

Katarzyna Cabańska

WZAJEMNY WPŁYW ZGINANIA
I SKRĘCANIA BELKI
ZANURZONEJ W DWUPARAMETROWYM
OŚRODKU SPRĘŻYSTYM

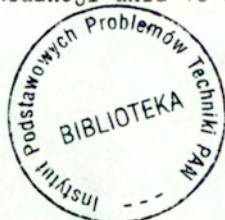
8/1993

P. 269



WARSZAWA 1993

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 września 1992 r.



56682



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 0,75 Ark.druk. 1,0
Oddano do drukarni w marcu 1993 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

Katarzyna Cabańska
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
Instytut Techniki
Bydgoszcz

WZAJEMNY WPŁYW ZGINANIA I SKRĘCANIA BELKI ZANURZONEJ W DWUPARAMETROWYM OŚRODKU SPRĘŻYSTYM

Streszczenie

W pracy przedstawiono problem wzajemnego wpływu zginania i skręcania belki zanurzonej w dwuparametrowym ośrodku sprężystym. Przyczyną pojawienia się tego zjawiska jest występowanie oporu normalnego i stycznego ośrodka sprężystego na belkę o przekroju posiadającym najwyżej jedną oś symetrii. Matematycznym modelem opisu omawianego zjawiska jest sprzężony układ trzech liniowych niejednorodnych równań różniczkowych.

1. Wstęp

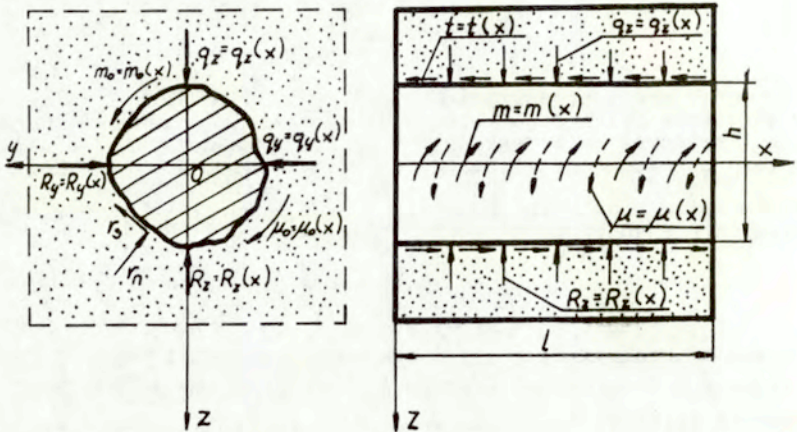
Zagadnienia ośrodków sprężystych należą do ważniejszych zagadnień mechaniki, a w szczególności mechaniki budowli. Wpływ wzajemnego oddziaływania ośrodka i konstrukcji jest w wielu przypadkach istotny. W różnych urządzeniach technicznych, maszynach, budowlach, poszczególne elementy współpracują ze sobą. Najprostszym przypadkiem zanurzenia konstrukcji w ośrodku sprężystym jest utwierdzenie części belki np. w murze, fundamencie lub korpusie maszyn. Wieńce stropowe można rozpatrywać jako belki zanurzone całkowicie w ośrodku sprężystym. Elementy konstrukcyjne jak i ośrodki sprężyste podatne są na odkształcenia. Przedmiotem rozważań jest opis odkształceń elementów konstrukcyjnych współpracujących z ośrodkiem sprężystym.

W pracy Z. Wasilutyńskiego, S. Zagrodzkiego, W. Marksa [3] dokonano analizy zginania pali wbitych w podłoże jednorodne. Pali ulega zginaniu w płaszczyźnie pionowej wskutek działania siły pionowej T_0 lub momentu M_0 przyłożonego do jego wierzchołka. Założono, że oddziaływanie podłoża na pali jest proporcjonalne do przesunięcia y . Brak literaturowych danych na temat zachowania się belki zanurzonej w dwuparametrowym ośrodku sprę-

żystym stały się motywem do opisu tego zagadnienia.

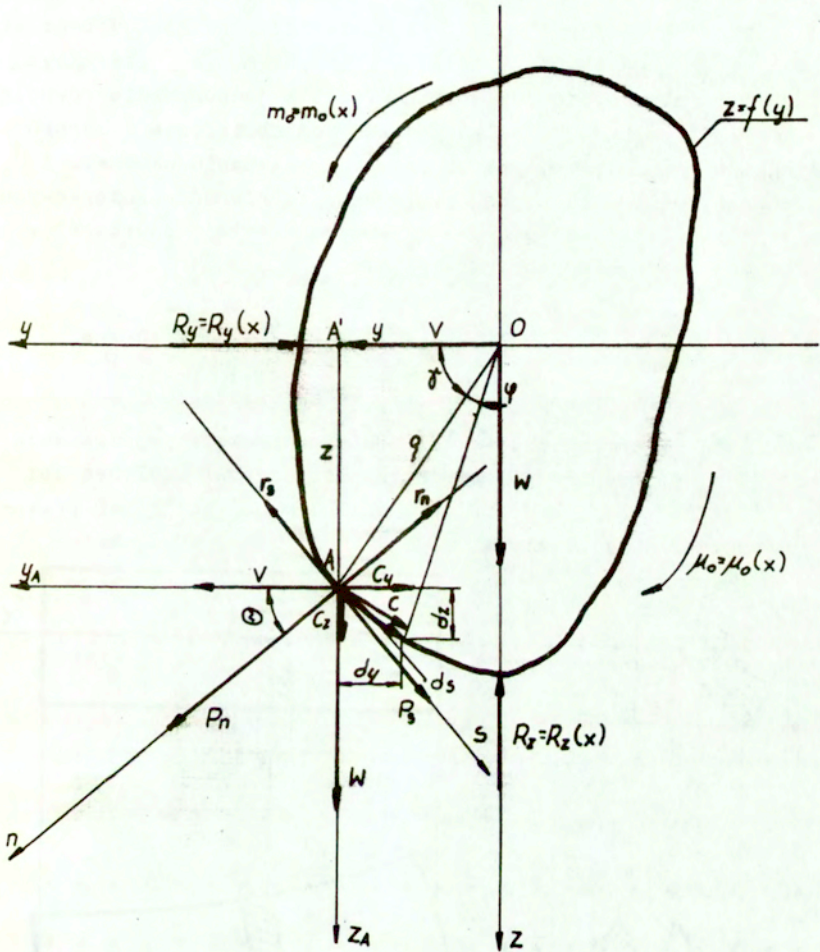
2. Sformułowanie problemu i cel pracy.

W celu opisu zjawiska zachowania się belki w dwuparametrowym ośrodku sprężystym przedstawiono fizyczny model tego zagadnienia / rvs. 1/, [1].



Rys. 1. Schemat obciążenia belki w ośrodku sprężystym.

Modelem fizycznym jest belka obciążona siłą rozłożoną $q/x/$ lub siłą skupioną $P\delta(x-x_i)$ normalną do osi belki oraz momentem rozłożonym $m_o/x/$, lub momentem skupionym $M\delta(x-x_i)$ działającym w płaszczyźnie głównej belki oraz momentem rozłożonym $m_o/x/$ lub momentem skupionym $M_o\delta(x-x_k)$ działającym w osi belki. Belka o długości l zanurzona jest w dwuparametrowym ośrodku sprężystym. Przyjęto, że ośrodek jest monolityczny i jednorodny. Założono, że belka jest w stałym kontakcie z ośrodkiem tzn. że oprócz tego, że nie występują szczeliny między belką a ośrodkiem, to również nie występuje między nimi poślizg. Belka



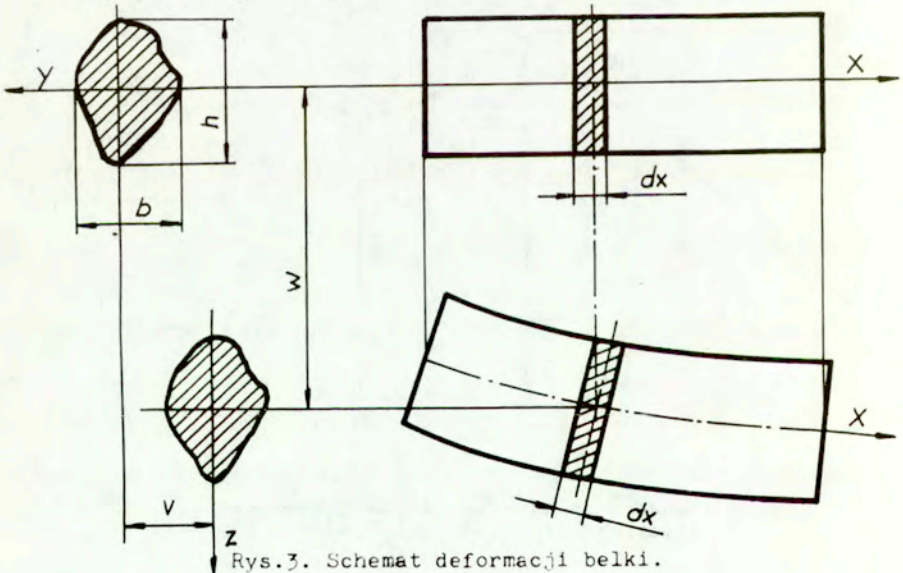
Rys.2. Schemat składowych odporu normalnego i stycznego oraz składowych odporu poprzecznego.

zanurzona w ośrodku sprężystym i znajdująca się pod działaniem obciążenia ulega odkształceniu, a to odkształcenie powoduje oddziaływanie tego ośrodka na belkę. Oddziaływanie to przejawia się odporem normalnym $r_n/x/$ do powierzchni belki, odporem stycznym $r_s/x/$ na obwodzie belki oraz odporem $t/x/$ wzdłużnym, który jest styczny do powierzchni belki i jednocześnie równoległy do jej osi /rys.2/. Belka pod wpływem obciążenia i oporu ośrodka ulega w ogólnym przypadku zginaniu ukośnemu i skręcaniu. Celem pracy jest wyprowadzenie równań różniczkowych opisujących linię ugięcia i kąt skręcenia belki zanurzonej w dwuparametrowym ośrodku sprężystym.

3. Podstawowe zależności geometryczne i fizyczne.

3.1. Odpór poprzeczny ośrodka sprężystego.

Element różniczkowy dx belki w trakcie jej zginania /rys.3/ ulega translacji poprzecznej i obrotowi względem osi geometrycznej belki oraz rotacji względem osi obojętnej przekroju poprzecznego belki.



Rys.3. Schemat deformacji belki.

W wyniku translacji i obrotu elementu występuje rozłożony w sposób ciągły odpór poprzeczny ośrodka sprężystego na element.

W celu znalezienia odporu poprzecznego ośrodka na belkę wprowadzono następujące zależności geometryczne /rys.2/:

$$\begin{aligned} /1/ \quad c &= \varphi \xi, \\ c_y &= c \sin \alpha, \\ /2/ \quad c_z &= c \cos \alpha, \end{aligned}$$

gdzie:

- c - wektor przemieszczenia punktu konturu wynikający z obrotu,
- c_y, c_z - składowe wektora przemieszczenia c, odpowiednio w kierunku y i z,
- φ - kąt skręcenia belki,
- ξ - promień wodzący konturu belki,
- α - niezależna współrzędna biegunowa.

Po skorzystaniu z zależności geometrycznych:

$$\begin{aligned} /3/ \quad \frac{z}{\xi} &= \sin \alpha, \\ \frac{y}{\xi} &= \cos \alpha \end{aligned}$$

i wstawieniu do równań /1/ i /2/ otrzymano:

$$\begin{aligned} /4/ \quad c_z &= \varphi y, \\ c_y &= \varphi z. \end{aligned}$$

Przemieszczenie punktu na konturze przekroju wynikające z translacji i obrotu rozłożono na dwie składowe odpowiednio w kierunku normalnym i stycznym, a mianowicie:

$$/5/ \quad p_n = (w + \varphi y) \sin \theta + (v - \varphi z) \cos \theta,$$

$$p_s = (w + \varphi_y) \cos \theta - (v - \varphi_z) \sin \theta$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{dz}{ds}, \\ /6/ \quad \sin \theta &= -\frac{dy}{ds}, \end{aligned}$$

ds - różniczka długości konturu,

$w = w/x$, $v = v/x$ - ugięcie belki w odpowiednich płaszczyznach głównych.

Składowe odporu ośrodka w kierunku normalnym i stycznym, przypadające na jednostkę powierzchni są określone następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} /7/ \quad r_n &= \mathcal{K}_n p_n, \\ r_s &= \mathcal{K}_s p_s, \end{aligned}$$

gdzie:

\mathcal{K}_n - moduł sztywności normalny ośrodka sprężystego,
 \mathcal{K}_s - moduł sztywności styczny ośrodka sprężystego.

Składowe reakcji ośrodka w kierunkach głównych osi centralnych, przypadające na jednostkę powierzchni wyrażone są odpowiednio wzorami:

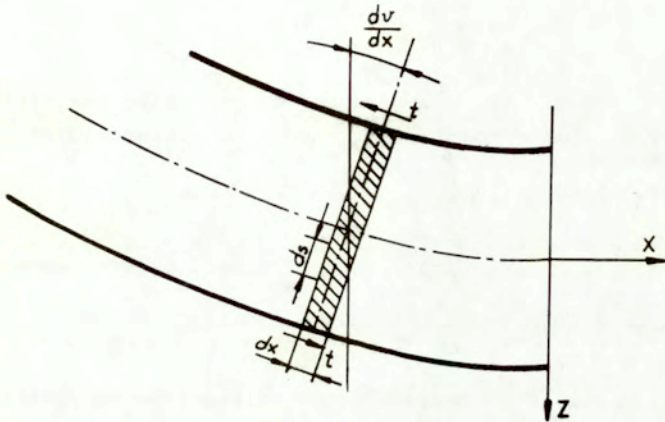
$$\begin{aligned} /8/ \quad r_z &= r_n \cos \theta - r_s \sin \theta, \\ r_y &= r_n \sin \theta + r_s \cos \theta. \end{aligned}$$

Składowe R_z i R_y odporu poprzecznego ośrodka przypadające na jednostkę długości belki wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} /9/ \quad R_y &= \oint r_y ds, \\ R_z &= \oint r_z ds. \end{aligned}$$

3.2. Moment odporu wzdłużnego ośrodka sprężystego.

Obrotowi wyciętego elementu belki /rys.4/ dookoła osi obojętnej przeciwdziałają siły styczne ośrodka sprężystego na obwodzie tego elementu i mające kierunek osi belki.



Rys.4. Schemat sił reakcji ośrodka na wydzielony element.

W rozwiązaniu zadania zastosowano superpozycję tzn. rozłożono obrót wypadkowy na dwa obroty wokół głównych centralnych osi bezwładności y i z przekroju poprzecznego belki /rys.4/. Składowe przemieszczenia środka ciężkości elementarnej powierzchni o wymiarze $ds \times 1$ występującej na obwodzie wyciętego elementu są następujące:

$$/10/ \quad u' = z \frac{dw}{dx}, \quad u'' = y \frac{dv}{dx}$$

gdzie:

$\frac{dw}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ - kąty ugięcia belki w adekwatnych płaszczyznach głównych.

Całkowite przemieszczenie środka ciężkości elementarnej powierzchni wynosi:

$$/11/ \quad u = u' + u''.$$

Wstawiając /10/ do równania /11/ uzyskano przemieszczenie w postaci:

$$/12/ \quad u = z \frac{dw}{dx} + y \frac{dv}{dx}.$$

Odpór wzdłużny ośrodka przypadający na jednostkę powierzchni jest proporcjonalny do przemieszczenia u , mianowicie:

$$/13/ \quad t = \mathcal{H}_s u.$$

Podstawiając /12/ do /13/ otrzymano następujące równanie:

$$/14/ \quad t = \mathcal{H}_s \left(z \frac{dw}{dx} + y \frac{dv}{dx} \right).$$

Elementarna siła styczna działająca na elementarną powierzchnię ma postać:

$$/15/ \quad dT = t \cdot ds.$$

Po uwzględnieniu zależności /14/ wzór /15/ przyjmuje postać:

$$/16/ \quad dT = \mathcal{H}_s \left(z \frac{dw}{dx} + y \frac{dv}{dx} \right) ds.$$

Suma momentów wszystkich elementarnych sił dT względem głównej osi centralnej y jest składową momentu oporu wzdłużnego rozłożonego w płaszczyźnie głównej z , mianowicie:

$$/17/ \quad \mu_z = \int z dT.$$

Analogicznie można znaleźć składową momentu oporu ośrodka w płaszczyźnie głównej y , mianowicie:

$$/18/ \quad \mu_y = \int y dT.$$

Podstawiając /16/ do /17/ otrzymano następujący wzór na rozłożony w sposób ciągły moment odporu ośrodka:

$$/19/ \quad \mu_z = \mathcal{H}_s \frac{dw}{dx} \oint z^2 ds + \mathcal{H}_s \frac{dv}{dx} \oint yz ds .$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$/20/ \quad L_y = \oint z^2 ds, \quad L_z = \oint y^2 ds \quad \text{i} \quad L_{yz} = \oint yz ds ,$$

otrzymano ostatecznie:

$$/21/ \quad \mu_z = \mathcal{H}_s \frac{dw}{dx} L_y + \mathcal{H}_s \frac{dv}{dx} L_{yz} ,$$

oraz podobnie:

$$/22/ \quad \mu_y = \mathcal{H}_s \frac{dv}{dx} L_z + \mathcal{H}_s \frac{dw}{dx} L_{yz} ,$$

gdzie:

- L_y, L_z - momenty bezwładności konturu przekroju belki odpowiednio względem głównych osi centralnych,
 L_{yz} - moment dewiacji konturu przekroju belki względem głównych osi centralnych.

3.3. Moment odporu poprzecznego ośrodka sprężystego.

Moment odporu poprzecznego ośrodka sprężystego na belkę przypadający na jednostkę jej długości wynosi:

$$/23/ \quad \mu_o = \oint (y r_z - z r_y) ds .$$

Moment skręcający w przekroju poprzecznym belki określono wzorem:

$$/24/ \quad M_s = \int m_o dx - \int \mu_o dx$$

gdzie:

$m_o/x/$ - moment obrotowy przypadający na jednostkę

długości belki.

4. Układ równań różniczkowych zagadnienia.

Korzystając ze znanych w wytrzymałości materiałów zależności [2] opisano zjawisko zachowania się belki w dwuparametrowym ośrodku sprężystym przy pomocy następującego układu równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 w}{dx^4} &= q_z - \frac{dm_z}{dx} - Rz + \frac{d\mu_z}{dx} \\ /25/ \quad EJ_z \frac{d^4 v}{dx^4} &= q_y - \frac{dm_y}{dx} - Ry + \frac{d\mu_y}{dx} \\ GJ_s \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= m_o - \mu_o \end{aligned}$$

gdzie:

I_y, I_z - momenty bezwładności powierzchni przekroju poprzecznego względem odpowiednich głównych osi centralnych,

$q_z = q_z/x, q_y = q_y/x$ - składowe siły działające odpowiednio w płaszczyznach głównych belki,

$m_z = m_z/x, m_y = m_y/x$ - składowe momenty działające odpowiednio w płaszczyznach głównych belki,

E - moduł Younga,

G - moduł Kirchoffa,

I_s - zastępczy moment bezwładności powierzchni przekroju belki na skręcanie.

Po podstawieniu /9/, /21/, /22/ i /23/ do /25/ otrzymano układ trzech liniowych równań różniczkowych niejednorodnych w postaci:

$$\begin{aligned} /26/ \quad \frac{d^4 w}{dx^4} - 2\lambda_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - 2L_1 \frac{d^2 v}{dx^2} + a_1 w + b_1 v + c_1 \varphi &= f_1(x) \\ \frac{d^4 v}{dx^4} - 2\lambda_2 \frac{d^2 v}{dx^2} - 2L_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_2 v + b_2 w + c_2 \varphi &= f_2(x) \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + a_3 \varphi + b_3 w + c_3 v &= f_3(x) \end{aligned}$$

Stałe współczynniki oraz funkcje występujące z prawej strony układu równań /26/ określone są następującymi wzorami:

$$f_1 = \frac{1}{EJ_4} \left(q_2 - \frac{dm_2}{dx} \right),$$

$$f_2 = \frac{1}{EJ_2} \left(q_4 - \frac{dm_4}{dx} \right),$$

$$f_3 = \frac{1}{GJ_5} m_0,$$

$$\lambda_1 = \frac{H_2 L_4}{2EJ_4},$$

$$\lambda_2 = \frac{H_2 L_2}{2EJ_2},$$

$$L_1 = \frac{H_2 L_4^2}{2EJ_4},$$

$$L_2 = \frac{H_2 L_2^2}{2EJ_2},$$

$$a_1 = \frac{1}{EJ_4} (H_n J_9 + H_s J_{10}),$$

$$b_1 = \frac{1}{EJ_4} (H_n J_{11} - H_s J_{12}),$$

$$c_1 = \frac{1}{EJ_4} (H_n J_{13} + H_s J_{14} - H_n J_{15} + H_s J_{16}),$$

$$a_2 = \frac{1}{EJ_2} (H_n J_1 - H_s J_2),$$

$$/27/ \quad b_2 = \frac{1}{EJ_2} (H_n J_3 + H_s J_4),$$

$$c_2 = \frac{1}{EJ_2} (H_n J_5 - H_s J_6 - H_n J_7 - H_s J_8),$$

$$a_3 = \frac{1}{GJ_5} (H_n J_{17} + H_s J_{18} - H_n J_{25} + H_s J_{26}),$$

$$b_3 = \frac{1}{GJ_5} (H_n J_{19} - H_s J_{20} - H_n J_{27} - H_s J_{28}),$$

$$c_3 = \frac{1}{GJ_5} (H_n J_{21} + H_s J_{22} - H_n J_{23} + H_s J_{24} + H_n J_{29} + H_s J_{30} - H_n J_{31} + H_s J_{32}),$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \oint \sin \theta \cos \theta ds, & J_2 &= J_1, \\
 J_3 &= \oint \cos^2 \theta ds, & J_4 &= \oint \sin^2 \theta ds, \\
 J_5 &= \oint y \sin \theta \cos \theta ds, & J_6 &= J_5, \\
 J_7 &= \oint z \cos^2 \theta ds, & J_8 &= \oint z \sin^2 \theta ds, \\
 J_9 &= J_4, & J_{10} &= J_3, & J_{11} &= J_1, & J_{12} &= J_1, \\
 J_{13} &= \oint y \sin^2 \theta ds, & J_{14} &= \oint y \cos^2 \theta ds, \\
 /28/ & & J_{15} &= \oint z \sin \theta \cos \theta ds, & J_{16} &= J_{15}, \\
 J_{17} &= J_{13}, & J_{18} &= J_{14}, & J_{19} &= J_5, & J_{20} &= J_5, \\
 J_{21} &= \oint y^2 \sin^2 \theta ds, & J_{22} &= \oint y^2 \cos^2 \theta ds, \\
 J_{23} &= \oint yz \sin^2 \theta ds, & J_{24} &= J_{23}, \\
 J_{25} &= J_{13}, & J_{26} &= J_{15}, & J_{27} &= J_7, & J_{28} &= J_8, \\
 J_{29} &= \oint z^2 \cos^2 \theta ds, & J_{30} &= \oint z^2 \sin^2 \theta ds, \\
 J_{31} &= J_{23}, & J_{32} &= J_{23}.
 \end{aligned}$$

W przypadku przekrojów posiadających co najmniej dwie osie symetrii następuje rozprzężenie układu równań /26/, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^4 w}{dx^4} - 2\lambda_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1 w = f_1(x) \\
 /29/ & \frac{d^4 v}{dx^4} - 2\lambda_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + a_2 v = f_2(x) \\
 & \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + a_3 \varphi = f_3(x).
 \end{aligned}$$

W tym przypadku nie ma wpływu zginania w jednej płaszczyźnie głównej na zginanie w drugiej płaszczyźnie głównej oraz zginania na skręcanie i odwrotnie.

5. Podsumowanie.

Z analizy literatury wynika, że zagadnienie belki zanurzonej w dwuparametrowym ośrodku sprężystym nie było dotychczas rozwiązane. Wyprowadzony w pracy układ równań różniczkowych opisuje w przemieszczeniach zjawisko zachowania się belki w dwuparametrowym ośrodku sprężystym. Wpływ zginania w jednej płaszczyźnie głównej na zginanie w drugiej płaszczyźnie głównej i odwrotnie jest potwierdzony sprzężeniem parametrami v i w w dwóch pierwszych równań różniczkowych układu równań /26/. Sprzężenie to występuje wtedy, gdy główne centralne osie bezwładności powierzchni przekroju nie pokrywają się z głównymi centralnymi osiami bezwładności konturu przekroju, co może mieć miejsce jedynie w przypadku belki o przekroju niesymetrycznym.

Z kolei wzajemny wpływ zginania i skręcania jest uzasadniony sprzężeniem parametrami v , w i φ pierwszego i drugiego równania z równaniem trzecim układu równań różniczkowych /26/. Sprzężenie to może mieć miejsce jedynie wtedy, gdy przekrój poprzeczny belki posiada jedną oś symetrii.

W pracy nie przedstawiono metody rozwiązania układu równań różniczkowych /26/, ponieważ jest tu znane zagadnienie czysto matematyczne.

Literatura:

- [1] CABANSKA K., JENDO S., Analysis of a beam dived in two-parametric homogeneous elastic medium, Zusammenfassung der auf der wissenschaftlichen Jahrestagung an der Universität Leipzig, GAMM, Leipzig 1992, str. 82.
- [2] NOWACKI W., Mechanika Budowli, tom 3, PWN, Warszawa 1975.
- [3] WASIUTYNSKI Z., ZAGRODZKI S., MARKS W., Mosty na podporach z pali betonowych, PWN, Warszawa 1963, str. 94 - 108.