WYZNACZENIE

STAŁYCH MNOŻNIKÓW

WE WZORACH

DLA LINIJNÉJ TRANSFORMACYI FUNKCYI Θ

SUMMY GAUSS'A

I PRAWO WZAJEMNOŚCI SYMBOLÓW LEGENDRE'A

PRZEZ

J. SOCHOCKIEGO

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 4 Stycznia 1877 roku.)

1. Dwie funkcye $\Theta_i(\omega, \omega', z)$ i $\Theta_j(\Omega, \Omega', z)$, których parametry zadosyć czynią warunkom

$$\Omega = a\omega + b\omega',$$
$$\Omega' = a_1\omega + b_1\omega',$$
$$ab_1 - a_1 b = 1,$$

gdzie a, b, a_1, b_1, są liczbami całkowitemi, a skaźniki i i j są takiemi, że $\Theta_i(\omega, \omega', z)$ i $\Theta_j(\Omega, \Omega', z)$ stają się zerem dla jednych i tych samych wartości zmiennéj z, — znajdują się w następującym związku:

$$\Theta_j(\Omega, \Omega', z) = Ce^{\frac{b\pi z^2 i}{\omega\omega'}}\Theta_i(\omega, \omega', z).$$

Wyrażenie mnożnika stałego C dał p. Hermite w swojéj rozprawie: « Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques » (*Journal de M. Liouville*, 1858), i kwestya ta jest zatém zupełnie rozwiązaną.

Lecz nietrudném jest okazać, że opierając się wyłącznie na znanych, elementarnych własnościach funkcyi Θ, można nie tylko znaleźć ogólne wyrażenie mnożnika C, ale i otrzymać zarazem te wzory Gauss'a i Cauchy, do których odwołuje się p. Hermite we wspomnianéj wyżéj rozprawie. Słowem, wyznaczenie wartości mnożnika C prowadzi bezpośrednio do znalezienia wartości summ Gauss'a, jak również wszystkich charakterystycznych własności symbolu Legendre'a albo Jacobi'ego; i wypadki tą drogą otrzymane stanowią, bez wątpienia, jedno z najpiękniejszych zastosowań funkcyj eliptycznych do teoryi liczb.

2. Cztery funkcye

$$\Theta_i(\omega, \omega', z) = \Theta_i(z), \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

zadość czynią równości

$$\Theta(z)\,\Theta'_1(z) - \Theta_1(z)\,\Theta'(z) = \frac{\Theta(0)\,\Theta'_1(0)}{\Theta_2(0)\,\Theta_3(0)}\,\Theta_2(z)\,\Theta_3(z).$$

Biorąc drugie pochodne obydwóch stron i czyniąc następnie $z = 0$, otrzymujemy

$$\frac{\Theta_1'''(0)}{\Theta'_1(0)} = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{\Theta''_2(0)}{\Theta_2(0)} + \frac{\Theta''_3(0)}{\Theta_3(0)}.$$

Oznaczywszy stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ przez ρ i uważając każdą z funkcyj $\Theta_i(z)$ jako zależącą od trzech zmiennych niezależnych : z, ρ, ω, mamy

$$\frac{d^2\Theta_i(z)}{dz^2} = \frac{4\pi i}{\omega^2}\,\frac{d\Theta_i(z)}{d\rho}, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3);$$

ztąd otrzymujemy

$$\Theta''(0) = \frac{4\pi i}{\omega^2}\,\frac{d\Theta(0)}{d\rho},$$

$$\Theta''_2(0) = \frac{4\pi i}{\omega^2}\,\frac{d\Theta_2(0)}{d\rho},$$

$$\Theta''_3(0) = \frac{4\pi i}{\omega^2}\,\frac{d\Theta_3(0)}{d\rho},$$

$$\Theta_1'''(0) = \frac{4\pi i}{\omega^2}\,\frac{d\Theta_1'(0)}{d\rho};$$

wstawiając te wyrażenia w powyższe równanie, otrzymamy

$$\frac{d\log\Theta_1'(0)}{d\rho} = \frac{d\log\Theta(0)}{d\rho} + \frac{d\log\Theta_2(0)}{d\rho} + \frac{d\log\Theta_3(0)}{d\rho},$$

albo

$$\frac{d\log\Theta'_1(0)}{d\rho} = \frac{d\log\Theta(0)\,\Theta_2(0)\,\Theta_3(0)}{d\rho};$$

ztąd

$$\Theta_1'(0) = \frac{\pi}{\omega}\,\Theta(0)\,\Theta_2(0)\,\Theta_3(0).$$

Nazywając przez g wartość stosunku

$$g = \frac{\Theta'_1(0)\Theta_3(0)}{\Theta(0)\Theta_2(0)},$$

z ostatniego równania otrzymujemy

(1) $$\Theta_3(0) = \sqrt{\frac{g\omega}{\pi}}.$$

Wzór ten, dawno znany w teoryi eliptycznych funkcyj posłuży nam do znalezienia wartości stałego mnożnika C, o którym mówiliśmy w poprzednim numerze; dlatego też i przytoczyliśmy jeden z najprostszych, znanych sposobów jego wyprowadzenia.

3. Przystępując do ogólnego rozwiązania zadania o linijnéj transformacyi funkcyi Θ, weźmiemy naprzód pod uwagę szczególny, najprostszy przypadek, mianowicie :

$$\Omega = \omega', \quad \Omega' = -\omega.$$

W takim razie mieć będziemy

$$\Theta_3(\omega', -\omega, z) = Ce^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}}\Theta_3(\omega, \omega', z),$$

$$\Theta(\omega', -\omega, z) = Ce^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}}\Theta_2(\omega, \omega', z),$$

$$\Theta_2(\omega', -\omega, z) = Ce^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}}\Theta(\omega, \omega', z),$$

$$\Theta_1(\omega', -\omega, z) = -Cie^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}}\Theta_1(\omega, \omega', z),$$

przy czém trzy ostatnie równania otrzymują się bezpośrednio z pierwszego.

Żeby znaleźć wartość mnożnika C uczyńmy w powyższych równaniach $z=0$, wtedy otrzymamy

$$\Theta_3(\omega', -\omega, 0) = C\Theta_3(\omega, \omega', 0),$$

albo, na mocy (1),

$$\sqrt{\frac{g_1\omega'}{\pi}} = C\sqrt{\frac{g\omega}{\pi}};$$

ztąd

$$C = \sqrt{\frac{g_1\omega'}{g\omega}}.$$

Lecz

$$g_1 = \frac{\Theta'_1(\omega', -\omega, 0)\Theta_3(\omega', -\omega, 0)}{\Theta(\omega', -\omega, 0)\Theta_2(\omega', -\omega, 0)},$$

przeto, wstawiając na miejsce czynników w liczniku i mianowniku ich wartości, otrzymane z poprzednich równań, znajdujemy

$$g_1 = \frac{-i\Theta'_1(\omega, \omega', 0)\Theta_3(\omega, \omega', 0)}{\Theta(\omega, \omega', 0)\Theta_2(\omega, \omega', 0)},$$

albo

$$g_1 = -ig;$$

w skutek tego

$$C = \sqrt{-i\frac{\omega'}{\omega}}.$$

Otrzymane wyrażenie ilości C wskazuje nam, że rzetelna część C nie może być równą zeru, gdyż w takim razie ilość

$$C^2 = -i\frac{\omega'}{\omega}$$

byłaby odjemną, i współczynnik przy i w wartości stosunku $\frac{\omega'}{\omega}$ byłby ilością odjemną, co być nie może.

W szczególnym przypadku, kiedy

$$\frac{\omega'}{\omega} = \beta i,$$

gdzie $\beta > 0$, mieć będziemy

$$C = \sqrt{\beta},$$

i pierwiastek kwadratowy należy brać dodatny, gdyż w równaniu

$$C = \frac{\Theta_3(\omega', -\omega, 0)}{\Theta_3(\omega, \omega', 0)},$$

tak licznik jak i mianownik oczywiście otrzymują wartości dodatne.

Zważywszy teraz, że ilość C jest funkcyą ciągłą zmiennéj niezależnéj

$$\frac{\omega'}{\omega} = \rho$$

przy wszelkich jéj wartościach, z dwóch wyżéj przytoczonych uwag wnosimy, że przy wszelkich wartościach dla ρ rzetelna część ilości C jest dodatną.

I tak, we wzorze

$$C = \sqrt{-i\frac{\omega'}{\omega}}.$$

należy brać tę wartość pierwiastku kwadratowego, któréj rzetelna część jest dodatną.

Podstawiając zamiast C otrzymaną wartość, mamy

$$\Theta_3(\omega' - \omega, 0) = \sqrt{-i\frac{\omega'}{\omega}}\,\Theta_3(\omega, \omega', 0),$$

$$\Theta(\omega', -\omega, 0) = \sqrt{-i\frac{\omega'}{\omega}}\,\Theta_2(\omega, \omega', 0),$$

$$\Theta_2(\omega', -\omega, 0) = \sqrt{-i\frac{\omega'}{\omega}}\,\Theta(\omega, \omega', 0),$$

$$\mathrm{gr}\left(\frac{\Theta_1(\omega', -\omega, z)}{z}\right)_{z=0} = -i\sqrt{-i\frac{\omega'}{\omega}}\;\mathrm{gr}\left(\frac{\Theta_1(\omega, \omega', z)}{z}\right)_{z=0}.$$

Każda z trzech funkcyi $\Theta(\omega, \omega', 0)$, $\Theta_2(\omega, \omega', 0)$, $\Theta_3(\omega, \omega', 0)$ zależy tylko od ilości $\frac{\omega'}{\omega} = \rho$; dla skrócenia będziemy je wyrażać tak: $\Theta(\rho)$, $\Theta_2(\rho)$, $\Theta_3(\rho)$. Funkcyę zaś

$$\operatorname{gr}\left(\frac{\Theta_1(\omega, \omega', z)}{z}\right)_{z=0}$$

zależącą od ρ i od ω przedstawiać będziemy przez

$$\Theta_1'(\rho, \omega).$$

Powyższe zatém cztery równości można napisać tak:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta_3(\rho) &= \sqrt{\frac{i}{\rho}}\,\Theta_3\left(-\frac{1}{\rho}\right), \\ \Theta(\rho) &= \sqrt{\frac{i}{\rho}}\,\Theta_2\left(-\frac{1}{\rho}\right), \\ \Theta_2(\rho) &= \sqrt{\frac{i}{\rho}}\,\Theta\left(-\frac{1}{\rho}\right), \\ \Theta'_1(\rho, \omega) &= i\sqrt{\frac{i}{\rho}}\,\Theta'_1\left(-\frac{1}{\rho}, \omega\rho\right). \end{aligned}\right.$$

Pierwsza z tych równości znaleziona była przez Poisson'a i także niezależnie przez Cauchy. Do poprzednich równości przyłączymy jeszcze następujące, które otrzymują się bezpośrednio z ogólnych wyrażeń funkcyi $\Theta(\rho)$:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta_3(\rho + 1) &= \Theta(\rho). \\ \Theta(\rho + 1) &= \Theta_3(\rho). \\ \Theta_2(\rho + 1) &= e^{\frac{\pi i}{4}}\,\Theta_2(\rho). \\ \Theta'_1(\rho + 1, \omega) &= e^{\frac{\pi i}{4}}\,\Theta'_1(\rho, \omega). \end{aligned}\right.$$

4. Przejdziemy teraz do bardziéj ogólnego przypadku. Niech

$$\Omega = a\omega + b\omega',$$

$$\Omega' = a_1\omega + b_1\omega',$$

$$ab_1 - a_1 b = 1.$$

i załóżmy że b jest liczbą parzystą.

W takim razie mamy

$$\Theta_3(\Omega, \Omega', z) = Ce^{\frac{b\pi z^2 i}{\omega\Omega}}\,\Theta_r(\omega, \omega', z).$$

gdzie $r = \frac{3}{2}[1 + (-1)^a]$. Uczyniwszy $z = 0$ otrzymamy

$$\Theta_3(\Omega, \Omega', 0) = C\,\Theta_r(\omega, \omega', 0).$$

albo, krócéj,

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=C\,\Theta_r(\rho).$$

Wykonajmy dla b i b_1 szereg działań prowadzących do znalezienia największego wspólnego dzielnika tych dwóch liczb, z tém zastrzeżeniem, żeby wszystkie ilorazy były liczbami parzystemi, i dajmy że takim sposobem otrzymaliśmy dwa następujące szeregi :

$$b,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots,b_n=\pm 1,$$

$$q,\ q_1,\ q_2,\ldots,\ q_{n-1},$$

gdzie $q, q_1,\ldots, q_{n-1}$ są liczbami parzystemi, i

$$b_m=q_mb_{m+1}+b_{m+2},\qquad (m=0,\ 1,\ldots,\ n-2).$$

Ponieważ, według założenia, b jest liczbą parzystą, a b_1 nieparzystą, zatém z powyższego związku między trzema liczbami

$$b_m,\ b_{m+1},\ b_{m+2}$$

wynika, że b_2, b_4, $b_6,\ldots$, są liczbami parzystemi, a b_3 $b_5,\ldots$ nieparzystemi; przeto n musi być liczbą nieparzystą. Z tegoż samego związku wypada jeszcze, że jeśli m jest liczbą nieparzystą, to

$$b_m\equiv b_{m+2}\ (\text{mod } 4),$$

tak że jeśli b_1 jest formy $4k+1$, to i b_3, $b_5,\ldots$ są formy $4k+1$ i wtedy $b_n=1$; jeśli zaś b_1 jest formy $4k-1$, to b_3, $b_5,\ldots$ i b_n są formy $4k-1$, to jest, $b_n=-1$.

Za pomocą liczb a i a_1 utwórzmy nowy szereg liczb

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n$$

w którym każda liczba otrzymuje się z dwóch poprzedzających według wzoru

$$a_m=q_ma_{m+1}+a_{m+2},\qquad (m=0,\ 1,\ldots\ n-2),$$

zkąd widzieć można, że a_m i a_{m+2} są liczbami jednakowéj parzystości; więc dwie liczby a_1 i a_n są obie parzystemi albo obie nieparzystemi.

Daléj, z dwóch równań

$$a_m=q_ma_{m+1}+a_{m+2},$$

$$b_m=q_mb_{m+1}+b_{m+2},$$

rugując q_m otrzymujemy

$$a_mb_{m+1}-a_{m+1}b_m=-(a_{m+1}b_{m+2}-a_{m+2}b_{m+1});$$

zatém

$$a_mb_{m+1}-a_{m+1}b_m=(-1)^m(ab_1-a_1b),$$

czyli

$$a_mb_{m+1}-a_{m+1}b_m=(-1)^m.$$

Na zasadzie pierwszego z równań (2) mamy

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\sqrt{i\,\frac{a+b\rho}{a_1+b_1\rho}}\;\Theta_3\left(\frac{-a-b\rho}{a_1+b_1\rho}\right),$$

przyczém należy pamiętać, że rzetelna część pierwiastku kwadratowego powinna być dodatną. W ogóle, w ciągu całéj téj rozprawy, pod wyrażeniem

$$\sqrt{p}$$

rozumieć zawsze będziemy tę z dwóch wartości pierwiastku kwadratowego z danéj ilości p, któréj rzetelna część jest dodatną; jeśli zaś zdarzy się, że p będzie liczbą rzetelną i odjemną, to powyższe wyrażenie będzie oznaczać tę wartość pierwiastku kwadratowego, która ma przy i współczynnik dodatny.

Zważywszy że

$$\frac{-a-b\rho}{a_1+b_1\rho}=-q+\frac{-a_2-b_2\rho}{a_1+b_1\rho},$$

poprzedzającą równość możemy napisać tak :

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\sqrt{i\,\frac{a+b\rho}{a_1+b_1\rho}}\;\Theta_3\left(-q+\frac{-a_2-b_2\rho}{a_1+b_1\rho}\right);$$

lecz z dwóch pierwszych równości (3) wypada że funkcya $\Theta_3(\rho)$ jest peryodyczną, z peryodem 2, tak że

$$\Theta_3(\rho)=\Theta_3(\rho+2m),$$

przeto, ponieważ q jest liczbą parzystą, poprzednią równość można przedstawić tak :

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\sqrt{i\,\frac{a+b\rho}{a_1+b_1\rho}}\;\Theta_3\left(\frac{-a_2-b_2\rho}{a_1+b_1\rho}\right).$$

Rozumując podobnie, znajdziemy

$$\Theta_3\left(\frac{-a_2-b_2\rho}{a_1+b_1\rho}\right)=\sqrt{-i\,\frac{a_1+b_1\rho}{a_2+b_2\rho}}\;\Theta_2\left(\frac{a_3+b_3\rho}{a_2+b_2\rho}\right),$$

$$\Theta_3\left(\frac{a_3+b_3\rho}{a_2+b_2\rho}\right)=\sqrt{i\,\frac{a_2+b_2\rho}{a_3+b_3\rho}}\;\Theta_3\left(\frac{-a_4-b_4\rho}{a_3+b_3\rho}\right),$$

. . . .

$$\Theta_3\left(\frac{a_n+b_n}{a_{n-1}+b_{n-1}\rho}\right)=\sqrt{i\,\frac{a_{n-1}+b_{n-1}\rho}{a_n+b_n\rho}}\;\Theta_3\left(\frac{-b_n}{a_n+b_n\rho}\right).$$

W ostatniéj z tych równości zauważyliśmy że $b_{n+1}=0$, a $a_{n+1}=b_n$, gdyż $a_{n+1}b_n-a_nb_{n+1}=1$.

Z szeregu powyższych równości otrzymujemy za pomocą rugowania

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+a\rho}\right)=\sqrt{i\,\frac{a+b\rho}{a_1+b_1\rho}}\sqrt{-i\,\frac{a_1+b_1\rho}{a_2+b_2\rho}}\;\cdots\;\sqrt{i\,\frac{a_{n-1}+b_{n-1}\rho}{a_n+b_n\rho}}\;\Theta_3\left(\frac{-b_n}{a_n+b_n\rho}\right).$$

Lecz $b_n = \pm 1$, przeto

$$\Theta_3\left(\frac{-b_n}{a_n + b_n\rho}\right) = \sqrt{-i\,\frac{a_n + b_n\rho}{b_n}}\;\Theta_3(a_n b_n + \rho).$$

Z drugiéj strony, za pomocą równości (3) łatwo przekonać się, że

$$\Theta_3(a_n b_n + \rho) = \Theta_r(\rho),$$

przyczém

$$r = \frac{3}{2}\left[1 + (-1)^{a_n b_n}\right] = \frac{3}{2}\left[1 + (-1)^{a_n}\right],$$

albo, ponieważ $a_n \equiv a_1 \pmod 2$,

$$r = \frac{3}{2}\left[1 + (-1)^{a_1}\right];$$

przeto

$$\Theta_3\left(\frac{-b_n}{a_n + b_n\rho}\right) = \sqrt{-i\,\frac{a_n + b_n\rho}{b_n}}\;\Theta_r(\rho),$$

w skutek czego otrzymujemy

$$\Theta_3\left(\frac{a_1 + b_1\rho}{a + b\rho}\right) = \sqrt{i\,\frac{a + b\rho}{a_1 + b_1\rho}}\;\sqrt{-i\,\frac{a_1 + b_1\rho}{a_2 + b_2\rho}}\;\cdots\;\sqrt{i\,\frac{a_{n-1} + b_{n-1}\rho}{a_n + b_n\rho}}\;\sqrt{-i\,\frac{a_n + b_n\rho}{b_x}}\;\Theta_r(\rho),$$

$$r = \frac{3}{2}\left[1 + (-1)^{a_1}\right].$$

Z porównania otrzymanéj równości z rownością wyżéj otrzymaną

$$\Theta_3\left(\frac{a_1 + b_1\rho}{a + b\rho}\right) = C\Theta_r(\rho),$$

znajdujemy

$$\text{(4)}\qquad C = \sqrt{i\,\frac{a + b\rho}{a_1 + b_1\rho}}\;\sqrt{-i\,\frac{a_1 + b_1\rho}{a_2 + b_2\rho}}\;\cdots\;\sqrt{i\,\frac{a_{n-1} + b_{n-1}\rho}{a_n + b_n\rho}}\;\sqrt{-i\,\frac{a_n + b_n\rho}{b_n}}.$$

5. Postaramy się teraz wyrażenie (4) przywieść do prostszéj postaci.

Weźmy pod uwagę jakikolwiek z czynników prawéj strony wzoru (4), naprzykład taki:

$$\sqrt{(-1)^m\, i\,\frac{a_m + b_m\rho}{a_{m+1} + b_{m+1}\rho}} = \alpha_m + \beta_m i, \quad \alpha_m > 0.$$

Łatwo przekonać się, że liczebna wartość β_m jest mniejszą od liczebnéj wartości α_m, to jest,

$$\beta^2_m < \alpha^2_m.$$

W saméj rzeczy, przypuszczając że $\rho = r + si$, mieć będziemy

$$(-1)^m i\,\frac{a_m + b_m r + b_m si}{a_{m+1} + b_{m+1} r + b_{m+1} si} = \alpha_m^2 - \beta_m^2 + 2\alpha_m\beta_m i.$$

Rzetelna część lewéj strony równa się

$$\frac{(-1)^m(a_m b_{m+1}-a_{m+1}b_m)s}{(a_{m+1}+b_{m+1}r)^2+b^2_{m+1}s^2}=\frac{s}{(a_{m+1}+b_{m+1}r)^2+b^2_{m+1}s^2};$$

ztąd widać że ona jest dodatną; zatém

$$\alpha^2_m>\beta^2_m.$$

Ztąd wnosimy, że rzetelna część iloczynu

$$e^{-(-1)^m\frac{\pi i}{4}}(\alpha_m+\beta_m i)=\frac{1-(-1)^m i}{\sqrt{2}}(\alpha_m+\beta_m i)$$

est dodatną; zatém

$$\sqrt{(-1)^m i\frac{a_m+b_m\rho}{a_{m+1}+b_{m+1}\rho}}=e^{(-1)^m\frac{\pi i}{4}}\ e^{-(-1)^m\frac{\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^m i\ \frac{a_m+b_m\rho}{a_{m+1}+b_{m+1}\rho}}=e^{(-1)^m\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{a_m+b_m\rho}{a_{m+1}+b_{m+1}\rho}}$$

Przedstawiając pod taką postacią każdy z czynników wzoru (4), otrzymujemy

$$(5)\qquad C=\sqrt{\frac{a+b\rho}{a_1+b_1\rho}}\sqrt{\frac{a_1+b_1\rho}{a_2+b_2\rho}}\cdots\sqrt{\frac{a_{n-1}+b_{n-1}\rho}{a_n+b_n\rho}}\sqrt{\frac{a_n+b_n\rho}{b_n}}.$$

6. Weźmy teraz pod uwagę jakikolwiek z czynników wzoru (5), naprzykład,

$$\sqrt{\frac{a_m+b_m\rho}{a_{m+1}+b_{m+1}\rho}},\ (m<n).$$

i przedstawmy tak:

$$\sqrt{\frac{a_m+b_m\rho}{a_{m+1}+b_{m+1}\rho}}=\varepsilon_m\frac{\sqrt{a_m+b_m\rho}}{\sqrt{a_{m+1}+b_{m+1}\rho}},$$

gdzie oczywiście $\varepsilon_m=\pm 1$. Pozostaje nam okazać jak się wyznacza znak ε_m.

Czyniąc, jak zawsze, $\rho=r+si$, $(s>0)$, mieć będziemy

$$\frac{\sqrt{a_m+b_m\rho}}{\sqrt{a_{m+1}+b_{m+1}\rho}}=\frac{\sqrt{a_m+b_m r+\sqrt{p}}+i\lambda\sqrt{-a_m-b_m r+\sqrt{p}}}{\sqrt{a_{m+1}+b_{m+1}r+\sqrt{q}}+i\mu\sqrt{-a_{m+1}-b_{m+1}r+\sqrt{q}}},$$

gdzie

$$p=(a_m+b_m r)^2+b^2_m s^2,$$

$$q=(a_{m+1}+b_{m+1}r)^2+b^2_{m+1}s^2,$$

$\lambda=+1$ jeśli $b_m>0$, i $\lambda=-1$ jeśli $b_m<0$; podobnie $\mu=+1$ jeśli $b_{m+1}>0$, i $\mu=-1$ jeśli $b_{m+1}<0$.

Oznaczając rzetelną część powyższego ilorazu przez A, mamy

$$A=\frac{\sqrt{(a_m+b_m r+\sqrt{p})(a_{m+1}+b_{m+1}r+\sqrt{q})}+\lambda\mu\sqrt{(-a_m-b_m r+\sqrt{p})(-a_{m+1}-b_{m+1}r+\sqrt{q})}}{P^2+Q^2},$$

gdzie P i Q przedstawiają pewne wielomiany.

Jeśli dwie liczby b_m i b_{m+1} są jednakowych znaków, to

$$\lambda\mu = 1$$

i z powyższego wyrażenia widzimy, że w takim razie

$$A > 0,$$

w skutek czego

$$\varepsilon_m = 1.$$

W przeciwnym razie, kiedy b_m i b_{m+1} są znaków różnych

$$\lambda\mu = -1,$$

i wartość A będzie takiegoż znaku jak ilość B

$$B = (a_m + b_m r + \sqrt{p})(a_{m+1} + b_{m+1} r + \sqrt{q}) - (-a_m - b_m r + \sqrt{p})(-a_{m+1} - b_{m+1} r + \sqrt{q}),$$

albo, po uproszczeniu,

$$\frac{1}{2} B = (a_m + b_m r)\sqrt{q} + (a_{m+1} + b_{m+1} r)\sqrt{p}.$$

Przy jakiejkolwiek szczególnéj wartości r, od $-\infty$ do $+\infty$, ilość B nie może być równą zeru, gdyż wtedy oczywiście i A byłoby równe zeru, i ilość

$$\frac{a_m + b_m \rho}{a_{m+1} + a_{m+1}\rho}$$

byłaby rzetelną, co być nie może; oprócz tego B jest funkcyą ciągłą ilości r, przeto zachowuje jeden i tenże sam znak przy wszelkich wartościach zmiennéj r. Dla znalezienia tego znaku dość jest w wyrażeniu ilości B podstawić za r jakąkolwiek szczególną wartość, naprzykład,

$$r = -\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}, \quad (m < n,\ b_{m+1} \text{ nie} = 0);$$

wtedy otrzymamy

$$B = \left(a_m - b_m \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\sqrt{b^2_{m+1} s^2} = \mu(-1)^m s,$$

gdzie $\mu = 1$, jeśli $b_{m+1} > 0$, i $\mu = -1$ jeśli $b_{m+1} < 0$.

Z otrzymanéj szczególnéj wartości B, widzimy że, przy wszelkich wartościach dla ρ, znak ilości B a tym samym i znak ilości A jest zawsze taki sam jak i znak liczby

$$(-1)^m b_{m+1}.$$

Ztąd zaś bezpośrednio wnosimy, że we wziętym pod uwagę przypadku, kiedy b_m i b_{m+1} są różnych znaków, znak ε_m jest tenże sam co i znak liczby $(-1)^m b_{m+1}$.

Umiejąc określać znak jedności ε_m przy wszelkich wartościach m od 0 do $n-1$, weźmy jeszcze pod uwagę ostatni pierwiastek z prawéj strony równania (5), to jest,

$$\sqrt{\frac{_n + b_n \rho}{b_n}} = \varepsilon_n \frac{\sqrt{a_n + b_n \rho}}{\sqrt{b_n}}.$$

Jeśli $b_n = 1$, to oczywiście $\varepsilon_n = 1$; jeśli zaś $b_n = -1$, to również łatwo przekonać się że $\varepsilon_n = -1$, tak że zawsze $\varepsilon_n = b_n = (-1)^{\frac{b_1-1}{2}}$

Podstawmy teraz we wzorze (5) na miejsce każdego z pierwiastków kwadratowych ich nowe wyrażenia, które dopiero co rozpatrywaliśmy i znieśmy wspólne czynniki licznika i mianownika; znajdziemy

$$C = \varepsilon\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \frac{\sqrt{a + b\rho}}{\sqrt{b_n}}, \tag{6}$$

gdzie $\varepsilon_n = (-1)^{\frac{b_1-1}{2}}$, co się tyczy pozostałych czynników $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, to:

1° Jeśli b_m i b_{m+1} są znaków jednakowych, $\varepsilon_m = 1$;

2° Jeśli b_m i b_{m+1} są różnych znaków, $\varepsilon_m = 1$ jeśli $(-1)^m b_{m+1} > 0$, i $\varepsilon_m = -1$ jeśli $(-1)^m b_{m+1} < 0$.

7. Iloczyn $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, którego wartość równa się ± 1, zależy wyłącznie od liczb b i b_1. Dla znalezienia jego znaku należy w szeregu liczb

$$b,\ b_1,\ b_2, \ldots, b_{n-1},\ b_n = \pm 1,$$

zwracać uwagę na każdą przemianę znaków i odpowiednio każdéj z nich, jak naprzykład b_m, b_{m+1}, należy zapisać znak liczby $(-1)^m b_{m+1}$; iloczyn takim sposobem otrzymanych znaków da nam znak szukany iloczynu $\varepsilon\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$.

Łatwo zauważyć, że dla wyznaczenia iloczynu $\varepsilon\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ można postępować inaczéj, a mianowicie tak:

Policzmy ile w szeregu

$$b,\ b_1,\ b_2, \ldots, b_{n-1},\ b_n$$

znajduje się wyrazów odjemnych, niech ich będzie l; zauważmy następnie ile oddzielnych grup tworzą wszystkie odjemne wyrazy powyższego szeregu, dajmy że ich jest m: szukany iloczyn będzie

$$\varepsilon_1\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = (-1)^{l-m}.$$

Naprzykład, uczyńmy $b = 26$, $b_1 = -29$; otrzymujemy szereg

$$26,\ -29,\ 26,\ 23,\ -20,\ -17,\ 14,\ 11,\ -8,\ -5,\ 2,\ -1;$$

zatém $l = 6$, $m = 4$, i $\varepsilon\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = 1$.

Idąc śladem Legendre'a, będziemy przedstawiać liczbę $\varepsilon\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$ symbolem

$$\left[\frac{b}{b_1}\right],$$

który według powyżéj danego określenia, to jest

$$\left[\frac{b}{b_1}\right] = (-1)^{l-m}$$

pozostaje zupełnie wyznaczonym dla jakichkolwiek wartości b i b_1 wzajemnie pierwszych, tak że b_1 może być liczbą parzystą, albo obie liczby b i b_1 mogą być nieparzystemi.

Wzór (6) można napisać tak :

$$C=\left[\frac{b}{b_1}\right]\frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}},$$

w skutek tego

$$(7)\qquad \Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left[\frac{b}{b_1}\right]\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}}\Theta_r(\rho),$$

$$\left\{r=\frac{3}{2}[1+(-1)^{a_1}]\right\},$$

przytém b według założenia jest liczbą parzystą.

Gdybyśmy zrobili przypuszczenie że b jest liczbą nieparzystą a b_1 — parzystą, to, postępując tak jak w poprzednim numerze znaleźlibyśmy

$$(8)\qquad \Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left[\frac{b}{b_1}\right]e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}}\Theta_r(\rho),\ \left\{r=\frac{3}{2}[1+(-1)^a]\right\}.$$

Naprzykład

$$\Theta_3\left(\frac{-5+4\rho}{9-7\rho}\right)=\left[\frac{-7}{4}\right]e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{\sqrt{9-7\rho}}{i}\Theta(\rho),$$

gdzie $\left[\frac{-7}{4}\right]=1$, więc

$$\Theta_3\left(\frac{-5+4\rho}{9-7\rho}\right)=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{9-7\rho}\,\Theta(\rho).$$

W tym nareszcie przypadku kiedy obie liczby, b i b_1 są nieparzystemi, znajdziemy

$$(9)\qquad \Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left[\frac{b}{b_1}\right]\frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{n+1}b_n}}\ e^{\frac{\pi i}{4}\left(a_nb_n^n+\frac{1+(-1)^n}{2}\right)}\Theta_2(\rho)$$

gdzie $b_n=\pm 1$, a a_n otrzymuje się z a i a_1 według równań przytoczonych w nº 4.

Zresztą łatwo jest zauważyć, że jeżeli b i b_1 są liczbami nieparzystemi, pierwszemi między sobą, to wykonywając szereg działań, jak przy szukaniu największego wspólnego dzielnika liczb b i b_1 z zastrzeżeniem żeby wszystkie ilorazy były parzystemi, dojdziemy zawsze do reszty $b_n=+1$; w takim razie mieć będziemy

$$(10)\qquad \Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left[\frac{b}{b_1}\right]\frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{n+1}}}\ e^{\frac{\pi i}{4}\left(a_n+\frac{1+(-1)^n}{2}\right)}\Theta_2(\rho),$$

przyczém pamiętać należy, że ostatnia reszta b_n powinna być równą $+1$.

Naprzykład, żeby znaleźć wyrażenie dla

$$\Theta_3\left(\frac{3-43\rho}{-4+57\rho}\right),$$

wykonamy naprzód szereg działań jak dla otrzymania największego wspólnego dzielnika liczb 57 i -43; otrzymamy wtedy dwa szeregi

$$57, -43, -29, 15, 1,$$

$$-2, \quad 2, -2$$

ztąd znajdujemy

$$\left[\frac{57}{-43}\right] = -1,$$

$$a_2 = 2a_1 + a = 3,$$

$$a_3 = -2a_2 + a_1 = -1,$$

$$a_4 = 2a_3 + a_2 = 0,$$

prócz tego $n=4$; zatém

$$\Theta_3\left(\frac{3-43\rho}{-4+57\rho}\right) = i\, e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{-4+57\rho}\; \Theta_2(\rho).$$

Weźmy jeszcze jeden przykład

$$\Theta_3\left(\frac{-7-19\rho}{46+125\rho}\right).$$

Odszukując największy wspólny dzielnik liczb 125 i -19, otrzymujemy dwa szeregi następujące:

$$125, -19, \quad 11, 3, -1, +1,$$

$$-6, -2, 4, -2;$$

ztąd

$$n=5, \quad \left[\frac{125}{-19}\right] = 1,$$

$$a_2 = 4, \; a_3 = 1, \; a_4 = 0, \; a_5 = 1,$$

$$\Theta_3\left(\frac{-7-19\rho}{46+125\rho}\right) = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{46+125\rho}\; \Theta_2(\rho).$$

9. Zajmijmy się teraz wyprowadzeniem niektórych własności symbolu $\left[\frac{2b}{b_1}\right]$.

Przedewszystkiém łatwo przekonać się, że jeśli $b>0$, to

$$\left[\frac{-2b}{-b_1}\right] = (-1)^{\frac{b_1+1}{2}} \left[\frac{2b}{b_1}\right]. \tag{11}$$

Rzeczywiście, przypuśćmy że w szeregu

$$2b,\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n$$

znajduje się l liczb odjemnych, tworzących m oddzielnych grup, tak że

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right] = (-1)^{l-m}.$$

Przemieniając znaki przy $2b$ i b_1 na przeciwne, liczby $b_2, b_3,\ldots, b_n$ także zmienią swoje znaki na przeciwne, i otrzymamy nowy szereg

$$-2b,\ -b_1,\ -b_2,\ldots,\ -b_n,$$

w którym liczba odjemnych wyrazów będzie się równać

$$l' = n + 1 - \ ,$$

a liczba grup z odjemnych wyrazów będzie

$$m' = m + \frac{b_n + 1}{2}\ ,$$

gdyż według założenia $b > 0$; więc

$$\left[\frac{-2b}{-b_1}\right] = (-1)^{l'-m'} = (-1)^{n+1-l-m-\frac{b_n+1}{2}}.$$

Lecz n jest liczbą nieparzystą, a $b_n \equiv b_1$ (mod 4), przeto

$$\left[\frac{-2b}{-b_1}\right] = (-1)^{l-m+\frac{b_1+1}{2}},$$

albo

$$\left[\frac{-2b}{-b_1}\right] = (-1)^{\frac{b_1+1}{2}} \left[\frac{2b}{b_1}\right],\ \text{c. b. d. o.}$$

Jeśli w jakimkolwiek danym szeregu liczb

$$a,\ b,\ c,\ldots,\ k,\ l,$$

gdzie nie ma zera, znajduje się l liczb odjemnych, tworzących m oddzielnych grup, to zgodzimy się na chwilę pod wyrażeniem symboliczném $(a, b, c,\ldots, k, l)$ rozumieć $(-1)^{l-m}$.

Założywszy to, łatwo przekonać się, że

$$(a,\ldots, b,\ldots, c) = (a,\ldots, b)\,(b,\ldots, c);$$

ztąd znów wynika, że

$$(a,\ldots, b,\ldots, c,\ldots, d) = (a,\ldots, b)\,(b,\ldots, c)\,(c,\ldots, a),$$

i t. d.

Przypuśćmy następnie, że dla znalezienia wartości symbolu $\left[\frac{2b}{b_1}\right]$, otrzymaliśmy szereg

$$2b,\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_{n-1},\ b\ ;$$

wartości symbolu

$$\left[\frac{2b}{-b_1}\right]$$

wyznaczą się za pomocą następującego szeregu

$$2b, -b_1, b_2, -b_3, \ldots, b_{n-1}, -b_n,$$

i mieć będziemy

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right] = (2b, b_1, b_2)(b_2, b_3, b_4)(b_4, b_5, b_6), \ldots, (b_{n-1}, -b_n)$$

$$\left[\frac{2b}{-b_1}\right] = (2b, -b_1, b_2)(b_2, -b_3, b_4)(b_4, -b_5, b_6), \ldots, (b_{n-1}, -b_n).$$

Nazwawszy przez α_m jedność wziętą ze znakiem liczby b_m, mieć będziemy

$$(b_{n-1}, b_n) = \alpha_{n-1}(b_{n-1}, -b_n),$$

$$(b_{n-3}, b_{n-2}, b_{n-1}) = \alpha_{n-3}\alpha_{n-1}(b_{n-3}, -b_{n-2}, b_{n-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(b_2, b_3, b_4) = \alpha_2\alpha_4(b_2, -b_3, b_4),$$

$$(2b, b_1, b_2) = \alpha\alpha_2(2b, -b_1, b_2).$$

Mnożąc odpowiednio wszystkie te równania i biorąc pod uwagę poprzedzające wyrażenia dwóch symbolów, otrzymamy

(12) $$\left[\frac{2b}{b_1}\right] = \alpha\left[\frac{2b}{-b_1}\right],$$

gdzie $\alpha = 1$ jeśli $b > 0$, i $\alpha = -1$ jeśli $b < 0$.

Z równań (11) i (12) otrzymujemy jako wniosek

(13) $$\left[\frac{-2b}{b_1}\right] = (-1)^{\frac{b_1-1}{2}}\left[\frac{2b}{b_1}\right]$$

10. Biorąc pod uwagę równość

$$\Theta_3(\Omega, \Omega', z) = Ce^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\Omega}}\Theta_r(z, \omega, \omega'),$$

gdzie

$$\Omega = a\omega + 2b\omega', \qquad C = \left[\frac{2b}{b_1}\right]\frac{\sqrt{a+2b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}},$$

$$\Omega' = a_1\omega + b_1\omega', \qquad r = \frac{3}{2}[1 + (-1)^{a_1}],$$

i podstawiając po obu stronach $z+\frac{\Omega}{2}$ na miejsce z, otrzymamy

$$\Theta(\Omega, \Omega', z) = Ce^{-\frac{bb_1\pi i}{2}} e^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\Omega}} \Theta_j(\omega, \omega', z),$$

$$j=\frac{3}{2}[1-(-1)^{a_1}];$$

ztąd, czyniąc $z=0$,

$$\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+2b\rho}\right)=\left[\frac{2b}{b_1}\right]\frac{\sqrt{a+2b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}}e^{-\frac{bb_1\pi i}{2}}\Theta_j(\rho)$$

Lecz

$$\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+2b\rho}\right)=\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+2b\rho}+1\right)=\Theta_3\left(\frac{a_1+a+(b_1+2b)\rho}{a+2b\rho}\right),$$

przeto

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+a+(b_1+2b)}{a+2b\rho}\right)=\left[\frac{2b}{b_1}\right]\frac{\sqrt{a+2b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}}e^{-\frac{bb_1\pi i}{2}}\Theta_j(\rho).$$

Lecz, inaczéj, na mocy wzoru (7) mamy

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+a+(b_1+2b)\rho}{a+2b\rho}\right)=\left[\frac{2b}{b_1+2b}\right]\frac{\sqrt{a+2b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}+b}}}\Theta_j(\rho);$$

zatém, porównywając, znajdujemy

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right]=\frac{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}+b}}}e^{\frac{bb_1\pi i}{2}}\left[\frac{2b}{b_1+2b}\right].$$

Jeśli $b=2k$, to mieć będziemy

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right]=(-1)^{\frac{b}{2}}\left[\frac{2b}{b_1+2b}\right],$$

jeśli zaś $b=2k+1$, to

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right]=(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left[\frac{2b}{b_1+2b}\right];$$

więc w ogóle, przy jakiejkolwiek liczbie b, parzystéj lub nieparzystéj, mamy

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right]=(-1)^{\frac{b(b-1)}{2}}\left[\frac{2b}{b_1+2b}\right],$$

albo

$$\left[\frac{2b}{b_1+2nb}\right]=(-1)^{n\frac{b(b-1)}{2}}\left[\frac{b}{b_1}\right], \tag{14}$$

gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, dodatną lub odjemną.

Niech $2b$ i b_1 oznaczają dwie liczby pierwsze między sobą; wykonajmy z $2b$ i b_1, szereg działań potrzebnych do wyznaczenia wartości symbolu

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right],$$

dajmy że po uskutecznieniu ich otrzymaliśmy dwa szeregi

$$2b,\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_{n-1},\ b_n = \pm 1,$$

$$q,\ q_1,\ldots,\ q_{n-1},$$

tak że $2b = qb_1 + b_2$, $b_1 = q_1 b_2 + b_3$, i t. d.; przytém liczby $b_2, b_4,\ldots, b_{n-1}, q_1, q_2,\ldots, q_{n-1}$, są parzyste, a $b_1, b_3,\ldots, b_n$ — nieparzyste.

Oczywiście mamy

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right] = \alpha \left[\frac{b_2}{b_3}\right],$$

gdzie $\alpha = -1$ jeśli $b_1 < 0$ a b i b_2 są znaków różnych; we wszystkich innych razach $\alpha = 1$.

Daléj, na mocy (14) otrzymujemy

$$\left[\frac{4}{b_1}\right] = \left[\frac{4}{q_1 b_2 + b_3}\right] = (-1)^{\frac{q_1 b_2}{4}} \left[\frac{4}{b_3}\right];$$

przeto

$$\left[\frac{4}{b_1}\right]\left[\frac{2b}{b_1}\right] = \alpha (-1)^{\frac{q_1 b_2}{4}} \left[\frac{4}{b_3}\right]\left[\frac{b_2}{b_3}\right].$$

Z drugiéj strony, mamy

$$\left[\frac{4b}{b_1}\right] = \left[\frac{2q2b_1 + 2b_2}{b_1}\right] = \alpha \left[\frac{2b_2}{b_1}\right],$$

i, na mocy (14),

$$\left[\frac{2b_2}{b_1}\right] = \left[\frac{2b_2}{q_1 b_2 + b_3}\right] = (-1)^{\frac{q_1 b_2}{4}} \left[\frac{2b_2}{b_3}\right],$$

tak że

$$\left[\frac{4b}{b_1}\right] = \alpha (-1)^{\frac{q_1 b_2}{4}} \left[\frac{2b_2}{b_3}\right].$$

Więc

$$\left[\frac{4}{b_1}\right]\left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{4b}{b_1}\right] = \left[\frac{4}{b_3}\right]\left[\frac{b_2}{b_3}\right]\left[\frac{2b_2}{b_3}\right].$$

Wnosząc w obydwóch stronach b_2, b_3, b_4, b_5 na miejsce $2b, b_1, b_2, b_3$, otrzymujemy

$$\left[\frac{4}{b_3}\right]\left[\frac{b_2}{b_3}\right]\left[\frac{2b_2}{b_3}\right] = \left[\frac{4}{b_5}\right]\left[\frac{b_4}{b_5}\right]\left[\frac{2b_4}{b_5}\right].$$

Podobnie postępując daléj, dojdziemy do równania

$$\left[\frac{4}{b_{n-2}}\right]\left[\frac{b_{n-3}}{b_{n-2}}\right]\left[\frac{2b_{n-3}}{b_{n-2}}\right]=\left[\frac{4}{b_n}\right]\left[\frac{b_{n-1}}{b_n}\right]\left[\frac{2b_{n-1}}{b_n}\right].$$

Ze wszystkich tych równań przez rugowanie otrzymujemy

$$\left[\frac{4}{b_1}\right]\left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{4b}{b_1}\right]=\left[\frac{4}{b_n}\right]\left[\frac{b_{n-1}}{b_n}\right]\left[\frac{2b_{n-1}}{b_n}\right];$$

lecz $b_n=\pm 1$, przeto

$$\left[\frac{4}{b_n}\right]=1,\quad \left[\frac{b_{n-1}}{b_n}\right]=\left[\frac{2b_{n-1}}{b_n}\right],$$

i

$$\left[\frac{4}{b_1}\right]\left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{4b}{b_1}\right]=1.$$

Ztąd

$$\left[\frac{4}{b_1}\right]\left[\frac{2b}{b_1}\right]=\left[\frac{4b}{b_1}\right]. \tag{15}$$

Odszukując wartość symbolu $\left[\frac{4}{b_1}\right]$ łatwo jest przekonać się. że

$$\left[\frac{4}{b_1}\right]=(-1)^{\frac{b_1-1}{8}};$$

w skutek tego powyższe równanie można przedstawić tak :

$$\left[\frac{4b}{b_1}\right]=(-1)^{\frac{b_1-1}{8}}\left[\frac{2b}{b_1}\right]. \tag{16}$$

11. Niech b i b_1 oznaczają dwie liczby nieparzyste i pierwsze względem siebie; wykonajmy szereg dzieleń jak dla wyznaczenia wartości symbolu $\left[\frac{b}{b_1}\right]$ i dajmy, że przytém otrzymaliśmy następujące dwa szeregi liczb :

$$b,\ b_1,\ b_2,\dots,\ b_n=\pm 1,$$

$$q,\ q_1,\dots,q_{n-1};$$

gdzie $q, q_1,\dots, q_{n-1}$ są liczbami, parzystemi, a $b, b_1,\dots, b_n$ — nieparzystemi ; prócz tego $b=qb_1+b_2$, $b_1=q_1b_2+b_3$, i t. d.

symbol $\left[\frac{2b}{b_1}\right]$ można wyrazić tak :

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right]=\left[\frac{2b_1q+2b_2}{b_1}\right]=\alpha\left[\frac{2b_2}{b_1}\right]=\alpha\left[\frac{2b_2}{b_2q_1+b_3}\right],$$

gdzie $\alpha=-1$ jeśli $b_1<0$ a b i b_2 są różnych znaków, w innych razach $\alpha=1$. Daléj, na mocy (14) otrzymujemy

$$\left[\frac{2b_2}{b_2q_1+b_3}\right]=(-1)^{\frac{q_1}{2}\frac{b_2-1}{2}}\left[\frac{2b_2}{b_3}\right],$$

zatém

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right]=(-1)^{\frac{q_1}{2}\frac{b_2-1}{2}}\alpha\left[\frac{2b_2}{b_3}\right].$$

Symbol $\left[\frac{2b_1}{b}\right]$ można przedstawić tak:

$$\left[\frac{2b_1}{b}\right]=\left[\frac{2b_1}{qb_1+b_2}\right]=(-1)^{\frac{q}{2}\frac{b_1-1}{2}}\left[\frac{2b_1}{b_2}\right];$$

lecz

$$\left[\frac{2b_1}{b_2}\right]=\left[\frac{2q_1b_2+2b_3}{b_2}\right]=\beta\left[\frac{2b_3}{b_2}\right],$$

gdzie $\beta=-1$ jeśli $b_2<0$ a b_1 i b_3 są znaków różnych, w innych razach $\beta=1$, przeto

$$\left[\frac{2b_1}{b}\right]=(-1)^{\frac{q}{2}\frac{b_1-1}{2}}\beta\left[\frac{2b_3}{b_2}\right].$$

Mnożąc powyższe dwa wyrażenia, otrzymujemy

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{2b_1}{b}\right]=\left[\frac{2b_2}{b_3}\right]\left[\frac{2b_3}{b_2}\right]\alpha\beta(-1)^{\frac{q}{2}\frac{b_1-1}{2}+\frac{q_1}{2}\frac{b_2-1}{2}}.$$

Niech ε oznacza -1 gdy obie liczby b i b_1 są odjemne, w innych razach $\varepsilon=1$; podobnie niech ε' oznacza -1, gdy $b_2<0$, i $b_3<0$, w innych razach $\varepsilon'=1$. Oczywiście mieć będziemy

$$\alpha\beta=\varepsilon\varepsilon'.$$

Daléj, z równań

$$b_1=q_1b_2+b_3,\qquad b=qb_1+b_2$$

wynika, że

$$\frac{b_1-b_3}{2}\equiv\frac{q_1}{2}\pmod 2,$$

$$\frac{b-b_2}{2}\equiv\frac{q}{2}\pmod 2,$$

gdyż b_1 i b_2 są liczbami nieparzystemi.

Wniosłszy otrzymane wyrażenia w poprzednie równanie znajdujemy

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{2b_1}{b}\right]=\varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{b-b_2}{2}\frac{b_1-1}{2}-\frac{b_1-b_3}{2}\frac{b_2-1}{2}}\left[\frac{2b_2}{b_3}\right]\left[\frac{2b_3}{b_2}\right]=\varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{b-1}{2}\frac{b_1-1}{2}-\frac{b_2-1}{2}\frac{b_3-1}{2}}\left[\frac{2b_2}{b_3}\right]\left[\frac{2b_3}{b_2}\right],$$

albo, inaczéj,

$$\varepsilon \left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{2b_1}{b}\right](-1)^{\frac{b_1-1}{2}\frac{b_2-1}{2}} = \varepsilon' \left[\frac{2b_2}{b_3}\right]\left[\frac{2b_3}{b_2}\right](-1)^{\frac{b_2-1}{2}\frac{b_3-1}{2}}.$$

Na mocy tego równania otrzymujemy

$$\varepsilon' \left[\frac{2b_2}{b_3}\right]\left[\frac{2b_3}{b_2}\right](-1)^{\frac{b_2-1}{2}\frac{b_3-1}{2}} = \varepsilon'' \left[\frac{2b_4}{b_5}\right]\left[\frac{2b_5}{b_4}\right](-1)^{\frac{b_4-1}{2}\frac{b_5-1}{2}},$$

. . . . ,

. . . . ,

$$\varepsilon^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\left[\frac{2b_{n-3}}{b_{n-2}}\right]\left[\frac{2b_{n-2}}{b_{n-3}}\right](-1)^{\frac{b_{n-1}-1}{2}\frac{b_{n-2}-1}{2}} = \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[\frac{2b_{n-1}}{b_n}\right]\left[\frac{2b_n}{b_{n-1}}\right](-1)^{\frac{b_{n-1}-1}{2}\frac{b_n-1}{2}}.$$

My uważamy n za liczbę nieparzystą, co oczywiście zawsze można dopuścić, gdyż jeśli $b_n = \pm 1$ przy n parzystym, to następne dzielenie b_{n-1} przez b_n da nam resztę $b_{n+1} = 1$, i $n+1$ będzie liczbą parzystą.

Mnożąc poprzednie równania, otrzymujemy

$$\varepsilon \left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{2b_1}{b}\right](-1)^{\frac{b-1}{2}\frac{b_1-1}{2}} = \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{3}\right)}\left[\frac{2b_{n-1}}{b_n}\right]\left[\frac{2b_n}{l_{n-1}}\right](-1)^{\frac{b_{n-1}-1}{2}\frac{b_n-1}{2}}.$$

Lecz $b_n = \pm 1$, przeto

$$\left[\frac{2b_{n-1}}{b_n}\right] = \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

$$\left[\frac{2b_n}{b_{n-1}}\right] = 1 \quad \text{jeśli} \quad b_n = 1$$

$$\left[\frac{2b_n}{b_{n-1}}\right] = (-1)^{\frac{b_{n-1}}{2}} \quad \text{jeśli} \quad b_n = -1,$$

przeto

$$\varepsilon\left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{2b_1}{b}\right](-1)^{\frac{b-1}{2}\frac{b_1-1}{2}} = 1;$$

ztąd

(17)
$$\left[\frac{2b}{b_1}\right] = \varepsilon\,(-1)^{\frac{b-1}{2}\frac{b_1-1}{2}}\left[\frac{2b_1}{b}\right],$$

gdzie b i b_1 oznaczają dwie jakiekolwiek liczby nieparzyste, pierwsze względem siebie; $\varepsilon = -1$ jeśli b, i b_1 są liczbami odjemnemi, w pozostałych razach $\varepsilon = 1$.

Równania (16) i (17) dają możność znalezienia związku między symbolem $\left[\frac{2b}{b_1}\right]$ i symbolem Legendre'a $\left(\frac{b}{b_1}\right)$ lecz należy przytém przyjąć za znane prawo wzajemności symbolu Legendre'a, które to prawo pomimo to poniżéj będzie dowiedzionem.

12. Niech $2b$ i a oznaczają jakiekolwiek dwie liczby pierwsze między sobą, z których pierwsza jest parzystą, i niech $2a_1$, b_1 będą dwie liczby czyniące zadość równaniu

$$ab_1 - 2a_1 . 2b = 1,$$

przyczém $2a_1$ jest liczbą parzystą. Łatwo dowieść że

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right] = \left[\frac{2b}{a}\right]. \tag{18}$$

Rzeczywiście, podstawiwszy w obydwóch stronach równości

$$\Theta_3\left(\frac{2a_1 + b_1\rho}{a + 2b\rho}\right) = \left[\frac{2b}{b_1}\right] \frac{\sqrt{a + 2b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}}\, \Theta_3(\rho)$$

na miejsce ρ ilość

$$\frac{-2a_1 + a\rho}{b_1 - 2b\rho} = \rho$$

otrzymamy

$$\Theta_3(\rho) = \left[\frac{2b}{b_1}\right] \frac{1}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}\sqrt{b_1 - 2b\rho}}\, \Theta_3\left(\frac{-2a_1 + a\rho}{b_1 - 2b\rho}\right),$$

albo

$$\Theta_3(\rho) = \left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{-2b}{a}\right] \frac{1}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}\sqrt{(-1)^{\frac{a-1}{2}}}}\, \Theta_3(\rho).$$

Dzieląc obie strony przez $\Theta_3(\rho)$ i zważając że $a \equiv b_1 \pmod 4$, znajdujemy

$$1 = \left[\frac{2b}{b_1}\right]\left[\frac{-2b}{a}\right](-1)^{\frac{a-1}{2}},$$

albo (13)

$$\left[\frac{2b}{b_1}\right] = \left[\frac{2b}{a}\right]. \quad \text{C. b. d. o.}$$

Takimże sposobem można dowieść, że jeśli

$$2a . 2b_1 - a_1 b = 1,$$

gdzie $2a$ i $2b_1$ są liczbami parzystemi, to

$$\left[\frac{b}{2a}\right] = \left[\frac{b}{2b_1}\right], \tag{19}$$

Dla dowiedzenia tego podstawmy w obydwóch stronach równości (8)

$$\Theta_3\left(\frac{a_1 + 2b_1\rho}{2a + b\rho}\right) = \left[\frac{b}{2b_1}\right] \frac{\sqrt{2a + b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}}\, e^{\frac{\pi i}{4}}\, \Theta_3(\rho).$$

na miejsce ρ ilość

$$\frac{-a_1+2a\rho}{2b_1-b\rho},$$

wtedy otrzymamy

$$\Theta_3(\rho)=\left[\frac{b}{2b_1}\right]\left[\frac{-b}{2a}\right]\frac{e^{\frac{\pi i}{2}}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}\sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}}}}\Theta_3(\rho).$$

Dzieląc obie strony przez $\Theta_3(\rho)$ i zważając że

$$\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}\sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}}}=i=e^{\frac{\pi i}{2}},$$

znajdujemy

$$\left[\frac{b}{2b_1}\right]\left[\frac{-b}{2a}\right]=1.$$

Lecz

$$\left[\frac{-b}{2a}\right]=\alpha\left[\frac{2a}{-b}\right],$$

$$\left[\frac{2a}{-b}\right]=\beta\left[\frac{2a}{b}\right],$$

$$\left[\frac{2a}{b}\right]=\gamma\left[\frac{b}{2a}\right],$$

gdzie $\alpha=-1$ jeśli $a<0$ i $b>0$ w innych razach $\alpha=1$; $\beta=-1$ jeśli $a<0$, w innych razach $\beta=1$; $\gamma=-1$, jeśli $a<0$ i $b<0$, w innych razach $\gamma=1$; zatém oczywiście

$$\alpha\beta\gamma=1,$$

i wskutek tego

$$\left[\frac{-b}{2a}\right]=\left[\frac{b}{2a}\right],$$

tak że powyżéj otrzymane równanie można napisać tak :

$$\left[\frac{b}{2b_1}\right]\left[\frac{b}{2a}\right]=1$$

a ztąd bezpośrednio otrzymujemy równanie (19):

$$\left[\frac{b}{2b_1}\right]=\left[\frac{b}{2a}\right]$$

13. Niech a i b oznaczają dwie liczby pierwsze między sobą, z których jedna jest parzystą, i niech a_1, b_1 oznaczają dwie liczby zadość czyniące równaniu

$$ab_1-a_1b=1.$$

Prócz tego założmy, że

1° jeśli b jest nieparzyste, to b_1 jest parzyste ;

2° jeśli a jest nieparzyste, to a_1 jest parzyste.

Oczywiście mieć będziemy

$$\Theta_3(\Omega, \Omega', z) = \mathrm{C} e^{\frac{b\pi z^2 i}{\omega\Omega}} \Theta_3(\omega, \omega', z),$$

gdzie jak zawsze,

$$\Omega = a\omega + b\omega'$$

$$\Omega' = a_1\omega + b_1\omega',$$

a wartość C oblicza się przy pomocy (7) lub (8).

Wypisując na miejsce funkcyj Θ_3 ich wyrażenia otrzymujemy

$$1 + 2\sum_1^\infty p^{n^2} \cos\frac{2n\pi z}{\Omega} = \mathrm{C} e^{\frac{b\pi z^2 i}{\omega\Omega}} \left(1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} \cos\frac{2n\pi z}{\omega}\right),$$

gdzie

$$p = e^{\pi\frac{\Omega'}{\Omega} i}, \quad q = e^{\pi\frac{\omega'}{\omega} i}.$$

Pomnóżmy obie strony poprzedzającéj równości przez dz i całkujmy od $z=0$ do $z=\Omega$ w kierunku linii prostéj, — otrzymamy

$$\Omega = \mathrm{C}\int_0^\Omega e^{\frac{b\pi z^2 i}{\omega\Omega}} \left(1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} \cos\frac{2n\pi z}{\omega}\right) dz,$$

albo, podstawiając na miejsce q i $\cos\frac{2n\pi z}{\omega}$ ich wyrażenia podane przez potęgi liczby e,

$$\Omega = \mathrm{C}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\Omega e^{\frac{b\omega z^2 i}{\omega\Omega} + \frac{2n\pi z i}{\omega} + n^2\frac{\pi\omega'}{\omega} i} dz.$$

Summę z prawéj strony rozłóżmy na b częściowych summ, z których każda składać się będzie z wyrazów odpowiednich wartościom dla n kongruentnych względem siebie : uczyniwszy to powyższe równanie można napisać tak :

$$\Omega = \mathrm{C}\sum_m\sum_r\int_0^\Omega e^{\frac{\pi i}{\omega\Omega}[bz^2 + 2(r+mb)\Omega z + (r+mb)^2\Omega\omega']} dz,$$

$$[r = 0,\ 1,\ 2, \ldots, (\pm b - 1)],$$

$$(m = -\infty, \ldots, +\infty).$$

Wielomian w nawiasie, pod znakiem całkowania można napisać tak :

$$\begin{aligned} & b(z^2+2m\Omega z)+2r\Omega(z+mb\omega')+m^2b^2\Omega\omega'+r^2\Omega\omega' \\ = {} & b(z+m\Omega)^2+2r\Omega(z+m\Omega-ma\omega)-m^2b\Omega(\Omega-b\omega')+r^2\Omega\omega' \\ = {} & b(z+m\Omega)^2+2r\Omega(z+m\Omega)-2rma\Omega\omega-m^2ab\Omega\omega+r^2\Omega\omega', \end{aligned}$$

i, po podstawieniu,

$$\Omega=\mathrm{C}\sum_m\sum_r\int_0^\Omega e^{\frac{\pi i}{\omega\Omega}[b(z+m\Omega)^2+2r\Omega(z+m\Omega)+r^2\Omega\omega']-(m^2ab+2rma)\pi i}dz$$

albo prościéj, ponieważ ab według założenia jest liczbą parzystą

$$\Omega=\mathrm{C}\sum_m\sum_r\int_0^\Omega e^{\frac{\pi i}{\omega\Omega}[b(z+m\Omega)^2+2r\Omega(z+m\Omega)+r^2\Omega\omega']}dz.$$

Podstawiając pod znakiem całkowania Ωz zamiast $z+m\Omega$ i dzieląc obie strony przez Ω znajdujemy

$$1=\mathrm{C}\sum_m\sum_r\int_m^{m+1} e^{\frac{\pi i}{\omega}[b\Omega z^2+2r\Omega z+r^2\omega']}dz.$$

Lecz oczywiście

$$\sum_m\int_m^{m+1} e^{\frac{\pi i}{\omega}(b\Omega z^2+2r\Omega z+r^2\omega')}dz=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(b\Omega z^2+2r\Omega z+r^2\omega')}dz,$$

zatém poprzednie równanie można przedstawić tak :

$$1=\mathrm{C}\sum_r\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{b\pi\Omega i}{\omega}\left(z+\frac{r}{b}\right)^2+\left(r^2\omega'-r^2\frac{\Omega}{b}\right)\frac{\pi i}{\omega}}dz,$$

albo

$$1=\mathrm{C}\sum_r\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{b\pi\Omega i}{\omega}\left(z+\frac{r}{b}\right)^2-\frac{\pi a i}{b}r^2}dz,$$

Podstawiając pod znakiem całkowania z zamiast $z+\frac{r}{b}$ i wyprowadzając wspólny mnożnik za znak summy, otrzymujemy

$$1=\mathrm{C}\sum_r e^{-\frac{\pi a i}{b}r^2}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{b\pi\Omega i}{\omega}z^2}dz,\quad (r=0,\ldots,b-1).$$

przyczém, oczywiście, znak całkowania rozciąga się na rzeczywiste wartości zmiennéj z.

Biorąc pod uwagę szczególny przypadek, kiedy

$$\Omega=\omega',\ \Omega'=-\omega,$$

znajdujemy

$$1 = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi\frac{\omega'}{\omega} i z^2}\, dz;$$

lecz (2)

$$C = \sqrt{-i\frac{\omega'}{\omega}},$$

przeto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi\rho z^2 i}\, dz = \sqrt{\frac{i}{\rho}},$$

gdzie ρ oznacza jakąkolwiek ilość urojoną w której współczynnik przy i jest dodatnym.

Jest to znany wzór, wyprowadzony przez Cauchy.

Wracając się do równania ogólnego, wyżéj otrzymanego, podstawmy w niém na miejsce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{b\pi\Omega i}{\omega} z^2}\, dz$$

wartość

$$\sqrt{i\frac{\omega}{b\Omega}};$$

otrzymamy

$$\sum_r e^{-\frac{\pi a i}{b} r^2} = \frac{\sqrt{-i\frac{b\Omega}{\omega}}}{C},$$

gdzie summa rozciąga się do wszystkich wartości całkowitych r od 0 do $b-1$, jeśli $b>0$, i od 0 $b+1$, jeśli $b<0$.

Rozbierzemy teraz oddzielnie dwa przypadki, kiedy liczba a jest parzystą i kiedy ona jest nieparzystą.

1° *Liczba a parzysta.* W takim razie b jest nieparzyste, i ze wzoru (8) otrzymujemy

$$C = \left[\frac{b}{b_1}\right] e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}},$$

gdyż b_1 według założenia jest liczbą parzystą.

Prawa strona poprzedniego ogólnego równania równa się

$$\frac{\sqrt{-i\frac{b\Omega}{\omega}}\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}}{\left[\frac{b}{b_1}\right] e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a+b\rho}} = \left[\frac{b}{b_1}\right] e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}} \frac{\sqrt{-bi(a+b\rho)}}{\sqrt{a+b\rho}}$$

$$= \left[\frac{b}{b_1}\right]\sqrt{-bi}\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}\, e^{-\frac{\pi i}{4}},$$

gdzie, oczywiście

$$\sqrt{a+b\rho}\,\sqrt{-bi}=\sqrt{-bi(a+b\rho)}\,;$$

prócz tego, na mocy (19), mamy

$$\left[\frac{b}{b_1}\right]=\left[\frac{b}{a}\right];$$

zatém

$$\sum_r e^{-\frac{\pi ai}{b}r^2}=\left[\frac{b}{a}\right]\sqrt{-bi}\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}e^{-\frac{\pi i}{4}}},$$

albo, podstawiając $-a$ na miejsce a i zważając że

$$\sqrt{-bi}=\sqrt{b}\;e^{-\frac{\pi i}{4}},$$

mamy

$$\sum_r e^{\frac{\pi ai}{b}r^2}=-i\left[\frac{b}{a}\right]\sqrt{b}\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}$$

$$=(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left[\frac{b}{-a}\right]\sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}}}\,\sqrt{b}.$$

Dotąd przypuszczaliśmy że b i a mogą być dodatnemi lub odjemnemi; lecz pierwsza część ostatniego równania nie narusza się gdy jednocześnie zmieniamy znaki przy a i b; wskutek tego można zawsze uważać że $b>0$, i w takim razie mieć będziemy

$$\sum_r e^{\frac{\pi ai}{b}r^2}=(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left[\frac{b}{-a}\right]\sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b}.$$

Ponieważ jednakże $b>0$, mamy

$$\left[\frac{b}{-a}\right]=\left[\frac{-a}{b}\right]=(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left[\frac{a}{b}\right],$$

zatém

(20)
$$\sum_r e^{\frac{\pi ai}{b}r^2}=\left[\frac{a}{b}\right]\sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b},$$

$$(b>0),\quad (r=0,1,\ldots,b-1),$$

przy czém a jest liczbą parzystą. Jest to znany wzór Gauss'a.

2° *Liczba a nieparzysta.* W takim razie, według założenia b i a_1 są liczbami parzystemi, i na zasadzie równania (7) otrzymujemy

$$C=\left[\frac{b}{b_1}\right]\frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}}},$$

lecz równanie (18) wskazuje że

$$\left[\frac{b}{b_1}\right]=\left[\frac{b}{a}\right],$$

zatém ponieważ $b_1 \equiv a \pmod 4$

$$C=\left[\frac{b}{a}\right]\frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{a-1}{2}}}}.$$

Podstawiając tę wartość w równanie

$$\sum_r e^{-\frac{\pi a i}{b}r^2}=\frac{\sqrt{-ib(a+b\rho)}}{C},$$

otrzymujemy

$$\sum_r e^{-\frac{\pi a i}{b}r^2}=\left[\frac{b}{a}\right]\sqrt{(-1)^{\frac{a-1}{2}}}\sqrt{-bi},$$

albo, podstawiając $-a$ na miejsce a

$$\sum_r e^{\frac{\pi a i}{b}r^2}=\left[\frac{b}{-a}\right]\sqrt{b}\sqrt{(-1)^{\frac{a+1}{2}}}e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Przypuśćmy nareszcie że $b>0$, mieć będziemy

$$\left[\frac{b}{-a}\right]=\left[\frac{a}{b}\right],\quad \sqrt{b}\sqrt{(-1)^{\frac{a+1}{2}}}=\sqrt{(-1)^{\frac{a+1}{2}}b},$$

zatém

(21) $$\sum_r e^{\frac{\pi a i}{b}r^2}=\left[\frac{b}{a}\right]e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{a+1}{2}}b},$$

$$(b>0),\quad (r=0,1,\ldots,b-1),$$

przyczém b jest liczbą parzystą. Jest to również wzór Gauss'a.

14. Wzór (20) rzuca nowe światło na naturę symbolu $\left[\frac{a}{b}\right]$, gdzie a jest liczbą parzystą i daje możność bezpośrednio wyprowadzić nie tylko te jego własności, które wywiedliśmy wyżéj, ale i nowe, które nie dają się otrzymać prostszą drogą.

Przypuśćmy naprzód, że w równaniu

$$\sum_r e^{\frac{2\pi a i}{b}r^2}=\left[\frac{2a}{b}\right]\sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b},$$

liczba dodatna, nieparzysta b jest liczbą prostą.

Przypuśćmy następnie że a jest kwadratową resztą względem b i niech x będzie liczbą zadość czyniącą kongruencyi

$$a \equiv x^2 \pmod{b}$$

oczywiście otrzymamy

$$\sum_r e^{\frac{2\pi a i}{b} r^2} = \sum_r e^{\frac{2\pi i}{b}(rx)^2} = \sum_r e^{\frac{2\pi i}{b} r^2},$$

gdyż, jeśli ilości r nadajemy po kolei wartości $0, 1, \ldots, b-1$, to iloczyn rx przechodzi przez wartości różniące się od poprzednich wielokrotnościami liczby b i porządkiem, lecz to nie wywiera żadnego wpływu na wartość summy.

Według poprzedniego wzoru mamy

$$\sum_r e^{\frac{2\pi i}{b} r^2} = \sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}} b},$$

zatém

$$\sum_r e^{\frac{2\pi a i}{b} r^2} = \sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}} b}.$$

Porównywając to wyrażenie z poprzedniém wyrażeniem tejże saméj summy, otrzymujemy

$$\left[\frac{2a}{b}\right] = 1.$$

I tak, jeśli b jest liczbą prostą, nieparzystą, a liczba a jest kwadratową resztą względem b, to wartość symbolu $\left[\frac{2a}{b}\right]$ równa się $+1$.

W przeciwnym razie, jeśli a nie jest kwadratową resztą względem b, to gdy r przechodzić będzie po kolei przez wszystkie wartości

$$0, 1, 2, \ldots, b-1,$$

iloczyn ar^2 przechodzić będzie po dwa razy przez wartości kongruentne według modułu b z każdą z tych liczb powyższego szeregu, które nie są kwadratowemi resztami, wyjątek czyni $r=0$, przyczém $ar^2=0$; ilość zaś r^2 przechodzić będzie po dwa razy przez wartości kongruentne według modułu b z każdą z liczb powyższego szeregu, która jest kwadratową resztą oprócz wartości 0 przez którą przejdzie tylko raz jeden. Więc summa

$$\sum_r e^{\frac{2\pi a i}{b} r^2} + \sum_r e^{\frac{2\pi i}{b} r^2}$$

równa się dwa razy wziętéj summie pierwiastków równania

$$x^b - 1 = 0,$$

to jest, równa się zeru; ztąd

$$\sum_r e^{\frac{2\pi a i}{b} r^2} = -\sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}} b}.$$

Więc jeśli a nie jest kwadratową resztą względem modułu b (b liczba prosta nieparzysta), to

$$\left[\frac{2a}{b}\right]=-1.$$

I tak, widzimy, że jeśli b jest liczbą dodatnią, prostą i nieparzystą to,

$$\left[\frac{2a}{b}\right]=\left(\frac{a}{b}\right),$$

gdzie $\left(\frac{a}{b}\right)$ przedstawia znany z teoryi liczb symbol Legendre'a.

Ztąd wynika, że jeśli b jest liczbą dodatnią, prostą i nieparzystą, to

$$\left[\frac{2a}{b}\right]\left[\frac{2a'}{b}\right]=\left[\frac{2aa'}{b}\right].$$

Lecz

$$\left[\frac{2a}{-b}\right]=\alpha\left[\frac{2a}{b}\right],$$

gdzie $\alpha=-1$ jeśli $a<0$, w przeciwnym razie $\alpha=1$; zatém

$$\left[\frac{2a}{-b}\right]\left[\frac{2a'}{-b}\right]=\alpha\alpha'\left[\frac{2a}{b}\right]\left[\frac{2a'}{b}\right]=\alpha\alpha'\left[\frac{2aa'}{b}\right]=\left[\frac{2aa'}{-b}\right].$$

Ztąd przekonywamy się, że równanie

$$\left[\frac{2a}{b}\right]\left[\frac{2a'}{b}\right]=\left[\frac{2aa'}{b}\right]$$

ma miejsce tak dla liczb b prostych dodatnich jako też i odjemnych.

Oczywiście z poprzedzającego równania wynika, że

$$\left[\frac{2a}{b}\right]\left[\frac{2a'}{b}\right]\left[\frac{2a''}{b}\right]\ldots=\left[\frac{2aa'a''\ldots}{b}\right]. \tag{22}$$

Daléj, jeśli a jest liczbą prostą, nieparzystą, a $b, b', b'', \ldots$ oznaczają jakiekolwiek liczby nieparzyste, pierwsze względem a, to, według (17), mamy

$$\left[\frac{2a}{b}\right]=\beta(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}\left[\frac{2b}{a}\right],$$

$$\left[\frac{2a}{b'}\right]=\beta'(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b'-1}{2}}\left[\frac{2b'}{a}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ztąd

$$\left[\frac{2a}{b}\right]\left[\frac{2a}{b'}\right]\ldots=\beta\beta'\ldots(-1)^{\frac{a-1}{2}\left(\frac{b-1}{2}+\frac{b'-1}{2}+\ldots\right)}\left[\frac{2b}{a}\right]\left[\frac{2b'}{a}\right]\ldots,$$

albo, biorąc pod uwagę wyrażenie (22) i to, że

$$\frac{b-1}{2}+\frac{b'-1}{2}+\ldots=\frac{bb'\ldots-1}{2}\ (\mathrm{mod}\,2),$$

$$\left[\frac{2a}{b}\right]\left[\frac{2a}{b'}\right]\ldots=\beta\beta'\ldots(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{bb'\ldots-1}{2}}\left[\frac{2bb'\ldots}{a}\right].$$

Ztąd, na zasadzie (17),

$$\left[\frac{2a}{b}\right]\left[\frac{2a}{b'}\right]\ldots=\left[\frac{2a}{bb'\ldots}\right]. \tag{23}$$

Równanie to oczywiście ma także miejsce dla $a=2$, gdyż

$$\left[\frac{4}{b}\right]=(-1)^{\frac{b^2-1}{8}}$$

Pozostaje nam dowieść, że równanie (22) ma miejsce i wtedy gdy liczba b jest złożona.

Jeśli tego dowiedziemy, to oczywiście tém samém będzie dowiedzionem, że równanie (23) ma miejsce tak dla liczb a prostych jak i złożonych.

Niech będą dwie liczby pierwsze względem siebie, jedna parzysta $2P$, druga nieparzysta Q; oznaczmy symbolem $(2P, Q)$ iloczyn

$$(2P, Q)=\left[\frac{2p_1}{Q}\right]\left[\frac{2p_2}{Q}\right]\ldots\left[\frac{2p_m}{Q}\right],$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots p_m$ są liczby proste, wchodzące w skład P, tak że

$$P=p_1, p_2, \ldots, p_m.$$

Przypuśćmy następnie, że wykonywając nad $2P$ i Q szereg dzieleń, potrzebnych dla wyznaczenia wartości symbolu $\frac{2P}{Q}$, otrzymaliśmy następujący szereg liczb:

$$2P,\ Q,\ 2P_1,\ Q_1, \ldots 2P_n,\ Q_n=\pm 1,$$

tak ż

$$2P=hQ+2P_1,\quad Q=h_1.2P_1+Q_1, \ldots,$$

gdzie $h, h_1, \ldots$, są liczbami parzystemi.

Niech $Q=q_1q_2\ldots q_r$ gdzie $q_1, q_2, \ldots q_r$ są liczbami prostemi.

Wychodząc z określenia i biorąc pod uwagę równania (22) i (23) otrzymujemy

$$(2P, Q)=\left[\frac{2P}{q_1}\right]\left[\frac{2P}{q_2}\right]\ldots\left[\frac{2P}{q_r}\right],$$

albo

$$(2P^1, Q)=\alpha\left[\frac{2P_1}{q_1}\right]\left[\frac{2P_1}{q_2}\right]\ldots\left[\frac{2P_1}{q_r}\right],$$

gdzie $\alpha=-1$ jeśli $Q<0$ a P i P_1 są znaków przeciwnych; w innych razach $\alpha=1$.

Niech $P_1 = p'_1\, p'_2 \dots p'_s$, gdzie $p'_1, p'_2, \dots$, są liczbami prostemi. Biorąc znowu pod uwagę (22) i (23), powyższe wyrażenie dla $(2P, Q)$ można zastąpić następującém:

$$(2P, Q) = \alpha \left[\frac{2p'_1}{Q}\right] \left[\frac{2p'_2}{Q}\right] \cdots \left[\frac{2p'_s}{Q}\right];$$

ztąd, na mocy (14),

$$(2P, Q) = \alpha \left[\frac{2p_1'}{Q_1}\right] \left[\frac{2p_2'}{Q_1}\right] \cdots \left[\frac{2p_s'}{Q_1}\right],$$

albo, inaczéj,

$$(2P, Q) = \alpha (2P_1, Q_1).$$

Lecz z drugiéj strony mamy oczywiście

$$\left[\frac{2P}{Q}\right] = \alpha \left[\frac{2P_1}{Q_1}\right];$$

zatém

$$(2P, Q) \left[\frac{2P}{Q}\right] = (2P_1, Q_1) \left[\frac{2P_1}{Q_1}\right].$$

Więc także

$$(2P_1, Q_1) \left[\frac{2P_1}{Q_1}\right] = (2P_2, Q_2) \left[\frac{2P_2}{Q_2}\right],$$

....

....

i rugując, otrzymujemy

$$(2P, Q) \left[\frac{2P}{Q}\right] = (2P_n, Q_n) \left[\frac{2P_n}{Q_n}\right]$$

Lecz $Q_n = \pm 1$, przeto

$$(2P_n, Q_n) = \left[\frac{2P_n}{Q_n}\right],$$

i

$$(2P, Q) \left[\frac{2P}{Q}\right] = \left[\frac{2P_n}{Q_n}\right]^2 = 1,$$

ztąd

$$\left[\frac{2P}{Q}\right] = (2P, Q),$$

to jest

$$\left[\frac{2P}{Q}\right] = \left[\frac{2p_1}{Q}\right] \left[\frac{2p_2}{Q}\right] \cdots \left[\frac{2p_n}{Q}\right] = \left[\frac{2P}{q_1}\right] \left[\frac{2P}{q_2}\right] \cdots \left[\frac{2P}{q_r}\right].$$

Ztąd, jako wniosek, wynika, że równania (22) i (23) mają miejsce i pomimo tych warunków, przy których one były wyprowadzone.

Własności symbolu $\left[\frac{2a}{b}\right]$ wyprowadzone w tym numerze pokazują nam, że jeżeli $b>0$, to

$$\left[\frac{2a}{b}\right]=\left(\frac{a}{b}\right)$$

tak dla liczby b prostéj jako téż i złożonéj.

W teoryi liczb pod wyrażeniem

$$\left(\frac{a}{-b}\right), \quad (b>0)$$

rozumieć należy wartość $\left(\frac{a}{b}\right)$; przeto, biorąc pod uwagę (12), mamy

$$\left[\frac{2a}{-b}\right]=\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{-b}\right), \quad \text{jeśli } a>0, \ b>0$$

$$\left[\frac{2a}{-b}\right]=-\left(\frac{a}{b}\right)=-\left(\frac{a}{-b}\right) \quad \text{jeśli } a<0, \ b>0;$$

tak że w ogóle, przy jakichkolwiek wartościach dla a i b,

$$\left[\frac{2a}{b}\right]=\varepsilon\left(\frac{a}{b}\right),$$

gdzie $\varepsilon=-1$ jeśli a i b są liczbami odjemnemi, w innych razach $\varepsilon=1$.

15. — Znając wyrażenie czynnika C w równości

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=C\Theta_j(\rho),$$

możemy bez żadnéj trudności znaleźć wyrażenia podobnych czynników, odpowiednich funkcyom

$$\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right), \quad \Theta_2\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right), \quad \Theta'_1\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}, \ \Omega\right).$$

Dajmy, naprzykład, że b_1 jest liczbą parzystą, i w równości

$$\Theta_3(\Omega, \Omega', z)=Ce^{\frac{b\pi z^2 i}{\omega\Omega}}\Theta_j(\omega, \omega', z),$$

$$j=\frac{3}{2}[1+(-1)^a],$$

podstawmy $z+\frac{\Omega}{2}$ na miejsce z, i następnie uczyńmy $z=0$, to otrzymamy

$$\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=Ce^{\frac{ab\pi i}{4}}\Theta_2(\rho).$$

Lecz w przypadku wziętym pod uwagę mamy

$$C=\left[\frac{b}{b_1}\right]e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}},$$

rzeto

$$\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\varepsilon\left[\frac{b_1}{b}\right]e^{\frac{(ab+1)\pi i}{4}}\frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}}\,\Theta_2(\rho),$$

gdzie $\varepsilon=-1$, jeżeli $b<0$ i $b_1<0$, w innych razach $\varepsilon=1$; prócz tego b_1 jest liczbą parzystą.

Przypuśćmy teraz, że obie liczby b i b_1 są nieparzystemi, wtedy mieć będziemy

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}+1\right)=\Theta\left(\frac{a_1+a+(b_1+b)\rho}{a+b\rho}\right).$$

Ztąd, biorąc pod uwagę wyżéj podane wyrażenie, otrzymujemy

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\eta\left[\frac{b+b_1}{b}\right]e^{\frac{(ab+1)\pi i}{4}}\frac{\sqrt{a+b\rho}}{\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}}}\,\Theta_2(\rho),$$

gdzie $\eta=-1$ jeśli $b<0$ i $b+b_1<0$, w innych razach $\eta=1$.

Wzór ten daje nam toż samo co i wzór (9), tylko wyrażenie mnożnika w tym ostatnim jest prostszém, gdyż dla znalezienia jego wartości nie potrzeba szukać wartości liczby a.

Podobnym sposobem możemy znaleźć wyrażenia mnożników dla wszystkich innych funkcyj i we wszystkich szczególnych przypadkach. Otrzymane przytém rezultaty wypisujemy w niżéj umieszczonéj tablicy, przyczém pozwalamy sobie wypisać także wyrażenia dla modułów $\sqrt{k_1}$, $\sqrt{k_1'}$ i paramatru g_1, funkcyj eliptycznych odpowiednich peryodom Ω, Ω', które się otrzymują przy pomocy wzorów

$$\sqrt{k_1}=\frac{\Theta_2\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)}{\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)},\qquad \sqrt{k'_1}=\frac{\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)}{\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)},\qquad g_1=\frac{\Theta'_1\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho},\,\Omega\right)\;\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)}{\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)\;\Theta_2\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)}.$$

Rozumie się, że wyrażenia $\sqrt{k_1}$, $\sqrt{k'_1}$, g_1, mogą być znalezione bez pomocy wyrażenia czynnika C.

Nie należy zapominać, że

$$\Theta'_1\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho},\,\Omega\right)$$

oznacza, dla skrócenia, wartość ilorazu

$$\frac{\Theta_1(\Omega,\,\Omega',\,z)}{z}$$

dla $z=0$, tak że

$$\Theta'_1\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho},\ \Omega\right)=2\,\frac{\pi}{\Omega}\sum(-1)^{n-1}(2n-1)p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2},\ (n=1,2,\ldots\infty),\ p=e^{\pi\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}i}.$$

Nareszcie dla uproszczenia założymy, że $b>0$, co oczywiście zawsze można dopuścić.

1° *Liczba b parzysta*, ($b>0$).

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}b}{b_1}\right)\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}(a+b\rho)}\ \Theta_i(\rho),\ i=\frac{3}{2}\left[1+(-1)^{a_1}\right];$$

$$\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}b}{b+b_1}\right)\sqrt{(-1)^{\frac{b+b_1-1}{2}}(a+b\rho)}\ \Theta_j(\rho),\ j=\frac{3}{2}\left[1-(-1)^{a_1}\right];$$

$$\Theta_2\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}b}{b_1}\right)e^{\frac{a_1b_1\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}(a+b\rho)}\ \Theta_2(\rho),$$

$$\Theta'_1\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho},\Omega\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}b}{b_1}\right)(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}e^{\frac{(ab+a_1b_1)\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}(a+b\rho)}\ \Theta'_1(\rho,\omega),$$

Jeśli a_1 jest liczbą parzystą, to

$$\sqrt{k_1}=e^{\frac{a_1b_1\pi i}{4}}\sqrt{k},\quad \sqrt{k'_1}=e^{-\frac{ab\pi i}{4}}\sqrt{k'},\quad g_1=(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}g.$$

Jeśli a_1 jest liczbą nieparzystą, to

$$\sqrt{k_1}=e^{\frac{a_1b_1\pi i}{4}}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}},\quad \sqrt{k_1'}=e^{\frac{ab\pi i}{4}}\frac{1}{\sqrt{k'}},\quad g_1=(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}g.$$

2° *Liczba b_1 parzysta* ($b>0$).

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}b_1}{b}\right)e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}(a+b\rho)}\ \Theta_i(\rho),\qquad i=\frac{3}{2}\left[1+(-1)^{a}\right];$$

$$\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}b_1}{b}\right)e^{\frac{(ab+1)\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}(a+b\rho)}\ \Theta_2(\rho),$$

$$\Theta_2\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left(\frac{2b}{b+b_1}\right)e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{b+b_1-1}{2}}(a+b\rho)}\ \Theta_j(\rho),\qquad j=\frac{3}{2}\left[1-(-1)^{a}\right];$$

$$\Theta'_1\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho},\ \Omega\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}b_1}{b+b_1}\right)(-1)^{\frac{b+1}{2}}\ i\ e^{\frac{(ab+1)\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{b+b'+1}{2}}(a+b\rho)}\ \Theta'_1(\rho,\omega).$$

Jeśli liczba a parzysta, to

$$\sqrt{k_1}=e^{-\frac{a_1b_1\pi i}{4}}\sqrt{k'},\quad \sqrt{k_1'}=e^{\frac{ab\pi i}{4}}\sqrt{k},\quad g_1=(-1)^{\frac{b+1}{2}}ig.$$

Jeśli liczba a nieparzysta, to

$$\sqrt{k_1}=e^{\frac{a_1b_1\pi i}{4}}\frac{1}{\sqrt{k'}},\quad \sqrt{k_1'}=e^{\frac{ab\pi i}{4}}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}},\quad g_1=(-1)^{\frac{b+1}{2}}ik'g.$$

3° *Liczby b i b_1 są nieparzyste*, $(b>0)$

$$\Theta_3\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left(\frac{2b_1}{b}\right)e^{\frac{(ab+1)\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}(a+b\rho)}\;\Theta_2(\rho),$$

$$\Theta\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left(\frac{2b_1}{b}\right)e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{b+1}{2}}(a+b\rho)}\;\Theta_i(\rho),$$

$$i=\frac{3}{2}[1+(-1)^a];$$

$$\Theta_2\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho}\right)=\left(\frac{2b}{b_1}\right)\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}(a+b\rho)}\Theta_j(\rho),\quad j=\frac{3}{2}[1-(-1)^a];$$

$$\Theta'_1\left(\frac{a_1+b_1\rho}{a+b\rho},\Omega\right)=\left(\frac{2b}{b_1}\right)(-1)^{\frac{b+1}{2}}\;i\;e^{\frac{ab\pi i}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{b_1-1}{2}}(a+b\rho)}\;\Theta'_1(\rho,\omega).$$

Jeśli liczba a parzysta to

$$\sqrt{k_1}=e^{-\frac{a_1b_1\pi i}{4}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}},\qquad \sqrt{k'_1}=e^{-\frac{ab\pi i}{4}}\frac{1}{\sqrt{k}},\quad g_1=(-1)^{\frac{a_1-1}{2}}ikg.$$

Jeśli liczba a nieparzysta, to

$$\sqrt{k_1}=e^{-\frac{a_1b_1\pi i}{4}}\frac{1}{\sqrt{k}},\ \sqrt{k'_1}=e^{-\frac{ab\pi i}{4}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}},\quad g_1=(-1)^{\frac{a-1}{2}}kg.$$

16. Ze wzorów Gauss'a dla summy

$$\sum e^{\frac{\pi ai}{b}r^2},$$

wyprowadzonych w n° **13** otrzymujemy bezpośrednio wyrażenia dla summy

$$\sum(-1)^r e^{\frac{\pi ai}{b}r^2}.$$

Dość jest dla tego we wzorach Gauss'a na miejsce a podstawić $a+b$.

Takim sposobem otrzymane wzory razem z wzorami Gauss'a wypisujemy w następującéj tablicy:

1° a i b *pierwsze między sobą i obie nieparzyste* $(b>0)$.

$$\sum_r e^{\frac{\pi ai}{b}r^2}=1,$$

$$\sum_r(-1)^r e^{\frac{\pi ai}{b}r^2}=\left(\frac{2a}{b}\right)\sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b}=\left(\frac{a}{b}\right)\sqrt{b}\;e^{-\frac{\pi(b-1)i}{4}}.$$

2° *a* i *b pierwsze między sobą, liczba a parzysta* ($b > 0$).

$$\sum_r e^{\frac{\pi a i}{b} r^2} = \left(\frac{\frac{1}{2} a}{b}\right) \sqrt{(-1)^{\frac{b-1}{2}} b} = \left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{b}\, e^{-\frac{\pi(b-1)i}{4}},$$

$$\sum_r (-1)^r e^{\frac{\pi a i}{b} r^2} = 1.$$

3° *a* i *b pierwsze między sobą, b parzysta* ($b > 0$).

$$\sum_r e^{\frac{\pi a i}{b} r^2} = \left(\frac{b}{a}\right) \sqrt{b}\, e^{\frac{\pi a i}{4}},$$

$$\sum_r (-1)^r e^{\frac{\pi a i}{b} r^2} = \left(\frac{b}{a-b}\right) \sqrt{b}\, e^{\frac{\pi(a-b)i}{4}}.$$

Ztąd otrzymujemy wyrażenia summy

$$\sum_r e^{\frac{\pi a i}{b} r^2}$$

dla wszystkich parzystych lub nieparzystych wartości r mniejszych od b.

Naprzykład, jeśli b jest liczbą parzystą, to

$$2 \sum_r e^{\frac{\pi a i}{b} r^2} = \sqrt{b} \left[\left(\frac{b}{a}\right) e^{\frac{\pi a i}{4}} - \left(\frac{b}{a-b}\right) e^{\frac{\pi(a-b)i}{4}} \right],$$

$$(r = 1, 3, 5, \ldots b-2);$$

ztąd, podstawiając $2r+1$ na miejsce r,

$$2 \sum_r e^{\frac{4\pi a i}{b} r(r+1)} = e^{-\frac{\pi a i}{b}} \sqrt{b} \left[\left(\frac{b}{a}\right) e^{\frac{\pi a i}{4}} - \left(\frac{b}{a-b}\right) e^{\frac{\pi(a-b)}{4}} \right],$$

$$\left(r = 0, 1, \ldots \frac{b}{2} - 1\right).$$

Podstawiwszy $4b$ na miejsce b i wziąwszy pod uwagę, że

$$e^{\frac{\pi a i}{b} r(r+1)} = e^{\frac{\pi a i}{b}(2b-r-1)(2b-r)},$$

otrzymamy

$$\sum_r e^{\frac{\pi a i}{b} r(r+1)} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi a(b-1)i}{4b}} \sqrt{b} \left[\left(\frac{b}{a}\right) - (-1)^b \left(\frac{b}{a}\right) \right].$$

$$(r = 0, 1, \ldots b-1).$$

Więc, jeśli b jest liczbą parzystą, to

$$\sum_r e^{\frac{\pi a i}{b} r(r+1)} = 0,$$

$$(r = 0, 1, \ldots b - 1),$$

co zresztą można sprawdzić bezpośrednio; jeśli zaś b jest liczbą nieparzystą, to

$$\sum_r e^{\frac{\pi a i}{b} r(r+1)} = \left(\frac{b}{a}\right) e^{\frac{\pi a(b-1)i}{4b}} \sqrt{b}, \quad (r = 0, 1, \ldots b - 1), \quad (b > 0).$$

gdzie b i a są jakiekolwiek dwie liczby wzajemnie proste.

Lebesgue w jednéj ze swoich rozpraw dał nader ciekawy dowód poprzedzającego wzoru i następnie, posługując się nim, wywiódł także wzory Gauss'a (*Journal de M. Liouville.*, 1840).

22 Stycznia 1877 roku.

PARIS. — IMPRIMERIE DE E. MARTINET, RUE MIGNON, 2