedstawiająca przyspieszenie może wtedy tylko przebiegać powierzchnie proporcyonalne do czasu, gdy przechodzi ustawicznie przez pewien punkt stały położony na odległości skończonéj albo w nieskończoności.

W traktatach Mechaniki wystawia się i dowodzi *zasada zachowania powierzchni* w formie następującéj: «gdy siła (albo jéj rzut na płaszczyznie) przechodzi ustawicznie przez pewien punkt stały, jéj kierunek opisuje między tym punktem a punktem przyczepienia powierzchnie proporcyonalne do czasu i odwrotnie». Ale nie dowodzi się wcale, że przyspieszenie nie może opisywać powierzchni proporcyonalnych do czasu między drogą (T) i obwiednią jéj stopniowych położeń (E). Powyższe dowodzenie dopełnia właśnie w tym względzie twierdzenia powierzchni okazując dobitnie, że przypadek zazwyczaj uważany jest jedyny.

Ponieważ przypuszczając

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{iłości stałéj}\,; \tag{13}$$

można nadać ruchowi punktu po krzywéj (T) takie prawo, że promień wodzący uważany między tą krzywą i jakąkolwiek obwiednią (E) będzie przebiegał przestrzenie proporcyonalne do czasu, należało dowieść, że kierunek przyspieszenia (siły) może zchodzić się z tymi promieniami wodzącymi *tylko* w takim razie, gdy wychodzą z punktu położonego w odległości skończonéj albo nieskończonéj.

Dla dopełnienia tych uwag dowiedziemy teraz, że mając dany ruch punktu, to jest *kształt drogi przebieżonéj i prawo ruchu na téj drodze* można zawsze wyznaczyć warunki, którym czynią zadość proste opisujące powierzchnie proporcyonalne do czasu, gdy się poruszają wspólnie z pomienionym punktem ruchomym.

Wprowadzając warunek (13) do równania (5) będziemy mieli

$$j_p = -\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

co dowodzi, że przyspieszenie dośrodkowe punktu dotknięcia O jest równe i wprost przeciwne składowéj przyspieszenia punktu M w tymże samym kierunku.

Ruch punktu jest zupełnie określony gdy się zna drogę przebieżoną

$$s = f(\theta), \tag{14}$$

tudzież prawo ruchu,

$$s = \varphi(t), \tag{15}$$

gdzie s oznacza łuk mierzony począwszy od pewnego punktu stałego A, a θ kąt stycznéj MO z pewnym stałym kierunkiem xx; tak że $d\theta$ jest kątem styczności.

Z równań (14) i (15) wypada

$$f(\theta) = \varphi(t) \tag{16}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \rho = f'(\theta), \tag{17}$$

$$\frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\theta}{dt} = v = \varphi'(t)\,, \tag{18}$$

a rugując θ i t

$$V(v, \rho) = 0\,, \tag{19}$$

Równanie (19) jest *związkiem charakterystycznym*, malującym stosunek jaki zachodzi między elementami naturalnymi, które określają drogę przebieżoną, a prawem ruchu na téjże drodze, gdy pomieniony ruch ma posiadać pewną własność szczególną, choć się nie zna ani drogi ani prawa ruchu. — Gdy zaś droga jest znaną, znajdziemy za pomocą równania (19) prędkość v w każdéj chwili a tém samém prawo ruchu i nawzajem.

Gdyby droga była krzywą o podwójnéj krzywiznie, trzebaby jeszcze dołączyć do równań (14) i (15) równanie

$$s = \Psi(\tau) \tag{20}$$

przedstawiające związek jaki zachodzi między łukiem s i kątem skręcenia τ; w takim razie rugowanie ilości θ i t doprowadziłoby do dwóch równań podobnych do (19).

Każdy związek między pewnym elementem *cynematycznym* : prędkością, przyspieszeniem, i t. d. a pewnym elementem *geometrycznym* drogi przebieżonéj, jako to promieniem krzywizny, kątem styczności, i t. d. ma oczywiście charakter związku (19). Gdy np. λ jest kątem jaki tworzy przyspieszenie j z normalną do drogi, mamy

$$j \cos\lambda = \frac{v^2}{\rho} = \rho\frac{d\theta^2}{dt^2} = v\frac{d\theta}{dt}, \tag{21}$$

$$j \sin\lambda = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}, \tag{22}$$

zkąd

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{dv}{v d\theta}. \tag{23}$$

Jeżeli styczna kąta λ jest stała

$$\lambda = c, \tag{a}$$

$$\frac{dv}{v} = c d\theta,$$

$$v = v_0 e^{c\theta}. \tag{b}$$

Oto jest związek charakterystyczny ruchu, w którym przyspieszenie j tworzy kąt stały z drogą.

Gdyby się znało związek (19) możnaby wyrazić tang λ przez funkcyę v, $\rho = \frac{ds}{d\theta}$, i $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d^2s}{d\theta^2}$, a nawet przez same tylko elementa drogi, gdy v jest funkcyą wyraźną tychże elementów.

Przypuśćmy teraz, że krzywa (T) jest zrodzona ruchem punktu M należącego do prostéj OK (fig. 2), która toczy się po jéj rozwiniętéj; i że druga prosta MO′ bierze udział w tym ruchu obracając się w punkcie M jak na zawiasach. Ruch téj prostéj MO′ jest więc podwójny : 1° ruch obrotowy około środka M względem prostéj OM i ruch obrotowy chwilowy około O wspólnie z tą prostą. Zatém ruch wypadkowy będzie obrotowy około środka chwilowego O_1 leżącego na kierunku prostéj, która łączy punkt O z punktem M.

Niech będzie

$$\mu = OO', \quad MO_1 = n.$$

Wtedy

$$OO_1 d\theta = MO_1 d\mu,$$

bo μ maleje gdy θ rośnie; daléj

$$(\rho - n)d\theta = -n d\mu$$

(24) $$\frac{d\mu}{d\theta} = 1 - \frac{\rho}{n}.$$

(25) $$n = \rho\left(1 - \frac{d\mu}{d\theta}\right)^{-1}.$$

Punkt zetknięcia O′ prostéj MO′ z jéj obwiednią (E′) jest rzutem środka chwilowego obrotu O_1 na tę

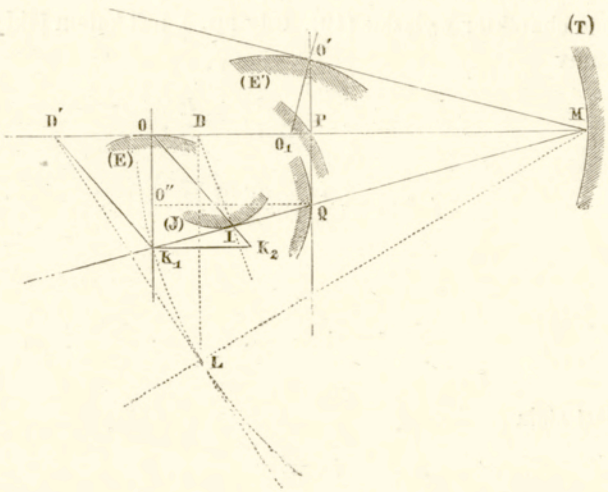

Fig. 2.

prostą. Nazywając $r' = MO'$ i $d\theta'$ kąt styczności obwiedniéj (E′) odpowiadający kątowi $d\theta$, mamy

(26) $$r' = n \cos \mu$$

i (fig. 1)

$$MIM' = \mu + d\theta = \mu + d\mu + d\theta',$$

(27) $$d\theta' = d\theta - d\mu,$$

a z równań (25) i (27) wypada

(28) $$ds = \rho d\theta = n d\theta'.$$

Za pomocą powyższych wzorów można znaleźć obwiednię prostéj MO′ poruszającéj się wspólnie z punktem M i spełniającéj pewne warunki z góry oznaczone.

I tak np., jeżeli prosta MO′ przedstawia kierunek przyspieszenia całkowitego j, znamy

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{dv}{v d\theta},$$

to jest znamy jéj pochylenie do promienia krzywizny. Żeby zaś znaleźć punkt zetknięcia O′ trzeba wyznaczyć $\frac{d\lambda}{d\theta}$, za pomocą którego znajdziemy n i r'.

Gdyby można było za pomocą związku charakterystycznego (19) wyrazić $\operatorname{tang}\lambda$ przez ρ i ρ', a temsamém przedstawić $\frac{d\lambda}{d\theta}$, n i r w kształcie funkcyj tychże ilości i trzeciéj zmiennéj $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{d\rho'}{d\theta} = \rho''$;

możnaby było nakreślić obwiednię przyspieszeń znając środek krzywizny drogi, tudzież środek krzywizny jéj pierwszéj i drugiéj rozwiniętéj (fig. 2, punkta O_1, K_1, K_2). Tym sposobem sprowadziłoby się wszystko do zadania czysto geometrycznego.

Przypuśćmy, naprzykład, że

(c) $$v_\rho = \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{ilości stałéj}$$

jest równaniem charakterystyczném ruchu. Mamy

(d) $$\operatorname{tang}\lambda = -\frac{\rho'}{\rho},$$

co dowodzi, że przyspieszenie przechodzi przez środek krzywizny rozwiniętéj drogi MK_1.

Różniczkując teraz (d) i mając na uwadze związki (25) i (d), otrzymujemy

(e $$n(\rho + \rho'') = \rho^2 + \rho'^2,$$

ztąd (26)

(f) $$r' = n \cos\lambda \frac{\rho\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho + \rho''};$$

to znaczy, że $\rho + \rho'$ jest średnią arytmetyczną ilości n i $\rho + \rho''$, i że r' jest czwartą proporcyonalną ilości ρ, $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ i $\rho + \rho''$ ($r' = MI$, $n = MD$, $ML = MK_1$, $MD' = \rho + \rho''$, fig. 2).

Ponieważ

$$\frac{MI}{MO} = \frac{IK_1}{K_1K_2} \quad \text{albo} \quad \frac{r'}{\rho} = \frac{\sqrt{\rho^2 - \rho'^2} - r'}{\rho''},$$

możemy ułożyć następne twierdzenie z geometryi. *Ze punkt zetknięcia się prostéj łączącéj punkt* M *danéj linii* (T) *z odpowiednim środkiem krzywizny jéj rozwiniętéj* (K_1) *znajduje się na przecięciu téjże prostéj z drugą prostą łączącą środek krzywizny* (O) *danéj linii* (T) *ze środkiem krzywizny* (K_2) *jéj drugiéj rozwiniętéj.*

Spiralna logarytmiczna, epicyklojdy, rozwijająca koła, stanowią właśnie ten przypadek, w którym obwiednia przyspieszeń sprowadza się do jednego punktu.

Możnaby łatwo uogólnić przykład powyżéj przytoczony, ale nie zatrzymując się dłużéj na tym punkcie zauważymy tylko, że w przypadku uważanym (a) mamy

$$\operatorname{tang}\lambda = \text{stałéj}, \qquad \frac{d\lambda}{d\theta} = 0, \qquad \lambda = \text{stałéj}.$$

$$\rho = n, \qquad r' = \rho \cos\lambda = \rho \text{ stałą}.$$

A więc punkt zetknięcia O' jest rzutem środka krzywizny i promień wodzący r' jest w stosunku stałym do ρ.

Przejdźmy teraz do głównego przedmiotu niniejszego rozbioru, mianowicie do oznaczenia warunków, na mocy których prosta MO' (fig. 2) może opisywać powierzchnie proporcyonalne do czasu między obwiednią (E') i drogą (T) przebieganą przez jeden z punktów téjże prostéj. Przypuszczając więc, że to jest możebném, napiszemy

$$(29) \qquad \frac{1}{2} r'^2 \frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} = \mathrm{A} = \text{stałéj}$$

i pozostaje wyznaczyć w każdéj chwili ruchu kąt $\mu = \mathrm{OMO}'$ utworzony przez prostę MO' i normalnę MO, tudzież punkt dotknięcia O' za pomocą $n = \mathrm{MO}_1$, albo $r' = \mathrm{MO}'$.

Zważywszy że $r' \dfrac{d\theta'}{dt} = v \cos\mu$, otrzymamy z równania (29)

$$(30) \qquad r'v \cos\mu = 2\mathrm{A}.$$

Związek ten przedstawia następujący ogólny warunek : *że prędkość ruchu uważanego ma być odwrotnie proporcyonalną do prostopadłéj spuszczonéj ze środka zmiennego* O' *na jéj kierunek*. Ale

$$(31) \qquad \mathrm{MP} = p = r' \cos\mu = \frac{2\mathrm{A}}{v},$$

co dowodzi, że prosta posiadająca prędkość powierzchniową A dotyka odpowiednią obwiednię na prostopadłéj do promienia krzywizny (31). Jeżeli więc

$$\frac{2\mathrm{A}}{v} = r' \cos\mu = p \gtreqless \rho.$$

$$\rho v \gtreqless 2\mathrm{A},$$

punkt P będzie leżał z jednéj albo z drugiéj strony środka krzywizny, albo téż zejdzie się z tymże środkiem.

Z równań (30) i (21) wypada

$$j \cos\mu = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4\mathrm{A}^2}{\rho r'^2 \cos^2\mu}$$

$$(32) \qquad j = \frac{4\mathrm{A}^2}{\rho r'^2 \cos^2\mu \,.\, \cos\lambda}.$$

Gdy $\lambda = \mu$, prosta zchodzi się z przyspieszeniem i otrzymujemy wtedy znane już wyrażenie odpowiadające jednemu środkowi.

Mając na uwadze związki (24), (26) i (30) znajdziemy

$$(33) \qquad \frac{d\mu}{d\theta} = 1 - \frac{\rho}{n} = 1 - \frac{\rho v \cos^2\mu}{2\mathrm{A}} \text{ [1]},$$

tudzież (27)

$$(34) \qquad \frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{\rho v \cos^2\mu}{2\mathrm{A}},$$

---

[1] Możnaby otrzymać wzór (33) wychodząc z równania (30)

$$r'^2 \frac{d\theta'^2}{dt^2} = v^2 \cos^2\mu = 2\mathrm{A}\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \,.\, 2\mathrm{A}\left(1 - \frac{d\mu}{d\theta}\right) = \frac{v}{\rho} \,.\, 2\mathrm{A}\left(1 - \frac{d\mu}{d\theta}\right);$$

wybraliśmy jednak inną drogę dla większéj ogólności.

Zcałkowawszy równanie (33) można oznaczyć kąt μ, gdy się ma kształt drogi przebieżonéj i prawo ruchu punktu, to jest gdy ρ, v i θ są danemi zadania. Całka ta istnieje, bo wyrażenie (33) może być uważane jako równanie różniczkowe pierwszego rzędu o dwóch zmiennych [(16), (17), (18)]; a więc istnieją proste opisujące powierzchnie proporcyonalne do czasu i to z prędkością powierzchniową daną.

Ale nieznając nawet całki ogólnéj wyrażenia (33) możemy znaleźć jéj wartość szczególną w przypadku gdy $\rho v < 2A$, bo

$$\frac{d\mu}{d\theta} = 1 - \frac{\rho v \operatorname{dos}^2\mu}{2A} = 0 \tag{35}$$

daje

$$\rho \operatorname{dos}\mu.\ v \operatorname{dos}\mu = 2A = \rho \operatorname{dos}\mu \frac{2A}{r'},$$

zkąd

$$r' = \rho \operatorname{dos}\mu. \tag{36}$$

Punkt zetknięcia się prostéj granicznéj z jéj obwiednią jest rzutem środka krzywizny drogi na tę prostę. Tym sposobem łatwo jest nakreślić prostę graniczną, bo punkt zetknięcia znajduje się na przecięciu prostopadłéj do promienia krzywizny wyrażonego przez $MP = \frac{2A}{v}$ z obwodem koła nakreślonego na tymże promieniu ρ uważanym za średnicę.

I tak np. w ruchu eliptycznym planet: od punktu dosłonecznego (perigée) aż do punktu O rzutu środka przyciągania (ogniska elipsy) na powierzchni rozwiniętéj orbity mamy $r' \operatorname{dos}\mu < \rho$; w punkcie O, $r'\operatorname{dos}\mu = \rho'$, a z drugiéj strony tego punktu $\rho > r' \operatorname{dos}\mu$. A więc z obydwóch stron punktu dosłonecznego aż do punktu O i drugiego symetrycznego względem osi elipsy znajdują się proste graniczne.

Gdy mamy tylko jeden środek przyciągania, warunek

$$\rho \operatorname{dos}\mu = r'$$

sprawdza się w sposób stały tylko w spiralnéj logarytmicznéj i w kole; gdyż te krzywe są jedyne, dla których $\rho = n = \frac{r'}{\operatorname{dos}\mu}$.

Z równań (35) i (31) wypada

$$\operatorname{dos}\mu = \pm \sqrt{\frac{2A}{\rho v}} = \pm \sqrt{\frac{p}{\rho}}.$$

Gdy obwiednia (E) jest punktem można znając stopowę (podaire) drogi względem tego punktu, ułożyć następujące znane wyrażenie

$$\rho = p + \frac{d^2p}{d\theta^2}$$

i wyciągnąć z niego kąt prostéj granicznéj w funkcyi θ.

Przytoczymy tu kilka prostych przykładów dla oznaczenia dostawy kąta μ.

$$(a')\quad \begin{cases} \text{Jeżeli } v = \text{stałéj} = c, & \operatorname{dos}\mu = \pm\sqrt{\dfrac{2A}{c\rho}} \\ \text{Jeżeli } v = m\rho = \rho\dfrac{d\theta}{dt}, & \dfrac{d\theta}{dt} = m = \text{stałéj}, \qquad \rho \operatorname{dos}\mu = \pm\sqrt{\dfrac{2A}{m}} = \text{stałéj} \\ \text{Jeżeli } v\rho = 2A_0 = \text{stałéj} & \operatorname{dos}\mu = \pm\sqrt{\dfrac{A}{A_0}} = \text{stałéj}. \end{cases}$$

W tym ostatnim przypadku który rozbierzemy szczegółowo, a który ma wtedy miejsce gdy $\rho\dfrac{d\theta^2}{dt^2} =$ stałéj, to jest gdy promień krzywizny opisuje powierzchnie proporcyonalne do czasu, — proste pochylone ciągle jednakowo do promienia krzywizny posiadają prędkości powierzchniowe stałe.

Równanie (33) dowodzi, że istnieją takie proste, które poruszając się wspólnie z punktem ruchomym opisują powierzchnie proporcyonalne do czasu, powierzchnie zawarte między drogą (T) i ich obwiedniemi (E'). — W przypadku szczególnym, gdy jedna z tych prostych zchodzi się z kierunkiem przyspieszenia, jéj obwiednia jest punktem.

Wiadomo także, że punkta zetknięcia takiéj prostéj z jéj obwiednią znajdują się na prostopadłych do promienia krzywizny oznaczonych przez

$$MP = p = r' \operatorname{dos}\mu = \frac{2A}{v}.$$

Szukajmy teraz obwiedniéj linii prostopadłéj PO' (fig. 2.). Zauważmy w tym celu, że ta prosta posiada dwa ruchy, mianowicie ruch postępowy w kierunku równoległym do promienia krzywizny i ruch obrotowy około środka krzywizny O. Zatém ruch wypadkowy będzie ruchem obrotowym koło środka chwilowego O'', leżącego na normalnéj OK_1 w odległości OO' oznaczonéj przez

$$\frac{d\theta}{dt} \cdot OO'' = \frac{dp}{dt} \quad \text{zkąd} \quad OO'' = \frac{dp}{d\theta}.$$

Punkt zetknięcia Q, będący rzutem O'', na prostéj PQ, znajduje się w odległości PQ = OO''.

Mamy także

$$\operatorname{sty} PMQ = \frac{OP}{MP} = \frac{dp}{pd\theta};$$

ale

$$vp = 2A,$$

$$\frac{dp}{pd\theta} + \frac{dv}{vd\theta} = 0,$$

a że p maleje gdy v rośnie, i na przemian,

$$\text{kąt } PMQ = \lambda,$$

to jest że *punkt zetknięcia prostopadłéj* O'P *z jéj obwiednią znajduje się na kierunku przyspieszenia całkowitego.*

Ztąd wynika następujące twierdzenie : *jeżeli na normalnych do pewnéj drogi odetnie się długości odwrotnie proporcyonalne do odpowiednich prędkości, i jeżeli z punktów tak otrzymanych wystawi się prostopadłe do normalnych, każda z tych ostatnich dotknie swéj obwiedniéj w punkcie, przez który przechodzi odpowiedni kierunek przyspieszenia.*

Ponieważ twierdzenie to jest prawdziwe dla wszystkich prędkości powierzchnionych, wypada że obwiednie prostopadłych QP odpowiadające tym wszystkim prędkościom przecinają styczne do obwiedniéj (I) całkowitego przyspieszenia j, pod kątami równemi kątowi drogi (T).

Krzywe te nazywamy *podobnemi do siebie i względem obwiedniéj* (I) ([1]).

Co się zaś tyczy obwiednich linij prostopadłych, te są przeciwstopowemi krzywych stopowych (P), których promienie wodzące OP względem obwiedniéj (E) mają za wyrażenie

$$OP = \rho - \frac{2A}{v} .$$

Zastosujemy to do przypadku szczególnego, w którym równanie charakterystyczne ruchu ma kształt

$$V(v,\rho) = v\rho = \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = 2A_0 = \text{stałéj},$$

to jest gdy promień krzywizny opisuje powierzchnie proporcyonalne do czasu.

Jak widzieliśmy, przyspieszenie tworzy w tym przypadku z normalną kąt, którego styczna jest

(*d*) $$\text{sty}\,\lambda = -\frac{\rho'}{\rho} ,$$

co znaczy, że jéj kierunek przechodzi przez środek krzywizny obwiedniéj drogi (T) ([2]).

Stosując przypuszczenie (*c*) do związku (33) mamy

$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{A - A_0 \,\text{dos}^2\mu}{A}$$

(*h*) $$d\theta = \frac{d\,\text{sty}\,\mu}{m + \text{sty}^2\mu} \qquad m = \frac{A - A_0}{A} .$$

Mamy do rozebrania trzy przypadki, odpowiadające przypuszczeniom $A \gtreqless A_0$.

Jeżeli $A > A_0$, otrzymujemy po zcałkowaniu (*h*) i zredukowaniu

(*i*) $$\text{sty}\,\mu = \sqrt{m}\,.\ \ \text{sty}\sqrt{m}\,(\theta + c).$$

Jeżeli się jeszcze przypuści, że prosta (*i*) zchodzi się z przyspieszeniem, a tém samém, że to przyspieszenie przechodzi przez pewien punkt stały, znajdziemy zrównawszy (*d*) z (*i*) i zcałkowawszy

(*k*) $$\rho = \text{dos}\sqrt{m}\,(\theta + c).$$

Równanie naturalne, obejmujące epicyklojdy.

([1]) *Annali di Matematica*, tom II, str. 139. — *Roczników T. N. Krakowskiego* tom XXXIX, 1868.

([2]) Nicolaides, *Nouvelles annales de mathématiques*. Paris, t. XI, 1872, p. 288.

Jeżeli $A = A_0$, mamy podług (h)

$$(l) \qquad \text{doty}\,\mu + \theta + c = 0.$$

W razie gdy prosta zchodzi się z przyspieszeniem, otrzymujemy tą samą drogą jak poprzednio

$$(m) \qquad \rho_1 = c_1\,(\theta + c).$$

Równanie naturalne rozwijającéj koła.

Wreszcie, jeżeli $A < A_0$, znajdujemy całkując (h)

$$(n) \qquad \text{sty}\,\mu = \sqrt{m}\,\frac{e^{2\sqrt{m}(\theta+c)} - 1}{e^{2\sqrt{m}(\theta+c)} + 1}.$$

Kładąc $\theta = \infty$ mamy w granicy

$$(o) \qquad \text{sty}\,\mu = \sqrt{-m} = \sqrt{\frac{A_0 - A}{A}}.$$

Równanie naturalne linii, dla któréj prosta (n) zchodzi się z przyspieszeniem jest

$$(p) \qquad \rho = c_1\left\{e^{\sqrt{m}(\theta+c)} + e^{-\sqrt{m}(\theta+c)}\right\}.$$

Obejmuje ono spiralnę logarytmiczną i koło; w tych krzywych kąt μ jest stały.

Jakakolwiek by była droga (T) z przypuszczenia $\rho v = 2A_0$ wynika że

$$OP = v = \rho - p = \rho - \frac{2A}{v} = \rho\,\frac{A - A_0}{A_0},$$

to jest, że promień wodzący $OP = v$ jest w stosunku stałym do promienia krzywizny, a ztąd twierdzenie geometryczne następujące : *że prostopadłe wgstawione na wszystkich normalnych danéj krzywéj* (T) *przez punkta* (P) *wyznaczone przez promienie wodzące* $OP = v = C\rho$, *proporcyonalne do promieni krzywizny; dotykają się swych obwiednich w punktach przecięcia z prostą łączącą punkt odpowiedni* M *krzywéj* (T) *ze środkiem krzywizny jéj rozwiniętéj.*

Zauważmy tu, odnosząc się do przypadku, w którym przyspieszenie przechodzi przez pewien punkt stały, (m), (p) [1], że

$$pv = vr'\,\text{dos}\,\mu = 2A, \quad \rho v = 2A_0$$

$$\rho = \frac{A_0}{A}\,r'\;\text{dos}\,\mu = \frac{A_0}{A}\,p,$$

to jest że *w tych krzywych promień krzywizny jest proporcyonalny do promienia wodzącego stopowéj drogi względem tegoż środka.*

Tylko w razie, gdy kąt μ = stałéj, ρ jest proporcyonalne do promienia wodzącego r samejże drogi. Ma to miejsce tylko dla kategoryi (p), i to tylko dla spiralnéj logarytmicznéj i koła.

---

[1] Co do przyspieszeń środkowych w ogólności patrz część II.

Powyższe dowodzenie stosuje się nie tylko do drogi płaskiéj, ale i do rzutu ruchu w przestrzeni na płaszczyznie.

W przypadku ogólnym, gdy punkt ruchomy przebiega drogę o podwójnéj krzywiznie, kierunek przyspieszenia tworzy powierzchnię skośną mającą tę drogę za jednę z kierownic.

Ponieważ przyspieszenie leży w płaszczyznie ściśle stycznéj drogi, wypada, że ta płaszczyzna jest styczną do powierzchni skośnéj, to jest że droga punktu ruchomego jest linią asymptotyczną powierzchni skośnéj utworzonéj przez przyspieszenia.

Ażeby więc ruch rzucony na płaszczyznie wypełniał warunki « zasady zachowania powierzchni », owa powierzchnia skośna musi mieć jedną kierownicę prostolinijną i prostopadłą do płaszczyzny.

Ponieważ zaś powierzchnia skośna może mieć jednę, dwie albo nawet trzy kierownice prostolinijne, należy rozważyć, czy przyspieszenia mogą utworzyć takie powierzchnie, to jest czy mogą być naraz dwie albo trzy płaszczyzny rzutu, do których by się stosowała zasada zachowania powierzchni.

Jest to oczywiście możebném dla jednéj kierownicy prostolinijnéj; niemożebném zaś dla trzech, bo linie asymptotyczne hiperbolojdy są liniami prostemi. To samo się stosuje do dwóch kierownic prostych i płaszczyzny kierowniczéj (parabolojdy hiperbolicznéj). Ale czy w ogóle można przypuścić istnienie dwóch kierownic prostolinijnych?

Gdy droga T jest krzywą o podwójnéj krzywiznie, kierunki przyspieszeń tworzą powierzchnię skośną i zasada zachowania powierzchni nie daje się wtedy zastosować. Ale trzeba jeszcze sprawdzić czy nie ma takich prostych, któreby postępując w ślad punktu ruchomego rodziły powierzchnie rozwijalne.

Otóż proste takie istnieją; a żeby tego dowieść uważmy trzy związki podobne do (1)

$$(37)\qquad \begin{cases} x-\xi=r\cos\alpha \\ y-\eta=r\cos\beta \\ z-\zeta=r\cos\gamma \end{cases}$$

przedstawiające ruch prostéj (w przestrzeni) któréj długość zmienna jest $MO=r$.

Postępując teraz tą samą drogą co dla krzywych płaskich, zróżniczkujemy dwa razy równania (37), zkąd wypadną składowe przyspieszenia całkowitego wzdłuż trzech osi; przypuścimy następnie, że krzywa jaką tworzy punkt $O(\xi, \eta, \zeta,)$ jest obwiednią (E) prostéj ruchoméj, to jest krawędzią zwrotu powierzchni rozwijalnéj zawierającéj drogę (T); wreszcie przeniesiemy osie współrzędne w taki sposób, aby jedna z nich zchodziła się z prostą ruchomą, druga z prostopadłą MO nakreśloną na płaszczyznie stycznéj do powierzchni rozwijalnéj; a trzecia z prostopadłą do dwóch pierwszych osi, to jest do płaszczyzny stycznéj do tejże powierzchni rozwijalnéj.

Ze składowych j_r, j_p, j_q, całkowitego przyspieszenia j wzdłuż trzech osi, dwie pierwsze, to jest: j_r i j_p wyrażają się przez wzóry zupełnie podobne do wzorów (5) odnoszących się do krzywych płaskich, trzecia zaś będzie mieć za wyrażenie

$$(38)\qquad j_q=r\,\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\tau}{dt}.$$

gdzie $d\tau$ oznacza kąt między dwiema nieskończenie blizkiemi płaszczyznami stycznemi do powierzchni rozwijalnéj utworzonéj ruchem prostéj $MO = r$ (¹). Powyższe wyrażenia składowych przyspieszenia dowodzą same przez się, że tylko składowa j_q zależy od skręcenia krawędzi zwrotu (E).

Przypuściwszy teraz, że promień wodzący $OM = r$ opisuje powierzchnie proporcyonalne do czasu (13) mamy

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{stałéj}, \tag{39}$$

i wyznaczymy tym sposobem prawo ruchu punktu po krzywéj (T).

Tak samo, przypuszczając

$$j_q = 0,$$

znajdziemy warunki, którym trzeba zadość uczynić, aby składowa j_r obwijała krawędź zwrotu (E). — Warunki te przedstawia równanie (7), tak samo jak w krzywych płaskich.

Skoro więc związek (7) ma miejsce, przyspieszenie całkowite j, leży w płaszczyznie prostopadłéj do płaszczyzny stycznéj (do powierzchni rozwijalnéj) poprowadzonéj przez rodzącą (j_r), albo też mówiąc inaczéj : ta rodząca OM jest co do kierunku rzutem ortogonalnym przyspieszenia całkowitego na uważanéj powierzchni rozwijalnéj.

Jeżeli przypuścimy jeszcze oprócz tego, że promień wodzący $r = OM$ opisuje powierzchnie proporcyonalne do czasu, znajdziemy tak samo jak w krzywych płaskich (12) następujący warunek : punkt zetknięcia O musi być środkiem stałym położonym w odległości skończonéj albo nieskończonéj, to jest powierzchnia rozwijalna musi być płaska albo stożkowa (²).

Jak widzimy, zachodzi wielkie podobieństwo między wypadkami tyczącymi się krzywych o podwójnéj krzywiznie uważanych jako linie nakreślone na powierzchniach rozwijalnych, a wypadkami poprzednio znalezionymi dla dróg płaskich ; — polega ono zaś na tém, że po rozwinięciu na płaszczyznie powierzchni rozwijalnéj, otrzymujemy zawsze z jéj krawędzi zwrotu tę samą krzywę, jakikolwiek by był kąt skręcenia $d\tau$; a tém samém, że drogi mające na powierzchni rozwijalnéj te same promienie wodzące r tworzą jednakowe krzywe płaskie po rozwinięciu powierzchni.

Wyrażenia przyspieszeń składowych uważanych po rozwinięciu powierzchni wzdłuż promienia wodzącego i wzdłuż prostopadłéj są zupełnie takie same, jak wyrażenia składowych j_r i j_p przyspieszenia j uważanych w odpowiednich kierunkach na płaszczyznie stycznéj do powierzchni rozwijalnéj.

Tak więc przy rozciąganiu powierzchni rozwijalnéj na płaszczyznie, krawędź zwrotu i droga punktu

---

(¹) Łatwo jest znaleźć to wyrażenie mając na uwadze stosunki jakie zachodzą między kątami utworzonemi przez krawędzie

$$(j_r, j_p, j_q).$$

Patrz : Bertrand, *Traité du calcul différentiel et intégral*, t. I, 1864, p. 623. — Frenet, *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal*, 2ᵉ édition. Paris, 1866, p. 175. — Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*, t. I, p. 407, etc., etc.

(²) Na téj ostatniéj własności polega uogólnienie « zasady zachowania powierzchni », podane przez Nicolaides, *Les Mondes*, t. IX, 1865, p. 294.

ruchomego zamieniają się na nasze krzywe płaskie (E) i (T), a ruch po téj ostatniéj odbywa się pod działaniem przyspieszenia (siły) wypadającego z j_r i j_p, a będącego rzutem przyspieszenia całkowitego j na płaszczyznie stycznéj do danéj powierzchni rozwijalnéj [1]

Jeżeli wreszcie pewna rodząca OM opisuje powierzchnie proporcyonalne do czasu między drogą (T) i krawędzią zwrotu (E) powierzchni którą rodzi; związki zachodzące między odkształconą krawędzi (E) i odkształconą drogi (T) będą zupełnie podobne do związków (33), i t. d. znalezionych już poprzednio dla krzywych płaskich.

II

W pierwszéj części obecnego studyum okazaliśmy że można wyznaczyć drogę punktu, znając związek który nazywamy *charakterystycznym ruchu*

$$V(v, \rho) = 0 \tag{1}$$

i prawa wiążące przebieżone łuki, z czasami użytemi na ich przebieżenie, to jest równanie ruchu

$$s = \varphi(t). \tag{2}$$

Odwrotnie, znając drogę punktu i związek charakterystyczny (1) można oznaczyć prawo ruchu (2).

Jeżeli droga jest krzywą *skośną* potrzeba mieć oprócz dwóch związków (1) i (2), trzeci, kształtu podobnego do (1) a wyrażający wzajemną zależność prędkości i promienia skręcenia (torsion). — Zadanie odwrotne to jest szukanie prawa ruchu (2), rozwiązuje się, w tym przypadku, jeżeli wiadomym jest związek charakterystyczny i krzywa pochodząca z odwinięcia drogi na płaszczyznie.

W tém co nastąpi uważać będziemy drogę jako linię płaską; wypadki otrzymane w ten sposób stosować się będą do krzywych o podwójnéj krzywiznie, zastępując, w uważanym punkcie, drogę przez jéj odwiniętą na odpowiadającéj ścisle stycznéj płaszczyznie.

Znając związek charakterystyczny (1), wyrazić można w funkcyi prędkości v i promienia krzywizny ρ i $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho'$, przyspieszenie j i kąt λ jaki ono tworzy z normalną. — Mamy bowiem dla tych ilości wzory,

$$\text{sty.}\, \lambda = \frac{dv}{v d\theta} \tag{3}$$

i

$$j = \frac{v^2}{\rho \cos \lambda} = \frac{v\left(v^2 + \frac{dv^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho}, \tag{4}$$

w których $\frac{dv}{d\theta}$ wyrazić można w funkcyi v, ρ i ρ' różniczkując równanie (1).

---

[1] Dowiódł tego pierwszy p. Serret w swym « *Traité des lignes à double courbure* », Paris, 1860, p. 195.

Jeżeli prędkość v (1) jest funkcyą wyraźną promienia krzywizny ρ, można będzie wyrazić w podobnyż sposób styλ i przyspieszenie za pomocą promienia krzywizny drogi i jéj rozwiniętéj, to jest w funkcyi elementów geometrycznych téj linii.

Jako zastosowanie uważajmy związek charakterystyczny kształtu

$$\rho(v^{2n}+g)^m = hv^{mn}. \tag{5}$$

Znajdziemy

$$v^n = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\rho}\right)^{\frac{1}{m}}\left\{1 \pm \left[1-4g\left(\frac{\rho}{h}\right)^{\frac{2}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{6}$$

$$\text{sty}\,\lambda = \frac{\rho'}{mn\rho\left[1-4g\left(\frac{\rho}{h}\right)^{\frac{2}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{7}$$

$$j = \frac{h^{\frac{2}{mn}}\left\{1+\left[1-4g\left(\frac{\rho}{h}\right)^{\frac{2}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{2}{n}}.\left\{m^2n^2\rho^2\left[1-4g\left(\frac{\rho}{4}\right)^{\frac{2}{m}}\right]+\rho'^2\right\}}{2^{\frac{2}{n}}m.n.\rho^{\frac{2(mn+1)}{mn}}\left[1-4g\left(\frac{\rho}{h}\right)^{\frac{2}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{8}$$

Jeżeli obecnie uczynimy $m=3$ i $n=1$ w funkcyi (5), zastosowanéj do *przecięć stożkowych* otrzymamy, jak to okazaném będzie poniżéj (29), ruch punktu poddanego działaniu przyspieszenia (siły) przechodzącego stale przez ognisko krzywéj (ruchy planetarne).

Wedle tego czy $g>0$, $g<0$ lub $g=0$ przecięcie stożkowe będzie elipsą, hiperbolą lub parabolą.

Wzór (7) całkowicie geometryczny, wyraża, w powyższém przypuszczeniu, styczną trygonometryczną kąta utworzonego przez normalne do krzywéj drugiego stopnia z promieniem wychodzącym z ogniska, w funkcyi elementów naturalnych téj linii, jakiemi są promień krzywizny ρ i promień krzywizny jéj rozwiniętéj ρ'.

Przypuszczając $g=0$ w równaniach (5), (7) i (8) i zastępując iloczyn mn przez m', otrzymamy:

$$\rho v^{m'} = h,$$

$$\text{sty}\,\lambda = \frac{\rho'}{m\rho}\ (^1)$$

$$j = \frac{h^{\frac{2}{m}}\{m'^2\rho^2+\rho'^2\}}{m\rho^{\frac{2(m'+1)}{m'}}}.$$

Z tego cośmy powiedzieli poprzednio, widoczném jest, że wzory owyższe stosować się będą do ruchu parabolicznego jeżeli uczynimy $m'=3$.

Zauważmy jeszcze przypadek szczególny w którym $g=0$ i $m=-3$. Wzory (5), (7) i (8) zamie

(1) NICOLAIDES, *Analectes*. Athènes,, 1871, str. 52.

niają się na

$$\rho = hv^3,$$

$$\text{sty}\,\lambda = -\frac{\rho'}{3\rho},$$

$$= \frac{9\rho^2 + \rho'^2}{3h^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}}.$$

Wyrażenie styλ okazuje że przyspieszenie w każdym punkcie drogi, ma kierunek odpowiadającéj temu punktowi średnicy [1].

Stosując powyższe wzory do przecięć stożkowych, wypada, że w elipsie i hiperboli przyspieszenie stale przechodzić będzie przez środek, ponieważ w tym punkcie zbiegają się ich prostolinijne średnice; w paraboli równoległém będzie ono do osi, ponieważ średnice téj krzywej taki mają kierunek.

Nie zatrzymując się więcéj nad roztrząsaniem przypadków do jakich prowadzi związek (5), jeżeli nadawać będziemy szczególne wartości stałym g, m i n, jak naprzykład, kiedy uczynimy $g = 0$, $n = 1$ i $m = \pm 1$ i t. d., a które dają się łatwo wytłomaczyć geometrycznie, zauważymy tylko że w ogólności równania charakterystyczne ruchu, dające się rozwiązać co do v, prowadzą do wypadków podobnych do tych, jakie otrzymaliśmy, za pomocą funkcyi (5). Ważność téj ostatniéj wynika z tego nadewszystko, że zawiera ona krzywe drugiego stopnia i wiele innych znanych szczególnych przypadków.

Jeżeli punkt M w ruchu swoim zadosyć czyni zasadzie zachowania powierzchni, względem pewnego środka O, będziemy mieli, biorąc ten ostatni za biegun współrzędnych (fig. 3)

$$(9)\qquad \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}vr\,\text{dos}\,\lambda = \frac{1}{2}vp = \text{A} = \text{stałej}$$

gdzie $r = \text{OM}$ jest promieniem wodzącym drogi (T), $p = \text{OP}$ prostopadłą spuszczoną z bieguna O na kierunek prędkości, to jest promieniem wodzącym *stopowéj* (P) i $\lambda = \text{MOP}$ kątem utworzonym przez promienie wodzące OM i OP w punktach odpowiadających M i P drogi (T) i jéj stopowéj (P).

Między krzywą (T) i jéj stopową (P) zachodzą znane związki.

$$(10)\qquad r^2 = \overline{\text{OM}}^2 = \overline{\text{OP}}^2 + \overline{\text{MP}}^2 = p^2 + \frac{dp^2}{d\theta^2} = \overline{\text{NP}}^2$$

---

[1] Nazywają kierunkiem średnicy danéj krzywéj w pewnym punkcie M, styczną do linii która dzieli po połowie cięciwy równoległe do stycznéj danéj krzywéj w uważanym punkcie M. — Carnot, *Géometrie de position*, 1803, str. 477. — Nicolaides, *Les Mondes*, tom IX, 1865, str. 597.—Rouchonnet, *Exposition géometrique des propriétés des courbes*, trzecie wydanie. Lausanne, 1874, str. 40.

i

$$\mathrm{MOP} = \mathrm{NPO} = \mathrm{NMO} = \mathrm{MNP}\ (^1)$$

to jest, że promień wodzący krzywéj (T) równym jest normalnéj biegunowéj PN $= n$ jéj stopowéj (L)

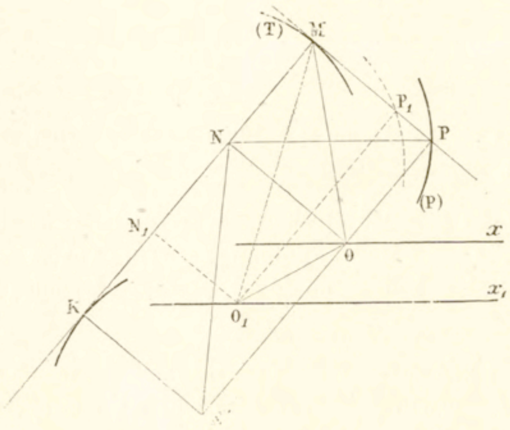

Fig. 3.

a także, że kąty OMN i NPO są równe co do bezwzględnéj wartości. Co do kierunku kąty te są zwrócone w strony przeciwne względem normalnéj MN i równoległego do niéj promienia wodzącego OP.

Z równania (9) różniczkując je i wiążąc ze wzorem (3) otrzymujemy

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{d\theta} + \frac{1}{p}\frac{dp}{d\theta} = \mathrm{sty}\lambda + \mathrm{sty\,NPO} = 0,$$

---

(1) Z łatwością wyprowadzić można wzory odnoszące się do stopowéj (P) i przeciwstopowéj (T) zważając na to że krzywa (T) jest obwijającą boku PM kąta prostego OPM, którego wierzchołek P przebiega stopowę (P) a którego drugi bok, nieograniczonéj długości, stale przechodzi przez biegun O. Punkt zetknięcia M jest rzutem chwilowego środka obrotu N na prostéj MP (fig. 3).

Środek ten N znajduje się na przecięciu normalnéj NP do stopowéj (P) z prostopadłą do prostéj OP w punkcie O, a przeto ON jest podnormalną biegunową stopowéj (P) :

$$\mathrm{ON} = \mathrm{PM} = \frac{dp}{d\theta}.$$

Ponieważ normalna MN jest prostopadłą do ON wynika ztąd że krzywa miejsce geometryczne punktu N, jest stopową rozwiniętéj danéj krzywéj (T) względem bieguna O, a także że punkt styczności K normalnéj ON ze swą obwijającą, to jest środek krzywości drogi (T), wyznacza się jak wyżéj przez

$$\mathrm{ON}' = \frac{d.\mathrm{ON}}{d\theta} = \frac{d^2p}{d\theta^2} = \mathrm{NK}.$$

A ztąd na wartość promienia krzywizny $\rho = \mathrm{MK}$ linii (T) mamy

(11) $$\rho = \mathrm{MN} + \mathrm{NK} = p + \frac{d^2p}{d\theta^2}.$$

Zobacz studyum nasze nad ruchem konchoidalnym zamieszczone w *Les Mondes*. Paryż, 1866, tom XIII, str. 307.

zkąd

$$\operatorname{sty}\lambda = \operatorname{sty} NPO = -\operatorname{sty} MOP$$

co dowodzi, że przyspieszenie przechodzi stale przez środek O, to jest, że się zbiega z promieniem wodzącym drogi OM.

Dla promienia krzywizny drogi mamy wyrażenia:

(11) $$\rho = p + \frac{d^2p}{d\theta^2}$$

(12) $$\rho = r\frac{dr}{dp} = n\frac{dn}{dp}.$$

To ostatnie znajduje się różniczkując równanie (10) co do θ i wiążąc je ze wzorem (11).

Rugując kąt θ między równaniem stopowéj (P)

$$p = f(\theta)$$

wyrażeniem (10) promienia wodzącego r drogi (T) otrzymamy

(13) $$F(p, r) = 0.$$

Związek ten pomiędzy promieniami wodzącemi drogi (T) i jéj stopowéj (P), uważać można za równanie tych krzywych w układzie współrzędnych p i r, ponieważ mając je, ze znanych związków zachodzących między temi liniami, wykreślić je można punktami.

Dla wielu krzywych, z największą łatwością, otrzymujemy równanie (13). Tak naprzykład, dla rozwijającéj koła mamy $r^2 = p^2 + a^2$; dla spiralnéj logarytmicznéj $r = ap$; dla ważnéj familii krzywych $r^n = a^n \operatorname{wst} n\theta$ (1), $r^{n+1} = a^n p$ i t. d.

W pierwszéj części tego studyum [I, (33)] okazaliśmy że w razie kiedy prosta jaka wykreśla powierzchnie proporcyonalne do czasów między swą obwijającą i drogą przebieganą przez punkt którego ruchowi towarzyszy, mamy

[I,(33)] $$\frac{d\mu}{d\theta} = 1 - \frac{\rho v \operatorname{dos}^2\mu}{2A}$$

gdzie μ jest kątem utworzonym przez poruszającą się prostę z normalną drogi.

Dowiedliśmy także że skoro przyspieszenie zbiega się stale z podobną prostą, wspólna im obwijająca jest *punktem*, a przeto przyspieszenie jest *środkowém*.

W razie tego zbiegnięcia, kąty przyspieszenia λ i prostéj μ są równe sobie a ztąd,

$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{d\delta}{d\theta}$$

---

(1) Co do własności tych krzywych odsyłamy do Noty p. Haton de la Goupillière zamieszczonéj w *Nouvelles annales de mathématiques*. Paryż, 1876, tom XV, str. 97.

i

$$\text{sty}\,\lambda = \text{sty}\,\mu = \frac{dv}{v d\theta}.$$

Różniczkując to ostatnie wyrażenie styμ i podstawiając we wzorze [I, (33)] na miejscu $\frac{d\mu}{d\theta}$ i dos$^2\mu$ wartości ich w funkcyi prędkości v i jéj pochodnych, otrzymamy

$$(14) \qquad \rho \frac{v^3}{2A} = v^2 + 2\frac{dv^2}{d\theta^2} - v\frac{d^2v}{d\theta^2}.$$

Jeżeli punkt w ruchu po krzywéj płaskiéj zadosyć czyni równaniu (14) przyspieszenie przechodzić musi *koniecznie*, przez środek stały.

Różniczkując wyrażenie (9)

$$v = \frac{2A}{p}$$

i zastępując v, $\frac{dv}{d\theta}$ i $\frac{d^2v}{d\theta^2}$ we wzorze (14) przez ich wartości w funkcyi p i jéj pochodnych, otrzymamy po zredukowaniu

$$(11) \qquad \rho = p + \frac{d^2p}{d\theta^2}.$$

Odwrotnie, możnaby wyjść z wyrażeń promienia krzywizny (11) i prędkości (9) i znaleźć wzór (14). Wzajemność ta jest naturalnym wynikiem związków zachodzących między ilościami p i v, w przypadku przyspieszeń środkowych.

Jeżeli środek zbiegu przyspieszeń, oddala się do nieskończoności, są one równoległe, to jest mają stały kierunek.

Biorąc w tym razie za oś kątów prostę równoległą do stałego kierunku przyspieszenia, mamy

$$\mu = \theta, \text{ zkąd } \text{sty}\,\lambda = \text{sty}\,\mu = \text{sty}\,\theta = \frac{dv}{v d\theta}$$

i całkując

$$(15) \qquad v\,\text{dos}\,\theta = C = \text{stałéj}.$$

Powyższy związek charakterystyczny dowodzi że w uważanym przypadku rzut prędkości, na osi prostopadłéj do kierunku przyspieszenia, jest ilością stałą.

Tak naprzykład, wiążąc wzór (15) z równaniem charakterystyczném $v\rho =$ stałéj, które często napotykaliśmy, otrzymamy wyrażenie :

$$\rho = C_1\,\text{dos}\,\theta = \frac{ds}{d\theta}$$

i całkując

$$s = C_1 \operatorname{wst}\theta + C_2$$

które jest *równaniem naturalném* [1] cykloidy.

Cykloida zatém jest jedyną krzywą w której przyspieszenie ma stały kierunek (prostopadłéj do podstawy) kiedy promień krzywizny wykreśla powierzchnie proporcyonalne do czasów.

Podobnież wiążąc równanie (15) z równaniem charakterystycznem kształtu $\rho = hv^3$ otrzymamy $\rho \operatorname{dos}^3\theta =$ stałéj, co w uważanym przypadku cechuje parabolę.

Jeżeli w równaniu charakterystycznem ruchu (1) zastąpimy p i v ich wartościami (9) i (11), to jest żądać będziemy aby przyspieszenie było środkowém; otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu, które posłużyć może do znalezienia równania skończonego linii stopowéj (P), szukanéj drogi (T).

Tak naprzykład, robiąc w związku charakterystycznym (5), $m = 3$ i przypuszczając że przyspieszenie jest środkowém otrzymamy na rozwiązanie, koło odniesione do punktu który jest ogniskiem elipsy lub hiperboli tych bowiem krzywych jest ono stopową (P).

Jako inny przykład przytoczyć możemy, poprzednio rozbierane a odpowiadające związkowi charakterystycznemu $v\rho =$ stałéj. [I, (*i*), (*m*), (*p*)].

Szukajmy teraz wyrażeń wartości przyspieszenia środkowego. Zróżniczkujmy dla tego równanie (9) biorąc za zmiennę niezależną promień wodzący drogi r, będzie

$$p\frac{dv}{dr} + v\frac{dp}{dr} = 0,$$

przekształcając za pomocą wzorów (9) i (12)

$$-v\frac{dv}{d\theta} = \frac{v^2 dp}{p dr} = \frac{v^2 r}{p\rho} = \frac{v^2}{\rho \operatorname{dos}\lambda} = j \tag{16}$$

i nakoniec

$$j = \frac{4A^2 dp}{p^3 dr} = \frac{4A^2 r}{\rho p^3}. \tag{17}$$

Stosując twierdzenie zasadnicze sił żywych do uważanego ruchu możnaby wprost wyprowadzić wyrażenie przyspieszenia

$$j = -v\frac{dv}{dr}. \tag{18}$$

Jeżeli przyspieszenie j jest funkcyą promienia wodzącego r, równanie (18) zcałkowane wyrazi zależność, zachodzącą między ilościami v i r a zatém (9) między p i r, następnie (12) między ρ i pr i nakoniec między ilościami v i ρ, którą nazwaliśmy *związkiem charakterystycznym ruchu.*

---

[1] *Równanie naturalne krzywej* określa ją co do kształtu i wielkości ale bez względu na położenie jej w przestrzeni. Równanie krzywéj we współrzędnych prostolinijnych, biegunowych lub jakichkolwiek innych określa krzywę co do jéj kształtu i wielkości, a razem co do jéj położenia względem pewnego układu stałego, figury geometrycznéj, jaką tworzą osie współrzędnych w pierwszym razie, biegun i oś kątów w drugim i t. d., i t. d. Z tego powodu, te ostatnie, zmuszone są wprowadzać oprócz elementów naturalnych krzywéj, inne jeszcze wielkości pomocnicze, które służą do wyznaczenia położenia względnego krzywéj.

Naprzykład, jeżeli przyspieszenie jest odwrotnie proporcyonalne do promienia wodzącego drogi

$$j = \frac{m}{r}.$$

otrzymamy postępując jak było wskazaném wyżéj

$$\log r^{2m} = \mathrm{C} - v^2 = \mathrm{C} - \frac{4\mathrm{A}^2}{p^2},$$

$$\rho = \frac{4\mathrm{A}^2 r^2}{mp^3} = \frac{r^2(\mathrm{C} - \log r^{2m})^{\frac{3}{2}}}{2m\mathrm{A}}$$

$$\rho^m e^{v^2} = e^{\mathrm{C}} v^{2m}.$$

Jeżeli prędkość v daną jest w funkcyi promienia wodzącego drogi, z większą jeszcze łatwością przychodzi się do związków powyższych, przykładem tego jest zadanie Riccati'ego [1] które rozbierzemy, ale nadając mu ogólniejszą formę :

Niech będzie

$$v^n = \frac{k}{r} - g, \tag{18bis}$$

znajdziemy

$$\frac{2^n\mathrm{A}^n}{p^n} = \frac{k}{r^m} - g \tag{19}$$

$$j = -v\frac{dv}{dr} = \frac{mk}{nr^{m+1}v^{n-2}} = \frac{mk}{n[(k-gr)^{n-2}r^{2m+n}]^{\frac{1}{n}}}$$

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = \frac{2^n n\mathrm{A}^n r^{m+2}}{mkp^{n+1}} = \frac{2^n n\mathrm{A}^n}{m}\left(\frac{k^2p^{2n-m}}{(2^n\mathrm{A}^n + gp^n)^{m+2}}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{n(k - gr^m)^{\frac{n+1}{n}} r^{\frac{2n-m}{n}}}{2mk\mathrm{A}} \tag{20}$$

$$\rho^m(v^n + g)^{m+2} = \frac{k^2v^{m(n+1)}}{2^m\mathrm{A}^m} = hv^{m(n+1)}. \tag{21}$$

Przypuszczając w powyższych wzorach $n = 2$ i $m = 1$, otrzymamy

$$v^2 = \frac{k}{r} - g = \frac{4\mathrm{A}^n}{p^n}$$

$$j = \frac{k}{2r^2}$$

$$\rho = \frac{r^{\frac{3}{2}}(k-gr)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{A}k} = \frac{8\mathrm{A}^2k^2p^3}{(4\mathrm{A}^2 + gp^3)^3}. \tag{22}$$

$$\rho(v^2 + g)^3 = hv^3.$$

---

[1] JULLIEN, *Problèmes de mécanique rationnelle.* Wydanie drugie, 1866, tom I, str. 318.

Uważany przypadek szczególny odpowiada ruchowi punktu po przecięciach stożkowych (29) pod wpływem przyspieszenia (siły) przechodzącego przez ognisko.

Zadanie Riccati'ego odpowiada hipotezie $g=0,\ n=1$ w równaniu (18); które się zamienia na

$$v=\frac{k}{r^m}=\frac{2A}{p}.$$

Związek ten między p i r wyraża, jakeśmy to powiedzieli poprzednio, familję krzywych mających za równanie biegunowe $r^{m-1}=\frac{k}{2A}\ \mathrm{wst}\,(m-1)\,\theta$.

Nadając wykładnikowi m wartość szczególną $\frac{1}{2}$, otrzymamy ruch na paraboli pod wpływem przyspieszenia przechodzącego przez ogniska.

Przypuszczając jeszcze że $m=n=2$ i że g i k są odjemne w równaniu (18), otrzymamy

$$v^2=g-kr^2=\frac{4A^2}{p^2}, \tag{23}$$

$$j=kr$$

$$\rho=\frac{4A^2}{kp^2}=\frac{(g-kr^2)^{\frac{3}{2}}}{2kA} \tag{24}$$

$$2Ak\rho=v^3.$$

Przypuszczenie to odpowiada zbieganiu się przyspieszenia z kierunkiem średnicy drogi i w szczególności w krzywych drugiego stopnia mających środek, ruchowi pod wpływem przyspieszenia przechodzącego przez ten środek i proporcyonalnego do promienia wodzącego.

Wzory (22) i (24) dają wartości promienia krzywizny w funkcyi promieni wodzących wychodzących z ogniska i ze środka drogi (T).

W rozbieraném poprzednio zadaniu przypuszczaliśmy że prędkość jest funkcyą promienia wodzącego drogi, a razem że sprawdza zasadę zachowania powierzchni, to jest związek (9); za pomocą tych równań można było wyznaczyć *drogę* i *warunki ruchu*. Dwa te związki wyrażają zależność zachodzącą między elementami geometrycznemi i cynematycznemi rozpatrywanego ruchu, względnie do pewnego układu geometrycznego. Wzory (1) i (2) dane na początku téj części są równoważne, ale nie zależą od położenia drogi (T) w przestrzeni.

Naprzykład, związek charakterystyczny

$$\rho=hv^3$$

wyraża, jakeśmy to poprzednio okazali, że przyspieszenie ma kierunek średnicy drogi.

Wiążąc ten związek z równaniem dającém jakąś krzywę lub pewną własność cechującą całe familje krzywych, otrzymamy inne warunki uważanego ruchu.

Tak naprzykład, niech krzywe dane mają własności wyrażone przez równania

$$\rho = Cp, \ \rho = Cr\,(^1), \ \rho r^{n-1} = a^n\,(^2) \ \text{i t. d.}$$

otrzymamy

$$v^3 = \frac{C}{h}p, \ v^3 = \frac{C}{h}r, \ v^3 r^{n-1} = \frac{a^n}{h} \quad \text{i. t. d.}$$

Powracając teraz do naszego przedmiotu i przypuszczając że ruch punktu na tych krzywych zadosyć czyni zasadzie zachowania powierzchni względem pewnego środka, to jest że

$$vp = 2A,$$

otrzymamy na wyrażenia przyspieszeń środkowych :

$$j = \frac{8A^2Cr}{(r^n - C)^2}, \quad j = \frac{v^3}{3AC} = \frac{8A^2C^5}{3(r-C)^3}, \quad j = \frac{4(n+1)A^2a^{2n}}{r^{2n+3}}, \ \text{i t. d.}$$

Wzór pierwszy jest wyrażeniem przyspieszenia środkowego w funkcyi odległości od bieguna w krzywych poprzednio studyowanych [I, (i), (m), (p)] : epicykloidach, spiralnych logarytmicznych i t. d.

Jeżeli $p = f(\theta)$ jest równaniem stopowéj (P) krzywéj (T) względem pewnego środka O, otrzymamy na równanie stopowéj (P), tejże saméj krzywéj (T) względém innego środka O_1 (fig. 3)

$$p_1 = p + \overline{OO_1}\,\text{dos}\,(\theta - \alpha) = p + l\,\text{dos}(\theta - \alpha) = f(\theta) + l\,\text{dos}(\theta - \alpha)$$

gdzie $\overline{OO_1} = l$ jest odległością dwóch środków a α kątem utworzonym przez prostę $\overline{OO_1}$ ze stałym kierunkiem osi biegunowych Ox i O_1x_1.

Własność ta pozwala rozwiązać wszelkie zadania tyczące się przyspieszeń środkowych względem jakiegokolwiek punktu płaszczyzny krzywéj (T), wziętego za biegun.

Uważmy przy téj sposobności że promień krzywizny w danym punkcie M krzywéj (T), jakikolwiek byłby biegun O, O_1,... ma na wartość wyrażenie :

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = r_1\frac{dr_1}{dp_1} = \dots$$

Co pozwala znaleźć związki zachodzące między promieniami wodzącymi $r, r_1, \dots, p, p_1, \dots$, danego punktu krzywéj, względem biegunów O, $O_1, \dots$

Tak naprzykład dla elipsy i hiperboli znajdujemy [(22) i (24)] :

$$\rho^2 = Ar^3 + Br^4 + Cr^5 + Dr^6 = A_1 + B_1r_1^2 + C_1r_1^4 + D_1r_1^6,$$

gdzie r i r_1 są promieniami wodzącemi punktu M względem ogniska i względem środka tych krzywych a A, B,. . ., A_1, B_1, . . . , ilościami stałemi.

---

(1) A. Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*. 1868, tom II, str. 501.

(2) Co cechuje krzywe należące do familii $r^n = a^n$ wst $n\theta$.

Jako zastosowanie szczególne szukajmy stopowéj koła. Względem środka swego wziętego za biegun, koło jest swoją własną stopową, zkąd

$$p = a = \text{stałéj},$$

a względem jakiegokolwiek innego punktu O_1

(25) $$p_1 = a + l \cos\theta$$

(α przypuszczamy równe zeru dla zupełnéj symetryi krzywéj we wszystkich kierunkach).

Ze wzoru (25) otrzymamy

(26) $$(p_1 - a)^2 + \frac{dp_1^2}{d\theta^2} = l^2 = r_1^2 - 2ap_1 + a^2,$$

i jako następstwa

$$v = \frac{2A}{p_1} = \frac{4aA}{r_1^2 + a^2 - l^2}.$$

$$j = \frac{2a^2A^2r_1}{(r_1^2 + a^2 - l^2)^3}.$$

Jeżeli przekształcimy za pomocą metody *promieni wodzących odwrotnych* krzywę (T) i jéj stopowę (P); przekształcona (P_1) krzywéj (T) będzie stopową przekształconéj (T_1) stopowéj (P). Linie (T) i (T_1) są, jak to wiadomo, swemi *biegunowemi wzajemnemi* [1].

Powyższe przekształcenie daje nam nową *parę* linij, mianowicie (P_1) i (T_1) których własności co do przyspieszeń środkowych, względem bieguna przekształcenia, wyprowadzają się z podobnychże własności krzywych pierwotnych (P) i (T).

Jeżeli bowiem (13)

$$F(r, p) = 0$$

wyraża związek zachodzący między promieniami wodzącemi krzywych (P) i (T) to przekształcając je, za pomocą metody *promieni wodzących odwrotnych*, to jest czyniąc

(27) $$rp_1 = C^2 \quad \text{i} \quad pr_1 = C^2,$$

otrzymamy na równanie wyrażające zależność promieni wodzących p_1 i r_1 krzywych (P_1) i (T_1),

(28) $$F\left(\frac{C^2}{r_1}, \frac{C^2}{p_1}\right) = 0,$$

a ztąd znaleźć będzie można warunki jakim zadosyć czynić winien ruch punktu M po drodze (T_1), w razie kiedy ma miejsce zasada zachowania powierzchni.

W przykładzie (25) powyżéj roztrząsanym, droga (T) była kołem, mamy zatém na przekształconę (P_1) inne koło albo prostę, a na przekształconę (T_1) stopowéj (P) krzywę drugiego stopnia mającą za ognisko środek przekształcenia. Krzywa ta będzie elipsą, hiperbolą lub parabolą wedle tego jak środek przekształcenia znajdować się będzie wewnątrz, zewnątrz lub na okręgu koła (P).

---

[1] G.-H. Niewęgłowski. *Geometrya*, wydanie drugie, 1869, str. 370 i 751.

Równanie (25) przekształcone za pomocą związków (27) zamieni się na :

$$r_1 = \frac{C^2}{a + l\cos\theta},$$

które wyraża elipsę, hiperbolę lub parabolę, wedle tego jak

$$l<a,\ l>a \text{ lub } l=a.$$

Równanie (26) zamieni się na

$$\frac{C^4}{p_1^2} - \frac{2aC^2}{r_1} + a^2 = l^2,$$

zkąd

$$v^2 = \frac{4A^2}{p_1^2} = \frac{4A^2}{C^4}\left\{\frac{2aC^2}{r_1} + l^2 - a^2\right\}$$

$$j = \frac{4A^2}{C^2 r^2}$$

$$\rho = \frac{C^2 r_1^3}{l p_1^3} = \frac{C^2}{l\cos^3\lambda}$$

i nakoniec równanie charakterystyczne

$$\rho(v^2 + g)^3 = hv^3. \tag{29}$$

Widzimy z tego że związek charakterystyczny (29) w ruchu punktu po krzywéj drugiego stopnia dowodzi, że przyspieszenie przechodzi stale przez ognisko krzywéj i jest odwrotnie proporcyonalne do kwadratu z odległości punktu od ogniska.

Z równań (9) i (27) wyprowadzamy

$$v = \frac{2A}{p} = \frac{2A}{C^2} r_1 = C_1 r_1,$$

to jest : że prędkość punktu M na drodze (T) jest proporcyonalna do promienia wodzącego $r_1 = OM_1$ odpowiadającego punktowi M_1 jéj biegunowéj wzajemnéj (T_1) [1] (fig. 4).

Co do przyspieszeń mamy ze wzorów (4) i (27) uważając że $v = \rho\frac{d\theta}{dt}$.

$$j = \frac{d\theta}{dt}\left(v^2 + \frac{dv^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = C_1\frac{d\theta}{dt}\left(r_1^2 + \frac{dr_1^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = C_1 n_1 \frac{d\theta}{dt} = C_1 v_1, \tag{30}$$

$r_1 = M_1O$, $n_1 = M_1N_1$ są promieniem wodzącym i normalną, *biegunowéj wzajemnéj* (T_1), a v_1 prędkością z jaką punkt M_1 przebiega tę krzywę, towarzysząc ruchowi punktu M na jego drodze (T).

Wzór (30) okazuje że przyspieszenie środkowe j punktu M jest proporcyonalném do prędkości v_1 punktu odpowiadającego M_1.

---

[1] Collignon, *Traité de mécanique*. 1873, tom I, str. 161.

Z trójkątów podobnych OMP i OM_1N_1 znajdujemy :

$$\frac{M_1N_1}{OM_1}=\frac{OM}{OP} \quad \text{czyli} \quad \frac{n_1}{r_1}=\frac{r}{p},$$

a ztąd (30) i (27)

$$j=C_1\frac{d\theta}{dt}\times\frac{rr_1}{p}=C_1'r\left(r_1^2\frac{d\theta}{dt}\right)r, \tag{31}$$

to jest że *przyspieszenie środkowe punktu* M *równa się iloczynowi z prędkości powierzchniowéj* $\left(r_1^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ *punktu odpowiadającego* M_1 *przez promień wodzący* $OM=r$.

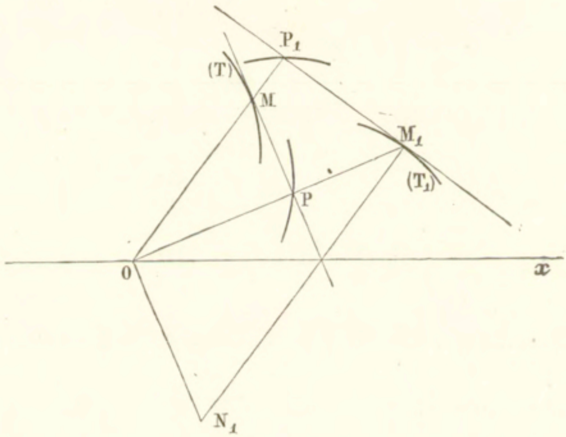

Fig. 4.

Jako następstwo téj własności, znajdujemy że skoro punkt M w swym biegu zadosyć czyni zasadzie zachowania powierzchni względem środka O, odpowiadający mu punkt M_1, biegunowéj wzajemnéj (T_1) nie może *w ogólności*, zadosyć czynić téj zasadzie względem tegoż samego środka O.

Łatwo się o tém przekonywamy uważając że

$$r_1^2\frac{d\theta}{dt}=\text{stałéj},$$

wymaga aby (30)

$$j=r\times\text{stałę}$$

co ma miejsce jedynie w elipsie i hiperboli i w razie kiedy środek przyspieszeń (powierzchni) znajduje się we środku krzywéj.

NOTA 1. — Twierdzenie nasze zamieszczone na str. 11, uważać można za podstawę zasady zachowania powierzchni, ponieważ z niego daje się w zupełności wyprowadzić.

Twierdzenie to powiada : że *jeżeli na normalnych do pewnéj drogi* (T) *odetnie się długości* $MP=p$, *odwrotnie proporcyonalne do odpowiednich prędkości*

$$MP=p=\frac{2A}{v},$$

i jeżeli z punktów P tak otrzymanych wystawi się prostopadłe (P) do normalnych; każda z tych ostatnich dotknie się swéj obwiedniéj w punkcie, przez który przechodzi odpowiedni kierunek przyspieszenia.

Ponieważ jest to prawdziwém dla jakiejkolwiek wartości prędkości powierzchniowéj A, wypada że obwiednie prostopadłych (P) odpowiadających wszystkim wartościom A, przecinają styczne obwiedniéj przyspieszenia j, pod kątami równemi kątom drogi (T).

Powracając teraz do naszego przedmiotu :

Naprzód, łatwo się daje dowieść, że proste zadosyć czyniące zasadzie zachowania powierzchni są koniecznym wynikiem ruchu [I, (13) i (33)].

Następnie, że jeżeli przyspieszenie zchodzi się z jedną z takich prostych, jego obwiednia i obwiednia prostopadłéj (P), mają w każdéj chwili, punkta styczności wspólne, a ztąd obwiednie te mogą być tylko jednym i tym samym punktem.

Odwrotnie, jeżeli przyspieszenie j stale przechodzi przez jakiś środek O, obwiednie prostopadłych (P) i droga (T) mają w nim środek podobieństwa, a ztąd wypada że

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OM}-\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{dos\,OMP}}}=\text{stałéj}=\mathrm{C},$$

a ponieważ

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{dos\,OMP}}=\frac{2\mathrm{A}}{v.\mathrm{dos\,OMP}}=\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{OM}.\dfrac{d\theta}{dt}}$$

przeto

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OM}}^2.\frac{d\theta}{dt}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}-1}\mathrm{A}=\text{stałéj},$$

co było do dowiedzenia.

Z tego wypada, że znając wyrażenia kąta pochylenia przyspieszenia j [I, (23)], można za pomocą rozumowań wymagających tylko najprostszéj znajomości składania i rozkładania prędkości w ruchach odbywających się na płaszczyznie, udowodnić w zupełności zasadę zachowania powierzchni.

Nota 2. — Na stronicy 11 daliśmy przykład w którym równanie charakterystyczne ruchu ma kształt $v\rho=$ stałéj. Zadanie to, jakeśmy to zauważyli, może być uogólnioném. Damy tutaj wysłowienie tylko bez dowodzenia, które w niczém prawie się nie różni od użytego w cytowanym szczególnym przypadku.

Niech będzie (T) drogą punktu, C_1 środkiem jéj krzywizny, C_2 środkiem krzywizny jéj pierwszéj rozwiniętéj, C_3 środkiem krzywizny jéj trzeciéj rozwiniętéj,... nakoniec C_{2n+2} środkiem krzywizny jéj rozwiniętéj rzędu $2n+1$.

Oznaczając przez P_n i Q_n rzuty na normalnéj i na stycznéj do krzywéj (T) w danym punkcie M, środka krzywizny rzędu parzystego C_{2n}, i przypuszczając że prędkość jest odwrotnie proporcyonalną do odcinków MP_n i MQ_n, otrzymamy dla przyspieszenia :

W pierwszym przypadku, że przechodzi przez środek C_{2n} i dotyka się swéj obwiedniéj w punkcie przecięcia z prostą C_1C_{2n+1};

W drugim przypadku, że jest prostopadłém do prostéj C_1C_{2n+1} i dotyka się swéj obwiedniéj w punkcie przecięcia z prostopadłą spuszczoną ze środka C_1 na prostę łączącą środki C_2 i C_{2n+2}.

Pierwsza część tego zadania obejmuje widocznie przypadek szczególny $v\rho=$ stałéj. W razie przyspieszenia środkowego prosta MC_{2n} i C_1C_{2n+1} przecinają się w tym punkcie, który jest obwiednią przyspieszenia.

Rozwijające po sobie następujące epicykloidy, spiralnéj logarytmicznéj, są przykładami łatwemi do sprawdzenia wprost. Zresztą kwestya ogólna redukuje się do zcałkowania równania różniczkowego kształtu znanego

$$\frac{d^{2n}\rho}{d\theta^{2n}}\pm \mathrm{C}\rho=0,$$

które w przypadkach $\mathrm{C}\gtrless 0$ obejmuje wyżéj przytoczone krzywe. Jeżeli $\mathrm{C}=0$ mamy rozwijające po sobie idące koła.

PARIS. — IMPRIMERIE E. MARTINET, RUE MIGNON, 2.