SĄGAJŁO

ALGEBRA

2

297

1786

1786

WYKŁAD ZUPEŁNY

ALGEBRY

Dickstein

PARYŻ — DRUKARNIA E. MARTINET, ULICA MIGNON, 2

WYKŁAD ZUPEŁNY
ALGEBRY

CZĘŚĆ DRUGA

ALGEBRA WYŻSZA

TOM II

TEORYA WYZNACZNIKÓW I ICH PRZEDNIEJSZE ZASTOSOWANIA,

POD TYM TYTUŁEM WIERNIE I BEZ ŻADNEJ ZMIANY
«*LEKCYE ALGEBRY WYŻSZEJ*» P. SALMONA
Z ORYGINALNEGO TEKSTU ANGIELSKIEGO
NA JĘZYK POLSKI W CAŁEJ OBSZERNOŚCI PRZEŁOŻYŁ

ADOLF SĄGAJŁO
Professor matematyki

NAKŁADEM WŁAŚCICIELA BIBLIOTEKI KÓRNICKIÉJ
PRZEWODNICZĄCEGO W TOWARZYSTWACH
NAUKOWÉJ POMOCY I NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU

1874

PRZEDMOWA

> Nie podręczniki, ale dzieła naukowe klassyczne są same tylko zdolne rozprzestrzeniać granice wiedzy ludzkiej w umysłach najwięcej wykształconych każdego oświeconego narodu.

Podajemy zaraz na wstępie krótką wiadomość historyczną o rozwoju teoryi wyznaczników, której wykład stanowi drugi tom naszej Algebry. Wiadomość tę skreśliliśmy podług Baltzer'a *Theory of determinants* i Spottiswoode'a *Theorems relating to determinants*, oraz podług naszych własnych poszukiwań.

Dirichlet zauważył, że pierwsza myśl o wyznacznikach należy się *Leibnitzowi* (Lubienieckiemu). W jego liście do l'*Hospital'a*, z 26 kwietnia 1693 roku, jest pierwszy przykład formacyi tych funkcyi, z zastosowaniem do zrównań linijnych; użytą jest nawet podwójna notacya wskaźników.

Metoda jednak zaniechaną została i *Cramer*, w 1750 roku, rzec można, raz drugi odkryć ją musiał. W swej *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, obliczył wyznaczniki linijnych zrównań o dwóch i trzech zmiennych, i wskazał prawo ich formacyi w razie większej ilości zmiennych.

Równoważność przemiany wskaźników została potem dowiedzioną przez *Bézout* i *Laplace*. Pierwszy w *Histoire de l'Académie Royale des sciences de* 1764, oznaczał stopień zrównania wynikającego z wyrugowania nieznanych z układu danego, a zarazem zaznaczał wypadki wyznaczników, nie wdając się jednak ani we własności, ani w ogólne prawo tworzenia się tych funkcyi. Taż publikacya na rok 1772, zawiera prace *Laplace'a* i *Vandermonde'a* odnośne do wyznaczników drugiego, trzeciego, czwartego i wyższych rzędów. *Laplace* rozbierając układ spółczesnych różniczkowych zrównań, podał prawo tworzenia się wyznaczników, i odkrył że przemiana drugich kolumn lub linij sprowadza zmianę znaku wyznacznika, ich zaś równość czyni go zerem. *Vandermonde* użył znakowania zwanego potém przez P. *Sylwestra, umbral-notation.*

Lagrange w *Pamiętniku o piramidach* (*Mém. de l'Académie de Berlin,* 1773), używa wyznaczników trzeciego rzędu, i dowodzi że kwadrat takiego wyznacznika, może być sam wyrażonym jako wyznacznik.

Gauss w *Disquisitiones arithmeticæ* (1801), spostrzegł, że dla drugiego i trzeciego rzędu, iloczyn dwóch wyznaczników jest wyznacznikiem, i rozebrał dokładnie wyznaczniki drugiego rzędu pochodzące od kształtu $b^2 - ac$.

Binet (1812, *Journ. de l'École Polyt.* tome IX, cahier 16), dowodzi głównych twierdzeń o wyznacznikach drugiego, trzeciego i czwartego rzędu i stosuje je do kwestyi geometrycznych.

W tomie X tegoż dziennika, *Cauchy* podaje pracę o funkcyach zmieniających znak przez przełożenia zmiennych. Druga część pracy odnosi się do wyznaczników i zawiera wiele twierdzeń ogólnych. Cauchy stanowczo wprowadza nazwę *wyznaczników* dawniej przez Gauss'a używaną do wyznaczników drugiego stopnia.

Jacobi od roku 1826, w dzienniku *Crell'a* po mistrzowsku wyznacznikami włada. Pamiętniki jego z roku 1841, *de formatione et proprietatibus determinantium,* oraz *de determinantibus functionalibus,* naukę wyznaczników przystępną dla każdego matematyka uczyniły.

Ostatnią ważną w tym przedmiocie pracą są wyznaczniki skośne P. *Cayle'a.* (*Crell'a,* tomy XXXII i XXXVIII.)

Najważniejsze dzieła elementarne są:

Spottiswoode, Elementary theorems relating to determinants. London, 1851.

Brioschi, la theoria dei determinanti. Pavia, 1854.

Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig, 1857.

Drugie i trzecie tłumaczone na francuzki.

Po ostatnich *Jacobiego* pięknych badaniach nad wyznacznikami, w roku 1841, nastąpił wkrótce cały szereg prac wielu znakomitych matematyków, z których przytoczymy następujące najwybitniejsze nazwiska, a mianowicie, 1° z angielskich: *Cayley*, *Sylwester*, *Boole*, *Salmon*, *Spottiswoode*, bracia *Roberts*, i t. d.; 2° z francuzkich: *Hermitte*, *Combescure*, *Painvin*, *Bertrand*, *Catalan* i inni; 3° z włoskich: *Brioschi*, *Betti*, *Bellavitis*, *Genocchi*, *Fradi Bruno*, *Trudi*, i t. d.; 4° z niemieckich: *Clebsch*, *Aronhold*, *Kronecker*, *Kummer*, *Borchardt*, *Joachimsthal*, *Hess* i inni.

W Polsce spotykamy niektóre badania nad wyznacznikami, lub też ich zastosowania w głównych pracach PP. *Babczyńskiego*, *Zajączkowskiego* i *Żmurki*. Oprócz tego, w roku 1870, na końcu pierwszego tomu *Rachunku różniczkowego* przez P. *Folkierskiego*, ukazał się *dodatek* P. *Wł. Trzaski* o wyznacznikach, o której to pracy wszyscy recenzenci podzielili zdanie wyrażone przez P. *Folkierskiego* w przedmowie, twierdząc, że nacechowana sumiennem wypracowaniem, głęboką znajomością rzeczy i wysoką erudycyą, zawiera wszystko, co jest godnego uwagi w tej pięknej teoryi i co można było streścić w szczupłym zakresie, a nadto wiele jeszcze całkiem oryginalnych dowodzeń dla twierdzeń, na których prostem wysłowieniu inni autorowie zwykli poprzestawać.

Z pomiędzy dzieł wykładowych w obcych językach, dwie bogate literatury: włoska i angielska, są same tylko pod tym względem obficie uposażone. Nic więc dziwnego, że pisarze innych narodów, których literatura tego rodzaju dzieł własnych dotąd jeszcze nie posiada, zastępują zwykle ten swej literatury niedostatek wiernym przekładem na język ojczysty znakomitych dzieł wykładowych bądź to włoskich, bądź angielskich. Ztąd wielka sława i wziętość pięknych dzieł o wyznacznikach *Briosch'ego* i *Salmona*. Przystępne i klassyczne dzieło *Salmona* : *Lessons introductory to the modern higher Algebra, by George Salmon, second edition. Dublin, Hodges, Smith et C°*, 1866, od dawna już tak w Anglii jak we Francyi do wykładu wyznaczników powszechnie przyjęte, a obecnie z oryginalnego tekstu angielskiego bez żadnych zmian i dodatków, na język polski w całej obszerności najwierniej przez nas przełożone zostało w mniemaniu, że na jakiś czas przynajmniej korzystnie posłużyć zdoła do zastąpienia dotkliwego nieraz w naszej literaturze niedostatku. Teorye zaś użyte przez P. *Salmona* do wykładu wyznaczników, stale się opierały albo na jego własnych odkryciach, albo też na odkryciach zawartych w źródłach autentycznych wielu innych obecnie żyjących pierwszorzędnych matematyków. Pierwsze, nietknięte w całości przechowaliśmy; do drugich zaś pozwolilismy sobie wprowadzić lekkie zmiany i niektóre proste ulepszenia, czerpiąc do tego potrzebne nam wiadomości z tychże samych co autor źródeł autentycznych, z stałą uwagą i dążeniem, aby te zmiany były zawsze zgodne z główną myślą przyjętego przez nas wykładu, t. j. z zadaniem skreślenia obszernego, systematycznego i przystępnego dla uczących się wykładu wyznaczników P. *Salmona*. Nieraz też uważaliśmy za rzecz dla początkujących potrzebną dopełnić lub całkiem rozwinąć rachunki bądź przerwane, bądź w wielu zastosowaniach, zaledwie tylko wskazane. Te lekkie zmiany i proste przez nas do wykładu wprowadzone ulepszenia, posłużą nam przynajmniej za przekonywający dowód, żeśmy nie tyle nad poprawnem tłumaczeniem klassycznego dzieła, zawsze i usilnie pracowali, ile nad porządnem wyjaśnieniem głównej myśli znakomitego autora. To jest jedyna naszej pracy zaleta.

Słabą i ujemną naszej pracy stroną jest niewątpliwie terminologia przez nas użyta przy obszernym i systematycznym wykładzie ważnej teoryi wyznaczników. W każdej ścisłej nauce, do wysłowienia nowych pojęć, potrzeba koniecznie nowych technicznych wyrazów. Nie przeczymy, iż niektóre podane przez nas nazwiska są niewłaściwe, z duchem naszego języka niezgodne, a nawet być może zupełnie ułomne; ale te nazwiska są zarazem tak ściśle przez nas określone, iż jakąkolwiek nadalibyśmy im nazwę, to bynajmniej w niczem nikomu nie przeszkodzi do jasnego zrozumienia obszernego i systematycznego wykładu wyznaczników P. *Salmona.* Wreszcie, dyskusyi nie unikamy. Przeciwnie prosimy uniżenie naszych zasłużonych w kraju erudytów o udzielenie nam w tym ważnym przedmiocie ich światłego zdania. Wzywamy zaś uprzejmie P. *Wł. Trzaskę*, dawnego naszego współpracownika, o zrobienie nad naszą świeżą pracą umiejętnie krytycznego w Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych rozbioru. Wszelkie ze strony szanownego recenzenta zrobione nam postrzeżenia przyjmiemy z wdzięcznością.

Za udzielenie kilku światłych uwag dotyczących wykładu wyznaczników, szanownemu memu koledze w Towarzystwie Nauk Ścisłych P. *Folkierskiemu*, nieskończenie jestem obowiązany.

Lecz przedewszystkiem winienem otwarcie oświadczyć, że tak w przekładzie wyznaczników *Salmona,* jak i w utworzeniu tomu poprzedniego, był mym gorliwym współpracownikiem od tylu lat zacny mój przyjaciel i kolega w Towarzystwie Nauk Ścisłych, ś. p. *Seweryn Elzanowski.* Wszystko co jest pięknie i porządnie w dwóch pierwszych tomach wykładu zupełnego mej Algebry prawdziwie wykończonem, to usilnym staraniom ś. p. Elzanowskiego zawdzięczam.

Do historyi rozwoju teoryi wyznaczników należy wreszcie rehabilitacya niektórych prac matematycznych *Hoëne Wrońskiego,* lubo późno, bo aż w kilkanaście lat po jego śmierci dokonana. Lat kilka temu, uczony *T~~erquem~~* we Francyi, a świeżo znakomity *Cayley* w Anglii, zrehabilitowali zaszczytnie w oczach potomności niektóre matematyczne prace naszego współziomka. Dwie więc piękne i tak żywo publiczność polską interesujące noty, starannie przez swych znakomitych twórców w ich oryginalnych tekstach wykończone, a najwierniej i bez żadnych zmian w znakowaniu i w formie przez nas na język polski przełożone, na końcu tego tomu, dla wiadomości naszych czytelników przedstawiamy.

Na zakończenie byłem tu zamieścił słowa méj osobistej serdecznej wdzięczności i publicznego uznania dla czcigodnego wydawcy tego dzieła a naszego Przewodniczącego w Towarzystwie Nauk ścisłych; lecz na wyraźne jego żądanie, widzę się zmuszonym cały ten ustęp z wielkim mym żalem opuścić.

Paryż, dnia 17 maja 1874 r.

ADOLF SĄGAJŁO.

SPIS RZECZY.

TOMU DRUGIEGO.

Strona.

Lecz przedewszystkiem winienem otwarcie oświadczyć, że tak w przekładzie wyznaczników *Salmona*, jak i w utworzeniu tomu poprzedniego, był mym gorliwym współpracownikiem od trzech lat zacny mój przyjaciel, członek Towarzystwa Nauk Ścisłych, ś. p. *Seweryn Elżanowski*. Wszystko co jest pięknie i porządnie w dwóch pierwszych tomach wykładu zupełnego mej Algebry [illegible], to usilnym staraniem ś. p. Elżanowskiego zaw[illegible].

Do historyi rozwoju teoryi wyznaczników należy właściwie [illegible]

[illegible]

WYKŁAD ALGEBRY

CZĘŚĆ DRUGA.

ALGEBRA WYŻSZA

TEORYA WYZNACZNIKÓW I ICH PRZEDNIEJSZE ZASTOSOWANIA.

ROZDZIAŁ PIÉRWSZY.

WYZNACZNIKI. — WIADOMOŚCI WSTĘPNE.

1. Jeżeli mamy n zrównań jednorodnych piérwszego stopnia pomiędzy n zmiennemi, to możemy wyrugować zmienne i otrzymać na wypadek wyrażenie zawiérające same tylko spółczynniki. Otrzymany wypadek nazywa się właśnie *wyznacznikiem* tych zrównań. Podamy późniéj prawidła na utworzenie tych wyznaczników, i udowodnimy niektóre ich przedniejsze własności; lecz teorya ogólna zdaje nam się, będzie lepiéj objaśnioną przytoczeniem naprzód kilku przykładów zastosowań do przypadków najprostszych.

Pocznijmy więc od dwóch zrównań między dwiema zmiennemi:

$$a_1x + b_1y = 0, \qquad a_2x + b_2y = 0.$$

Wyrugujemy zmienne dodając do piérwszego zrównania pomnożonego przez b_2 drugie pomnożone przez $-b_1$; otrzymuje się $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, zrównanie którego piérwszym członkiem jest wyznacznik szukany. Znakowanie zwykle używane dla oznaczenia tego wyznacznika jest

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

lecz piszemy często, dla skrócenia, $(a_1\ b_2)$, zostawiając czytelnikowi przywrócenie odjemnego wyrazu; widoczną jest rzeczą że przy tém znakowaniu, $(a_1\ b_2) = -(a_2\ b_1)$ (*). Spółczynniki $a_1, b_1, \ldots$, które wchodzą do wyrażenia jakiegokolwiek wyznacznika, są *elementami* tego wyznacznika; wieloczyny $a_1\ b_2, \ldots$ stanowią jego różne wyrazy.

2. Można rozpoznać bezpośrednio że otrzymalibyśmy tenże sam wypadek rugując zmienne między zrównaniami

$$a_1x + a_2y = 0, \qquad b_1x + b_2y = 0;$$

(*) Możnaby wreszcie tę równość tym sposobem wyprowadzić: Niech będzie

$$a_1b_2 - a_2b_1 = p;$$

zastępując a przez b i b przez a, otrzymamy

$$b_1a_2 - b_2a_1 = -p.$$

Otóż, wedle skróconego znakowania, mamy

$$p = (a_1b_2),$$
$$-p = (a_2b_1);$$

a tém samém, $p = -(a_2b_1)$; albo, $(a_1b_2) = -(a_2b_1)$, innemi słowy,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix};$$

to jest że wartość wyznacznika nie zmienia się pisząc pionowo linie poziome, i *odwrotnie*.

3. Jeżeli mamy dwa zrównania jednorodne między trzema zmiennemi,

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0, \qquad b_1x + b_2y + c_3z = 0,$$

to zrównania te wystarczą do oznaczenia stosunków x, y i z; tak więc, rugując na przemiany y i x, znajdziemy x i y w funkcyi z, co się da wyrazić

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = (a_2b_3 - a_3b_2)z, \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y = (a_3b_1 - a_1b_3)z;$$

albo, opuszczając dla skrócenia, ostatnie wyrazy spółczynników trzech zmiennych, te same dwa zrównania będzie można napisać

$$(a_1b_2)x = (a_2b_3)z, \qquad (a_1b_2)y = (a_3b_1)z;$$

zkąd : $$\frac{x}{z} = \frac{(a_2b_3)}{(a_1b_2)}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{(a_3b_1)}{(a_1b_2)};$$

innemi słowy x, y, z są odpowiednio proporcyonalnemi do (a_2b_3), (a_3b_1), (a_1b_2); podstawiając te wartości w zrównania pierwotne, mamy tosamości :

$$a_1(a_2b_3) + a_2(a_3b_1) + a_3(a_1b_2) = 0,$$

$$b_1(a_2b_3) + b_2(a_3b_1) + b_3(a_1b_2) = 0;$$

związki te sprawdzają się bezpośrednio zastępując wyznaczniki przez ich wyrażenia rozwinięte, na przykład

$$a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Znakowanie

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

w którém liczba kolumn pionowych przewyższa liczbę linij poziomych, jest używane dla oznaczenia trzech wyznaczników które się otrzymuje znosząc kolejno każdą kolumnę, to jest trzech wyznaczników świeżo przez nas zauważanych (a_2b_3), (a_3b_1), (a_1b_2).

4. Przejdźmy teraz do układu trzech zrównań :

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0;$$

pomnożmy piérwsze przez (a_2b_3), drugie przez (a_3b_1), trzecie przez (a_1b_2), i zróbmy summę; spółczynniki x i y zniszczą się na mocy tosamości n^ru 3, i wyznacznik szukany jest

$$c_1(a_2b_3) + c_2(a_3b_1) + c_3(a_1b_2),$$

albo, rozwijając,

$$c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 + c_2a_3b_1 - c_2a_1b_3 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1;$$

można także napisać go pod jednym lub drugim z dwóch kształtów :

$$a_1(b_2c_3) + a_2(b_3c_1) + a_3(b_1c_2), \quad b_1(c_2a_3) + b_2(c_3a_1) + b_3(c_1a_2).$$

Ten wyznacznik jest przedstawiony za pomocą znakowania

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

oznaczać go będziemy często, dla skrócenia, przez $(a_1b_2c_3)$.

Pożyteczną jest rzeczą zauważyć że

$$(a_2b_3c_1) = (a_1b_2c_3), \quad \text{lecz} \quad (a_1b_3c_2) = -(a_1b_2c_3).$$

W rzeczy saméj, podług analogii znakowania, mamy,

$$(a_2b_3c_1) = a_2(b_3c_1) + a_3(b_1c_2) + a_1(b_2c_3),$$

co się stosuje do $(a_1b_2c_3)$; gdy tym czasem

$$(a_1b_3c_2) = a_1(b_3c_2) + a_3(b_2c_1) + a_2(b_1c_3),$$

co się stosuje do $-(a_1b_2c_3)$.

5. Otrzymalibyśmy tenże sam wypadek wykonywając rugowanie między trzema zrównaniami:

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0,$$
$$b_1x + b_2y + b_3z = 0,$$
$$c_1x + c_2y + c_3z = 0,$$

gdyż, jeżeli postąpimy jak poprzednio, mnożąc piérwsze przez (b_2c_3), drugie przez (c_2a_3), trzecie przez (a_2b_3) i dodając, spółczynniki y i z zniszczą się i otrzymamy wyznacznik pod kształtem

$$a_1(b_2c_3) + b_1(c_2a_3) + c_1(a_2b_3),$$

który, rozwinięty, wyda tak samo $(a_1b_2c_3)$; zkąd

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

to jest że wyznacznik nie zmienia się pisząc pionowo linie poziome, i *odwrotnie* : własność która zostanie dowiedzioną dla każdego wyznacznika.

6. Oznaczmy przez

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix}\right\|$$

układ wyznaczników które się otrzymuje, opuszczając kolejno każdą z kolumn : te cztéry wyznaczniki są połączone z sobą przez związki

$$a_1(a_2b_3c_4) - a_2(a_3b_4c_1) + a_3(a_4b_1c_2) - a_4(a_1b_2c_3) = 0,$$

$$b_1(a_2b_3c_4) - b_2(a_3b_4c_1) + b_3(a_4b_1c_2) - b_4(a_1b_2c_3) = 0,$$

$$c_1(a_2b_3c_4) - c_2(a_3b_4c_1) + c_3(a_4b_1c_2) - c_4(a_1b_2c_3) = 0.$$

Te związki mogą być sprawdzone rozwinięciem wyznaczników, albo też udowodnione za pomocą sposobu odpowiedniego temu który został wskazany w n^{z} 3. Weźmy trzy zrównania

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4v = 0,$$

$$b_1x + b_2y + b_3z + b_4v = 0,$$

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_4v = 0;$$

możemy, jak w n^rze^ 5, wyrugować y i z mnożąc zrównania przez (b_2c_3), (c_2a_3), (a_2b_3) i dodając, co daje]

$$(a_1b_2c_3)x + (a_4b_2c_3)v = 0\,;$$

tak samo, mnożąc przez (b_3c_1), (c_3a_1), (a_3b_1), przyjdzie

$$(a_2b_3c_1)y + (a_4b_3c_1)v = 0,$$

i tak samo jeszcze

$$(a_3b_1c_2)z + (a_4b_1c_2)v = 0\,;$$

odnosząc się zaś do uwag zrobionych nad znakami w n^rze^ 4, te zrównania na jedno wychodzą co

$$(a_1b_2c_3)x = -(a_2b_3c_4)v,$$
$$(a_1b_2c_3)y = (a_3b_4c_1)v,$$
$$(a_1b_2c_3)z = -(a_4b_1c_2)v,$$

zkąd: $\dfrac{x}{v} = \dfrac{(a_2b_3c_4)}{-(a_1b_2c_3)}$, $\dfrac{y}{v} = \dfrac{-(a_3b_4c_1)}{-(a_1b_2c_3)}$, $\dfrac{z}{v} = \dfrac{(a_4b_1c_2)}{-(a_1b_2c_3)}$,

to jest że x, y, z i v są odpowiednio proporcyonalnemi do $(a_2b_3c_4)$, $-(a_2b_4c_1)$, $(a_4b_1c_2)$, $-(a_1b_2c_3)$, a podstawiając te wartości w zrównania piérwotne, otrzymuje się tosamości powyższe.

7. Jeżeli zechcemy teraz wykonać rugowanie między cztérema zrównaniami

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1v = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2v = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3v = 0,$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4v = 0,$$

to dosyć będzie dodać je do siebie mnożąc piérwsze przez $(a_2b_3c_4)$, drugie przez $-(a_3b_4c_1)$, trzecie przez $(a_4b_1c_2)$, czwarte przez $-(a_1b_2c_3)$; spółczynniki x, y i z staną się zerami, i otrzymamy, na oznaczenie wyznacznika,

$$d_1(a_2b_3c_4) - d_2(a_3b_4c_1) + d_3(a_4b_1c_2) - d_4(a_1b_2c_3),$$

albo, rozwijając,

$$\begin{aligned} & a_1b_2c_3d_4 - a_1b_3c_2d_4 + a_2b_3c_1d_4 - a_2b_1c_3d_4 \\ & + a_3b_1c_2d_4 - a_3b_2c_1d_4 + a_1b_4c_2d_3 - a_1b_2c_4d_3 \\ & + a_4b_2c_1d_3 - a_4b_1c_2d_3 + a_2b_1c_4d_3 - a_2b_4c_1d_3 \\ & + a_2b_4c_1d_2 - a_3b_1c_4d_2 + a_4b_1c_3d_2 - a_4b_3c_1d_2 \\ & + a_1b_3c_4d_2 - a_1b_4c_3d_2 + a_2b_4c_3d_1 - a_2b_3c_4d_1 \\ & + a_4b_3c_2d_1 - a_4b_2c_3d_1 + a_3b_2c_4d_1 - a_3b_4c_2d_1. \end{aligned}$$

8. Można bez żadnéj trudności rozciągnąć do liczby jakiéjkolwiek zrównań, sposób któregośmy dopiéro użyli. Czytelnik zauważy, że wyrażenie ogólne jakiegokolwiek wyznacznika jest $\Sigma \pm a_1b_2c_3d_4...$, w którém każdy wieloczyn powinien zamykać wszystkie litery i wszystkie wskaźniki, bez powtórzenia ani opuszczenia: wyznacznik zawiéra w sobie wszystkie wieloczyny téj saméj natury jakie jest tylko podobna utworzyć. Co do znaku którym każdy wyraz jest oznaczony, prawidło jest następujące. Damy znak $+$ dla wyrazu $a_1b_2c_3d_4,...$, który się otrzymuje czytając wyznacznik poczynający się u kąta wyższego lewego (po lewéj stronie położonego) a kończący na niższym prawym (po prawéj stronie położonym), i, to przypuściwszy, znak każdego wieloczynu będzie $+$ albo $-$, według tego jak pochodzi od tego piérwszego wyrazu przez poczynienie w nim parzystéj lub nieparzystéj liczby przemian wskaźników. Tak więc, w ostatnim przykładzie, drugi wyraz $a_1b_3c_2d_4$ nie różni się od piérwszego

jak tylko samą przemianą wskaźników b i c : jest przeto z nim znaku przeciwnego. Trzeci wyraz $a_2b_3c_1d_4$ różni się od drugiego samą tylko przemianą wskaźników a i c : jest tém samém z nim znaku przeciwnego, lecz ma on tenże sam znak jak piérwszy wyraz, gdyż może być uważany jako pochodzący przez wykonanie podwójnéj przemiany na wskaźnikach.

PRZYKŁAD. — *Jaki jest, w wyznaczniku* $(a_1b_2c_3d_4e_5)$, *znak wyrazu* $(a_3b_5c_2d_1e_4)$?

Zamieniając, w piérwszym wyrazie, wskaźniki a i c, otrzymujemy $a_3b_2c_1d_4e_5$, wieloczyn którego pierwszy element jest tenże sam co element wyrazu danego; zamieniając potém wskaźniki b i e, mamy wieloczyn $a_3b_5c_1d_4e_2$, który ma dwa elementa spólne z wyrazem danym; potém zamieniając c i e, przyjdzie $a_3b_5c_2d_4e_1$; i nakoniec, zamieniając d i e, mamy wyraz dany $a_3b_5c_2d_1e_4$. Więc, ponieważ przeszedł on przez liczbę parzystą (4) przemian, znak wyrazu jest $+$. W rzeczy samėj, szereg wyrazów z ich znakami jest :

$$a_1b_2c_3d_4e_5 - a_3b_2c_1d_4e_5 + a_3b_5c_1d_4e_2 - a_3b_5c_2d_4e_1 + a_3b_5c_2d_1e_4 \text{ (*)}.$$

9. Przemiana kołowa wskaźników zmienia znak kiedy liczba wyrazów wieloczynu jest parzystą : nie zmienia znaku kiedy liczba wyrazów jest nieparzystą. I tak a_2b_1, wywodząc się z a_1b_2 przez jedyną przemianę wskaźników, ma znak z nim przeciwny; lecz $a_2b_3c_1$ ma tenże sam znak co $a_1b_2c_3$ z którego pochodzi przez podwójną przemianę. Gdyż, zmieniając wskaź-

---

(*) Porównywając wyrazy $a_1b_2c_3d_4e_5$, $a_3b_5c_2d_1e_4$, widzimy że wskaźnik 1, który się przedstawił piérwszy w piérwszym wyrazie, znajduje się w drugim poprzedzony trzema elementami; że wskaźnik 2 jest poprzedzony dwoma elementami i wskaźnik 4 jednym elementem, które to elementa przychodziły potém w wyrazie pierwotnym. Liczba całkowita przestawień wykonanych jest więc *sześć*. Prawidło na znaki dane jest niekiedy pod tym kształtem : znak każdego wyrazu jest $+$ lub $-$ według tego jak liczba całkowita przestawień wykonanych względem porządku wskaźników pierwotnego wyrazu jest parzystą lub nieparzystą.

niki a i b, $a_1b_2c_3$ staje się $a_2b_1c_3$, który zmieniając wskaźniki b i c, staje się $a_2b_3c_1$. Podobnież $a_2b_3c_4d_1$ ma znak przeciwny znakowi pierwotnego wyrazu $a_1b_2c_3d_4$ z którego pochodzi przez trzy przemiany, to jest $a_2b_1c_3d_4$, $a_2b_3c_1d_4$, $a_2b_3c_4d_1$.

10. Możemy teraz podstawić w miejsce naszéj piérwszéj definicyi wyznacznika, nową definicyą, która stanie się podstawą teoryj następujących. W rzeczy saméj, ponieważ wyznacznik jest po prostu funkcyą elementów a, b, c i nie zawiéra w sobie zmiennych x, y, z, jest oczywiście rzeczą właściwszą podać definicyą nie robiącą wzmianki o zrównaniach między temi ilościami x, y, z (*).

Weźmy więc n^2 ilości urządzonych w kwadrat mający n kolumn pionowych i n linij poziomych; wyznacznikiem tych ilości jest summa wszystkich wieloczynów możebnych (oznaczonych znakami odpowiedniemi, jak to już wyłożyliśmy w n[rze] 8) jakie można utworzyć za pomocą n elementów biorąc z nich tylko jeden w każdéj kolumnie (pionowéj) i w każdéj linii (pozioméj): ten wyznacznik jest nazwany n^{tego} rzędu. Dwa elementa są *sprzężone* kiedy każdy z nich zajmuje, w liniach poziomych, też same położenie co drugi w kolumnach pionowych. Kiedy elementa sprzężone są sobie równe, wyznacznik jest *symetryczny*. Przykład:

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

(*) Moglibyśmy byli wyjść wprost z téj definicyi wyznacznika, a twierdzenia poprzedzające nie są potrzebnemi dla rozwinięcia umiejętnego teoryi. Mniemaliśmy jednak że te objaśnienia zrobiły teoryą ogólną łatwiejszą do zrozumienia, i że ważność badania wyznaczników dała się uczuć więcéj, skoro zostało okazaném że wszelkie rugowanie zmiennych pomiędzy układem zrównań piérwszego stopnia, i każde rozwiązanie podobnego układu, daje początek wyznacznikom: układy zrównań piérwszego stopnia dają się napotykać stale we wszystkich gałęziach Matematyki czystéj i zastosowanéj.

11. Przy wykładzie piérwszych Rozdziałów klassycznéj *Teoryi Wyznaczników* P. Salmona, pisać będziemy, tak jak to już zrobiliśmy w przykładach poprzedzających, wszystkie elementa tejże saméj linii poziomęj z tąż samą literą, a wszystkie elementa téjże saméj kolumny pionowéj z tymże samym wskaźnikiem. Lecz znakowanie najwięcéj użyte zależy na przydaniu do każdego elementu podwójnego wskaźnika, piérwszy wskaźnik oznacza rząd poziomy a drugi kolumnę pionową do któréj on należy. Wyznacznik trzeciego rzędu napisze się tym sposobem :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix},$$

albo jeszcze

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3};$$

wskaźniki, w téj summie, powinny być przemienione wszelkiemi sposobami możebnemi. Modyfikuje się niekiedy znakowanie poprzedzające opuszczając literę a, i wyznacznik pisze się wtedy

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{vmatrix}.$$

P. Sylwester przedstawił jeszcze inne znakowanie (*umbral notation*, *znakowanie cieniowe Sylwestra*). Niech będzie, na przykład, wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a\alpha & b\alpha & c\alpha & d\alpha \\ a\beta & b\beta & c\beta & d\beta \\ a\gamma & b\gamma & c\gamma & d\gamma \\ a\delta & b\delta & c\delta & d\delta \end{vmatrix},$$

którego elementami są $a\alpha$, $b\alpha$,...; a, b, c,..., nie są ilościami, lecz w niejaki sposób cieniami albo pozorami ilości, to jest że litery nie mają znaczenia same przez się a przyjmują je tylko przez ich połączenia z połączeniami innego szeregu α, β, γ,...; na przykład jeżeli α, β, γ, δ przedstawiają wskaźniki 1, 2, 3, 4, elementa, podług znakowania jakieśmy przyjęli, zostaną otrzymane łącząc jedną z liter z jednym ze wskaźników 1, 2, 3, 4. P. Sylwester pisze wyznaczniki pod formą więcéj skupioną (skoncentrowaną):

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d, \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, \end{array}\Bigg|$$

która wskazuje summę wszystkich wieloczynów $a\alpha.b\beta.c\gamma.d\delta$ jakie można otrzymać przemieniając wyrazy drugiéj linii wszelkiemi sposobami możebnemi, i zmieniając znaki każdéj przemiany według prawidła zwyczajnego.

ROZDZIAŁ II.

UPROSZCZENIE I RACHUNEK WYZNACZNIKÓW.

12. Poznaliśmy, w pierwszym Rozdziale, prawidło tworzenia się wyznaczników i wskazaliśmy, na przykładach szczególnych, niektóre ich własności. Dowiedziemy, w obecnym Rozdziale, sposobem ogólnym tych własności i niektórych innych jeszcze, bardzo często używanych dla uproszczenia i rachunku wyznaczników.

Wartość jakiegokolwiek wyznacznika nie zmienia się pisząc poziomo kolumny pionowe i *odwrotnie* (2,5). To wypływa bezpośrednio z prawa tworzenia się (10), które jest doskonale symetryczném względem kolumn pionowych i linij poziomych. Jedną z głównych korzyści używania wskaźników podwójnych do znakowania, jest okazanie jasno téj symetryi.

13. Przez przemianę dwóch linij poziomych albo dwóch kolumn pionowych, wyznacznik zmienia swój znak.

Gdyż skutkiem téj zmiany jest oczywiście jakakolwiek prosta przemiana dwóch liter albo dwóch wskaźników, która według prawa tworzenia się, daje miejsce zmianie znaku.

14. Kiedy dwie linie albo dwie kolumny stają się jednakiemi, wyznacznik sprowadza się do zera.

W rzeczy saméj, przemiana dwóch linij, pociąga za sobą (13) zmianę znaku; lecz przemiana dwóch linij tosamych nie może zmodyfikować wcale wartości wyznacznika : ta wartość pozostaje więc tąż samą mimo zmianę znaku, a więc jest równą zeru.

To twierdzenie wypływa jeszcze bezpośrednio z definicyi wyznacznika uważanego jako wypadek otrzymany z rugowania nieznanych pomiędzy n zrównaniami linijnemi. Gdyż to rugowanie odbywa się rozwiązując $n-1$ zrównań względem zmiennych i podstawiając w n^{te} wartości tym sposobem znalezione. Lecz, jeżeli to ostatnie jest jednakie z jedném innych, to musi stać się tak samo zerem kiedy się w nie podstawi wartości nieznanych.

15. Jeżeli wszystkie elementa jakiéjkolwiek linii lub jakiéjkolwiek kolumny są pomnożone przez tenże sam czynnik, wyznacznik jest pomnożony przez ten czynnik.

Ta własność wynika bezpośrednio ztąd, że każdy wyraz w rozwinięciu wyznacznika zamyka w sobie jako czynnik, jeden element należący do téjże saméj linii albo téjże saméj kolumny, i zamyka jeden tylko.

I tak, na przykład, ponieważ każdy wyraz wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

zawiéra w sobie a_1 albo a_2 albo a_3, wyznacznik może się napisać pod kształtem $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ (gdzie A_1, A_2 i A_3 nie zawiérają w sobie żadnego elementu kolumny a), a jeżeli a_1, a_2 i a_3 są pomnożonemi przez tenże sam czynnik k, wyznacznik zostanie pomnożony przez ten czynnik.

Wniosek. — Jeżeli elementa jakiéjkolwiek linii albo jakiéjkolwiek kolumny różnią się samym tylko mnożnikiem stałym od elementów którejkolwiek innéj linii albo kolumny, wyznacznik przywodzi się do zera. I tak

$$\begin{vmatrix} ka_2 & a_2 & a_3 \\ kb_2 & b_2 & b_3 \\ kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_2 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 \\ c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \ (14).$$

16. Jeżeli w jakim wyznaczniku, znosi się pewną liczbę linij poziomych i takąż samą liczbę kolumn pionowych, to wyznacznik utworzony z pozostałych linij jest jakimkolwiek wyznacznikiem *mniéjszym* wyznacznika danego.

Mniejsze otrzymane przez zniesienie jednéj linii i jednéj kolumny są nazwane piérwszego rzędu, otrzymane przez zniesienie dwóch linij i dwóch kolumn są nazwane drugiego rzędu, i tak daléj.

Zauważyliśmy, w ostatnim numerze, że jeżeli elementami jakiéjkolwiek kolumny są a_1, a_2, a_3,..., to wyznacznik może się napisać pod kształtem $a_1 A_1, + a_2 A_2 + a_3 A_3 + ...$, i jest rzeczą oczywistą że A_1, jest wyznacznikiem mniejszym otrzymanym przez zniesienie linii i kolumny które zamykają w sobie a_1,... W rzeczy saméj, wszystkie wyrazy wyznacznika które zamykają w sobie a_1 nie mogą zamykać innego elementu kolumny albo linii którego a_1 jest częścią, i element a_1 musi być pomnożonym przez wszystkie kombinacye możebne $n-1$ elementów wziętych w innych liniach i kolumnach, a zbiór tych wieloczynów tworzy właśnie wyznacznik A_1 (8). Podobnież wyznacznik piérwotny może się także napisać $a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1, ...$; B_1 jest więc wyznacznikiem mniejszym jaki się otrzymuje zmazując linią i kolumnę które zamykają w sobie b_1,...

17. Jeżeli wszystkie elementa jednéj linii lub jednéj kolumny wyznacznika n^{tego} rzędu całkowicie zniszczą się wyjąwszy jednego, to rachunek tego wyznacznika sprowadza się do rachunku wyznacznika $(n-1)^{tego}$ rzędu. W rzeczy saméj, jest rzeczą

widoczną że gdy a_2, a_3,... stają się zerami, wyznacznik $a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots$ sprowadza się do jedynego wyrazu a_1A_1, i A_1 jest istotnie wyznacznikiem mającym jedną linią i jedną kolumnę mniéj jak wyznacznik dany.

18. Jeżeli wszystkie elementa jednego rzędu lub jednéj kolumny dają się rozłożyć na summę dwóch innych, wyznacznik rozkłada się tak samo na summę dwóch wyznaczników.

Ta własność wypływa z zasady z któréj zrobiono już użytek w n^rze^ 16. I tak, w przykładzie danym powyżéj jeżeli napiszemy $a_1 + \alpha_1$, $b_1 + \beta_1$, $c_1 + \gamma_1$, zamiast a_1, b_1, c_1, wyznacznik stanie się

$$(a_1 + \alpha_1)A_1 + (b_1 + \beta_1)B_1 + (c_1 + \gamma_1)C_1$$
$$= (a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + (\alpha_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1).$$

Mamy więc

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \beta_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + \gamma_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Podobnież, jeżeliby wszystkie elementa jakiéjkolwiek kolumny były summami pewnéj liczby innych wyrazów, wyznacznik rozłożyłby się na równą liczbę innych wyznaczników.

19. Jeśliby, w przykładzie poprzedzającym, elementa drugiéj kolumny były także summą dwóch innych (gdyby, na przykład, pisało się $a_2 + \alpha_2$, $b_2 + \beta_2$, $c_2 + \gamma_2$ w miejsce a_2, b_2, c_2), to każdy z wyznaczników drugiego członka ostatniego zrównania zamieniłby się sam przez się w summę dwóch innych, a tém samém widzimy bez trudności że

$$(a_1 + \alpha_1,\ b_2 + \beta_2,\ c_3) = (a_1b_2c_3) + (a_1\beta_2c_3) + (\alpha_1b_2c_3) + (\alpha_1\beta_2c_3).$$

Jeśliby każdy z elementów piérwszéj kolumny mógł się zamienić w summę m innych, i każdy z elementów drugiéj w summę n innych, wyznacznik mógłby więc być rozłożonym na liczbę mn innych wyznaczników. Gdyż rozłożyłoby się go naprzód, jak w numerze poprzedzającym, na m innych, biorąc, zamiast piérwszéj kolumny, każdą kolumnę wchodzącą do składu m kolumn częściowych : każdy z tych wyznaczników rozłożyłby się potém na n innych działając tak samo na drugiéj kolumnie. I, ogólnie, jeżeli każdy element składa się z summy pewnéj liczby wyrazów, w taki sposób aby każda kolumna mogła się zamienić w summę oznaczoną kolumn częściowych (piérwsza w m kolumn, druga w n, trzecia w p, i t. d.), to wyznacznik będzie równym summie wszystkich wyznaczników jakie można utworzyć biorąc, zamiast każdéj kolumny, jedną z kolumn częściowych z których się ona składa; t liczba tych wyznaczników będzie równą wieloczynowi mnp...

20. Jeżeli elementa jednéj linii lub jednéj kolumny są odpowiednio równemi summie elementów odpowiednich innych linij albo kolumn, pomnożonych odpowiednio przez czynniki stałe, to wyznacznik sprowadzi się do zera. Gdyż, w tym przypadku, może on być rozłożony na wyznaczniki częściowe które się zniszczą oddzielnie. I tak

$$\begin{vmatrix} ka_2+la_3 & a_2 & a_3 \\ kb_2+lb_3 & b_2 & b_3 \\ kc_2+lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_2 & a_2 & a_3 \\ kb_2 & b_2 & b_3 \\ kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} la_3 & a_2 & a_3 \\ lb_3 & b_2 & b_3 \\ lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

lecz te dwa ostatnie wyznaczniki zniszczą się (n[er] 15, wn.).

21. Wyznacznik nie zmienia wartości gdy się dodaje do każdego elementu jednéj linii albo jednéj kolumny, elementa innych linij lub kolumn pomnożonych odpowiednio przez czyn-

niki stałe. I tak

$$\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2+la_3 & a_2 & a_3 \\ kb_2+lb_3 & b_2 & b_3 \\ kc_2+lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

lecz ostatni wyznacznik sprowadza się do zera (n^er 20) (*). Przykłady następujące okażą w jaki sposób zasady któreśmy dopiéro wyłożyli mogą posłużyć do uproszczenia rachunku wyznaczników.

PRZYKŁAD 1. — *Wyrachować wartość wyznacznika*

$$\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Drugi wyznacznik wyciąga się z piérwszego odciągając od piérwszéj, drugiéj i trzeciéj kolumny, dwa razy, trzy razy i cztéry razy, elementa odpowiednie ostatniéj kolumny. Trzeci wyznacznik wyciąga się z drugiego odciągając tak samo summę trzech piérwszych kolumn od ostatniéj. Ilekolwiek zatem razy natrafimy, jak teraz, na wyznacznik w którym wszyst-

(*) Początkujący będą się starali baczyć pilnie, że gdy wyznacznik nie zmienia wartości przez podstawianie w piérwszéj linii $a_1+ka_2+la_3$ w miejsce $a_1,\ldots$, to rzecz się dzieje inaczéj kiedy się położy w miejsce $a_2,\ldots$, toż same podstawienie w drugiéj linii, albowiem mnoży się wtedy wyznacznik przez k, a kiedy się wykona to podstawienie w trzeciéj, mnoży się go (to jest wyznacznik dany) przez l.

kie elementa jednéj linii są sobie równe, możemy, przez odciąganie, wyprowadzić z niego inny, w którym wszystkie elementa tejże saméj linii zniszczą się wyjąwszy jednego, i przywieść tym sposobem rachunek do rachunku wyznacznika rzędu niższego (17). Tak więc, odciągając piérwszą kolumnę od każdéj z trzech innych, ostatni wyznacznik staje się

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}.$$

Trzeci wyznacznik tego szeregu wyprowadza się z poprzedzającego, odciągając od piérwszéj kolumny podwójną ostatnią, i pozostanie nam tylko do obliczenia wyznacznik drugiego rzędu którego wartością szukaną jest $-8-7=-15$.

PRZYKŁAD II. — *Wyrachować wyznacznik następujący*

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 & 0 \\ -10 & -11 & 12 & 4 \\ 11 & 12 & -11 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 & 0 \\ -32 & -35 & 34 & 0 \\ 11 & 12 & -11 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 \\ -32 & -35 & 34 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 32 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 27 & 9 & 0 \\ -39 & 17 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 90\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -39 & 17 \end{vmatrix} = 90(51+39) = 8100.$$

Piérwsze przekształcenie odbywa się odciągając podwójną trzecią ~~kolumnę~~ od drugiéj i dodając summę drugiéj i trzeciéj do czwartéj; odciągnąwszy wreszcie w drugiéj linii *naprzód* piérwszą kolumnę od podwójnéj trzeciéj, *potém* potrójną czwartą od trzeciéj, zakończymy, w danym przykładzie, piérwsze przekształcenie. Zauważmy potém że dwa wyrazy $a_1b_2c_4d_3$ i $a_1b_2c_3d_4$ są z sobą znaków przeciwnych, a c_4 jest jedynym elementem czwartéj kolumny który się nie niszczy, że więc wyznacznik sprowadza się do $-c_4(a_1b_2d_3)$. Dodajmy następnie do siebie, drugą i trzecią kolumnę, wyłączmy czynnik 5 spólny drugiéj kolumnie i znak — spólny drugiéj linii poziomej; odciągnijmy nakoniec, piérwszą linią od drugiéj i ośm razy piérwszą od trzeciéj; reszta rachunku jest oczywistą.

PRZYKŁAD III.

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -972.$$

PRZYKŁAD IV.

$$\begin{vmatrix} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & -10 & 19 & 5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ -5 & 5 & 9 & -5 \end{vmatrix} = 194400.$$

PRZYKŁAD V. — *Mając dane* n *ilości* $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, *znaleźć wartość wyznacznika*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \ldots \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{n-1} & \beta^{n-1} & \gamma^{n-1} & \delta^{n-1} \ldots \end{vmatrix}.$$

Jest rzeczą oczywistą (14) że ten wyznacznik sprowadza się do zera gdy $\alpha = \beta$; a zatém, przyjmuje on jako czynnik $\alpha - \beta$; tož samo należy rozumieć o każdéj innéj różnicy między ilościami $\alpha, \beta, \ldots$ Wyznacznik jest więc równy wieloczynowi

$$\pm (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\gamma - \delta)\ldots$$

W rzeczy saméj, jeżeli mu nie jest równy, to zawiéra go w sobie jako czynnik; lecz nie może przypuszczać innych czynników zamykających $\alpha, \beta, \ldots$, ponieważ zawiéra już w sobie $\alpha^{n-1}, \beta^{n-1}, \ldots$ i że te ilości nie mogą być podniesione do potęgi wyższéj w wyznaczniku; porównywając spółczynniki ilości α^{n-1}, widzimy oprócz tego że wyznacznik nie może zamykać w sobie czynnika liczebnego. Ten przykład może być także traktowany w tenże co następujący sposób.

PRZYKŁAD VI. — *Wyrachować wartość wyznacznika*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 \end{vmatrix}.$$

Odciągając ostatnią kolumnę od każdéj z trzech innych, wyznacznik stanie się podzielnym przez $(\alpha - \delta)(\beta - \delta)(\gamma - \delta)$ a iloraz będzie

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha + \delta & \beta + \delta & \gamma + \delta \\ \alpha^3 + \alpha^2\delta + \alpha\delta^2 + \delta^3 & \beta^3 + \beta^2\delta + \beta\delta^2 + \delta^3 & \gamma^3 + \gamma^2\delta + \gamma\delta^2 + \delta^3 \end{vmatrix}.$$

Odciągając także ostatnią kolumnę od dwóch piérwszych, wyznacznik stanie się podzielnym przez $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$, i znajdziemy bezpośrednio na jego wartość

$$(\alpha - \delta)\beta - \delta)(\gamma - \delta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

PRZYKŁAD VII. — *Rozwiązanie pewnego zagadnienia Geometryi* *wymaga oznaczenia* λ *za pomocą zrównania*

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ (a+\lambda)^3 & (b+\lambda)^3 & (c+\lambda)^3 \\ (2a+\lambda)^3 & (2b+\lambda)^3 & (2c+\lambda)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Odciągnijmy piérwszą linią od drugiéj i podzielmy przez λ; odciągnijmy następnie ośm razy piérwszą linią od trzeciéj i podzielmy przez λ; potém odciągnijmy drugą linią od trzeciéj i podzielmy przez 3, i nakoniec odciągnijmy tę ostatnią od drugiéj i prdzielmy przez λ, wyznacznik stanie się

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ 2a+\lambda & 2b+\lambda & 2c+\lambda \\ 3a^2+a\lambda & 3b^2+b\lambda & 3c^2+c\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Odciągnijmy teraz piérwszą kolumnę od drugiéj i od trzeciéj, potém drugą od trzeciéj, i podzielmy przez $b-a$, $c-a$, $c-b$; odciągnijmy od piérwszéj kolumny drugą pomnożoną przez a i dodajmy trzecią pomnożoną przez ab; nakoniec odciągnijmy od drugiéj kolumny trzecią pomnożoną przez $a+b$. Po wykonaniu powyżéj wskazanych przekształceń przyjdzie

$$\begin{vmatrix} abc & -(ab+bc+ca) & a+b+c \\ \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

albo, uprościwszy

$$(a+b+c)\lambda^2 + 3(ab+bc+ca)\lambda + 6abc = 0.$$

PRZYKŁAD VIII.

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^2.$$

PRZYKŁAD IX.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{wst}\,\alpha & \text{wst}\,\beta & \text{wst}\,\gamma \\ \text{dos}\,\alpha & \text{dos}\,\beta & \text{dos}\,\gamma \end{vmatrix} = 4\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(\alpha-\gamma).$$

PRZYKŁAD X.

$$\begin{vmatrix} \text{dos}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta) & \text{dos}\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma) & \text{dos}\,\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) \\ \text{dos}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta) & \text{dos}\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma) & \text{dos}\,\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \\ \text{wst}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta) & \text{wst}\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma) & \text{wst}\,\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(\alpha-\gamma).$$

PRZYKŁAD XI.

$$\begin{vmatrix} \text{wst}\,\alpha & \text{wst}\,\beta & \text{wst}\,\gamma \\ \text{dos}\,\alpha & \text{dos}\,\beta & \text{dos}\,\gamma \\ \text{wst}\,\alpha\,\text{dos}\,\alpha & \text{wst}\,\beta\,\text{dos}\,\beta & \text{wst}\,\gamma\,\text{dos}\,\gamma \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$$

$$\times[\text{wst}(\alpha+\beta)+\text{wst}(\beta+\gamma)+\text{wst}(\gamma+\alpha)].$$

PRZYKŁAD XII. — Wiele z tych przykładów może się zastosować do obrachowania powierzchni trójkątów, przypominając sobie że podwójną powierzchnią trójkąta utworzonego przez trzy punkta mające za spółrzędne x', y',..., jest

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \end{vmatrix} = x'y'' - x''y' + x'''y' - x'y''' + x''y''' - x'''y'';$$

podobnież trójkąt utworzony przez trzy proste mające za zrównania $ax + by + c = 0, \ldots$, daje na wyrażenie swéj podwójnéj powierzchni kwadrat z wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 \text{ podzielony przez } (ab' - a'b)(a'b'' - a''b')(a''b - ab'').$$

Tak samo powierzchnia trójkąta utworzonego przez środki krzywości w trzech punktach paraboli (wiedząc że, dla paraboli $y^2 = 2px$, i ze spółrzędnemi środka krzywości są $\frac{1}{2}p + 3x', \; -\frac{4y'^2}{p^2}$) sprowadza się ostatecznie do wynalezienia wartości wyznacznika

$$\frac{6}{p^3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'^2 & y''^2 & y'''^2 \\ y'^3 & y''^3 & y'''^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{6}{p^3}(y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y')(y'y'' + y''y''' + y'''y').$$

Można obrachować także powierzchnią trójkąta utworzonego przez trzy normalne albo trzy inne linie mające związki znane z krzywą.

PRZYKŁAD XIII.

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = 2abc;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & d \\ c & 0 & a & e \\ b & a & 0 & f \\ d & e & f & 0 \end{vmatrix} = a^2d^2 + b^2e^2 + c^2f^2 - 2abde - 2bcef - 2adcf.$$

PRZYKŁAD XIV. — *Dowieść równości*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$$

PRZYKŁAD XV. — *Wyrażenie*

$$\begin{vmatrix} a & \lambda & \lambda & \lambda \dots \\ \lambda & b & \lambda & \lambda \dots \\ \lambda & \lambda & c & \lambda \dots \\ \lambda & \lambda & \lambda & d \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

w którém wszystkie elementa są równe, wyjąwszy elementów przekątnéj, sprowadza się do $\varphi(\lambda) - \lambda \dfrac{d\varphi}{d\lambda}$, $\varphi(\lambda)$ jest wieloczynem $(a-\lambda)(b-\lambda)\dots$

ROZDZIAŁ III

MNOŻENIE WYZNACZNIKÓW.

---

22. Wykażemy, w tym rozdziałe, że wieloczyn dwóch wyznaczników może być położony pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika, mającego za elementa summy wieloczynów z elementów każdéj linii jednego z dwóch wyznaczników przez elementa odpowiednich linij drugiego.

I tak, wieloczynem $(a_1 b_2 c_3)$ przez $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$ jest

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Dowodzenia jakie damy dla tego przypadku szczególnego zastosują się zupełnie do przypadku ogólnego. Ponieważ każdy element wyznacznika powyższego jest summą trzech wyrazów, wyznacznik może (19) się rozłożyć na summę dwudziestu siedmiu wyznaczników jakieby się otrzymało biorąc jedną kolumnę częściową w każdéj z trzech kolumn powyższych. Nie potrzebujemy pisać tych dwudziestu siedmiu wyznaczników, dosyć jest wskazać dwa lub trzy pierwsze :

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_1\gamma_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & c_2\gamma_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & c_3\gamma_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix} + \ldots$$

Należy zauważyć teraz że, we wszystkich, każda kolumna ma jeden czynnik spólny który (15) może być wyłączony za nawias jako czynnik wyznacznika. Wyrazy dane powyżéj mogą więc się napisać

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \alpha_1\beta_2\gamma_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \alpha_1\gamma_2\beta_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} + \ldots ;$$

lecz piérwszy z tych wyznaczników sprowadza się do zera, gdyż ma dwie kolumny jednakie; drugi nie jest czém innéem tylko wyznacznikiem $(a_1b_2c_3)$, a trzeci (13) jest $-(a_1b_2c_3)$. Tak samo, każdy inny wyznacznik częściowy mający dwie kolumny jednakie zniszczy się, i rozpozna się łatwo że wszystkie wyznaczniki nie znoszące się są równe wyznacznikowi $(a_1b_2c_3)$, gdy tymczasem czynniki mnożące je są wyrazami wyznacznika $(\alpha_1\beta_2\gamma_3)$.

Możnaby było, tymże samym sposobem, rozłożyć wyznacznik na szereg wyrazów równych wyznacznikowi $(\alpha_1\beta_2\gamma_3)$ pomnożonemu przez jeden z wyrazów $(a_1b_2c_3)$.

23. Z powodu ważności tego twierdzenia, damy inne dowodzenie, oparte na naszém piérwszém określeniu wyznacznika.

Wyznacznik jakiśmy zauważyli w numerze poprzedzającym jest wypadkiem rugowania zmiennych między zrównaniami

$$(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1)x + (a\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2)y$$
$$+ (a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3)z = 0,$$

$$(a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1)x + (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2)y$$
$$+ (a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3)z = 0,$$

$$(a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1)x + (a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2)y$$
$$+ (a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3)z = 0.$$

Zrobiwszy teraz

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = X,$$

$$\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = Y,$$

$$\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = Z.$$

trzy zrównania poprzedzające mogą się napisać

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0,$$

$$a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0,$$

$$a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = 0.$$

Rugując X, Y, Z, widzimy bezpośrednio że $(a_1 b_2 c_3)$ powinien być jednym z czynników wypadku. Lecz można także znaleźć, dla $x, y, z,$ jakikolwiek układ wartości zadosyć czyniący trzem zrównaniom danym, byleby tylko można było otrzymać jakikolwiek układ zadość czyniący zrównaniom $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Więc wyznacznik $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3) = 0$, przedstawiający warunek konieczny ażeby te ostatnie zrównania stały się możliwemi, jest zarówno czynnikiem wypadku. A ponieważ widzimy bez trudności że stopień wypadku względem spółczynników jest ściśle tenże sam co stopień wieloczynu tych dwóch ilości, ten wypadek nie jest przeto czém inném tylko wieloczynem $(a_1 b_2 c_3)(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$.

Wynika z tego co poprzedza że twierdzenie dotyczące mnożenia wyznaczników może się wyrazić pod formą następującą, jakiéj nadal często użyjemy.

Kiedy jakikolwiek układ zrównań

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0,$$

$$a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0,$$

$$a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = 0$$

est przekształcony za pomocą podstawień

$$X = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

$$Y = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,$$

$$Z = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,$$

wyznacznik układu przekształconego jest równy $(a_1 b_2 c_3)$, to jest wyznacznikowi układu pierwotnego rozmnożonemu przez $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$, jaki nazwiemy *modułem przekształcenia.*

24. Twierdzenia numerów poprzedzających mogą być uogólnione w sposób następujący. Możemy mieć dwa szeregi elementów, w których liczba linij poziomych jest różną od liczby kolumn, na przykład:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} \alpha_1 & \beta & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix}\right\|,$$

i możemy z nich złożyć, jak w numerze poprzedzającym, wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix},$$

którego zamierzamy sobie znaleźć wartość.

Przypuśćmy naprzód, jak w przykładzie powyższym, liczbę kolumn większą od liczby linij poziomych, tak że każdy element nowego wyznacznika jest summą jakiéjkolwiek liczby wyrazów przewyższającéj liczbę tych linij. Postępując jak w n^rze^ 22, wartość tego wyznacznika jest

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_2\alpha_1 \\ a_1\alpha_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \ldots$$

$$= (a_1 b_2)(\alpha_1\beta_2) + (a_1 c_2)(\alpha_1\gamma_2) + (b_1 c_2)(\beta_1\gamma_2),$$

to jest że nowy wyznacznik jest summą wieloczynów wszystkich wyznaczników jakie można utworzyć z jedego szeregu elementów pomnożonych każdy przez wyznacznik odpowiedni utworzony z elementów drugiego szeregu.

25. Przypuśćmy teraz, powtóre, liczbę linij poziomych przewyższającą liczbę kolumn. I tak, za pomocą dwóch szeregów elementów

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix}\right\|,$$

utworzymy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 \\ a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 \end{vmatrix}.$$

Rozkładając go podobnież na wyznaczniki częściowe, rozpoznamy że jest rzeczą niepodobną utworzyć z nich żadnego któryby nie miał dwóch kolumn jednakich. Wyznacznik sprowadza się więc jednako (identycznie) do zera. Możnaby jeszcze było o tém się przekonać bezpośrednio dodając do każdego szeregu jakąkolwiek kolumnę zer i mnożąc, co daje wyznacznik powyższy jako wieloczyn dwóch wyznaczników równych pojedynczo zeru.

26. Przypadek szczególny bardzo użyteczny n^{ru} 22 zależy na tém że kwadrat z któregokolwiek wyznacznika jest jakimkolwiek wyznacznikiem symetrycznym (10). I tak kwadrat z wy-

znacznika $(a_1b_2c_3)$ jest

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Wynika także z n^ru 24 że summa kwadratów z wyznaczników

$$(a_1b_2)^2 + (b_1c_2)^2 + (c_1a_2)^2$$

jest wyznacznikiem

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix}.$$

PRZYKŁAD I. — Jeżeli oznaczymy przez $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ dostawy trzech kątów stanowiących kierunek dwóch linij w przestrzeni, a przez θ kąt tych dwóch linij, wiadomo że mamy

$$\text{dos}\,\theta = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2,$$

a tosamość dowiedziona przez nas powyżéj daje

$$\text{wst}^2\theta = (a_1b_2)^2 + (b_1c_2)^2 + (c_1a_2)^2.$$

PRZYKŁAD II. — W teoryi zrównań, jest pożytecznie wyrazić, pod kształtem wyznacznika, wieloczyn kwadratów z różnic pierwiastków. Wieloczyn z różnic n ilości był już położony pod kształtem wyznacznika, przykład V, n^er 21 ; jeżeli podniesiemy go do kwadratu, przyjdzie

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

s_p oznacza summę potęg p ilości $\alpha, \beta, \dots$

PRZYKŁAD III. — N^{er} 24 dowodzi podobnież że

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \Sigma(\alpha - \beta)^2,$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma(\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2.$$

Utworzymy tym sposobem jakikolwiek szereg wyznaczników z których ostatni jest wieloczynem kwadratów z różnic α, β,...; wszystkie wyznaczniki podobne po za tym ostatnim zniszczą się identycznie (PP. Zajączkowski, Skiba i inni piszą : *tożsamościowo*) (25). Ten szereg wyznaczników jest nader wielkiego znaczenia w teoryi równań algebraicznych.

PRZYKŁAD IV. — Weźmy początek spółrzędnych w środku koła opisanego na trójkącie ; niech będzie, R promieniem koła i M powierzchnią trójkąta, mamy

$$2\mathrm{MR} = \begin{vmatrix} x' & y' & \mathrm{R} \\ x'' & y'' & \mathrm{R} \\ x''' & y''' & \mathrm{R} \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad -2\mathrm{MR} = \begin{vmatrix} x' & y' & -\mathrm{R} \\ x'' & y'' & -\mathrm{R} \\ x''' & y''' & -\mathrm{R} \end{vmatrix}.$$

Mnożąc te wyznaczniki według prawidła powyższego, piérwszy wyraz

$$x'^2 + y'^2 - \mathrm{R}^2$$

staje się równy zeru; drugi

$$x'x'' + y'y'' - \mathrm{R}^2 = -\frac{1}{2}[(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2] = -\frac{1}{2}c^2,$$

c jest jakimkolwiek bokiem trójkąta. A zatém

$$-4\mathrm{M}^2\mathrm{R}^2 = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}a^2b^2c^2,$$

zkąd formula znana

$$R = \frac{abc}{4M}.$$

PRZYKŁAD V. — Można użyć tegoż samego sposobu dla znalezienia promienia sfery opisanéj na czworościanie. Wychodząc z wyrażenia objętości czworościanu

$$6V = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \\ x^{\text{IV}} & y^{\text{IV}} & z^{\text{IV}} & 1 \end{vmatrix},$$

znajduje się, jak powyżéj że, a, d; b, e; c, f są parami krawędzi przeciwnych czworościanu,

$$-36R^2V^2 = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & d^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & e^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & f^2 \\ d^2 & e^2 & f^2 & 0 \end{vmatrix},$$

zkąd, oznaczywszy $ad + be + cf$ przez $2S$, wyciąga się, według wzoru podanego w przykładzie XIII, n$^{\text{ru}}$ 21,

$$36R^2V^2 = S(S - ad)(S - be)(S - cf).$$

PRZYKŁAD VI. — Dowodzenia powyższe zostały natchnione P. Burnside'owi przez dowodzenie następujące dane przez P. Joachimsthal'a na wyrażenie powierzchni trójkąta wpisanego w elipsę. Mnóżmy zrównania

$$\frac{2M}{ab} = \begin{vmatrix} \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & 1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & 1 \\ \frac{x'''}{a} & \frac{y'''}{b} & 1 \end{vmatrix}, \quad -\frac{2M}{ab} = \begin{vmatrix} \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & -1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & -1 \\ \frac{x'''}{a} & \frac{y'''}{b} & -1 \end{vmatrix}.$$

Wieloczyn jest jakimkolwiek wyznacznikiem symetrycznym w którym wyrazy przekątnéj są kształtu $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1$ i stają się zerami kiedy punkta są na krzywéj; inne punkta są $\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}-1\ldots$ Teraz jest łatwo dowieść że oznaczając przez γ jakikolwiek bok trójkąta, a przez b'' półśrednicy równoległéj, otrzymamy

$$\frac{\gamma^2}{b''^2}=\frac{(x'-x'')^2}{a^2}+\frac{(y'-y'')^2}{b^2}=2\left(1-\frac{x'x''}{a^2}-\frac{y'y''}{b^2}\right).$$

Mamy więc

$$-2\frac{M^2}{a^2b^2}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\gamma^2}{b'''^2} & \frac{\beta^2}{b''^2} \\ \frac{\gamma^2}{b'''^2} & 0 & \frac{a^2}{b'^2} \\ \frac{\beta^2}{b''^2} & \frac{a^2}{b'^2} & 0 \end{vmatrix}=-\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{4b'^2b''^2b'''^2}.$$

PRZYKŁAD VII. — P. Cayley otrzymał, sposobem następującym (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tom II, str. 270), związki łączące odległości cztérech punktów branych po dwa, a leżących na jakiemkolwiek kole lub pięciu punktów leżących na jakiéjkolwiek kuli.

Podstawmy spółrzędne każdego punktu w równanie ogólne jakiegokolwiek koła

$$x^2+y^2-2Ax-2By+C=0,$$

i wyrugujmy A, B, C, otrzymamy jakikolwiek wyznacznik z cztérech prostych takich jak

$$x'^2+y'^2,\qquad -2x',\qquad -2y',\qquad 1.$$

Pomnóżmy przez jakikolwiek inny wyznacznik, nieróżniący się od tego tylko samym czynnikiem liczebnym, i jaki utworzymy za pomocą cztérech linij kształtu $1,\ x',\ y',\ x'^2+y'^2$; piérwszy wyraz wieloczynu zniszczy się, drugi jest $(x'-x'')^2+(y'-y'')^2$. A zatém, jeżeli $(12)^2$ oznacza kwadrat z odległości między dwoma punktami, wieloczyn pod kształtem wyznacznika jest

$$\begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ (21)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ (31)^2 & (32)^2 & 0 & (34)^2 \\ (41)^2 & (42)^2 & (43)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

jestto związek szukany. Tak więc jak to już widzieliśmy, ten wyznacznik rozwinięty daje związek

$$(12)\,(34) \pm (13)\,(24) \pm (14)\,(23) = 0.$$

Związek łączący odległości pięciu punktów na jakiéjkolwiek kuli jest wyznacznikiem odpowiednim pięciu liniom.

PRZYKŁAD VIII. — *Znaleźć związek między odległościami trzech punktów branych po dwa a leżących na jakiéjkolwiek prostéj, cztérech punktów leżących na jakiéjkolwiek płaszczyznie lub pięciu punktów położonych w przestrzeni.*

Przydajmy jedność i zera do dwóch wyznaczników z których zrobiliśmy wieloczyn w przykładzie poprzedzającym, przyjdzie

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x'^2 + y'^2 & -2x' & -2y' & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x' & y' & x'^2 + y'^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Mamy teraz pięć linij poziomych a tylko cztéry kolumny; wieloczyn, rozwinięty jak w n^rze^ 25, musi więc być zerem. Lecz ten wieloczyn nie jest czém innem jak wyznacznikiem

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ 1 & (21)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ 1 & (31)^2 & (32)^2 & 0 & (34)^2 \\ 1 & (41)^2 & (42)^2 & (43)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

jestto związek szukany. Przemazując ostatnią linią i ostatnią kolumnę, otrzymamy związek między odległościami trzech punktów leżących na jakiéjkolwiek prostéj; przydając, przeciwnie, nową linią 1, $(51)^2$, $(52)^2$,..., otrzymamy związek między odległościami pięciu punktów położonych w przestrzeni. Możemy, przy wykonaniu rachunku tych wyznaczników odciągnąć drugą kolumnę od każdéj z następujących, a potém odciągnąć zarówno piérwszą linią od każdéj z następujących, co daje

$$\begin{vmatrix} 2(12)^2 & (12)^2+(13)^2-(23)^2 & (12)^2+(14)^2-(24)^2 \\ (12)^2+(13)^2-(23)^2 & 2(13)^2 & (13)^2+(14)^2-(34)^2 \\ (12)^2+(14)^2-(24)^2 & (13)^2+(14)^2-(34)^2 & 2(14)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Możnaby wyznaczniki wprost otrzymać pod tym kształtem uproszczonym, lecz nie symetrycznym, kładąc początek w punkcie (1) i tworząc, jak w n[rze] 25, z elementami x', y', x'', y'',..., wyznacznik następujący który powinien być identycznie zerem,

$$\begin{vmatrix} x'^2+y'^2 & x'x''+y'y'' & x'x'''+y'y''' \\ x'x''+y'y'' & x''^2+y''^2 & x''x'''+y''y''' \\ x'x'''+y'y''' & x''x'''+y''y''' & x'''^2+y'''^2 \end{vmatrix}.$$

Rozpoznaje się bez trudności że jest on równoważny wyznacznikowi, który już był ustanowiony powyżéj.

PRZYKŁAD IX. — *Znaleźć związek między łukami łączącemi cztéry punkta wzięte na jakiéjkolwiek kuli.*

Weźmy początek w środku kuli i utwórzmy, z dostaw oznaczających kierunek promieni wodzących poprowadzonych do każdego punktu $\operatorname{dos}\alpha'$, $\operatorname{dos}\beta'$, $\operatorname{dos}\gamma'$, $\operatorname{dos}\alpha''$,..., jakikolwiek wyznacznik który będzie identycznie zerem, przyjdzie

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{dos} ab & \operatorname{dos} ac & \operatorname{dos} ad \\ \operatorname{dos} ba & 1 & \operatorname{dos} bc & \operatorname{dos} bd \\ \operatorname{dos} ca & \operatorname{dos} cb & 1 & \operatorname{dos} cd \\ \operatorname{dos} da & \operatorname{dos} db & \operatorname{dos} dc & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

jeżeli zastąpimy dostawy przez ich rozwinięcia na szeregi $1 - \frac{(ab)^2}{2r^2} + \ldots$, i przypuścimy promień r nieskończony, wyznacznik sprowadza się do wyznacznika przykładu poprzedzającego względem cztérech punktów położonych na jakiéjkolwiek płaszczyznie.

PRZYKŁAD X. — *Niech będzie wyznacznik*

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ h & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix};$$

za pomocą tego wyznacznika chcemy obrachować wieloczyn $\varphi(\lambda)\,\varphi(-\lambda)$.

Wyznacznik przedstawiający wieloczyn jest tegoż samego kształtu jak poprzedzający, λ jest zastąpioném przez λ^2, zaś A,..., H, przez wartości

$$A = a^2 + h^2 + g^2, \qquad B = b^2 + f^2 + h^2 \qquad C = c^2 + g^2 + f^2,$$

$$F = gh + f(b + c), \qquad G = hf + g(c + a), \quad H = fg + h(a + b).$$

Rozwijając i równając zeru, mamy

$$\lambda^6 - L\lambda^4 + M\lambda^2 - N = 0,$$

zrównanie w którém

$$L = a^2 + b^2 + c^2 + 2(f^2 + g^2 + h^2),$$

$$M = (bc - f^2)^2 + (ca - g^2)^2 + (ah - h^2)^2$$
$$+ (af - gh)^2 + 2(bg - hf)^2 + 2(ch - fg)^2,$$

i N jest równe kwadratowi wyznacznika pierwotnego w którym zrobiło się $\lambda = 0$; L, M i N są ilościami koniecznie dodatnemi. Podobnież, jeżeli się utworzy $\varphi(\lambda)$ za pomocą wyznacznika symetrycznego jakiegokolwiek, wieloczyn $\varphi(\lambda)\,\varphi(-\lambda)$ równy zeru, dostarczy jakiegokolwiek zrównania na λ^2 którego wyrazy są na przemiany, dodatne i odjemne, które, według reguły Deskarta, nie może mieć pierwiastku odjemnego. Tymto właśnie sposobem P. Sylwester dowiódł rzeczywistości pierwiastków zrównania $\varphi(\lambda) = 0$. Jest rzeczą oczywistą, według tego cośmy powiedzieli powyżéj, że to zrównanie nie może mieć pierwiastku kształtu $\beta\sqrt{-1}$, i zobaczymy łatwo że ono nie może mieć także w swym składzie pierwiastku kształtu $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; dosyć na to napisać $a - \alpha = a'$, $b - \alpha = b'$, $c - \alpha = c'$ i wróci się napowrót do przypadku poprzedzającego.

Uwaga. — Pan Edward Combescure, znakomity tłomacz na język francuzki głęboko pojętéj i pięknie wykończonéj *Teoryi Wyznaczników* Brioskiego (Brioschi. *La teorica dei determinanti*, *Pavia*, 1854), podaje w tém dziele o powyżéj przytoczoném odkryciu, obok wiernie przełożonych ważnych nad tym wynalazkiem uwag włoskiego geometry, swe własne następujące spostrzeżenia :

Zrównanie trzeciego stopnia na jakie się natrafia, w Geometryi przy oznaczeniu osi głównych jakiéjkolwiek powierzchni drugiego rzędu, w Mechanice przy szukaniu osi momentów głównych bezwładności jakiegokolwiek ciała, w Fizyce matematycznéj przy poznawaniu sił głównych sprężystości lub osi głównych elipsoidy sprężystości, i t. d., można położyć pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika w sposób następujący :

$$f(-\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & \gamma & \beta \\ \gamma & b-\lambda & \alpha \\ \beta & \alpha & c-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Pierwiastki tego zrównania są rzeczywiste. To podanie, już uzasadnione przez PP. Cauchy'ego, Kummera, Borchardta, Jakobiego, odebrało lat temu dwadzieścia od P. Sylwestra (*) nowe dowodzenie bardzo proste i eleganckie, oparte na prawidle odnoszącém się do mnożenia wyznaczników.

Mnożąc piérwszy członek tegoż zrównania przez wyznacznik $f(\lambda)$,

(*) *Philosophical Magazine*, 1852.

otrzymuje się rzeczywiście

$$\begin{vmatrix} A-\lambda^2 & F & E \\ F & B-\lambda^2 & D \\ E & D & C-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

gdzie się zrobiło, dla skrócenia,

$$a^2+\beta^2+\gamma^2=A, \qquad \alpha\beta+\gamma(a+b)=F,$$
$$b^2+\alpha^2+\gamma^2=B, \qquad \alpha\gamma+\beta(a+c)=E,$$
$$c^2+\alpha^2+\beta^2=C, \qquad \beta\gamma+\alpha(b+c)=D,$$

ma się więc

$$-f(\lambda)f(-\lambda)=\lambda^6-L\lambda^4+M\lambda^2-N,$$

i zauważy się że spółczynniki L, M, N są dodatne, albowiem te spółczynniki mogą łatwo być położone pod kształtem

$$L=a^2+b^2+c^2+2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2,$$
$$M=(ab-\gamma^2)^2+(ac-\beta^2)^2+(bc-\alpha^2)^2$$
$$+2(a\alpha-\beta\gamma)^2+2(b\beta-\alpha\gamma)^2+(c\gamma-\alpha\beta)^2,$$

$$N=\begin{vmatrix} a & \gamma & \beta \\ \gamma & b & \alpha \\ \beta & \alpha & c \end{vmatrix}^2.$$

Zrobiwszy

$$a=a_1+p, \quad b=b_1+p, \quad c=c_1+p, \quad \lambda=\lambda_1+p,$$

funkcya $f(-\lambda)$ stanie się

$$\varphi(-\lambda_1)=\begin{vmatrix} a_1-\lambda_1 & \gamma & \beta \\ \gamma & b_1-\lambda_1 & \alpha \\ \beta & \alpha & c_1-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

a zrównanie $\varphi(-\lambda_1)\varphi(\lambda_1)=0$ będzie kształtu

$$\lambda_1^6 - L_1\lambda_1^4 + M_1\lambda_1^2 - N_1 = 0,$$

spółczynniki L_1, M_1, N_1, są dodatne. Stosując do niego regułę znaków DESKARTA, rozpozna się że żadna z wartości na λ^2, nie może być odjemną, to jest że nie można będzie mieć $(\lambda - p)^2 = -q^2$, a, tém samém, $\lambda = p + q\sqrt{-1}$. Jest więc dowiedzionėm że pierwiastki zrównania $f(-\lambda)=0$ są istotnie rzeczywistemi.

Zauważmy że to dowodzenie, zarówno jak dowodzenia PP. JAKOBIEGO i BORCHARDTA, rozciąga się do zrównań n^{tego} stopnia będących tegoż samego kształtu, jak to zobaczymy w jednym z rozdziałów IV^{go} tomu naszéj algebry.

ROZDZIAŁ IV

WYZNACZNIKI ODWROTNE I MNIEJSZE.

27. Widzieliśmy (16) że wyznaczniki mniejsze są połączone z elementami odpowiedniemi przez związek

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \dots = \Delta;$$

są one związane z innemi elementami przez zrównania jednakie

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 + \dots = 0,$$

$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 + \dots = 0.$$

W rzeczy saméj, wyznacznik jest równy $a_1A_1 + a_2A_2 + \dots$, i A_1, $A_2 \dots$ nie zawiérają w sobie a_1, $a_2, \dots$; wyrażenie $b_1A_1 + b_2A_2 + \dots$ jest tém czemby się stał wyznacznik robiąc $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \dots$; lecz miałby on wtedy dwie kolumny jednakie, a tém samém sprowadzałby się do zera (14).

28. Możemy teraz napisać pod kształtem skróconym rozwiązanie jakiegokolwiek układu zrównań

$$a_1x + b_1y + c_1z + \dots = \xi,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + \dots = \eta,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + \dots = \zeta,$$

gdyż, mnożąc piérwsze przez A_1, drugie przez $A_2,\ldots$, i dodając, spółczynniki y, $z,\ldots$, zniszczą się, gdy tym czasem spółczynnik x będzie równy $a_1A_1+a_2A_2+\ldots$, to jest wywyznacznikowi utworzonemu ze wszystkich spółczynników piérwszych członków zrównań : nazwiemy go Δ. Mamy więc

$$\Delta x = A_1\xi + A_2\eta + A_3\zeta + \ldots,$$

$$\Delta y = B_1\xi + B_2\eta + B_3\zeta + \ldots,$$

$$\Delta z = C_1\xi + C_2\eta + C_3\zeta + \ldots .$$

29. Wyznacznikiem *odwrotnym* jakiegokolwiek wyznacznika danego jest wyznacznik mający za elementa, mniejsze wyznacznika piérwotnego; i tak odwrotnym $(a_1b_2c_3)$ jest

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

gdzie A_1, $B_1,\ldots$ mają znaczenie wyłożone powyżéj. Gdy nazwiemy go Δ' i pomnożymy przez wyznacznik pierwotny Δ, przyjdzie, według prawidła n^ru^ 22,

$$\begin{vmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 & a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 \\ a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 \\ a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3 & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{vmatrix},$$

lecz, według n^ru^ 27,

$$a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1=\Delta, \qquad a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0,\ldots,$$

wyznacznik sprowadzi się więc do

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3,$$

zkąd

$$(a_1 b_2 c_3)(\mathrm{A}_1 \mathrm{B}_2 \mathrm{C}_3) = (a_1 b_2 c_3)^3 \quad \text{i} \quad (\mathrm{A}_1 \mathrm{B}_2 \mathrm{C}_3) = (a_1 b_2 c_3)^2,$$

i, ogólnie,

$$\Delta' \Delta = \Delta^n, \qquad \Delta' = \Delta^{n-1}.$$

30. Jeżeli weźmiemy drugi układ zrównań n^{ru} 28, i rozwiążemy go na nowo względem $\xi, \eta, \ldots$ w funkcyi $\Delta x, \Delta y, \ldots$, mamy

$$\Delta' \xi = \mathrm{a}_1 \Delta x + \mathrm{b}_1 \Delta y + \mathrm{c}_1 \Delta z + \ldots,$$

gdzie $\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1, \ldots$, są Mniejszemi wyznacznika odwrotnego.

Lecz te wartości ilości $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ powinny być jednakie ze zrównaniami piérwotnemi; zkąd; zauważywszy że $\Delta' = \Delta^{n-1}$, otrzymamy, przez porównanie spółczynników,

$$\mathrm{a}_1 = \Delta^{n-2} a_1, \qquad \mathrm{b}_1 = \Delta^{n-2} b_1, \qquad \mathrm{c}_1 = \Delta^{n-2} c_1, \ldots,$$

zrównania wyrażające w funkcyach spółczynników piérwotnych, Mniejsze wyznacznika odwrotnego.

31. Widzieliśmy że, wziąwszy pod uwagę jedną kolumnę a jakiegokolwiek wyznacznika, każdy wyraz zamyka w sobie jako czynnik jeden z elementów téj kolumny; a tém samém wyznacznik może się napisać pod kształtem $\Sigma a_p \mathrm{A}_p$. Podobnież, jeżeli się weźmie pod uwagę dwie kolumny jakiekolwiek a i b wyznaczni-

ka, ten wyznacznik może być położony pod kształtem $\Sigma(a_p b_q)A_{pq}$, gdzie summa Σ oznacza wszystkie wyznaczniki możebne jakie można utworzyć biorąc dwie linie poziome z dwóch kolumn danych.

W rzeczy saméj, każdy wyraz wyznacznika zamyka w sobie jako czynnik jeden z elementów z kolumny a i inny którykolwiek z kolumny b; a, według prawidła na znaki, każdemu wyrazowi $a_p b_q c_r d_s,\ldots$ odpowiada jakikolwiek inny $-a_p b_q c_r d_s,\ldots$ Zkąd widzimy że kształt wyznacznika jest $\Sigma(a_p b_q)A_{pq}$, i, przez toż samo rozumowanie jak w n[rze] 16, widzimy także że mnożnik A_{pq} jest Mniejszy otrzymany przez zniesienie dwóch linij i dwóch kolumn w których się znajdują a_p i b_q.

W ogólności, gdy się zauważy p kolumn jakichkolwiek wyznacznika, można wyrazić go jako summę wszystkich wieloczynów jakie się otrzymuje tworząc wszystkie wyznaczniki możebne z p linij poziomych wziętych z pomiędzy tych linij, i z p kolumn, i mnożąc Mniejszy tym sposobem otrzymamy przez swój dopełniający, to jest przez Mniejszy wynikający ze zniesienia tychże samych kolumn i tychże samych linij; na przykład:

$$\begin{aligned}(a_1b_2c_3d_4e_5) = {} & (a_1b_2)(c_3d_4e_5) - (a_1b_3)(c_2d_4e_5) \\ & + (a_1b_4)(c_2d_3e_5) - (a_1b_5)(c_3d_4e_2) \\ & + (a_2b_3)(c_1d_4e_5) - (a_2b_4)\,c_1d_2e_5) \\ & + (a_2b_5)(c_1d_3e_4) + (a_3b_4)(c_1d_2e_5) \\ & - (a_3b_5)(c_1d_2e_4) + (a_4b_5)(c_1d_2e_3).\end{aligned}$$

Znak każdego wyrazu w wyrażeniu poprzedzającém oznacza się bez trudności przez prawidło podane na znaki (8). Jest rzeczą oczywistą, jak w n[rze] 27, że gdy w summie powyższéj zastąpimy wszędzie literę b przez literę c, summa $\Sigma(a_1c_2)(c_3d_4e_5)$ sprowadzi się do zera, gdyż ta summa przedstawia to czémby się stał wyznacznik, jeśliby kolumna c była równą kolumnie b.

32. Twierdzenie n^ru 30 może być uogólnione w sposób następujący : każdy Mniejszy rzędu p jaki można utworzyć z elementów wyznacznika odwrotnego A_1, B_1... równa się, Mniejszemu dopełniającemu w wyznaczniku pierwotnym, pomnożonemu przez potęgę $\overline{p-1}$ tego wyznacznika. Na przykład, w przypadku gdzie wyznacznik piérwotny jest piątego rzędu,

$$(A_1B_2) = \Delta(c_3d_4e_5), \qquad (A_1B_2C_3) = \Delta^2(d_4e_5), \ldots$$

Sposób dowodzenia ogólnego zrozumie się dostatecznie stosując go do piérwszego przykładu; mamy

$$\Delta x = A_1\xi + A_2\eta + A_3\zeta + A_4w + A_5v,$$

$$\Delta y = B_1\xi + B_2\eta + B_3\zeta + B_4w + B_5v.$$

Więc

$$\Delta B_2x - \Delta A_3y = (A_1B_2)\xi + (A_3B_2)\zeta + (A_4B_2)w + (A_5B_2)v.$$

Lecz możemy otrzymać jakiekolwiek inne wyrażenie na x w funkcyi pięciu ilości y, ξ, ζ, w, v; w rzeczy saméj, uważmy zrównanie piérwotne :

$$\xi = a_1x + b_1y + c_1z + d_1w + e_1u,$$

$$\zeta = a_3x + b_3y + c_3z + d_3w + e_3u,$$

$$\omega = a_4x + b_4y + c_4z + d_4w + e_4u,$$

$$\upsilon = a_5x + b_5y + c_5z + d_5w + e_5u;$$

rugując z, w i u, przyjdzie,

$$(a_1c_3d_4e_5)x + (b_1c_3d_4e_5)y = (c_3d_4e_5)\xi - (c_4d_5e_1)\zeta$$
$$+ (c_5d_1e_3)w - (c_1d_5e_4)v;$$

a ponieważ, z określenia, $(a_1c_3d_4e_5) = B_2$, porównywając to zrównanie ze zrównaniami jakieśmy już otrzymali, mamy

$$\frac{A_1B_2}{\Delta} = c_3d_4e_5, \quad \text{albo} \quad (A_1B_2) = \Delta(c_3d_4e_5),\ldots$$

PRZYKŁAD. — *Gdy jakikolwiek wyznacznik sprowadzi się do zera, mniejsze* A_1; $A_2,\ldots$, *są odpowiednio proporcyonalne do* B_1, $B_2,\ldots$

W rzeczy saméj, dowiedliśmy że

$$A_1B_2 - A_2B_1 = \Delta C,$$

C jest drugim mniejszym jaki się otrzymuje znosząc dwie piérwsze kolumny. Więc, gdy $\Delta = 0$, ma się

$$A_1 : A_2 :: B_1 : B_2 \ldots$$

ROZDZIAŁ V

FUNKCYE SYMETRYCZNE.

33. Przypuszczać będziemy że czytelnik zna teoryą funkcyj symetrycznych pierwiastków zrównań, taką jaka jest zwykle przedstawianą w dziełach o teoryi zrównań traktujących. Przyjmiemy przeto że zna on także wzór Newtona dla obrachowania summ z potęg pierwiastków zrównania

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - p_3 x^{n-3} + \ldots = 0,$$

to jest

$$s_1 - p_1 = 0,\ s_2 - p_1 s_1 + 2p_2 = 0,\ s_3 - p_1 s_2 + p_2 s_1 - 3p_3 = 0,$$

zkąd się wyciąga

$$s_1 = p_1, \quad s_2 = p_1^2 - 2p_2, \quad s_3 = p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3, \ldots$$

jakoteż inne formuły

$$\Sigma \alpha^m \beta^p = s_m s_p - s_{m+p},$$

$$\Sigma \alpha^m \beta^p \gamma^q = s_m s_p s_q - s_{m+p}\, s_q - s_{m+q} s_p - s_{p+q} s_m + 2 s_{m+p+q}, \ldots$$

Jeżeli mamy jakąkolwiek funkcyą jednorodną spółczynników $p_1, p_2, \ldots$, *rzęd* téj funkcyi będzie równym, według znaczenia najwięcéj używanego, liczbie czynników zawartych w każdym wyrazie; jeżeli, na przykład, $p_1^t p_2^t p_3^t$ jest jednym wyrazem funkcyi, ta będzie rzędu $r+s+t$. Jeżeli funkcya nie jest jednorodną, rzęd będzie określony przez rzęd wyrazu najwyższego. Nazwiemy *ważnością* jakiéjkolwiek funkcyi summę wskaźników każdego czynnika; i tak ważnością wyrazu $p_1^r p_2^s p_3^t$ będzie summa $r+2s+3t$. Wyraz $p_r p_s p_t$ byłby trzeciego rzędu, a jego ważnością byłaby $r+s+t$. W przepadku funkcyj jakie mamy do zauważania, ważność będzie taż sama dla wszystkich wyrazów.

34. Jeżeli rozważymy wyrażenia dane powyżéj dla $s_1, s_2, s_3,\ldots$ w funkcyi spółczynników, to oczywiście, ważność każdego wyrazu jest równą 2 w s_2, 3 w s_3, a przez indukcyą, n w s_n. Podobnież, ważność $\Sigma\alpha^m\beta^p$ jest $m+p$, tak samo jak ważność $\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q$ jest $m+p+q$...

Można to dowieść następującym ogólnym sposobem. Jeżeli się zastąpi pierwiastki $\alpha, \beta, \gamma,\ldots$ przez $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma,\ldots$, funkcya $\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q$ jest widocznie pomnożoną przez λ^{m+p+q}. Lecz wiadomo że mnożąc każdy pierwiastek przez λ, mnoży się p_1 przez λ, p_2 przez λ^2, p_3 przez λ^3,... Wyrażenie $\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q$ w funkcyi spółczynników powinno więc być takiem, że, jeżeli się zastąpi p_1 przez λp_1, p_2 przez $\lambda^2 p_2,\ldots$, każdy wyraz znajdzie się pomnożonym przez λ^{m+p+q}; co się wyrazi mówiąc że ważnością każdego wyrazu jest $m+p+q$.

35. Ponieważ mamy,

$$p_1=\alpha+\beta+\gamma+\ldots,\quad p_2=\alpha(\beta+\gamma+\ldots)+\beta\gamma+\ldots,$$

a żaden ze spółczynników $p_3, p_4\ldots$ nie zawiéra α w jakiéjkolwiek potędze wyższéj nad piérwszą, jest więc rzeczą oczywistą że rzęd funkcyi symetrycznéj jakiéjkolwiek $\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q$ (m przypuszcza się $> p$ i q) musi być przynajmniéj równy m; w rzeczy saméj, potrzeba przynajmniéj m czynników zawierających każdy α w piérwszym stopniu ażeby wieloczyn zamykał α^m. Wzajemnie, wszelka funkcya symetryczna rzędu m zawiérać będzie α^m w jakimkolwiek wyrazie. Oznaczywszy bowiem przez q_1 summę pierwiastków $\beta, \gamma, \delta,\ldots$, przez $q_2,\ldots$ summę ich wieloczynów wziętych po *dwa*,..., będziemy mieli,

$$p_1 = \alpha + q_1, \qquad p_2 = \alpha q_1 + q_2, \qquad p_3 = \alpha q_2 + q_3, \ldots,$$

a spółczynnik najwyższéj potęgi pierwiastku α w jakimkolwiek wyrazie $p_2^r p_3^s p_4^t$ będzie $q_1^r q_2^s q_3^t$; i nawzajem, czynnik $q_1^r q_2^s q_3^t$ nie może pochodzić jak tylko z wyrazu $p_2^r p_3^s p_4^t$. Nie może więc sprowadzić się do zera przez przydanie innych wyrazów; zkąd wypływa że rzęd funkcyi symetrycznéj $\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q$ jest równy największéj z liczb m, p, q: dowiedliśmy w istocie że ten rzęd nie może być mniejszym i tenże nie może być także większym, ponieważ funkcya jakiegokolwiek bądź stopnia wyższego zawiérałaby w sobie potęgi z pierwiastku α wyższe jak α^m.

Za pomocą tych dwóch zasad, można napisać bezpośrednio część wyrażoną literami jakiéjkolwiek bądź funkcyi symetrycznéj, i pozostaną do oznaczenia same tylko spółczynniki. Jeżeli chcemy utworzyć $\Sigma\alpha^2(\beta - \gamma)^2$, widzimy bez trudności że idzie tu o funkcyą któréj ważność jest 4 a rzęd 2, to jest że każdy wyraz może mieć tylko dwa czynniki. Jedyne wyrazy mogące w niéj figurować są $p_4, p_3 p_1, p_2^2$, i, dla uzupełnienia rachunku funkcyi, pozostaje nam tylko oznaczyć spółczynniki liczebne tych trzech wyrazów.

36. Funkcye symetryczne z różnic pierwiastków, są to funkcye któremi najwięcéj będziemy się zatrudniali, jest więc pożytecznie dać tu poznać twierdzenie za pomocą którego summy z potęg tych różnic mogą się wyrazić w funkcyi summ z potęg samychże pierwiastków. Rozwińmy $(x - \alpha)^m$ za pomocą wzoru dwumianu, rozwińmy także $(x - \beta)^m,\ldots$, i dodajmy; będzie:

$$\Sigma(x - \alpha)^m = s_0 x^m - m s_1 x^{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) s_2 x^{m-2} \ldots -$$

Teraz, jeżeli zastąpimy x przez α w tém wyrażeniu, to ono staje się

$$(\alpha - \beta)^m + (\alpha - \gamma)^m + \ldots;$$

jeżeli zastąpimy x przez β, to ono staje się

$$(\beta - \alpha)^m + (\beta - \gamma)^m + \ldots,$$

i tak daléj. Dodajmy wypadki wszystkich tych podstawień: jeżeli m jest nieparzystém, summa jest zerem, ponieważ wyrazy $(\alpha - \beta)^m$, $(\beta - \alpha)^m$ zniszczą się; jeżeli m jest parzystém, to rozwinięcie staje się, przeciwnie, $2\Sigma(\alpha - \beta)^m$, lecz toż samo podstawienie wykonawszy w drugim członku zrównania, otrzymamy dodając

$$s_0 s_m - m s_1 s_{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) s_2 s_{m-2} \ldots$$

Jeżeli m est nieparzystém, ostatni wyraz będzie $- s_m s_0$, niszczący piérwszy, i wszystkie inne wyrazy zniszczą się także; lecz, jeżeli m jest parzystém, ostatni wyraz będzie jednakim z piérwszym i tak daléj, i zrównanie stanie się podzielném przez 2. Mamy więc, gdy m jest parzystém,

$$\Sigma(\alpha - \beta)^m = s_0 s_m - m s_1 s_{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) s_2 s_{m-2} - \ldots,$$

spółczynniki są spółczynnikami dwumianu, oprócz spółczynnika środkowego, na którym się zatrzymamy dzieląc go przez 2. Na przykład,

$$\Sigma(\alpha - \beta)^4 = s_0 s_4 - 4 s_1 s_3 + 3 s_2,$$

$$\Sigma(\alpha - \beta)^6 = s_0 s_6 - 6 s_1 s_5 + 15 s_2 s_4 - 10 s_3^2.$$

37. Wszelka funkcya z różnic pierwiastków musi oczywiście pozostać niezmienną, gdy się powiększy lub zmniejszy wszystkie te pierwiastki o tęż samą ilość; jeżeli, na przykład, zastąpiemy w zrównaniu, x przez $x-\lambda$, to ono staje się, w tym przypadku,

$$x^n-(p_1+n\lambda)x^{n-1}+\left[p_2+(n-1)\lambda p_1+\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2\right]x^{n-2}$$
$$-[p_3+(n-2)\lambda p_2+\ldots]x^{n-3}+\ldots=0.$$

Lecz funkcya jakakolwiek φ spółczynników $p_1, p_2, \ldots$, gdy zamieniemy p_1 na $p_1+\delta p_1$, p_2 na $p_2+\delta p_2, \ldots$ staje się

$$\varphi+\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\delta p_1+\frac{d\varphi}{dp_2}\delta p_2+\ldots\right)$$
$$+\frac{1}{1.2}\left[\frac{d^2\varphi}{dp_1^2}(\delta p_1)^2+\ldots\right]+\ldots$$

Zastąpmy więc p_1 przez $p_1+n\lambda$, p_2 przez

$$p_2+(n-1)\lambda p_1+\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2\ldots,$$

i uporządkujmy wypadek względem potęg λ, ten wypadek staje się

$$\varphi+\lambda\left[n\frac{d\varphi}{dp_1}+(n-1)p_1\frac{d\varphi}{dp_2}+(n-2)p_2\frac{d\varphi}{dp_3}+\ldots\right]+\lambda^2\ldots=0.$$

Widzieliśmy że wszelka funkcya z różnic nie powinna się zmieniać przez podstawienie, jakkolwiek małém będzie λ; taż funkcya więc, gdy wyrazimy ją w funkcyi spółczynników, powinna zadosyć uczynić zrównaniu różniczkowemu

$$n\frac{d\varphi}{dp_1}+(n-1)p_1\frac{d\varphi}{dp_2}+(n-2)p_2\frac{d\varphi}{dp_3}+\ldots=0.$$

PRZYKŁAD I. — *Utworzyć* $\Sigma(\alpha - \beta)^2$.

Wiemy że rzęd i ważność téj funkcyi są równe 2; ta funkcya powinna więc być kształtu $Ap_2 + Bp_1^2$. Oznaczmy ją przez φ i zastosujmy do niéj zrównanie różniczkowe, tak postępując otrzymamy

$$n\frac{d\varphi}{dp_1} + (n-1)p_1\frac{d\varphi}{dp_1} = 0.$$

A ponieważ

$$\varphi = Ap_2 + Bp_1^2;$$

zkąd

$$\frac{d\varphi}{dp_1} = 2\,Bp_1,$$

$$\frac{d\varphi}{dp_2} = A,$$

podstawiając te wartości w zrównanie powyższe, przyjdzie

$$n \times 2Bp_1 + (n-1)p_1 \times A = 0,$$

albo, wyłączając czynnik spólny p_1 za nawias,

$$[(n-1)A + 2nB]p_1 = 0,$$

a że p_1 nie jest zerem, przeto drugi czynnik $[(n-1)A + 2nB]$ musi być koniecznie zerem; czyli, innemi słowy, B musi być stale proporcyonalném do $(n-1)$, zaś A do $2n$; co do funkcyi, ta może się tylko różnić jakimkolwiek czynnikiem wyrażenia $(n-1)p_1^2 - 2np_2$.

Dostrzeżemy że ten czynnik jest równym *jedności*, przypuszczając $\alpha = 1$, wszystkie zaś inne pierwiastki robiąc bez wyjątku każdy odrębnie zerem, zkąd $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, co sprowadza wyrażenie powyższe do $n - 1$, jak to łatwo można było przewidzieć.

PRZYKŁAD II. — *Utworzyć, dla jakiegokolwiek bądź zrównania trzeciego stopnia. wieloczyn kwadratów z różnic* $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$.

Rzęd funkcyi jest 4, jéj ważność jest 6, i ta funkcya musi być kształtu

$$Ap_3^2 + Bp_3p_2p_1 + Cp_3p_1^3 + Dp_2^3 + Ep_2^2p_1^2.$$

Oznaczając ją przez φ i stosując do niéj zrównanie różniczkowe, mamy

$$3\frac{d\varphi}{dp_1} + 2p_1\frac{d\varphi}{dp_2} + p_2\frac{d\varphi}{dp_3} = 0.$$

A że

$$\varphi = Ap_3^2 + Bp_3p_2p_1 + Cp_3p_1^3 + Dp^3 + Ep_2^2p_1^2;$$

zkąd

$$3)\qquad \frac{d\varphi}{dp_1} = Bp_3p_2 + 3Cp_3p_1^2 + 2Ep_2^2p_1,$$

$$2p_1)\qquad \frac{d\varphi}{dp_2} = Bp_3p_1 + 3Dp_2^2 + 2Ep_2p_1^2,$$

$$p_2)\qquad \frac{d\varphi}{dp_3} = 2Ap_3 + Bp_2p_1 + Cp_1^3,$$

po podstawieniu tych wartości w zrównanie powyższe, wykonaniu wskazanych działań i uporządkowaniu symetryczném uproszczonych wyrazów, przyjdzie,

$$(2A + 3B)p_3p_2 + (2B + 9C)p_3p_1^2 + (B + 6D + 6E)p_2^2p_1 + (C + 4E)p_2p_1^3,$$

to wyrażenie powinno być tożsamościowo zerem, zkąd

$$C = -4E, \qquad B = 18E, \qquad A = -27E, \qquad D = -4E;$$

a więc funkcya może się różnić tylko jakimkolwiek czynnikiem wyrażenia

$$p_1^2p_2^2 + 18p_1p_2p_3 - 4p_2^3 - 4p_3p_1^3 - 27p_3^2.$$

Można dostrzedz że czynnik jest równym *jedności* gdy się przypuszcza że γ, a tém samém p_3, mają każdy odrębnie za swą wartość zero.

38. Będziemy używali, w dalszym ciągu, zrównań jedno-

rodnych. Pisząc $\frac{x}{y}$ zamiast x i znosząc ułamki, zrównanie jakiegośmy użyli staje się

$$x^n - p_1 x^{n-1} y + p^2 x^{n-2} y^2 \dots \pm p_n y^n = 0.$$

Przydajmy dla symetryi, jakikolwiek spółczynnik piérwszemu wyrazowi x^n : należy, nadto, dać różnym wyrazóm spółczynniki rozwinięcia dwumianu $(x+y)^{an}$, i napisać wypadek w ten sposób rozwinięty pod kształtem

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{1}{2} n(n-1) a_2 x^{n-2} y^2 + \dots$$

$$+ n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n \quad \text{lub} \quad a_n y_n = 0.$$

Korzyść jaką otrzymujemy przez użycie spółczynników dwumianu zależy na tém, że we wszystkich funkcyach z różnic pierwiastków wyrażonych w funkcyi spółczynników zrównania, summa spółczynników liczebnych jest zerem. W rzeczy saméj, znajdziemy tę summę robiąc $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 1$; lecz, w tém przypuszczeniu, wszystkie pierwiastki stają się równemi, a tém samém ich różnice niszczą się.

Rozumieć będziemy, przez funkcyą symetryczną pierwiastków jakiegokolwiek bądź zrównania jednorodnego, funkcyą symetryczną pierwiastków zrównania w $\frac{x}{y}$, utworzonego po podzieleniu przez $a_0 y^n$, ze spółczynników $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_0}, \dots$, i pomnożonego przez najwyższą potęgę ilości a_0 znajdującéj się w mianowniku mającym posłużyć do zniesienia ułamków. Tym sposobem, wszelka funkcya symetryczna będzie jakąkolwiek bądź funkcyą jednorodną ilości $a_0, a_1, \dots$; w rzeczy saméj, przed zniesieniem ułamków, ta funkcya była jednorodną i stopnia zero, i przetrwa ona w tym stanie, jeżeli się pomnoży wszystkie jéj wyrazy przez tenże sam czynnik. Możemy także ustanowić teoryą funkcyj symetrycznych pierwiastków jakiegokolwiek bądź zrównania jednorodnego nie potrzebując przekształcać go poprzednio na jakiekolwiek bądź zrównanie w $\frac{x}{y}$. Niech będzie α jednym z pierwiastków tego ostatniego, oczywiście że zrównaniu jednorodnemu zadosyć uczynią wszelkie wartości na x', y' dla których znajdzie się $x' = \alpha y'$, ponieważ nie ma tu oczywiście innego pytania jak tylko o stosunku $\frac{x'}{y'}$; zrównanie podzielone przez y^n rozkładać się daje na czynniki, a tak zrównanie jednorodne da się przywieść do jakiegokolwiek wieloczynu $(y'x - yx')(y''x - yx'')(y'''x - yx''')\ldots$ Mnóżmy i porównajmy ze zrównaniem pierwotném, przyjdzie

$$a_0 = y'y''y'''\ldots,\quad na_1 = -\Sigma x'y''y'''\ldots,\quad \frac{1}{2}n(n-1)a_2 = \Sigma x'x''y'''\ldots,$$

$$na_{n-1} = \mp \Sigma y'x''x'''\ldots,\quad a_n = \pm x'x''x'''\ldots$$

Jeżeli zrobimy y', y'',... równemi jedności, te wyrażenia sprowadzają się do wyrażeń zwykłych spółczynników jakiegokolwiek bądź zrównania w funkcyi pierwiastków x', x'',... Nawzajem, wszelka funkcya symetryczna napisana pod kształtem zwyczajnym z pierwiastkami x', x''... może przywieść się do drugiego kształtu, przypuszczając każdą wartość x' podzieloną przez jakąkolwiek wartość odpowiednią y' i ogół t. j. wszystkie wyrazy funkcyi pomnożone przez jakąkolwiek bądź potęgę ilości $y'y''$... dosyć podniesionéj aby można było znieść ułamki. I tak summa kwadratów z różnic $\Sigma(x' - x'')^2$ staje się

$$\Sigma(x'y'' - y'x'')^2 y'''^2 y^{\text{iv}2}\ldots,$$

i, ogólnie, wszelkie funkcye z różnic dadzą się sprowadzić do jakiejkolwiek summy wieloczynów wyznaczników takich jak $x'y'' - y''x'$, $x'y''' - x'''y'$,..., przez potęgi z ilości y', y'',...

39. Zrównanie różniczkowe jakieśmy podali dla funkcyj z różnic pierwiastków wymaga aby było nieco zmienioném kiedy się pisze zrównanie ze spółczynnikami dwumianu.

Jeżeli, w zrównaniu

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \ldots = 0,$$

zastąpimy x przez $x + \lambda$, a_1 staje się $a_1 + \lambda a_1$, a_2 staje się $a_2 + 2a_1\lambda + a_0\lambda^2$, a_3 staje się $a_3 + 3\lambda a_2 + 3\lambda^2 a_1 + \lambda^3 a_0 \ldots$, i wszelka funkcya φ spółczynników przekształca się na następującą

$$\varphi + \lambda\left(a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \ldots\right) + \ldots$$

Wszelka funycya z różnic pierwiastków powinna więc, ponieważ ta funkcya nie zmienia się jeżeli się zastąpi x przez $x + \lambda$, zadosyć uczynić zrównaniu

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \ldots = 0.$$

Podobnież, wszelka funkcya nie zmieniająca się gdy się zastąpi y przez $y + \lambda$, powinna zadość uczynić zrównaniu

$$n a_1 \frac{d\varphi}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{d\varphi}{da_1} + (n-2) a_3 \frac{d}{da_2} + \ldots = 0.$$

Funkcye tego rodzaju są funkcyami wartości odwrotnych pierwiastków, i, w znakowaniu jednorodném, zależą od wieloczynów kształtu $x'y'' - x''y'\ldots$ pomnożonych przez potęgi ilości x', x'',... Funkcye samych wyznaczników $x'y'' - x''y'$,.., niepomnożone przez potęgi x', y', .., będą zadosyć czyniły obu zrównaniom różniczkowym.

40. Potrzeba zauważyć że warunek

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \ldots = 0$$

jest nie tylko koniecznym, ale dostatecznym ażeby φ nie zmieniło się przez podstawienie $x + \lambda$ za x. Widzieliśmy że spółczynnik λ, w zrównaniu przekształconém, sprowadza się do zera, i znajduje się bez trudności, za spółczynnik λ^2,

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_1 \frac{d\varphi}{da_3} + 6a_2 \frac{d\varphi}{da_4} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left(a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \ldots\right)^2 \varphi,$$

gdzie a_0, a_1,..., pokazujące się wyraźnie, nie powinny być różniczkowanemi w ostatnim symbolu. Lecz ten wypadek nie jest różnym od tego jaki się otrzymuje wykonywając na funkcyi

$$\frac{1}{1.2}\left(a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + \ldots\right)$$

działanie $a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \ldots$, gdyż to działanie dostarczy z jednéj strony, wyrazów jakie się otrzymuje różniczkując a_1, a_2,.., które się pokazują sposobem wyraźnym w symbolu, a z drugiéj wyrazów jakie się otrzymuje zostawiając w téj funkcyi a_1, a_2,... stałemi : summa $a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + \ldots$ sprowadza się do zera, stanie się podobnież ze spółczynnikiem λ^2, i ze spółczynnikami innych potęg λ.

PRZYKŁAD. — *Utworzyć, dla zrównania trzeciego stopnia*

$$a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$

funkcyą

$$\Sigma(x_1y_2 - x_2y_1)^2(x_2y_3 - x_3y_2)^2(x_3y_1 - x_1y_3)^2.$$

Można wyprowadzić to zadanie z przykładu II, nru 37, lub otrzymać je sposobem następującym : funkcya jest czwartego rzędu, jéj ważność 6; ta funkcya powinna więc być kształtu

$$Aa_3a_3a_0a_0 + Ba_3a_2a_1a_0 + Ca_3a_1a_1a_1 + Da_2a_2a_2a_0 + Ea_2a_2a_1a_1.$$

Wykonywając działanie

$$a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2} + 3a_2\frac{d}{da_3},$$

ma się

$$(B + 6A)a_3a_2a_0a_0 + (3C + 2B)a_3a_1a_1a_0$$
$$+ (2E + 6D + 3B)a_2a_2a_1a_0 + (4E + 3C)a_2a_1a_1a_1 = 0;$$

równając odrębnie z zerem spółczynnik każdego wyrazu i robiąc $A = 1$, przyjdzie

$$B = -6, \quad C = 4, \quad D = 4, \quad E = -3.$$

41. P. Serret działanie wskazane przez $a_0\dfrac{d\varphi}{da_1} + \ldots$ pisze pod kształtem przedstawiającym niekiedy korzyści. Wyobraźmy sobie jakąkolwiek bądź zmienną pomocniczą ζ któréj spółczynniki $a_0, a_1, \ldots,$ są funkcyami takiemi, żeby było

$$\frac{da_1}{d\zeta} = a_0, \quad \frac{da_2}{d\zeta} = 2a_1, \quad \frac{da_3}{d\zeta} = 3a_2, \ldots;$$

mamy oczywiście

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \ldots = \frac{d\varphi}{d\zeta}.$$

Można podobnież napisać $na_1 \frac{d\varphi}{da_0} + \ldots$ pod kształtem skróconym $\frac{d\varphi}{d\eta}$, η jest jakąkolwiek zmienną której spółczynniki $a_0, a_1, \ldots$, są funkcyami takiemi, żeby było

$$\frac{da_0}{d\eta} = na_1, \quad \frac{da_1}{d\eta} = (n-1)a_2 \ldots$$

42. Należy też dać poznać spostrzeżenie zrobione przez Brioskiego względem znaczenia piérwszego z tych działań gdy się wyraża je w funkcyi pierwiastków. Uważmy jakąkolwiek funkcyą spółczynników $p_1, p_2, p_3, \ldots$; wyraźmy te spółczynniki w funkcyi pierwiastków i rozważmy ich pochodne względem pierwiastków.

Oznaczywszy jak powyżéj przez q_1 summę, przez q_2 summę wieloczynów wziętych po dwa, i t. d., wszystkich pierwiastków mniéj jednym z nich α, mamy oczywiście

$$\frac{dp_1}{d\alpha} = 1, \quad \frac{dp_2}{d\alpha} = q_1, \quad \frac{dp_3}{d\alpha} = q_2 \ldots,$$

i

$$\frac{d}{d\alpha} = \frac{d}{dp_1} + q_1 \frac{d}{dp_2} + q_2 \frac{d}{dp_3} + \ldots$$

Mamy także wyrażenia odpowiednie dla pochodnych względem innych pierwiastków; dodając je do siebie, spółczynnik $\frac{d}{dp_1}$ staje się równym n. Spółczynnik $\frac{d}{dp_2}$ staje się $(n-1)p_1$.

W rzeczy saméj, ponieważ $q_1 = p_1 - \alpha$, dodając, spółczynnik żądany stanie się $np_1 - (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) = (n-1)p_1$. Podobnież spółczynnik $\frac{d}{dp_2}$ jest równy $(n-2)p_2$, i mamy

$$\left(\frac{d}{d\alpha} + \frac{d}{d\beta} + \ldots\right) = n\frac{d}{dp_1} + (n-1)p_1\frac{d}{dp_2} + (n-2)p_2\frac{d}{dp_3} + \ldots$$

Widzimy teraz jasno, czemu, stosując działanie wskazane przez drugi członek do jakiéjkolwiek funkcyi z różnic pierwiastków, wypadek sprowadza się do zera : albowiem działanie równoważne $\frac{d}{d\alpha} + \ldots$, zastosowane do różnicy jakiéjkolwiek, dostarczy wypadek tożsamościowo równy zeru.

Podobnież gdyby zrównanie było napisane ze spółczynnikam. dwumianu, mielibyśmy byli

$$n\frac{da_1}{d\alpha} = a_0, \quad \frac{1}{2}n(n-1)\frac{da_2}{d\alpha} = na_1, \ldots,$$

zkąd, jak poprzednio,

$$\frac{d}{d\alpha} + \frac{d}{d\beta} + \ldots = a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2} + \ldots$$

ROZDZIAŁ VI

WYZNACZNIKI ZWANE WYPADKOWYMI (*RÉSULTANTS*).

43. Jeżeli mamy k zrównań jednorodnych o k zmiennych, albo, co na jedno wychodzi, k zrównań niejednorodnych o $k-1$ zmiennych, jest zawsze podobna połączyć je w sposób taki aby można było z nich wydobyć jedno tylko zrównanie $\Delta = 0$ niezawierające w sobie żadnéj zmiennéj. Mówi się wtedy że zmienne są wyrugowane a Δ jest *wypadkowym* (le *résultant*) (*) układu zrównań. Weźmy przykład najprostszy, ten jaki już przytoczyliśmy w piérwszym rozdziale, to jest dwóch zrównań piérwszego stopnia

$$ax + b = 0, \qquad a'x + b' = 0.$$

Mnożąc piérwsze przez a', drugie przez a, i odciągając piérwsze od drugiego, przyjdzie

$$ab' - a'b = 0,$$

i ilość $ab' - a'b$ jest rugownikiem dwóch zrównań. Potrzeba teraz zauważyć że nie można ztąd wywieść równości $ab' - a'b = 0$ dopóty, dopóki dwa zrównania dane nie staną się jednoczesnemi, to jest dopóki te zrównania nie zostaną sprawdzone

(*) Wypadkowe odebrały także nazwisko *rugowników* (*éliminants*).

przez jedną i tęż samą wartość na x. W rzeczy saméj, nie ulega wątpliwości, że gdy łączymy dwa zrównania

$$\varphi(x)=0, \qquad \psi(x)=0$$

dla wydobycia z nich równości

$$l\varphi(x)+m\psi(x)=0,$$

przypuszczamy wyraźnie że x przedstawia tęż samą ilość w dwóch zrównaniach. Wynika ztąd że równość

$$ab'-a'b=0$$

przedstawia warunek konieczny ażeby dwa zrównania mogły być sprawdzone przez jedną i tęż samą wartość na x, jak można także widzieć to bezpośrednio rozwiązując oba względem x i równając między sobą wartości tak otrzymane. I, ogólnie, mając daną liczbę ilukolwiek zrównań

$$\mathrm{U}=0, \qquad \mathrm{V}=0, \qquad \mathrm{W}=0,$$

możemy połączyć je i wyciągnąć z nich jakąkolwiek równość taką aby było

$$l\mathrm{U}+m\mathrm{V}+n\mathrm{W}=0,$$

byleby tylko zmienne miały też same wartości we wszystkich zrównaniach. A jeżeli, kombinując je, przyjdziemy do jakiegokolwiek wypadku niezawiérającego w sobie więcéj zmiennych, sprowadzi się go do zera skoro te zrównania będą mogły być sprawdzone przez jakikolwiek spólny układ wartości, i tylko w tym przypadku. Rugownik, czyli raczéj wypadek otrzymany z rugowania zmiennych w danym układzie zrównań, może więc być określony: Funkcya jakakolwiek spółczynników danego układu zrównań dająca się sprowadzić do zera byleby tylko zrównania dane przyjmować ciągle nie przestały jakiegokolwiek bądź układu rozwiązań spólnych.

44. Mamy teraz pokazać w jaki sposób rugowanie może się wykonać i jaka jest natura wypadku do którego zostaje się przywiedzionym. Poczniemy od dwóch zrównań napisanych pod kształtem niejednorodnym

$$x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots = 0 \quad \text{albo} \quad \varphi(x) = 0,$$

$$x^n - q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \ldots = 0 \quad \text{albo} \quad \psi(x) = 0.$$

Rugownik przedstawia, jak to już widzieliśmy, warunek konieczny ażeby dwa zrównania miały jakikolwiek pierwiastek spólny. Jeżeli to ma miejsce, którykolwiek z pierwiastków piérwszego zrównania musi zadość uczynić drugiemu; niech będą więc α, β, γ,... pierwiastki piérwszego zrównania, i podstawmy je kolejno w drugie, jeden z wypadków $\psi(\alpha)$, $\psi(\beta)$,..., musi stać się zerem, i ich wieloczyn jest koniecznie w tymże samym przypadku. Lecz ten wieloczyn jest jakąkolwiek funkcyą symetryczną pierwiastków piérwszego zrównania, i odtąd może się wyrazić w funkcyi swych spółczynników; mamy tym sposobem wypadek szukany. Prawidło postępowania dla wyrugowania według tego sposobu jest więc wzięcie m czynników

$$\psi(\alpha) = \alpha^n - q_1 \alpha^{n-1} + q_2 \alpha^{n-2} - \ldots,$$

$$\psi(\beta) = \beta^n - q_1 \beta^{n-1} + q_2 \beta^{n-2} - \ldots,$$

$$\psi(\gamma) = \gamma^n - q_1 \gamma^{n-1} + q_2 \gamma^{n-2} - \ldots,$$

pomnożenie ich wszystkich razem, i podstawienie na miejsce funkcyj symetrycznych pierwiastków α, β, γ,... ich wartości w funkcyi spółczynników piérwszego zrównania.

PRZYKŁAD. — *Wyrugować* x *między dwoma zrównaniami*

$$x^2 - p_1x + p_2 = 0, \qquad x^2 - q_1x + q_2 = 0.$$

Mnóżmy $(\alpha^2 - q_1\alpha + q_2)$, przez $(\beta_2 - q_1\beta + q_2)$, przyjdzie

$$\alpha^2\beta^2 - q_1\alpha\beta(\alpha + \beta) + q_2(\alpha^2 + \beta^2) + q_1^2\,\alpha\beta - q_1q_2(\alpha + \beta) + q_2^2;$$

zastąpmy $\alpha + \beta$ przez p_1, $\alpha\beta$ przez p_2, $\alpha^2 + \beta^2$ przez $p_1^2 - 2p_2$, mamy

$$p_2^2 - p_1p_2q_1 + q_2(p_1^2 - 2p_2) + p_2q_1^2 - q_1q_2p_1 + q_2^2,$$

albo

$$(p_2 - q_2)^2 + (p_1 - q_1)(p_1q_2 - p_2q_1):$$

takim jest wypadek szukany.

45. Otrzymałoby się tenże sam wypadek (niezważając na znak) przez podstawienie pierwiastków piérwszego zrównania w drugie, albo przez podstawienie pierwiastków drugiego w piérwsze.

Innemi słowy, oznaczywszy przez $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ pierwiastki drugiego zrównania, wypadek może się napisać zarówno pod jednym albo drugim kształtem

$$\varphi(\alpha')\,\varphi(\beta')\,\varphi(\gamma')\ldots, \qquad \text{albo} \qquad \psi(\alpha)\,\psi(\beta)\,\psi(\gamma)\ldots;$$

teraz, jeżeli przypomnimy że

$$\varphi(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\ldots,$$

piérwszy kształt wychodzi na

$$(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)(\alpha' - \gamma)\ldots(\beta' - \alpha)(\beta' - \beta)(\beta' - \gamma)\ldots,$$

a drugi na

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\alpha - \gamma')\ldots(\beta - \alpha')(\beta - \beta')(\beta - \gamma')\ldots$$

W dwóch przypadkach mamy więc wieloczyn ze wszystkich różnic między jakimkolwiek pierwiastkiem piérwszego zrównania i jakimkolwiek pierwiastkiem drugiego, i te dwa wieloczyny nie mogą różnić się między sobą jak tylko ich znakiem.

46. Jeżeliby zrównania były danemi pod kształtem jednorodnym, ze spółczynnikami lub bez spółczynników dwumianu,

$$a_0x^m + ma_1x^{m-1}y + \frac{1}{2}m(m-1)a_2x^{m-2}y^2 + \ldots = 0,$$

$$b_0x^n + nb_1x^{n-1}y + \frac{1}{2}n(n-1)b_2x^{n-2}y^2 + \ldots = 0,$$

przywiodłoby się je do kształtu poprzedzającego dzieląc przez a_0y^m, b_0y^n, i otrzymałoby się $p_1 = -\frac{ma_1}{a_0}, q_1 = -\frac{nb_1}{b_0}, \ldots$ Podstawiłoby się te wartości w wypadek otrzymany za pomocą sposobu numeru poprzedzającego, i zniosłoby się ułamki mnożąc przez najwyższą potęgę a_0 i b_0 znajdującą się w mianownikach; rugownik dwóch funkcyj

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2, \qquad b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2$$

wyprowadzony w ten sposób z wartości otrzymanéj powyżéj (44) staje się

$$(a_0b_2 - a_2b_0)^2 + 4(a_1b_0 - a_0b_1)(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Rugownik jest zawsze jakąkolwiek funkcyą jednorodną spółczynników dwóch zrównań. W rzeczy saméj, przed zniesieniem mianowników, był on oczywiście funkcyą jednorodną stopnia zero, a tém samém pozostanie jeszcze jednorodnym kiedy się pomnoży wszystkie wyrazy przez jedną i tęż samą ilość. Można to także widzieć stosując wprost do zrównań sposób n^{ru} 44. Niech będą x', y'; x'', y'',..., wartości zadosyć czyniące piérwszemu; jeżeli dwa zrównania przypuszczą jakikolwiek czynnik spólny, niektóre z tych wartości powinny zadosyć uczynić drugiemu. Wykona się więc wieloczyn

$$(b_0x'^n + nb_1x'^{n-1}y' + \ldots)(b_0x''^n + nb_1x''^{n-1}y'' + \ldots), \ldots,$$

i zastąpi się funkcye symetryczne pierwiastków przez ich wartości w funkcyi spółczynników piérwszego zrównania, jak w n^{rze} 38.

47. Rugownik dwóch zrównań stopni m i n jest n^{tego} stopnia względem spółczynników piérwszego, i m^{tego} względem spółczynników drugiego.

W rzeczy saméj, może się on napisać, bądź to jako wieloczyn z m czynników $\psi(\alpha)\,\psi(\beta)\ldots$ zawiérających każdy w piérwszym stopniu spółczynniki drugiego zrównania, bądź to jako wieloczyn z n czynników $\varphi(\alpha')\,\varphi(\beta')\ldots$ zawiérających każdy w piérwszym stopniu spółczynniki piérwszego. Biorąc pod uwagę jedynie sam kształt $\psi(\alpha)\,\psi(\beta),\ldots$, możemy zarówno widzieć że ten kształt, zawiérający oczywiście spółczynniki drugiego zrównania w stopniu m, zamyka spółczynniki piérwszego w stopniu n, ponieważ funkcye symetryczne tam się znajdujące zamykają każdy pierwiastek w potędzę n i nie zamykają go podniesionego do potęgi jakiéjkolwiek wyższéj (35).

48. Ważność rugownika jest mn, to jest że summa wskaźników w każdym wyrazie jest stałą i równą mn. W rzeczy saméj, jeżeli się pomnoży każdy z pierwiastków α, β,...; α', β',... przez tenże sam czynnik λ, każda z mn różnic $\alpha - \alpha'$ (45) będzie

pomnożoną przez tenże sam czynnik, a rugownik przez λ^{mn}. Lecz, dla pomnożenia pierwiastków przez λ, dosyć zastąpić p_1, q_1 przez λp_1, λq_1; p_2, q_2 przez $\lambda^2 p_2$, $\lambda^2 q_2$,..., i, przy wykonaniu téj zmiany w rugowniku, każdy wyraz będzie znajdował się pomnożony przez λ^{mn}, co znaczy że summa wskaźników każdego wyrazu jest równą mn.

Można znaleźć to samo za pomocą zasady n^ru^ 34.

W funkcyi $\psi(x)$, summa wykładnika każdego wyrazu i wskaźnika spółczynnika odpowiedniego jest n, to jest że $\psi(x)$ jest summą pewnéj liczby wyrazów kształtu $q_{n-i}x^i$. Jeżeli weźmiemy więc pewną liczbę wyrazów w każdym z czynników $\psi(\alpha)$ $\psi(\beta)$..., wyrazem odpowiednim wieloczynu będzie $q_{n-i}q_{n-j}q_{n-k}\alpha^i\beta^j\gamma^k$..., a jeżeli połączymy ten wieloczyn ze wszystkiemi wieloczynami w których się przedstawiają też same spółczynniki, będziemy mieli $q_{n-i}q_{n-j}q_{n-k}\Sigma\alpha^i\beta^j\gamma^k$..... Summą wskaźników spółczynników q jest

$$n-i+n-j+n-k...,$$

albo, ponieważ znajduje się m czynników,

$$mn-(i+j+k+...).$$

Lecz, podług n^ru^ 34, summą wskaźników spółczynników p w wyrażeniu $\Sigma\alpha^i\beta^j\gamma^k$... jest $i+j+k+...$ summą dwóch szeregów wskaźników jest więc mn, czego właśnie chcieliśmy dowieść.

Wypadek do któregośmy świeżo doszli można jeszcze wysłowić tym sposobem (*) : Jeżeli p_1, q_1 zamykają w sobie jakąkol-

---

(*) Albo też jeszcze w sposób następujący : Jeżeli się podstawi w rugowniku, na miejsce każdego spółczynnika p_α, wyraz x^α jaki ten spółczynnik mnoży w zrównaniu pierwotném, każdy wyraz rugownika staje się podzielnym przez x^{mn}, albo też, pod kształtem jednorodnym, jeżeli się zastąpi każdy spółczynnik a_α przez $x^\alpha y^{m-\alpha}$, wszystkie wyrazy rugownika staną się podzielnemi przez $x^{mn}y^{mn}$.

wiek nową zmienną z w piérwszym stopniu, gdy p_2, q_2 zamykają też zmienną w drugim i piérwszym, p_3, q_3 w trzecim i w stopniach niższych, i tak daléj, rugownik będzie ją zawiérał, ogólnie, w stopniu mn.

Jest rzeczą oczywistą, że te wypadki pozostałyby zarówno dla zrównań napisanych pod kształtem jednorodnym $a_0x^m + \ldots$, ponieważ wskaźniki są sobie odpowiedniemi w dwóch kształtach. Widzimy także że z powodu symetryi byłyby one jeszcze prawdziwemi gdyby zrównania zostały położone pod kształtem

$$a_mx^m + ma_{m-1}x^{m-1}y + \ldots,$$

gdzie wskaźnik każdego spółczynnika równa się wykładnikowi zmiennéj x zamiast być równym wykładnikowi zmiennéj y.

49. Ponieważ rugownik jest jakąkolwiek funkcyą z różnic między pierwiastkiem jakimkolwiek jednego ze zrównań i pierwiastkiem jakimkolwiek drugiego, pozostanie on niezmiennym jeżeli się powiększy o też samą ilość pierwiastki dwóch zrównań, to jest jeżeli w nich zastąpimy x przez $x + \lambda$. Wynika ztąd, jak w n^rze^ 37, że rugownik powinien zadosyć uczynić zrównaniu różniczkowemu

$$m\frac{d\Delta}{dp_1} + (m-1)p_1\frac{d\Delta}{dp_2} + (m-2)p_2\frac{d\Delta}{dp_3} + \ldots$$

$$+ n\frac{d\Delta}{dq_1} + (n-1)q_1\frac{d\Delta}{dq_2} + \ldots = 0,$$

albo, jak w n^rze^ 39, pisząc zrównania ze spółczynnikami dwumianu

$$a_0\frac{d\Delta}{da_1} + 2a_1\frac{d\Delta}{da_2} + \ldots + b_0\frac{d\Delta}{db_1} + 2b_1\frac{d\Delta}{db_2} + \ldots = 0.$$

50. Mając dane dwa zrównania jednorodne o trzech zmiennych stopni m i n, liczbą układów wartości mogących zadosyć uczynić zarazem tym dwóm zrównaniom jest mn (*).

Niech będą

$$ax^m + (by + cz)x^{m-1} + (dy^2 + eyz + fz^2)x^{m-2} + \ldots = 0$$

$$a'x^n + (b'y + c'z)x^{n-1} + (d'y^2 + e'yz + f'z^2)x^{n-2} + \ldots = 0$$

dwa zrównania urządzone według potęg x; jeżeli wyrugujemy x, spółczynnik x^{m-1} jest jakąkolwiek funkcyą jednorodną piérwszego stopnia y i z, spółczynnik x^{m-2} jakąkolwiek funkcyą podobną drugiego stopnia, i tak daléj, widzimy podług n[ru] 48 że rugownik będzie jakąkolwiek funkcyą jednorodną y i z stopnia mn.

Można więc znaleźć mn wartości na y i z (**) robiących rugownik równy zeru. Jeżeli podstawimy jedną którąkolwiek z pomiędzy nich w zrównania dane, będą one miały, ponieważ ich rugownik staje się zerem, jakikolwiek pierwiastek spólny jeżeli się rozwiąże je względem x : ta wartość na x, połączona z wartościami na y i z już otrzymanemi, daje układ wartości zadość czyniących zrównaniom danym; mamy więc razem mn układów podobnych wartości. Podamy daléj sposób za pomocą którego można, gdy dwa zrównania mają jakikolwiek pierwiastek spólny, oznaczyć go bezpośrednio.

(*) Te zrównania mogą się uważać za przedstawiające dwie krzywe stopni m i n. Twierdzenie zawarte w tym numerze tłómaczy się geometrycznie mówiąc że krzywe przecinają się w mn punktach. Sprowadza się te zrównania do kształtu zwyczajnego robiąc $z = 1$.

(**) Czytelnik winien sobie przypomnieć że gdy używamy zrównań jednorodnych, stosunek zmiennych stanowi wszystko co nas w tém miejscu najwięcéj zajmować powinno. I tak, w tym przypadku, z' może być wzięte dowolnie, wartość odpowiednia na y jest oznaczona przez zrównanie $\frac{y}{z}$.

PRZYKŁAD. — *Znaleźć spółrzędne cztérech punktów wynikających z przecięcia dwóch sekcyj konicznych przedstawionych przez zrównania*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy = 0.$$

Uporządkujmy zrównania według potęg x i wyrugujmy tę zmienną: wypadkiem jest, podług n^ru^ 46,

$$\{(ab')y^2 + 2(af')yz + (ac')z^2\}^2$$

$$4[(ah')y + (ag')z]\{(bh')y^3 + [(bg') + 2(fh')]y^2z$$

$$+ [(ch') + 2(fg')]yz^2 + (cg')z^3\} = 0,$$

gdzie napisaliśmy, jak w piérwszym Rozdziale, (ab') zamiast $ab' - a'b$. To zrównanie, rozwiązane względem $\frac{y}{z}$, da wartości odpowiednie dla cztérech punktów stanowiących przecięcia dwóch sekcyj konicznych. Znalazłszy je i podstawiwszy jedno z nich w dwa zrównania, otrzymamy, szukając ich spólnego pierwiastku, wartość odpowiednią na $\frac{x}{z}$. Moglibyśmy byli oznaczyć od razu cztéry wartości na $\frac{x}{z}$ rugując y, lecz podstawienie jest potrzebném dla poznania jaka jest wartość na y odpowiadająca każdéj wartości na x. Robiąc $z = 1$, wszystko co poprzedza znajduje się wyrażoném w zwyczajnym układzie spółrzędnych.

51. Wszelka funkcya symetryczna z liczby mn wartości zadosyć czyniących jednocześnie dwóm zrównaniom może się wyrazić w funkcyi ich spółczynników. Jest rzeczą widoczną że możemy tym sposobem wyrazić funkcye symetryczne zamykające w sobie tylko jedną ze zmiennych. Gdyż wyrugowawszy y, mamy jakiekolwiek zrównanie w x, i wszelkie funkcye symetryczne z liczby mn wartości zadosyć czyniących dwóm zrównaniom danym mogą się wyrazić w funkcyi spółczynników

tego zrównania : tak samo rzecz się ma dla y. Na przykład, w przypadku dwóch sekcyj konicznych, oznaczywszy przez x_1, y_1,... spółrzędne punktów przecięcia, widzimy bezpośrednio w jaki sposób można wyrazić funkcye symetryczne takie jak

$$x_1+x_2+x_3+x_4, \qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2,$$

i jedyny punkt wymagający niektórych objaśnień jest wiadomość jakim sposobem dadzą się wyrazić funkcye symetryczne w które wchodzą dwie zmienne, takie jak

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4.$$

Dla osiągnięcia tego, wprowadźmy jakąkolwiek nową zmienną $t=\lambda x+\mu y$, i za pomocą tego zrównania dowolnego, wyrugujmy x i y ze zrównań danych. I tak y ruguje się bezpośrednio podstawiając jego wartość wyciągniętą ze zrównania $t=\lambda x+\mu y$, i mamy wtedy dwa zrównania w x stopni m i n: ich rugownik będzie stopnia mn względem t, i jego pierwiastki będące oczywiście $\lambda x_1+\mu y_1$, $\lambda x_2+\mu y_2,\ldots$, x_1, y_1, x_2, $y_2,\ldots$, są wartościami na x i y spólnemi dwóm zrównaniom. Spółczynniki tego zrównania w t będą zawierały w sobie λ i μ. Jeżeli utworzymy summę potęg k z jego pierwiastków, która będzie $(\lambda x_1+\mu y_1)^k+(\lambda x_2+\mu y_2)^k+\ldots$, spółczynnikiem λ^k w téj summie będzie Σx_1^k, a spółczynnik $\lambda_1^{k-1}\mu$ da $\Sigma x_1^{k-1}y$, i tak daléj.

Kilka słów wystarczą dla przełożenia tego co poprzedza na język zrównań jednorodnych. Widzimy bezpośrednio w jaki sposób można utworzyć funkcye symetryczne zamykające w sobie tylko dwie zmienne, takie jak $\Sigma y_1z_2z_3z_4$, gdyż wyciąga się je (jak w n^rze^ 38) ze zrównania jednorodnego otrzymanego rugując drugą zmienną. Jedyny punkt pozostający do wyjaśnienia jest wiadomość w jaki sposób dadzą się utworzyć funkcye symetryczne obejmujące w sobie trzy zmienne, i przychodzi się do tego właśnie, jak powyżéj, kładąc

$$t = \lambda x + \mu y.$$

PRZYKŁAD. — *Utworzyć funkcye symetryczne spółrzędnych cztérech punktów stanowiących przecięcia dwóch sekcyj konicznych.*

Zrównanie otrzymane w ostatnim przykładzie daje bezpośrednio

$$y_1y_2y_3y_4 = (ac')^2 + 4(ag')(cg'), \quad z_1z_2z_3z_4 = (ab')^2 + 4(ah')(bh'),$$

, według symetryi,

$$x_1x_2x_3x_4 = (bc')^2 + 4(bf')(cf')$$

$$-\Sigma(y_1y_2y_3z_4) = 4[(ac')(af') + (ah')(cg') + (ag')(ch') + 2(ag')(fg')]\ldots$$

Dla wzięcia za przykład jakiéjkolwiek funkcyi zamykającéj w sobie trzy zmienne, utwórzmy $\Sigma(x_1y_1z_2^2z_3^2z_4^2)$, odpowiadającą $\Sigma(x'y')$ gdy zrównania są napisane pod kształtem niejednorodnym.

Według teoryi poprzedzającéj, mamy do wykonania rugowanie między zrównaniami danemi i zrównaniem $t = \lambda x + \mu y$, i funkcya szukana będzie połową spółczynnika $\lambda\mu$ w rozwinięciu $\Sigma(t_1^2z_2^2z_3^2z_4^2)$. Jeżeli wypadkiem rugowania jest

$$At^4 + (B\lambda + C\mu)t^3z + (D\lambda^2 + E\lambda\mu + F\mu^2)t^2z^2 + \ldots,$$

otrzyma się

$$\Sigma(t_1^2z_2^2z_3^2z_4^2) = (B\lambda + C\mu)^2 - 2A(D\lambda^2 + E\lambda\mu + F\mu^2)$$

i

$$\Sigma(x_1y_1z_2^2z_3^2z_4^2) = BC - AE.$$

Rugowanie daje

$$A = (ab')^2 + 4(ah')(bh'),$$

$$B = 4[(ba')(bg') + (bf')(ah') + (bh')(af') + 2(bh')(gh')],$$

$$C = 4[(ab')(af') + (ag')(bh') + (ah')(bg') + 2(ah')(fh')],$$

$$E = 4[(ac')(bh') + (bc')(ah') - 2(af')(hf') - 2(bg')(hg') + 4(hf')(hg')].$$

52. Utworzyć rugownik z trzech zrównań jednorodnych o trzech zmiennych stopni m, n, p.

Równając rugownik zeru, wyraża się warunek konieczny do znalezienia jakiegokolwiek układu wartości na x, y, z zadosyć czyniących trzem zrównaniom (*). A więc, jeżeli takim jest obecny przypadek, to rozwiązując dwa zrównania i podstawiając kolejno w trzecie wartości znalezione dla x, y, z, jeden z tych układów wartości powinien zadość uczynić temu zrównaniu. Odtąd wieloczyn wszystkich wypadków podstawienia powinien być równy zeru. Niech więc będą x', y', z', $x'', y'', z'',\ldots$ układy wartości zadosyć czyniące dwóm zrównaniom i których liczba jest np (50), podstawmy te wartości w piérwsze i zastosujmy mnożenie do wszystkich np wypadków ogólnie oznaczonych $\varphi(x', y', z')$, $\varphi(x'', y'', z''),\ldots$ Wieloczyn tym sposobem otrzymany zamyka w sobie oczywiście, same tylko funkcye symetryczne (rozwiązań czyli pierwiastków spólnych dwóm ostatnim zrównaniom) $x', y', z',\ldots$, które, podług n^ru 51, mogą wszystkie wyrazić się w funkcyach spółczynników dwóch ostatnich zrównań: wyrażając je tym sposobem, otrzymuje się rugownik szukany.

53. Rugownik jést jakąkolwiek funkcyą jednorodną stopnia np względem spółczynników piérwszego zrównania, stopnia mp względem spółczynników drugiego, i stopnia mn względem spółczynników trzeciego.

W rzeczy samej, każdy z np czynników $\varphi(x', y', z')\ldots$ jest funkcyą jednorodną piérwszego stopnia spółczynników piérwszego zrównania, i wyrażenie funkcyj symetrycznych za pomocą spółczynników zamyka w sobie same tylko spółczynniki dwóch ostatnich zrównań których rozwiązanie dało $x', y', z',\ldots$

(*) Jeżeli trzy zrównania przedstawiają krzywe, warunek że rugownik jest równy zeru wskazuje że trzy krzywe powinny przejść przez jeden punkt spólny.

Rugownik jest w stopniu np względem spółczynników piérwszego zrównania : jego stopień względem spółczynników dwóch innych oznaczy się tak samo.

54. Ważnością rugownika jest mnp, to jest że jeżeli wszystkie spółczynniki mnożące piérwszą potęgę jakiéjkolwiek zmiennéj z mają wskaźnik 1, spółczynniki mnożące z^2, wskaźnik 2, i tak daléj, summa wszystkich wskaźników w każdym wyrazie rugownika będzie mnp. Innemi słowy, jeżeli wszystkie spółczynniki mnożące z zawierają jakąkolwiek nową zmienną w piérwszym stopniu, jeżeli wszystkie spółczynniki mnożące z^2 zawierają tę zmienną w drugim stopniu i piérwszym, i t. d., rugownik zawiérać będzie tę zmienną w stopniu mnp.

To twierdzenie dowodzi się jak w n^{rze} 48. A naprzód, jest rzeczą oczywistą że, jeżeli jakiemukolwiek zrównaniu jednorodnemu stopnia m zadosyć czynią wartości x', y', z', i jeżeli się odmieni to zrównanie mnożąc każdy spółczynnik przez jakąkolwiek potęgę λ równą potędze z jaka mnoży ten spółczynnik, zrównanie tak przekształcone będzie sprawdzoném przez wartości $\lambda x'$, $\lambda y'$, z'; albo, ogólnie, że wypadek podstawienia $\lambda x'$, $\lambda y'$, z' w zrównanie przekształcone równa się wypadkowi podstawienia x', y', z', w zrównanie piérwotne pomnożonemu przez λ^m. I tak, weźmy zrównanie

$$x^3 + y^3 - z^3 - z^2x - zy^2,$$

zrównaniem przekształconém danego jest

$$x^3 + y^3 - \lambda^3 z^3 - \lambda^2 z^2 x - \lambda z y^2,$$

i wypadek podstawienia $\lambda x'$, $\lambda y'$, z', w to ostatnie jest oczywiście równym wypadkowi podstawienia x', y', z' w zrównanie dane pomnożonemu przez λ^3. A zatém, jeżeli się przekształci trzy zrównania dane mnożąc każdy spółczynnik przez jakąkolwiek potęgę λ równą potędze z jaka mnoży ten spółczynnik, i jeżeli x', y', z' przedstawiają jakikolwiek układ wartości zadosyć czyniący dwóm ostatnim zrównaniom pierwotnym, zrównania przekształcone będą sprawdzone przez wartości $\lambda x'$, $\lambda y'$, z', i wypadek podstawienia tych nowych wartości w piérwsze zrównanie będzie $\lambda^m\varphi(x', y', z')$. Rugownik który jest wieloczynem o np czynnikach kształtu $\varphi(x', y', z')$,... będzie pomnożonym przez λ^{mnp}. Niech będzie więc $a_k b_l c_m$... jakikolwiek wyraz rugownika, każdy wskaźnik jest oczywiście odpowiadającym potędze z jaka mnoży spółczynnik; ponieważ zmiana a_k na $\lambda^k a_k$, b_l na $\lambda^l b_l$,... daje w skutku mnożenie tego wyrazu przez λ^{mnp}, summa $k + l + \ldots$ jest koniecznie równą mnp.

55. Dowodzi się podobnież że trzy równania są, w ogólności, sprawdzone przez mnp układów wartości; że wszelka funkcya symetryczna tych wartości może sie wyrazić za pomocą spółczynników, i że można utworzyć rugownik czterech zrównań rozwiązując trzy jakiekolwiek z pomiędzy nich, podstawiając kolejno układy wartości tak otrzymane w czwarte, tworząc wieloczyn wypadków podstawienia, i nakoniec wyrażając ten wieloczyn za pomocą spółczynników zrównań przez metodę funkcyj symetrycznych. Utworzymy tym sposobem rugownik z liczby ilukolwiek zrównań, i będziemy mieli twierdzenie ogólne następujące. Rugownik k zrównań o $k-1$ zmiennych niezależnych jest jakąkolwiek funkcyą jednorodną spółczynników każdego zrównania którego stopień jest równy wieloczynowi stopni wszystkich innych zrównań. Jeżeli się oznaczy każdy spółczynnik we wszystkich zrównaniach jakimkolwiek wskaźnikiem równym wykładnikowi jednéj ze zmiennych jaką ten spółczynnik mnoży, summa wskaźników w każdym wyrazie rugownika będzie równą wieloczynowi stopni we wszystkich zrównaniach. I nakoniec, jeżeli ma się k zrównań o k zmiennych, liczba układów wartości zadość czyniących wszyst-

kim tym zrównaniom jest równą wieloczynowi ich stopni.

56. Jeżeli rugownik ilukolwiek zrównań niszczy się, te zrównania przyjmują jakikolwiek układ rozwiązań spólnych, i pokażemy w jaki sposób można go znaleźć nie rozwiązując zrównań. Sposób jest tenże sam jakakolwiek bądź jest liczba zmiennych: dla większéj prostoty, poczniemy od dwóch zrównań

$$\varphi = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \ldots = 0,$$

$$\psi = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots = 0.$$

Przypuśćmy że jakikolwiek pierwiastek $x = \alpha$ drugiego zrównania zadosyć czyni pierwszemu i że, tém samém, rugownik R staje się zerem. Możemy w φ zmienić spółczynniki a_m na $a_m + A_m$, a_{m-1} na $a_{m-1} + A_{m-1}$ .., i zrównanie przekształcone

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots \quad 0$$

będzie jeszcze sprawdzoném przez wartość $x = \alpha$, byleby tylko ilości A_m, A_{m-1}, ... były związane warunkiem

$$A_m \alpha^m + A_{m-1} \alpha^{m-1} + \ldots = 0,$$

ponieważ reszta pierwszej strony zrównania znika z założenia kiedy się robi $x = \alpha$. Zrównanie przekształcone ma więc jakikolwiek pierwiastek spólny z ψ, i tém samém, nowy rugownik jaki się otrzymuje łącząc go (t. j. ten pierwiastek) z ψ jest także zerem. Lecz ten rugownik wyprowadzi się z rugownika φ i ψ zmieniając w nim a_m na $a_m + A_m$, ... tak działając przyjdzie

$$R + \left(A_m \frac{dR}{da_m} + A_{m-1} \frac{dR}{da_{m-1}} + \ldots \right) + \ldots = 0.$$

R jest zerem z założenia, a ilości $A_m, \ldots$ mogące być tak małemi jak się tylko podoba, wyrazy zawierające w pierwszéj potędze powinny zniknąć odrębnie. Mamy więc

$$A \frac{dR}{da_m} + A_{m-1} \frac{dR}{da_{m-1}} + \ldots = 0,$$

związek który powinien być jednaki z warunkiem

$$A_m \alpha^m + A_{m-1} \alpha^{m-1} + \ldots,$$

jedyny, jak to już widzieliśmy, któremu A_m, $A_{m-1} \ldots$ powinny zadość uczynić. Wynika ztąd że pochodne powinny być proporcyonalne do α^m, $\alpha^{m-1}, \ldots$, i że można znaleźć α dzieląc jedną z nich przez następującą.

Wniosek I. — Niech będą a_p, a_q dwa spółczynniki jakiekolwiek φ, powinniśmy mieć, gdy R jest zerem,

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_{p-k}} :: \frac{dR}{da_q} : \frac{dR}{da_{q-k}},$$

ponieważ stosunkiem dwóch pierwszych pochodnych jest α^k i że to samo stosować się zupełnie powinno do dwóch innych; wypada ztąd że różnica

$$\frac{dR}{da_p}\frac{dR}{da_{q-k}} - \frac{dR}{da_q}\frac{dR}{da_{p-k}}$$

jest zerem gdy R jest niém także, i tém samém, przyjmuje jako czynnik: innemi słowy, funkcya

$$\frac{dR}{da_p}\frac{dR}{da_q} - \frac{dR}{da_r}\frac{dR}{da_s}$$

zawiera R jako czynnik gdy mamy

$$p + q = r + s.$$

Wniosek II. — Podobnież, jest rzeczą oczywistą, że pochodne rugownika względem spółczynników ψ są proporcyonalne do $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \ldots$; wynika ztąd, jak we wniosku poprzedzającym, że

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_{p-k}} :: \frac{dR}{db_q} : \frac{dR}{db_{q-k}}$$

gdy R jest zerem, i że funkcya

$$\frac{dR}{da_p}\frac{dR}{db_q} - \frac{dR}{da_r}\frac{dR}{db_s}$$

est podzielną przez R gdy

$$p + q = r + s.$$

Wniosek III. — Nakoniec, jeżeli podstawimy w drugie zrównanie wartości $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \ldots$ dane powyżéj, gdy R jest zerem,

$$b_n \frac{dR}{da_n} + b_{n-1}\frac{dR}{da_{n-1}} + \ldots = 0.$$

Pierwsza strona tego równania nie może oczywiście przypuścić czynnika R, ponieważ spółczynniki φ powyższego wyrażenia znajdują się w stopniu niższym o jedność jak w samémże R. Powinno więc to wyrażenie sprowadzić się tożsamościowo do zera.

57. Wypadki numeru poprzedzającego mogą się sprawdzić obliczając wartości pochodnych R. Wiemy (44) że $R = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma)\,\ldots..$ Lecz, ponieważ $\varphi(\alpha)$ jest równém $a_n\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \ldots$, mamy

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{da} = \alpha^p$$

a tém samém

$$\frac{dR}{da_p} = \alpha^p\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\ldots + \beta^p\varphi(\alpha)\varphi(\gamma)\ldots + \ldots$$

Jeżeli α jest jakimkolwiek pierwiastkiem φ,

$$\varphi(\alpha) = 0,$$

i $\frac{dR}{da_p}$ sprowadza się do

$$\alpha^p\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\ldots;$$

ponieważ.

$$\frac{dR}{da_q} = \alpha^q\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\ldots$$

a tém samem

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_q} :: \alpha^p : \alpha^q.$$

Mnożąc, przyjdzie także

$$\frac{dR}{da_p}\frac{dR}{da_q} = \alpha^{p+q}[\varphi(\beta)]^2[\varphi(\gamma)]^2\ldots + R(\alpha^p\beta^q + \alpha^q\beta^p)\varphi(\gamma)\ldots + .$$

i łatwo widzieć że funkcyą mnożącą R jest

$$\frac{d^2R}{da_p da_q};$$

odciągnijmy teraz $\frac{dR}{da_r}\frac{dR}{da_s}$, wyrazy niezależne od R zniszczą się jeżeli $p + q = r + s$, i pozostanie tylko

$$\frac{dR}{da_p}\frac{dR}{da_q} - \frac{dR}{da_r}\frac{dR}{da_s} = R\left(\frac{d^2R}{da_p da_q} - \frac{d^2R}{da_r da_s}\right).$$

Zobaczymy tak samo że $\frac{dR}{da_p}\frac{dR}{db_q} - \frac{dR}{da_q}\frac{dR}{db_p}$ jest podzielném przez R; lecz iloraz nie jest $\frac{d^2R}{da_pdb_q} - \frac{d^2R}{da_qdb_p}$.

58. Sposób n^rów^ 56 i 57 stosuje się bez trudności do liczby ilukolwiek zmiennych. Dla większéj jasności, ograniczymy się na trzech zmiennych, a toż samo dowodzenie da się zastosować słowo w słowo do przypadku ogólnego.

Niech będą trzy zrównania

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \chi = 0,$$

gdzie φ jest równém $a_{m00}x^m + \ldots + a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma + \ldots$, a x', y', z' oznaczają wartości zadosyć czyniące trzem zrównaniom : te wartości zadosyć im czynić będą jeszcze, jeżeli zmienimy w φ, a_{m00} na $a_{m00} + A_{m00}$, $a_{\alpha\beta\gamma}$ na $a_{\alpha\beta\gamma} + A_{\alpha\beta\gamma}, \ldots$, byleby tylko było

$$A_{m00}x' + \ldots + A_{\alpha\beta\gamma}x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma + \ldots = 0;$$

lecz, jak w n^rze^ 56, powinniśmy otrymać także

$$A_{m00}\frac{dR}{dA_{m00}} + \ldots + A_{\alpha\beta\gamma}\frac{dR}{da_{\alpha\beta\gamma}} + \ldots = 0,$$

i, porównywając te dwa zrównania, widzimy że każdy wyraz $x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma$ powinien być proporcyonalnym pochodnéj R względem swego spółczynnika : będziemy więc mieli wartości na x', y', z' biorąc stosunki pochodnych R względem spółczynników wyrazów których stosunkiem jest x' albo y' albo z' : można to sprawdzić jak w n^rze^ 57. Podstawmy, w rzeczy saméj, w zrównanie φ pierwiastki spólne zrównoniom ψ i χ, i niech będą $\varphi', \varphi'', \ldots$ wypadki tych podstawień; wiemy że

$$R = \varphi'\varphi''\varphi'''\ldots$$

i

$$\frac{dR}{da_{\alpha\beta\gamma}} = x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma\,\varphi''\varphi'''\ldots + x''^\alpha y''^\beta z''^\gamma\varphi'\varphi'''\ldots + \ldots$$

Jeżeli przypuścimy $\varphi'=0$, wartość tego wyrażenia sprowadzi się do swego piérwszego wyrazu i widzimy, jak powyżéj, że pochodna względem każdego spółczynnika jest proporcyonalną wyrazowi jaki ten spółczynnik mnoży. Można ztąd wyprowadzić też same wnioski jak w n[rze] 56.

59. Jeżeli jakikolwiek układ zrównań przyjmuje dwa układy pierwiastków spólnych, nie tylko rugownik R zniszczy się, lecz dzieje się podobnież z jego pochodnemi względem wszystkich spółczynników. Gdyż jest rzeczą oczywistą że wartości pochodnych danych w n[rze] 57 zniszczą się wszystkie jeżeli $\varphi(\alpha)$ i $(\varphi\beta)$ są zerami, albo, jak w n[rze] 58, jeżeli φ' i φ'' są oba zerami. W tym przypadku, wartości pierwiastków spólnych otrzymują się za pomocą jakiegokolwiek bądź zrównania drugiego stopnia gdzie figurują drugie pochodne R. Wskazania następujące jakie, dla skrócenia, damy tylko w przypadku dwóch zrównań. zastosują się dosłownie do przypadku ogólnego.

Mamy (57)

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{da_p^2} = \alpha^p\beta^p\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots + \beta^p\gamma^p\varphi(\alpha)\varphi(\delta)\ldots + \ldots,$$

wyrażenie które, gdy $\varphi(\alpha)$ i $\varphi(\beta)$ są zerami, sprowadzi się do jednego wyrazu

$$\alpha^p\beta^p\varphi(\gamma)(\varphi\delta)\ldots$$

Otrzyma się podobnież

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{da_pda_q} = (\alpha^p\beta^q + \alpha^q\beta^p)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots,$$

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{ad_q^2} = \alpha^p\beta^q\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots,$$

II. — 6

a jeżeli rozwiążemy względem $\frac{\lambda}{\mu}$ zrównanie drugiego stopnia

$$\lambda^2 \frac{d^2R}{d\alpha_q^2} - \lambda\mu \frac{d^2R}{da_p da_q} + \mu^2 \frac{d^2R}{da_p^2} = 0,$$

jego pierwiastki dadzą stosunki $\frac{\alpha^p}{\alpha^q}$, $\frac{\beta^p}{\beta^q}$.

Jeśliby zrównania przyjmowały trzy układy pierwiastków spólnych, wszystkie drugie pochodne ilości R byłyby zerami, i pierwiastki spólne otrzymałyby się posuwając rachunek do pochodnych trzecich i rozwiązując jakiekolwiek bądź zrównanie trzeciego stopnia.

ROZDZIAŁ VII.

WYRAŻENIE RUGOWNIKÓW POD KSZTAŁTEM WYZNACZNIKÓW.

60. Metoda rugowania za pomocą funkcyj symetrycznych jest, z punktu widzenia teoretycznego, nierównie lepsza niż wszelka inna, ponieważ stosuje się do jakiéjkolwiek bądź liczby zmiennych; wszelako, gdy jest ona nie dosyć skorą do wykonania w praktyce i nie dostarcza wypadków pod kształtem najdogodniejszym, wskażemy, w tym rozdziale, inne metody rugowania. Następująca przedstawia się najnaturalniéj: jest ona, w gruncie, jednaka z metodą zwaną *największego spólnego dzielnika.* Widzieliśmy już że rugownikiem dwóch zrównań linijnych

$$ax + b = 0, \qquad a'x + b' = 0$$

jest wyznacznik $ab' - a'b = 0$. Jeżeli mamy teraz dwa zrównania drugiego stopnia

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

mnóżmy piérwsze przez a', drugie przez a i odciągnijmy, przyjdzie

$$(ab')x + (ac') = 0.$$

Mnóżmy piérwsze przez c', drugie przez c, odciągnijmy i podzielmy przez x, przyjdzie także

$$(ac')x + (bc') = 0.$$

Zagadnienie zostaje więc przywiedzione do wyrugowania zmiennéj między dwoma zrównaniami linijnémi, i wypadek otrzymany z rugowania daje

$$(ac')^2 + (ba')(bc') = 0.$$

61. Jeżeli założymy sobie wyrugować x między dwoma zrównaniami trzeciego stopnia

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$

mnóżmy pierwsze przez a', drugie przez a i odciągnijmy; mnóżmy także pierwsze przez d', drugie przez d, odciągnijmy i podzielmy przez x : zagadnienie sprowadza się do wyrugowania zmiennéj między zrównaniami drugiego stopnia

$$(ab')x^2 + (ac')x + (ad') = 0, \quad (ad')x^2 + (bd')x + (cd') = 0;$$

lecz, według numeru poprzedzającego, wypadek otrzymany z rugowania daje

$$[(ad')^2 - (ab')(cd')]^2$$
$$+ [(ad')(ac') - (ab')(bd')]\,[(ad')(db') - (ac')(dc')] = 0.$$

Potrzeba teraz zauważyć że mamy tożsamościowo

$$(ab')(cd') + (ac')(db') + (ad')(bc') = 0;$$

a zatém, jeżeli wykonamy mnożenia, wypadek staje się podzielnym przez (ad') i sprowadza się do

$$(ad')^3 - 2(ad')(ab')(cd') - (ad')(ac')(bd') + (ac')^2(cd')$$
$$+ (bd')^2(ab') - (ab')(bc')(cd') = 0.$$

Wprowadzenie czynnika obcego (ad') tłómaczy się tém prostém spostrzeżeniem że, jeżeli mamy $ad' = a'd$, to jest jeżeli

a i a' są w tymże samym stosunku jak d i d', wypadki jakie się otrzymuje, już to odciągając od piérwszego zrównania pomnożonego przez a' drugie pomnożone przez a, już to odciągając od piérwszego zrównania pomnożonego przez d', drugie pomnożone przez d, nie powinny różnić się od siebie tylko jakimkolwiek bądź czynnikiem. I tak, przez założenie $(ad') = 0$, aczkolwiek dwa zrównania pierwotne trzeciego stopnia nie mają czynnika spólnego, dwa zrównania drugiego stopnia do których sprowadziliśmy je mają zawsze jeden czynnik taki. W ogólności, ten sposób rugowania wprowadza czynniki obce, a tém samém, lepiéj jest użyć innych metod.

62. Metoda Eulera. — Jeżeli dwa zrównania stopni m i n mają jakikolwiek czynnik spólny piérwszego stopnia, otrzymać będzie można wypadki jednakie, bądź to mnożąc piérwsze zrównanie przez $n-1$ innych czynników drugiego, bądź to mnożąc drugie przez $m-1$ innych czynników piérwszego. Więc, pomnożywszy piérwsze przez jakąkolwiek funkcyą dowolną stopnia $n-1$ wprowadzającą n stałych dowolnych, drugie przez jakąkolwiek funkcyą dowolną stopnia $m-1$ wprowadzającą m stałych, i równając, wyraz po wyrazie, w dwóch funkcyach stopnia $m+n-1$ tak utworzonych, znajdziemy $m+n$ zrównań, między któremi będziemy mogli wyrugować $m+n$ stałych wprowadzonych które w nich figurują wszystkie tylko w piérwszym stopniu; i otrzymamy tym sposobem, pod kształtem wyznacznika, rugownik, albo raczéj wypadek otrzymany z rugowania zmiennych dwóch zrównań danych.

PRZYKŁAD. — *Wyrugować* x i y *między zrównaniami*

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \qquad a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0.$$

Mamy zrównać, wyraz po wyrazie,

$$(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)(ax^2 + bxy + cy^2) \quad \text{i} \quad (\mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y)(a'x^2 + b'xy + c'y^2);$$

cztéry zrównania wynikające ztąd są

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}a && - \mathrm{A}'a' && = \\ &\mathrm{A}b + \mathrm{B}a && - \mathrm{A}'b' - \mathrm{B}'a' && = 0 \\ &\mathrm{A}c + \mathrm{B}b && - \mathrm{A}'c' - \mathrm{B}'b' && = 0, \\ &\quad + \mathrm{B}c && \quad - \mathrm{B}'c' && = 0. \end{aligned}$$

Rugując A, B, A′, B′, otrzyma się wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ 0 & c & 0 & c' \end{vmatrix}.$$

63. Ta metoda może być uogólnioną w sposób taki aby znaleźć warunki konieczne dla którychby zrównania miały dwa czynniki spólne. W tym przypadku, jest jeszcze rzeczą oczywistą że powinniśmy otrzymać tenże sam wypadek, bądź to mnożąc piérwsze przez $n - 2$ innych czynników drugiego, bądź to mnożąc drugie przez $m - 2$ innych czynników piérwszego. Więc, jak poprzednio, pomnożywszy piérwsze przez jakąkolwiek funkcyą dowolną stopnia $n - 2$ wprowadzającą $n - 1$ stałych, a drugie przez jakąkolwiek funkcyą dowolną stopnia $m - 2$, i równając, wyraz po wyrazie, dwa wielomiany stopnia $m + n - 2$ tym sposobem otrzymane, mamy $m + n - 1$ zrównań, rugując zaś między $m + n - 2$ jakiemikolwiek z pomiędzy nich $m + n - 2$ stałych wprowadzonych, znajdziemy $m + n - 1$ warunków równoważnych oczywiście tylko dwóm warunkóm niezależnym.

PRZYKŁAD. — *Znaleźć warunki konieczne ażeby zrównania*

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0, \qquad a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3 = 0,$$

miały dwa czynniki spólne.

Połóżmy

$$(Ax + By)(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3)$$

$$= (A'x + B'y)(a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3),$$

przyjdzie

$$\begin{aligned} Aa \qquad\quad & - A'a' \qquad\qquad = 0, \\ Ab + Ba & - A'b' - B'a' = 0, \\ Ac + Bb & - A'c' - B'b' = 0, \\ Ad + Bc & - A'd' - B'c' = 0, \\ + Bd \qquad & \qquad\quad - B'd' = 0; \end{aligned}$$

rugując A, B, A′, B′, mamy (używając znakowania nru 3) układ wyznaczników

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & d' \end{matrix} \right\| = 0.$$

64. Metoda P. Sylwestra (*). — Ta metoda jest jednaka, co do wypadków, z metodą Eulera, lecz jest ona daleko prostszą w zastosowaniach i dającą się łatwiéj uogólnić. Mnóżmy zrównanie m^{tego} stopnia przez x^{n-1}, $x^{n-2}y$, $x^{n-3}y^2$,..., a zrównanie n^{tego} stopnia przez x^{m-1}, $x^{m-2}y$, $x^{m-3}y^2$,..., mamy tym sposobem $m + n$ zrównań między któremi możemy wyrugo-

(*) P. Sylwester dał swéj metodzie nazwisko metody *rozprzęgalnéj* (*dialytique*), gdyż rozprzęga ona w niejaki sposób związki istniejące między potęgami zmiennych i traktuje te potęgi jako zmienne niezależne.

wać $m+n$ ilości x^{m+n-1}, $x^{m+n-2}y$, $x^{m+n-3}y^2$,... uważanych jako niewiadome niezależne. I tak, w przypadku dwóch zrównań drugiego stopnia, mnóżmy je przez x i przez y, a otrzymamy zrównania

$$\begin{aligned}
ax^3 + bx^2y + cxy^2 \qquad &= 0,\\
ax^2y + bxy^2 + cy^3 &= 0,\\
a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 \qquad &= 0,\\
a'x^2y + b'xy^2 + c'y^3 &= 0,
\end{aligned}$$

między któremi rugując x^3, x^2y, xy^2, y^3, otrzymujemy tenże sam wyznacznik jak powyżéj,

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

W ogólności, jest rzeczą oczywistą że ta metoda dostarczy rugownik pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika w którym n linij są utworzone ze spółczynników pierwszego zrównania a m innych ze spółczynników drugiego : znajdujemy tym sposobem prawidło już otrzymane powyżéj na stopień rugownika względem spółczynników dwóch zrównań.

65. Metoda Bezouta. — Ta metoda daje także rugownik pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika; lecz ten (rugownik) przedstawia się pod kształtem łatwiéj obliczać się dającym jak poprzedzający.

Metoda ogólna da się pojąć lepiéj stosując ją naprzód do przypadku szczególnego dwóch zrównań czwartego stopnia

$$\begin{aligned}
ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 &= 0,\\
a'x^4 + b'x^3y + c'x^2y^2 + d'xy^3 + e'y^4 &= 0;
\end{aligned}$$

mnożąc piérwsze przez a', drugie przez a i odciągając, piérwszy wyraz każdego z nich znajduje się wyrugowanym i wypadek, będąc podzielnym przez y, daje

$$(ab')x^3 + (ac')x^2y + (ad')xy^2 + (ae')y^3 = 0\,;$$

mnożąc na nowo piérwsze zrównanie przez $a'x + b'y$, drugie przez $ax + by$, dwa piérwsze wyrazy z każdego są wyrugowane i wypadek, podzielony przez y^2, daje

$$(ac')x^3 + [(ad') + (be')]x^2y + [(ae') + (bd')]xy^2 + (be')y^3 = 0\,;$$

mnożąc teraz piérwsze przez $a'x^2 + b'xy + c'y^2$, drugie przez $ax^2 + bxy + cy^2$, odciągając i dzieląc przez y^3, ma się

$$(ad')x^3 + [(ae') + (bd')]x^2y + [(be') + (cd')]xy^2 + (ce')y^3 = 0.$$

Nakoniec, mnożąc piérwsze przez $a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d''y^3$, drugie przez $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, odciągając i dzieląc przez y^4, przyjdzie

$$(ae')x^3 + (be')x^2y + (ce')xy^2 + (de')y^3 = 0.$$

Możemy, między cztérema zrównaniami tak utworzonemi, wyrugować jak w n^rze^ 64, x^3, x^2y, xy^2, y^3, i znajdziemy na wypadek wyznacznik

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (ae') + (bd') & [(be') \\ (ad') & (ae') + (bd') & (be') + (cd') & (ce') \\ (ae') & (be') & (ce') & (de') \end{vmatrix}.$$

66. Sposób jakiegośmy użyli tak oczywiście stosuje się do dwóch zrównań jakichkolwiek n^{tego} stopnia, że jest niepotrzebném ustalenie go za pomocą dowodu ogólnego. Po ścisłém

przejrzeniu wyznacznika otrzymanego w numerze poprzedzającym, prawo tworzenia wyraźnie się objawia, i możemy bezpośrednio napisać wyznacznik który byłby wypadkiem rugowania zmiennych między dwoma zrównaniami piątego stopnia, kontynując po prostu szeregi wyrazów i pisząc (af') po (ae')... Owoż, wypadek otrzymany z rugowania zmiennych dający się przywieść do zera nazwaliśmy także rugownikiem (43). Na mocy przeto tego objaśnienia, rugownik szukany dwóch zrównań piątego stopnia sprowadza się oczywiście do formy dobrze znanéj wyznacznika tychże zrównań. Można więc ten rugownik wyrazić pod kształtem

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') & (af') \\ (ac') & (ad')+(bc') & (ae')+(bd') & (af')+(be') & (bf') \\ (ad') & (ae')+(bd') & (af')+(be')+(cd') & (bf')+(ce') & (cf') \\ (ae') & (af')+(be') & (bf')+(ce') & (cf')+(de') & (df') \\ (af') & (bf') & (cf') & (df') & (ef') \end{vmatrix}.$$

Widzimy że wszystkie wyrazy rugownika powinny zawiérać w sobie a albo a', co już było widocznêm *a priori*, gdyż, jeżeliby te dwa spółczynniki były oba zerami, dwa zrównania miałyby czynnik spólny $y=0$.

Widzimy również, że wyrazy zawiérające w sobie a albo a' tylko w piérwszym stopniu, sprowadzają się do (ab') pomnożonego przez rugownik zrównań jakieby się otrzymało robiąc a i $a'=0$ w zrównaniach danych. Gdyż każdy wyraz wyznacznika poprzedzającego powinien zawierać w sobie jeden element z piérwszéj linii pozioméj i jeden z piérwszéj kolumny; lecz, gdy wszystkie elementa piérwszéj linii i piérwszéj kolumny zawiérają w sobie a lub a', jedyne wyrazy które będą zamykały w sobie a i a' tylko w piérwszym stopniu sprowadzą się do (ab') pomnożonego przez wyznacznik mniejszy odpowiedni, który nie różni się, robiąc a i $a'=0$, od rugownika stopnia bezpośrednio niższego.

67. Pozostaje tylko okazać, że sposób któregośmy użyli da się jeszcze zastosować do zrównań stopni różnych, i, jak powyżéj, poczniemy od przykładu szczególnego, to jest od zrównań,

$$ax^4+bx^3y+cx^2y^2+dxy^3+ey^4=0,\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0;$$

mnożąc piérwsze przez a', drugie przez ax^2 i odciągając, mamy

$$(ba')x^3+(ca')x^2y+(da')xy^2+(ea')y^3=0.$$

Podobnież, mnożąc piérwsze przez $(a'x+b'y$, a drugie przez $(ax+by)x^2$, przyjdzie

$$(ca')x^3+[(cb')+(da')]x^2y+[(db')+(ea')]xy^2+(eb')y^3=0.$$

Ten sposób nie może być dłużéj kontynuowanym; lecz, jeżeli przyłączymy do dwóch ostatnich zrównań dwa nowe jakie się otrzymuje pomnożywszy drugie ze zrównań pierwotnych przez x i przez y, mamy cztéry zrównania do wyrugowania x^3, x^2y, xy^2, y^3.

I, ogólnie, kiedy stopnie zrównoń są nierówne, m będąc największym, znajdzie się że sposób n^ru 65 daje nam n zrównań stopnia $m-1$, zawiérających w piérwszym stopniu spółczynniki każdego z dwóch zrównań pierwotnych; potrzeba do nich przydać $m-n$, zrównań jakie się otrzymuje mnożąc drugie przez x^{m-n-1}, $x^{m-n-2}y,\ldots,$, i można wtedy wyrugować m ilości x^{m-1}, $x^{m-2}y,\ldots$ między m zrównaniami w ten sposób otrzymanemi. Każda linia wyznacznika zawiéra w sobie spółczynniki drugiego zrównania, lecz nie ma w nich tylko n linij zawiérających w sobie spółczynniki piérwszego. Rugownik jest więc, jak to być było powinno, n^{tego} stopnia względem spółczynników piérwszego zrównania, i m^{tego} względem spółczynników drugiego.

68. Metoda Bezouta z zaprowadzoną zmianą przez P. Cayley. — Jeżeli dwa zrównania $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ mają jakikolwiek piérwiastek spólny, można zadosyć uczynić zrównaniu $\varphi+\lambda\psi=0$, dla jakiéjkolwiek bądź wartości wziętéj na λ. Weźmy więc zrównanie

$$\varphi(x, y)\,\psi(x', y') - \varphi(x', y')\,\psi(x, y) = 0,$$

które, przez założenie że φ i ψ mają jakikolwiek czynnik spólny, może być sprawdzone niezależnie od wszelkiéj wartości szczególnéj na x', y': możemy, naprzód, podzielić je przez $xy'-yx'$ który jest oczywiście jakimkolwiek czynnikiem, potém zrównać zeru spółczynniki potęg x' i y'; nakoniec rugować potęgi x i y jak gdyby one były zmiennemi niezależnemi, i wypadek przedstawi się pod tymże samym kształtem jak przez metodę n^{ru} 65.

PRZYKŁAD. — *Wyrugować* x *i* y *między zrównaniami*

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \qquad a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0.$$

Wyrażenie

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2)$$
$$- (a'x^2 + b'xy + c'y^2)(ax'^2 + bx'y' + cy'^2),$$

podzielone przez $xy' - yx'$, daje

$$[(ab')x + (ac')y]x' + [(ac')x + (bc')y]y' = 0;$$

równając zeru spółczynniki względem x' i y' i rugując x i y, mamy

$$(ac')^2 + (ba')(bc') = 0.$$

69. Przystąpmy teraz do teoryi funkcyj trzech zmiennych których rugownik, wyjąwszy w kilku przypadkach szczególnych,

nie został jeszcze wyrażony pod kształtem wyznacznika, aczkolwiek może on zawsze istnieć jako iloraz z jednego wyznacznika przez drugi.

Pokażemy naprzód w jaki sposób tworzy się pewna funkcya mająca wielkie znaczenie w teoryi rugowania. Mając dane k zrównań o k zmiennych $u=0$, $v=0$, $w=0$,..., oznaczmy przez u_1, u_2, u_3,... pochodne $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$,..., wyznacznik

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

będzie oznaczony, w dalszym ciągu, przez literę J (*).

70. Jeżeli ilekolwiek zrównań sprawdzi tenże sam układ wartości, to układ ten sprawdzi także J, i będzie się działo jeszcze podobnież dla jego pochodnych względem każdéj ze zmiennych, jeżeli zrównania będą tegoż samego stopnia.

Dowodzenie w przypadku trzech zmiennych będzie ogólném. Mamy, według teoryi funkcyj jednorodnych,

$$xu_1+yu_2+zu_3=nu,$$
$$xv_1+yv_2+zv_3=nv,$$
$$xw_1+yw_2+zw_3=nw.$$

Oznaczmy teraz, jak w IV rozdziale, przez U_1, V_1,... wyznaczniki mniejsze jakieby się otrzymało znosząc linią i kolumnę

(*) Ten wyznacznik, użyty przez Jakobiego, jest niekiedy oznaczony pod nazwiskiem *Jakobiowego* zrównań danych (domyśla się *wyznacznika*).

zawiérające u_1, v_1,...; otrzymamy, rozwiązując te zrównania (28),

$$Jx = U_1 nu + V_1 nv + W_1 nw,$$

zkąd widzimy bezpośrednio że, jeżeli $u, v, w,...$ zniszczą się, stanie się toż samo z wyznacznikiem J. Różniczkując to ostatnie zrównanie, przyjdzie

$$J + x\frac{dJ}{dx} = nu\frac{dU_1}{dx} + nv\frac{dV_1}{dx} + nw\frac{dW_1}{dx} + n(u_1U_1 + v_1V_1 + w_1W_1),$$

$$x\frac{dJ}{dy} = nu\frac{dU_1}{dy} + nv\frac{dV_1}{dy} + nw\frac{dW_1}{dy} + n(u_2U_1 + v_2V_1 + w_2W_1),$$

lecz, przypominając (27) że

$$u_1U_1 + v_1V_1 + w_1W_1 = J, \quad u_2U_1 + v_2V_1 + w_2W_1 = 0,$$

widzimy że, jeżeli $u, v, w,...$, a tém samém J zniszczą się, dzieje się toż samo z pochodnemi $\frac{dJ}{dx}, \frac{dJ}{dy},...$

71. Możemy teraz wyrazić, pod kształtem wyznacznika, rugownik trzech zrównań drugiego stopnia, gdyż J jest trzeciego stopnia, a tém samém, jego pochodne są drugiego. Mamy tym sposobem trzy nowe zrównania drugiego stopnia które będą sprawdzone przez układ jakikolwiek wartości spólny zrównaniom danym.

Z sześciu zrównań $u, v, w, \frac{dJ}{dx}, \frac{dJ}{dy}, \frac{dJ}{dz}$, możemy więc wyrugować sześć ilości $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$, i utworzyć tym sposobem wyznacznik szukany.

Jeżeli wszystkie trzy zrównania są trzeciego stopnia, J jest szóstego a jego pochodne piątego. I jeżeli pomnożymy każde z trzech zrównań danych przez $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$, mamy ośmnaście zrównań które, połączone z trzema pochodnémi J, pozwolą nam wyrugować za pomocą metody P. *Sylwestra* dwadzieścia jeden ilości x^5, x^4y,... wchodzących do jakiegokolwiek zrównania piątego stopnia. Ten sposób wszelako nie może być posunięty daléj bez zaprowadzenia pierwéj potrzebnéj w nim zmiany.

72. P. Sylwester dostrzegł że rugownik trzech zrównań tego samego stopnia, daje się wyrazić jako ich wyznacznik. Weźmy, na przykład trzy zrównania czwartego stopnia, i pomnóżmy każde z nich przez sześć wyrazów (x^2, xy, y^2, etc.) zrównania drugiego stopnia, (albo w ogóle, przez $\frac{1}{2}n(n-1)$ wyrazów zrównania stopnia $n-1$). Utworzymy w ten sposób 18 [w ogóle $n(2n-1)$ zrównań]. Zrównania te, jako będące stopnia szóstego (a w ogóle stopnia $2n-2$), zawiérają 28 [w ogóle $n(2n-1)$ wyrazów]. Użyjemy 10 [w ogóle $\frac{1}{2}n(n+1)$] zrównań pomocniczych do wyrugowania wszystkich potęg ilości zmiennych. Zrównania pomocnicze otrzymują się w następujący sposób: trzy zrównania dane, można napisać pod kształtem

$$Ax^4 + By + Cz, \quad A'x^4 + B'y + C'z, \quad A''x^4 + B''y + C''z\,;$$

a wyznacznik $(AB'C'')$, szóstego stopnia względem zmiennych, musi być sprawdzonym przez wszelką wartość sprawdzającą zrównania dane. Otrzymamy zaś dwa wyznaczniki podobnej natury, nadając zrównaniom danym kształt $Ay^4 + Bx + Cz$, albo $Az^4 + Bx + Cy$. Możemy nadto położyć zrównania dane pod kształtem

$$Ax^3 + By^2 + Cz, \quad A'x^3 + B'y^2 + C'z, \quad A''x^3 + B''y^2 + C''z,$$

(gdyż każdy wyraz niepodzielny przez x^3 lub y^2, musi być podzielnym przez z), a tak otrzymamy nowy wyznacznik $(AB'C'')$ który sprawdzają ilości sprawdzające zrównania dane.

Widoczna że zmieniając miejsce zmiennych x, y i z przy rozkładaniu zrównań danych, otrzymamy sześć wyznaczników ostatniego kształtu. Wreszcie, rozkład zrównań danych na zrównania kształtu $Ax^2 + By^2 + Cz^2$, da nam dziesiąty i ostatni wyznacznik szukany. W ogólności rozkładamy zrównania dane na zrównania kształtu $A^\alpha + B^\beta + C^\gamma$, gdzie $\alpha + \beta + \gamma = n + 2$, i tworzymy wyznacznik $AB'C''$; łatwo zaś dowieść że zupełna liczba rozwiążań zrównania $\alpha + \beta + \gamma = n + 2$ jest $\frac{1}{2}(n + 1)$, czyli taka jakąśmy powyżéj założyli.

73. Jeżeli zrównania dane są stopni różnych, to nie można tą drogą otrzymać wyznacznika dającego rugownik wolny od obcych czynników. Następna teorya p. Cayley pokazuje dla czego pojawiają się te czynniki, i jakim sposobem pozbyć się takowych można. Dla ułatwienia dowodzenia, weźmy trzy zrównania, u, v i w, drugiego stopnia. Mnożąc je przez x, y i z, dla wyrugowania zmiennych w ich różnych potęgach, otrzymamy dziewięć zrównań niezdolnych wyrugować dziesięciu ilości x^3, x^2y, etc. Jeżeli zaś pomnożymy każde zrównanie przez sześć ilości, x^2, xy, y^2, etc., otrzymamy ośmnaście zrównań, która to liczba jest więcéj aniżeli dostateczną do wyrugowania piętnastu ilości x^3, x^2y, etc. Jeżeli weźmiemy dowolnie piętnaście z tych ośmnastu zrównań i utworzymy ich wyznacznik, to otrzymamy tém samém rugownik pomnożony przez obcy czynnik. Gdyż wyznacznik jest piętnastego stopnia w swych czynnikach, a rugownik tylko dwunastego (Art. 53). A pochodzi to ztąd że ośmnaście naszych zrównań nie są niezależnemi, owszem, zależą od trzech linijnych zrównań. Jeżeli bowiem napiszemy tosamość $uv = vu$, i zastąpimy w niéj, naprzód piérwsze u przez jego wartość $ax^2 + by^2 +$ etc., powtóre, drugie v przez wartość podobną, to otrzymamy:

$$ax^2v + by^2v + cz^2v + 2fyzv + \text{etc.} = a'x^2u + b'y^2u + c'z^2u + 2f'yuz + \text{etc.}$$

Podobnież, tosamości $vw = wv$, $wu = uw$, dadzą dwa inne związki zawiérające ilości x^2u, y^2u, x^2v, x^2w, etc. Kwestya więc sprowadza się do następującego pytania : « Jak wyrazić najprostszy warunek czyniący równemi zeru, $m+p$ linijnych zrównań między m zmiennemi, gdy równania te połączone są przez p linijnych związków, sprowadzających je do m zrównań niezależnych? » W obecnym przypadku, $m=15$, $p=3$.

74. Dajmy $m=3$, $p=1$, czyli weźmy cztéry zrównania s, t, u, v, w których $s=a_1x+b_1y+c_1z$, $t=a_2x+b_2y+c_2z$, etc., związane warunkiem $D_1s+D_2t+D_3u+D_4v=0$.

Otóż mówię naprzód, że wyznacznik $(a_1b_2c_3)$ trzech zrównań s, t, u, zawiéra D_4 jako czynnik. Bo jeżeli $D_4=0$, to s, t, u, musi łączyć taki linijny związek, iżby takowy w razie zadosyć uczynienia zrównaniom s i t, czynił zarazem zadość zrównaniu u; tak więc przypuszczenie $D_4=0$, uczyni zerem wyznacznik $(a_1b_2c_3)$.

Mówię powtóre, że dzieląc $(a_1b_2c_3)$ przez D_4, albo $(a_1b_2c_4)$ przez D_3, otrzymamy wypadki równe, lub różniące się znakami tylko. Gdyż (Art. 15) $D_4(a_1b_2c_4)$ równa się wyznacznikowi którego piérwsza linia jest a_1, b_1, c_1, druga a_2, b_2, c_2, trzecia D_4a_4, D_4b_4, C_4b_4; wiemy zaś że $D_4a_4=-D_1a_1-D_2a_2-D_3a_3$, więc wartość tę, jako i wartości na D_4b_4 i D_4c_4 podstawmy w trzecią linią. Wyznacznik zamieni się (Art. 18) na summę trzech innych, z których dwa, jako mające jednę linią wspólną, są równe zeru; zostanie $D_4(a_1b_2c_4)=-D_3(a_1b_2c_3)$. Wynika ztąd że rugownik danego układu otrzymuje się biorąc którekolwiek z równoważnych kształtów danych przez tworzenie wyznacznika $(a_1b_2c_3)$ trzech którychkolwiek zrównań, i podzielenia go przez pozostającą stałą D_4.

Dajmy teraz że mamy pięć zrównań, s, t, u, v, w, połączonych dwoma linijnemi warunkami, $D_1s+D_2t+D_3u+D_4v+D_5w=0$, i $E_1s+E_2t+E_3u+E_4v+E_5w=0$. Rugując

w otrzymamy $(D_1E_5)s + (D_2E_5)t + (D_3E_5)u + D_4E_5)v = 0$, gdzie (jak poprzednio), przypuszczenie $D_4E_5 = 0$, zniesie wyznacznik $(a_1b_2c_3)$, tak że do tego samego dochodzimy wypadku, dzieląc $(a_1b_2c_3)$ przez (D_4E_5), lub też dzieląc wyznacznik trzech jakichkolwiek zrównań danych przez wyznacznik uzupełniający i odpowiedni (D_4E_5). Rozumowanie to rozciągniętém być może do jakiejkolwiek liczby zrównań połączonych z jakąkolwiek liczbą warunków, i daje następujące ogólne prawo tworzenia rugownika: Napisz, jedne pod drugiemi, stałe $m+p$ zrównań danych, i uzupełnij je (do formy kwadratu) pisząc obok stałe zawarte w p warunkowych zrównaniach.

$$\begin{array}{llll|ll}
s; & a_1, & b_1, & c_1 & D_1, & E_1. \\
t; & a_2, & b_2, & c_2 & D_2, & E_2. \\
u; & a_3, & b_3, & c_3 & D_3, & E_3. \\
v; & a_4, & b_4, & c_4 & D_4, & E_4. \\
w; & a_5, & b_5, & c_5 & D_5, & E_5.
\end{array}$$

A rugownik, w najprostszym swym kształcie, jest wyznacznikiem którychkolwiek m linij lewego oddziału zrównań (a więc linij znajdujących się po lewéj stronie przedziału), podzielonym przez wyznacznik otrzymany przez wykreślenie, odpowiednich linij położonych po lewéj stronie przedziału, a więc przez wyznacznik z pozostałych tamże linij po prawej stronie przedziału.

Tak, w przykładzie Art. 73 bierzemy wyznacznik piętnastu którychkolwiek z pomiędzy ośmnastu zrównań, i dzielimy go przez wyznacznik trzech pozostałych warunków; otrzymany rugownik powinien być, i będzie dwunastego stopnia.

75. W ogóle, mając trzy zrównania stopni m, n i p, otrzymamy zrównania stopnia $m+n+p-2$, mnożąc piérwsze z danych przez x^{n+p-2}, $x^{n+p-3}y$ i t. d. Ilość zrównań tych

będzie :

$$\frac{1}{2}(n+p-1)(n+p)+\frac{1}{2}(p+m-1)(p+m)+\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n).$$

Lecz liczba wyrazów $x^{m+n+p-2}$, etc., które z tych zrównań wyrugować należy jest $\frac{1}{2}(m+n+p-1)(m+n+p)$, a więc mniejszą od liczby zrównań samych. Jeżeli zaś weźmiemy tosamość $uv = vu$, która jest stopnia $m+n$, i pomnożymy ją przez wyrazy x^{p-2}, etc., to będziemy mieli $\frac{1}{2}(p-1)p$ związków identycznych między otrzymanemi zrównaniami; podobnież, inne tosamości kształtu $uv = vu$, dadzą $\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}(m-1)m$ związków identycznych. Liczba tych związków odciągnięta od liczby zrównań, daje na resztę liczbę zmiennych którą wyrugować należy, i oznacza stopień rugownika.

76. W ten sam sposób postąpimy z cztérema zrównaniami o cztérech zmiennych, i wpadniemy na przypadek $m+n$ zrównań linijnych, mających m zmiennych, i to zrównań zależnych od $n+p$ związków (warunków) połączonych przez p nowych związków. Aby znaleźć rugownik uproszczony tego układu, podzielimy wyznacznik którychkolwiek m zrównań przez ilość będącą ilorazem dwóch wyznaczników.

Większe szczegóły byłyby zbytecznemi; to co poprzedza, dostatecznie wyjaśnia podaną powyżéj, jedyną ogólną metodę wyrażania rugowników jako wyznaczników.

ROZDZIAŁ VIII

OZNACZENIE PIERWIASTKÓW SPÓLNYCH.

---

77. Jeżeli rugownik pewnéj liczby zrównań staje się zerem, to zrównaniom tym zadosyć czyni pewien spólny układ wartości, a w tym rozdziale okażemy że można oznaczyć układ ten bez właściwego rozwiązywania zrównań. Metoda postępowania niezależną jest od ilości zmiennych, dla ułatwienia jednak pojęcia zaczniemy od układu dwóch zrównań.

$$\varphi = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \ldots.. = 0,$$

$$\psi = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots.. = 0.$$

Przypuśćmy że pewien pierwiastek drugiego zrównania, na przykład : $x = \alpha$, zadosyć czyni piérwszemu, a więc zamienia na zero rugownik układu. Lecz możemy zmienić czynniki zrównania φ, (a_m na $a_m + A_m$, a_{m-1} na $a_{m-1} + A_{m-1}$, etc.); zmienionemu w ten sposób zrównaniu

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots.. + A\, x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots. = 0,$$

zadosyć czyni widocznie $x = \alpha$, jeżeli tylko przyrosty A_m, A_{m-1}, etc., połączone są jedynym związkiem

$$A_m \alpha^m + A_{m-1} \alpha^{m-1} + \ldots.. = 0,$$

gdyż przypuściliśmy że $x = \alpha$ czyni zerem pozostałą część zrównania. Zrównanie przeobrażone ma spólny pierwiastek z ψ, a więc rugownik tych dwóch zrównań staje się zerem. Rugownik ten otrzymuje się przez zamianę a_m na $a_m + A_m$, etc., w R (rugowniku φ i ψ). Rugownik przeobrażony jest:

$$R + \left\{ A_m \frac{dR}{dA_m} + A_{m-1} \frac{dR}{dA_{m-1}} + \ldots \right\} + \ldots = 0.$$

Przypuściliśmy $R = 0$; więc przyrosty A_m, etc., mogą być tak małe jak się tylko podoba, a wyrazy zawierające ich pierwsze potęgi, stają się pojedyńczo równemi zeru. Mamy przeto

$$A_m \frac{dR}{dA_m} + A_{m-1} \frac{dR}{dA_{m-1}} + \ldots = 0.$$

Ta wartość musi być równoważną wartości

$$A_m \alpha^m + A_{m-1} \alpha^{m-1} + \ldots = 0,$$

gdyż widzieliśmy że ta ostatnia stanowi jedyny warunek któremu przyrosty koniecznie zadosyć czynić powinny. Wynika ztąd że spółczynniki różniczkowe są proporcyonalnemi do α^m, α^{m-1}, etc., a więc że otrzymamy α, biorąc iloraz dwóch tuż po sobie następujących spółczynników tych.

Wniosek I. Jeżeli a_p, a_q, są spółczynnikami w zrównaniu φ, to dla $R = 0$ będzie

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_{p-k}} = \frac{dR}{da_q} : \frac{dR}{da_{q-k}};$$

a iloraz pierwszego wyrazu przez drugi, lub trzeciego przez czwarty będzie $= \alpha^k$. A więc

$$\frac{dR}{da_p} \times \frac{dR}{da_{q-k}} - \frac{dR}{da_q} \times \frac{dR}{da_{p-k}}$$

stanie się zerem gdy $R=0$, czyli zawierać musi R jako czynnik. Czyli innemi wyrazy,

$$\frac{dR}{da_p}\times\frac{dR}{da_q}-\frac{dR}{da_r}\times\frac{dR}{da_s}$$

zawiera R jako czynnik, jeżeli tylko mamy $p+q=r+s$.

Wniosek II. Podobneż rozumowanie przekona że spółczynniki różniczkowe rugownika, będą do spółczynników ψ w stosunku α^n, α^{n-1}, etc.; z tąd dla $R=0$, będzie:

$$\frac{dR}{da_p}:\frac{dR}{da_{p-k}}=\frac{dR}{db_q}:\frac{dR}{db_{q-k}};$$

że wreszcie wyrażenie

$$\frac{dR}{da_p}\times\frac{dR}{db_q}-\frac{dR}{da_r}\times\frac{dR}{db_s}$$

zawiera R jako czynnik gdy $p+q=r+s$.

Wniosek III. Jeżeli zaś, dane powyżéj na α^n, α^{n-1}, etc., wartości, podstawimy w drugie zrównanie, to dla $R=0$, otrzymamy

$$b_n\frac{dR}{da_n}+b_{n-1}\frac{dR}{da_{n-1}}+\ldots=0.$$

R nie może być spółczynnikiem pierwszéj strony tego zrównania, gdyż ta, zawiera widocznie spółczynniki φ w stopniu niższym o jedność od stopnia w jakim wchodzą do R. Ta strona musi być tosamościowo $=0$.

78. Wypadki Art. 77 sprawdzić możemy obliczając istotne wartości spółczynników różniczkowych rugownika R. Wiemy

(Art. 44) że

$$R = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma)\dots$$

Lecz mamy

$$\varphi(\alpha) = a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \dots,$$

zkąd

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{da_p} = \alpha^p,$$

a więc

$$\frac{dR}{da_p} = \alpha^p.\varphi(\beta).\varphi(\gamma) + \beta^p.\varphi(\alpha).\varphi(\gamma) + \dots$$

Jeżeli α sprawdza φ, będzie $\varphi(\alpha) = 0$,

a $$\frac{dR}{da_p} = \alpha^p.\varphi(\beta).\varphi(\gamma)\dots$$

Podobnież

$$\frac{dR}{da_q} = \alpha^q.\varphi(\beta).\varphi(\gamma)\dots$$

A ztąd jak poprzednio

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_q} = \alpha^p : \alpha^q.$$

Mnożąc zaś wartości, które dopiero dzieliliśmy przez siebie, przyjdzie:

$$\frac{dR}{da_p}\cdot\frac{dR}{da_q} = \alpha^{p+q}\left\{\varphi(\beta)\right\}^2\left\{\varphi(\gamma)\right\}^2\dots + R(\alpha^p\beta^q + \alpha^q\beta^p)\varphi(\gamma)\dots + \dots = 0,$$

gdzie widoczna że szereg mnożący R jest $\frac{d^2R}{da_p.da_q}$:

Jeżeli zaś odejmiemy $\frac{d\text{R}.d\text{R}}{da\,.da_s}$, to wyrazy nie mające R za czynnik, zniosą się nawzajem jeżeli $p+q=r+s$; pozostanie

$$\frac{d\text{R}.d\text{R}}{da_p.da_q}-\frac{d\text{R}.d\text{R}}{da_r.da_s}=\text{R}\left(\frac{d^2\text{R}}{da_pda_q}-\frac{d^2\text{R}}{da_r.da_s}\right).$$

W podobnyż sposób przekonać się możemy że

$$\frac{d\text{R}.d\text{R}}{da_p.db_q}-\frac{d\text{R}.d\text{R}}{da_q.db_p}$$

jest podzielném przez R, lecz że iloraz różnić się musi od

$$\frac{d\text{R}.d\text{R}}{da_p.db_q}-\frac{d\text{R}.d\text{R}}{da_q.db_p}.$$

79. To co dopiero powiedzieliśmy, stosuje się do układu zrównań o ilukolwiek zmiennych, jak to zobaczymy poniżéj. Obecnie podamy metodę prostszą, lecz tylko do układu dwóch zrównań zastosować się dającą. Widzieliśmy (Aryt. 65) że rugownik może być wyrażonym w kształcie wyznacznika wynikającego z wyrugowania x^{-1}, x^{m-2}, etc., z układu zrównań linijnych względem tych ilości. Jeżeli wyznacznik ten stanie się zerem, zrównania będą wchodziły jedno w drugie; opuścimy jedno, a z drugiego wyciągniemy wartości na x. Jeżeli więc $\mathfrak{C}_{11}$, $\mathfrak{C}_{12}$, etc., wyrażają Mniejsze w mowie będącego wyznacznika, to x^{m-1}, x^{m-2}, etc., będą proporcyonalnemi do $\mathfrak{C}_{11}$, $\mathfrak{C}_{12}$, $\mathfrak{C}_{13}$, etc., albo do $\mathfrak{C}_{21}$, $\mathfrak{C}_{22}$, $\mathfrak{C}_{23}$, etc., etc. Wartości te są prostszemi od znalezionych za pomocą metody poprzedniéj, gdyż są o jeden stopień niższemi od spółczynników dyskryminanta któregokolwiek ze zrównań; przeciwnie wartości znalezione przez różniczkowanie dyskryminanta (*) są niższemi, jedynie od spółczynników

(*) Zobacz Rozdział następny.

jednego ze zrównań. I tak weźmy zrównania

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Postępując według ostatniéj metody, przekonamy się że sprawdza je wartość

$$-\left(\frac{bc'}{ac'}\right) = -\left(\frac{ac'}{ab'}\right),$$

gdy metoda poprzedzająca wymagała

$$\frac{2c'(ac') - b'(bc')}{a'(bc') - c'(ab')} = \frac{a'(bc') - c'(ab')}{-2a'(ac') + b'(ab')}.$$

Obie zaś wartości te, są równemi w skutek warunku $(ac')^2 = (ab')(bc')$, któremu zadosyć czynią wedle przypuszczenia.

80. Jeżeli w którekolwiek ze zrównań użytych w Art. 79, podstawimy $\frac{dR}{da_{m-1}}$ za x^{m-1}, etc., to wartości czyniące $R=0$, sprawdzić muszą zrównanie to, a wypadek podstawienia będzie podzielnym przez R. Innemi słowy

$$\alpha_{r1}\frac{dR}{da_{m-1}} + \alpha_{r2}\frac{dR}{da_{m-2}} + \ldots,$$

będzie podzieloném przez R, jeżeli α_{r1}, α_{r2}, i t. d., są elementami jednéj linii wyznacznika z artykułu 65. Zastanawiając się zaś nad α_{r1}, α_{r2}, etc., spostrzeżemy że α_{r1} jest wyznacznikiem $(a_m b_{n-r})$, etc., a więc że funkcya $\alpha_{r1}\frac{dr}{da_{m-1}} + \ldots$, ma swe spółczynniki w ilości b, stopniem o jedność wyższe od R, gdyż ich ważność przewyższa ważność R o ilość $= n - r + 1$. Wynika ztąd że pozostały po podzieleniu czynnik musi być b_{n-r+1} pomnożony przez jakiś czynnik liczebny. Dla obliczenia czynnika tego przypuśćmy że wszystkie czynniki ψ stały się zerami, z wyjątkiem b_{n-r+1}. Wynika zarazem, (według metody rugowania za pomocą funkcyj symetrycznych), że jeżeli ψ składa się z czynników V, W, etc., to rugownik φ i ψ jest wieloczynem rugowników φ, V; φ, W, etc. Gdyż jeżeli

$$V = (x - \alpha)(x - \beta)\ldots, \text{ a } W = (x - \alpha')(x - \beta')\ldots,$$

to rugownik φ i V jest $\varphi(\alpha).\varphi(\beta)\ldots$, a rugownik φ i W, $\varphi(\alpha').\varphi(\beta')\ldots$; iloczyn zaś tych rugowników będzie rugownikiem φ i ψ.

Jeżeli znowu ψ redukuje się do pojedyńczego wyrazu $b_\alpha x^\alpha y^\beta$, z powodu że rugownik φ i x jest a_0, a rugownik φ i y jest $= a_m$, to rugownik φ i ψ będzie $b_\alpha^m a_0^\alpha a_m^\beta$. Tylko jeden z pomiędzy szeregów złożonych z wyrazów $\dfrac{dR}{da_{m-1}}$, etc., nie zniknie, wtedy gdy wszystkie spółczynniki ψ (z wyjątkiem b) zniosą się; jest nim $\dfrac{dR}{da_0}$, spółczynnik zaś o którym mowa $\alpha b_\alpha^m a_0^{\alpha-1} a_m^\beta$. Lecz w rozważanym przypadku $\dfrac{dR}{da_0}$ mnożone jest przez $b_\alpha a_0$; zkąd w ogóle dla $\alpha = n - r + 1$ będzie

$$\alpha_{r1} \frac{dR}{da_{m-1}} + \alpha_{r2} \frac{dR}{da_{m-2}} + \ldots = (n - r + 1) R b_{n-r+1}.$$

PRZYKŁAD. Dla uczynienia zrozumialszém tego co powiedzieliśmy, weźmiemy dwa sześciany

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

$$b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Wyniknie (Art. 65) układ zrównań

$$
\begin{aligned}
(a_3b_2)x^2 + \quad (a_3b_1) \quad x + (a_3b_0) &= 0, \\
(a_3b_1)x^2 + \left\{(a_3b_0) + (a_2b_1)\right\} x + (a_2b_0) &= 0, \\
(a_3b_0)x^2 + \quad (a_2b_0) \quad x + (a_1b_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Podstawiwszy w drugie na przykład zrównanie, to otrzymana ilość

$$(a_3b_1)\frac{d\mathrm{R}}{da_2} + \left\{(a_3b_0) + (a_2b_1)\right\}\frac{d\mathrm{R}}{da_1} + (a_2b_0)\frac{d\mathrm{R}}{da_0}$$

będzie podzieloną przez R. Lecz rzęd i ważność funkcyi téj przekonywa że pozostający czynnik musi być b_2 pomnożone przez pewien liczebny spółczynnik. Dla wyznaczenia takowego, dajmy że b_0, b_1 i b_3 znikły zarazem, co obchodzącą nas ilość zamienia na

$$-b_2\left(a_1\frac{d\mathrm{R}}{da_1} + a_0\frac{d\mathrm{R}}{da_0}\right).$$

Lecz uczynione przypuszczenie czyni $\mathrm{R} = b_2^3 a_3 a_0^2$, a więc funkcya, którą obliczamy, znakiem jedynie różnić się może od $2b_2\mathrm{R}$.

81. Zastosowanie metody artykułów 77 i 78 do ilukolwiek zmiennych, żadnéj nie przedstawi trudności. Dla jasności ograniczymy się do trzech zmiennych, zwracając jednak uwagę na to, że ich ilość w niczém postępowania nie zmienia.

Niech $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, będą zrównaniami danemi, w których $\varphi = a_{m00}x^m + \ldots + a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma + \ldots$, a którym zadosyć czynią wartości x', y', z'. Jeżeliby te ostatnie tylko φ sprawdzać miały, toby zamieniły a_{m00}, $a_{\alpha\beta\gamma}$, na $a_{m00} + \mathrm{A}_{m00}$, $a_{\alpha\beta\gamma} + \mathrm{A}_{\alpha\beta\gamma}$, etc., byle tylko było

$$\mathrm{A}_{m00}x'^m + \ldots + \mathrm{A}_{\alpha\beta\gamma}x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma + \ldots = 0;$$

lecz (Art. 77) zrównanie

$$A_{m00}\frac{dR}{dA_{m00}}+A_{\alpha\beta\gamma}\frac{dR}{dA_{\alpha\beta\gamma}}+\ldots=0,$$

współcześnie sprawdzoném być powinno; a więc wartość wyrazów zawierających $x'^{\alpha}y'^{\beta}z'^{\gamma}$, proporcyonalną będzie do różniczki rugownika w odniesieniu do mnożącego ją społczynnika. Otrzymujemy wartości x', y', z', biorąc stosunki różniczek R ze względu na spółczynniki wyrazów będących w stosunku do x', y', z'. Daje się to sprawdzić jak w Art. 78; gdyż wspólne pierwiastki ψ i χ podstawione w φ dadzą φ', φ'', etc. Tak więc $R=\varphi'\varphi''\varphi'''\ldots$ a

$$\frac{dR}{da_{\alpha\beta\gamma}}=x'^{\alpha}y'^{\beta}z'^{\gamma}\varphi''\varphi'''\ldots+x''^{\alpha}y''^{\beta}z''^{\gamma}\varphi'\varphi''\ldots+\ldots$$

Jeżeli φ' zniknie, to wartość tego spółczynnika różniczkowego zredukuje się do pierwszego wyrazu, a zatém, widzimy jak poprzednio że spółczynniki są proporcyonalnemi do mnożących je wyrazów.

82. Ogólniéj: jeżeli spółczynniki φ są funkcyami a, b, c,... które nie wchodzą do ψ i χ, to będziemy mieli

$$\frac{dR}{da}:\frac{dR}{db}=\frac{d\varphi}{da}:\frac{d\varphi}{db},$$

byle x', y', z', różniczki x, y, z, sprawdzały wszystkie trzy zrównania. Gdyż, albo jak w Art 78, mamy $\varphi'=0$, i

$$\frac{dR}{da}=\frac{d\varphi}{da}\varphi''\varphi'''\ldots;\quad\frac{dR}{db}=\frac{d\varphi}{db}\varphi''\varphi''';$$

albo, jeżeli jak w Art. 77, a, b, c, takie przybrały wartości, że ten sam układ wartości zmiennych sprawdza φ, to będziemy mieli

$$\frac{d\varphi}{da}\delta a + \frac{d\varphi}{db}\delta b + \frac{d\varphi}{dc}\delta c + \ldots = 0\,;$$

a że w tym przypadku rugownik przeobrażonego φ i innych zrównań, nie przestaje być zerem, przeto będzie

$$\frac{dR}{da}\delta a + \frac{dR}{db}\delta b + \frac{dR}{dc}\delta c + \ldots = 0\,;$$

a dwa te zrównania powinny być identycznemi.

83. Formuły stają się zawilszemi, jeżeli weźmiemy różniczki rugownika w odniesieniu do a, b,... które wchodzą do wszystkich zrównań. Ilościom tym nadawać będziemy jak poprzednio zmiany zgodne z przypuszczeniem według którego rugownik zerem być nie przestaje; będzie przeto

$$\frac{dR}{da}\delta a + \frac{dR}{db}\delta b + \frac{dR}{dc}\delta c + \ldots = 0.$$

W przypadku, gdy a, b, c,... wchodzą tylko w jedno ze zrówaań, zmiana ich wartości nic nie wpływa na zmianę spólnych pierwiastków, gdyż spółczynniki są stałemi w innych zrównaniach, których układ spólnych pierwiastków zostaje przez to ściśle oznaczonym. Lecz to się nie stosuje do zrównań przeobrażonych, których pierwiastki spólne różnić się mogą od takichże pierwiastków zrównań danych. Niech $x' + \delta x'$, $y' + \delta y'$, $z' + \delta z'$,... będzie nowym układem pierwiastków spólnych; ich zmiany zadosyćczynić powinny warunkom :

$$\frac{d\varphi}{da}\delta a + \frac{d\varphi}{db}\delta b + \ldots + \frac{d\varphi}{dx}\delta x' + \frac{d\varphi}{dy}\delta y' + \ldots = 0,$$

$$\frac{d\psi}{da}\delta a+\frac{d\psi}{db}\delta b+\ldots+\frac{d\psi}{dx}\delta x'+\frac{d\psi}{dy}\delta y'+\ldots=0,$$

etc. . . . . etc. . . . .

Jeżeli jest k zrównań warunkowych, to zawierają one $k-1$ zmienych które wyrugować możemy; pozbywszy się w ten sposób $\delta x', \delta y',\ldots$, pozostanie zrównanie warunkowe między δa, $\delta b,\ldots$, którego spółczynniki są proporcyonalnemi do $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{db},\ldots$.

PRZYKŁAD I. Weźmy dwa zrównania o jednéj zmiennéj. Ostateczny związek będzie :

$$\left(\frac{d\varphi}{da}\,\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\psi}{da}\,\frac{d\varphi}{dx}\right)\delta a+\left(\frac{d\varphi}{db}\,\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\psi}{db}\,\frac{d\varphi}{dx}\right)\delta b+\ldots=0;$$

w nim zaś spółczynniki proporcyonalne do $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{db},\ldots$ Jeżeli dane zrównania są jednorodnémi, możemy uważać x za stałą, i w poprzedzającéj formule, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dx}$, zastąpić przez $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\psi}{dy}$. Nic to nie zmienia rzeczy, gdyż dowiedliśmy (Art. 70) że spólny pierwiastek zadosyć czyni Jakobiowemu wyznacznikowi, czyli daje

$$\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\psi}{dy}=\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d\psi}{dx}.$$

PRZYKŁAD II. W razie trzech zrównań, δa ma za spółczynnik

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{da}, & \frac{d\psi}{da}, & \frac{d\chi}{da} \\ \varphi_1, & \psi_1, & \chi_1 \\ \varphi_2, & \psi_2, & \chi_2 \end{vmatrix}.$$

W tym spółczynniku φ_1, φ_2, oznaczają spółczynniki różniczkowe φ w odniesieniu do x i y, etc.

84. Jeżeli układowi zrównań danych, zadosyćczynią dwa układy spólnych wartości, natenczas nietylko rugownik R, lecz i jego różniczka w odniesieniu do każdego z czynników obu zrównań, staje się zerem; gdyż widocznie, wartości wszystkich tych różniczek nikną, jeżeli (Art. 78) mamy zarazem $\varphi(\alpha)=0$, i $\varphi(\beta)=0$, albo też (Art. 81) $\varphi'=0$, i $\varphi''=0$. W tym przypadku wartości obu spólnych pierwiastków wyrazić się dadzą za pomocą drugich różniczek R w postaci zrównania kwadratowego (quadratic). To co następuje, chociaż odnosi się do przypadku dwóch zrównań, najogólniej jednak da się zastosować. Mamy (Art. 78),

$$\frac{d^2R}{da_p^2}=\alpha^p\beta^p\varphi(\gamma).\varphi(\delta)\ldots+\beta^p\gamma^p\varphi(\alpha).\varphi(\delta)\ldots,$$

które to wyrażenia, $\varphi(\alpha)=0$, i $\varphi(\beta)=0$, zamienia na jedyny wyraz

$$\alpha^p\beta^p\varphi(\gamma).\varphi(\delta)\ldots$$

Podobnież

$$\frac{d^2R}{da_pda_q}=(\alpha^p\beta^q+\alpha^q\beta^p\,\varphi(\gamma).\varphi(\delta)\ldots,$$

$$\frac{d^2R}{da_q^2}=\alpha^q\beta^q\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots$$

Rozwiązując zaś kwadratowe zrównania względem $\lambda\cdot\mu$, przyjdzie:

$$\lambda^2\frac{d^2R}{da_q^2}-\lambda\mu\frac{d^2R}{da_pda_q}+\mu^2\frac{d^2R}{da_p^2}=0,$$

pierwiastki dadzą nam stosunki $\alpha^p:\alpha^q$, $\beta^p:\beta^q$.

Jeżeli zrównania dane mają trzy układy pierwiastków spólnych, natenczas znikną wszystkie drugie różniczki R, pierwiastki zaś te znajdziemy biorąc trzecie różniczkowe spółczynniki i rozwiązując zrównanie kubiczne (cubic).

ROZDZIAŁ IX

DYSKRYMINANTY (DISCRIMINANTS).

85. Przed zajęciem się dyskrymimantami, damy poznać niektóre wyrazy i symbole nowe które będą często używanemi nadal. W Algebrze zwyczajnéj zajmujemy się tylko zrównaniami, cel jaki sobie zakładamy zwykle jest znalezienie wartości na x robiących jakąkolwiek funkcyą daną równą zeru. Przeciwnie w tem co następuje, rzadko tylko będziemy traktowali o zrównaniach, przedmiotem poszukiwań najczęstszym, którym zajmiemy się począwszy od rozdziału następującego, będzie odkrycie własności jakiejkolwiek funkcyi niezmieniających się przez przekształcenia linijne. Należy więc znaleźć jakikolwiek wyraz specyalny na oznaczenie funkcyi saméj, nie będąc zmuszonym mówić o zrównaniu jakie się otrzymuje robiąc ją równą zeru jakikolwiek wyraz, na przykład, na oznaczenie

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

nie potrzebując mówić o zrównaniu drugiego stopnia

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Nazwiemy *kształtem* (*), w ogólności, jakąkolwiek bądź funk-

(*) P. Cayley daje funkcyom jednorodnym w ogólności nazwisko *ilostek* (quantic), oznaczając wyrazami *kwadratów* (quadric), *sześcianów* (cubic), *czwórek* (quartic), *piątek* (quintic), i t. d., kształty drugiego, trzeciego, czwartego, piątego, i t. d., stopni.

cyą jednorodną która będzie mogła być drugiego, trzeciego, czwartego,... stopnia. Rozróżniać będziemy kształty na *podwójne*, *potrójne*, *poczwórne*, i t. d., podług tego jak te kształty zawierają dwie, trzy, cztery, i t. d., zmienne. I tak, przez kształt sześcienny podwójny, rozumieć będziemy jakąkolwiek funkcyą taką jak

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3;$$

przez kształt kwadratowy potrójny, jakąkolwiek funkcyą taką jak

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

P. Cayley używa skrócenia $(a, b, c, d)(x, y)^3$ na oznaczenie kształtu

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

w którym, jak to ogólnie jest więcéj odpowiedniém do zrobienia, wyrazy przyjmują też same spółczynniki liczebne jak w rozwinięciu $(x + y)^3$. Kształt kwadratowy potrójny powyższy napisałby się, według tego znakowania, $(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$. Jeżeli wyrazy nie przyjmują tych spółczynników liczebnych, P. Cayley przydaje strzałę do nawiasu, pisząc na przykład $(a, b, c, d\between(x, y)^3$ za

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Nakoniec, jeżeli nie jest potrzebném oznaczenie spółczynników, kształt n^tego^ stopnia pisze się $(x, y)^n$, $(x, y, z)^n$.

86. Jeżeli się różniczkuje jakikolwiek kształt o k zmiennych względem każdéj z tych zmiennych, rugownik t. j. wypadek otrzymany z rugowania tych k pochodnych zowie się *dyskryminantem* kształtu danego.

Jeżeli kształt jest stopnia n, dyskryminant jest jakąkolwiek bądź funkcyą jednorodną spółczynników $k(n-1)^{k-1}$; w rzeczy saméj, dyskryminant jest rugownikiem k zrównań stopnia $n-1$ i (55) powinien zawierać spółczynniki każdego z tych zrównań w stopniu równym wieloczynowi ze wszystkich innych stopni, to jest $(n-1)^{k-1}$. Te zrównania zawierają wszystkie spółczynniki kształtu pierwotnego w pierwszym stopniu, więc dyskryminant zawierać je będzie w stopniu $k(n-1)^{k-1}$. Dyskryminant kształtu podwójnego będzie więc stopnia $2(n-1)$, dyskryminant kształtu potrójnego stopnia $3(n-1)^2$, i t. d.

87. Jeżeli, w kształcie pierwotnym, daje się spółczynnikom mnożącym pierwszą potęgę jakiéjkolwiek zmiennéj x wskaźnik 1, spółczynnikom mnożącym drugą potęgę wskaźnik 2, i tak daléj, summa wskaźników w każdym wyrazie dyskryminanta będzie stałą i równą $n(n-1)^{k-1}$. Było już dowiedzioném (55) że, jeżeli każdy spółczynnik w jakimkolwiek układzie zrównań jest oznaczony wskaźnikiem odpowiednim potędze x który on mnoży, summa wskaźników w każdym wyrazie rugownika jest równą wieloczynowi $mnp...$ stopni zrównań. Przypuśćmy teraz że, w pierwszém z tych zrównań, wskaźnik x^0 zamiast być 0 jest l; że wskaźnik x' jest $l+1$, i tak daléj, jest rzeczą oczywistą że ta zmiana będzie przedstawiała w skutku powiększenie summy wskaźników o tyle razy l ile się znajduje spółczynników pierwszego zrównania w każdym wyrazie rugownika, a, ponieważ (55) każdy wyraz zawiera ich $np...$, summa całkowita wskaźników stanie się

$$mnp... + lnp... = (m+l)np...$$

Teraz, w przykładzie zajmującym nas, oczywista jest że każdy spółczynnik w $k-1$ pochodnych U_1, U_2,... (*) mnoży

(*) Oznaczymy jak powyżéj przez U_1, U_2, U_3,... pochodne względem x, y, z,...

tęż samą potęgę x jak w kształcie pierwotnym U; lecz, w pochodnéj U_1, każdy spółczynnik mnoży jakąkolwiek bądź potęgę x mniejszą o jedność niż w U, i spółczynnik mnożący jakikolwiek wyraz x^l w téj pochodnéj powinien być oznaczony wskaźnikiem $l+1$, ponieważ pochodzi on z wyrazu x^{l+1} w kształcie pierwotnym. Wynika ztąd że summa wskaźników dyskryminanta powinna być

$$(n-1)^k + (n-1)^{k-1} \quad \text{albo} \quad n(n-1)^{k-1}.$$

Wyrażać będziemy zbiorowo wypadki otrzymane w dwóch numerach poprzedzających, mówiąc że *porządkiem* dyskryminanta jest $k(n-1)^{k-1}$ a jego *ważnością* $n(n-1)^{k-1}$. Tak więc, dla jakiegokolwiek kształtu podwójnego, ważnością dyskryminanta jest $n(n-1)$.

88. Jeżeli jakikolwiek kształt podwójny zawiera którykolwiek czynnik kwadratowy, dyskryminant sprowadza się, jak wiadomo, do zera, gdyż dwie pochodne zawierają każda ten czynnik w pierwszym stopniu, i ponieważ mają one odtąd czynnik spólny, ich rugownik jest zerem. Podobnież, jeżeli jakikolwiek kształt potrójny może się rozłożyć w sposób następujący

$$X^2\varphi + XY\psi + Y^2\chi,$$

gdzie X jest równém $ax+by+cz$, Y zaś $a'x+b'y+c'z$, dyskryminant musi także sprowadzić się do zera, ponieważ każdy wyraz pochodnych zawiera jako czynnik X albo Y, i że, odtąd, te pochodne mają wspólnie pierwiastki zrównań

$$X=0, \quad Y=0.$$

Dzieje się jeszcze podobnież z dyskryminantem jakiegokolwiek kształtu poczwórnego, jeżeli ten kształt może być wyrażonym jak jakakolwiek bądź funkcya drugiego stopnia trzech funkcyj linijnych X, Y, Z zmiennych (*). Nazwiemy pierwiastkami *szczególnemi* kształtu te wartości robiące pochodne równemi zeru.

89. Rozbierzemy teraz własności dyskryminanta kształtu podwójnego

$$U = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \dots$$

Rugownik U i U_1 jest równy dyskryminantowi pomnożonemu przez a_0, a rugownik U i U_2 jest równy dyskryminantowi pomnożonemu przez a_n (**). W rzeczy saméj, ponieważ

$$nU = xU_1 + yU_2,$$

wypadkiem z podstawienia jakiegokolwiek pierwiastku U_1 w nU jest $y'U'_2$; mnożąc wypadki ze wszystkich podstawień podobnych, wieloczynem będzie $y'y''y'''\dots$, czyli a_0 (38) pomnożone przez wypadki jakie się otrzymuje podstawiając te same pierwiastki w U_2, i ten wieloczyn nie jest czém inném jak dyskryminantem.

90. Wyrazić dyskryminant za pomocą wartości $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ robiących kształt równy zeru.

Niech będzie

$$U = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)(xy_3 - yx_3)\dots \quad (38);$$

(*) Innemi słowy, sprowadzenie do zera dyskryminanta jakiegokolwiek bądź zrównania algebraicznego wyraża warunek konieczny ażeby to zrównanie miało pierwiastki równe, a sprowadzenie do zera dyskryminanta jakiéjkolwiek krzywéj lub jakiéjkolwiek powierzchni, ażeby ta krzywa lub ta powierzchnia miała punkt podwójny.

(**) Nie zważając na czynniki czysto liczebne.

mamy

$$U_1 = y_1(xy_2 - yx_2)(xy_3 - yx_3)\ldots$$

$$+ y_2(xy_1 - yx_1)(xy_3 - yx_3)\ldots + \ldots ;$$

wypadkiem z podstawienia jakiegokolwiek pierwiastku x_1, y_1 kształtu U w U_1 jest

$$y_1(x_1y_2 - y_1x_2)(x_1y_3 - y_1x_3)\ldots ;$$

wypadkiem z podstawienia wartości x_2, y_2 jest, podobnież,

$$y_2(x_2y_1 - y_2x_1)(x_2y_3 - y_2x_3)\ldots ;$$

jeżeli więc pomnożymy wszystkie te wypadki, wieloczynem jest

$$\pm\, y_1y_2y_3\ldots (x_1y_2 - y_1x_2)^2 (x_1y_3 - y_1x_3)^2 (x_2y_3 - y_2x_3)^2\ldots$$

Co daje właśnie rugownik U i U_1, a jeżeli podzielimy go przez a_0 które jest równem $y_1y_2y_3\ldots$, znajdziemy, na wartość dyskryminanta,

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2 (x_1y_3 - y_1x_3)^2 \ldots$$

Jeżeli przypuścimy wszystkie y równemi jedności, otrzymamy twierdzenie pod kształtem dobrze znanym : *Dyskryminant jest równy wieloczynowi kwadratów z różnic pierwiastków zrównania.* Dla większej prostoty, zachowamy twierdzenie pod tym ostatnim kształtem.

91. Dyskryminant wieloczynu dwóch funkcyj jest równy wieloczynowi z ich dyskryminantów pomnożonemu przez kwudrat z ich rugownika. Gdyż wieloczyn kwadratów z różnic wszystkich pierwiastków składa się oczywiście z wieloczynu

kwadratów z różnic obu pierwiastków należących do tegoż samego zrównania, pomnożonego przez kwadrat wieloczynu ze wszystkich różnic między jakimkolwiek pierwiastkiem jednego i jakimkolwiek pierwiastkiem drugiego, i ten ostatni wieloczyn est rugownikiem (45). Jako przypadek szczególny, dyskryminant wieloczynu dwóch funkcyi $(x - \alpha)\ \varphi(x)$ jest równy dyskryminantowi funkcyi $\varphi(x)$ pomnożonemu przez kwadrat funkcyi $\varphi(\alpha)$. Gdyż jeżeli $\beta, \gamma, \ldots$ są pierwiastkami zrównania $\varphi(x)$, $(\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \gamma)^2 \ldots$ równa się kwadratowi wieloczynu utworzonego z różnic pierwiastków $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)\ldots$ który nie jest czem innem jak $\varphi(\alpha)$ pomnożone przez wieloczyn kwadratów z różnic niezawierających α.

92. Dyskryminant funkcyi

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \between x. y)^n$$

jest kształtu

$$a_n \varphi + a^2_{n-1} \psi,$$

ψ jest dyskryminantem funkcyi stopnia $n - 1$,

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} \between x, y)^{n-1}.$$

Gdyż winniśmy oczywiście otrzymać tenże sam wypadek, bądź to przypuszczając $a_n = 0$ w dyskryminancie, bądź to robiąc $a_n = 0$ w kształcie samym i obliczając potem dyskryminant. Lecz jeżeli zrobimy $a_n = 0$ w kształcie, sprowadzi się on do kształtu stopnia $n - 1$ napisanego powyżéj, pomnożonego przez x, i (91) jego dyskryminant jest równy dyskryminantowi tego ostatniego kształtu pomnożonemu przez kwadrat z wypadku jaki się otrzymuje robiąc w nim $x = 0$, to jest a^2_{n-1}. Zobaczymy tak samo że dyskryminant jest kształtu $a_0 \varphi + a^2_1 \psi$ (*).

93. Dyskryminant jako będący jakąkolwiek funkcyą wyznaczników $x_1y_2 - x_2y_1$,..., powinien zadość czynić równaniom różniczkowym numeru 37.

$$na_0 \frac{d\Delta}{da_1} + (n-1)a_1 \frac{d\Delta}{da_2} + (n-2)a_2 \frac{d\Delta}{da_3} + \ldots = 0.$$

$$a_1 \frac{d\Delta}{da_0} + 2a_2 \frac{d\Delta}{da_1} + 3a_3 \frac{d\Delta}{da_2} + \ldots = 0,$$

albo też, jak w numerze 39, jeżeli zrównania pierwotne były napisane ze spółczynnikami dwumianu,

$$na_1 \frac{d\Delta}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d\Delta}{da_1} + \ldots = 0,$$

$$a_0 \frac{d\Delta}{da_1} + 2a_1 \frac{d\Delta}{da_2} + \ldots = 0.$$

PRZYKŁAD. *Utworzyć dyskryminant funkcyi* $(a_0, a_1, a_2, \ldots \between x, y)^n$ *którą przypuścimy urządzoną według potęg* a_0.

Wiemy (92) że wyraz niezależny od a_0 jest $a_1^2 D$, gdzie D jest dyskryminantem funkcyi stopnia $n-1$, $(a_1, a_2, \ldots \between x, y)^{n-1}$. Dyskryminan jakiego szukamy jest więc kształtu

$$a_1^2 D + a_0\varphi + a_0^2\psi + \ldots !$$

(*) Twierdzenie to było podane po raz piérwszy przez JOACHIMSTHALA. P. SALMON przecież został przywiedziony poprzednio przez proste rozważania geometryczne do twierdzenia następującego w którém jest ono zawartém: Jeżeli a_1 zawiera jakikolwiek czynnik z i gdy a_0 zawiera czynnik z^2, dyskryminant będzie podzielny przez z^2. Jeżeli a_2 zawiera z jako czynnik, gdy a_1 zawiera z^2, i a_0, z^3, dyskryminant będzie ogólnie podzielnym przez z^3. I tak daléj, jeżeli a_3 zawiera z; a_2, z^2; a_1, z^3 i a_0, z^4, dyskryminant będzie podzielny przez z^{12}, i t. d.

Wykonywając na nim działanie

$$a_1\frac{d}{da_0}+2a_2\frac{d}{da_1}+3a_3\frac{d}{da_2}+\ldots,$$

będziemy mogli zrobić równym zeru spółczynnik każdéj potęgi a_0. Wyrazami niezależnemi od a_0 są

$$a_1\varphi+4a_1a_2\mathrm{D}+a_1^2\left(2a\frac{d}{da_1}+3a_3\frac{d}{da_2}+\ldots\right)\mathrm{D},$$

albo, zauważywszy że $\left(a_2\frac{d}{da_1}+2a_3\frac{d}{da_2}+\ldots\right)\mathrm{D}=0,$

$$\varphi=-4a_2\mathrm{D}+a_1\left(a_3\frac{d}{da_2}+2a_4\frac{d}{da_3}+\ldots\right)\mathrm{D},$$

otrzymamy na wartość dyskryminanta

$$(a_1^2-4a_0a_2)\mathrm{D}+a_1a_0\left(a_3\frac{d}{da_2}+2a_4\frac{d}{da_3}+\ldots\right)\mathrm{D}+a_0^2\psi+\ldots$$

Można tak samo oznaczyć ψ za pomocą spółczynnika a_1; lecz wypadek nie jest dosyć prostym ażeby go można było tu przedstawić.

94. Jeżeli dyskryminant jakiegokolwiek kształtu podwójnego sprowadza się do zera, ten kształt ma dwa pierwiastki równe, i wartości tych pierwiastków mogą być otrzymane przez sposób odpowiedny temu, jakiegośmy użyli w VI rozdziale. Niech będzie

$$\mathrm{U}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots$$

jakimkolwiek kształtem którego dyskryminant jest zerem i który przyjmuje przeto jakikolwiek czynnik kwadratowy $(x-\alpha)^2$. Funkcya

$$\mathrm{V}=\mathrm{A}_0x^n+\mathrm{A}_1x^{n-1}+\mathrm{A}_2x^{n-2}+\ldots$$

będzie także podzielną przez $x-\alpha$, byleby tylko $A_0, A_1, A_2, ..$ zadosyć czyniły warunkowi

$$A_0\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + A_2\alpha^{n-2} + ... = 0.$$

I w tym przypadku $U+\lambda V$ będzie podzielném przez $x-\alpha$. Niech więc będzie

$$U + \lambda V = (x-\alpha)\left[(x-\alpha)\varphi(x) + \lambda\psi(x)\right].$$

Wynika z n^ru 91 że dyskryminant $U+\lambda V$ jest równy dyskryminantowi funkcyi między nawiasami, pomnożonemu przez kwadrat z wypadku jaki się otrzymuje podstawiając α na miejsce x w téjże saméj funkcyi. Ten wypadek jest nie innym jak $\lambda\psi(\alpha)$. Dyskryminant $U+\lambda V$ jest więc podzielnym, w tym przypadku, przez λ^2. Lecz, ponieważ $U+\lambda V$ wywodzi się z U zmieniając a_0 na $a^0+\lambda A_0, ...$, dyskryminant $U+\lambda V$ powinien się wywieść z dyskryminanta U przez toż same podstawienie, a tém samém, jest

$$\Delta + \lambda\left(A_0\frac{d\Delta}{da_0} + A_1\frac{d\Delta}{da_1} + A_2\frac{d\Delta}{da_2} + ...\right) + \lambda^2(...).$$

Przez założenie $\Delta = 0$: potrzeba jeszcze, aby dyskryminant był podzielnym przez λ^2, żeby spółczynnik λ zniknął. Związek tym sposobem otrzymany powinien być identycznym ze związkiem $A_0\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + ... = 0$, który jest, jak to już widzieliśmy, jedynym warunkiem któremu powinny zadosyć czynić $A_0, A_1, ...$ ażeby dyskryminant $U+\lambda V$ był podzielny przez λ^2. Ilości $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, ...$ są więc proporcyonalnemi do $\frac{d\Delta}{da_0}, \frac{d\Delta}{da_1}, \frac{d\Delta}{da_2} ...,$ dzieląc jedną z tych ostatnich przez ilość która po niéj następuje, otrzymamy wartość na α; tak więc możemy uważać za dowiedzione twierdzenie następujące:

kiedy dyskryminant sprowadza się do zera, jego pochodne względem a_0, a_1,... *są proporcyonalnemi do pochodnych kształtu względem tychże samych spółczynników.*

95. Ten wypadek dowiedzie się również tworząc wartości na $\frac{d\Delta}{da_0}$,.... w funkcyi pierwiastków, co się daje wykonać rozwiązując n zrównań

$$\frac{d\Delta}{d\alpha} = \frac{d\Delta}{da_1}\frac{da_1}{d\alpha} + \frac{d\Delta}{da_2}\frac{da_2}{d\alpha} + \dots$$

Znamy wyrażenia na Δ, a_1, a_2,... w funkcyi pierwiastków (42, 90); możemy więc wyciągnąć z tych n zrównań, n ilości $\frac{d\Delta}{da_1}$,... ; tak działając przyjdzie,

$$\frac{d\Delta}{da} = \Sigma(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\beta)^2\dots,$$

$$\times[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\dots, + (\alpha-\beta)(\alpha-\delta)\dots, + \dots,],$$

wyrażenie, w którem wieloczyn kwadratów z różnic niezawierających α jest pomnożony przez summę wieloczynów wziętych po $n-2$ z różnic zawierających α,

$$\frac{d\Delta}{da_{n-1}} = \Sigma\alpha(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\beta)^2\dots, [(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\dots],$$

$$\frac{d\Delta}{da_{n-2}} = \Sigma\alpha^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\beta)^2\dots, [(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\dots].$$

Przez przypuszczenie $\alpha=\beta$, te wyrażenia stają się proporcyonalne czynnikom 1, α, α^2, α^3, ..., i, jak w n[rze] 56, widzimy że, podług twierdzenia numeru poprzedzającego,

$$\frac{d\Delta}{da_p}\frac{d\Delta}{da_q} = \frac{d\Delta}{da_r}\frac{d\Delta}{da_s}$$

jest podzielném przez Δ gdy $p+q=r+s$. Jeżeli się znajduje więcéj jak dwa pierwiastki równe, wszystkie te pochodne znikną, i otrzymamy pierwiastki równe uważając pochodne drugie dyskryminanta.

96. Dowodzenie następujące twierdzenia n^ru 94 stosuje się do przypadku jakiegokolwiekbądź kształtu o liczbie ilukolwiek zmiennych. Dla większéj prostoty, ograniczymy się na przypadku dwóch zmiennych niezależnych, metoda jest ogólną. Przypuśćmy że spółczynniki U są funkcyami pewnych ilości $a, b, \dots$, i że można zmienić te ilości tak ażeby dyskryminant był jeszcze zerem, co daje warunek

$$\frac{d\Delta}{da}\delta a+\frac{d\Delta}{db}\delta b+\dots=0.$$

Jeżeli zmiana wykonana na $a, b, \dots$ zmienia x na $x+\delta x$, y na $y+\delta y, \dots$, nowe wartości pierwiastków powinny zarówno zrobić zerami pochodne U_1, U_2, U_3, mamy więc :

$$\frac{dU_1}{da}\delta a+\frac{dU_1}{db}\delta b+\dots+\frac{dU_1}{dx}\delta x+\frac{dU_1}{dy}\delta y+\dots=0,$$

$$\frac{dU_2}{da}\delta a+\frac{dU_2}{db}\delta b+\dots+\frac{dU_2}{dx}\delta x+\frac{dU_2}{dy}\delta y+\dots=0,$$

$$\frac{dU_3}{da}\delta a+\frac{dU_3}{db}\delta b+\dots+\frac{dU_3}{dx}\delta x+\frac{dU_3}{dy}\delta y+\dots=0.$$

Mnóżmy te zrównania przez x, y, z, i dodajmy; ponieważ mamy $nU=xU_1+yU_2+zU_3$, spółczynnik δa sprowadzi się do $n\dfrac{dU}{da}$, a ponieważ $\dfrac{dU_2}{dx}=\dfrac{dU_1}{dy}$, $\dfrac{dU_3}{dx}=\dfrac{dU_1}{dz}$, spółczynnik δx będzie $(n-1)U_1$, ten zaś znika, ponieważ U_1

przyjmuje pierwiastki szczególne. Dzieje się podobnież z innemi spółczynnikami; mamy więc

$$\frac{dU}{da}\delta a + \frac{dU}{db}\delta b + \ldots = 0,$$

i pochodne Δ względem $a, b, \ldots$ są przporcyonalnemi do pochodnych U względem tychże samych ilości, przypuszczając że litery $x, y, z,$ w tych ostatnich, oznaczają pierwiastki szczególne.

97. Twierdzenie dowiedzione dla kształtów podwójnych (92), może się rozciągnąć do wszystkich kształtów. Niech będzie a spółczynnikiem najwyższéj potęgi jednéj ze zmiennych; $b, c, d, \ldots$ spółczynnikami wyrazów gdzie figuruje potęga bezpośrednio niższa; dyskryminant będzie

$$a\theta + (\varphi, \psi, \chi, \ldots)(b, c, d, \ldots)^2.$$

I tak, w przypadku jakiegokolwiek bądź kształtu potrójnego, na którym ograniczymy się dla większéj prostoty, jeżeli a jest spółczynnikiem z^n, b, c spółczynnikami $z^{n-1}x$, $z^{n-2}y$, i jeżeli zrobimy $a = 0$ w dyskryminancie, reszta z jego wyrażenia będzie kształtu

$$b^2\varphi + bc\psi + c^2\chi.$$

Dla dowiedzenia tego, niech będzie U jakikolwiek kształt którego dyskryminant jest zerem, V jakakolwiek inna funkcya przyjmująca pierwiastki szczególne kształtu U, dyskryminant $U + \lambda V$ będzie podzielnym przez λ^2. Niech będą, w rzeczy saméj,

$$U = az^n + bz^{n-1} + \ldots, \quad V = Az^n + Bz^{n-1} + \ldots,$$

spółczynnik λ w dyskryminancie $U + \lambda V$ będzie

$$A\frac{d\Delta}{da} + B\frac{d\Delta}{db} + \ldots,$$

i, podług n^ru 96, $\frac{d\Delta}{da}$, $\frac{d\Delta}{db}$,... będą proporcyonalnemi do z^n, $z^{n-1}x$,... Spółczynnik λ jest więc proporcyonalnym do wypadku z podstawienia pierwiastków szczególnych kształtu U w funkcyą V, a tém samém, zerem.

Teraz, w przypadku który nas zajmuje, dyskryminant musi być zerem jeżeli a, b i c są zerami, ponieważ wtedy wszystkie pochodne zniszczą się dla pierwiastków szczególnych $x=0$, $y=0$. Wszelki inny kształt V zniszczy się dla tychże samych wartości, byle tylko było $\Delta = 0$. Kształt ogólny dyskryminanta powinien więc być takim aby po zastąpieniu b przez $b+\lambda B$, c przez $c + \lambda C$, ..., i zrobieniu potém

$$a = b = c = 0,$$

wypadek był podzielonym przez λ^2; innemi słowy, jeżeli zastąpimy b przez λB, c przez λC i a przez zero, wypadek będzie podzielnym przez λ^2; co było do dowodzenia.

98. Pozostaje nam jeszcze, względem dyskryminantów w ogólności, pokazać że dyskryminant jakiegokolwiek bądź kształtu poczwórnego o liczbie ilukolwiek zmiennych wyraża się bezpośrednio pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika symetrycznego. I odwrotnie, mając dany wyznacznik symetryczny jakikolwiek, można oznaczyć kształt poczwórny którego ten wyznacznik jest dyskryminantem. Znakowanie najprostsze dla jakiegokolwiek kształtu poczwórnego zależy na użyciu podwójnych wskaźników, oznaczając przez a_{11}, a_{22}, a_{33},.. spółczynniki kwadratów x^2, y^2, z^2, ..., a przez a_{12}, a_{13}, ..., spół-

czynniki wieloczynów $xy, xz, \ldots$; a_{12} i a_{21}, są uważane za równoważne w tym układzie znakowania. Dyskryminant jest oczywiście wyznacznikiem symetrycznym

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ROZDZIAŁ X

PRZEKSZTAŁCENIA LINIJNE.

---

99. Niezmienniki. — Dyskryminant jakiéjkolwiek formy podwójnéj, jako będący jakąkolwiek bądź funkcyą różnic pierwiastków, nie zmieni się oczywiście gdy te różnice powiększymy lub zmniejszymy wszystkie o tę samą ilość. Podstawienie $x + \lambda$ za x jest tylko przypadkiem szczególnym *przekształcenia linijnego* ogólnego, które zależy na zastąpieniu, w jakiéjkolwiek bądź funkcyi jednorodnéj, każdéj zmiennéj przez jakąkolwiek funkcyą linijną nowych zmiennych; na zastąpieniu, na przykład, w jakiéjkolwiek formie podwójnéj, x przez $\lambda x + \mu y$, a y przez $\lambda' x + \mu' y$.

Na wyjaśnienie uwag w które wejść winniśmy, rozbierzemy naprzód jaki jest skutek podobnego podstawienia na dyskryminancie jakiejkolwiek formy kwadratowéj o dwóch zmiennych

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Przekształcając zmienne, ta forma staje się

$$a(\lambda x + \mu y)^2 + 2b(\lambda x + \mu y)(\lambda' x + \mu' y) + c(\lambda' x + \mu' y)^2,$$

a jeżeli oznaczymy funkcyą przekształconą przez

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,$$

będzie

$$a' = a\lambda^2 + 2b\lambda\lambda' + c\lambda'^2,$$

$$b' = a\lambda\mu + b(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + c\mu\mu',$$

$$c' = a\mu^2 + 2b\mu\mu' + c\mu'^2,$$

i sprawdza się bez trudności że

$$(a'c' - b'^2) = (ac - b^2)(\lambda\mu' + \lambda'\mu)^2,$$

to jest że dyskryminant przekształconéj jest równy dyskryminantowi formy pierwotnéj pomnożonemu przez kwadrat z wyznacznika $(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$, jaki się zowie *modułem przekształcenia.*

100. Istnieje twierdzenie podobne dla dyskryminanta formy podwójnéj jakiejkolwiek. Można wiedzieć *a priori* że tak się dziać powinno, gdyż jeżeli jakakolwiek forma dana przyjmuje jakikolwiek czynnik kwadratowy, jéj przekształcona przyjmie zarówno jakikolwiek czynnik kwadratowy, tak dalece że, jeżeli dyskryminant jakiejkolwiek formy danéj jest zerem, dyskryminant jéj przekształconéj jest zarówno zerem. Ten ostatni zawiera więc pierwszy jako czynnik. Twierdzenie to może się ściśle dowieść w sposób następujący. Niech będzie

$$(xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)\ldots$$

forma pierwotna, jéj dyskryminant (90) jest

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2(x_1y_3 - y_1x_3)^2\ldots$$

Czynnik linijny $xy_1 - yx_1$ formy pierwotnéj staje się, przez przekształcenie,

$$y_1(\lambda X + \mu Y) - x_1(\lambda' X + \mu' Y),$$

a jeżeli położymy go pod kształtem $Y_1X - X_1Y$, mamy

$$Y_1 = \lambda y_1 - \lambda' x_1, \qquad X_1 = -\mu y_1 + \mu' x_1;$$

przeto, jeżeli się napisze przekształconą jako wieloczyn z czynników linijnych $(Y_1X - X_1Y)(Y_2X - X_2Y)$..., będzie się miało wyrażenie podobne dla Y_1, X_1; Y_2, X_2,... w funkcyi y_1, x_1; y_2. x_2,... Możemy, bez trudności, rozpoznać że znajduje się

$$(Y_1X_2 - X_1Y_2) = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)(y_1x_2 - x_1y_2),$$

a, tém samém, że wyrażenie $(Y_1X_2 - X_1Y_2)^2(Y_1X_3 - X_1Y_3)^2$..., jest równe wyrażeniu $(y_1x_2 - x_1y_2)^2(y_1x_3 - x_1y_3)^2$... pomnożonemu przez potęgę czynnika $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ równą liczbie czynników zawartych w wyrażeniu dyskryminanta w funkcyi pierwiastków. Twierdzenie podobne jest prawdziwem dla dyskryminanta jakiegokolwiek bądź kształtu o liczbie ilukolwiek zmiennych.

Ogłoszenie, w *Dzienniku matematycznym* Kembrydzkim (Cambridge, listopad 1841), pamiętnika w którym P. Bool przedstawił zasady powyższe i zrobił z nich ważne zastosowania, było poniekąd stanowiskiem z którego utworzyła się algebra nowa. P. Cayley założył sobie oznaczyć *a priori* jakie są funkcye spółczynników jakiegokolwiek zrównania danego posiadające tę własność *niezmienności;* własność zależącą na tem że, jeżeli się przekształci zrównanie przez jakiekolwiek podstawienie linijne, funkcya podobna spółczynników w zrównaniu przekształconém jest równą funkcyi pierwotnéj pomnożonéj przez jakąkolwiek ilość niezależną od spółczynników. Wypadkiem jego poszukiwań było odkrycie, że ta własność nie jest szczególną dla dyskryminantów, i poznanie innych funkcyj ważnych posiadających ją zarówno; niektóre z nich zawierają nie tylko spółczynniki, lecz i zmienne same, zachowując ze zrównaniem pierwotném związki których podstawienie jakiekolwiek linijne nie zmienia wcale. Przy wykładzie téj teoryi, dla większéj zwięzłości będziemy brali trzy tylko zmienne, lecz czytelnik powinien rozumieć że te same sposoby stosują się do ilukolwiek zmiennych.

101. Przypuśćmy więc że zmienne funkcyi jednorodnéj jakiéjkolwiek o k zmiennych zostały przekształcone przez podstawienia

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z + \dots,$$

$$y = \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z + \dots,$$

$$z = \lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z + \dots,$$

i oznaczmy przez Δ *moduł przekształcenia*, to jest wyznacznik mający za elementa spółczynniki przekształcenia $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \dots, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \dots$

Oczywiście że jest niepodobna, w ogólności, oznaczyć spółczynniki $\lambda_1, \mu_1, \dots$ w ten sposób aby jakakolwiek funkcya dana $ax^n + \dots$ przybierała, przez przekształcenie, inną jakąkolwiek formę równie daną $a'X^n + \dots$ W rzeczy saméj, jeżeli wykonamy podstawienie w $ax^n + \dots$ i jeżeli zrównamy spółczynniki tym sposobem otrzymane ze spółczynnikami $a'X^n + \dots$, będziemy mieli jak w numerze 99, szereg zrównań $a' = a\lambda_1^n + \dots$ których liczba będzie równą liczbie wyrazów jakie zamyka jakakolwiek funkcya ogólna n[tego] stopnia o k zmiennych. Lecz, dla zadosyć uczynienia tym zrównaniom, mamy tylko do rozporządzenia liczbą k^2 stałych $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, i ta liczba będzie, ogólnie, niższą od liczby zrównań którym należy zadosyć uczynić (*). Wypada z tego że, jeżeli jakakol-

(*) Liiczbą wyrazów kształtu ogólnego n^{tego} stopnia o k zmiennych jest wiek funkcya $ax^n + \ldots$ może być przekształcona na inną jakąkolwiek funkcyą $a'X^n + \ldots$, powinny istnieć związki między spółczynnikami $a, b, \ldots, a', b', \ldots$ W rzeczy saméj, potrzebujemy tylko wyrugować liczbę k^2 stałych nieznanych między zrównaniami $a' = a\lambda_1{}^n + \ldots$, i otrzymamy jakikolwiek szareg związków między $a, a', \ldots$, których liczba będzie oczywiście równą różnicy znajdującéj się między liczbą zrównań a k^2. I tak, w przypadku jakiéjkolwiek formy podwójnéj, liczbą wyrazów jakiéjkolwiek funkcyi jednorodnéj stopnia n jest $n + 1$. Więc, jeżeli w jakiéjkolwiek formie $ax^n + \ldots$ zastąpimy x przez $\lambda_1 X + \mu_1 Y$, y przez $\lambda_2 X + \mu_2 Y$, i jeżeli zrównamy spółczynniki przekształconéj ze spółczynnikami $a'X^n + \ldots$, będziemy mieli $n + 1$ zrównań zamykających $a, a', \ldots, \lambda_1, \mu_1, \ldots$, i rugując cztery ilości $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, otrzymamy pewien układ warunków równoważnych dla $n - 3$ związków niezależnych między $a, b, \ldots, a', b', \ldots$ Zobaczymy późniéj że te związki mogą się napisać tym sposobem :

$$\varphi(a, b, \ldots) = \varphi(a', b', \ldots);$$

innemi słowy, że znajduje się funkcya spółczynników $a, b, \ldots$ zachowujących tę samą wartość przy przejściu z formy

---

$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1.2.3\ldots(k-1)}$, a łatwo spostrzedz że jedynemi przypadkami w których ta liczba nie przewyższa k^2 są : 1° gdy $n = 2$ (w tym przypadku, liczba ta sprowadza się do $\frac{1}{2}k(k+1)$, wartość mniejsza jak k^2, gdyż k jest całkowitém) ; 2° gdy $k = 2$, $n = 3$, (dwie liczby mają wtedy tę samą wartość 4) ; to jest że jedyne przypadki w których jakakolwiek funkcya dana jest zdolną przybrać przez przekształcenie kształt jakikolwiek, są : 1° przypadek kształtu kwadratowego o liczbie ilukolwiek zmiennych, 2° przypadek kształtu sześciennego o dwóch zmiennych.

pierwotnéj do jéj przekształconéj. Sposób jaki wskazaliśmy nie jest ten jakiego użyjemy dla znalezienia tych funkcyj lecz daje on zrozumieć *a priori* ich istnienie, i pokazuje kiedy należy rachować na znalezienie tych funkcyj które są niezależne jedne od drugich.

102. Nazywa się *niezmiennikiem* wszelka funkcya spółczynników jakiéjkolwiek formy takiéj że, jeżeli się wykona na kształcie jakiéjkolwiek podstawienie linijne, funkcya podobna spółczynników przekształconéj jest równą funkcyi pierwotnéj pomnożonéj przez jakąkolwiek potęgę modułu przekształcenia, to jest że mamy

$$\varphi(a', b', c', \ldots) = \Delta\, \varphi(a, b, c, \ldots).$$

Gdy $p = 0$, funkcya jest jakimkolwiek *niezmiennikiem bezwzględnym*, to jest nie zmienia się przez przekształcenie, wtedy, nawet gdy Δ jest różném od jedności. Jeżeli jakikolwiek kształt ma dwa niezmienniki zwyczajne, jest łatwo wyprowadzić z nich jakikolwiek niezmiennik bezwzględny. W rzeczy saméj, jeżeli mamy jakikolwiek niezmiennik φ który, w przekształceniu, znajduje się pomnożony przez Δ^p, i inny jakikolwiek niezmiennik ψ który znajduje się także pomnożony przez Δ, jest rzeczą oczywistą że iloraz z podzielenia ilości φ^q przez ψ^p będzie jakąkolwiek funkcyą która pozostanie niezmienną pomimo przekształcenia.

Wynika z tego co poprzedza, że jakikolwiek kształt podwójny kwadratowy albo sześcienny nie ma innego niezmiennika tylko swój własny dyskryminant (100). Gdyż, gdyby był inny jakikolwiek, możnaby było wyprowadzić z połączenia dwóch niezmienników jakikolwiek związek

$$\varphi(a, b, \ldots) = \varphi(a', b', \ldots).$$

Lecz widzieliśmy (101) że nie można wtedy otrzymać zrównania warunkowego między $a, b, \ldots, a', b', \ldots$, ponieważ za pomocą czterech stałych $\lambda_1, \ldots$ któremi rozporządzamy, możemy przekształcić jakąkolwiek funkcyą kwadratową albo sześcienną w ten sposób że spółczynniki przyjmą wartości, jakie się tylko podoba. Zobaczymy, tymże samym sposobem, że jakikolwiek kształt kwadratowy o ilukolwiek zmiennych nie ma innego niezmiennika tylko swój własny dyskryminant.

103. Tak samo jak jakikolwiek kształt jedyny, tak i jakikolwiek układ kształtów może mieć niezmienniki. Przypuśćmy pewną liczbę funkcyj $ax^n + \ldots$, $a'x^n + \ldots$ Jeżeli się wykona we wszystkich toż samo podstawienie linijne, to funkcye te staną się $AX^n + \ldots$ $A'X^n + \ldots$: jakakolwiek funkcya spółczynników będzie jakimkolwiek niezmiennikiem jeżeli funkcya podobna, złożona z nowych spółczynników, jest równą funkcyi pierwotnéj pomnożonéj przez jakąkolwiek potęgę modułu przekształcenia, to jest jeżeli mamy

$$\varphi(A, B, \ldots, A', B', \ldots, A'', B'', \ldots)$$
$$= \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, a', b', \ldots, a'', b'', \ldots).$$

Przykład najprostszy niezmienników tego rodzaju napotyka się w przypadku jakiegokolwiek układu zrównań linijnych : wyznacznik podobnego układu jest niezmiennikiem; widzimy to bezpośrednio odnosząc się do definicyi niezmiennika i do dowodzenia twierdzenia na mnożenie wyznaczników (23).

Jeżeli mamy niezmiennik jakiegokolwiek kształtu jedynego, można z niego wyprowadzić jakikolwiek szereg niezmienników dla układów kształtów tegoż samego stopnia. Aby dać poznać ducha metody zastosujemy ją naprzód do przykładu bardzo prostego. Widzieliśmy (99) że $ac - b^2$ jest niezmiennikiem kształtu kwadratowego $ax^2 + 2bxy + cy^2$; wyprowadzimy z niego jakikolwiek niezmiennik dla jakiegokolwiek układu dwóch kształtów podobnych. Przypuśćmy że, przez jakiekolwiek przekształcenie linijne, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ staje się $AX^2 + 2BXY + CY^2$, i że $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ staje się podobnież $A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2$, oczywiście, przez toż same przekształcenie, kształt

$$(a + ka')x^2 + 2(b + kb')xy + (c + kc')y^2$$

(k jest stałą jakąkolwiek) stanie się

$$(A + kA')X^2 + 2(B + kB')XY + (C + kC')Y^2.$$

Tworząc niezmiennik tego ostatniego (99), przyjdzie

$$(A + kA')(C + kC') - (B + kB')^2$$
$$= \Delta^2[(a + ka')(c + kc') - (b + kb')^2].$$

Lecz k jest dowolném, a spółczynniki różnych potęg k powinny być równemi po obu stronach, mamy przeto tym sposobem, nietylko dwa związki już znane,

$$(AC - B^2) = \Delta^2(ac - b^2), \quad (A'C' - B'^2) = \Delta^2(a'c' - b'^2),$$

lecz jeszcze

$$(AC' + A'C - 2BB') = \Delta^2(ac' + a'c - 2bb'),$$

zrównanie jakie można także sprawdzić za pomocą wartości A, B,... danych w numerze 99. Ilość $ac' + a'c - 2bb'$ jest więc również niezmiennikiem.

Idąc zupełnie tą samą drogą, jeżeli mamy niezmiennik jakiegokolwiek kształtu $ax^n + \ldots$ i żądamy wyprowadzić z niego niezmienniki dla jakiegokolwiek układu dwóch kształtów

$ax^n + \ldots$, $a'x^n + \ldots$, to zastąpimy tylko w niezmienniku danym, a przez $a + ka'$, b przez $b + kb' \ldots$. a spółczynnik każdéj potęgi k w rozwiązaniu będzie niezmiennikiem. Wykonywając to rozwinięcie za pomocą wzoru Taylora, twierdzenie do którego już byliśmy przywiedzeni może się wysłowić tym sposobem : Jeżeli mamy niezmiennik jakiegokolwiek bądź kształtu $ax^n + \ldots$, i jeżeli wykonamy na tym niezmienniku działanie $a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + \ldots$, otrzymamy jakikolwiek niezmiennik układu dwóch kształtów $ax^n + \ldots$, $a'x^n + \ldots$ Można powtórzyć toż samo działanie, i będziemy mieli inny jakikolwiek niezmiennik układu, lub też jeszcze można wykonać działanie $a'' \frac{d}{da} + b'' \frac{d}{db} + \ldots$, co da niezmiennik jakiegokolwiek układu trzech kształtów, i tak daléj. Ten ostatni sposób daje niezmienniki jakie się otrzymuje zastępując a przez $a + ka' + la''$ i biorąc spółczynniki różnych potęg k i l. Otrzymamy tak samo niezmienniki dla liczby ilukolwiek kształtów.

104. *Spółzmienniki.* — Jakikolwiek spółzmiennik jest jakąkolwiek bądź funkcyą obejmującą nie tylko spółczynniki, lecz także zmienne jakiegokolwiek kształtu; i taką że, jeżeli wykonamy w kształcie jakiekolwiek podstawienie linijne, nowa funkcya spółczynnikow i zmiennych w przekształconym kształcie jest równą funkcyi pierwotnéj pomnożonéj przez jakąkolwiek potęgę modułu przekształcenia, to jest że jeżeli wyrażenie $ax^n + \ldots$ staje się, przez przekształcenie, $AX^n + \ldots$ niezmiennik (*) musi zadosyć uczynić zrównaniu

$$\varphi(A, B, \ldots, X, Y, \ldots) = \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, x, y, \ldots).$$

(*) W geometryi linij krzywych i powierzchni, wszelkie przekształcenia spółrzędnych odbywają się przez podstawienia linijne. Niezmiennik jakiegokolwiek kształtu potrójnego lub poczwórnego jest więc jakąkolwiek funkcyą spółczynników, któréj sprowadzenie do zera wyraża jakąkolwiek

Wszelki niezmiennik jakiegokolwiek spółzmiennika jest jakimkolwiek niezmiennikiem kształtu pierwotnego. To wynika bezpośrednio z definicyi. Niech będą $ax^n + \ldots$ kształt dany, $a'x^n + \ldots$ jego spółzmiennik, $AX^n + \ldots$, $A'X^n + \ldots$ to czem się stają te funkcye przez jakiekolwiek podsjawienie linijne. Niezmiennik spółzmiennika jest jakąkolwiek bądź funkcyą swych spółczynników, taką że

$$\varphi(A', B', \ldots) = \Delta^p \varphi(a', b', \ldots).$$

Lecz, przez definicyą, A', B',... są mniéj niż o jakąkolwiek potęgę modułu złożone z $A, B, \ldots$; tak samo jak $a'. b', \ldots$ złożonemi są z $a, b, \ldots$ Przeto, jeżeli wyrazimy te funkcye za pomocą spółczynników formy pierwotnéj i jéj przekształconéj, będziemy mieli

$$\psi(A, B, \ldots) = \Delta^p \psi(a, b, \ldots),$$

to jest że funkcya ψ jest jakimkolwiek niezmiennikiem. Tak samo wszelki spółzmiennik jakiegokolwiek spółzmiennika jest jakimkolwiek spółzmiennikiem kształtu pierwotnego.

105. Położymy, w dwóch numerach następujących, nowe zasady prowadzące do ważnego szeregu spółzmienników.

Jeżeli, w jakimkolwiek kształcie u, zastąpimy x przez $x + kx'$, y przez $y + ky'$, i t. d., ponieważ x', y', z', powinny być przekształcone przez toż same podstawienie jak x, y, z,

---

własność krzywéj lub powierzchni niezależnéj od wyboru osi, taką jest istnienie punktu podwójnego; spółzmiennik przedstawia jakąkolwiek inną krzywą lub jakąkolwiek inną powierzchnią, któréj wszystkie punkta mają z krzywą lub powierzchnią daną jakikolwiek związek niezależny od wyboru osi. Ztąd wynika ważność geometryczna teoryi niezmienników i spółzmienników.

więc spółczvnniki różnych potęg k, które są wszystkie kształtu $\left(x'\frac{d}{dx}+y'\frac{d}{dy}+\ldots\right)^p u$, będą pierwszemi, drugiemi, trzeciemi, i t. d., *emanantami* (*émanants*) (*) t. j. wypływami i pewnego rodzaju pochodnemi kształtu. Każdy z nich jest jakimkolwiek spółzmiennikiem. Otrzymamy, w rzeczy saméj, tenże sam wypadek, bądź to zastępując x przez $x+kx'$ ... i przekształcając potem x, x', ... przez podstawienia linijne, bądź to wykonywając naprzód to podstawienie i zastępując potem X przez $X+kX'$, ... Gdyż mamy oczywiście

$$\begin{aligned}\lambda_1 X+\mu_1 Y+\nu_1 Z+k(\lambda_1 X'+\mu_1 Y'+\nu_1 Z')\\ =\lambda_1(X+kX')+\mu_1(Y+kY')+\nu_1(Z+kZ').\end{aligned}$$

Więc, jeżeli przez przekształcenie u staje się U, znajdziemy tenże sam wypadek bądź to zastępując w u, x przez $x+kx'$... i wykonywając potem podstawienia, bądź to zastępując w U, X przez $X+kX'$ ..., a ponieważ k jest nieoznaczonem, spółczynniki k będą równemi po obu stronach, co prowadzi wprost do związku

$$x'\frac{du}{dx}+y'\frac{du}{dy}+\ldots=X'\frac{dU}{dX}+Y'\frac{dU}{dY}+\ldots$$

106. Jeżeli się weźmie pod rozwagę emanant dając że jest funkcyą samych zmiennych x', y',..., uważając na chwilę x, y,... jako stałe, i jeśli się obliczy jego niezmienniki w tém założeniu, każdy z nich, uważany jako funkcya zmiennych x, y,..., będzie spółzmiennikiem kształtu pierwotnego.

(*) W geometryi, emananty przedstawiają krzywe i powierzchnie biegunowe jakiegokolwiek punktu względem jakiéj krzywéj lub powierzchni danéj.

Widzieliśmy że emanant $x'^p \frac{d^p u}{dx^p} + \ldots$ staje się $X'^p \frac{d^p U}{dX^p} + \ldots$ kiedy się zastąpi x' przez $\lambda_1 X' + \mu_1 Y' + \ldots$ a x przez $\lambda_1 X + \mu_1 Y + \ldots$ Jest oczywiście obojętném czy dwa podstawienia są jednoczesne lub po sobie następujące. Więc, jeżeli przekształcając x', y',... same, wyrażenie $x'^p \frac{d^p u}{dx^p} + \ldots$ staje się $aX'^p + \ldots$, spółczynniki a,... będą funkcyami x, y,... które, gdy się przekształci x, y,..., staną się $\frac{d^p U}{dX^p}$,... Lecz niezmiennik emananta danego, uważany jako funkcya x', y',..., jest z definicyi funkcyą jakąkolwiek swych spółczynników, różniącą się od funkcyi odpowiedniéj spółczynników przekształconych a,... tylko potęgą jakąkolwiek modułu. Ponieważ, tak jak to widzieliśmy, spółczynniki a,... stają się $\frac{d^p U}{dX^p}$,... kiedy się przekształci x, y,..., niezmiennik dany będzie jakąkolwiek funkcyą $\frac{d^p u}{dx^p}$,..., który, gdy się przekształci x, y,..., będzie się różnił tylko jakąkolwiek potęgą modułu funkcyi odpowiedniéj $\frac{d^p U}{dX^p}$,... Ten będzie więc właśnie jakimkolwiek spółzmiennikiem kształtu pierwotnego.

I tak, na przykład, było już dowiedzioném (99) że, jeżeli kształt podwójny $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ma za swój przekształcony

$$AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

znajduje się

$$(AC - B^2) = \Delta^2(ac - b^2);$$

wynika ztąd że uważając drugi emanant

$$\left(x'\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy}\right)^2 u$$

kształtu i stopnia jakiegokolwiek, ma się także

$$\frac{d^2U}{dX^2}\frac{d^2U}{dY^2}-\left(\frac{d^2U}{dXdY}\right)^2=\Delta^2\left[\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2\right],$$

twierdzenie którego podamy jeszcze inne dowodzenia.

107. W ogólności, jeżeli się weźmie drugi emanant jakiegokolwiek kształtu o liczbie ilukolwiek zmiennych i jeśli się obliczy jego dyskryminant, otrzyma się spółzmiennik nazwany funkcyą Hess'ego, albo wyznacznikiem Hess'ego, albo po prostu Hess'owym (*Hessian*).

Zauważyliśmy (98) że dyskryminant wszelkiéj funkcyi kwadratowéj może się napisać pod kształtem wyznacznika. I tak, używając, jak to już zrobiliśmy gdzieindziéj, wskaźników 1, 2,... na oznaczenie różniczkowania względem $x, y,\ldots$, w ten sposób że u_{11} przedstawia $\frac{d^2u}{dx^2}$, emanant drugiego stopnia będzie $u_{12}x'^2+2u_{12}x'y'+\ldots$, a jego dyskryminant napisze się

$$H=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13}\ldots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23}\ldots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

108. Widzieliśmy (103) że wyznacznik jakiegokolwiek układu zrównań linijnych jest jakimkolwiek niezmiennikiem układu. Jeżeli więc, mając kształty u, v, w,..., utworzy się ich pierwsze emananty $x'u_1+y'u_2+z'u_3+\ldots$, wyznacznik

$$J=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\ldots \\ v_1 & v_2 & v_3\ldots \\ w_1 & w_2 & w_3\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

będzie jakimkolwiek spółzmiennikiem. Jest to właśnie wyznacznik *Jakobiego* wzmiankowany już powyżéj (69): wyznacznik *Hessego* jest nie innym jak funkcyą J obliczoną dla układu pochodnych u_1, u_2, u_3,... tegoż samego kształtu.

109. Przeciwzmienniki. — Jeżeli się przekształci linijnie jakąkolwiek grupę zmiennych x, y,..., zdarza się często że inne zmienne związane ze zmiennemi x, y,... są także przekształcone linijnie, lecz za pomocą jakiegokolwiek podstawienia innego. Jeżeli, jak powyżéj, zrównania wiążące x, y, z, nowemi zmiennemi są

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z, \qquad y = \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z,$$

$$z = \lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z,$$

wtedy to jakiekolwiek zmienne ξ, η, ζ są nazwane przekształconemi przez podstawienie *odwrotne*, jeżeli nowe zmienne X_1, Y_1, Z_1 wyrażają się w funkcyi dawnych przez zrównania

$$X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta, \qquad Y_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta,$$

$$Z_1 = \nu_1 \xi + \nu_2 \eta + \nu_3 \zeta;$$

w których spółczynniki są elementami wyznacznika $(\lambda_1 \mu_2 \nu_3)$ czytanemi pionowo, podczas gdy w podstawieniu *wprost* były one czytanemi poziomo: w pierwszém podstawieniu, dawne zmienne są wyrażone w funkcyi nowych, a w drugiem, nowe w funkcyi dawnych. Tak ustalony, związek jest widocznie odwrotnym. Wyciągając w rzeczy saméj wartości ξ, η, ζ z funkcyi X_1, Y_1, Z_1, przyjdzie (28)

$$\Delta\xi = L_1 X_1 + M_1 Y_1 + N_1 Z_1, \qquad \Delta\eta = L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1,$$

$$\Delta\zeta = L_3 X_1 + M_3 Y_1 + N_3 Z_1,$$

L_1, M_1,... są wyznacznikami mniejszemi wyprowadzonemi z $(\lambda_1\mu_2\nu_3)$ przez zniesienie linii i kolumny zawierających λ_1 albo μ_1,...

Jeżeli dwie grupy zmiennych x, y, z; ξ, η, ζ będą przekształcone, jak powyżéj, przez podstawienia odwrotne, jedną z nich będziemy oznaczać nadal przez litery greckie, a zwyczajnie przez litery α, β, γ. Wyłożymy naprzód dwa przypadki najważniejsze w których się używa podstawienia odwrotnego.

110. Kiedy się przekształci linijnie jakąkolwiek funkcyą x, y, z na inną funkcyą X, Y, Z, pochodne względem nowych zmiennych wyrażają się linijnie za pomocą pochodnych względem dawnych, lecz przez podstawienie odwrotne. Ma się, w rzeczy saméj,

$$\frac{d}{dX}=\frac{d}{dx}\frac{dx}{dX}+\frac{d}{dy}\frac{dy}{dX}+\frac{d}{dz}\frac{dz}{dX}+\ldots$$

Lecz, z wyrażeń x, y, w funkcyi X, Y,..., wyciąga się

$$\frac{dx}{dX}=\lambda_1,\quad \frac{dy}{dX}=\lambda_2,\quad \frac{dz}{dX}=\lambda_3,$$

zkąd

$$\frac{d}{dX}=\lambda_1\frac{d}{dx}+\lambda_2\frac{d}{dy}+\lambda_3\frac{d}{dz}+\ \ .;$$

podobnież

$$\frac{d}{dY}=\mu_1\frac{d}{dx}+\mu_2\frac{d}{dy}+\mu_3\frac{d}{dz}+\ldots$$

Jeżeli się więc przekształci linijnie x, y, z, to symbole $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ znajdą się przekształconemi linijnie przez podstawienie odwrotne, według prawidła numeru poprzedniego.

Owoż oznaczywszy, jak powyżéj, przez u_1, u_2,... pochodne jakiéjkolwiek funkcyi u, a przez U_1, U_2,... pochodne jéj przekształconéj U, dowiedliśmy że się otrzymuje

$$U_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, \qquad U_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \ldots$$

A więc, jeżeli u_1, u_2, u_3 sprowadzą się do zera, stanie się podobnież z pochodnemi U_1, U_2, U_3; lecz wiemy że u_1, u_2, u_3 nie sprowadzą się wszystkie do zera tylko gdy dyskryminant układu jest zerem, a w tym przypadku, widzimy że dyskryminant układu przekształconego będzie także zerem i zawierać tem samem musi pierwszy jako czynnik, jak to jużeśmy udowodnili (87).

111. W geometryi płaskiéj, jeżeli x, y, z przedstawiają spółrzędne *trzylinijne* (*trilinéaires*) jakiegokolwiek punktu, a $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$ zrównanie jakiéjkolwiek prostéj, ξ, η, ζ mogą być nazwane spółrzędnemi *stycznemi*, lub właściwiéj *styczneczkowemi* (*tangentielles*) téj prostéj. Jeżeli się odniesie do nowych osi robiąc $x = \lambda_1 X + \ldots$, zrównanie prostéj staje się

$$\xi(\lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z) + \eta(\lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z) + \zeta(\lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z),$$

jakie można napisać pod kształtem

$$XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0,$$

robiąc

$$X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta, \qquad Y_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta,$$
$$Z_1 = \nu_1 \xi + \nu_2 \eta + \nu_3 \zeta.$$

Innemi słowy, jeżeli spółrzędne jakiegokolwiek punktu są przekształcone przez jakiekolwiek podstawienie linijne, spółrzędne styczneczkowe jakiéjkolwiek prostéj są przekształcone przez podstawienie odwrotne. Podobnież, w geometryi o trzech wymiarach, spółrzędne styczneczkowe jakiéjkolwiek płaszczyzny, i spółrzędne jakiegokolwiek punktu są przekształcone przez podstawienia odwrotne. Gdy się odniesie do nowych osi, wszystkie spółrzędne x, y, z, w; x' y', z', w', przedstawiające punkta, są przekształcone przez toż samo podstawienie $x=\lambda_1 X+\ldots$, $x'=\lambda_1 X'+\ldots$; gdy tymczasem spółrzędne styczneczkowe stają się niemi przez podstawienie odwrotne.

Będziemy się posługiwali często zasadą wyłożoną powyżéj, że funkcya

$$x\xi+y\eta+z\zeta=XX_1+YY_1+ZZ_1,$$

w któréj x, y, z powinny być przekształcone przez podstawienie wprost $x=\lambda_1 X+\mu_1 Y+\nu_1 Z$, a ξ, η, ζ przez podstawienie odwrotne $X_1=\lambda_1\xi+\lambda_2\eta+\lambda_3\zeta$, pozostaje niezmienną przez to podwójne przekształcenie.

112. Jeżeli jakikolwiek kształt $ax^n+\ldots$ staje się przez przekształcenie $AX^n+\ldots$, nazwiemy *przeciwzmiennikiem* (*contrevariant*) (*) jakąkolwiek funkcyą zawierającą spółczynniki kształtu i zmiennych ξ, η,..., które są uważane jak istotnie przekształcone przez podstawienie odwrotne, jeżeli ta funkcya różni się tylko jakąkolwiek potęgą modułu od funkcyi odpowiednéj spółczynników i zmiennych przekształconéj, to jest jeżeli mamy

$$\varphi(A, B,\ldots, X_1, Y_1,\ldots)=\Delta\,\varphi(a, b,\ldots, \xi, \eta,\ldots).$$

(*) Piérwszy przykład przeciwzmiennika był podanym przez GAUSSA w jego *Disq. arithm.* Oznacza on pod nazwiskiem *formy przybranéj* przeciwzmiennik kształtu kwadratowego potrójnego. Geometrowie niemieccy przechowali całkowicie nazwanie podobne, *zugehœrige forme*. Nazwanie przeciwzmiennika jest lepsze.

Funkcye tego rodzaju przedstawiają się często w geometryi. Jeżeli mamy, na przykład, jakiekolwiek zrównanie wyrażające warunek konieczny aby jakakolwiek prosta lub jakakolwiek płaszczyzna miała z jaką krzywą lub z jakąkolwiek powierzchnią daną jakikolwiek związek niezależny od wyboru osi, jak naprzykład, jakikolwiek warunek zetknięcia się, i jeżeli odniesiemy wszystko do nowych osi, jest oczywiście rzeczą obojętną czy przekształcimy związek o którym tu mowa zastępując dawne spółczynniki przez ich wartości w funkcyi nowych, albo też wyprowadzając ten związek ze zrównania przekształconego krzywej tymże samym sposobem jak to było wydobytém ze zrównania pierwotnego. Dwa wyrażenia tego warunku

$$\varphi(a,\ b,\ \xi,\ldots),\qquad \varphi(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{X},\ldots)$$

różnią się więc tylko jakimkolwiek czynnikiem.

113. Oprócz spółzmienników i przeciwzmienników można jeszcze wystawić sobie funkcye zawierające dwa szeregi zmiennych i różniące się tylko jakąkolwiek potęgą modułu od funkcyj przekształconych odpowiednich, to jest funkcye takie żeby było

$$\varphi(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ldots,\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ldots,\ \mathrm{X}_1,\ \mathrm{Y}_1,\ldots) = \Delta\ \varphi(a,\ b,\ldots,x,\ y,\ldots,\ \xi,\ \eta,\ldots).$$

Nazwiemy je *spółzmiennikami mieszanemi* (*covariants mixtes*) (*). Funkcyą najprostszą tego rodzaju jest $x\xi + y\eta + z\zeta$;

(*) Te funkcye, jakie możnaby było, jak to proponował p. Salmon nazwać poprostu *zmiennikami* (*divariants*), są oznaczone w pracach pp. Aronholda i Clebsch'a pod nazwiskiem *międzykształtów* (*zwischenformen*). P. Sylwester, który używa wyrazu ogólnego *niezmiennika* (*concomitant*) na oznaczenie ogółu wszystkich funkcyj których związki z kształtem piérwotnym nie są zmienione przez jakiekolwiek przekształcenie linijne, przyjmuje nazwanie *niezmienników mieszanych* (*concomitants mixtes*).

funkcya ta jest niezmienną, przez przekształcenie (111), a tem samem, jest jakimkolwiek spółzmiennikiem mogącym być przydanym do kształtu jakiegokolwiek.

114. Niech będzie I jakikolwiek niezmiennik jakiegokolwiek bądź kształtu

$$a_0x^n + na_1x^{n-1}y + nb_1x^{n-1}z + \frac{1}{2}n(n-1)a_2x^{n-2}y^2 + \ldots;$$

można ztąd wyprowadzić jakikolwiek przeciwzmiennik według metody użytej w numerze 103. Jeżeli kształt dany staje się przez przekształcenie, $A_0X^n + \ldots$, funkcya $x\xi + y\eta + z\zeta$ staje się sama przez się $XX_1 + YY_1 + ZZ_1$, wynika ztąd że

$$a_0x^n + \ldots + k(x\xi + y\eta + z\zeta)^n$$
$$= A_0X^n + \ldots + k(XX_1 + YY_1 + ZZ_1)^n.$$

Lecz jakikolwiek niezmiennik kształtu pierwotnego dopełnia warunku

$$\varphi(A_0, A_1, B_1, \ldots) = \Delta^p\varphi(a_0, a_1, b_1, \ldots).$$

Obliczając podobnyż niezmiennik dla nowego kształtu, otrzymamy

$$\varphi(A_0 + kX_1{}^n, A_1 + kX_1{}^{n-1}Y_1, \ldots) = \Delta^p\varphi(a_0 + k\xi^n, a_1 + k\xi^{n-1}\eta, \ldots);$$

a ponieważ k jest dowolnem, możemy więc zrównać spółczynniki tychże samych potęg k po obu stronach : te spółczynniki, wedle twierdzenia Taylora, są wszystkie kształtu

$$\left(\xi^n \frac{d}{da_0} + \xi^{n-1}\eta \frac{d}{da_1} + \xi^{n-1}\zeta \frac{d}{db_1} + \xi^{n-2}\eta^2 \frac{d}{da_2} + \ldots\right)^q I.$$

Dowiedliśmy że powyższe spółczynniki różnią się tylko jakąkolwiek potęgą modułu od funkcyi odpowiedniéj wyprowadzonej ze zrównania przekształconego. Są to więc właśnie przeciwzmienniki, ponieważ było stale przyjętem że ξ, η, ζ powinny być przekształcone przez podstawienie odwrotne. P. Sylwester daje nazwisko *przewoźników* (*évectans*) przeciwzmiennikom wyprowadzonym z jakiegokolwiek niezmiennika, według prawidła powyższego. I tak $\xi^n \frac{dI}{da_0} + \xi^{n-1}\eta \frac{dI}{da_1} + \ldots$ jest pierwszym przewoźnikiem. Należy zauważyć że przypuszcza się że spółczynniki, w kształcie pierwotnym, przybierają też same czynniki liczebne jak spółczynniki rozwinięcia $(x + y + z)^n$, gdy tymczasem tak nie jest w przewoźniku.

Porównywając z n^{erm} 103, widzimy że funkcya $\xi^n \frac{dI}{da_0} + \ldots$ może być uważaną, bądź to jak jakikolwiek przeciwzmiennik kształtu danego, bądź to jak jakikolwiek niezmiennik układu jaki się otrzymuje przez połączenie jéj (t. j. funkcyi danéj) z funkcyą linijną $x\xi + y\eta + z\zeta$. Teorya przeciwzmienników może być zamkniętą w teoryi niezmienników.

Wykonywając działanie $\xi^n \frac{d}{da_0} + \ldots$ na jakimkolwiek spółzmienniku, otrzymuje się jakikolwiek spółczynnik mieszany, gdyż dowiodłoby się, tymże samym sposobem, że wypadek, będący oczywiście jakąkolwiek funkcyą zawierającą w sobie dwie grupy zmiennnych, przekształci się na jakąkolwiek funkcyą podobną.

PRZYKŁAD I. — Jeżeli wyrażenie $abc - 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ jest dyskryminantem, a tém samém, jakimkolwiek niezmiennikiem kształtu potrójnego

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy,$$

to funkcya

$$(bc - f^2)\xi^2 + (ca - g^2)\eta^2 + (ab - h^2)\zeta^2$$
$$+ 2(gh - af)\eta\zeta + 2(hf - bg)\zeta\xi + 2(fg - ch)\xi\eta$$

będzie jakimkolwiek przeciwzmiennikiem. Geometrycznie, jest to zrównanie styczneczkowe sekcyi konicznéj przedstawionéj pod kształtem danym.

PRZYKŁAD II. — Mając dane dwa kształty kwadratowe potrójne $ax^2 + ,\ldots, a'x^2 + ,\ldots,$ wiemy że wyrażenie $a'(bc - f^2) + \ldots$ jest jakimkolwiek niezmiennikiem spólnym (103); wykonywając działanie $\xi^2 \frac{d}{da} + \ldots,$ przyjdzie

$$(bc' + b'c - 2ff')\xi^2 + (ca' + c'a - 2gg')\eta^2 + (ab' + a'b + 2hh)\zeta^2$$

$$+ 2(gh' + g'h - af' - a'f)\eta\zeta + 2(hf' + h'f - bg' - b'g)\zeta\xi$$

$$+ 2(fg' + f'g - ch' - c'h)\xi\eta.$$

Ten przeciwzmiennik mógłby się jeszcze otrzymać wykonywając dzialanie $a' \frac{d}{da} + \ldots$ na przeciwzmienniku przykładu poprzedniego.

Geometrycznie, wyraża on warunek który musi być sprawdzony, ażeby jakakolwiek prosta była przeciętą *harmonicznie* przez dwie sekcye koni czn

115. Jeżeli dyskryminant jakiegokolwiek kształtu zniszczy się, istnieje jakakolwiek grupa pierwiastków szczególnych x', y', z' (geometrycznie są to spółrzędne punktu podwójnego, krzywéj lub powierzchni przedstawionéj pod tym kształtem), i w tym przypadku, piérwszy przewoźnik dyskryminanta będzie potęgą ntą wyrażenia

$$x'\xi + y'\eta + z'\zeta.$$

W rzeczy saméj, ponieważ przewoźnik nie zmienia się przez przekształcenie, dosyć wiedzieć co się zdarzy w jakimkolwiek przypadku szczególnym. Lecz, jeżeli dyskryminant jest równy zeru, forma może być przekształconą w taki sposób że nowe spółczynniki zmiennych x^n, $x^{n-1}y$, $x^{n-1}z$ staną się zerami, i że pierwiastkiem szczególnym będzie $y=0$, $z=0$ (co znaczy geometrycznie że przypuszczamy początek spółrzędnych w punkcie podwójnym); lecz było dowiedzioném (97) że dyskryminant jest kształtu

$$a_0\varphi + a_1^2\varphi + a_1 b_1\psi + b_1^2\chi.$$

Jeżeli a_0, a_1, b_1 zniszczą się, nie tylko dyskryminant, lecz wszystkie jego pochodne zniszczą się także, wyjąwszy $\frac{dI}{da_0}$. Przewoźnik sprowadzi się więc do $\frac{dI}{da_0}$ pomnożonego przez ξ^n, wyraz jedyny do którego się sprowadzi wyrażenie $(x'\xi + y'\eta + z'\zeta)^n$ gdy się zrobi $x'=1$, $y'=0$, $z'=0$.

Tak więc, jeżeli dyskryminant jakiegokolwiek kształtu kwadratowego potrójnego jest zerem, zrównanie przedstawia dwie linie proste; przeciwzmiennik

$$(bc-f^2)\xi^2 + (ca-g^2)\eta^2 + \ldots$$

staje się kwadratem zupełnym, i otrzyma się spółrzędne x', y', z', punktu przecięcia, identyfikując go z wyrażeniem

$$(x'\xi + y\eta + z'\zeta)^2.$$

Jeżeli kształt przyjmuje dwie grupy pierwiastków szczególnych, wszystkie pierwsze pochodne dyskryminanta sprowadzą się do zera, i jego drugi przewoźnik staje się jakąkolwiek potęgą dokładną wyrażenia

$$(x'\xi + y'\eta + z'\zeta)(x''\xi + y''\eta + z''\zeta),$$

gdyż x', y', z'; x'', y'', z'' oznaczają dwie grupy pierwiastków szczególnych, i tak daléj.

ROZDZIAŁ VI

TWORZENIE SIĘ NIEZMIENNIKÓW I SPÓŁZMIENNIKÓW.

116. Poznawszy dokładnie co rozumieć należy przez niezmienniki, spółzmienniki, etc., wskażemy metody za pomocą których można tworzyć te funkcye : trzy metody będą wyłożone w tym Rozdziale, a czwarta w Rozdziale następnym.

Funkcye symetryczne. — Ta metoda stosuje się tylko do kształtów podwójnych. Wszelka funkcya symetryczna z różnic pierwiastków jest jakimkolwiek niezmiennikiem, byle tylko każdy pierwiastek w nim figurował też samą liczbę razy (*). Oczywiście że jakikolwiek niezmiennik musi być jakąkolwiek funkcyą z różnic pierwiastków, ponieważ ten niezmiennik nie zmienia się kiedy się w nim zastąpi x przez $x+\lambda$. Przekształcenie linijne najogólniejsze prowadzi do zmiany każdego pierwiastku α na $\frac{\lambda\alpha+\mu}{\lambda'\alpha+\mu'}$, i, w tém działaniu, różnica dwóch

(*) Oznaczywszy w równaniu przez a_0 spółczynnik najwyższy potęgi x, potrzeba podzielić przez ten spółczynik dla otrzymania wyrażenia summy, wieloczynów, etc., pierwiastków, i wszelkie funkcye symetryczne są ułamkami zawierającemi w mianowniku potęgi ilości a_0. Gdy mówimy że jakakolwiek funkcya symetryczna pierwiastków jest jakimkolwiek niezmiennikiem, rozumiemy przez to że ta funkcya została zrobiona całkowitą mnożąc ją przez jakąkolwiek potęgę dostatecznie podniesioną ilości a_0, lub, co na jedno wychodzi, że utworzywszy funkcyą symetryczną przypuszczając spółczynnik x^n równy jedności, robi się ją potém jednorodną mnożąc każdy wyraz przez jakąkolwiek potęgę odpowiednią ilości a_0.

pierwiastków $\alpha - \beta$ staje się $\frac{(\lambda\mu' + \lambda'\mu)(\alpha - \beta)}{(\lambda'\alpha + \mu')(\lambda'\beta + \mu')}$; ażeby jakakolwiek bądź funkcya z różnic mogła, po swém przekształceniu, nie różnić się od swéj wartości pierwotnéj tylko przez jakikolwiek czynnik, potrzebném jest żeby mianownik pozostał tenże sam dla wszystkich wyrazów : funkcya musi więc być jakimkolwiek wieloczynem z różnic w którym każdy pierwiastek przedstawia się téż samą liczbę razy. I tak, dla jakiegokolwiek kształtu dwukwadratowego, funkcya

$$\Sigma(\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2$$

jest jakimkolwiek bądź niezmiennikiem, gdyż po przekształceniu, wszystkie wyrazy summy mają tenże sam mianownik. Lecz nie dzieje się podobnież z wyrażeniem $\Sigma(\alpha - \beta)^2$, ponieważ mianownikiem wyrazu $(\alpha - \beta)^2$ jest

$$(\lambda'\alpha + \mu')^2 (\lambda'\delta + \mu')^2,$$

a mianownikiem wyrazu $(\gamma' - \delta)^2$

$$(\lambda'\gamma + \mu')^2 (\lambda'\delta + \mu')^2.$$

117. Możnaby jeszcze wyprowadzić to twierdzenie sposobem być może nieco prostszym, pisząc zrównanie pod kształtem jednorodnym. Widzieliśmy (87) że zmieniając x na $\lambda x + \mu y$, y na $\lambda' x + \mu' y$, ilość $x_1 y_2 - x_2 y_1$ staje się

$$(\lambda\mu' - \lambda'\mu)(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

i że, tém samém, wszelka funkcya wyznaczników $x_1 y_2 - x_2 y_1$ jest jakimkolwiek niezmiennikiem. Lecz (38) wszelka funkcya pierwiastków wyrażona sposobem zwyczajnym sprowadza się do kształtu jednorodnego, zastepując $\alpha, \beta, \ldots$ przez $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}$ i mnożąc potém przez jakąkolwiek potęgę wieloczynu ze wszystkich czynników y dostatecznie podniesioną dla zniesienia ułamków. Jeżeli się działa w ten sposób na jakiéjkolwiek funkcyi z różnic w której pierwiastki nie przedstawiają się wszystkie tymże samym sposobem, to po wykonaniu mnożenia, pozostaną czynniki y na widoku, i funkcya nie będzie mogła być jakimkolwiek niezmiennikiem. I tak, dla jakiéjkolwiek funkcyi czwartego stopnia, $\Sigma(\alpha - \beta)^2$ staje się

$$\Sigma y_3^2 y_4^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2,$$

gdy tymczasem funkcya $\Sigma(\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2$, w któréj figurują wszystkie pierwiastki, staje się

$$\Sigma(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_3 y_4 - x_4 y_3)^2;$$

ta funkcya zawiera w sobie same tylko wyznaczniki, a tém samém jest jakimkolwiek niezmiennikiem.

Dowiedzie się, podobnież, że wszelka funkcya symetryczna utworzona z różnic pierwiastków między sobą, i z różnic między x a jednym lub wielu pierwiastkami, jest jakimkolwiek spółzmiennikiem, byle tylko każdy pierwiastek nie zaprzestał figurować tęż samą liczbę razy. I tak, dla jakiegokolwiek kształtu trzeciego stopnia, $\Sigma(\alpha - \beta)^2 (x - \gamma)^2$ jest jakimkolwiek spółzmiennikiem.

118. Możemy, za pomocą metody poprzedniéj, utworzyć niezmienniki i spółzmienniki sprowadzające się do zera w założeniu jakiego warunku równści między pierwiastkami. Przypuśćmy zatém że chcemy mieć jakikolwiek niezmiennik niszczący się gdy trzy pierwiastki stają się równemi: jest rzeczą widoczną że każdy wyraz musi zawierać jedną z trzech różnic $\alpha - \beta$,

$\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$, i, tak samo, dla wszelkiéj innéj grupy jaką można utworzyć z trzech pierwiastków. W jakiémkolwiek zrównaniu czwartego stopnia, znajduje się cztéry grupy tego rodzaju : różnica $\alpha - \beta$ należy do dwóch grup, różnica $\gamma - \delta$ do dwóch innych; przeto, $\Sigma(\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2$ (*) będzie jakimkolwiek niezmiennikiem przywodzącym się do zera gdy trzy pierwiastki będą równemi. Podobnież, dla jakiegokolwiek zrównania piątego stopnia, jest dziesięć grup z trzech pierwiastków; $\alpha - \beta$ należy do trzech grup, $\gamma - \delta$ do trzech innych; cztérema ostatniemi grupami są $\alpha\gamma\varepsilon$, $\alpha\delta\varepsilon$, $\beta\gamma\varepsilon$, $\beta\delta\varepsilon$, pomiędzy któremi dwie zawierają $\gamma - \varepsilon$ a dwie inne $\delta - \varepsilon$. Funkcya $\Sigma(\alpha - \beta)^4 (\gamma - \delta)^2 (\delta - \varepsilon)^2 (\gamma - \varepsilon)^2$ będzie więc jakimkolwiek niezmiennikiem przywodzącym się do zera kiedy trzy pierwiastki będą równemi. Ten niezmiennik (34, 35) jest czwartego rzędu, a jego *ważnością* jest 10.

Jeżeli chcemy utworzyć jakikolwiek spółzmiennik jakiegokolwiek kształtu dwukwadratowego który sprowadza się do zera gdy istnieją dwie pary pierwiastków równych, jego wyrażenie zawierać będzie jakąkolwiek różnicę każdéj z grup

$\alpha - \beta$, $\gamma - \delta$; $\alpha - \gamma$, $\beta - \delta$; $\alpha - \delta$, $\delta - \gamma$: będzie więc ono

$$\Sigma(\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 (x - \delta)^4,$$

albo

$$\Sigma(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(x - \beta)^2 (x - \gamma)^2 (x - \delta)^2;$$

e spółzmienniki są czwartego i szóstego stopnia względem zmiennych, czwartego i trzeciego względem spółczynników,

(*) Wyrażenie $\Sigma(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$ przywiodłoby się tosamościowo do zera.

a każdy z ich wyrazów sprowadza się do zera kiedy zrównanie przyjmuje dwie pary pierwiastków równych.

119. Różniczkowanie wzajemne spółzmienników i przeciwzmienników. — Kiedy się mówi że funkcya $\varphi(a, b,\ldots, \xi, \eta,\ldots)$ jest jakimkolwiek niezmiennikiem, oczywiście że $\xi, \eta,\ldots$ są ilościami jakiemikolwiek jakie się przypuszcza tylko przekształcone przez podstawienie odwrotne. Lecz pokazaliśmy (110) że symbole $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy},\ldots$ istnieją w tym przypadku. Możemy więc podstawić, w jakimkolwiek przeciwzmienniku, te symbole na miejsce $\xi, \eta,\ldots$, a otrzymamy jakikolwiek symbol działania nie zmieniający się przez podstawienie, i który, zastosowany do kształtu pierwotnego lub do jednego z jego spółzmienników, da jakikolwiek spółzmiennik, jeżeli zmienne przechowają się jeszcze po różniczkowaniu, lub jakikolwiek niezmiennik jeżeli one znikną. Stosując ten symbol działania do jakiegokolwiek spółzmiennika mieszanego, da on jakikolwiek przeciwzmiennik lub jakikolwiek spółzmiennik mieszany, według tego jak zmienne znikną lub nie znikną przez różniczkowanie. Zamiast zastąpienia $\xi, \eta,\ldots,$ w jakimkolwiek przeciwzmienniku, przez $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy},\ldots$ na utworzenie jakiegokolwiek bądź symbolu działania, możemy jeszcze zastąpić je przez $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy},\ldots$ (U jest kształtem pierwotnym albo jednym z jego spółzmienników), i otrzymać tym sposobem jakikolwiek nowy spółzmiennik. Związek między dwoma szeregami zmiennych $x, y, z,\ldots$ i $\xi, \eta, \zeta,\ldots$ jest odwrotnym, więc możemy również zastąpić, w jakimkolwiek spółzmienniku, $x, y, z,\ldots,$ przez $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta},\ldots$ i otrzymamy jakikolwiek symbol działania który, zastosowany do jakiegokolwiek przeciwzmiennika, da jakikolwiek nowy przeciwzmiennik lub jakikolwiek niezmiennik.

Tak więc, mając dane jakikolwiek spółzmiennik i jakikolwiek przeciwzmiennik, można, podstawiając w jednym z nich symbole różniczkowe i wykonywając potém działanie na drugim, otrzymać jakikolwiek nowy przeciwzmiennik lub spółzmiennik, jaki można również połączyć z piérwszymi, dla wydobycia z nich innych, i tak daléj.

120. W przypadku kształtów podwójnych, ta metoda się upraszcza. Wzorami przekształcenia prostego są

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y, \qquad y = \lambda_2 X + \mu_2 Y,$$

wzorami przekształcenia odwrotnego są (109)

$$X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta, \qquad Y_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta,$$

zkąd

$$\Delta\xi = \mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1, \qquad \Delta\eta = -\mu_1 X_1 + \lambda_1 Y_1,$$

wyrażenia mogące się napisać

$$\Delta\eta = \lambda_1 Y_1 + \mu_1(-X_1), \qquad \Delta(-\xi) = \lambda_2 Y_1 + \mu_2(-X_1).$$

Widzimy że niezważając na czynnik Δ, zmienne η i ξ przekształcają się zupełnie według tegoż samego prawidła jak x i y, i można powiedzieć że y i x, z jednéj strony, x i y, z drugiéj, przekształcają się przez podstawienia odwrotne. Tak więc, w kształtach podwójnych, spółzmienniki i przeciwzmienniki rzeczywiście nie dają się odróżnić, i dosyć jest zastąpić, w jakimkolwiek spółzmienniku, x i y przez η i $-\xi$ dla utworzenia jakiegokolwiek przeciwzmiennika, i *vice versa*. W rzeczy samój, przypuśćmy że, przez przekształcenie, jakakolwiek funkcya jednorodna $\varphi(x, y)$ staje się $\Phi(X, Y)$, wzory powyższe pokazują że $\eta, -\xi)$ stanie się $\frac{1}{\Delta^p}\Phi(Y_1, -X_1)$, p jest stopniem funkcyi na x i y.

Więc, jeżeli $\varphi(x, y)$ jest jakimkolwiek spółzmiennikiem, to jest jakąkolwiek funkcyą która, po przekształceniu, różni się tylko jakąkolwiek potęgą czynnika Δ od jakiejkolwiek podobnéj funkcyi co do X i Y; oczywiście $\varphi(\eta, -\xi)$ będzie się różnić podobnież, po przekształceniu, tylko jakąkolwiek potęgą czynnika Δ od jakiéjkolwiek funkcyi podobnéj co do X_1 i Y_1. To będzie więc właśnie jakimkolwiek przeciwzmiennikiem.

Zamiast mówić że symbole różniczkowe przekształcają się przez podstawienie odwrotne względem x, y, możemy więc powiedzieć że te symbole przekształcają się przez toż same podstawienie jak y i $-x$; a jeżeli, w kształcie pierwotnym lub w jednym z jego spółzmienników, zastąpimy x i y przez $\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}$, otrzymamy jakikolwiek symbol który będzie mógł być użytym dla dania początku nowym spółzmiennikóm, jak to wyłożyliśmy powyżéj. Możemy także podstawić $\frac{du}{dy}$, $-\frac{du}{dx}$ na miejsce x i y, i otrzymać tym sposobem jakikolwiek nowy spółzmiennik. Przykłady następne dadzą dostatecznie zrozumieć ducha téj metody.

PRZYKŁAD I. — *Znaleźć jakikolwiek niezmiennik jakiegokolwiek kształtu kwadratowego lub jakiegokolwiek układu dwóch kształtów kwadratowych.*

Przypuśćmy że, przez przekształcenie, $ax^2 + 2bxy + cy^2$, stanie się

$$AX^2 + 2BXY + CY^2;$$

ponieważ $\Delta\frac{d}{dy}$, $-\Delta\frac{d}{dx}$ przekształcają się według tegoż samego prawidła jak x i y, symbol

$$\Delta^2\left(a\frac{d^2}{dy^2} - 2b\frac{d^2}{dxdy} + c\frac{d^2}{dx^2}\right)$$

stanie się, przez przekształcenie,

$$\left(A \frac{d^2}{dY^2} - 2B \frac{d^2}{dXdY} + C \frac{d^2}{dX^2}\right).$$

Stosując go do kształtu samego, mamy

$$4\Delta^2(ac - b^2) = 4(AC - B^2),$$

co daje widzieć że $ac - b^2$ jest jakimkolwiek niezmiennikiem; stosując go do

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$$

i do jego przekształconego, mamy

$$2\Delta^2(ac' + a'c - 2bb') = 2(AC' + A'C - 2BB'),$$

i widzimy że $ac' + a'c - 2bb'$ jest jakimkolwiek niezmiennikiem. Można widzieć także że funkcya

$$a(bx + cy)^2 + 2b(bx + cy)(ax + by) + c(ax + by)^2$$

jest jakimkolwiek spółzmiennikiem, lecz to jest po prostu kształt sam pomnożony przez $ac - b^2$.

RZYKŁAD II. — *Wszelki kształt podwójny stapnia parzystego ma iakikolwiek niezmiennik drugiego rzędu względem spółczynników.*

Mamy tylko podstawić $\frac{d}{dy}$, $-\frac{d}{dx}$ na miejsce x i y i wykonać potém działanie na kształcie. I tak, dla kształtu dwukwadratowego $(a, b, c, d, e \between x, y)^4$ znajdujemy że $ae - 4bd + 3c^2$ jest jakimkolwiek niezmiennikiem; podobnież dla kształtu ogólnego

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \between x, y)^n, \quad \text{funkcya}$$

$$a_0 a_n - na_1 a_{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) a_2 a_{n-2} - \ldots$$

jest jakimkolwiek niezmiennikiem; spółczynniki liczebne są spółczynnikami dwumianu, lecz wyraz środkowy jest podzielonym przez 2.

Jeżeli zastosujemy tę metodę do jakiegokolwiek kształtu stopnia nieparzystego, na przykład do kształtu sześciennego

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

i jeżeli wykonamy działanie

$$d\frac{d^3}{dx^3} - 3c\frac{d^3}{dx^2dy} + 3b\frac{d^3}{dxdy^2} - a\frac{d^3}{dy^3},$$

wypadek jest identycznie zerem. Znajdujemy przecież że jakikolwiek układ dwóch kształtów sześciennych ma jakikolwiek niezmiennik $(ad' - a'd) - 3(bc' - b'c)$, i, ogólnie, że jakikolwiek układ dwóch kształtów stopnia nieparzystego ma za niezmiennik wyrażenie

$$(a_0b_n - a_nb_0) - n(a_1b_{n-1} - a_{n-1}b_1) + \frac{1}{2}n(n-1)(a_2b_{n-2} - a_{n-2}b_2) - \dots,$$

które sprowadza się do zera gdy dwa kształty są identyczne.

121. Kiedy się otrzymało, za pomocą metody powyższéj, jakikolwiek bądź niezmiennik dla kształtu stopnia jakiegokolwiek, wyciąga się ztąd bezpośrednio, przez metodę n^ru 106, jakikolwiek spółzmiennik dla kształtu jakiegokolwiek stopnia więcéj podniesionego. I tak, wiedząc że $ac - b^2$ jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu kwadratowego, utworzmy niezmiennik emananta kwadratowego funkcyi jakiéjkolwiek; wyrażenie $\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2$ będzie jakimkolwiek spółczynnikiem dla wszelkiéj funkcyi stopnia wyższego nad drugi. Podobnież

$$ae - 4bd + 3c^2$$

jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu czwartego stopnia; wyciągniemy ztąd że wyrażenie

$$\frac{d^4u}{dx^4}\frac{d^4u}{dy^4} - 4\frac{d^4u}{dx^3dy}\frac{d^4u}{dxdy^3} + 3\left(\frac{d^2u}{dx^2dy^2}\right)^2$$

będzie jakimkolwiek spółzmiennikiem dla wszelkiego kształtu stopnia wyższego nad czwarty. Widzimy tym sposobem że wszelki kształt ma, ogólnie, jakikolwiek szereg spółzmienników, drugiego rzędu wzgledem spółczynników, a stopni $2(n-2)$, $2(n-4)$, $2(n-6)$,... względem zmiennych. Te spółzmienniki mogą się połączyć potém, bądź to z kształtem pierwotnym, bądź to między sobą, dla przywiedzenia do nowych spółzmienników albo niezmienników.

PRZYKŁAD I. — *Jakikolwiek kształt czwartego stopnia ma jakikolwiek niezmiennik trzeciego rzędu względem spółczynników.*

Wiemy, w rzeczy samej, że wyznacznik Hessowy

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(cx^2 + 2dxy + ey^2) - (bx^2 + 2cxy + dy^2)^2,$$

lub

$$(ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y$$
$$+ (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 + 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4$$

jest jakimkolwiek spółzmiennikiem. Wykonywając na nim działanie

$$(a, b, c, d, e\,\big)\!\left(\frac{d}{dy},\ -\frac{d}{dx}\right)^4,$$

i dzieląc przez 72, otrzymujemy ilość

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

która, tém samém, jest jakimkolwiek niezmiennikiem.

PRZYKŁAD II. — *Wszelki kształt stopnia nieparzystego ma jakikolwiek niezmiennik czwartego rzędu względem spółczynników.*

W rzeczy saméj, ma on jakikolwiek spółzmiennik kwadratowy $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}} - \ldots$ drugiego rzędu względem spółczynników. Dyskryminantem tego kształtu kwadratowego będzie jakikolwiek niezmiennik kształtu pierwotnego (104) i będzie czwartego rzędu względem spółczynników. Wreszcie, to dowodzenie wykazuje że *wszelki* kształt ma jakikolwiek niezmiennik czwartego rzędu; gdyż, jeżeli weźmiemy jeden ze spółzmienników stopnia parzystego otrzymanych powyżéj, jego niezmiennik drugiego rzędu będzie czwartego stopnia względem spółczynników kształtu pierwotnego. Lecz, jeżeli kształt jest stopnia parzystego, może się zdarzyć że niezmiennik tym sposobem otrzymany jest po prostu kwadratem z jakiegokolwiek niezmiennika drugiego rzędu.

RZYKŁAD III. — *Znaleźć niezmiennik czwartego rzędu jakiegokolwiek kształtu sześciennego.*

Wyznacznikiem Hessowym jest

$$(ax + by)(cx + dy) - (bx + cy)^2,$$

albo

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2.$$

Wyrażenie

$$(ad - bc)^2 - 4(ac - b^2 (bd - c^2)$$

jest jakimkolwiek niezmiennikiem kształtu sześciennego; w rzeczy samój, ten niezmiennik jest, właściwie mówiąc, jakiegokolwiek kształtu sześciennego dyskryminantem

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd,$$

122. Wszelki niezmiennik jakiegokolwiek kształtu podwójnego może dać początek jakiemukolwiek spółzmiennikowi.

Możemy, w rzeczy saméj (114), ztąd wyciągnąć przewoźnik $\xi^n \frac{dI}{da_0} + \ldots$, który jest jakimkolwiek przeciwzmiennikiem, i, zastępując w nim ξ i η przez y i $-x$, mamy jakikolwiek spółzmiennik. I tak, dyskryminanta powyższego jakiegokolwiek kształtu sześciennego, wyciągniemy przewoźnik

$$\xi^3(ad^2 - 3bcd + 2c^3) - 3\xi^2\eta(acd + bc^2 - 2b^2d)$$

$$- 3\xi\eta^2(abd + b^2c - 2ac^2) + \eta^3(a^2d - 3abc + 2b^3),$$

a tém samém, kształt sześcienny przyjmuje spółzmiennik

$$(a^2d - 3abc + 2b^3, \quad abd + b^2c - 2ac^2$$

$$2b^2d - acd - bc^2, \quad 3bcd - ad^2 - 2c^3)(x, y)^3.$$

123. Zrównanie różniczkowe. — Niech będzie, n stopień jakiegokolwiek kształtu podwójnego, θ stopień jednego z jego niezmienników względem spółczynników; *ważność* (33) każdego wyrazu niezmiennika jest stałą i równą $\frac{1}{2}n\theta$. Jeżeli zmienimy x na λx nie zmieniając y, co jest jakiémkolwiek przekształceniem linijném, niezmiennik powinien, przez definicyą, pozostać tymże samym lub przynajmniéj być po prostu pomnożonym przez jakąkolwiek potęgę ilości λ która, w tym przypadku, jest modułem przekształcenia. Dowiedzie się, jak w n^ze^ 34, że summa wskaźników każdego wyrazu jest stałą.

Niezmiennik musi także pozostać tymże samym jeżeli się zmieni x na y a y na x, przekształcenie linijne którego modułem jest -1. To podstawienie prowadzi do zamiany każdego spółczynnika a_α na $a_{n-\alpha}$. Mamy więc, na summę wskaźników,

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = (n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) + \ldots,$$

zkąd

$$2(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) = n\theta.$$

Wniosek. n i θ nie mogą być oba nieparzystemi, ponieważ ich wieloczyn jest parzystym, to jest że jakikolwiek kształt podwójny stopnia nieparzystego nie może mieć niezmiennika nieparzystego stopnia.

124. Zasady powyższe pozwolą nam napisać bezpośrednio część literalną jakiegokolwiek niezmiennika którego rzęd jest znanym; gdyż, rzęd mając dany, ważność jest zarówno znaną. Jeżeliby się żądało, na przykład obliczyć dla jakiegokolwiek kształtu czwartego stopnia jakikolwiek niezmiennik trzeciego rzędu, jego ważność byłaby 6, a jego wyrazy

$$\mathrm{A}a_4a_2a_0 + \mathrm{B}a_4a_1a_1 + \mathrm{C}a_3a_3a_0 + \mathrm{D}a_3a_2a_1 + \mathrm{E}a_2a_2a_2,$$

gdzie spółczynniki A, B,... pozostają do oznaczenia. Czytelnik zauważy że jest tyle wyrazów w niezmienniku ile się znajduje sposobów różnych złożenia liczby 6 z trzech liczb zawartych między 0 i 4; i, ogólnie, że jakikolwiek niezmiennik zamyka tyle wyrazów ile jest sposobów złożenia liczby $\frac{1}{2}n\theta$, przedstawiającéj ważność, z θ liczb zawartych między 0 i n.

Oznaczymy spółczynniki według téj uwagi, że jakikolwiek niezmiennik nie mogąc się zmienić jeżeli się zastąpi x przez $x+\lambda$ albo y przez $y+\lambda$; powinien jak w nrze 39, zadosyć uczynić dwóm zrównaniom różniczkowym:

$$a_0 \frac{dI}{da_1} + 2a_1 \frac{dI}{da_2} + 3a_2 \frac{aI}{da_3} + \ldots = 0,$$

$$na_1 \frac{dI}{} + (n-1)a_2 \frac{dI}{da_1} + \ldots = 0,$$

(zrównanie pierwotne jest za uważane napisane ze spółczynnikami dwumianu). W praktyce, którekolwiek z tych zrównań wystarczy, gdyż drugie wyciąga się zmieniając każdy spółczynnik a_α na $a_{n-\alpha}$. Dosyć więc zrobić użytek z jednego z nich, byleby tylko miało się staranie uczynić z góry funkcyą symetryczną względem x i y; to jest byleby tylko ta funkcya nie zmieniła się lub najwięcéj zmieniła znak (*) kiedy się w niéj zastąpi a_α przez $a_{n-\alpha}$, i ten warunek będzie zawsze dopełnionym jeżeli się na to pilnie zwróci baczenie żeby ważność niezmiennika była ważnością jaką dopiéro wskazaliśmy. I tak, w przykładzie poprzedzającym, jeżeli wykonamy na wyrażeniu $Aa_1a_2a_0 + \ldots$ działanie $a_0 \dfrac{d}{da_1} + \ldots$, przyjdzie

$$(2B + 2A)a_4a_1a_0 + (D + 6C + 4A)a_3a_2a_0$$

$$+ (2D + 4B)a_3a_1a_1 + (6E + 3D)a_2a_2a_1 = 0;$$

owoż, biorąc $A = 1$, ma się dla innych spółczynników $B = -1$, $D = 2$, $C = -1$, $E = -1$, i dla zmiennika samego

$$a_4a_2a_0 + 2a_3a_2a_1 - a_4a_1a_1 - a_3a_3a_0 - a_2a_2a_2.$$

125. Chcąc tą metodą oznaczyć jakikolwiek bądź niezmien-

(*) Zmiana x na y a y na x prowadzi do jakiegokolwiek przekształcenia linijnego mającego za moduł

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Wszelki niezmiennik który, w przekształceniu, znajduje się pomnożony przez jakąkolwiek potęgę nieparzystą modułu, zmienia więc znak gdy się robi zamianę x i y; niezmienniki tego rodzaju są nazwane *niezmiennikami skośnemi* (*invariants gauches*).

nik rzędu danego, należy obliczyć spółczynniki nieznane A, B, C,..., i przychodzimy do tego za pomocą pewnéj liczby warunków wyciągnionych ze zrównania różniczkowego. Jeżeli liczba tych warunków przewyższa liczbę spółczynników nieznanych, tworzenie się niezmiennika będzie niepodobném w ogólności; jeżeli jest jéj równą, znajdzie się tylko jeden niezmiennik; jeżeli jest niższą, otrzyma się ich wiele. Lecz widzieliśmy że liczba wyrazów niezmiennika, przewyższająca o jedność liczbę spółczynników, jest równa liczbie rozłożeń możebnych ważności $\frac{1}{2}n\theta$ na θ liczb zawartych między 0 i n. Skutkiem działania $a_0\frac{d}{da_1}+\ldots$ następuje oczywiście zmniejszenie ważności o jedność; liczba warunków do spełnienia jest więc równa liczbie rozłożeń $\frac{1}{2}n\theta-1$ na θ liczb zawartych między 0 i n. I tak, w przykładzie n^ru 124, liczba warunków użytych przy znalezieniu A, B,... jest równa liczbie rozłożeń możebnych liczby 5 na jakąkolwiek summę z trzech liczb zawartych między 0 i 4 włącznie. Przeto, aby rozpoznać w ogólności czy można znaleść, dla jakiegokolwiek kształtu podwójnego, jakikolwiek niezmiennik rzędu θ, i czy jest ich więcéj jak jeden, należy rozebrać iloma sposobami dwie liczby $\frac{1}{2}n\theta$, $\frac{1}{2}n\theta-1$ mogą być rozłożone na θ liczb zawartych między 0 i n: na téj to zasadzie P. Cayley oparł swe poszukiwania o liczbie niezmienników kształtów podwójnych

126. Też same rozumowania stosują się do spółzmienników. Jakikolwiek spółzmiennik, równie jak i samże kształt pierwotny, powinien pozostać niezmiennym jeżeli się zmieni x na ρx, i, jednocześnie, każdy spółczynnik a_α na $\rho^\alpha a_\alpha$. Jeżeli spółczynnik jakiéjkolwiek potęgi x^μ z ilości x, w spółzmienniku, jest $a_\alpha b_\beta c_\gamma,\ldots$, to jest rzeczą widoczną że, jak powyżéj,

summa $\mu + \alpha + \beta + \ldots$ musi być stałą dla wszystkich wyrazów, i możemy nazwać ją *ważnością* spółzmiennika.

Nadto aby się spółzmiennik nie zmienił gdy się robi zamianę x y, potrzeba mieć

$\mu + \alpha + \beta + \gamma + \ldots = (p - \mu) + (n - \alpha) + (n - \beta) + \ldots,$

p jest stopniem spółzmiennika w x i y; przeto, ponieważ θ jest rzędem spółzmiennika względem spółczynników, ma się bezpośrednio za jego ważność $\frac{1}{2}(n\theta + p)$. Jeżeli żądamy otrzymać, na przykład, jakikolwiek spółzmiennik kwadratowy jakiegokolwiek kształtu sześciennego któryby był zarazem drugiego rzędu względem spółczynników, ma się $n = 3$, $\theta = 2$, $p = 2$, a ważnością jest 4. Ma się więc, dla wyrazów które mnożą x^2, $\alpha + \beta = 2$, a temi wyrazami będą a_2a_0 i a_2a_1; podobnież, wyrazami które mnożą xy będą a_3a_0, a_1a_1, a wyrazami które mnożą y^2, a_3a_1, a_2a_2; oznaczy się tym sposobem część literalną jakiegokolwiek spółzmiennika : spółczynniki znajdą się jak to zobaczymy poniżéj.

127. Wynika z definicyi spółzmiennika że powinno się dojść do tegoż samego wypadku, bądź to zmieniając w nim x na $x + \lambda y$, bądź to wykonywając naprzód to podstawienie w kształcie pierwotnym, i obliczając potém spółzmiennik formy przekształconéj. Lecz ta zmiana w kształcie pierwotnym przywodzi (39) do zamiany a_1 na $a_1 + \lambda a_0$, a_2 na $a_2 + 2a_1\lambda + a_0\lambda^2, \ldots$ Podstawienie $x + \lambda y$ zamiast x w spółzmienniku przywiedzie więc także do zastąpienia w nim a_1 przez $a_1 + \lambda a_0, \ldots$ Niech będzie spółzmiennik

$$A_0x^p + pA_1x^{p-1}y + \frac{1}{2}p(p-1)A_2x^{p-2}y^2 + \ldots;$$

wyraźmy że te dwa sposoby działania są równoważnemi, i ograniczmy się tylko do wyrazów mnożących λ. Oznaczywszy, jak w n^rze^ 41, przez skrócenie $\frac{d}{d\zeta}$ działanie

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \ldots$$

przyjdzie

$$\frac{dA_0}{d\zeta} = 0, \quad \frac{dA_1}{d\zeta} = A_0, \quad \frac{dA_2}{d\zeta} = 2A_1, \ldots,$$

$$\frac{dA_{p-1}}{d\zeta} = (p-1)A_{p-2}, \quad \frac{dA_p}{d\zeta} = pA_{p-1}.$$

Oznaczywszy podobnież przez $\frac{d}{d\eta}$ działanie

$$na_1 \frac{d}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d}{da_1} + \ldots,$$

otrzymamy także

$$\frac{dA_0}{d\eta} = pA_1, \quad \frac{dA_1}{d\eta} = (p-1)A_2, \ldots$$

Widzimy tym sposobem że przypuściwszy A_0 oznaczone w sposób zadosyć czyniący równaniu $\frac{dA_0}{d\zeta} = 0$ [innemi słowy, przypuściwszy że A_0 powinno być jakąkolwiek funkcyą z różnic pierwiastków (39)], wszystkie inne wyrazy spółzmiennika będą znane. Spółzmiennikiem będzie, w rzeczy saméj,

$$A_0 x^p + \frac{dA_0}{d\eta} x^{p-1} y + \frac{1}{1.2} \frac{d^2 A_0}{d\eta^2} x^{p-2} y^2 + \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3 A_0}{d\eta^3} x^{p-3} y^3 + \ldots$$

Potrzeba zauważyć że gdy ważnością spółzmiennika jest

$\frac{1}{2}(n\theta + p)$, ważnością wyrazu A_0 będzie $\frac{1}{2}(n\theta - p)$, ponieważ dodając do niego p musi się odzyskać wyraz spółzmiennika. Ten wyraz A_0, z którego wszystkie inne pochodzą, został nazwanym przez P. Roberts'a źródłem spółzmiennika. P. Roberts dostrzegł także że źródło wieloczynu dwóch spółzmienników jest niczém inném tylko wieloczynem ich źródeł bezwzględnych. Gdyż, jeżeli pomnożymy spółzmiennik powyższy przez

$$B_0x^q + \frac{dB_0}{d\eta}x^{q-1}y + \frac{1}{1.2}\,\frac{d^2B_0}{d\eta^2}x^{q-2}y^2 + \dots,$$

mamy, jak to jest łatwo sprawdzić,

$$A_0B_0x^{p+q} + \frac{d(A_0B_0)}{d\eta}x^{p+q-1}y + \frac{1}{1.2}\,\frac{d^2(A_0B_0)}{d\eta^2}x^{p+q-2}y^2 + \dots..$$

Przeto, jeżeli mamy jaki związek między ilukolwiek funkcyami A_0, B_0, C_0,... z różnic pierwiastków, tenże sam związek przechowa się jeszcze między spółzmiennikami ztąd pochodzącemi.

PRZYKŁAD I. — *Znaleźć spółzmiennik kwadratowy jakiegokolwiek kształtu sześciennego.*

Widzieliśmy, numer 126, że A_0 jest kształtu $a_2a_0 + Ba_1a_1$. Wykonajmy działanie

$$a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2};$$

przyjdzie

$$(2+2B)a_0a_1 = 0,$$

zkąd

$$B = -1 \quad \text{i} \quad A_0 = a_2a_0 - a_1a_1.$$

Wykonajmy teraz na A_0 działanie

$$3a_1 \frac{d}{da_0} + 2a_2 \frac{d}{da_1} + a_3 \frac{d}{da_2},$$

mamy

$$2A_1 = a_3 a_0 - a_2 a_1.$$

Wykonajmy na nowo toż samo działanie na A_1, ztąd przyjdzie

$$A_2 = a_1 a_3 - a_2 a_2.$$

Spółzmiennikiem szukanym jest więc

$$(a_2 a_0 - a_1 a_1) x_2 + (a_0 a_3 - a_2 a_1) xy + (a_1 a_3 - a_2 a_2) y^2.$$

PRZYKŁAD II. — *Znaleźć, dla jakiegokolwiek kształtu sześciennego, jakikolwiek spółzmiennik trzeciego rzędu względem zmiennych i spółczynników.*

W tym przypadku, mamy $n = 3$, $\theta = 3$, $\frac{1}{2}(n\theta + p) = 6$. Summą wskaźników w spółczynniku mnożącym x^3 jest 3, i ten spółczynnik będzie kształtu

$$Aa_3 a_0 a_0 + Ba_2 a_1 a_0 + Ca_1 a_1 a_1.$$

Wykonajmy działanie

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a \frac{d}{da_3},$$

przyjdzie

$$(3A + B) a_2 a_0 a_0 + (2B + 3C) a_1 a_1 a_0.$$

Biorąc $A = 1$, otrzymamy

$$B = -3, \quad C = 2, \quad A_0 = a_3 a_0 a_0 - 3a_2 a_1 a_0 + 2a_1 a_1 a_1.$$

Wykonywając na A_0 trzy razy jedno po drugiém działanie

$$3a_1\frac{d}{da_0}+2a_2\frac{d}{da_1}+a_2\frac{d}{da_2},$$

otrzymamy inne spółczynniki i spółzmiennikiem będzie (122)

$$(a_3a_0a_0-3a_2a_1a_0+2a_1a_1a_1)x^3+3(a_3a_1a_0-2a_2a_2a_0+a_2a_1a_1)x^2y$$
$$+3(2a_3a_1a_1-a_2a_2a_1-a_3a_2a_0)xy^2$$
$$+(3a_3a_2a_1-2a_2a_2a_2-a_3a_3a_1)y^3.$$

128. Widzieliśmy że jakikolwiek kształt ma tyle spółzmienników stopnia p względem zmiennych, i rzędu θ względem spółczynników, ile się w nim znajduje funkcyj A_0 których ważnością jest $\frac{1}{2}(n\theta-p)$, i które zadosyć czynią zrównaniu $\frac{dA_0}{d\zeta}=0$; i, tak samo jak w n^rze^ 125, spostrzegamy że liczba tych funkcyj jest równą różnicy między liczbami rozłożeń

$$\frac{1}{2}(n\theta-p) \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}(n\theta-p)-1$$

na θ liczb zawartych między 0 i n włącznie. Można zauważyć że p nie może być nieparzystém tylko gdy n i θ są oba nieparzystemi. Kształty stopnia nieparzystego mają więc same spółzmienniki stopnia nieparzystego względem spółczynników, i te spółzmienniki są także stopnia nieparzystego względem zmiennych.

129. Wypadki n^ru^ 127 mogą być przedstawione nieco inaczéj. Działanie $y\frac{d}{dx}$, wykonane na kształcie jakimkolwiek, jest równoważnem pewnemu działaniu wykonanemu przez różniczkowanie na spółczynnikach. I tak, dla kształtu

$$(a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots,)(x, \quad y)^n,$$

otrzymuje się tenże sam wypadek, wykonywając jedno lub drugie z dwóch działań $y\dfrac{d}{dx}$, $a_0\dfrac{d}{da_1}+2a_1\dfrac{d}{da_2}+\ldots$ Oznaczmy to ostatnie przez znakowanie $\left(y\dfrac{d}{dx}\right)$: własność dowiedziona powyżéj dla współzmienników może być przedstawioną przez równość $y\dfrac{d}{dx}=\left(y\dfrac{d}{dx}\right)$. Innemi słowy dwa działania $y\dfrac{d}{dx}$ albo $a_0\dfrac{d}{da_1}+2a_1\dfrac{d}{da_2}+\ldots$, wykonane na jakimkolwiek spółzmienniku, prowadzą do tegoż samego wypadku. P. Cayley wyszedł z téj własności przyjmując ją za definicyą spółzmienników (*); ta własność zawiera w sobie także niezmiennik, ponieważ ma się, dla jakiegokolwiek niezmiennika I, $y\dfrac{dI}{du}=0$, a tém samém także, $\left(y\dfrac{dI}{dx}\right)=0$.

130. Można dowieść tak samo że kształty o ilukolwiek zmiennych zadość uczynią zrównaniom różniczkowym mogącym się napisać

$$y\frac{d}{dx}=\left(y\frac{d}{dx}\right),\quad z\frac{d}{dx}=\left(z\frac{d}{dx}\right),\ldots$$

I tak, dla kształtu $(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$ mamy

$$y\frac{d}{dx}=a\frac{d}{dh}+g\frac{d}{df}+2h\frac{d}{db},\quad z\frac{d}{dx}=a\frac{d}{dg}+h\frac{d}{df}+2g\frac{d}{dc},$$

i każdy spółzmiennik musi zadość uczynić tym dwóm zrówna-

(*) Zob. Pamiętniki P. Cayley, *on Quantics, Philosophical Transactions*, ogłoszone w roku 1854 i następnym.

niòm : każdy niezmiennik zadość uczyni także zrównaniòm

$$a\frac{dI}{dh}+g\frac{dI}{df}+2h\frac{dI}{db}=0,\qquad a\frac{dI}{dg}+h\frac{dI}{df}+2g\frac{dI}{dc}=0,$$

jak to można łatwo dowieść uważając że niezmiennik musi pozostać tymże samym jeżeli się zastąpi x przez $x+\lambda$ lub przez $x+\mu z$.

ROZDZIAŁ XII.

PRZEDSTAWIENIE SYMBOLICZNE NIEZMIENNIKÓW I SPÓŁZMIENNIKÓW.

---

131. Pozostaje nam jeszcze dać poznać czwartą metodę znajdowania niezmienników i spółzmienników; ta metoda, podana przez p. Cayley w roku 1846 (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. I, str. 104, i w *Dzienniku p. Crelle*, t. XXX), nie tylko przyczyni się skutecznie do otrzymania tych funkcyj, lecz jeszcze dostarczy w jakimkolwiek układzie zasad rachunku regularnego za pomocą którego te funkcye mogą być między sobą porównane i zidentyfikowane.

Niech będą x_1, y_1,; x_2, y_2 dwa układy zmiennych mogących być przekształconemi przez jedno i toż same podstawienie; było dowiedzioném że pochodne $\frac{d}{dx_1}$, $\frac{d}{dy_1}$, $\frac{d}{dx_2}$, $\frac{d}{dy_2}$ są przekształcone przez podstawienie odwrotne (110); że symbol

$$\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_1}-\frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}$$

nie zmienia się przez podstawienie (90); nakoniec, że jeżeli się wykona na funkcyi jakiéjkolwiek względem x_1, y_1; x_2, y_2 działanie wskazane przez jakąkolwiek potęgę tego symbolu, otrzymuje się jakikolwiek spółzmiennik (119). Oznaczymy wyrażenie $\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_1}-\frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}$ przez znakowanie skrócone $\overline{12}$.

Przypuśćmy teraz że się daje dwa kształty podwójne U, V, możemy bezpośrednio ustalić spółzmienniki tego układu kształtów. Mamy tylko napisać zmienne w kształcie U z wskaźnikiem 1, a w kształcie V z wskaźnikiem 2, i wykonać potém działanie wskazane przez potęgę jakąkolwiek symbolu $\overline{12}$: wypadek będzie jakimkolwiek niezmiennikiem lub jakimkolwiek spółzmiennikiem.

Niech będą na przykład,

$$U = ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2, \quad V = a'x_2^2 + 2b'x_2y_2 + c'y_2^2,$$

zastosujmy do tych kształtów symbol $\overline{12}^2$ kióry, rozwinięty, daje

$$\frac{d^2}{dx_1^2}\,\frac{d^2}{dy_2^2} + \frac{d^2}{dx_2^2}\,\frac{d^2}{dy_1^2} - 2\,\frac{d^2}{dx_1dy_1}\,\frac{d^2}{dx_2dy_2},$$

wypadék $ac' + ca' - 2bb'$ będzie jakimkolwiek niezmiennikiem spólnym dwóm kształtóm. Ogólnie, jest rzeczą widoczną że różniczkowe oznaczone wskaźnikiem 1 stosują się tylko do kształtu U, a różniczkowe oznaczające się wskaźnikiem 2 tylko do kształtu V, i jest niepotrzebném zachowanie wskaźników po różniczkowaniu (*); tak że symbol $\overline{12}^2$, zastosowany do dwóch

(*) Jeżeli W jest jakąkolwiek funkcyą zawierającą x_1, y_1, x_2, y_2, otrzymamy tenże sam wypadek bądź to przekształcając linijnie te zmienne i znosząc potém wszystkie wskaźniki w funkcyi przekształconéj, bądź to znosząc naprzód wskaźniki i wykonywając potém przekształcenie co do x i y. To wynika bezpośrednio z tego że x_1, y_1, x_2, y_2, x, y są przekształconemi przez toż same podstawienie. Wynika ztąd że jeżeli W napisane jako funkcya względem x_1, y_1, x_2, y_2 jest jakimkolwiek spółkształtów stopnia jakiegokolwiek, daje spółzmiennik

$$\frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2U}{dy^2}\frac{d^2V}{dx^2}-2\frac{d^2U}{dxdy}\frac{d^2V}{dxdy}.$$

Jeżeliby został po prostu zastosowanym symbol $\overline{12}$, otrzymałoby się wyznacznik Jakobiego $\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dy}-\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dx}$, który jest jakimkolwiek spółzmiennikiem dwóch kształtów (108).

Stosując symbol $\overline{12}^3$ do dwóch kształtów sześciennych, otrzymuje się niezmiennik

$$(ad'-a'd)-3(bc'-b'c),$$

a, stosując go do dwóch kształtów jakichkolwiek, spółzmiennik

$$\frac{d^3U}{dx^3}\frac{d^3V}{dy^3}-3\frac{d^3U}{dx^2dy}\frac{d^3V}{dxdy^2}+3\frac{d^3U}{dxdy^2}\frac{d^3V}{dx^2dy}-\frac{d^3U}{dy^3}\frac{d^3V}{dx^3},$$

i tak daléj dla innych potęg z $\overline{12}$.

132. Możemy także, za pomocą téj metody, otrzymać niezmienniki i spółzmienniki jakiéjkolwiek funkcyi jedynéj U. Dosyć, w rzeczy saméj, przypuścić U i V identycznemi. Tym sposobem, zróbmy, w przykładzie dwóch kształtów kwadratowych danym w numerze poprzedzającym, $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, niezmiennik staje się $2(ac-b^2)$. Tak samo, wyrażenie dane

---

zmiennikiem kształtów U i V, to jest jeżeli wyrażenie spółczynników W w funkcyi spółczynników kształtu U i V nie zmienia się przez przekształcenie, W jest zarówno jakimkolwiek spółzmiennikiem kiedy się zupełnie usunie z rachunku wskaźniki.

za spółzmiennik $\overline{12}^2$ jakiegokolwiek układu dwóch kształtów U, V staje się, robiąc U = V, spółzmiennikiem jakiegokolwiek kształtu jedynego

$$\frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^2V}{dy^2}-\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)^2.$$

Ogólnie, jeżeli chcemy, za pomocą téj metody, ustanowić spółzmienniki jakiéjkolwiek funkcyi jedynéj, uciekamy się do podejścia następnego : ustanowimy naprzód spółzmiennik jakiegokolwiek układu kształtów odrębnych, potém przypuścimy że wszystkie te kształty stają się identycznemi. Jeżeli użyjemy, nadal, symboli takich jak $\overline{12}^n$ nie wskazując do jakich funkcyj one się stosują, rozumieć będziemy po prostu że rzecz idzie o jakąkolwiek funkcyą jedyną U. Wykonamy działanie na ilukolwiek kształtach podobnych $U_1, U_2, \ldots$, w których zmienne będą oznaczone przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, zamiast x, y, i będziemy przypuszczali że po różniczkowaniu opuści się wszystkie wskaźniki i że wszystkie zmienne, jeśliby te jeszcze pozostały, są zastąpione przez x i y.

133. Ponieważ opuszcza się wszystkie wskaźniki po różniczkowaniu, widzimy bezpośrednio że wypadek jest tenże sam, jakiemikolwiek by były litery pierwotnie użyte, i że $\overline{12}^n$ i $\overline{31}^n$ oznaczają jakąkolwiek jedyną i tożsamą rzecz. Przy zastosowaniu téj metody, będziemy stale robili użycie z przekształceń opartych na téj zasadzie. I tak, możemy wykazać że, jeżeli n jest nieparzystém, wypadek działania $\overline{12}^n$, zastosowany do jakiegokolwiek kształtu jedynego, sprowadzi się do zera. Gdyż, według tego cośmy powiedzieli, $\overline{12}^n = \overline{21}^n$, lecz $\overline{12}$ i $\overline{21}$ mają znaki przeciwne, jak to widzimy bezpośrednio pisząc wyraźnie wyrazy jakie przedstawia symbol skrócony $\overline{12}$; wy-

nika ztąd że $\overline{12}^{\,n}$ musi się sprowadzić do zera gdy n jest nieparzystém. Tym sposobem, rozwinięcie $\overline{12}^{\,3}$ dane na końcu numeru 131 sprowadzi się oczywiście do zera jeżeli się zrobi $U = V$. Szereg $\overline{12}^{\,2}$, $\overline{12}^{\,4}$, $\overline{12}^{\,6}$,..., wydaje niezmienniki i spółzmienniki już otrzymane (120, 121). Łatwo dostrzedz że działanie $\overline{12}^{\,n}$, zastosowane do funkcyi $(a_0, a_1, a_2, \ldots \between x, y)^n$, daje, gdy n jest parzystém,

$$a_0 a_n - n a_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_2 a_{n-2} - \ldots,$$

ostatni spółczynnik powinien być podzielonym przez 2, jak to pokazuje sposób tworzenia się.

134. Wypadki poprzednie rozciągną się, bez trudności, do liczby jakiéjkolwiek funkcyj. Możemy wziąć ilekolwiek kształtów U, V, W,..., i dając zmiennym w pierwszym wskaźnik 1, w drugim wskaźnik 2, w trzecim 3, i tak daléj, wykonać na nich działanie wskazane przez wieloczyn z liczby jakiéjkolwiek symboli $\overline{21}^{\,\alpha}$, $\overline{23}^{\,\beta}$, $\overline{31}^{\,\gamma}$, $\overline{14}^{\,\delta}$, ..., $\overline{23}$ jest, jak powyżéj, przedstawieniem skróconem wyrażenia

$$\frac{d}{dx_2}\,\frac{d}{dy_3} - \frac{d}{dx_3}\,\frac{d}{dy_2} \cdots\cdots$$

Zniesiemy wskaźniki po różniczkowaniu, i otrzymamy tym sposobem jakikolwiek spółzmiennik układu kształtów danych sprowadzający się do jakiegokolwiek niezmiennika, jeżeli się zdarzy że nie pozostanie więcéj żadnéj potęgi co do x i y po różniczkowaniu; te kształty o liczbie jakiéjkolwiek, U, V, W,..., mogą być identycznemi, i, w przypadku jaki uważamy najczęściéj, to jest jeżeli rzecz idzie o jakikolwiek jedyny kształt, funkcye $U_1, U_2, U_3,\ldots$, na których się wykonywa działanie, będą się tylko między sobą różniły przez wskaźniki zmiennych.

Rzecz jasna że, w téj metodzie, stopień wypadku względem spółczynników będzie zawsze równym liczbie figur znajdujących się w symbolu. Gdyż, jeżeliby wszystkie funkcye były odrębnemi, funkcya tym sposobem otrzymana zawierałaby widocznie w piérwszym stopniu spółczynniki każdego ze kształtów U, V, W,..., a, kiedy te ostatnie dadzą się przypuścić identycznemi, stopień względem spółczynników będzie równym liczbie funkcyj $U_1, U_2, U_3,\ldots$, na których wykonywamy działanie. I tak, wyrażenia takie jak $\overline{12}^{\,p}$, uważane powyżéj, będą wszystkie drugiego stopnia względem spółczynników.

Przypuśćmy teraz że rzecz idzie o znalezienie stopnia względem x i y, i że kształty są naprzód odrębnemi, U jest stopnia n, V stopnia n', W stopnia n'', i tak daléj; przypuśćmy jeszcze że, w symbolu, figura 1 napotyka się α razy, figura 2 β razy, etc.; ponieważ U jest różniczkowaném α razy, V β razy, etc., wypadek będzie stopnia

$$(n-\alpha)+(n'-\beta)+(n''-\gamma)+\ldots$$

Kiedy kształty są identycznemi, znajduje się p figur w symbolu na którym wykonywamy działanie, stopień wypadku w x i y będzie

$$np-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots),$$

a jeżeli r oznacza liczbę czynników takich jak $\overline{12}$ składających symbol, widocznie że

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=2r.$$

Nakoniec, jeżeli chcemy otrzymać jakikolwiek niezmiennik, powinno się mieć

$$\alpha = \beta = \gamma = n.$$

135. Aby rzucić więcéj światła na zasady poprzednie, rozpoczniemy poszukiwać jakiemi są wszystkie niezmienniki możebne trzeciego stopnia względem społczynników. Ponieważ ich symbol nie może zawierać w sobie tylko trzy figury, jego kształtem najogólniejszym $\overline{12}^{\alpha}.\overline{23}^{\beta}.\overline{31}^{\gamma}$, i, aby otrzymać jakikolwiek niezmiennik, potrzeba żeby było

$$\alpha + \gamma = \alpha + \beta = \beta + \gamma = n, \quad \text{zkąd} \quad \alpha = \beta = \gamma.$$

Kształt ogólny jaki mamy rozebrać jest więc $\left(\overline{12}.\overline{23}.\overline{31}\right)^{\alpha}$. Jeżeli α jest nieparzystém, wypadek sprowadzi się tożsamościowo do zera; gdyż robiąc zamianę, jak w numerze 133, figur 1 i 2, mamy

$$\left(\overline{12}.\overline{23}.\overline{31}\right)^{\alpha} = \left(\overline{21}.\overline{13}.\overline{32}\right)^{\alpha};$$

lecz te dwa wyrażenia mają znaki przeciwne. Wynika ztąd że wszystkie niezmienniki trzeciego rzędu są zawarte we wzorze $\left(\overline{12}.\overline{23}.\overline{31}\right)^{\alpha}$ gdzie α jest parzystém. Tak więc $\overline{12}^{2}.\overline{23}^{2}.\overline{31}^{2}$ jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu czwartego stopnia, ponieważ różniczkowania podnoszą się do czwartego rzędu, $\overline{12}^{4}.\overline{23}^{4}.\overline{31}^{4}$ jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu ósmego, $\overline{12}^{6}.\overline{23}^{6}.\overline{31}^{6}$ jakiegokolwiek kształtu dwunastego, i tak daléj, kształty stopnia $4m$ mają same niezmienniki trzeciego rzędu względem spółczynników. Jeżeli żądamy teraz obliczyć jeden z nich, na przykład $\overline{12}^{2}.\overline{23}^{2}.\overline{31}^{2}$, napiszemy, dla większéj prostoty, $\xi_1, \eta_1, \ldots$, zamiast $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dy_1}, \ldots$, i będziemy mieli do wykonania wieloczynu

$$(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)^2 (\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)^2.$$

W wypadku, nie będziemy liczyli wskaźników i zastąpimy ξ^4 przez $\frac{d^4U}{dx^4}, \ldots$; albo, jeżeli będziemy wykonywali działanie na jakimkolwiek kształcie czwartego stopnia, przez a_0 spółczynnik potęgi x^4. Rozwinięcie może być skróconém przez różne podejścia, jakie cokolwiek praktyki natchnie bez trudności, lecz nie myślimy aby było potrzebném przytaczać je tutaj, i przestaniemy na podaniu rozwinięcia z trzech niezmienników o których rzecz idzie. $\overline{12}^2 . \overline{23}^2 . \overline{31}^2$ jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu czwartego stopnia (121, *Przykład* I, i 124):

$$a_4a_2a_0 + 2a_3a_2a_1 - a_4a_1^2 - a_0a_3^2 - a_2^3;$$

$\overline{12}^4 . \overline{23}^4 . \overline{31}^4$ daje

$$\begin{aligned}&a_8(a_4a_0 - 4a_2a_1 + 3a_2^2) + a_7(-4a_5a_0 + 12a_4a_1 - 8a_3a_2)\\ &\quad + a_6(3a_6a_0 - 8a_5a_1 - 22a_4a_2 + 24a_3^2)\\ &\quad + a_5(24a_5a_2 - 36a_4a_3) + 15a_4^3;\end{aligned}$$

a $\overline{12}^6 . \overline{23}^6 . \overline{31}^6$

$$\begin{aligned}&a_{12}(a_6a_0 - 6a_5a_1 + 15a_4a_2 - 10a_3^2)\\ &\quad + a_{11}(-6a_7a_0 + 30a_6a_1 + 54a_5a_2 + 30a_4a_3)\\ &\quad + a_{10}(15a_6a_0 + 54a_7a_1 + 24a_6a_2 + 150a_5a_3 - 135a_4^2)\end{aligned}$$

$$+ a_9(-10a_9a_0 + 30a_8a_1 + 150a_7a_2 - 430a_6a_3 + 270a_5a_4)$$
$$+ a_8(-135a_8a_2 + 270a_7a_3 + 495a_6a_4 - 540a_5^2)$$
$$+ a_7(-540a_7a_4 + 720a_6a_5) - 280a_6^3.$$

136. Lubo nie ma innego typu niezmiennika trzeciego rzędu jak ten jakiśmy świeżo wskazali, istnieje przecież liczba nieograniczona spółzmienników; najprostszym jest $\overline{12}^2 . \overline{13}$, którego rozwinięcie ma za swe wyrażenie

$$\frac{d^3U}{dx^3}\frac{d^2U}{dy^2}\frac{dU}{dy} - \frac{d^3U}{dx^2dy}\left(2\frac{d^2U}{dxdy}\frac{dU}{dy} + \frac{d^2U}{dy^2}\frac{dU}{dx}\right)$$
$$+ \frac{d^3U}{dxdy^2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\frac{dU}{dy} + 2\frac{d^2U}{dxdy}\frac{dU}{dx}\right) - \frac{d^3U}{dy^3}\frac{d^2U}{dx^2}\frac{dU}{dx}.$$

Kiedy zastosuje się go do jakiegokolwiek kształtu trzeciego stopnia, daje on przewoźnik już otrzymany (122).

Typem ogólnym niezmienników czwartego rzędu, względem spółczynników jest $(\overline{12}.\overline{34})^\alpha(\overline{13}.\overline{24})^\beta(\overline{14}.\overline{23})^\gamma$. Tym sposobem dyskryminant jakiegokolwiek kształtu sześciennego jest przedstawiony przez znakowanie $(\overline{12}.\overline{34})^2(\overline{13}.\overline{24})$; lecz nie możemy wejść tu w większe szczegóły o tym przedmiocie.

137. Zasady jakieśmy świeżo położyli posłużą za dowód łatwy twierdzenia znakomitego, należnego p. Hermite'owi, i jakie oznaczymy pod nazwiskiem *prawa wzajemności : Liczba niezmienników* n^{tego} *rzędu względem spółczynników jaką posiada jakikolwiek kształt podwójny stopnia* p *jest równa liczbie niezmienników rzędu* p *jaką posiada jakikolwiek kształt stopnia* n.

Już widzieliśmy że jeżeli jakikolwiek symbol $\overline{12}^a . \overline{23}^b . \overline{34}^c \ldots$, przedstawia, jakikolwiek niezmiennik rzędu p względem spółczynników jakiegokolwiek kształtu stopnia n, liczbą figur 1, 2, 3,..., jest p, i każda z nich znajduje się w nim (to jest w niezmienniku) powtórzoną n razy. Lecz możemy obliczyć przez metodę numeru 116 jakikolwiek niezmiennik $\Sigma(\alpha - \beta)^a (\beta - \gamma)^b (\gamma - \delta)^c \ldots$, zastąpić każdy symbol taki jak $\overline{34}$, przez różnicę z dwóch pierwiastków $(\gamma - \delta)$. Ten ostatni jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu stopnia p, ponieważ znajduje się w nim p pierwiastków, i jest on rzędu n względem spółczynników tego kształtu (35).

I tak, na przykład, jakikolwiek kształt kwadratowy ma tylko jeden niezmiennik niezależny $(\alpha - \beta)^2$, lecz wszystkie jego potęgi są widocznie niezmiennikami których typem ogólnym jest $(\alpha - \beta)^m$. Przeto, kształty stopnia parzystego mają same niezmienniki drugiego rzędu względem spółczynników, a ich symbolem jest $\overline{12}^{2m}$. Podobnież, kształty sześcienne nie mają innego niezmiennika jak dyskryminant $(\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2$ i jego potęgi; ten dyskryminant jest czwartego rzędu względem spółczynników. Przeto, kształty stopnia $4m$ mają same niezmienniki sześcienne których typem ogólnym jest $\overline{12}^{2m} . \overline{23}^{2m} . \overline{31}^{2m}$. Dowiedziemy że kształty czwartego stopnia mają dwa niezmienniki niezależne, jeden drugiego, drugi trzeciego rzędu względem spółczynników, a tém samém wszelka potęga jednego pomnożona przez jakąkolwiek potęgę drugiego jest jakimkolwiek bądź niezmiennikiem. Wywodzi się ztąd że kształty czwartego stopnia mają tyle niezmienników rzędu p ile zrównanie $2x + 3y = p$ przybierze rozwiązań całkowitych. Jest to przeto zarówno liczbą niezmienników czwartego rzędu jakie może mieć jakikolwiek kształt stopnia p.

138. P. Hermite dowiódł że jego twierdzenie stosuje się zarówno do spółzmienników jakiegokolwiek stopnia danego w x i y; to jest że jakikolwiek kształt stopnia n posiada tyle

spółzmienników rzędu p względem spółczynników ile jakikolwiek kształt stopnia p posiada spółzmienników rzędu n. W rzeczy saméj, zauważmy jakikolwiek symbol $\overline{12}^{\lambda}.\overline{23}^{\mu}.\overline{34}^{\nu}\ldots$, zawierający p figur, figura 1 wchodzi weń a razy, figura 2 b razy, i tak daléj. Dowiedliśmy że stopniem tego spółzmiennika w x i y jest $(n-a)+(n-b)+\ldots\ldots$; lecz możemy utworzyć funkcyą symetryczną

$$\Sigma(\alpha-\beta)^{\lambda}(\beta-\gamma)^{\mu}(\gamma-\delta)^{\nu}\ldots(x-\alpha)^{n-a}(x-\beta)^{n-b}\ldots$$

ta funkcya będzie (117) jakimkolwiek spółzmiennikiem kształtu stopnia p, mającym za pierwiastki α, β,...; każdy pierwiastek wchodząc do tego wyrażenia w stopniu n, ten spółzmiennik będzie n^{tego} rzędu względem spółczynników, i zawierać będzie widocznie x i y w tymże samym stopniu jak poprzednio, to jest $(n-a)+(n-b)+\ldots$ I tak, na przykład, jedyne spółzmienniki jakie posiada jakikolwiek kształt kwadratowy otrzymują się mnożąc jakąkolwiek potęgę kształtu przez jakąkolwiek potęgę swego dyskryminanta, a ich typem ogólnym jest

$$(\alpha-\beta)^{2p}(x-\alpha)^{q}(x-\beta)^{q}.$$

Ich stopień względem spółczynników jest $2p+q$, a względem x i y, $2q$. Wniesiemy ztąd że wszelki kształt stopnia $2p+q$ ma jakikolwiek spółzmiennik drugiego rzędu względem spółczynników, a stopnia $2q$ względem x i y, symbolem tych spółczynników jest $\overline{12}^{2p}$. Gdy $q=1$, wracamy do twierdzenia numeru 121 : *wszelki kształt stopnia nieparzystego ma jakikolwiek spółzmiennik kwadratowy.*

139. Znakowanie symboliczne poprzednie dostarczy jakikolwiek układ rachunku zupełnego za pomocą którego można przekształcić niezmienniki i spółzmienniki, i rozpoznać tosamość

pewnych przekształceń. Damy poniżej kilka przykładów tych przekształceń; pokażemy naprzód w jaki sposób można, z wyrażenia symbolicznego jakiejkolwiek funkcyi, wyprowadzić wyrażenie jakiejkolwiek innej funkcyi wypływającej z pierwszej przez nowe działania. Widocznie że jeżeli mamy jakąkolwiek funkcyą wzgledem $x_1, x_2, x_3, \ldots$, przyjdziemy do tegoż samego wypadku, bądź to znosząc wszystkie wskaźniki i różniczkując potém względem x, bądź to tworząc summę pochodnych częściowych względem x_1, x_2, $x_3, \ldots$, i znosząc potem wskaźniki. Pochodna względem x z jakiegokolwiek wyrażenia symbolicznego zawiera figury 1, 2, 3, ..., otrzyma się więc wykonywając na tem wyrażeniu działanie $\frac{d}{dx_1}+\frac{d}{dx_2}+\frac{d}{dx_3}+\ldots$ Metoda pojmie się łatwiej stosując ją do jakiegokolwiek przypadku szczególnego. Załóżmy sobie na przykład obliczyć wyznacznik Hessowy wyznacznika Hessowego jakiegokolwiek kształtu danego. Wiemy że Hessowy $\overline{12}^2$ otrzymuje się wykonywając na dwóch kształtach identycznych U_1, U_2 działanie wskazane przez symbol $(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2$ w którym ξ i η oznaczają, jak powyżej, różniczkowania względem x i y. Dla utworzenia Hessowego $\overline{12}^2$, będziemy mieli do wykonania to działanie na dwóch funkcyach podobnych $\overline{12}^2$, $\overline{34}^2$, litera ξ_1 przedstawia tą razą nie już $\frac{d}{dx_1}$ lecz $\frac{d}{dx_1}+\frac{d}{dx_2}$, litera ξ_2 przedstawia podobnież $\frac{d}{dx_3}+\frac{d}{dx_4}$,... Widzimy tym sposobem bez trudu że wyrażeniem szukanem jest

$$\left(\overline{13}+\overline{14}+\overline{23}+\overline{24}\right)^2\overline{12}^2.\overline{34}^2,$$

lub, rozwijając,

$$4\left(\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}^2\right)+4\left(\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{24}\right)+8\left(\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{14}\right).$$

Dla wzięcia jakiegokolwiek przykładu więcej zawikłanego, wyznaczymy jeszcze wyrażenie symboliczne wypadku jaki otrzymałoby się wykonywając działanie $\overline{12}^2 . \overline{23}^2 . \overline{31}^2$ na trzech funkcyach H, T i U, H jest Hessowym $\overline{12}^2$, T spółzmiennikiem $\overline{12}^2 . \overline{23}^2 . \overline{31}^2$, a U kształtem pierwotnym.

Będziemy musieli naprzód użyć figur różnych dla H i T, i, w tym celu, napisać

$$T = \overline{34}^2 . \overline{45}^2 . \overline{53}^2 ;$$

będziemy mieli potem do wykonywania na trzech funkcyach działanie wskazane przez symbol

$$(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2(\xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3)^2(\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)^2,$$

w którym ξ_1 musi być zastąpionem przez $\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2}$, ξ_2 przez $\frac{d}{dx_3} + \frac{d}{dx_4} + \frac{d}{dx_5}$; a ξ_3 przez $\frac{d}{dx_6}$. Znajduje się tym sposobem, rozwijając, wyrażenie

$$\left(\overline{13} + \overline{14} + \overline{15} + \overline{23} + \overline{24} + \overline{25}\right)^2$$

$$\times\left(\overline{36} + \overline{46} + \overline{56}\right)^2\left(\overline{16} + \overline{26}\right)^2 . \overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{45}^2 . \overline{53}^2 .$$

140. Metody poprzednie rozciągną się do liczby jakiejkolwiek zmiennych. Niech będę x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 trzy układy zmiennych mogących być przekształconemi przez jakiekolwiek tož samo podstawienie. Według prawidła na mnożenie wyznaczników, wyznacznik

$$x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$

jest jakimkolwiek niezmiennikiem który, przez przekształcenie, wydaje jakąkolwiek bądź funkcyą podobną pomnożoną przez moduł przekształcenia. Otoż, jeżeli zastąpimy x przez $\frac{d}{dx_1}$, y_2 przez $\frac{d}{dy_2}$,..., otrzymujemy jakikolwiek bądź symbol jaki napiszemy $\overline{123}$. Kiedy chcemy mieć niezmienniki lub spółzmienniki jakiejkolwiek bądź funkcyi danej U, mamy tylko wykonać na ilukolwiek funkcyach U_1, U_2, U_3,..., U_p działanie wskazane przez wieloczyn ilukolwiek symboli, takich jak $\overline{123}^{\alpha}.\overline{124}^{\beta}.\overline{235}^{\gamma}...$, znosząc wszystkie wskaźniki po różniczkowaniu. Na przykład, jeżeli U_1, U_2, U_3 są kształtami kwadratowemi potrójnemi, i gdy a, b, c, $2f$, $2g$, $2h$ oznaczają, jak w numerach 85 i 114, spółczynniki kształtu U_1, symbol $\overline{123}^2$ rozwinięty daje

$$
\begin{aligned}
&a(b'c'' + b''c' - 2f'f'') + b(c'a'' + c''a' - 2g'g'') \\
&+ c(a'b'' + a''b' - 2h'h'') + 2f(g'h'' + g''h' - a'f'' - a''f') \\
&+ 2g(h'f'' + h''f' - b'g'' - b''g') \\
&+ 2h(f'g'' + f''g' - c'h'' - c''h'),
\end{aligned}
$$

wyrażenie sprowadzające się, przypuszczając trzy kształty identycznemi i dzieląc przez 6, do

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

Zastępując a, spółczynnik potęgi x^2, przez $\frac{d^2U}{dx^2}$,..., otrzymamy rozwinięcie ze $\overline{123}^2$ zastosowane do funkcyi potrójnej jakiejkolwiek. Ten spółzmiennik jest *wyznacznikiem Hessowym* funkcyi.

Łatwo dostrzedz, jak w numerze 133, że potęgi nieparzyste, symbolu $\overline{123}$ sprowadzają się do zera kiedy ten symbol stosuje się do jakiejkolwiek jedynej funkcyi. Weźmy za drugi przykład rozwinięcie ze $\overline{123}^4$ zastosowane do kształtu czwartego stopnia

$$\begin{aligned} & ax^4 + by^4 + cz^4 \\ & \quad + 4(a_2x^3y + a_3x^3z + b_3y^3z + b_1y^3x + c_1z^3x + a_2z^3y) \\ & \quad + 6(dy^2z^2 + ez^2x^2 + fx^2y^2) + 12xyz(lx + my + nz). \end{aligned}$$

Wartością ze $\overline{123}^4$ jest

$$\begin{aligned} & abc - 4(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) \\ & \quad + 4(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) \\ & \quad - 12(a_2nd + a_3md + b_1ne + b_3le + c_1mf + c_2lf) \\ & \quad + 12(lb_1c_1 + mc_2a_2 + na_3b_3) + 12(dl^2 + em^2 + fn^2) \\ & \quad + 6def - 12lmn. \end{aligned}$$

141. Możemy wyrazić tak samo funkcye zawierające zmienne α, β, γ, przekształcające się przez podstawienie odwrotne; w rzeczy samej, ponieważ te funkcye przekształcają się przez tož same podstawienie jak pochodne $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$, wyznacznik symboliczny

$$\alpha\left(\frac{d}{dy_1}\frac{d}{dz_2} - \frac{d}{dy_2}\frac{d}{dz_1}\right) + \beta\left(\frac{d}{dz_1}\frac{d}{dx_2} - \frac{d}{dz_2}\frac{d}{dx_1}\right)$$
$$+ \gamma\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} + \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right),$$

jaki oznaczymy, dla skrócenia, przez $\overline{\alpha 12}$, będzie nam mógł posłużyć do utworzenia przeciwzmienników lub spółzmienników mieszanych. Tak więc gdy U_1, U_2 przedstawiają kształty kwadratowe potrójne, $\overline{\alpha 12}^2$ rozwinięty daje

$$\begin{aligned}&\alpha^2(b'c'' + b''c' - 2f'f'') + \beta^2(c'a'' + c''a' - 2g'g'')\\ &+ \gamma^2(a'b'' + a''b' - 2h'h'')\\ &+ 2\beta\gamma(g'h'' + g''h' - a'f'' - a''f')\\ &+ 2\gamma\alpha(h'f'' + h''f' - b'g'' - b''g')\\ &+ 2\alpha\beta(f'g'' + f''g' - c'h'' - c''h'),\end{aligned}$$

i znajdujemy przeciwzmiennik obliczony w numerze 114 (Prz. II).

Otrzyma się tak samo przeciwzmiennik kształtu czwartego stopnia powyższy, rozwijając symbol $\overline{\alpha 12}^4$.

Mamy tylko zastąpić, w tych dwóch funkcyach, spółczynnik każdej potęgi x^n zmiennej x przez $\frac{d^n}{dx^n}$ dla otrzymania symbolu dostarczającego jakikolwiek spółzmiennik mieszany kiedy ten symbol zastosowanym być może do jakiegokolwiek kształtu więcej podniesionego. Tym sposobem $\overline{\alpha 12}^2$ rozwinięte daje

$$\alpha^2\left[\frac{d^2U}{dy^2}\,\frac{d^2U}{dz^2} - \left(\frac{d^2U}{dydz}\right)^2\right] + \cdots,$$

wyrażenie które, zastosowane do jakiegokolwiek kształtu kwadratowego, daje po prostu jakikolwiek przeciwzmiennik, lecz które, dla jakiegokolwiek kształtu stopnia wyższego, zawiera x, y, z jak α, β, γ, a tém samém, jest jakimkolwiek spółzmiennikiem mieszanym, Ogólnie, jeżeli mamy wyrażenie symboliczne niezmiennika jakiegokolwiek kształtu podwójnego, dosyć tylko położyć przed każdym wyrazem symbol przeciwzmiennika α, aby otrzymać przeciwzmiennik jakiegokolwiek kształtu potrójnego tegoż samego stopnia.

142. Jeżeli, w przeciwzmienniku, zastąpi się α, β, γ przez $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$, i gdy wykona się potem działanie na U, otrzymuje się jakikolwiek spółzmiennik (119) którego symbol wyprowadzi się z symbolu przeciwzmiennika pisząc w nim nową figurę na miejsce α. I tak z $\overline{\alpha 23}^2$ wyciąga się $\overline{123}^2$; z $\overline{\alpha 23}\,.\,\overline{\alpha 24}$, $\overline{123}\,.\,\overline{124}$,... Odwrotnie, jeżeli, w symbolu jakiegokolwiek niezmiennika, zastąpi się jakąkolwiek bądź figurę przez symbol α przeciwzmienników, otrzymuje się przewoźnik tego niezmiennika. I tak wyrażenie

$$\overline{123}\,.\,\overline{124}\,.\,\overline{234}\,.\,\overline{314}$$

będąc niezmiennikiem jakiegokolwiek bądź kształtu sześciennego, jego przewoźnikiem będzie

$$\overline{123}\,.\,\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 23}\,.\,\overline{\alpha 31}.$$

W przypadku jakiegokolwiek kształtu podwójnego, to prawidło się upraszcza : jeżeli zastąpi się figurę 1 w $\overline{12}$ przez symbol przeciwzmienników, to wyrażenie staje się rozwijając $\xi \frac{d}{dy} + \eta \frac{d}{dx}$; lecz ξ i η będąc przekształcone przez tož same podstawienie jak $-y$ i x, powyższe wyrażenie przywodzi się do $x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy}$, i może wtedy być zupełnie zniesioném gdyż ono tylko wprowadza do wypadku jakikolwiek czynnik liczebny.

Przeto, jeżeli ma się symbol niezmiennika w jakimkolwiek kształcić podwójnym, symbol jego przewoźnika ztąd się wyciąga znosząc czynniki zawierające jakąkolwiek toż samą figurę. I tak symbol

$$\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{24}$$

przedstawiając dyskryminant w jakimkolwiek kształcie sześciennym, jego przewoźnikiem, znosząc czynniki zawierające 4, będzie

$$\overline{12}^2 . 13.$$

Jeżeli w przeciwzmienniku zastąpi się α, β, γ, przez $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$, ma się jakikolwiek spółzmiennik którego symbol wyciąga się z symbolu przeciwzmiennika pisząc na miejsce każdej litery α nową figurę *różną* : i tak z $\overline{\alpha 34}^2$ wyciąga się $\overline{134} . \overline{234}$, i tak dalej.

143. Sposób postępowania użyty w numerze 139 dla kształtów podwójnych stosuje się bez trudności do liczby jakiejkolwiek zmiennych. Przypuśćmy na przykład że się żąda, dla jakiegokolwiek kształtu sześciennego potrójnego, wyrażenie niezmiennika jaki się otrzymuje wykonywając działanie na wyznaczniku Hessowym z przewoźnikiem

$$\overline{123} . \overline{\alpha 12} . \overline{\alpha 23} . \overline{\alpha 31}$$

numeru 142 : otrzymamy je zastępując w tym ostatnim symbolu α przez $4 + 5 + 6$ i wykonywając potem działanie na funkcyi

$\overline{456}^2$. Rozwijając i znosząc wszystkie wyrazy zawierające więcej niż trzy razy figury 4, 5, 6, znajduje się dla wyrażenia szukanego

$$\overline{123}\,.\,\overline{124}\,.\,\overline{235}\,.\,\overline{316}\,.\,\overline{456}^2.$$

144. Pokażemy teraz na niektórych przykładach w jaki sposób znakowania symboliczne pozwolą przekształcić wyrażenie niezmienników i spółzmienników. Zasadą tych przekształceń jest, dla kształtów podwójnych, tożsamość następna

$$D_1\overline{23} + D_2\overline{31} + D_3\overline{12} = 0,$$

w której D_1 przedstawia, przez skrócenie, $x\dfrac{d}{dx_1} + y\dfrac{d}{dy_1}$. Łatwo jest dojrzeć w rzeczy samej że rozwijając, spółczynniki co do x i y sprowadzają się do zera. Aby dać lepiej zrozumieć użycie tej tożsamości, wskażemy jej pierwsze zastosowanie więcej po szczególe rozwinięte jak będzie to potrzebném do dalszych przytoczonej powyżej zasady zastosowań.

Kładąc zrównanie pod kształtem

$$D_1\overline{23} = D_2\overline{13} - D_3\overline{12}$$

i podnosząc do kwadratu, przyjdzie

$$D_2^2\overline{13}^2 + D_3^2\overline{12}^2 - D_1^2\overline{23}^2 = 2D_2D_3\overline{12}\,.\,\overline{13},$$

związek który jest prawdziwym wtedy nawet gdy trzy kształty U_1, U_2, U_3 na których jesteśmy obowiązani wykonywać działanie są różnemi. Lecz będziemy uważali tu tylko przypadek jakiegokolwiek jedynego kształtu i przypuścimy że U_1, U_2, U_3 stają się identycznemi kiedy się zniesie wskaźniki zmiennych; w tym przypadku widzieliśmy (133) że trzy wyrażenia $D_1^2\overline{23}^{\,2}$, $D_2^2\overline{31}^{\,2}$, $D_3^2\overline{12}^{\,2}$ oznaczają jedyną i też samą rzecz. Działanie poprzednie sprowadzi się do

$$D_3^2\overline{12}^{\,2} = 2D_2D_3\overline{12}\,.\,\overline{13}.$$

Lecz na mocy twierdzenia znanego o funkcyach jednorodnych, działanie D wykonane na jakiejkolwiek bądź funkcyi nie ma innego skutku jak pomnożenie jej przez jakikolwiek czynnik liczebny: w pierwszej stronie zrównania, D_3^2 przybierając tylko U_2, które nie jest różniczkowaném, tym czynnikiem będzie $n(n-1)$; w drugiej stronie, D_2, D_3 przyjmując funkcye już różniczkowane raz jeden, wprowadzają czynnik $n-1$. Przeto, rozwijając, znosząc wskaźniki i dzieląc przez $2(n-1)$, mamy

$$nU\left[\frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^2U}{dy^2}-\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)^2\right]$$

$$=(n-1)\left[\frac{d^2U}{dx^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2-2\frac{d^2U}{dxdy}\frac{dU}{dx}\frac{dU}{dy}+\frac{d^2U}{dy^2}\left(\frac{dU}{dx}\right)^2\right].$$

145. Potrzeba zauważyć że w każdym razie gdy przekształcenie ma za skutek zmniejszenie liczby figur w symbolu, kształt pierwotny U musi pokazać się jako czynnik w wyrażeniu funkcyi. W rzeczy samej, widzimy za pomocą przykładu powyższego że $\overline{12}\,.\,\overline{13}$ i $\overline{12}^{\,2}$ różnią się tylko między sobą jakimkolwiek czynnikiem liczebnym; lecz gdy wykonamy działanie na trzech funkcyach U_1, U_2, U_3 i gdy symbol $\overline{12}^{\,2}$ nie przyjmuje U_2. funkcya U musi pozostać jako czynnik, kiedy się znosi wskaźniki.

146. Ogólnie, wszelki symbol może być przekształconym tak ażeby potęga najwyższa czynnika jakiegokolwiek $\overline{12}$ była parzystą; w rzeczy samej, kierunek nie będąc zmienionym przez zrobienie zamiany figur 1 i 2, mamy

$$\overline{12}^{2m+1}\varphi_1 = -\overline{12}^{2m+1}\varphi_2 = \frac{1}{2}\overline{12}^{2m+1}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

a, za pomocą tożsamości numeru 144, funkcya $\varphi_1 - \varphi_2$ może być przekształconą w sposób taki aby się stała podzielną przez $\overline{12}$. Tak więc, gdy m jest nieparzystem, dwa wyrażenia $\overline{12}^m.\overline{13}$ i $\overline{12}^{m+1}$ różnią się tylko między sobą jakimkolwiek czynnikiem; gdyż ma się

$$2D_2\overline{12}^m.\overline{13} = \overline{12}^m(D_2\overline{13} - D_1\overline{23}) = D_3\overline{12}^{m+1}$$

lub też, n będąc stopniem funkcyi U na której wykonywa się działanie,

$$2(n-m)\overline{12}^m.\overline{13} = n.\overline{12}^{m+1}.$$

147. Możemy przydać do tożsamości numeru 144 związek następujący, jaki jest łatwo sprawdzić.

$$\overline{12}.\overline{34} + \overline{13}.\overline{42} + \overline{14}.\overline{23} = 0,$$

i, za pomocą tych dwóch zrównań, sprowadzić wszystkie symbole do pewnej liczby kształtów typowych jakie wskażemy przez litery szczególne. Dla dwóch czynników, przyjmiemy jako typ wyznacznik Hessowy

$$H = \overline{12}^2;$$

dla trzech czynników

$$G = \overline{12}^2 . \overline{13} \qquad (136);$$

dla czterech czynników,

$$S = \overline{12}^4 \quad (121) \quad \text{lub} \quad H^2 = \overline{12}^2 . \overline{34}^2;$$

dla pięciu czynników,

$$F = \overline{12}^4 . \overline{13} \quad \text{lub} \quad GH = \overline{12}^2 . \overline{13} . \overline{45}^2;$$

dla sześciu czynników,

$$A = \overline{12}^6 \quad (133) \quad \text{lub} \quad T = \overline{12}^2 . \overline{23}^2 . \overline{31}^2 \quad (135)$$

$$\text{lub też} \quad H^3 = \overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{56}^2,$$

tak dalej. Przykłady następujące dadzą zrozumieć sposób postępowania dla otrzymania tych uproszczeń.

PRZYKŁAD I. — *Dowieść że jeżeli się zastąpi w funkcyi* U, x *przez* $\frac{dU}{dy}$, *a* y *przez* $-\frac{dU}{dx}$, *spółzmiennik tym sposobem otrzymany jest podzielnym przez* U.

Oznaczmy naprzód wyrażenie symboliczne tego spółzmiennika. Funkcya dana U może się napisać pod kształtem $\left(x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dx}\right)^n$ U. Gdy się zrobi w niéj podstawienie wskazane, każdy z n czynników przyjmuje kształt $\frac{d}{dx}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dy}\frac{d}{dx_2}$. Spółzmiennik $\frac{d^nU}{dx^n}\left(\frac{dU}{dy}\right)^n - \ldots$ wyrazi się więc symbolicznie jako wieloczyn z n czynników 12.13.14..., jeden z symboli (ten który w rozwinięciu daje pochodne rzędu n) pozostaje tymże samym we wszystkich czynnikach, gdy tymczasem drugi musi być różnym dla każdego czynnika, ażeby po rozmnożeniu miało się tylko potęgi pochodnych piérwszego rzędu. Oznaczywszy więc 12.13 przez Q_2, 12.13.14 przez Q_3, 12.13.14.15 przez Q_4, etc., mamy wyrazić $Q_2, Q_3, Q_4, \ldots,$ w funkcyi kształtów wybranych jako typy.

1° Wartość Q_2 była już daną (144); obliczymy Q_3. Mnóżmy zrównanie

$$2D_2D_3\overline{12}.\overline{13}=D_2^2\overline{13}^2+D_3^2\overline{12}^2+D_1^2\overline{23}^2$$

numeru 144 przez 14; dwa piérwsze wyrazy drugiéj strony stają się identycznémi, trzeci zniszczy się, i przyjdzie

$$D_2D_3\overline{12}.\overline{13}.\overline{14}=D_2^2\overline{13}^2.\overline{14} \qquad \text{lub też} \qquad (n-1)Q_3=nGU.$$

Ogólnie, wszelki symbol może być skupiony zastępując każdą parę czynników prostych mających jakąkolwiek figurę spólną takich jak $\overline{12}.\overline{13}$, przez jakikolwiek jedyny czynnik kwadratowy za pomocą zrównania poprzedniego.

2° Obliczmy teraz Q_4. Pomnóżmy dwa zrównania

$$2D_2D_3\overline{12}.\overline{13}=D_3^2\overline{12}^2+D_2^2\overline{13}^2-D_1^2\overline{23}^2,$$

$$2D_4D_5\overline{14}.\overline{15}=D_5^2\overline{14}^2+D_4^2\overline{15}^2-D_1^2\overline{45}^2;$$

przyjdzie, zbierając wyrazy podobne,

$$\begin{aligned}4(n-1)^4Q_4 &= D_1^4\overline{23}^2.\overline{45}^2-4D_1^2D_3^2\overline{12}^2.\overline{45}^2+4D_3^2D_5^2\overline{12}^2.\overline{14}^2\\ &=-3n(n-1)(n-2)(n-3)H^2U\\ &\quad+4n^2(n-1)^2U^2.\overline{12}^2.\overline{13}^2.\end{aligned}$$

Pozostaje nam tylko wyrazić $\overline{12}^2 . \overline{13}^2$ w funkcyi kształtów typów. Podnieśmy do czwartéj potęgi zrównanie

$$D_1\overline{23} = D_2\overline{13} - D_3\overline{12}\,;$$

mamy, grupując wyrazy podobne,

$$6D_2^2D_3^2\overline{12}^2 . \overline{13}^2 = 8D_3^3D_2\overline{12}^2 . \overline{13} - D_3^4\overline{12}^4\,;$$

lecz, jak w numerze 146 ma się

$$8D_3^3D\,\overline{12}^3 . 13 = 4D_3^4\overline{12}^4,$$

przeto podstawiając

$$2(n-2)(n-3)\overline{12}^2 . \overline{13}^2 = n(n-1)SU\,;$$

więc nakoniec

$$4(n-1)^4(n-2)(n-3)Q_4$$
$$= -3n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2H^2U + 2n^3(n-1)^3SU^3.$$

Znajdzie się wartości Q_5 i Q_6 obliczone, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. IX, str. 23.

PRZYKŁAD II. — *Dowieść że wyznacznik Hessowy Hessowego jest jakąkolwiek funkcyą linijną co do* SH *i* TU.

Znaleźliśmy (139) że wyrażeniem tej funkcyi jest

$$4\left(\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13}^2\right) + 4\left(\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{24}\right) + 8\left(\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{14}\right),$$

i potrzeba dowieść że każdy z tych trzech wyrazów jest przywiedlnym do kształtów $\alpha SH + \beta TU$.

1° Zaczniemy od $\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13}^2$. Pomnóżmy przez $\overline{14}^2$ wieloczyn dwóch zrównań

$$2D_2D_3\,\overline{12}.\overline{13} = D_3^2\,\overline{12}^2 + D_2^2\,\overline{13}^2 - D_1^2\,\overline{23}^2,$$

$$2D_2D_3\,\overline{24}.\overline{34} = D_3^2\,\overline{24}^2 + D_2^2\,\overline{34}^2 - D_4^2\,\overline{23}^2,$$

przyjdzie

$$4D_2^2D_3^2\,\overline{12}.\overline{13}.\overline{24}.\overline{34}.\overline{14}^2$$

$$= 2D_3^4\,\overline{12}^2.\overline{24}^2 + D_1^2D_4^2\,\overline{23}^4.\overline{14}^2 - 2D_2^2D_4^2\,\overline{13}^2.\overline{23}^2.\overline{14}^2;$$

lecz podnosząc do kwadratu tosamość numeru **147**, mamy

$$2.\overline{14}^2.\overline{12}.\overline{13}.\overline{24}.34 = \overline{14}^2\left(\overline{12}^2.\overline{34}^2 + \overline{13}^2.\overline{24}^2 - \overline{14}^2.\overline{23}^2\right),$$

a tém samém, pierwsza strona zrównania poprzedniego staje się

$$4D_2^2D_3^2\,\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{14}^2 - 2D_2^2D_3^2\,\overline{14}^4.\overline{23}^2;$$

zkąd, sprowadzając,

$$6D_2^2D_3^2\,\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{14}^2 = 3D_2^2D_3^2\,\overline{14}^4.\overline{23}^2 + 2D_3^4\,\overline{12}^2.\overline{24}^2.\overline{14}^2$$

albo też

$$6(n-2)(n-3)\,\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}^2 = 3(n-2)(n-3)SH + 2n(n-1)TU.$$

2° Przejdźmy do wyrazu $\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{24}$. Pomnóżmy przez $\overline{12}^2$ wieloczyn dwóch zrównań

$$2D_4D_1\,\overline{13}.\overline{34} = D_1^2\,\overline{34}^2 + D_4^2\,\overline{13}^2 - D_3^2\,\overline{14}^2,$$

$$2D_2D_3\,\overline{24}.\overline{34} = D_2^2\,\overline{34}^2 + D_2^2\,\overline{24} - \cdot\quad \overline{23}^2$$

mamy

$$-4D_1D_2D_3D_4\overline{12}^2.\overline{34}^2.13.24$$

$$=D_1^2D_2^2\overline{12}^2.\overline{34}^4+2D_3^2D_4^2\overline{12}^2.\overline{13}^2.\overline{24}^2-2D_4^4\overline{12}^2.\overline{23}^2.\overline{31}^2;$$

zkąd, zastępując $\overline{12}^2.\overline{13}^2.\overline{24}^2$ przez wartość znalezioną powyżéj,

$$-12(n-3)^3\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{24}$$

$$=6(n-2)^2(n-3)SH-4n(n-1)(n-2)TU.$$

3° Uważmy nakoniec wyraz $\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{14}$. Mamy tylko zastąpić $\overline{13}.\overline{14}$ przez wartość wyciągniętą z tosamości numeru 144, toż przyjdzie

$$2D_3D_4\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{14}=2D_4\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}^2-D_1^2\overline{12}^2.\overline{34}^4,$$

a, podstawiając jak powyżéj,

$$6(n-3)^2\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{13}.\overline{14}=2n(n-1)TU.$$

Zbierając trzy wyrazy, ma się więc dla wyrażenia szukanego jakąkolwiek funkcyą linijną co do SH i TU.

148. Metody poprzednie stosują się do kształtów zawierających liczbę jakąkolwiek zmiennych. Dla kształtów potrójnych, użyje się tosamości

$$D_4\overline{123}=D_1\overline{234}+D_2\overline{314}+D_3\overline{124},$$

$$\overline{123}.\overline{145}+\overline{124}.\overline{153}+\overline{125}.\overline{134}=0,$$

do których przyda się związki odpowiednie dla spółzmienników

$$P\overline{123} = D_1\alpha\overline{23} + D_2\alpha\overline{31} + D_3\alpha\overline{12},$$

$$\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 34} + \overline{\alpha 23}\,.\,\overline{\alpha 14} + \overline{\alpha 31}\,.\,\overline{\alpha 24} = 0,$$

P oznaczając, dla skrócenia, funkcyą $\alpha x + \beta y + \gamma z$.

PRZYKŁAD I. — *Znaleźć jakikolwiek związek między spółzmiennikami czwartego rzędu jakiegokolwiek kształtu potrójnego czwartego stopnia.*

Niech będą α, β, γ, δ ilości jakiekolwiek połączone związkiem

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Podnosząc dwa razy do kwadratu, jest łatwo dostrzedz że ma się

$$8\alpha\beta\gamma\delta = 2\Sigma\alpha^2\beta^2 - \Sigma\alpha^4.$$

Stosując ten wzór do zrównania identycznego

$$D_4\,\overline{123} = D_1\,\overline{234} + D_2\,\overline{314} + D_3\,\overline{124},$$

mamy

$$8D_1D_2D_3D_4\,\overline{123}\,.\,\overline{124}\,.\,\overline{234}\,.\,\overline{314} = 4D_4^4\,\overline{123}^4 - 12D_3^2D_4^2\,\overline{123}^2\,.\,\overline{124}^2,$$

jest to właśnie związek szukany.

PRZYKŁAD II. — *Dowieść że jeżeli się zastąpi w emanantach jakiegobądź kształtu potrójnego,* x, y, z *przez* $\gamma\frac{dU}{dy} - \beta\frac{dU}{dz}$, $\alpha\frac{dU}{dz} - \gamma\frac{dU}{dx}$, $\beta\frac{dU}{dx} - \alpha\frac{dU}{dy}$, *związki otrzymane są kształtu*

$$P_nU + Q_n(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2.$$

Łatwo dostrzedz że wyrażeniem symboliczném tych wypadków jest $\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13}\,.\,\overline{\alpha 14}\,.\,\overline{\alpha 15} \ldots\ldots$ Obliczmy wartości P_2, Q_2, P_3, Q_3 (*).

1° Dla otrzymania wartości $\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13}$, mamy tylko podnieść do kwadratu zrównanie

$$P\,.\,\overline{123} = D_1\,\overline{\alpha 23} + D_2\,\overline{\alpha 31} = D_3\,\overline{\alpha 12},$$

tek działając przyjdzie

$$P^2\,.\,\overline{123} = 3D_3^2\,\overline{\alpha 12}^2 - 6D_2D_3\,\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13},$$

lub też, oznaczywszy przez H wyznacznik Hessowy $\overline{123}^2$ a prerz G Hessowy z funkcyą α *zespolony* $\overline{\alpha 12}^2$,

$$6(n-1)^2\,\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13} = 3n(n-1)GU - P^2H.$$

2° Obliczmy teraz $\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13}\,.\,\overline{\alpha 14}$. Z tosamości poprzedniéj, wyciągamy również

$$-\,2D_2D_3\,\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13}$$

$$= P^2\,.\,\overline{123}^2 - 2PD_1\,\overline{123}\,.\,\overline{\alpha 23} + D_3^2\,\overline{\alpha 23}^2 - D_3^2\,\overline{\alpha 31}^2 - D_3^2\,\overline{\alpha 12}^2\,;$$

mnożąc przez $\overline{\alpha 14}$, dwa wyrazy sprowadzają się do zera i pozostaje

$$-\,2(n-1)^2\,\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13}\,.\,\overline{\alpha 14} = P^2\,.\,\overline{123}^2\,.\,\overline{\alpha 14} - 2n(n-1)U\,\overline{\alpha 12}^2\,.\,\overline{\alpha 13}.$$

by dowieść że $\overline{123}\,.\,\overline{\alpha 23}\,.\,\overline{\alpha 14}$ sprowadzi się do zera, mamy tylko po-

(*) Ta kwestya przedstawia się przy poszukiwaniu podwójnych stycznych do linij krzywych płaskich (*zobacz* dzieło p. SALMONA, *Higher plane Curves*, str. 81).

mnożyć przez $\overline{123}$ zrównanie identyczne

$$\overline{\alpha 12}.\overline{\alpha 34}+\overline{\alpha 23}.\overline{\alpha 14}+\overline{\alpha 31}.\overline{\alpha 24}=0,$$

i jego trzy wyrazy, różniące się tylko przemianami figur 1, 2, 3, muszą się sprowadzić odrębnie do zera.

149. Przy wyłożeniu poprzedniem metod symbolicznych wskazaliśmy znakowanie i sposoby pierwotnie użyte przez P. Cayley. Damy teraz poznać niektóre zmiany wprowadzone przez PP. Aronhold'a i Clebsch'a, którzy władali metodami symbolicznemi z wielkiem powodzeniem, lecz być może nie zdając sobie zupełnie sprawy z tosamości ich sposobów z temi jakie utworzył poprzednio P. Cayley. Oznaczają oni zmienne przez $x_1, x_2, x_3, \ldots$, a spółczynniki przez wskaźniki odpowiednie zmiennym jakie te wskaźniki mnożą. Tym sposobem kształty potrójne trzeciego i czwartego stopnia, są oznaczone przez znakowania $\Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l$, $\Sigma a_{iklm} x_i x_k x_l x_m$, gdzie liczby i, k, l, m, mogą przyjąć wartości 1, 2, 3, 4. Potrzeba zauważyć że w tém znakowaniu $a_{ikl}=a_{ilk}=a_{kil}$, tak dalece że wykonywając summy wskazane otrzymuje się jakikolwiek kształt napisany ze spółczynnikami dwumianu. Tak więc robiąc summę $\Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l$, trzy wyrazy $a_{112}x_1x_1x_2$, $a_{121}x_1x_2x_1$, $a_{211}x_2x_1x_1$ są identycznemi: dzieje się podobnież z sześciu wyrazami $a_{123}x_1x_2x_3$, $a_{132}x_1x_3x_2$, $a_{213}x_2x_1x_3$, $a_{231}x_2x_3x_1$, $a_{312}x_3x_1x_2$, $a_{321}x_3x_2x_1$, tak dalece że summą rozwiniętą jest

$$a_{111}x_1x_1x_1+a_{222}x_2x_2x_2+a_{333}x_3x_3x_3$$
$$+3a_{112}x_1x_1x_2+\ldots+6a_{123}x_1x_2x_3.$$

I tak daléj ogólnie. P. Aronhold używa nadto, dla oznaczenia sposobem skróconym kształtu jakiegokolwiek bądź, wyrażenia symbolicznego

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots)^n,$$

w którem powinno się, po rozwinięciu, zastąpić wieloczyny takie jak $a_i a_k a_l$ przez spółczynniki odpowiednie a_{ikl}. Tym sposobem kształt sześcienny potrójny powyższy napisze się

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3;$$

wyrazy $a_1 a_1 a_1 x_1 x_1 x_1$, $3 a_1 a_1 a_2 x_1 x_1 x_2 + \ldots$, w rozwinięciu sześcianu mogą być zastąpionemi przez $a_{111} x_1 v_1 x_1$, $3 a_{112} x_1 x_1 x_2 \ldots$ kształt mógłby się zarówno napisać

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^3, \qquad (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^3,$$

wieloczyny $b_1 b_1 b_1$, $c_1 c_1 c_2, \ldots$, mogą także być zastąpionemi przez spółczynniki a_{111}, $a_{112}, \ldots$ Prawidło podane przez P. Aronholda dla utworzenia niezmienników zależy na utworzeniu z a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, $b_3, \ldots$, pewnej liczby wyznaczników, na pomnożeniu ich i na zastąpieniu po odbytem mnożeniu wieloczynów $a_i a_k a_l$, $b_m b_n b_p, \ldots$, przez spółczynniki a_{ikl}, $a_{mnp}, \ldots$ Tak to właśnie postępując P. Aronhold pierwszy odkrył niezmiennik główny kształtu sześciennego potrójnege tworząc wieloczyn z czterech wyznaczników $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$, $\Sigma \pm b_1 c_2 d_3$, $\Sigma \pm c_1 d_2 a_3$, $\Sigma \pm d_1 a_2 b_3$, i wykonywając potem podstawienia jakie poprzednio wskazaliśmy. Tenże sam niezmiennik w znakowaniu P. Cayley napisałby się (142)

$$\overline{123} \,.\, \overline{234} \,.\, \overline{341} \,.\, \overline{412}.$$

150. Dla pokazania że dwie te metody są w gruncie identycznemi, dosyć zauważyć że, według twierdzenia znanego o funkcyach jednorodnych, funkcya jakakolwiek u stopnia n różni się tylko jakimkolwiek czynnikiem liczebnym od

$$\left(x_1 \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_2} + x_3 \frac{d}{dx_3}\right)^n u,$$

tak dalece że pisząc ją pod kształtem

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^n,$$

symbole a_1, a_2, a_3,... różnią się tylko jakimkolwiek czynnikiem liczebnym od symboli różniczkowych $\frac{d}{dx_1}$, $\frac{d}{dx_2}$, $\frac{d}{dx_3}$,... Przyjdziemy więc widocznie do tegoż samego wypadku, bądź to tworząc, jak P. Cayley, wyznaczniki z symboli różniczkowych $\frac{d}{dx_1}$, $\frac{d}{dx_2}$, $\frac{d}{dx_3}$,..., bądź to tworząc, jak P. Aronhold, z symboli a_1, a_2, a_3,...

Obadwa nadto używają tegoż samego podejścia. Jeżeli się pomnoży pewną liczbę symboli różniczkowych

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{d}{dx} + \mu\frac{d}{dy}\right)\cdots$$

i wykona potem działanie na U, wypadek będzie jakąkolwiek funkcyą linijną pochodnych z U jakiegokolwiek rzędu równego liczbie czynników symbolu, i w ten sposób postępując nie otrzymałoby się nigdy spółczynnika różniczkowego podniesionego do jakiejkolwiek potęgi wyższej nad pierwszą. Wtedy więc gdy się żąda złożyć symbol z jakiejkolwiekbądź funkcyi zawierającej potęgi tych pochodnych, podejście do którego udałby się P. Cayley zawisło na napisaniu ze zmiennemi różnemi, czynników wieloczynu

$$\left(\frac{d}{dx_1} + \lambda\frac{d}{dy_1}\right)\left(\frac{d}{dx_2} + \mu\frac{d}{dy_2}\right)\cdots,$$

dla wykonania działania na ilukolwiek funkcyach U_1, U_2, ..., potem ne zidentyfikowaniu tych zmiennych po odbytem mnożeniu. Podobnież, P. Aronhold używa w swych wieloczynach symbolicznych symboli odrębnych odzyskujących tož same znaczenie byleby tylko raz mnożenie zostało wykonaném. Mnożąc symbole a_i, a_k, a_l,..., mogłoby się otrzymać tylko wyrazy zawierające spółczynniki a_{ikl} w pierwszej potędze. Aby wyrazić symbolicznie funkcye zawierające spółczynniki w stopniu więcej podniesionym, podejście zależy więc na zrobieniu użytku z ilukolwiek szeregów symboli a_i, a_k, a_l; b_i, b_k, b_l,..., iloczynów $a_ia_ka_l$, $b_ib_kb_l$, $c_ic_kc_l$,..., oznaczających wszystkie tenże sam spółczynnik a_{ikl}.

151. Po wyłożeniu we wszystkich szczegółach metody P. Cayley, niepotrzebnem rozciągać się dłużej nad rozwinięciem innej metody różniącej się od pierwszej samém jedynie znakowaniem. Damy tu tylko poznać w jaki sposób P. Clebsch udowodnił że wszelki niezmiennik może się wyrazić za pomocą wieloczynów symbolicznych. Niech będzie $\varphi(a, b, c,...)$ niezmiennik jakiegokolwiek kształtu jedynego; było dowiedzionem (103) że wykonywając na nim działanie $a'\frac{d}{da}+b'\frac{d}{db}+...$, otrzyma się jakikolwiek niezmiennik spólny dwóch kształtów mających jeden $a, b, c,...$, drugi $a', b', c',...$ za spółczynniki odpowiednie. Wykonywając podobnież na tym nowym niezmienniku działanie $a''\frac{d}{da}+b''\frac{d}{db}+...$, otrzymamy niezmiennik trzech kształtów i będziemy mogli to działanie powtórzyć tyle razy ile razy spółczynniki $a, b, c,...$, będą figurowały w niezmienniku. Można więc, jeżeli ma się niezmiennik jakiegokolwiek kształtu jedynego zawierający spółczynniki stopnia p, wyciągnąć ztąd niezmiennik jakiegokolwiek układu o p kształtach który będzie zawierał spólczynniki każdego z nich w pierwszym stopniu, i przychodzi się wreszcie do niezmiennika pierwotnego, przypuszczając że p kształtów stają się identycznemi; gdyż działanie $a\frac{d}{da}+b\frac{d}{db}+...$ wprowadza tylko do nich jakikolwiek czynnik liczebny. Jeżeli przypuścimy, nadto,

że wszystkie kształty nowe tym sposobem wprowadzone są potęgami n^{temi} doskonałemi, przychodzimy do tego wypadku że z niezmiennika danego jakiegokolwiek kształtu jedynego, można wyciągnąć niezmiennik jakiegokolwiek układu o p kształtach

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots)^n, \ (b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots)^n, \ (c_1x_1 + \ldots)^n,$$

i jak to już powiedzieliśmy, przychodzi się do niezmiennika pierwotnego zastępując każdy spółczynnik nowych kształtów przez jego odpowiedni w kształcie pierwotnym, zastępując na przykład a_1^n, b_1^n, $c_1^n, \ldots$, przez spółczynnik x_1^n w kształcie pierwotnym. Niezmienniki funkcyj

$$(a_1x_1 + \ldots)^n, \quad (b_1x_1 + \ldots)^n,$$

są widocznie niezmiennikami funkcyj linijnych

$$a_1x_1 + \ldots, \quad b_1x_1 + \ldots$$

Jest więc dowiedzionem że wszelki niezmiennik rzędu p jakiegokolwiek kształtu jedynego może być wyrażonym symbolicznie jak niezmiennik jakiegokolwiek układu o p kształtach linijnych : jeden punkt który nam pozostaje teraz do dowiedzenia jest że ten ostatni niezmiennik musi być koniecznie jakąkolwiek bądź funkcyą wyznaczników utworzonych ze spółczynników tych funkcyj linijnych. Odeszlemy czytelników chcących poznać dowodzenie P. Clebsch'a, do *Dziennika* P. Crelle, t. LIX, str. 7 ; to dowodzenie, nie przedstawiające prawdziwych trudności, wymaga dosyć długich rozwinięć i wiele przestrzeni. Można jeszcze z tego zdać sobie sprawę uważając pilnie zrównania różniczkowe niezmienników. I tak, dla jakiegokolwiek układu kształtów linijnych $ax + by + \ldots$, wszelki niezmiennik musi zadosyć czynić zrównaniu

$$b\frac{d\mathrm{I}}{da}+b'\frac{d\mathrm{I}}{da'}+b''\frac{d\mathrm{I}}{da''}+\ldots=0,$$

które, zcałkowane jak zrównanie zwyczajne względem różnic częściowych, daje dla I jakąkolwiek funkcyą wyznaczników $ab'-a'b$, $ab''-a''b$,... i tak samo w ogólności.

ROZDZIAŁ XIII.

KSZTAŁTY KANONICZNE.

152. Ponieważ niezmienniki i spółzmienniki zachowują ich związki wzajemne jakiemikolwiek byłyby przekształcenia linijne jakim się zwykle poddaje wzięta pod uwagę funkcya, widoczna że, dla zbadania tych związków, wystarczy roztrząsnąć ją pod kształtem najprostszym do którego ona może być przywiedzioną. Rozciągnie się tym sposobem do funkcyj zawierających liczbę jakąkolwiek zmiennych metodę z którą czytelnik jest już oswojony dla kształtów o trzéch i cztérech zmiennych; kiedy chcemy, w rzeczy samej, uczyć się własności jakiejkolwiek krzywej lub jakiejkolwiek powierzchni, wszyscy geometrowie wiedzą jakie korzyści dostarcza jakikolwiek wybór osi spółrzędnych pozwalający przywieść zrównanie krzywej lub powierzchni do swego kształtu najprostszego (*). Ten kształt najprostszy do którego jakakolwiek funkcya może być przywiedzioną nie tracąc swej ogólności, jest to co się właśnie nazywa jej *kształtem kanonicznym*. Możemy, licząc po prostu stałe, rozpoznać czy jakakolwiek funkcya przedstawiona, jest dosyć ogólna aby była wziętą jako kształt kanoniczny jakiejkolwiek innej funkcyi da-

(*) Potrzeba przecież przyznać że postępy analizy dozwalające traktować łatwiéj funkcye pod ich kształtem ogólnym, dążą do ściśnienia korzyści ich przywiedzenia do jakiegokolwiek kształtu najprostszego.

nej; gdyż, jeżeli nie zawiera ona domyślnie lub wyraźnie tyle stałych jak ta ostatnia wzięta pod jéj kształtem najogólniejszym, uproszczenie nie będzie zawsze możebném (*). I tak, jakikolwiek kształt sześcienny podwójny może być przywiedzionym do kształu $X^3 + Y^3$, gdyż ten ostatni, będąc równoważnym wyrażeniu

$$(lx + my)^3 + (l'x + m'y)^3,$$

zawiera rzeczywiście cztery stałe, a tem samem, jest również

(*) Nie jest wszelako prawdziwém aby odwrotnie jakikolwiek kształt zawierający liczbę odpowiedną stałych był koniecznie jednym z tych do których może się przywieść funkcya ogólna. Gdyż jeżeli szukamy, przez porównanie spółczynników, zidentyfikowania jéj z tą ostatnią, pomimo że liczba zrównań jest równą liczbie ilości do oznaczenia, może się zdarzyć że stałe figurują w nich w ten sposób aby zrównania nie mogły być wszystkie sprawdzonemi. I tak kształt

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = lx + my + n$$

zawiera pięć stałych, a przecież nie jest on jednym z tych do którego mógłby się przywieść kształt kwadratowy potrójny wzięty w całéj swéj ogólności. W rzeczy saméj stałe figurują w nim w ten sposób że, pomimo że ich liczba jest więcéj jak dostateczna dla zidentyfikowania spółczynników względem x, y i wyrazu niezależnego od zmiennych w kształcie jakimkolwiek, nie mamy jednak żadnego sposobu do zidentyfikowania tak samo spółczynników względem x^2, xy i y^2.

Przykład więcéj ważny jest następujący:

$$x^4 + y + z^4 + u^4 + v^4,$$

z, u, v są funkcyami linijnemi. W przypadku jakiegokolwiek kształtu potrójnego, ten kształt zawiera domyślnie czternaście stałych niezależnych, i odtąd zdaje się być jednym z tych do których można przywieść kształt ogólny czwartego stopnia. P. Clebsch jednak wykazał że istnieje warunek który musi być spełnionym ażeby uproszczenie było możebném i że ten warunek zależy na tém że pewien niezmiennik musi się sprowadzić do zera.

ogólnym jak

$$(a,\ b,\ c,\ d \between x,\ y)^3.$$

Podobnież, jakikolwiek kształt sześcienny potrójny zawiera, ogólnie, dziesięć stałych, lecz kształt

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 6MXYZ$$

zawiera ich rownież dziesięć, ponieważ, niezależnie od stałej M pokazującej się wyraźnie, każda z ilości X, Y, Z zawiera domyślnie trzy inne. Ten ostatni może więc być wziętym jako kształt kanoniczny jakiegokolwiek kształtu sześciennego potrójnego, i, w rzeczy samej, postępy najważniejsze które zostały zrobionemi świeżo w teoryi linij krzywych trzeciego stopnia, są należne użyciu tego wyrażenia prostego i dogodnego.

153. Funkcya kwadratowa $(a,\ b,\ c \between x,\ y)^2$ może być przywiedziona niezliczonem mnóstwem sposobów do kształtu $x^2 + y^2$, ponieważ ten ostatni zawiera cztery stałe a pierwszy tylko trzy. Kształt kwadratowy potrójny, zawierający sześć stałych, może tak samo być przywiedzionym niezliczonem mnóstwem sposobów do kształtu $x^2 + y^2 + z^2$, który zawiera ich dziesięć, i ogólnie, jakikolwiek kształt kwadratowy o liczbie zmiennych jakiejkolwiek może być przywiedzionym niezliczonem mnóstwem sposobów do jakiejkolwiek summy kwadratów. Potrzeba jednak zauważyć że, pomimo że to uproszczenie do jakiejkolwiek summy kwadratów mogłoby się wykonać niezliczonem mnóstwem sposobów, a przecież liczba kwadratów dodatnych i odjemnych jest oznaczona. I tak, jakikolwiek kształt podwójny który może być przywiedziony do kształtu $x^2 + y^2$, odrzuciłby przez to samo kształt $u^2 + v^2$; dwa wyrażenia $x^2 + y^2$, $u^2 - v^2$ nie mogą być identycznemi, ponieważ czynniki jednego z nich są urojone, podczas gdy czynniki drugiego są rzeczywiste. Podobnież, dla kształtów potrójnych,

nie możemy znaleźć

$$x^2+y^2-z^2=u^2+v^2+w^2,$$

gdyż otrzymałoby się tém samém

$$x^2+y^2=z^2+u^2+v^2+w^2,$$

lub, innemi słowy,

$$x^2+y^2=z^2+(lx+my+uz)^2+(l'x+m'y+u'z)^2$$
$$+(l''x+m''y+u''z)^2,$$

a jeżeli zrobimy $x=0$ i $y=0$, jedna strona tosamości niewątpliwie się zniszczy, podczas gdy druga, sprowadzając się istotnie do summy cztérech kwadratów dodatnych, nie mogłaby z tego powodu w żaden sposób być zerem; toż same rozumowanie stosuje się ogólnie.

154. Poczniemy od pokazania że jakikolwiek kształt sześcienny potrójny może zawsze, jak to już zapowiedzieliśmy, sprowadzić się do jakiejkolwiek summy dwóch sześcianów. To uproszczenie stanowi istotnie rozwiązanie zrównania trzeciego stopnia, ponieważ kształt przywiedziony do summy X^3+Y^3 rozłoży się bezpośrednio na czynniki linijne. Jeżeli kształt dany

$$(a,\ b,\ c,\ d \between x,\ y)^3$$

staje się, przez jakiekolwiek przekształcenie,

$$(A,\ B,\ C,\ D \between X,\ Y)^3,$$

wyznacznik Hessowy (106)

$$(ax+by)(cx+dy)-(bx+cy)^2$$

będąc jakimkolwiek spółzmiennikiem, winien, przez definicyą, przekształcić się na jakąkolwiek podobną funkcyą z A, B, C, D, X, Y, to jest że powinno się otrzymać

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2$$

$$= (AC - B^2)X^2 + (AD - BC)XY + (BD - C^2)Y^2.$$

Jeżeli, w formie przekształconej, B i C zniszczą się, spółzmiennik sprowadzi się do ADXY, i widzimy bezpośrednio że się musi wziąć dla X i Y dwa czynniki linijne wyznacznika Hessowego; X i Y będąc znane, wystarczy zidentyfikować kształt dany z wyrażeniem

$$AX^3 + DY^3$$

dla oznaczenia A i D.

PRZYKŁAD. — *Sprowadzić* $4x^3 + 9x^2 + 18x + 17$ *do kształtu* $AX^3 + DY^3$.

Wyznacznikiem Hessowym jest

$$(4x + 3)(6x + 17) - (3x + 6)^2,$$

albo

$$15x^2 + 50x + 15;$$

jego czynnikami linijnemi są $x + 3$, $3x + 1$. Identyfikując kształt dany z wyrażeniem

$$A(x + 3)^3 + D(3x + 1)^3,$$

mamy

$$A + 27D = 4, \qquad 27A + D = 17,$$

zkąd

$$728D = 91, \qquad 728A = 455.$$

A i D są więc w stosunku 5 do 1, a zaś kształt sześcienny dany różni się tylko jakimkolwiek czynnikiem (tym czynnikiem jest 8) od

$$5(x+3)^3+(3x+1)^3;$$

widoczna że pierwiastki będą dane za pomocą zrównania

$$3x+1+(x+3)\sqrt[3]{5}=0.$$

155. Oczywiście że jakikolwiek kształt sześcienny nie może zawsze być przywiedzionym do kształtu AX^3+DY^3 przez jakiekolwiek przekształcenie *rzeczywiste*, ponieważ to ostatnie ma jeden czynnik rzeczywisty a dwa czynniki urojone, a tém samém, nie może się zidentyfikować z jakimkolwiek kształtem któregoby trzy czynniki były rzeczywistemi. Dyskryminant Hessowy

$$4(ac-b^2)(bd-c^2)-(ad-bc)^2$$

jest, ze znakiem przeciwnym, tenże sam jak dyskryminant kształtu sześciennego. Kiedy ten ostatni jest dodatnym, Hessowy przyjmuje dwa czynniki rzeczywiste, a kształt sześcienny jeden czynnik rzeczywisty i dwa urojone; kiedy jest on odjemnym, dwa czynniki Hessowego są urojonemi, a kształt sześcienny ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Kiedy dyskryminant sprowadzi się do zera, Hessowy i kształt samże mają dwa czynniki równe, i można sprawdzić wprost że Hessowym funkcyi X^2Y jest X^2 (*).

Dobrze jest zauważyć że jakikolwiek kształt nie może zawsze być przywiedzionym do swego kształtu kanonicznego. Niepo-

---

(*) Ogólnie, kiedy jakikolwiek kształt podwójny przyjmuje jeden czynnik kwadratowy, istnieje także jeden (tegoż rodzaju czynnik) w Hessowym, jak to można sprawdzić obliczając wprost czynnik z funkcyi $x^2\varphi$.

dobieństwo uproszczenia wskazuje wtedy istnienie jakiéjś szczególnéj własności w funkcyi. I tak, jakikolwiek kształt sześcienny mający czynnik kwadratowy nie może być przywiedzionym do jakiejkolwiek summy z dwóch sześcianów, jego kształtem najprostszym jest x^2y.

156. Tak samo jak jakikolwiek kształt sześcienny może być przywiedzionym do jakiejkolwiek summy z dwóch sześcianów, wszelki kształt podwójny stopnia nieparzystego $2n-1$ może się sprowadzić do jakiejkolwiek summy z n potęg stopnia $2n-1$, twierdzenie należne p. Sylwestrowi. W rzeczy saméj, liczbą stałych w jakimkolwiek kształcie podwójnym jest zawsze przewyższającą o jedność stopień; w przypadku który nas zajmuje, tą liczba jest $2n$, i mamy właśnie jak potrzeba tęż samą liczbę stałych biorąc n wyrazów kształtu $(lx+my)^{2n-1}$. Przekształcenie może się wykonać przez jakąkolwiek metodę będącą uogólnieniem metody numeru 154. Dla większéj prostoty, zastosujemy ją do piątego stopnia, lecz jest ona ogólną. Kwestya sprowadza się do oznaczenia u, v, w, w ten sposób że

$$(a, b, c, d, e, f \between x, y)^5 = u^5 + v^5 + w^5.$$

Dowiedziemy że, jeżeli się utworzy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} ax+by & bx+cy & cx+dy \\ bx+cy & cx+dy & dx+ey \\ cx+dy & dx+ey & ex+fy \end{vmatrix},$$

trzema czynnikami téj funkcyi trzeciego stopnia będą u, v, w. Niech będą, w rzeczy saméj,

$$u = lx+my, \quad v = l'x+m'y, \quad w = l''x+m''y;$$

różniczkując tosamość

$$(a, b, c, d, e, f \between x, y)^5 = u^5 + v^5 + w^5$$

cztéry razy kolejno względem x i dzieląc przez 120, mamy

$$ax + by = l^4 u + l'^4 v + l''^4 w;$$

różniczkując podobnież trzy razy względem x a raz tylko względem y, przyjdzie

$$bx + cy = l^3 mu + l'^3 m' v + l''^3 m'' w,$$

i tak daléj.

Wyznacznik poprzedzający może więc się napisać

$$\begin{vmatrix} l^4u+l'^4v+l''^4w & l^3mu+l'^3m'v+l''^3m''w & l^2m^2u+l'^2m'^2v+l''^2m''^2w \\ l^3mu+l'^3m'v+l''^3m''w & l^2m^2u+l'^2m'^2v+l''^2m''^2w & lm^3u+l'm'^3v+l''m''^3w \\ l^2m^2u+l'^2m'^2v+l''^2m''^2w & lm^3u+l'm'^3v+l''m''^3w & m^4u+m'^4v+m''^4w \end{vmatrix}.$$

Zauważmy teraz że spółczynniki u, w każdéj kolumnie, są proporcyonalnemi do l^2, lm, m^2; przeto, jeżeli rozłożymy ten wyznacznik na wyznaczniki częściowe, jak w numerze 22, wszystkie wyznaczniki z tych wyznaczników które będą zawierały dwie kolumny gdzie wchodzi u znikną jako mające dwie kolumny identyczne; dziać się będzie podobnież z wyznacznikami które będą zawierały dwie kolumny gdzie wchodzi v albo w. Wyznacznik sprowadzi się więc do wieloczynu uvw, pomnożonego przez jakikolwiek czynnik liczebny (*).

Rozłóżmy wyznacznik napisany na początku tego numeru na

(*) Tym czynnikiem jest $(lm' - l'm)^2 (l'm'' - l''m')^2 (l''m - lm'')^2$.

trzy czynniki

$$(x+\lambda y)(x+\mu y)(x+\nu y);$$

wiemy że rozwiązując jakiekolwiek zrównanie trzeciego stopnia, u, v, w mogą się różnić od tych czynników tylko spółczynnikami liczebnemi; położy się

$$(a, b, c, d, e, f \between x, y)^5$$

$$= \mathrm{A}(x+\lambda y)^5 + \mathrm{B}(x+\mu y)^5 + \mathrm{C}(x+\nu y)^5,$$

i oznaczy się A, B, C rozwiązując jeden z układów zrównań jaki się otrzymuje porównywając trzy spółczynniki wzięte w dwóch stronach téj tosamości.

Wyznacznik z którego zrobiliśmy użytek jest jakimkolwiek spółzmiennikiem; nazwiemy go *spółzmiennikiem kanonicznym* kształtu danego.

157. Ten spółzmiennik może się napisać pod innym kształtem, być może nieco prostszym, to jest:

$$\begin{vmatrix} y^3 & -y^2x & yx^2 & -x^3 \\ a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \end{vmatrix}.$$

Bylibyśmy przywiedzeni do tego ostatniego kształtu jeżelibyśmy poszli drogą przedstawiającą się jak najnaturalniéj starając się o wyznaczenie wprost sześciu ilości A, B, C, λ, μ, ν, za pomocą sześciu zrównań jakie dostarczy porównanie spółczynników w tosamości numeru 156. Nie możemy poświęcić tu dosyć miejsca dla rozwinięcia rozwiązania pod tym kształtem, i odsyłamy czytelnika do Pamiętnika P. Sylwestra (*Philosophical Magazine*, listop. 1851). Tosamość ostatniego wyznacznika z wyznacznikiem numeru poprzedzającego była dowiedzioną przez P. Cayley w sposób następujący. Mamy, na mocy prawidła mnożenia wyznaczników (22),

$$\begin{vmatrix} y^3 & -y^2x & yx^2 & -x \\ a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ax+by & bx+cy & cx+dy \\ 0 & bx+cy & cx+dy & dx+ey \\ 0 & cx+dy & dx+ey & ex+fy \end{vmatrix};$$

dzieląc obie strony przez y^3, otrzymuje się tosamość żądaną.

158. Mamy jeszcze wymienić inną metodę dla znalezienia spółzmiennika kanonicznego. Niech będzie $(A, B, C, D \between x, y)^3$ tym spółzmiennikiem, gdzie musi się oznaczyć A, B, C, D; widzieliśmy (120) że symbol $(A, B, C, D \between \frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx})^3$ dostarczy także jakikolwiek spółzmiennik. Lecz, jeżeli zastosuje się to działanie do $(x+\lambda y)^n$, $x+\lambda y$ będąc jakimkolwiek czynnikiem z $(A, B, C, D \between x, y)^3$, wypadek sprowadzi się do zera, ponieważ jednym z czynników symbolu jest $\frac{d}{dy} - \lambda \frac{d}{dx}$. Więc, ponieważ kształt dany jest, przez założenie, summą trzech wyrazów takich jak $(x+\lambda y)^5$, wypadek jaki się otrzymuje stosując do niego to działanie będzie zerem. Mamy tym

sposobem

$$A(d, e, f\between x, y)^2 - B(c, d, e\between x, y)^2$$
$$+ C(b, c, d\between x, y)^2 - D(a, b, c\between x, y)^2 = 0.$$

Równając odrębnie zeru spółczynniki względem x^2, xy, y^2, przyjdzie

$$Ad - Bc + Cb - Da = 0,$$
$$Ae - Bd + Cc - Db = 0,$$
$$Af - Be + Cd - Dc = 0.$$

Przeto (28), A jest proporcyonalném do wyznacznika jaki się otrzymuje znosząc kolumnę A, to jest do

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix};$$

podobnież, dla B, C, D; tak więc otrzymuje się spółzmiennik pod kształtem danym w numerze poprzedzającym.

159. Przejdźmy teraz do kształtów stopnia parzystego $2n$. Ponieważ kształt zawiera $2n + 1$ wyrazów, jeżeli porównamy go do jakiejkolwiek summy z n potęg stopnia $2n$, znajdujemy jedno zrównanie więcéj aniżeli mamy stałych do oznaczenia. Z drugiéj strony, jeżeli przydamy potęgę $2n^{entą}$ więcéj, mamy jedną stałą za nadto, i kształt dany może być przywiedzionym niezliczoném mnóstwem sposobów. Jest przecież łatwo oznaczyć warunek który musi być spełnionym aby kształt był przywiedlnym do jakiejkolwiek summy z n potęg stopnia $2n$. I tak,

warunki konieczne aby jakikolwiek kształt czwartego stopnia i jakikolwiek kształt szóstego były przywiedlnemi, pierwszy do summy z dwóch czwartych potęg, drugi do summy z trzech szóstych potęg, wyrażają się robiąc równemi zeru wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{vmatrix},$$

i tak daléj. W rzeczy saméj, w przypadku czwartego stopnia, elementami wyznacznika są pochodne czwartego kształtu, i, wyrażając je w funkcyi u i v, jak w numerze 156, łatwo jest dostrzedz że wyznacznik sprowadzi się do zera jeżeli kształt może być przywiedzionym do summy dwóch wyrazów u^4+v^4. Podobnież dla innych przypadków. Wyznacznik rozwinięty dla przypadku czwartego stopnia jest niezmiennik już dany (121, Przykład I).

$$ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3.$$

160. Kiedy ten warunek nie jest spełnionym, kształt jest przywiedlnym do summy z n potęg, z jakimkolwiek wyrazem dodatkowym. I tak, kształtem kanonicznym jest, dla czwartego stopnia, $u^4+v^4+6\lambda u^2v^2$. Poczniemy od tego ostatniego przypadku; metoda jakiéj użyjemy nie jest najłatwiejszą w tym przypadku szczególnym, lecz jest ta która pokazuje najlepiéj w jaki sposób uproszczenie musi się odbyć ogólnie. Niech więc będzie $(A, B, C \between x, y)^2$ wieloczyn z u i v jaki staramy się oznaczyć, wykonajmy działanie

$$(A, B, C)\left(\frac{d}{dy}, \quad -\frac{d}{dx}\right)^2$$

po obu stronach tosamości

$$(a, b, c, d, e)(x, y)^4 = u^4 + v^4 + 6\lambda u^2v^2.$$

Tak samo jak powyżéj (158), działanie wykonane na u^4 i v^4 da wypadek równy zeru; na $6\lambda u^2v^2$, to działanie prowadzi do $12\lambda' uv$, λ' jest równém $2(AC - B^2)\lambda$. Równając spółczynniki względem x^2, xy, y^2 po wykonaniu działań, mamy trzy zrównania

$$Ac - 2Bb + Ca = \lambda' A,$$

$$Ad - 2Bc + Cb = \lambda' B,$$

$$Ae - 2Bd + Cc = \lambda' C.$$

Rugując A, B, C, ma się dla obliczenia λ', wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a & b & c - \lambda' \\ b & c + \frac{1}{2}\lambda' & d \\ c - \lambda' & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

który rozwinięty, daje zrównanie trzeciego stopnia

$$\lambda'^3 - \lambda'(ae - 4bd + 3c^2)$$
$$- 2(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0 \text{ (*)},$$

którego spółczynniki są niezmiennikami. Istnieje więc znaczna

(*) Dyskryminant tego zrównania jest tenże sam jak dyskryminant kształtu czwartego stopnia.

różnica w przywiedzeniu kształtów podwójnych do ich kształtu kanonicznego, według tego jak stopień jest parzystym lub nieparzystym. W tym ostatnim przypadku, uproszczenie jest jedyném, i układ $u, v, w,\dots$ nie może być oznaczony tylko jednym sposobem. Kiedy stopień jest parzystym, otrzymuje się ilukolwiek układów rozwiązań. I tak, w przypadku który nas zajmuje, jakikolwiek kształt czwartego stopnia może być przywiedzionym trzema sposobami do swego kształtu kanonicznego, a jeżeli weźmiemy za λ' jeden z pierwiastków trzeciego stopnia, podstawiając jego wartość w układ zrównań poprzedni, będziemy mogli oznaczyć A, B, C.

161. Jeżeli teraz przejdziemy do uproszczenia kształtu ogólnego $(a_0, a_1, a_2,\dots)(x, y)^{2n}$, kształt kanoniczny który zdaje się najnaturalniejszym jest $u^{2n}+v^{2n}+w^{2n}+\dots+\lambda u^2v^2w^2\dots\dots$, liczbą ilości $u, v, w\dots$ jest n. Lecz uproszczenie jest połączone z trudnościami które jeszcze nie zostały przezwyciężonemi tylko w przypadku gdy $n=2$ i $n=4$. Ponieważ metoda poprzednia może być jeszcze zastosowaną jeżeli weźmiemy za kształt kanoniczny funkcyą

$$u^{2n}+v^{2n}+\dots+\lambda Vuvw\dots,$$

w któréj $uvw\dots$ jest wieloczynem równym

$$(A_0, A_1, A_2,\dots)(x, y)^n,$$

V jest jakimkolwiek spółzmiennikiem téj ostatniéj funkcyi takim, że, jeżeli się wykona na $Vuvw\dots$ działanie

$$(A_0, A_1,\dots)\left(\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}\right)^n,$$

wypadek jest proporcyonalnym do wieloczynu $uvw\dots$. Przypuśćmy na chwilę że znaleźliśmy jakąkolwiek funkcyą V spełniającą te warunki, postępując jak w numerze poprzedzającym, i wykonywając z symbolem wskazanym powyżéj działanie na tosamości jaką się znajduje równając kształt dany ze swym kształtem kanonicznym, mamy układ zrównań

$$A_0 a_n - nA_1 a_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2} A_2 a_{n+2} - \ldots = \lambda A_0,$$

$$A_0 a_{n-1} - nA_1 a_n + \frac{n(n-1)}{2} A_2 a_{n+1} - \ldots = \lambda A_1,$$

$$A_0 a_{n-2} - nA_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} A_2 a_n - \ldots = \lambda A_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zkąd, rugując A_0, A_1, A_2,..., wyciąga się wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_n - \lambda & a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n-1} & a_n + \frac{1}{n}\lambda & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n - \frac{2}{n(n-1)}\lambda & \ldots & a_{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \pm \lambda \end{vmatrix},$$ (*)

(*) Ten wyznacznik może jeszcze być otrzymanym sposobem następującym. Niech będą x', y' dwie zmienne przekształcające się przez toż same podstawienie jak x, y; utwórzmy funkcyą

$$\left(x'\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy}\right)^n U + \lambda(xy' - yx')^n,$$

zmieniającą się przez jakiekolwiek podstawienie linijne na jakąkolwiek funkcyą podobną (105 i 111); weźmy $n+1$ spółczynników potęg x^n, $x^{n-1}y$,..., i wyrugujmy linijnie $n+1$ ilości x'^n, $x'^{n-1}y'$,...., otrzymamy wyznacznik szukany.

Znalazłszy λ równając ten wyznacznik zeru (zrównanie znakomite, którego wszystkie spółczynniki są niezmiennikami), zrównania poprzednie pozwolą oznaczyć wartości A_0, A_1,... odpowiednie $n+1$ wartościom na λ.

162. Przy stosowaniu téj teoryi do przypadku jakiegokolwiek kształtu szóstego stopnia, kształtem kanonicznym jest

$$u^6 + v^6 + w^6 + Vuvw,$$

gdzie uvw będąc wieloczynem równym

$$(A_0, A_1, A_2, A_3 \between x, y)^3,$$

V jest przewoźnikiem dyskryminanta téj ostatniéj funkcyi, któréj podaliśmy wyrażenie rozwinięte (122). Damy poznać wyborny przykład użycia kształtów kanonicznych pokazując że, dla kształtu sześciennego jakiegokolwiek, wypadek działania

$$(a_0, a_1, a_2, a_3 \between \frac{d}{dy}, \ -\frac{d}{dx})^3,$$

wykonanego na wieloczynie kształtu samegoż przez przewoźnik jaki dopiero co wymieniliśmy, jest proporcyonalnym do kształtu pierwotnego. Gdyż dosyć dowieść to dla przypadku w którym kształt sześcienny jest przywiedziony do swego kształtu kanonicznego $x^3 + y^3$, a przewoźnik do $x^3 - y^3$, jak widzi się to robiąc $b = c = 0$ a przytém $a = d = 1$ w wyrażeniu danémi (122). Wieloczynem z kształtu przez swój przewoźnik będzie $x^6 - y^6$, a, odbywając działanie z symbolem

$$\frac{d^3}{dy^3} - \frac{d^3}{dx^3},$$

otrzymuje się widocznie wypadek proporcyonalny do $x^3 + y^3$.

To twierdzenie będąc niezależném od przekształceń linijnych, jest prawdziwie ogólnem jeżeli jest prawdziwém dla jakiegokolwiek kształtu szczególnego. Wziąwszy więc jak powyżéj kształt kanoniczny, postępować będziemy jak w numerze poprzedzającym, i wyciągniemy λ ze zrównania

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - \lambda \\ a_1 & a_2 & a_3 + \frac{1}{3}\lambda & a_4 \\ a_2 & a_3 - \frac{1}{3}\lambda & a_4 & a_5 \\ a_3 + \lambda & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0,$$

które, rozwinięte, zawiera tylko potęgi parzyste z nieznanéj λ. Jeżeli przypuścimy wieloczyn uvw przywiedziony do swego kształtu kanonicznego $x^3 + y^3$, którego trzema czynnikami są

$$x + y, \qquad x + wy, \qquad x + w^2y,$$

w będąc jakimkolwiek pierwiastkiem sześciennym z jedności, widoczna, wedle tego co poprzedza, że kształt kanoniczny odpowiedni dla funkcyi szóstego stopnia będzie

$$A(x + y)^6 + B(x + wy)^6 + C(x + w^2y)^6 + D(x^6 - y^6).$$

Można dowieść że, jeżeli u, v, w są czynnikami wyrażenia sześciennego, czynnikami przewoźnika, z których zrobimy użytek poniżéj, są $u - v$, $v - w$, $w - u$, w ten sposób że kształt kanoniczny powyższy może się także napisać

$$u^6 + v^6 + w^6 + \lambda uvw(u - v)(v - w)(w - u).$$

163. W przypadku ósmego stopnia, kształtem kanonicznym

jest

$$u^8 + v^8 + w^8 + z^8 + \lambda u^2 v^2 w^2 z^2;$$

gdyż, jeżeli wykonamy działanie na $u^2v^2w^2z^2$ z jakimkolwiek symbolem utworzonym według metody numerów poprzedzających, wypadek będzie proporcyonalnym do $uvwz$.

Co do kształtów kanonicznych więcéj podniesionych, poprzestaniemy na wzmiankowaniu kształtu kanonicznego otrzymanego z kształtu sześciennego potrójnego należnego p. Hessowi

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz,$$

i kształtu kanonicznego jaki p. Sylwester dał dla kstzałtu sześciennego poczwórnego

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + v^3.$$

164. Kiedy się przyjmuje, jak zrobiliśmy to (156, 163), dla kształtu kanonicznego jakiejkolwiek funkcyi o n zmiennych, nową funkcyą o $n+1$ zmiennych (te ostatnie są związane jakiemkolwiek zrównaniem linijném), można starać się dowiedzieć jaki kształt wezmą wtedy przeciwzmienniki, i w jaki sposób można wywieśdź spółzmienniki i przeciwzmienniki jedne z drugich przez różniczkowanie wzajemne (119) nie potrzebując przechodzić na nowo przez kształt ogólny o n zmiennych.

Przypuśćmy że mamy przeciwzmiennik jakiegokolwiek bądź kształtu potrójnego, możemy (114) uważać go jak jakikolwiek niezmiennik spólny tego kształtu i funkcyi linijnéj $x\xi + y\eta + z\zeta$. Jeżeli się wprowadzi w wyrażenie kształtu jakąkolwiek nową zmienną v przywiązaną do x, y, z związkiem identycznym

$$x + y + z + v = 0,$$

i gdy się napisze przez analogią (wnosząc o rzeczach nieznanych ze znanych a im pokrewnych) funkcyą linijną ze zmienn ąθ więcéj, ta się staje

$$x\xi + y\eta + z\zeta + v\theta\,;$$

albo, zastępując w niéj v przez $-(x+y+z)$,

$$x(\xi-\theta)+y(\eta-\theta)+z(\zeta-\theta).$$

Wyrażenie przeciwzmiennika o cztérech literach ξ, η, ζ, θ wyciągnie się więc z wyrażenia pierwotnego o trzech literach, zastępując ξ. η, ζ przez $\xi-\theta$, $\eta-\theta$, $\zeta-\theta$, i, pod tym kształtem, przeciwzmiennik będzie funkcyą z różnic między temi cztérema ilościami.

PRZYKŁAD. — Uważmy kształt kwadratowy potrójny

$$(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)\,;^2$$

połóżmy go pod kształtem $ax^2+by^2+cz^2+dv^2$, który przychodzi, zastępując v przez $-(x+y+z)$, do $(a+d, b+d, c+d, d, d, d)(x, y, z)^2$ i starajmy się wyszukać, pod tym nowym kształtem, czém się staje przeciwzmiennik $(bc-f^2)\xi^2+\ldots$ (114). Według tego cośmy dopiero powiedzieli, mamy zastąpić w wyrażeniu $(bc-f^2)\xi^2+\ldots$, a, b, c, przez $a+d$, $b+d$, $c+d$; f, g, h przed d; nakoniec ξ, η, ζ przez $\xi-\theta$, $\eta-\theta$, $\zeta-\theta$, a po odbytém działaniu przyjdzie

$$\begin{aligned}&(bc+cd+bd)(\xi-\theta)^2+(ca+cd+ad)(\eta-\theta)^2\\&+(ab+ad+bd)(\zeta-\theta)^2-2ad(\eta-\theta)(\zeta-\theta)\\&-2bd(\xi-\theta)(\zeta-\theta)-2cd(\xi-\theta)(\eta-\theta,\end{aligned}$$

albo upraszczając

$$\begin{aligned}&bc(\xi-\theta)^2+ca(\eta-\theta)^2+ab(\zeta-\theta)^2\\&+cd(\xi-\eta)^2+bd(\xi-\zeta)^2+ad(\eta-{}^2\end{aligned}$$

albo, wreszcie pod kształtem skróconym,

$$\Sigma cd(\xi - \eta)^2.$$

165. Wiadomo że możemy zastąpić w przeciwzmiennikach, ξ, η, ζ przez $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ dla wykonania działania na jakimkolwiek spółzmienniku; jeżeli ten ostatni jest wyrażony z czterema zmiennemi x, y, z, v, zmienna x wchodząc zarazem wyraźnie i domyślnie jako zawarta w ilości v, pochodną względem x jest $\frac{d}{dx} + \frac{d}{dv}\frac{dv}{dx}$ albo, na mocy związku łączącego v do x, y, z, $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dv}$; podobnież dla $\frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$. Przeciwzmiennik stanie się więc symbolem właściwym do wykonania działania na jakiejkolwiek funkcyi o cztérech literach, zastępując w nim ξ, η, ζ przez $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dv}, \frac{d}{dy} - \frac{d}{dv}, \frac{d}{dz} - \frac{d}{dv}$; lecz niedawno widzieliśmy że zastępując ξ, η, ζ przez $\xi - \theta$, $\eta - \theta$, $\zeta - \theta$, dawało się przeciwzmiennikowi kształt o cztérech literach. Wystarczy więc zastąpić, w tym ostatnim kształcie, ξ, η, ζ, θ przez $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}, \frac{d}{dv}$; mamy tym sposobem sposobność, gdy raz znajdziemy jakikolwiek bądź przeciwzmiennik o czterech literach, wywieśdź z niego inny spółzmiennik bez uciekania się niepotrzebnego do rachunków mozolnych jakieby wymagały powrotu do kształtu o trzech literach.

PRZYKŁAD. — Przeciwzmiennikiem kształtu potrójnego $ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2$ jest $\Sigma cd(\xi - \eta)^2$; jeżeli się zastąpi w nim ξ przez $\frac{d}{dx}, \ldots,$ i gdy się wykona działanie z symbolem $\Sigma cd\left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}\right)^2$ na kształcie samymże, przyjdzie, usunąwszy jakikolwiek czynnik liczebny,

$$bcd + abd + acd + abc.$$

Jest to właśnie, pod tym nowym kształtem, wyrażeniem dyskryminanta, jak to można sprawdzić bez trudności zastępując w ogólnéj wartości téj ilości a, b, c przez $a+d$, $b+d$, $c+d$, a zaś f, g, h przez d.

Dowiedziemy podobnież że możemy zastąpić w jakimkolwiek spółzmienniku x, y, z, v przez $\frac{d}{d\xi}$, $\frac{d}{d\eta}$, $\frac{d}{d\zeta}$, $\frac{d}{d\theta}$ dla wykonania potém działania na jakimkolwiek przeciwzmienniku; w rzeczy saméj, widoczna że możemy naprzód zastąpić x, y, z przez $\frac{d}{d\xi}$, $\frac{d}{d\eta}$, $\frac{d}{d\zeta}$, a zaś v przez $-\left(\frac{d}{d\xi}+\frac{d}{d\eta}+\frac{d}{d\zeta}\right)$: lecz przeciwzmiennik o czterech literach wywodzi się z przeciwzmiennika o trzech literach zastępując ξ, η, ζ przez $\xi-\theta$, $\eta-\theta$, i pochodne względem ξ, η, ζ są też same pod jednym i drugim z tych dwóch kształtów, podczas gdy pochodna pierwszego względem θ jest równą summie wziętéj ze znakiem $-$ pochodnych drugiego względem ξ, η, ζ.

Zobaczymy, w rozdziałach następnych, liczne zastosowania tego twierdzenia.

ROZDZIAŁ XIV.

UKŁADY CZYLI SYSTEMATA KSZTAŁTÓW.

---

166. Pozostają nam do zbadania niektóre własności układów kształtów. Poświęcamy temu niniejszy rozdział. Niezmiennik układu nazywa się kombinantem, jeżeli nietylko linijne przeobrażenie zmiennych, ale nawet podstawienie za niektóre kształty ich linijnych funkcyj, nie zmienia go wcale, a najwięcej stały czynnik wprowadza. Ztąd rugownik układu kształtów $u, v, w,$ jest kombinantem; widoczna bowiem że wypadek podstawienia spólnych pierwiastków z uw, czy to w $u+\lambda v+\mu w$, czy też w u, będzie ten sam, a dalej że $u+\lambda v+\mu w, v, w,$ mieć muszą nie inny rugownik jak uvw. Nadto w zrównaniach różniczkowych, którym zadosyć czynią zwyczajne niezmienniki, kombinanty muszą widocznie zadosyć czynić zrównaniu

$$\frac{a'dI}{da}+\frac{b'dI}{db}+\frac{c'dI}{dc}+\ldots=0.$$

Ztąd wynika że dla dwóch kształtów czwartego stopnia kombinant jest funkcyą wyznaczników (ab'), (ac'), (bd'), etc., dla trzech takichże kształtów, funkcyą wyznaczników $(ab'c'')$, etc., a w każdym razie niknie tosamościowo, jeżeli dwa kształty staną się równemi. Jeżeli $\lambda u+\mu v$, $\lambda' u+\mu' v$, podstawimy za $u, v,$ to każdy z wyznaczników (ab') zostanie pomnożonym przez $(\lambda\mu'-\lambda'\mu)$, a więc kombinant pomnożonym przez potęgę $\lambda\mu-\lambda'\mu)$, równą rzędowi kombinanta w spółczynnikach kształtów. Stosuje się to do jakiejkolwiek liczby kształtów. Ztąd można mieć w podobny sposób kombinantowe spółzmienniki, które się nie zmienią gdy zamiast niektórych kształtów weźmiemy ich linijne funkcye. I tak w Jakobiowy (69),

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ V_1, & V_2, & V_3 \\ W_1, & W_2, & W_3 \end{vmatrix},$$

podstawmy $lU + mV + nW$, za U, $l'U + m'V + n'W$, za V, etc. Wedle własności wyznaczników, iloczyn wyznaczników $(lm'n'')$ stanie się $(U_1V_2W_3)$. A więc spółczynniki kombinantowego spółzmiennika są funkcyami wyznaczników (ab'), (ac'), $(ab'c'')$, etc.

167. Jeżeli $U = (a, b, c, \between x, y)^n$, $V = (a', b', c' \between x, y)^n$, są kształtami podwójnemi tego samego stopnia, to $U + kV$, albo $(a + ka', b + kb', \ldots \between x, y)^n$, w razie nadawania rozmaitych wartości ilości k, stanowić będą układ kształtów tworzących *inwolucyą* z U, V. W ogóle układ ma $2(n - 1)$ kształtów, z których każdy posiada kwadrat za spółczynnik. Gdyż dyskryminant kształtu stopnia n, ma spółczynniki rzędu $2(n - 1)$. Jeżeli teraz podstawimy $a + ka'$ za a, $b + kb'$ za b, etc., to k mieć będzie widocznie $2(n - 1)$ wartości czyniących dyskryminant zerem.

Przypuszczenie $y = 1$ we wszystkich kształtach tych, oznacza n punktów na osi x. Dowiedliśmy że w $2(n-1)$ przypadkach, dwa z n punktów oznaczonych przez $U + kV$ w jedno przypadają miejsce; czyli, innemi słowy, znajduje się w inwolucyi $2(n - 1)$ *punktów podwójnych*.

Jeżeli $U + kV$ ma czynnik kwadratowy $x - \alpha$, to wiemy że α zadosyć czyni dwom ze zrównań otrzymanych przez różniczkowanie, to jest $U_1 + kV_1 = 0$, $U_2 + kV_2 = 0$, a więc zadosyć czyni zrrównaniu otrzymanemu przez wyrugowanie k między niemi. To zrównanie $U_1V_2 - U_2V_1 = 0$ stopnia $2(m-1)$ jest Jakobiowym dla U, V; równając go zeru otrzymamy $2(n-1)$ podwójnych punktów inwelucyi, danych przez U, V.

168. Czynnik spólny u i v, zamienia się na czynnik kwadratowy w ich Jakobiowym. Zauważmy że jeżeli $nu = xu_1 + yu_2$, $nv = xv_1 + yv_2$, to uczyniwszy $u_1v_2 - u_2v_1 = J$, przyjdzie $n(uv_2 - vu_2) = xJ$, $n(uv_1 - vu_1) = -yJ$. Różniczkując te zrównania, 1° względem x, 2° względem y, otrzymamy

$$n(uv_{22} - vu_{22}) = xJ_2, \qquad n(uv_{11} - vu_{11}) = -yJ_1$$

Wynika ztąd że każda wartość α na x, czyniąca u i v zerami, sprowadzi do zer nietylko J lecz i różniczki J_1, J_2, a więc że $x - \alpha$ musi wchodzić do J jako czynnik kwadratowy. Da się to daleko prościej dowieść. Dajmy $u = \beta\varphi$, $v = \beta\psi$, a nadto $\beta = lx + my$, więc

$$u_1 = l\varphi + \beta\varphi_1, \quad u_2 = m\varphi + \beta\varphi_2, \quad v_1 = l\psi + \beta\psi_1, \quad v_2 = m\psi + \beta\psi_2;$$

$$u_1v_2 - u_2v_1 = \beta^2(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) + \beta l(\varphi\psi_2 - \varphi_2\psi)$$
$$+ \beta m(\varphi_1\psi - \varphi\psi_1),$$

zkąd

$$(n-1)(u_1v_2 - u_2v_1) = (n-1)\beta^2(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)$$
$$+ \beta(lx + my)(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)$$
$$= n\beta^2(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1).$$

Wynika z tego co powiedziano, że dyskryminant ilości u i v, zawiera jako czynnik ich wyznacznik wypadkowy (résultant) R, gdyż jeżeli R niknie, Jakobiowy musi mieć dwa pierwiastki równe. Weźmy dwa kształty drugiego stopnia,

$$(a,\ b,\ c \between x,\ y)^2, \qquad (a',\ b',\ c' \between x,\ y)^2$$

ich Jakobiowy $(ab')x^2 + (ac')xy + (bc')y^2,$

ma za dyskryminant $(ab')(bc') - 4(ac')^2;$

a ten jest rugownikiem danych kształtów kwadratowych. W przypadku kształtów stopni wyższych, dyskryminant Jakobowiego zawierać będzie inny czynnik, którego naturę poniżej wykażemy.

169. Widzieliśmy, że można nadać dla k taką wartość, aby $u + kv$ zawierało czynnik kwadratowy. Lecz jeżeli k ma być takiem aby wprowadzało do $u + kv$ czynnik trzeciego stopnia, to jego wartość musi być zależną od spółczynników u i v. Warunek zależności tej będzie stopnia $3(n-2)$ względem jednych i drugich spółczynników.

Jeżeli $(x-\alpha)^3$ jest czynnikiem $u + kv + lw$, to $x - \alpha$ będzie czynnikiem trzech drugich różniczkowych spółczynników, czyli sprawdzi zrrównania

$$u_{11} + kv_{11} + lw_{11} = 0,\ u_{12} + kv_{12} + lw_{12} = 0,\ u_{22} + kv_{22} + lw_{22} = 0,$$

a po wyrugowaniu k i l, toż $x - \alpha$ sprawdzi zrrównanie

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & v_{11}, & w_{11} \\ u_{12}, & v_{12}, & w_{12} \\ u_{22}, & v_{22}, & w_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Widoczna że zrównanie to daje punkta potrójne układu $u + kv + lw$, a że jest stopnia $3(n-2)$, tyleż więc będzie tych punktów. Liczbę ich inaczej znaleźć możemy: dajmy warunek wedle którego $u + kv$ daje punkt potrójny jest rzędu p względem spółczynników a. Podstawiwszy $a + la''$ za a w każdym spółczynniku u, otrzymamy zrównanie stopnia p względem l, któremu zadosyć czynić będą p wartości na l; innemi słowy, p kształtów układu $u + kv + lw$ posiadają punkta potrójne. Wynika ztąd że $p = 3(n-2)$, i że warunek którym się zajmujemy jest rzędu $3(n-2)$ względem spółczynników v.

Warunek ten jest kombinantem, gdyż jeżeli k może przybrać wartość $u + kv$ mającą czynnik trzeciego stopnia, może też przybrać wartość taką aby $(u + av) + kv$ takiż zawierało czynnik.

170. Jeżeli $u + kv$ ma $(x-\alpha)^3$ za czynnik, to czynnikiem Jakobiowego ilości u i v będzie $(x-\alpha)^2$. Gdyż różniczki $u_1 + kv_1$, $u_2 + kv_2$, zawierają widocznie ten kwadrat za czynnik, a więc Jakobiowy da się wyrazić przez $(u_1 + kv_1)v_2 - (u_2 + kv_2)v_1 = 0$. Jeżeli $S = 0$ wyraża warunek niezbędny aby $u = kv$ posiadało czynnik sześcienny, S będzie czynnikiem w dryskryminancie Jakobiowego, gdyż dla $S = 0$, Jakobiowy ma dwa pierwiastki równe, a jego dyskryminant staje się równy zeru.

Jeżeli R jest wyznacznikiem wypadkowym, to dyskryminant Jakobiowego, tylko o czynnik liczebny różnić się może od RS. Jeżeli bowiem Jakobiowy jest stopnia $2(n-1)$, jego dyskryminant będzie stopnia $2\{2(n-1)-1\}$ w spółczynnikach swych, które będą pierwszego rzędu względem spółczynników u i v. Lecz każdy spółczynnik R jest rzędu n, spółczynnik S rzędu $2(n-1)$, dyskryminant ma R i S za swe czynniki, a więc za rzęd

$$n + 3(n-2) = 2\{2(n-1)-1\}.$$

171. Dyskryminant ilości $u + kv$ uważanej jako funkcya k, posiada czynnik kwadratowy, jeżeli w skład u i v wchodzi jaki czynnik spólny. Jakoż (88), dyskryminant ten jest postaci $(a + ka')\varphi + (b + kb')^2\psi$; lecz spólny czynnik u i v, pozwala

je przeobrazić w ten sposób aby czynnikiem tym było y, co wymaga $a = 0$, $a' = 0$. Ztąd czynnikiem kwadratowym dyskryminanta będzie $(b + kb')^2$; a w tym razie dyskryminant pozostaje niezmiennym mimo linijnych przeobrażeń jego zmiennych.

A zatem jeżeli dyskryminant ilości $u + kv$, uważać będziemy za funkcyą k, to czynnikiem tego k będzie R, czyli wyznacznik wypadkowy u i v. Dowiedliśmy bowiem że w razie $R = 0$, funkcya k przyjmuje dwa pierwiastki równe, a więc jej dyskryminanty znikają. I tak w kształcie drugiego stopnia $ac - b^2$ zamieniając a na $a + ka'$, etc., przyjdzie :

$$(ac - b^2) + k(ac' + ca' - 2bb') + k^2(a'c' - b'^2),$$

która to ilość ma za dyskryminant

$$(ac - b^2)(a'c' - b'^2) - 4(ac' + ca' - 2bb')^2.$$

W tej to jedynie postaci powinien być pisanym według D^ra^ Boole, wyznacznik wypadkowy kształtu drugiego stopnia $(a, b, c \between x, y)^2$, $(a', b', c' \between x, y)^2$, gdyż składowe części tej postaci są niezmiennikami w działaniach bardzo dogodnemi. W kształtach wyższych stopni dyskryminant dyskryminanta ma R za czynnik (inne czynniki już znikły).

172. Jeżeli mamy czynnik trzeciego stopnia lub dwa oddzielne czynniki stopnia drugiego, dyskryminant ilości $u + kv$ będzie podzielny przez k^2. Bo jeżeli u ma Δ za dyskryminant, $u + kv$ będzie miało za takowy

$$\Delta + k\left(a' \frac{d\Delta}{da} + b' \frac{d\Delta}{db} + \ldots\right) + \ldots$$

Jeżeli u posiada czynnik drugiego stopnia, Δ zniknie, i albo trzy pierwiastki α, β, γ będą równe, albo istnieć będą dwie pary pierwiastków równych (94); więc znikną różniczki $\Delta, \frac{d\Delta}{da'}, \ldots,$ a zatem cały spółczynnik mnożący k w dyskryminancie ilości $u + kv$, a k^2 będzie czynnikiem dyskryminanta. Widoczna że jeżeli $u + av$ ma czynnik sześcienny lub dwa kwadratowe, jego dyskryminant będzie podzielnym przez $(k - a)^2$ gdyż $u + kv = u + av + (k - a)v$. Dajmy że $S = 0$ i $T = 0$, wyrażają warunki podzielności $u + kv$, pierwszy przez czynnik sześcienny, drugi przez dwa czynniki kwadratowe, tak T jak S będą czynnikami dyskryminanta ilości $u + kv$ ze względu na k, gdyż $S = 0$ lub $T = 0$ są oznaką podzielności dyskryminanta przez czynnik kwadratowy. Dowiedliśmy (171) że R jest czynnikiem dyskryminanta, który (wedlug P. Cayley) nie może być innym jak RS^3T^2.

W ogóle nie istnieje inny przypadek w którymby dyskryminant $u + kv$, posiadał czynnik kwadrotowy. Znaleźliśmy że w rasie trzeciego i czwartego stopnia S i T stają się S^3 i T^2, a to daje się w ogóle stosować ze względu na rzędy. Gdyż dyskryminant $u + kv$ rzędu $2(n - 1)$ co do k, ma czynniki rzędu $0, 1, \ldots 2(n - 1)$ względem spółczynników kształtów danych; spółczynniki dyskryminanta będą przeto względem tychże rzędu $2(n - 1)(2n - 3)$. Wiemy zaś że R jest rzędu n, S rzędu $3(n - 2)$, a T, jak dowiedziemy poniżej, rzędu $2(n - 2)(n - 3)$, i

$$2(n - 1)(2n - 3) = n + 9(n - 2) + 4(n - 2)(n - 3).$$

173. Wiemy (166) że każdy kombinant u, v, przybiera czynnik będący potęgą $(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$, w razie gdy u, v, zamienimy na $\lambda u + \mu v, \lambda' u + \mu' v$. Dowiedziemy obecnie że rugownik tę samą własność posiada. Zauważmy że jeżeli w pewnej liczbie kształtów danych, jeden jest iloczynem kilku innych, na prz*-*

kład : u, v, $ww'w''$, ich wyznacznik wypadkowy jest iloczynem wyznaczników wypadkowych (uvw), (uvw'), (uvw''). Wprowadźmy weń spólne pierwiastki u, v, i pomnóżmy otrzymane wypadki, nowy iloczyn będzie równym iloczynowi wynikłemu z pomnożenia w, w', w'', po podstawieniu w nie rzeczonych pierwiastków. Nadto wyznacznik wypadkowy u, v, kw, jest takimże wyznacznikiem u, v, w, rozmnożonym przez k^{mn}, gdyż wchodzą weń spółczynniki w w stopniu mn. Niech $\mathrm{R}(u, v)$ będzie wyznacznikiem wypadkowym u, v, ilości stopnia n,
$\mu^m\mathrm{R}(\lambda u + \mu v,\ \lambda' u + \mu' v) = \mathrm{R}(\lambda\mu' u + \mu\mu' v,\ \lambda' u + \mu' v)$ (*)

$$= \mathrm{R}\left\{(\lambda\mu' - \lambda'\mu)u,\ \lambda' u + \mu' v\right\} = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^n\mathrm{R}(u,\ \lambda' u + \mu' v)$$

$$= (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^n\mu^m\mathrm{R}(u,\ v);$$

zkąd

$$\mathrm{R}(\lambda u + \mu v,\ \lambda' u + \mu' v) = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^n\mathrm{R}(u,\ v).$$

W tenże sam sposób dowiedziemy że u, v, w, ma za rugownik, rugownik $\lambda u + \mu v + \nu w$, $\lambda' u + \mu' v + \nu' w$, $\lambda'' u + \mu'' v + \nu'' w$ wzięte razy $(\lambda\mu'\nu'')^{n2}$.

174. Dajmy że U, V, są funkcyami rzędu m i n względem u i v, te zaś funkcyami rzędu p względem x, y, i że wypadkiem wyrugowania u, v, pomiędzy U, V, jest D; rugując x, y, między U, V, otrzymamy D^p pomnożone przez wyznacznik wypadkowy u, v, wyniesiony do potęgi mn. Gdyż U da się rozłożyć na czynniki, $u - \alpha v$, $u - \beta v, \ldots$, V zaś na $u - \alpha' v$, $u - \beta' v, \ldots$, (173), wyznacznik wypadkowy U, V, jest iloczynem wszystkich pojedyńczych wyznaczników wypadkowych

---

(*) $u + kv$, v, i taż ilość po odjęciu od niéj u, v, wzięte razy μ, mają ten sam wyznacznik wypadkowy (166).

$u - \alpha v$, $u - \alpha' v, \ldots$ Jednym z nich jest $(\alpha - \alpha')^p R(u, v)$, a ich liczba równa się mn, jeżeli je zatem pomnożymy, otrzymamy $R(u, v)$ do potęgi mn, pomnożone przez $(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha''), \ldots$, wyniesione do potęgi p, jest to zaś rugownik U, V, względem u, v.

175. Szukajmy dyskryminanta U względem x, y, gdy to U jest funkcyą u, v. Dyskryminant wieloczynu dwóch kształtów podwójnych u, v, równa się (96) iloczynowi dyskryminantów ilości u i v rozmnożonemu przez ich wyznacznik wypadkowy wyniesiony do kwadratu.

Jeżeli $U = (u - \alpha v)(u - \beta v) \ldots$, dyskryminant U równa się iloczynowi dyskryminantów $u - \alpha v$, $u - \beta v, \ldots$, rozmnożonemu przez kwadrat pojedyńczych wyznaczników wypadkowych $u - \alpha v$, $u - \beta v, \ldots$ Lecz, jak powiedziano, niektóre z nich są $(\alpha - \beta)^p R(u, v)$. Jeżeli U uważane za funkcyą u, v, jest stopnia m, będzie $\frac{m}{2}(m-1)$ pojedyńczych wyznaczników wypadkowych, kwadrat ich iloczynu stanie się :

$$(\alpha - \beta)^{2p}(\alpha - \gamma)^{2p} \ldots \times R^{m(m-1)}(u, v);$$

lecz $(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2 \ldots$ jest dyskryminantem U uważanego za funkcyą u, v. Oznaczmy go przez Δ, a wiemy że iloczyn kwadratów pojedyńczych wyznaczników wypadkowych będzie $\Delta^p R^{m(m-1)}$. Weźmiemy teraz iloczyn dyskryminantów $u - \alpha v$, $u - \beta v, \ldots$, który jest wypadkiem wyrugowania α między dyskryminantem $u - \alpha v$ (będącym kształtem rzędu $2(p-1)$ względem α), a kształtem rzędu m wynikającym z podstawienia $u - \alpha v$ w U. Ten to iloczyn p. Sylwester w inny przedstawił sposób : niech a_0, b_0, będą spółczynnikami x^p w u, v, wyznacznik wypadkowy $u - \alpha v$, $u - \alpha v'$, będzie $(a_0 - \alpha b_0)$ razy wziętym $u - \alpha v$ dyskryminantem (89). Lecz

$$\begin{aligned} R(u, v)\, R(u - \alpha v,\ u_1 - \alpha v_1) &= R(u - \alpha v,\ u_1 v - \alpha v v_1) \\ &= R(u - \alpha v,\ u_1 v - u v_1). \end{aligned}$$

Wedle 168, $J = u_1v_2 - u_2v_1$ daje $yJ = p(u_1v - uv_1)$, $a_0 - \alpha b_0 = R(u - \alpha v, y)$, a dyskryminant $u - \alpha v$ różni się tylko o czynnik liczebny od wyznacznika wypadkowego $(u - \alpha v, J)$ podzielonego przez $R(u, v)$. Przeto iloczyn wszystkich dyskryminantów będzie wyznacznikiem wypadkowym J przez iloczyn $u - \alpha v, u - \beta v, \ldots$, albo wyznacznikiem wypadkowym U, J, podzielonym przez $R(u, v)$ do potęgi m^m. Przychodzimy do wypadku p. Sylwestra (*Comptes Rendus*, tom. LVIII, str. 1078), że dyskryminant U względem xy jest $\Delta^p R(u, v)^{m^2 - 2m} R(U, J)$, wyrażenie dające się skrócić z powodu że $R(U, J)$ ma $R(u, v)^m$ za czynnik

176. Rzecz o potrójnych i poczwórnych kształtach, jako w geometryi ważna, do dzieł geometrycznych, odesłaną być powinna. Wskażemy jednak w tem miejscu co w przypadku tych kształtów odpowiada dopiero co wyłożonym teoryom (*).

Niech u i v będą dwoma potrójnemi kształtami, i dajmy że napisaliśmy dyskryminant ilości $u + kv$; ten uważany jako funkcya ma czynnik kwadratowy; najprzód, jeżeli krzywe przedstawione przez v i v są do siebie stycznemi. Gdyż widzieliśmy (97) że zrównanie $az^n + nbz^{n-1}x + ncz^{n-1}y + \ldots = 0$, przedstawiające pewną krzywą ma dyskryminant formy $a\theta + b^2\varphi + bc\psi + c^2\chi$; a więc dyskryminant ilości $u + kv$ przybierze postać $(a + ka')\,\theta + (b + kb')\varphi + \ldots\ldots$ Biorąc za

(*) Pierwsza edycya wyższéj algebry p. Salmona, tłumaczona na język francuzki przez p. Bazin (*Leçons d'algèbre supérieure par G. Salmon, professeur au Collège de la Trinité à Dublin. Traduit de l'anglais par M. Bazin, ingénieur des Ponts-et-Chaussées. Paris*, 1866, *chez Gauthier Villars*), traktuje w dwóch ostatnich lekcyach o kształtach potrójnych i poczwórnych. Druga, angielska edycya tegoż dzieła (*Lessons introductory to the modern higher. algebra, by the rev George Salmon. Dublin*, 1866), przedmiot ten do geometryi odsyła. Jakoż autor traktował go obszernie w dziele : *Geometry of three dimensions*. W niniejszem tłumaczeniu poszedłem za drugiem, to jest angielskiem wydaniem.
(*Przyp. tłumacza.*)

punkt xy spólny u i v, a i a' znikną; a jeżeli przyjmiemy y, za spólną styczną, b i b' znikną także, pozostanie dyskryminant formy $(c+kc')^2\chi$, w którym widocznie występuje czynnik drugiego stopnia.

177. Dyskryminant ma powtóre wyznacznik drugiego stopnia, jeżeli u posiada punkt zwrotu, albo punkt podwójny. Dyskryminant Δ potrójnego kształtu zamyka w sobie warunek nadający dla u_1, u_2, u_3, jeden spólny układ wartości; lecz w obchodzącym nas przypadku, dwa takie układy (równe lub różne) istnieć muszą, a więc zniknie (85) nietylko Δ, lecz jego różniczki w odniesieniu do spółczynników u. Dyskryminant ilości $u+kv$ ma formę $\Delta+k\left(\frac{a'd\Delta}{da}+\frac{b'd\Delta}{db}+\ldots\right)+\ldots$ i da się w tym razie podzielić przez k^2; a nadto (172) jest podzielnym przez $(k-a)^2$, jeżeli krzywa $u+av$ ma punkt podwójny lub zwrotu. Dajmy że $R=0$ wyraża warunek styczności u i v; $S=0$, warunek aby pomiędzy krzywemi danemi przez $u+kv$, znajdowała się jedna mająca punkt zwrotu; wreszcie $T=0$, warunek aby między temiż była jedna o punkcie potrójnym; wiemy zaś że R, S, T, są czynnikami dyskryminanta dyskryminanta ilości $u+kv$ uważanej jako czynnik k, a którym jest RS^3T^2.

Można tego dowieść biorąc pod uwagę rzęd dyskryminanta (172), który dla kształtu potrójnego $u+kv$ jest rzędu $3(n-1)^2$ w k, a którego wyrazy skrajne mają spółczynniki tego samego rzędu jak u i v. Tego dyskryminanta utworzymy dyskryminant uważany jako funkcya k; przykład wyrazów tego ostatniego dostarczy iloczyn skrajnych wyniesiony do potęgi $3(n-1)^2-1$. Ztąd rzęd dyskryminanta tego w spółczynnikach u i v jest $3(n-1)^2(3n^2-6n+2)$. Będzie zaś dowiedzionem że R jest rzędu $3n(n-1)$, S rzędu $12(n-1)(n-2)$, T rzędu $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$.

Lecz: $3(n-1)^2(3n^2-6n+2)$

$$=3n(n-1)+36(n-1)(n-2)+3(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11).$$

178. Podamy tu jedynie dowód na rzęd R, którą to ilość jako wyrażającą styczność krzywych danych przez u i v, nazwał P. Cayley *niezmiennikiem styczności*. P. Salmon podał, w r. 1836, (*Quarterly Journal*, t. I, str. 339) następujący sposób obliczania go. Znajdźmy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix},$$

a otrzymamy miejsce punktów, których polarne względem u i v, przecinają się wedle linii dowolnej $\alpha x+\beta y+\gamma z$. Jeżeli między temi punktami znajduje się jeden spólny obu krzywym, ich polarne będą stycznemi w tym punkcie; a każda z nich może mieć punkt spólny z $\alpha x+\beta y+\gamma z$, tylko w przypuszczeniu przechodzenia przez punkt spólny dwom krzywym, lub gdy obie styczne na jedną prostą się zamienią. Wyrugujmy zmienne między u, v, i wyznacznikiem powyżej napisanym (rzędu $m+n-2$ w swych zmiennych, a rzędu pierwszego w spółczynnikach każdej z krzywych), a wypadek będzie R rozmnożone przez wypadek wyrugowania zmiennych między u, v i $\alpha x+\beta y+\gamma z$. Całkowity wyznacznik wypadkowy jest rzędu mn w α, β, γ, a zawiera spółczynniki u w rzędzie $n(m+n-2)+mn=n(2m+n-2)$, spółczynniki zaś v w rzędzie $m(2n+m-2)$. Wyznacznik wypadkowy u, v, $\alpha x+\beta y+\gamma z$, zawiera α, β, γ w stopniu mn, spółczynniki u w stopniu n, a spółczynniki v w stopniu m. Więc spółczynniki u i v wchodzą do R, pierwsze w stopniu $n(2m+n-3)$, drugie w stopniu $m(2n+m-3)$. W razie $m=n$ wpadamy na znaną ilość $3n(n-1)$.

Wypadek ten inaczej otrzymać można : rzęd niezmiennika styczności w spółczynnikach v, jest widocznie równym liczbie krzywych kształtu $u + \lambda v + \mu w$ mogących być stycznemi do u, gdy w i v są krzywemi jednego rzędu. Lecz punkta styczność, u są widocznie punktami Jakobiowego ilości u, v, w, który jako będący krzywą rzędu $m + 2n - 3$ da $m(m + 2n - 3)$ punktów styczności z u.

179. Twierdzenie o dyskryminancie iloczynu dwóch kształtów podwójnych (91), do potrójnych zastosować się nie da ; gdyż ich dyskryminant zniesie się tosamościowo. W rzeczy samej, dyskryminant jest warunkiem aby jedna z krzywych miała punkt podwójny, krzywa zaś wynikła z dwóch innych, ma punkta podwójne w miejscach przecięć krzywych składowych. A pomijając geometryczne względy, dyskryminant uv, jest warunkiem pozwalającym znaleźć zmienne sprawdzające zarazem różniczki : $uv_1 + vu_1$, $uv_2 + vu_2$,... Odpowiadają zadaniu temu wszelkie wartości zadosyć czyniące spółcześnie u i v, a znajdziemy je zawsze, jeżeli tylko więcej niżeli dwie zmienne wchodzą w skład zrównań.

Nadto twierdzenie paragrafu 91 da się bezpośrednio zastosować do niezmienników styczności. Warunek, aby linia u była styczną do vw zostanie spełnionym, jeżeli u dotyka tak w jak v, lub przechodzi przez ich przecięcie ; gdyż to przecięcie oznacza punkt podwójny, a linia przez takowy przechodząca uważa się podwójnie za styczną. Jeżeli więc $\mathrm{T}(u, v)$ jest niezmiennikiem styczności dla u, v, przyjdzie :

$$\mathrm{T}(u, vw) = \mathrm{T}(u, v)\mathrm{T}(v, w)\{\mathrm{R}(u, v, w)\}^2,$$

gdzie $\mathrm{R}(u, v, w)$ jest wyznacznikiem wypadkowym u, v, w. Ten wypadek da się sprawdzić przez porównanie rzędów w jakich doń wchodzą spółczynniki u, v lub w, i tak co do u

mamy :

$$(n+p)(n+p+2m-3)=n(n+2m-3)+p(p+2m-3)+2np.$$

180. To cośmy powiedzieli (178) stosuje się do układu trzech poczwórnych, lub $k-1$ kształtów po k branych. Niezmiennik styczności trzech poczwórnych kształtów oznacza warunek, że dwa z pomiędzy mnp punktów powierzchni przez te kształty danych, przypadają razem, czyli że płaszczyzny styczne w nich do powierzchni danych mają spólną linią przecięcia. Przychodzimy do tego dzieląc (178) wyznacznik wypadkowy u, v, w, oraz

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, \end{vmatrix},$$

przez wyznacznik wypadkowy u, v, w, $\alpha x+\beta y+\ldots$ Tak postępując przekonywamy się że wyznacznik styczności zawiera spółczynnik u w stopniu $np(2m+n+p-4)$, wypadek potwierdzony uwagą że takaż jest liczba punktów w których Jakobiowy u, u', v, w, spotyka przecięcie vw. Podobnież niezmiennik styczności $k-1$ kształtów $(u, v, w, \ldots)$ po k branych, zawiera spółczynniki n w stopniu równym iloczynowi $n, p, \ldots$ rozmnożonemu przez $2m+n+p+\ldots-k$.

181. Dla uzupełnienia przedmiotu podamy teoryą niezmiennika styczności dwóch poczwórnych kształtów, do czego użyć musimy prawd, które nieco później udowodnimy. Dowodzenie poprzednio użyte przekonywa, że rzęd spółczynników **U** w niezmienniku styczności U, **W**, jest równy liczbie kształtów układu $U+\lambda V$ dających punkta styczności z W, przypuściwszy że **U** i V są jedynego rzędu. Lecz porównywając spółczynniki płaszczyzn

stycznych do $U+\lambda V$ i W, spostrzeżemy że punkt styczności musi zadosyć czynić układowi równoważnemu dwom warunkom

$$\left\| \begin{matrix} U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ V_1, & V_2, & V_3, & V_4 \\ W_1, & W_2, & W_3, & W_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

W rozdziale o rzędzie układów zrównań, zobaczymy że układ nasz jest rzędu

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu,$$

gdzie λ, μ, ν, są rzędami U_1, V_1, W_1, a temi są w naszym przypadku $m-1$, $m-1$, $n-1$. Rzęd układu jest więc

$$n^2+2mn+3m^2-4n-8m+6,$$

a rzęd niezmiennika styczności równa się tej cyfrze wziętej razy n; wypadek ostatni kombinując z $W=0$, które sprawdzić się musi, otrzymamy punkt styczności.

182. Po tych szczegółach, przedstawienie ogólnej teoryi obchodzących nas obecnie niezmienników nie ulega żadnej trudności. P. Sylwester zowie je osculants, wyraz równoważny użytemu, *niezmienniki styczności*. Weźmy i kształtów $U, V, W, \ldots$ o k zmiennych; oskulant zawiera warunek aby układ wartości który sprawdza $U, V, W \ldots$, i kształty styczności $xU'_1+yU'_2+\ldots$ były związane tosamościowo przez

$$\lambda(xU'_1+\ldots)+\mu(xV'_1+\ldots)+\nu(xW'_1+\ldots)+\ldots=0,$$

innemi słowy, warunek że zrównania $U=0$, $V=0, \ldots$, i układ,

$$\left\| \begin{matrix} U_1, & U_2, & U_3, & \ldots \\ V_1, & V_2, & V_3, & \ldots \\ W_1, & W_2, & W_3, & \ldots \end{matrix} \right\| = 0,$$

mogą być spółcześnie sprawdzonemi. Ostatni układ jako mający k kolumn, oraz i linij, odpowiada $k - i + 1$ zrównaniom, a więc porównany z liczbą i zrównań danych jest równoważnym $k + 1$ zrównaniom o k zmiennych. W istocie jednak nie odpowiada on jak k zrównaniom, gdyż jeżeli napiszemy U, V,... w postaci $xU_1 + yU_2 + \ldots = 0$, $xV_1 + yV_2 + \ldots = 0$, etc., to wartość zadosyć czyniąca wyznacznikowi i kształtom danym U, V, W,.., prócz jednego, i temu ostatniemu zadosyć czynić musi. Układ równoważny k zrównaniom o k zmiennych, ulega pewnemu warunkowi w razie sprawdzenia; rzęd tego warunku w spółczynnikach U, znajdziemy jak w paragrafie 181. Za U napiszemy $U + \lambda u$, a przekonamy się ile z pomiędzy wartości zmiennych zadosyć czynią $i - 1$ zrównaniom V, W,..., i układowi

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3, & \ldots \\ u_1, & u_2, & u_3, & \ldots \\ V_1, & V_2, & V_3, & \ldots \\ W_1, & W_2, & W_3, & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

równoważnemu $k - 1$ zrównaniom. Rzęd $i - 1$ zrównań V, W,..., jest iloczynem ich stopni, n, p,..., a rzęd oskulanta w spółczynnikach U jest iloczynem tej liczby przez rzęd układu wyznaczników, do znalezienia którego podamy prawidło w rozdziale traktującym o rzędzie układów zrównań.

Dla jednego kształtu danego, oskulant jest dyskryminantem, dla k kształtów o k zmiennych jest on wyznacznikiem wypadkowym. Twierdzenie paragrafu 91 stosuje się do nich; dajmy że szukamy oskulanta $k - 1$ kształtów o k zmiennych, i że ostatni z tych kształtów równa się iloczynowi dwóch kształtów U, V; widoczna że oskulant całego układu będzie iloczynem oskulanta U i $k - 2$ pozostałych kształtów, oskulanta V i tychże k — 2 kształtów, oraz kwadratu wyznacznika wypadkowego wszystkich kształtów danych.

Należałoby zająć się formą dyskryminanta Jakobiowego ilości $\lambda U + \mu V + \nu W$, w razie gdy U, V, W, są kształtami potrójnemi, oraz formą dyskryminanta ze względu na λ, μ, ν. Przypadek gdy U, V, W, są poczwórnemi w rozdziale XVI traktowanym będzie; w innych razach ostatni dyskryminant znosi się tosamościowo.

ROZDZIAŁ XV.

ZASTOSOWANIA DO KSZTAŁTÓW PODWÓJNYYCH.

183. Wyłożywszy główne punkta teoryi ogólnej, objaśnimy je w rozdziale niniejszym najprostszemi przykładami niezmn - ników i spółzmienników rozmaitych zrównań. Metoda paragrafu 101 pokazuje że kształt podwójny posiada w ogóle $n-2$ niezależnych niezmienników; gdyż tamże dowiedzionem zostało że w tym razie mamy $n-3$ niezmienników bezwzględnych, a ponieważ (101) jeden taki niezmiennik wywodzi się z dwóch zwyczajnych, więc ilość tych ostatnich jest $n-2$. Jeżeli S i T są dwoma niezmiennikami tego samego stopnia, to $S + aT$, gdzie a jest czynnikiem liczebnym, będzie także niezmiennikiem, którego jednakże uważać nie możemy za nowy, niezależny od S i T niezmiennik. Podobnież względem S drugiego, i T trzeciego stopnia, $S^3 + aT^2$ w tymże samym znajduje się przypadku. Lecz niezmiennik nie dający się wymiernie wyrazić w funkcyi S i T, na przykład R dany przez zrównanie $R^2 = S^3 + aT^2$, jest różnym od S i T, lecz zależnym od nich niezmiennikiem. Tak że gdy $n-2$ wyraża liczbę niezmienników niezależnych kształtu danego, liczba niezmienników odrębnych (przeszedłszy 62 stopień) będzie nieograniczoną.

Weźmy układ złożony z dwóch kształtów stopni m i n; postępując wedle paragrafu 101, przyjdziemy do $m + n + 2$ zrównań które sprawdzonemi być powinny, a że tylko cztery stałe ulegają naszemu rozporządzeniu, układ przeto posiada $m+n-2$ bezwzględnych, a $m+n-1$ zwyczajnych niezależnych niezmienników czyli że układ z dwóch kształtów złożony, posiada trzy niezmienniki niezależne więcej, aniżeli ich posiadały kształty pojedyńczo wzięte, mające $m-2$ i $n-2$ niezmienniki takie. Gdyby jednak jeden z kształtów był pierwszego lub drugiego stopnia, toby tylko dwa nowe niezmienniki niezależne przybyć mogły; a to dla tego że w tym razie nie $n-2$ lecz $n-1$ wyraża ich ilość, która jest 0 dla kształtu linijnego, a 1 dla kształtu drugiego stopnia. Przeto liczba innych niezmienników będzie o 1 mniejszą od ilości wskazanej prawidłem ogólnym.

Niezmienniki pewnego kształtu i układu linijnego $x\xi+y\eta+\ldots$ (114), mogą być uważane za przeciwzmienniki kształtu danego, a te znowu w kształtach podwójnych zamieniają się na spółzmienniki przez zamianę ξ i y na y i $-x$. Widzieliśmy że kształty podwójne prócz niezmienników dwa tylko niezależne spółzmienniki posiadają; a że kształt sam może być uważany za jeden ze swoich spółzmienników, więc wszystkie spółzmienniki dadzą się wyrazić w funkcyi kształtu, jego niezmienników i jednego spółzmiennika; wyrażenie to nie zawsze jest wymiernem.

Przystępujemy do wymienienia niezmienników i spółzmienników zasadniczych dla najprostszych kształtów.

184. Kształt drugiego stopnia. Podaliśmy już główne punkta odnoszące się do teoryi kształtu

$$(a, b, c \between x, y)^2;$$

ma on jeden tylko niezależny niezmiennik (102), będący zarazem dyskryminantem $ac-b^2$. Każdy inny niezmiennik musi być potęgą $(ac-b^2)^m$. Widzieliśmy także (137) że według prawa wzajemności p. Hermita, tylko kształty stopni parzystych mają niezmienniki drugiego rzędu których formułą symboliczną jest $\overline{12}^{2m}$. Uczyniwszy $y = 1$ w kształcie danym, będzie on oznaczał dwa punkta na osi x, które razem przypadną gdy dyskryminant stanie się $= 0$ (167).

W podobny sposób układ dwóch kształtów

$$(a, b, c \between x, y)^2, \qquad (a', b' c' \between x, y)^2,$$

ma za niezmiennnik $\overline{12}^{2} = ac' + a'c - 2bb'$. Jeżeli każdy z danych kształtów wzięty osobno oznacza dwa punkta na osi x, to zniknięcie niezmiennika będzie poznaką że mamy cztery punkta w stosunku harmonicznym, i to takie że dwa odpowiadające jednemu kształtowi, są sprzężonemi dwóch innych odpowiadających kształtowi drugiemu. Dowiedliśmy również że spółzmiennik $\overline{12}$ (czyli wyznacznik Jakobiowy układu) przedstawia ogniska układu *inwolucyjnego* danego przez cztery punkta (167).

Rugownik układu może być napisany pod jedną z postaci:

$$(ac' - c'a)^2 + 4(ba' - b'a)(bc' - b'c),$$

albo

$$(ac' + ca' - 2bb') - 4(ac - b^2)(a'c' - b'^2).$$

W razie trzech kształtów drugiego stopnia

$$(a, b, c \between x, y)^2, \quad (a', b', c' \between x, y)^2, \quad (a'', b'', c \between x, y)^2,$$

sprowadzenie do 0 wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}$$

wyraża warunek że trzy pary punktów danych przez trzy kształty są w inwolucyi (*).

185. Kształt trzeciego stopnia. Weźmy

$$(a, b, c, d \between x, y)^3;$$

jedyny niezmiennik tego kształtu jest jego dyskryminantem :

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

Hessowy $\overline{12}^2$ jest :

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2,$$

można go napisać jako wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ b, & c, & d \\ y^2, & -xy, & x^2 \end{vmatrix},$$

który ma jednaki z kształtem samym dyskryminant. Jeżeli kształt trzeciego stopnia ma α, β, γ za pierwiastki, natenczas jego Hessowy będzie (117) :

$$\Sigma(x - \alpha)^2 (\beta - \gamma)^2.$$

Spółzmiennik trzeciego stopnia, czyli przewoźnik dyskrymi-

(*) Wszystkie szczegóły geometryczne w tym paragrafie przytoczone, wyjęte są z dzieła p. Salmona o stożkowych (*The conics*), str. 291-296.

nanta (122) jest:

$$(a^2d - 3abc + 2b^3,\quad abd + b^2c - 2ac^2,\quad 2b^2d - acd - bc^2,$$
$$- 3bcd - ad^2 - 2c^3)(x, y)^3.$$

Możemy go przedstawić geometrycznie w sposób następujący: weźmy trzy punkta oznaczone przez kształt dany, i znajdźmy punkt harmoniczny odpowiedni każdemu z nich w odniesieniu do dwóch pozostałych, a otrzymamy trzy nowe punkta będące przedstawieniem geometrycznem w mowie będącego spółzmiennika. Bo jeżeli kształt dany zamieni się na $xy(x+y)$, to przypuszczenie $a=d=0$, i $b=c=1$ pokaże że $x-y$ będzie czynnikiem spółzmiennika. Lecz $x+y$, $x-y$ są sprzężonemi harmonicznemi względem x i y, a oznaczywszy przez $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ odległości tych czterech punktów od początku, mierzone na osi x, przekonamy się że wszelki między niemi, harmoniczny stosunek, wyrażający się przez stosunek iloczynów $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$ i $(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$ nie będzie naruszony przez przeobrażenie linijne zależące na podstawieniu $\dfrac{\lambda\alpha+\mu}{\lambda'\alpha+\mu'}$, za α. A jeżeli dowiedziemy że dla jednego przypadku istnieją stosunki których przeobrażenia linijne bynajmniej nie zmieniają, to tem samem dowiedziemy że ta własność jest ogólną. Inne czynniki przewoźnika ilości $xy(x+y)$ są $x+2y$, $2x+y$, tak że nasz wypadek może być napisany symetrycznie jako przewoźnik ilości xyz (w której x, y, z połączone są związkiem linijnym $x+y+z=0$); przewoźnik ten jest

$$(x-y)(y-z)(z-x).$$

Uwagi powyższe prowadzą nas do wyrażenia czynników spółzmiennika w funkcyi pierwiastków kształtu danego; bo dawszy że δ przedstawia odległość od początku punktu sprzężonego z α względem β i γ, wyciągnijmy wartość na δ ze zrównania

$$\frac{2}{(\alpha-\delta)} = \frac{1}{(\alpha-\beta)} + \frac{1}{(\alpha-\gamma}$$

przyjdzie

$$\delta = \frac{\alpha\beta+\alpha\gamma-2\beta\gamma}{2\alpha-\beta-\gamma};$$

zkąd otrzymamy na wartość spółzmiennik

$$\{(2\alpha-\beta-\gamma)x+(2\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma)y\}$$

$$\{(2\beta-\alpha-\gamma)x+(2\gamma\alpha-\beta\alpha-\gamma\beta)y\}$$

$$\{(2\gamma-\alpha-\beta)x+(2\alpha\beta-\gamma\alpha-\gamma\beta)y\}.$$

Wartość tę sprawdzić można uskuteczniając mnożenie i podstawienia w funkcyi wyrazów zrównania.

186. Usiłować teraz będziemy znaleźć związek między poprzedniemi spółzmiennikami i niezmiennikami za pomocą kanonicznych form które dla $U = ax^3 + dy^3$ są : dyskryminant $D = a^2d^2$, Hessowy $H = adxy$, i spółzmiennik trzeciego stopnia $J = ad(ax^3 - dy^3)$. Dyskryminant ilości J jest trzecią potęgą dyskryminanta ilości U, gdyż dla kształtu kanonicznego staje się on a^6d^6. W paragrafie 183 przewidywaliśmy że J nie jest niezależnem od U i H, za pomocą zaś kanonicznego kształtu łatwo przyjść możemy do zrównania otrzymanego przez p. Cayley, a wykazującego związek między niemi zachodzący :

$$J^2 - DU^2 = -4H^3.$$

Pan Cayley użył tego zrównania do rozwiązania U przez rozłożenie na linijne czynniki. Bo gdy $J^2 - DU^2$ jest sześcianem zupełnym, wnosić możemy że czynniki $J \pm U\sqrt{D}$ takiemiż sześcianami będą; i w rzeczy samej, są one dla formy kanonicznej $2a^2dx^2$ i $2ad^2y^3$.

Ponieważ zaś $x\sqrt[3]{a} - y\sqrt[3]{d}$ jest jednym z czynników formy kanonicznej, widoczna przeto że czynnik ogólny jest proporcyonalny do

$$(U\sqrt{D} + J)^{\frac{1}{3}} + (U\sqrt{D} - J)^{\frac{1}{3}},$$

funkcya stająca się zerem dla $U = \alpha$.

PRZYKŁAD. — Powróćmy do zrównania paragrafu 125

$$U = 4x^3 + 9x^2 + 18x + 17;$$

mamy

$$D = 1600, \quad J = 110x^3 - 90x^2y - 630xy^2 - 670y^3;$$

zkąd

$$U\sqrt{D} + J = 10(3x + y)^3, \quad U\sqrt{D} - J = 50(x + 3y)^3,$$

a czynniki są

$$3x + y + (x + 3y)\sqrt[3]{5}.$$

187. Układ złożony z kształtu drugiego i trzeciego stopnia. Dajmy

$$(a, b, c, d \between x, y)^3, \quad (A, B, C \between x, y)^2.$$

Najprostszy niezmiennik otrzymuje się kombinując kształt drugiego stopnia z Hessowym kształtu trzeciego stopnia, i obliczając pośredni niezmiennik dwóch kształtów kwadratowych; otrzymamy

$$J = A(bd - c^2) - B(ad - bc) + C(ac - b^2).$$

Wyznacznik wypadkowy obliczony wedle paragrafów 44 i 67 będzie

$$R = a^2C^3 - 6abBC^2 + 6acC(2B^2 - AC) + ad(6ABC - 8B^3)$$

$$+ 9b^2AC^2 - 18bcABC + 6bdA(2B^2 - AC)$$

$$+ 9c^2A^2C - 6cdBA^2 + d^2A^3.$$

J i R uważać możemy za zasadnicze niezmienniki układu; dla łatwiejszego porównania z niemi innych spółzmienników przypuszczamy $A = C = 0$, czyli bierzemy za x i y dwa czynniki kształtu drugiego stopnia. W tym razie mamy

$$J = (bc - ad)B, \qquad R = -8adB^3.$$

Wyznacznik Jakobiego jest

$$(Ab - Ba)x^3 + (2Ac - Bb - Ca)x^2y + (Ad + Bc - 2Cb)xy^2$$

$$+ (Bd - Cc)y^3.$$

Prócz tego istnieją spółzmienniki linijne; wprowadźmy symbole różniczkowe w stopień drugi i wykonajmy na stopniu trzecim działania wskazane, a otrzymamy

$$L_1 = (aC - 2bB + cA)x + (bC - 2cB + dA)y;$$

działając podobnież przez L_1 na kształt stopnia drugiego przyjdzie

$$L_2 = \{aBC - b(2B^2 + AC) + 3cAB - dA^2\}x$$

$$+ \{aC^2 - 3bBC + c(AC + 2B^2) - dAB\}y.$$

Wartości na L_1 i L_2 wyrażone w funkcyi α, β, γ, pierwiastków zrównania trzeciego stopnia, oraz α', β', pierwiastków zrównania drugiego stopnia, zamienią się na

$$\Sigma(\alpha'-\alpha)(\beta'-\beta)(x-\gamma), \qquad \Sigma(\alpha'-\alpha)(\beta'-\beta)(\alpha'-\gamma)(x-\beta').$$

Wyznacznik wypadkowy ilości L_1 i L_2 w razie $A=C=0$ jest proporcyonalny do B^3bc. Oznaczywszy przez Δ dyskryminant $AC-B^2$ kształtu drugiego stopnia, przekonamy się że wyznacznik wypadkowy ilości L_1, i L_2 wyrażony w funkcyi niezmienników zasadniczych jest $R+8\Delta I$.

Otrzymamy inne linijne spółzmienniki, zastępując w L_1 i L_2 spółczynniki kształtu trzeciego stopnia przez spółczynniki odpowiednie spółzmiennika tego kształtu (122).

Rugując między L_1 i kształtem drugiego stopnia, lub między L_1 i L_2, do jednego dochodzimy wypadku; lecz rugując między L_1 i kształtem trzeciego stopnia, nowy otrzymujemy niezmiennik, po uczynieniu $A=C=0$, a będzie on $B^3(ac^3-db^3)$, ilość nie dająca się przywieść do żadnej z form poprzednich. Kwadrat jednak z tej ilości łatwo się do nich sprowadzić daje. Albowiem dyskryminant kształtu trzeciego stopnia jest

$$D=a^2d^2+4ac^3+4db^3-3b^2c^2-18abcd;$$

kwadrat zaś z naszego niezmiennika pomnożony przez 16.

$$B^6(D-a^2d^2+3b^2c^2+18abcd)^2-64B^6adb^3c^3,$$

uczyniwszy w nim $Bbc=I+Bad$, $B^3ad=\frac{1}{8}R$, $B^2=-\Delta$, otrzymamy wyrażenie w funkcyi niezmienników zasadniczych.

188. Układ dwóch sześcianów. Układ taki $(a,\ b,\ c,\ d \between x,\ y)^3$, $(a',\ b',\ c',\ d' \between x,\ y)^3$, ma za najprostszy niezmiennik $(ad')-3(bc')$,

(120, przykład 2), który jest kombinantem, i który uważać należy jako niezmiennik P. Własności układu najlepiej się rozpoznają gdy go przywiedziemy do formy $Au^3 + Bv^3 + Cw^3$, $A'u^3 + B'v^3 + C'w^3$, która wieloma sposobami otrzymać się daje, gdyż każdy z układów trzeciego stopnia zawiera cztery stałe, a układ cały zawiera ich ośm; kształt przeto dopiero napisany zawiera sześć stałych wyraźnych, wreście u, v, w, po jednej domyślnej, gdyż u zastępuje $x + \lambda y + \ldots$ Drugi kształt równoważny jest kształtowi z dziewięcioma stałémi, a więc ma jednę stałą więcej aniżeli potrzeba do zamienienia go na kształt ogólny.

Trzy zaś podwójne kształty pierwszego stopnia, połączone są związkiem tosamościowym kształtu $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Stałe α, β, γ, tak zostały oznaczone aby dla $Au^3 + Bv^3 + Cw^3$, $A'u^3 + B'v^3 + C'w^3$, było $u + v + w = 0$.

Podstawiając za w jego wartość, i pisząc sześciany, przyjdzie

$$(A, -C, -C, -C, B-C \between u, v)^3, \; (A'-C', -C', -C', B'-C' \between u, v)^3;$$

niezmiennik P układu będzie $(AB') + (BC') + (CA')$.

Dla znalezienia wyznacznika wypadkowego układu, rozwiążemy zrównania $Au^3 + Bv^3 + Cw^3 = 0$, $A'u^3 + B'v^3 + C'w^3 = 0$, co nam da $u^3 = (BC')$, $v^3 = (CA')$, $w^3 = (AB')$; i podstawimy w tosamość $u + v + w = 0$, zkąd

$$(AB')^{\frac{1}{3}} + (BC')^{\frac{1}{3}} + (CA')^{\frac{1}{3}} = 0,$$

$$\{(AB') + (BC') + (CA')\}^3 = 27(AB')(BC')(CA').$$

Oznaczmy przez U, V, dwa kształty trzeciego stopnia; wiemy (169), że istnieje niezmiennik trzeciego rzędu we względzie spółczynników obu kształtów trzeciego stopnia, wyrażający warunek możności oznaczenia λ w taki sposób aby $U + \lambda V$ było sześcianem zupełnym. Oznaczmy przez Q ten niezmiennik, będzie on równym iloczynowi $(AB')(BC')(CA')$, i będzie miał spółczynniki tego co ten iloczyn stopnia. Bo jeżeli jaki czynnik (AB') zniknie w iloczynie, to $AV - A'U$, zamieni się widocznie na sześcian zupełny $(AC')w^3$, a wyznacznik wypadkowy przybierze formę $P^3 - 27Q$.

189. Dla bezpośredniego znalezienia niezmiennika Q kształtów $(a, b, c, d \between x, y)^3$, $(a', b', c', d' \between x, y)^3$, postąpimy jak następuje. Jeżeli $U + \lambda V$ ma być doskonałym sześcianem, to spółcześnie zadosyć czynimy trzem drugim różniczkom; będzie więc

$$ax + by + \lambda(a'x + b'y) = 0,$$

$$bx + cy + \lambda(b'x + c'y) = 0,$$

$$cx + dy + \lambda(c'x + d'y) = 0.$$

Rozwiążmy linijnie te zrównania względem x, y, λx, λy, i zróbmy $x \times \lambda y = y \times \lambda x$, otrzymamy na żądany warunek

$$\begin{vmatrix} a, & b, & a' \\ b, & c, & b' \\ c, & d, & c' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a', & b', & b \\ b', & c', & c \\ c', & d', & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & b' \\ b, & c, & c' \\ c, & d, & d' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a', & b', & a \\ b', & c', & b \\ c', & d', & c \end{vmatrix};$$

albo : $\{b(bc') + c(ca') + d(ab')\} \times \{a'(cd') + b'(db') + c'(bc')\}$

$$= \{b'(bc') + c'(ca') + d'(ab')\} \times \{a(cd') + b(db') + c(bc')\},$$

$$= (b'c)^3 + (ca')^2(cd') + (db')^2(ab') - 3(ab')(bc')(cd')$$

$$- (ad')(bc')^2 - (ad')(ab')(cd').$$

Nadajmy na a, b,..., wartości A, — C, — C,... a otrzymamy (188), —(AB′)(BC′)(CA′); rozmnożywszy przez 27 wypadek ten, i dodawszy doń $\{(ad')-3(bc')\}^3$, otrzymamy wyznacznik wypadkowy w formie

$$(ad')^3 - 9(ad')^2(bc') + 27(ca')^2(cd') + 27(db')^2(ab')$$
$$- 81(ab')(bc')(cd') - 27(ad')(ab')(cd'),$$

wypadek zgodny z wypadkiem paragrafu 61, rozebrawszy go na trzecie potęgi napisane bez dwumianowych spółczynników.

190. Otrzymaliśmy niezmiennik P układu $Ax^3 + By^3 + Cz^3$, $A'x^3 + B'y^3 + C'z^3$, przywodząc zrównania do dwóch zmiennych i obliczając wartość $ad' - 3(bc')$, (188). Dla podania ogólnej zasady, innym sposobem obliczenie to wykonamy. Wiemy że podstawiając $\frac{d}{dy'} - \frac{d}{dx'}$, za x i y w jakikolwiek kształt podwójny, otrzymamy niezmienny a dogodny w działaniach symbol. Jeżeli ta zmiana uczyniona jest w funkcyi złożonej z wyrazów zależnych od x, y, z, a gdzie $z=-(x+y)$, to z stanie się $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}$; jeżeli zaś działania wykonywać będziemy na funkcyi podobnież wyrażonej, to ponieważ różniczka ze względu na x jest, $\frac{d}{dx} + \frac{d}{dz}\frac{dz}{dx}$, albo $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dz}$ (w skutek związku łączącego x, y, z), prosto we wszelkim spółzmienniku zastąpić możemy

$$x \text{ przez } \frac{d}{dy} - \frac{d}{dz}, \quad y \text{ przez } \frac{d}{dz} - \frac{d}{dx}, \quad z \text{ przez } \frac{d}{dx} - \frac{d}{dy},$$

a otrzymamy symbol w działaniach dogodny, dający się zastosować do każdego spółzmiennika, w którego skład wchodzą wyrazy zawierające x, y, z, i to bez uprzedniej zamiany spółzmiennika tego na funkcyą dwóch zmiennych. W przypadku obecnym działamy na $A'x^3 + B'y^3 + C'z^3$, oraz na

$$A\left(\frac{d}{dy} - \frac{d}{dz}\right)^3 + B\left(\frac{d}{dz} - \frac{d}{dx}\right)^3 + C\left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}\right)^3$$

a wypadek tylko o liczebny czynnik różnić się będzie od otrzymanego powyżej $(AB') + (BC') + CA')$.

W podobnyż sposób znajdziemy, że w symbolicznem znakowaniu, $\overline{12}$ zastosowane do funkcyi w wyrazach x, y, z wyrażonej, oznacza

$$\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right) + \left(\frac{d}{dy_1}\frac{d}{dz_2} - \frac{d}{dy_2}\frac{d}{dz_1}\right) + \left(\frac{d}{dz_1}\frac{d}{dx_2} - \frac{d}{dz_2}\frac{d}{dx_1}\right).$$

191. Jakobiowy układu

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3, \qquad A'x^3 + B'y^3 + C'z^3,$$

może być znalezionym za pomocą ostatniej formuły, albo bezpośrednio. Co do drugiego sposobu; związki łączące z z x i y, sprawiają że różniczki U ze względu na x i y są proporcyonalne do $Ax^2 - Cz^2$, $By^2 - Cz^2$; a

$$U_1V_2 - U_2V_1 = (AB')x^2y^2 + (BC')y^2z^2 + (CA')z^2x^2.$$

Jest to kształt dwukwadratowy, dla którego łatwo obliczyć dwa niezmienniki paragrafu 97, to jest

$$S = ae - 4bd + 3c^2, \quad T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$$

Wstawiwszy z^2, $(x+y)^2$, i pomnożywszy Jakobiowy przez

6 (dla uniknienia ułamków), otrzymamy

$$a = 6(\mathrm{CA}'),\quad b = 3(\mathrm{CA}'),\quad e = 6(\mathrm{BC}'),\quad d = 3(\mathrm{BC}'),$$

$$c = (\mathrm{BC}') + (\mathrm{CA}') + (\mathrm{AB}') = \mathrm{P},$$

z kąd $\mathrm{S} = 3\mathrm{P}^2$, $\mathrm{T} = 54\mathrm{Q} - \mathrm{P}^3$. Więc dyskryminant kształtu dwukwadratowego jest $\mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2$, a dyskryminant Jakobiowego proporcyonalny do $\mathrm{Q}(\mathrm{P}^3 - 27\mathrm{Q})$, wypadek zgodny z paragrafem 169.

192. Utworzywszy niezmiennik ilości $\mathrm{U} + \lambda\mathrm{V}$, a potem niezmiennik tegoż uważanego za funkcyą λ, wypadek będzie kombinantem układu U, V, a więc nie zmieni się przez podstawienie $l\mathrm{U} + m\mathrm{V}$, $l'\mathrm{U} + m'\mathrm{V}$, za U, V. Gdyż to podstawienie daje nam niezmiennik odpowiedni ilości $(l + \lambda l')\mathrm{U} + (m + \lambda m')\mathrm{V}$, równoważny linijnemu przekształceniu λ, w którem niezmienniki funkcyi zależnej od λ nie uległy zmianie. Dajmy, w razie dwóch kształtów trzeciego stopnia, że $\mathrm{U} + \lambda\mathrm{V}$ ma za dyskryminant $\mathrm{A} + 4\mathrm{B}\lambda + 6\mathrm{C}\lambda^2 + 4\mathrm{D}\lambda^3 + \mathrm{E}\lambda^4$, i że mamy obliczyć niezmienniki tego kształtu dwukwadratowego; możemy za U i V wziąć dwa kształty układu $\mathrm{U} + \lambda\mathrm{V}$ mające czynniki kwadratowe, i wstawić x i y za te czynniki. Przyjdzie $\mathrm{U} = ax^3 + 3bx^2y$, $\mathrm{V} = 3cxy^2 + dy^2$, dalej $\mathrm{P} = ad - 3bc$, $\mathrm{Q} = b^2c^2(ad - bc)$, a wyznacznik wypadkowy $\mathrm{P}^3 - 27\mathrm{Q} = a^2d^2(ad - 9bc$. Lecz dla tej formy kształt dwukwadratowy jest:

$$4ac^3\lambda + (a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2)\lambda^2 + 4db^3\lambda^3,$$

a mnożąc przez 6 dla uniknienia ułamków, będzie

$$\mathrm{A} = \mathrm{E} = 0,\quad \mathrm{B} = 6ac^3,\quad \mathrm{D} = 6db^3,\quad \mathrm{C} = a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2$$

$$= \mathrm{P}^2 - 12b^2c^2,$$

ztąd

$$S = 3C^2 - 4BD = 3P(P^3 - 24Q);$$

$$T = 2BCD - C^3 = -(P^6 - 36P^3Q + 216Q^2);$$

a więc dyskryminant dwukwadratu $S^3 - 27T^2$ jest proporcyonalny do $Q^3(P^3 - 27Q)$ (172). Paragraf 101 przekonał nas (przy obliczaniu stałych) że układ dwóch kształtów trzeciego stopnia nie może mieć więcej jak pięć niezmienników niezależnych, a widzimy teraz że P i Q dają się oznaczyć chociaż niewymiernie w wyrazach A, B, C, D, E.

193. Możemy przeto przy badaniu niezmienników nie będących kombinantami używać kształtu $ax^3 + 3bx^2y$, $3cxy^2 + dy^4$; potrzeba jednak okazać że stosunki znalezione w szczególnym przypadku są ogólnemi. Wszystkie niezmienniki są tego samego rzędu względem spółczynników układu, tylko kombinant P nie ulega temu prawu. Znajdziemy kilka niezmienników czwartego rzędu. Hessowym ilości $U + \lambda V$ jest

$$(\alpha, \beta, \gamma \between x, y)^2 + \lambda(\alpha', \beta', \gamma' \between x, y)^2 + \lambda^2(\alpha'', \beta'', \gamma'' \between x, y)^2$$

gdzie wyraz ogólny jako spółczynnik λ^2 jest Hessowym, pierwszy ilości U, drugi ilości V; spółczynnik zaś λ jest spółzmiennikiem pośrednim. Możemy utworzyć niezmiennik drugiego stopnia którejkolwiek ilości $4\alpha\gamma - \beta^2$, $2(\alpha\gamma' + (\alpha'\gamma - \beta\beta'$,..., lub którejkolwiek pary tych ilości, a będą one niezmiennikami układu. Jeżeli przypomnimy sobie że dyskryminant Hessowego, równa się dyskryminantowi samegoż kształtu, i w skutek tego zrobimy równemi ilości

$$(\beta + \lambda\beta' + \lambda^2\beta^2)^2 - 4(\alpha + \lambda\alpha' + \lambda^2\alpha'')(\gamma + \lambda\gamma' + \lambda^2\gamma'')$$

i $(A, B, C, D, E \between 1, \lambda)^4$, zrównamy tem samem wszystkie niezmienniki z A, B, D, E, wyjąwszy dwa $\beta\beta'' - 2(\alpha\gamma'' + \gamma\alpha'')$, i $\beta'^2 - 4\alpha'\gamma'$, zwane J, K, które łączy związek z $2J + K = 6C$.

Dla kształtu $ax^3 + 3bx^2y + \lambda(3cxy^2 + dy^3)$ Hessowy jest

$$(-b^2 + \lambda ac)x^2 + \lambda(ad - bc)xy + (\lambda bd - \lambda^2c^2)y^2;$$

znajdziemy nadto $J = -2b^2c^2$, $K = a^2d^2 - 6abcd + b^2c^2$; posiłkując się zaś wartością $6C = a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2$, otrzymamy $6C = P^2 + 6J$, $K = P^2 + 4J$, wartości łatwe w ogóle do sprawdzenia.

Utwórzmy wreszcie spółzmiennik trzeciego stopnia kształtu $U + \lambda V$ (wedle paragrafu 122); nadto spółczynniki λ dostarczą czterech spółzmienników tego gatunku co U i V, i dwóch spółzmienników pośrednich. Utworzywszy kombinant każdej pary tych kształtów trzeciego stopnia, znajdziemy sześć niezmienników szóstego rzędu w spółczynnikach, cztery z nich są, PA, PB, PD, PE, dwa zaś pozostałe utworzene z dwóch skrajnych i dwóch pośrednich spółzmienników będą

$$L = b^3c^3 = 2Q + PJ, \qquad M = -P^3 + 24Q.$$

194. Kształt czwartego stopnia. Ma on (97) dwa niezmienniki.

$$S = ae - 4bd + 3c^2, \qquad T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Widzieliśmy że kształt ten przywieść można do formy kanonicznej $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$, dla której $S = 1 + 3m^2$, $T = m - m^3$. Niezmienniki te wyrażone jako funkcye symetryczne pierwiastków, staną się

$$S = \Sigma(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2,$$

$$T = \Sigma(\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(\alpha - \gamma)(\beta - \delta),$$

albo

$$T=\{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\}$$
$$\times\{(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)-(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)\}$$
$$\times\{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\};$$

ostatnie wyrażenie pokazuje że gdy $T=0$, cztery punkta dane przez kształt będą w stosunku harmonicznym. Widzieliśmy zaś że gdy $T=0$ kształt da się wyrazić jako summa dwóch czwartych potęg (*), i że T można napisać jako niezmiennik

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ b, & c, & d \\ c, & d, & e \end{vmatrix}.$$

Oznaczmy przez M moduł podstawienia, S i T staną się po uskutecznieniu przeobrażenia M^4S, M^6T (102); przeobrażenie to nie zmienia ich stosunku $S^3:T^2$.

195. Każdy niezmiennik kształtu dwukwadratowego daje się wyrazić jako funkcya wymierna ilości S i T. Bo gdy kształt dany przez stosowne podstawienie zamienia się na formę kanoniczną $x^4+6mx^2y^2+y^4$, i to bez zmiany niezmienników, wystarczy przeto gdy podane twierdzenie dla tej dowiedziemy formy. Zauważmy że niezmiennik stający się zerem dla $m=0$, będzie zerem i dla $m=\pm 1$. Bo x^4+y^4 dla $x=x+y$ i $y=x-y$ staje się $x^4+6x^2y^2+y^4$, a dla $x=x+y\sqrt{-1}$ i $y=x-y\sqrt{-1}$ będzie $x^4-6x^2y^2+y^4$; a zatem niezmiennik

(*) P. Sylwester nazywa *katalektykantem* niezmiennik sprawiający że kształt stopnia $2n$ da się wyrazić jako summa n ilości stopnia $2n$.

podzielny przez m, ma także $m^2 - m$ za czynnik, więc i przez $m - m^3$ czyli przez T podzielnym będzie.

Niezmiennik wyrażony w funkcyi a, b, c, d, e, spółczynników kształtu ogólnego, niezmieniający się na zero dla $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, ma część która nie znikła przez podstawienie tych wartości, podzielną przez ae; w rzeczy samej część ta musi być symetryczną względem a i e, nie może zaś być kształtu $a^k + e^k$ z powodu że wszystkie wyrazy jedną ważność mieć powinny. Dajmy że część niknąca jest $a^k e^k$; odciągnijmy ją od niezmiennika danego

$$(ae - 4bd + 3c^2)^k, \qquad \text{czyli od } S^k,$$

a reszta stanie się zerem dla $b = c = d = 0$; nadto będzie ona zerem dla formy kanonicznej w której $b = d = 0$, gdy przypuścimy $m = 0$. Podług tego co powiedzieliśmy wyżej, część ta będzie podzielną przez T, czyli że niezmiennik przybiera postać $Sk' + T\varphi$; w podobnyż sposób dowiedziemy że φ jest kształtu $Sk'' + T\psi$, i tak dalej, tak iż ostatecznie otrzymamy niezmiennik w postaci funkcyi wymiernej ilości S i T.

196. Wyraźmy dyskryminant w funkcyi ilości S i T. Wiemy że dyskryminant kształtu danego niknie (92) gdy $a = b = 0$ bo w tym razie kształt, jako podzielny przez y^2, posiada czynnik kwadratowy. Zkądinąd niezmiennik równy 0 dla $a = b = 0$ ma dyskryminant za czynnik. W rzeczy samej ten niezmiennik musi się stać zerem, jeżeli kształt jest podzielny przez kwadrat $(x - \alpha y)^2$, gdyż za pomocą linijnego przeobrażenia możemy ten czynnik wziąć za y, co uczyni $a = b = 0$; lecz niezmiennik stający się zerem dla dwóch pierwiastków równych, zawierać musi, gdy go wyrazimy w funkcyi pierwiastków zawierających różnice dwóch pierwiastków jakichkolwiek jako czynnik, a więcjest podzielnym przez dyskryminanta.

Znając S i T, łatwo z nich wyprowadzić niezmiennik który przez przypuszczenie $a = b = 0$, stanie się także zerem; bo w razie tym mamy $S = 3c^3$, $T = -c^3$, a w następstwie $S^3 - 27T^2 = 0$. Niezmiennik ten w odniesieniu do spółczynników jest szóstego rzędu, a więc rzędu dyskryminanta (86), Jest to więc dyskryminant, a nie iloczyn jego przez inny czynnik; otrzymujemy przeto na wartość szukaną

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^3.$$

Różnemi sposobami sprawdzić możemy ten wypadek, a mianowicie biorąc ogólniejszą formę kanoniczną to jest biorąc

$$Ax^4 + By^4 + Cz^4,$$

i przypuszczając w niej $x + y + z = 0$. Otrzymamy bez najmniejszej trudności rachunkowej

$$a = A + C, \quad b = c = d = C, \quad e = B + C,$$

a niezmienniki S i T staną się:

$$S = BC + CA + AB, \quad T = ABC.$$

Dyskryminant jest po prostu wyznacznikiem wypadkowym dwóch pochodnych $Ax^3 - Cz^3$, $By^3 - Cz^3$; równając je zeru możemy przypuścić że x^3, y^3, z^3, są proporcyonalne do BC, CA, AB. Podstawiając te wartości w zrównanie

$$x + y + z = 0,$$

przyjdzie

$$\sqrt[3]{BC} + \sqrt[3]{CA} + \sqrt[3]{AB} = 0,$$

zkąd

$$(BC + CA + AB)^3 - 27A^2B^2C^2 = 0$$

i ostatecznie otrzymujemy dyskryminant pod postacią $S^3 - 27T^2$.

197. Możemy jeszcze ten wypadek wyprowadzić od kształtu $P^3 - 27Q$ wyznacznika wypadkowego układu złożonego z dwóch zrównań trzeciego stopnia (188). Kombinant P układu U_1, U_2, czyli zrównań

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3, \quad bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + ey^4,$$

będzie $(ae - bd) - 3(bd - c^2)$, a więc nie różni się od niezmiennika S dwukwadratowego kształtu. Q musi być doskonałym kwadratem niezmiennika T. Można dowieść to *a priori*, gdyż $Q = 0$ wyraża warunek że między wartościami na μ, $U_1 + \mu U_2$ znajduje się sześcian zupełny. A skoro tak jest, możemy (110) go przeobrazić linijnie w ten sposób aby był względem x różniczką zupełnie sześcienną, na przykład, $(x + \lambda y)^3$. A zatem samże kształt będzie formy $(x+\lambda y)^4 + cy^4$, dla której $U_2 - \lambda U_1$, być musi sześcianem zupełnym. Więc $Q = 0$ wyraża warunek aby kształt czwartego stopnia był summą dwóch czwartych potęg, w którym to przypadku $\lambda U_1 + \mu U_2$ w dwojaki sposób być może sześcianem zupełnym.

Możemy łatwo zastosować teoryą układu dwóch kształtów trzeciego stopnia, pisząc kształt czwartego stopnia pod formą ogólniejszą od kanonicznej $Ax^4 + By^4 + Cz^4$, gdy $x + y + z = 0$. W tym przypadku, $a = A + C$, $e = B + C$, $b = c = d = C$, a łatwo obliczyć $S = BC + CA + AB$, $T = ABC$. Lecz jeżeli dwie różniczki $Ax^3 - Cz^3$, $By^3 - Cz^3$, uczynimy równemi otrzymamy na x^3, y^3, z^3 wartości proporcyonalne do BC, CA, AB, a wprowadzając w $x + y + z = 0$, otrzymamy dyskryminant pod formą

$$(BC)^{\frac{1}{3}} + (CA)^{\frac{1}{3}} + (AB)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

albo
$$(BC + CA + AB)^3 - 27A^2B^2C^2 = 0,$$

albo
$$S^3 - 27T^2 = 0.$$

198. Z wyrażenia dopiero co danego na dyskryminant kształtu czwartego stopnia w wyrazach S i T, możemy wyprowadzić związek łączący spółzmienniki kształtu trzeciego stopnia (186).

Jeżeli pomnożymy razem dwa kształty, niezmienniki nowego kształtu będą niezmiennikami układu zawierającego dwa kształty pierwotne. Jeżeli jeden z nich tylko pomnożymy przez $x\xi + y\eta$, to niezmienniki nowego kształtu będą przeciwzmiennikami kształtu danego (114); a zamiana w nich η i ξ na $-x$ i y uczyni z nich spółzmienniki tegoż kształtu. Zastosujmy to postępowanie do kształtu trzeciego stopnia, a spółczynniki kształtu czwartego stopnia w ten sposób otrzymanego będą :

$$ay, \quad \frac{1}{4}(3by - ax), \quad \frac{1}{2}(cy - bx), \quad \frac{1}{4}(dy - 3cx), \quad -dx,$$

dalej niezmienniki S i T tego kształtu, będą spółzmiennikami $-\frac{3}{4}$H, $\frac{1}{16}$J, kształtu trzeciego stopnia. Lecz dyskryminant pewnego kształtu rozmnożonego przez $x\xi + y\eta$, staje się (91) dyskryminantem U rozmnożonym przez U^2. Wyrażając przeto dyskryminant kształtu danego czwartego stopnia, w wyrazach w skład S i T wchodzących, otrzymamy związek łączący H, J, i dyskryminant kształtu trzeciego stopnia.

199. Wyznacznik Hessowy kształtu dwukwadratowego jest przewoźnikiem ilości T; będzie to :

$$(ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2$$
$$+ 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4.$$

a dla formy kanonicznej zamieni się na

$$m(x^4 + y^4) + (1 - 3m^2)x^2y^2.$$

Jeżeli kształt zawiera czynnik kwadratowy z x^2, znajdziemy go w Hessowym. Gdyż druga pochodna U_{22} zawiera czynnik x^2, pochodna U_{12} zawiera x, a w skutek tego wyrażenie $U_{22}U_{12} - U_{12}^2$ zawiera czynnik x^2. A zatem jeżeli kształt dwukwadratowy jest podzielny przez dwa czynniki drugiego stopnia, odnajdą się one w Hossowym, który jako będący czwartego stopnia, tylko o czynnik liczebny od kształtu różnić się może. W rzeczy samej, weźmy za x^2 i y^2 dwa czynniki, a kształt dwukwadratowy da się napisać cx^2a^2; czyniąc zaś w Hessowym $a = b = d = e = 0$, stanie się on $- 3c^2x^2y^2$.

Jeżeli więc kształt dwukwadratowy różni się od Hessowego tylko o czynnik liczebny, następujący układ warunków jest koniecznym aby tenże kształt był podzielnym przez dwa czynniki kwadratowe; mianowicie

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e};$$

który to układ dwa odrębne zawiera warunki, jak tego rozmaitemi sposobami dowieść możemy.

W paragrafie 118 innemi sposobami do tego samego przyszliśmy wypadku. Jeden z nich zasadza się na utworzeniu spółzmiennika

$$\Sigma(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(x - \beta)^2(x - \gamma)^2(x - \delta)^2,$$

którego wszystkie wyrazy zamieniają się na zera, w razie gdy dwie pary pierwiastków są sobie równemi. Ten spółzmiennik zwany J jest :

$$(a^2d + 2b^3 - 3abc,\ a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c,\ 5abe - 15acd$$
$$+ 10b^2d,\ 10b^2e - 10ad^2,\ - 5ade + 15bec - 10bd^2,$$
$$- ae^2 - 2bde + 9c^2e - 6cd^2,\ 3cde - 2c^3 - bc^2 \between x, y)^6.$$

Spółzmiennik J jest Jakobiowym kształtu albo jego Hessowego, i zamieni się na zero, gdy te dwie funkcye o czynnik tylko różnić się od siebie będą; tak więc spółczynniki J dają nam, w innej wprawdzie formie warunki otrzymane powyżej. Widzieliśmy także że w tym razie (118), spółzmiennik

$$\Sigma(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\alpha - \delta)^2$$

staje się zerem. Lecz ten spółzmiennik jest $3TU - 2SH$, i łatwo spostrzegamy że zamienia się na zero w razie gdy kształt dany przyjmuje dwa czynniki kwadratowe. Gdyż czyniąc $a = b = d = e = 0$, kształt stanie się $6cx^2y^2$, a nadto przyjdzie $H = 3c^2y^2x^2$, $T = -c^3$, $S = 3c^2$, i przekonywamy się że w danym powyżej układzie warunków, spólna wartość ułamków jest $\frac{3T}{2S}$.

200. Widzieliśmy (172) jak kształt dwukwadratowy do kanonicznego sprowadzić, zagadnienie to zawiera w sobie rozwiązanie zrównania danego, gdyż to przywiedzione do formy $ax^4 + bcx^2y^2 + ey^4$, rozwiązuje się jak proste zrównanie stopnia drugiego. Sprowadzenie to może się wykonać za pomocą S i T. Dajmy że zmienne zostały przeobrażone przez podstawienie linijne modułu 1, w ten sposób że spółczynniki b i d znikły w zrównaniu przeobrażonem, będziemy mieli $S = ae + 3c^2$, $T = ace - c^3$, a nowej wartości c dostarczy zrównanie $4c^3 - Sc + T = 0$. Zrównania

$$U = ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4, \quad H = acx^4 + (ae - 3c^2)x^2y^2 + cey^4,$$

dostarczą wartości na nowe zmienne x i y wchodzące do formy kanonicznej. Zrównania te dają

$$cU - H = (9c^2 - ae)x^2y^2.$$

Metoda nasza zasadza się na wyciągnięciu wartości na c z danego powyżej zrównania stopnia trzeciego, i na utworzeniu, za pomocą jednej z wartości c, wyrażenia na $c\mathrm{U} - \mathrm{H}$, które musi być kwadratem zupełnym. Wyciągając pierwiastek i rozkładając go na czynniki, otrzymamy nowe wartości na x i y, a tem samem poznamy zrównanie przeobrażone, zdolne zamienić zrównanie dane na formę kanoniczną. Nadawszy zaś zrównaniu danemu postać $ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4$, możemy, (jeżeli przekładamy postępowanie takie), uczynić spółczynniki x^4 i y^4 równemi jedności pisząc x^2 i y^2 za $x^2\sqrt{a}$ i $y^2\sqrt{e}$.

PRZYKŁAD. — Rozwiązać zrównanie

$$x^4 + 8x^3y - 12x^2y^2 + 104xy^3 - 20y^4 = 0.$$

Otrzymamy $\mathrm{S} = -216$, $\mathrm{T} = -756$, a za zrównanie stopnia trzeciego

$$4c^3 + 216c - 756 = 0,$$

mające trzy za jeden z pierwiastków. Hessowy jest

$$\mathrm{H} = -6x^4 + 60x^3y + 72x^2y^2 + 24xy^3 - 636y^4,$$

zkąd

$$3\mathrm{U} - \mathrm{H} = 9(x^4 - 4x^3y - 12x^2y^2 + 32xy^3 + 64y^4)$$

$$= 9(x^2 - 2xy - 8y^2)^2.$$

Zmienne formy kanonicznej będą

$$\mathrm{X} = x + 2y, \qquad \mathrm{Y} = x - 4y,$$

$$6x = 4\mathrm{X} + 2\mathrm{Y}, \qquad 6y = \mathrm{X} - \mathrm{Y},$$

które to wartości wstawiając w kształt dany, otrzymamy na formę kanoniczną

$$3\mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2 - \mathrm{Y}^4.$$

Wartości pierwiastków dostarczą zrównania

$$(x+2y)\sqrt{3}=x-4y, \qquad (x+2y)\sqrt{-1}=x-4y.$$

201. P. Cayley podaje pierwiastki zrównania stopnia czwartego pod inną, bardziej symetryczną formą. Niech c_1, c_2, c_3 będą pierwiastkami zrównania stopnia trzeciego o którym mowa w paragrafie 200; dowiedliśmy że $\mathrm{H}-c_1\mathrm{U}$, $\mathrm{H}-c_2\mathrm{U}$, $\mathrm{H}-c_3\mathrm{U}$ są kwadratami zupełnemi, mającemi x i y za pierwiastki drugiego stopnia. Lecz wyrażenie

$$(c_2-c_3)(\sqrt{\mathrm{H}-c_1\mathrm{U}})+(c_3-c_1)(\sqrt{\mathrm{H}-c_2\mathrm{U}})+(c_1-c_2)(\sqrt{\mathrm{H}-c_3\mathrm{U}})$$

jest także kwadratem zupełnym mającym za pierwiastek czynnik dwukwadratowego kształtu. Wystarczy gdy dowiedziemy że ta ilość jest kwadratem, gdyż staje się ona widocznie zerem gdy $\mathrm{U}=0$. Weźmy formę kanoniczną czyniąc dla uproszczenia $a=e=1$. Rozwiążmy zrównanie

$$4z^3-z(1+3c^2)+c-c^3=0;$$

jego trzy pierwiastki będą

$$c_1 \quad -\frac{1}{2}(c+1), \quad -\frac{1}{2}(c-1),$$

a trzy wartości na $\mathrm{H}-c\mathrm{U}$ będą

$$(1-9c^2)x^2y^2, \quad \frac{1}{2}(3c+1)(x^2+y^2)^2, \quad \frac{1}{2}(3c-1)(x^2-y^2)^2.$$

Wiemy że aby ilość formy

$$\alpha xy+\beta(x^2+y^2)+\gamma(x^2-y^2)$$

była kwadratem zupełnym, potrzeba mieć

$$\alpha^2 = 4(\beta^2 - \gamma^2),$$

warunek mający rzeczywiście miejsce, ponieważ jest

$$\alpha^2 = 1 - 9c^2,\ \beta^2 = \frac{1}{8}(3c-1)^2(3c-1),\ \gamma^2 = \frac{1}{8}(3c+1)^2(3c-1).$$

PRZYKŁAD. — Stosując tę metodę do poprzedzającego przykładu (200), znajdziemy że inne wartości c są :

$$\frac{1}{2}(-3 \pm 9\sqrt{-3}),$$

kwadraty zaś z czynników linijnych kształtu dwukwadratowego będą

$$-2\sqrt{3}(x^2 - 2xy - 8y^2)$$

$$\pm\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})\left\{(1+\sqrt{-3})x^2+(10+2\sqrt{-3})xy-(2-10\sqrt{-3})y^2\right\}$$

$$\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})\left\{(1-\sqrt{-3})x^2+(10+2\sqrt{-3})xy-(2+10\sqrt{-3})y^2\right\}.$$

202. Zbadać należy w jakich razach zamiana na formę kanoniczną uskutecznia się za pomocą rzeczywistego, a w jakich za pomocą urojonego podstawienia. Dyskryminant tej formy jest : $ae(ae-9c^2)^2$, a że przemiana linijna nie zmienia jego znaku, przeto gdy będzie dodatnym, spółzmienniki a i e formy kanonicznej jeden znak mieć będą, gdy zaś będzie odjemnym też spółczynniki będą znaków przeciwnych. W pierwszym razie forma $ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4$ rozkłada się na dwa czynniki :

$$(x^2 + \lambda y^2)(x^2 + \mu y^2), \quad \text{albo}, \quad (x^2 - \lambda y^2)(x^2 - \mu y^2),$$

a więc pierwiastki są, albo wszystkie rzeczywistemi, albo wszystkie urojonemi. W drugim razie czynniki te będą

$$(x^2 + \lambda y^2)(x^2 - \mu y^2),$$

a kształt dwukwadratowy ma dwa pierwiastki rzeczywiste i dwa urojone. Więc gdy dyskryminant jest ujemnym, czyli $S^3 < 27T^2$ dwa pierwiastki są rzeczywiste a dwa urojone: gdy zaś jest dodatnym, wszystkie cztery są rzeczywiste, albo wszystkie cztery urojone (*). Lecz dyskryminant zrównania

$$4c^3 - Sc + T = 0$$

jest $27T^2 - S^3$, a więc (155), gdy $S^3 < 27T^2$ zrównanie na c posiada jeden pierwiastek rzeczywisty obok dwóch urojonych; przeobrażenie zaś tylko w jeden rzeczywisty sposób uskutecznić się daje gdy zrównaniu odpowiedają dwa pierwiastki rzeczywiste i dwa urojone. Gdy a i e są poprzedzone temi samemi znakami, możemy wziąć za formę kanoniczną $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$, a łatwo postrzegamy że do tego kształtu na dwoistej drodze przyjść możemy. Zastępując bowiem x i y przez $x + y$ i $x - y$, przyjdzie

$$(1 + 3m)x^4 + 6(1 - m)x^2y^2 + (1 + 3m)y^4,$$

zastępując przez $x + y\sqrt{-1}$ i $x - y\sqrt{-1}$ przyjdzie także

$$(1 + 3m)x^4 + 6(m - 1)x^2y^2 + (1 + 3m)y^4.$$

(*) Znaki niezmienników nie pozwalają odróżnić przypadku czterech pierwiastków rzeczywistych od przypadku czterech urojonych; lecz twierdzenie Sturma pokazuje że, przy dyskryminancie dodatnym, dwie ilości $b^2 - ac$, $3aT - 2(b^2 - ac)S$ są dodatnemi gdy wszystkie pierwiastki mają być rzeczywistemi; dla wszystkich zaś pierwiastków urojonych, jedna z tych ilości staje się odjemną (Cayley, *Quarterly Journal*, tom IV, str. 10).

Więc gdy forma dwukwadratowa ma cztery pierwiastki rzeczywiste lub cztery urojone, chociaż przyjmuje trzy wartości rzeczywiste na c, jednak tylko jedna z nich odpowiada wartościom urojonym na x i na y, i nie więcej nad dwa podstawienia rzeczywiste istnieje.

Inaczej jeszcze przekonać się o tem można. Bo rozłóżmy kształt dwukwadratowy na dwa czynniki rzeczywiste drugiego stopnia$(a, b, c \between x, y)^2$,$(a', b', c' \between x, y)^2$. Te dwa czynniki U i V, mogą przez spółczesne przeobrażenie, być przywiedzionemi do $AX^2 + BY^2$ i $A'X^2 + B'Y^2$, gdize X^2 i Y^2 są wartościami $\lambda U + V$ odpowiadającemi dwom wartościom λ danym przez zrównanie

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ac' + ca' - 2bb')\lambda + (a'3e' - b'^2) = 0.$$

Aby wartości λ były rzeczywistemi potrzeba aby wyznacznik wypadkowy dwóch funkcyi drugiego stopnia

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta')$$

był dodatnym. Gdy kształt dwukwadratowy ma cztery pierwiastki rzeczywiste, z których α i β są dwoma większemi, α' i β' dwoma mniejszemi, albo α i β dwoma skrajnemi, α' i β' dwoma średniemi, λ przybiera wartości rzeczywiste; w innych razach będzie urojonem. Jeżeli jedno z wyrażeń drugiego stopnia ma pierwiastki urojone, ich wyznacznik wypadkowy jest dodatnym a λ przyjmuje wartości rzeczywiste.

203. Widzieliśmy (199) że kształty dwukwadratowe posiadają inny spółzmiennik J mający za formułę symboliczną $\overline{12}^2 . \overline{13}$. Jest on trzeciego stopnia co do spółzmienników, a szóstego co do zmiennych. Dla formy kanonicznej $x^4 + 6mx^2y + y^4$ zamienia się on na $(1 - 9m^2)xy(x^4 - y^4)$: jest to Jakobiowy kształtu pierwotnego lub jego Hessowego. W ogóle czyniąc

dyskryminant $U + \lambda V = 0$, jeżeli U i V są kształtami dwukwadratowemi, λ posiadać będzie sześć wartości takich aby $U + \lambda V$ posiadało czynnik kwadratowy. Będzie więc sześć czynników takich, istniejących także w pochodnych ilości $U + \lambda V$, jako i w Jakobiowym. Gdy V jest Hessowym dla U, λ tylko trzy wartości przybrać może; dane są przez zrównania

$$4\lambda^3 - \lambda S + T = 0,$$

i są takiemi że $\lambda U - H = 0$ przybiera dwa czynniki kwadratowe. Lecz podług tego co powiedzieliśmy nieco wyżej, te sześć czynników są czynnikami Jakobiowego, a więc spółzmiennik J ma za czynniki wartości z formy kanonicznej dla x i y wypływające. Wytłumaczymy geometrycznie wypadek ten. Cztery punkta wyrażone przez kształt dany, oznaczają trzy różne układy w inwolucyi (jeden z punktów β, γ i δ możemy uważać za sprzężony punktu α), a ogniska trzech układów daje spółzmiennik J.

Ponieważ (200) kwadrat z iloczynu pary wartości dostarczonej przez formę kanoniczną dla x i y jest nam dany przez wyrażenie $C_1 U - H$, przeto J^3 jest proporcyonalne do

$$(C_1U - H)(C_2U - H)(C_3U - H)$$

albo odnosząc się do zrównania w c, przyjdzie

$$4H^3 - SHU^2 + TU^3.$$

Uskuteczniając rachunek na formie kanonicznej otrzymamy $-J^2$ na wartość ostatniego wyrażenia.

204. Ponieważ H jest spółzmiennikiem U, więc α i β

oznaczają dwie stałe, $\alpha U + 6\beta H$ (*) będzie spółzmiennikiem dla U, a niezmienniki tej ilości będą także niezmiennikami tegoż U. Wreszcie S, T i dyskryminant R dane są przez następujące zrównania:

$$S(\alpha U + 6\beta H) = S\alpha^2 + 18T\alpha\beta + 3S^2\beta^2$$

$$T(\alpha U + 6\beta H) = T\alpha^3 + S^2\alpha^2\beta + 9ST\alpha\beta^2 + (54T^2 - S^3)\beta^3,$$

$$R(\alpha U + 6\beta H) = R(\alpha^3 - 9S\alpha\beta^2 - 54T\beta^3)^2.$$

Ostatnia z tych wartości jest kwadratem zupełnym, gdyż, jak to zauważyliśmy, zamiast sześciu przypadków w których funkcya $\alpha U + 6\beta H$ zawiera czynnik kwadratowy, mamy obecnie trzy przypadki w których jest podzielną przez dwa czynniki takie.

P. Hermite dostrzegł, oznaczywszy przez G ilość $\alpha^3 - 9S\alpha\beta^2 - 54T\beta^3$, będącą funkcyą α i β, że wartości dane powyżej na niezmienniki S i T kształtu $\alpha U + 6\beta H$, są Hessowym i spółzmiennikiem trzeciego stopnia ilości G: dyskryminant ilości G tylko liczebnym czynnikiem różni się od dyskryminanta ilości U.

Funkcya $\alpha U + 6\beta H$ ma te same co U spółzmienniki. Jej Hessowy jest:

$$(\alpha\beta S + 9\beta^2 T)U + (\alpha^2 - 3\beta^2 S)H.$$

Jest to Jakobiowy dwóch wyrażeń G i $\alpha U + 6\beta H$ uważanych za funkcye α i β. J dla $\alpha U + 6\beta H$ jest to samo co J dla U, lecz pomnożone przez czynnik liczebny G. Hessowy

(*) Spółczynnik liczebny 6 ma na celu uniknięcie ułamków w następnych formułach.

ilości J jest

$$S^2U^2 - 36TUH + 12SH^2.$$

jest to wyznacznik wypadkowy dwóch ilości, $\alpha U + 6\beta H$ i Hessowego ilości G. P. Cayley nadał mu formę

$$\left(SU - \frac{18TH}{S}\right)^2 + \frac{12}{S^2}(S^3 - 27T^2)H^2,$$

która pokazuje że wyznacznik ten staje się kwadratem zupełnym gdy dyskryminant jest zerem.

205. W tem miejscu należy zrobić uwagę że wedle zasady w paragrafie 121 podanéj, twierdzenia dotyczące niezmienników i spółzmienników pewnego kształtu, dają początek twierdzeniom odnoszącym się do niezmienników kształtów wyższych stopni. I tak, dowiodłszy (204) że Hessowy Hessowego kształtu dwukwadratowego przybiera postać $\alpha TU + 6SH$, wnieść nam ztąd wolno że to samo ma miejsce dla jakiegokolwiek kształtu. Bo Hessowy wyrażenia $u_{11}u_{22} - u_{12}^2$ zawiera drugie, trzecie i czwarte pochodne u. Wiemy zaś że za pomocą zrównań

$$(n-3)u_{111} = xu_{1111} + yu_{1112}\ldots..$$

można wyrazić pochodne drugiego i trzeciego rzędu w funkcyi pochodnych rzędu czwartego, i napisać Hessowy w funkcyi tych ostatnich i zmiennych x i y które w rachunek wprowadziliśmy a które znajdować się muszą i w pochodnych czwartorzędnych. Będzie to więc spółzmiennik emananta czwartego rzędu. Lecz każdy spółzmiennik kształtu dwukwadratowego jest funkcyą U i H (183), a gdy jest czwartego stopnia ta funkcyą linijną być musi; spółzmiennik przybiera przeto postać $\alpha TU + 6SH$, gdzie S i T są niezmiennikami emananta czwartego rzędu i, jak w paragrafie 121, spółzmiennikami kształtów stopni wyższych.

206. Układ dwóch kształtów czwartego stopnia. Zamierzamy wyliczyć *kombinanty* tego rodzaju kształtów. Utwórzmy S i T dla $\lambda U + \mu V$; można je napisać.

$$S\lambda^2 + \Sigma\lambda\mu + S'\mu^2, \quad T\lambda^3 + t\lambda^{'2}\mu + t'\lambda\mu^2 + T'\mu^3,$$

a niezmienniki tych kształtów trzeciego i czwartego stopnia, będą kombinantami U, V (192) (*).

Łatwo znaleźć dyskryminant kształtu czwartego stopnia, jest on :

$$(ae')^2 + 16(bd')^2 + 12(ac')(ce') - 48(bc')(cd')$$
$$- 8(ab')(de') - 8(ad')(be'),$$

i ma związek z kombinantem A.

Kombinanty o spółczynnikach jednego rzędu, w inny sposób znaleźć można; i tak Jakobiowy dla U i V jest :

$$(ab')x^6 + 3(ac')x^5y + \{3(ad') + 6(bc')\}x^4y^2 + \{(ae') + 8(bd')\}x^3y^3$$
$$+ \{3(be') + 6(cd')\}x^2y^4 + 3(ce')xy^5 + (de')y^6,$$

(*) Wspomnieliśmy że wyznacznik dwóch kształtów czwartego stopnia, może być napisanym jako dyskryminant, czy to ilości

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ac' + ca' - 2bb')\lambda\mu + (a'c' - b'^2)\mu^2,$$

czy też Jakobiowego

$$(ab')x^2 + (ac')xy + (bc')y^2;$$

dodać należy że pierwsza ilość zamienia się linijnie na drugą biorąc $\lambda b + \mu b'$, $\lambda a + \mu a'$ za x i y.

a tego spółzmiennik kombinantowy $\overline{12}^3$,

$$\{(ad')-3(bc')\}x^2+\{(ae')-2(bd')\}xy+\{(be')-3(cd')\}y^2.$$

Dyskryminant zaś tej ilości, i niezmiennik kształtu czwartego stopnia (105), będą kombinantami tego rzędu co A, lecz nierównemi temuż A. Napiszmy nowy kombinant B,

$$(bd')^2+(ac')(ce')-(bc')(cd')-(ab')(de')-(ad')(cd')$$
$$-(bc')(be'),$$

a znajdziemy że niezmiennik czwartego stopnia Jakobiowego będzie A + 48B, dyskryminant zaś drugiego spółzmiennika A — 12B.

207. Wyrażając te kombinanty w wyrazach wyznaczników (ab'),..., użyjemy skróceń

$$(ab')=\alpha,\quad (de')=\alpha',\quad (ad')=\beta,\quad (be')=\beta',\quad (ac')=\lambda,$$
$$(ce')=\lambda',\quad (bc')=\mu,\quad (cd')=\mu',\quad (ae')=\gamma,\quad (bd')=\delta,$$

a otrzymamy

$$A=12\lambda\lambda'-48\mu\mu'+\gamma^2+16\delta^2-8\alpha\alpha'-8\beta\beta',$$
$$B=\lambda\lambda'-\mu\mu'-\beta\mu'-\beta'\mu+\delta^2-\alpha\alpha'.$$

Wyznacznik wypadkowy dla U V otrzymany przez rozwinięcie wyznaczników (48) będzie:

$$R=1296\lambda^2\lambda'^2-3456(\alpha\mu\lambda'^2+\alpha'\mu'\lambda^2)-1152(\alpha\beta\lambda'^2+\alpha'\beta'\lambda^2)$$
$$-72\gamma^2\lambda\lambda'-576\gamma\delta\lambda\lambda'+9216\alpha\alpha'\mu\mu'+96\gamma(\beta^2\lambda'+\beta'^2\lambda)$$

$$+288\gamma(\alpha\beta'\lambda'+\alpha'\beta\lambda)+1536\delta(\alpha\beta'\mu'+\alpha'\beta\mu)+3072\kappa\alpha'(\beta\mu'+\beta'\mu)$$

$$+\gamma^4-48\alpha\alpha'\gamma^2-166\beta\beta'\gamma^2-256\alpha\alpha'\gamma\delta+512\alpha'^2\alpha^2$$

$$-256(\alpha\beta'^3+\alpha'\beta^3)-4096\alpha\alpha'\delta^2.$$

Wyrazy kombinanta dawniej T przez nas zwanego, a który odtąd dlą uniknięcia pomyłek przez C oznaczać będziemy dają się napisać w wyrazach dopiero co otrzymanych kombinantów: C oznacza warunek że kształt czwartego stopnia układu $U+\lambda V$ może mieć dwa czynniki kwadratowe, znika zatem gdy $V=c'x^2y^2$. W takim razie $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \delta,$ znikają także, i będzie

$$A=12\lambda\lambda'-48\mu\mu', \quad B=\lambda\lambda'-\mu\mu',$$

$$R=1296\lambda^2\lambda'^2;$$

a ztąd widoczna że $(A-48B)^2-R$, jest kombinantem niknącym w przypuszczeniu naszem. A że jest tego rzędu (172) co T, więc jest mu równym. Używając wartości w tym paragrafie na A, B, R otrzymanych, przyjdzie

$$128C=(A-48B)^2-R,$$

$$C=-27\gamma(\lambda\mu'^2+\lambda'\mu^2)+18(\beta^2\mu'^2+\beta'^2\mu^2)+18\delta^2\lambda\lambda'+36\gamma\delta\mu\mu'$$

$$-36\alpha\alpha'\mu\mu'+18\gamma\delta\lambda\lambda'-9\gamma^2\mu\mu'-3\gamma(\alpha\beta'\lambda'+\alpha'\beta\lambda)-24\delta^2(\beta\mu'$$

$$+\beta'\mu)-6\delta(\beta^2\lambda'+\beta'^2\lambda)-6\delta(\alpha\beta'\lambda'+\alpha'\beta\lambda)+2(\alpha\beta'^3+\alpha'\beta^3)$$

$$+\kappa\alpha'\gamma^2+4\alpha^2\alpha'^2-2\alpha\alpha'\gamma\delta+4\gamma\delta^3+16\alpha\alpha'\delta^2+8\delta^4.$$

Jeżeli zaś chcemy napisać niezmiennik zwany I (187) kształtów trzeciego i czwartego stopnia, to znajdziemy

$$(A+48B)(A-16B)-R=-128I.$$

208. Inne kombinanty układu o których wspomnieć wypada są : D, wyznacznik wypadkowy kształtów trzeciego i czwartego stopnia i E, dyskryminant trzeciego stopnia. D jest niezmiennikiem zwanym S (133); do metod podanych do znalezienia go, nową dodamy. Idzie o naznaczenie na λ takiej wartości aby niweczyła spółcześnie $u_{11}+\lambda v_{11}$, $u_{12}+\lambda v_{12}$, $u_{22}+\lambda v_{22}$. Mnożąc każdą z tych trzech ilości przez każdy z $2(n-2)$ wyrazów kształtu x^{2n-5}....., stopnia $2n-5$, otrzymamy $6(n-2)$ zrównań z których możemy wyrugować $6(n-2)$ ilości x^{3n-7}....., λx^{3n-7}..., a więc otrzymać S w kształcie wyznacznika, czyli D. Przyjdzie :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D} = & -16\lambda^3\lambda'^3 + 48\lambda\lambda'^2\mu\mu' + 6\lambda\lambda'\mu^2\mu'^2 + 16\mu^3\mu'^3 + 27\lambda^2\mu'^4 \\
& + 27\lambda'^2\mu^4 + 36\alpha\lambda\mu\lambda'^2 + 36\alpha'\lambda'\mu'\lambda^3 + 12\lambda^2\lambda'^2(\beta\mu' + \beta'\mu) \\
& - 96\alpha\mu^2\lambda'^2\mu' - 96\alpha'\mu'^2\lambda^2\mu - 6\gamma\xi\mu\mu'^3 - 6\gamma\mu^3\lambda'\mu' - 36\delta\lambda^2\lambda'\mu'^2 \\
& - 36\delta\lambda\mu^2\lambda'^2 - 48\alpha\mu\mu'^4 - 48\alpha'\mu^4\mu' - 24\delta\lambda\mu\mu'^3 - 24\delta\lambda'\mu'\mu^3 \\
& + 24\alpha\beta\lambda\lambda'^3 + 24\alpha'\beta'\lambda^3\lambda' - 18\alpha\beta'\lambda'^2\mu^2 - 18\beta\alpha'\lambda^2\mu'^2 - 6\delta^2\lambda^2\lambda'^2 \\
& + 87\gamma^2\mu^2\mu'^2 - \lambda\lambda'\mu\mu'(162\alpha\alpha' + 90\beta\beta') - 36\alpha\beta\mu'^4 - 36\alpha'\beta'\mu^4 \\
& + 96\delta^2\lambda\lambda'\mu\mu' + (228\alpha\alpha' - 60\beta\beta')\mu^2\mu'^2 - 4\alpha^2\gamma\lambda'^3 - 4\alpha'^2\gamma\lambda^3 \\
& - 16\alpha\beta'^2\mu' - 16\alpha'\beta'^2\lambda^2\mu - 30\alpha\alpha'^2\lambda^2\mu' - 30\alpha^2\alpha'\lambda'^2\mu \\
& - 50\alpha\alpha'\lambda\lambda'(\beta\mu' + \beta'\mu) - 20\delta\lambda\lambda'(\lambda\beta\alpha' + \lambda'\alpha\beta') + 2\gamma\mu\mu'(\lambda\beta\alpha' + \lambda'\alpha\beta) \\
& + 48\delta^2\alpha\mu\lambda'^2 + 48\delta^2\alpha'\mu'\lambda^2 + 24\alpha\beta'^2\mu\mu'^2 + 24\alpha'\beta^{22}\mu' + 56\alpha\beta\beta'\mu'^3 \\
& + 56\alpha'\beta\beta'\mu^3 + 240\alpha\alpha'\beta\mu\mu'^2 + 240\alpha\alpha'\mu^2\mu'\beta' + 32\alpha\delta^2\mu'^3 + 32\alpha'\delta^2\mu^3 \\
& + 3\lambda^2\beta^2\alpha'^2 + 3\lambda'^2\alpha^2\beta'^2 + 24\alpha\alpha'(\beta^2\mu'^2 + \beta'^2\mu^2) - 6\alpha\alpha'\gamma^2\mu\mu' \\
& - 12\alpha^2\alpha'^2\lambda\lambda' - 30\alpha\alpha'\beta\beta'\lambda\lambda' + 60\alpha\alpha'\lambda\lambda'\delta^2 + 12\beta\beta'\lambda\lambda'\delta^2 \\
& + (\delta4\alpha^2\alpha'^2 + 120\alpha\alpha'\beta\beta'' - 12\beta^2\beta'^2)\mu\mu' - 192\alpha\alpha'\delta^2\mu\mu' \\
& + 48\gamma\delta^3\mu\mu' - 48\delta^4\lambda\lambda' + 6\gamma\alpha\alpha'^2\beta\lambda + 6\gamma\alpha^2\alpha'\beta'\lambda' + 48\alpha^2\alpha'^2(\beta\mu' + \beta'\mu) \\
& + 24\alpha\alpha'\delta(\beta^2\mu' + \beta'^2\mu) - 96\alpha\alpha'\delta^2(\beta\mu' + \beta'\mu) - \alpha^2\alpha'^2\gamma^2 - 4\alpha\alpha'^2\beta^3 \\
& - 4\alpha^2\alpha'\beta'^3 + 8\alpha^3\alpha'^3 - 4\gamma\delta\alpha^2\alpha'^2 - 48\alpha^2\alpha'^2\delta^2 - 16\delta^2\alpha\alpha'\beta\beta' \\
& + 64\alpha\alpha'\delta^4.
\end{aligned}
$$

209. W rozpatrywaniu związków zachodzących między temi kombinantami, przypuśćmy (192) iż pierwszy z danych kształtów niema dwóch pierwszych wyrazów, a drugi dwóch ostatnich, czyli że mamy

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2,$$

$$V = 6c'x^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Uczyńmy $ae = l$, $bd = m$, $cc' = n$, $cad^2 + c'eb^2 = p^2$, a otrzymamy

$$A = (l - 4m)^2 + 12n(l - 4m),$$

$$B = m^2 - p^2 + n(l - m),$$

$$R = l^3(l - 16m) + 96l^2p^2 - 72nl^2(l + 8m) + 1296l^2n^2,$$

wreszcie I, D, E

$$I = -l^2m^2 + 4lm^3 + p^2(l^2 - 2lm - 8m^2) + 6p^4$$
$$- n(l^3 + 6lm^2 - 16m^3) - 9nlp^2 + 12n^2(l^2 + lm - 2m^2),$$

$$D = -n^2\{9lm^2(l - 4m) - 6p^2(2l^2 - 7lm - 4m^2) - 27p^4$$
$$+ 16n(l - m)^2\}^3.$$

$$E = -l^2m^4 + 2lm^2p^2(l + 2m) - (l + 2m)^2p^4 - 2nlm^2(l + 2m)^2$$
$$+ 4p^6 + 2np^2(l + 2m)^3 - 18np^2lm^2 - n^2(l + 2m)^4$$
$$+ 36n^2lm^2(l + 2m) - 6np^4(l + 2m) - 6n^2p^2(l + 2m)^2$$
$$+ 27n^2p^4 + 4n^3(l + 2m)^3 - 108n^3lm^2.$$

Te wartości pozwolą nam sprawdzić zrównanie

$$16B^3 - AB^2 - 2IB + E = D.$$

Teraz, jeżeli za zasadnicze niezmienniki układu, weźmiemy spółczynniki kształtów trzeciego i czwartego stopnia (206), to kombinanty A, D, E, I przedstawią się jako funkcye wyraźne tychże ilości; teraźniejsze zaś zrównanie daje B w tychże wyrazach, i pokazuje że wszystkie przez nas użyte kombinanty mogą być wyrażone w tychże samych niezmiennikach.

Jakobiowemu, nie dostaje pod tą formą wyrazów ostatnich; nie ulega jednak trudności obliczenie jego dyskryminanta, co służy do sprawdzenia twierdzenia paragrafu 170.

210. Przypuszczenie, że kształt czwartego stopnia jest summą dwóch czwartych potęg, tak że dla każdej niknie niezmiennik T dogodnem nieraz bywa. Weźmy kształty $au^4 + bv^4$, $a'w^4 + b'z^4$, zkąd $u = \alpha_1 x + \beta_1 y$. Użyjemy znaku (12) za $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, i skróceń

$$(12)(34) = \mathrm{L}, \quad (13)(42) = \mathrm{M}, \quad (14)(23) = \mathrm{N};$$

gdzie mamy $\mathrm{L} + \mathrm{M} + \mathrm{N} = 0$. Otrzymamy niezmiennik S podstawiając $\frac{d}{dy}$, $-\frac{d}{dx}$ za x i y w czwartą potęgę i na niej działając. Działając z u na u otrzymujemy wypadek 0; lecz działając na V znajdziemy że S dla $\lambda\mathrm{U} + \mu\mathrm{V}$ jest:

$$\lambda^2 ab(12)^4 + \lambda\mu\{aa'(13)^4 + ab'(14)^4 + ba'(23)^4 + bb'(24)^4\} \\ + \mu^2 a'b'(34)^4.$$

Kombinant zwany A będzie

$$\{aa'(13)^4 + ab'(14)^4 + ba'(23)^4 + bb'(24)^4\}^2 - 4aba'b'\mathrm{L}^4;$$

$$\mathrm{B} = -aba'b'\mathrm{L}^2\mathrm{MN}.$$

Niezmiennik T wyniknie z kształtu i jego Hessowego. U ma za Hessowy $ab(12)^2u^2v^2$, a dla $\lambda U + \mu V$,

$$T = \lambda^2\mu \{aba'(12)^2(13)^2(23)^2 + abb'(12)^2(14)^2(24)^2\}$$

$$+ \lambda\mu^2 \{a'b'a(13)^2(14)^2(34)^2 + a'b'b(23)^2(24)^2(34)^2\}.$$

Ztąd otrzymamy bezpośrednio E, D, I:

$$E = -a^2b^2a'^2b'^2L^4 \{aa'N^2(13)^4 + ab'M^2(14)^4 + ba'M^2(23)^4$$

$$+ bb'N^2(24)^4\}^2,$$

$$D = -a^2b^2a'^2b'^2L^6 \{a^2a'^2N^2(13)^8 + a^2b'^2M^2(14)^8 + b^2a'^2M^2(23)^8$$

$$+ b^2b'^2N^2(24)^8 - 2MNa^2a'b'(13)^4(14)^4 - 2MNb^2a'b'(23)^4(24)^4$$

$$- 2MNa'^2ab(13)^4(23)^4 - 2MNb'^2ab(14)^4(24)^4$$

$$+ 2M^2N^2aba'b'(M^2 + N^2 - 2L^2)\},$$

$$I = -aba'b'L^2 \{a^2a'^2N^2(13)^8 + a^2b'^2M^2(14)^8 + b^2a'^2M^2(23)^8$$

$$+ b^2b'^2N^2(24)^8 + (M^2 + N^2 - 2L^2)[a^2a'b'(13)^4(14)^4$$

$$+ b^2a'b'(23)^4(24)^4 + a'^2ab(13)^4(23)^4 + b'^2ab(14)^4(24)^4]$$

$$+ 2M^2N^2(M^2 + N^2 - 4L^2)aba'b'\},$$

za pomocą których sprawdzimy wartości otrzymane powyżej.

211. Kształt piątego stopnia. Przy badaniu kształtu tego używać będziemy formy kanonicznej

$$ax^5 + by^5 + cz^5,$$

do której, jak to dowiedliśmy (162) da się zawsze przywieść kształt ogólny, ($x+y+z$ uważamy jako równy zeru). Różniczkując kolejno względem x i y mamy

$$u_1 = ax^4 - cz^4,$$

$$u_2 = by^4 - cz^4.$$

Wyznacznik wypadkowy u_1 i u_2 jest dyskryminantem kształtu piątego stopnia, a ich kombinanty niezmiennikami tegoż. To ostatnie wyprowadza się bezpośrednio z wyrażeń paragrafu 210, zastępując w nich a i c przez a i b, b i $-c$ przez a' i b'. Mamy $(24)=0$, zkąd $M=0$, $(13)=1$, $(12)=-1$, $(34)=-1$, $(14)=-1$, $(23)=1$. Spostrzegamy że B znika, a obliczając stałe, widzimy że każde dwa sześciany dają się przez linijne przekształcenia przywieść do dwóch różniczek pojedyńczego kształtu czwartego stopnia, z których dwie nie dadzą się zmienić na różniczki kształtu piątego stopnia, chyba że $B=0$. Kombinant A będzie

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 2abc(a+b+c).$$

Ten najprostszy niezmiennik kształtu piątego stopnia, zwany J, inną drogą otrzymać możemy. Kształt taki, ma (jak widzieliśmy) dwa spółzmienniki o spółczynnikach drugiego rzędu: Hessowy $\overline{12}^{\,2}$, będący dla formy kanonicznej

$$bcy^3z^3 + caz^3x^3 + abx^3y^3,$$

i spółzmiennik czwartego stopnia $\overline{12}^{\,4}$ (S *emananta* czwartego stopnia) będący dla tejże formy

$$bcyz + cazx + abxy.$$

Dla formy ogólnej $(a, b, c, d, e, f \between x, y)^5$, te spółzmienniki są:

$$(ac - b^2)x^6 + 3(ad - bc)x^5y + 3(ae + bd - 2c^2)x^4y^2$$

$$+ (af + 7be - 8cd)x^3y^3 + 3(bf + ce - 2d^2)x^2y^4$$

$$+ 3(cf - de)xy^5 + (df - e^2)y^6;$$

$$(ae - 4bd + 3c^2)x^2 + (af - 3be + 2cd)xy + (bf - 4ce + 3d^2)y^2.$$

Otrzymujemy niezmienniki różniące się od najprostszego tylko o czynnik liczebny, formując albo dyskryminant z ostatniego spółzmiennika, albo niezmiennik drugiego stopnia $\overline{12}^6$ z Hessowego. W obu razach mamy

$$J = a^2f^2 - 10abef + 4acdf + 16ace^2 - 12ad^2e + 16b^2df$$

$$+ 9b^2e^2 - 12bc^2f - 76bcde + 48bd^3 + 48c^3e - 32c^2d^2.$$

212. Dyskryminant kształtu piątego stopnia otrzymuje się, albo tak jak przy czwartym stopniu, albo przez bezpośrednie rugowanie między różniczkami $ax^4 - cz^4$, $by^4 - cz^4$. Jeżeli te znikają razem, to bierzemy abc za spólną wartość ax^4, by^4, cz^4; ztąd

$$(bc)^{\frac{1}{4}} + (ca)^{\frac{1}{4}} + (ab)^{\frac{1}{4}} = 0$$

$$\{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 2abc(a + b + c)\}^2 - 128a^2b^2c^2(bc + ca$$

$$+ ab) = 0.$$

Wartość ta równoważna jest $J^2 - 128K$, gdzie K jest niezmiennikiem o spółczynnikach osmego rzędu. Dla formy kanonicznej mamy

$$K = a^2b^2c^2(bc + ca + ab).$$

Ten nowy niezmiennik inaczej określić można : podaliśmy (121 i 122) wyrażenie na spółzmiennik trzeciego stopnia, którego pierwiastki x, y, z, wchodzą w skład formy kanonicznej. Spółzmiennik ten, będący T emananta czwartego stopnia, ma na wyrażenie ogólne

$$(ace - ad^2 - eb^2 + 2bcd - c^3)x^2 + (acf - ade - b^2f + bce$$
$$+ bd^2 - c^2d)x^2y + (adf - ae^2 - bcf + bde + c^2e - cd^2)xy^2$$
$$+ (bdf - be^2 - c^2f + 2cde - d^2)y^3.$$

Wartość ta zmienia się dla formy kanonicznej na $abcxyz$. Podstawiając, jak zwykle, symbole różniczkowe, i działając kwadratem kanonizanta na Hessowy, otrzymujemy niezmiennik K, jak to sprawdzić łatwo na formie kanonicznej. Można jeszcze toż K otrzymać, tworząc niezmiennik I (187) ze spółzmiennika $bcyz + cazx + abxy$, i z kanonizanta. Znajdziemy :

$$\mathrm{K} = a^3cdf^3 - a^3f^2ce^2 - a^2f^3b^2d - 3a^3f^2d^2e - 3a^2f^3bc^2 + 5a^3fde^3$$
$$+ 5af^3b^3c - 2a^3e^5 - 2b^5f^3 + a^2f^2b^2e^2 + 11a^2f^2bcde - 5a^2fbce^3$$
$$- 5af^2b^3de + 12a^2f^2bd^3 + 12a^2f^2c^3e - 30a^2fbd^2e^2 - 30af^2b^2c^2e$$
$$+ 15a^2bde^4 + 15b^4cef^2 - 21a^2f^2c^2d^2 - 34a^2fc^2de^2 - 34af^2b^2cd^3$$
$$+ 22a^2c^2e^4 + 22b^4d^2f^2 + 78a^2fcd^3e + 78af^2bc^3d - 48a^2cd^2e^3$$
$$- 48b^3c^2df^2 - 27a^2fd^5 - 27af^2c^5 + 18a^2d^4e^2 + 18b^2c^4f^2$$
$$+ 133afb^2e^2cd - 54ab^2ce^4 - 54b^4de^2f - 18afb^2d^3e - 18afbc^3e^2$$
$$+ 3ab^2d^2e^3 + 3b^3c^2e^2f - 220afbec^2d^2 + 106abc^2de^3 + 106b^3cd^2ef$$
$$+ 93afbcd^4 + 93afc^4de - 30abe^2cd^3 - 30b^2ec^3df - 9abed^5$$
$$- 9bec^5f - 38ac^4e^3 - 38b^3d^4f - 42afc^3d^2 + 8ac^3d^2e^2 + 8b^2c^2d^3f$$
$$+ 6ac^2d^4e + 6bc^4d^2f + 27b^4e^4 + 38b^3c^2d^3 + 38b^2e^3c^3 - 81b^3e^3cd$$
$$+ 25b^2e^3c^2d - 57b^2ecd^4 - 57be^2c^4d + 18b^3d^6 + 18c^6e^2$$
$$+ 74bec^3d^3 - 24bc^2d^5 - 24c^5d^2e + 8c^4d^4.$$

Dyskryminant wyprowadza się albo z K, albo z formuł na wyznacznik wypadkowy dwóch kształtów czwartego stopnia. Otrzymamy :

$$\begin{aligned}
R = {} & a^4f^4 - 20a^3f^3be - 120a^3f^3cd + 160(a^3f^2ce^2 + a^2f^3b^2d) \\
& + 360(a^3f^2d^2e + a^2f^3bc^2) - 640(a^3fde^3 + af^3b^3e) + 256(a^3e^5 \\
& + b^5f^3) - 10a^2f^2b^2e^2 - 1640a^2f^2becd + 320(a^2fbe^3c + afdb^3ed) \\
& - 1440a^2f^2(bd^3 + c^3e) + 4080(a^2fbe^2d^2 + af^2b^2ec^2) \\
& + 1920(a^2be^4d + b^4ecf^2) + 2640a^2f^2c^2d^2 + 4480(a^2fc^2de^2 \\
& + af^2b^2cd^2) - 2560(a^2c^2e^4 + b^4d^2f^2) - 10080(a^2fcd^3e + af^2bc^3d) \\
& + 5760(a^2cd^2e^3 + b^3c^2df^2) + 3456(a^2d^5f + af^2c^5) \\
& - 2160(a^2d^4e^2 + b^2c^4f^2) - 180afb^3c^3 - 14920afb^2e^2cd \\
& + 7200(ab^2e^4c + b^4e^2df) + 960af(b^2ed^3 + be^2c^5) \\
& - 600(ab^2e^3d^2 + b^3e^2c^2f) + 28480afbec^2d^2 - 16000(abe^3c^2d \\
& + b^3ecd^2f) - 11520af(bcd^4 + c^4de) + 7200(abe^2cd^3 + b^2ec^3df) \\
& + 6400(ac^4e^3 + b^3d^4f) + 5120afc^3d^3 - 3200(ae^2c^3d^2 + b^2c^2d^3f) \\
& - 3375b^2e^4 + 9000b^3e^3c^2 - 4000(b^3e^2d^3 + b^2e^3c^3) + 2000b^2e^2c^2d^2.
\end{aligned}$$

Dyskryminant może przeto być wyrażony jak następuje. Dajmy :

$$\begin{aligned}
A = {} & a^2f^2 - 34afbe + 65afcd - 32ace^2 - 32b^2df - 12aed^2 \\
& - 12bc^2f + 225b^2e^2 - 820becd + 480(bd^3 + c^3e) - 320c^2d^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = {} & 3a^2f^2 - 22afbe - 12afcd + 64(ace^2 + b^2df) + 36(aed^2 - bc^2f \\
& - 45b^2e^2 + 20becd;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C = {} & a^2fe + 2afbd - 9abe^2 - 9abc^2 + 32acde - 18ad^3 + 6b^2ef \\
& - 15bec^2 + 10bcd^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = {} & 3a^2df - 2a^2e^2 - 9afbc + abed + 18ac^2e - 12acd^2 + 6b^3f \\
& - 15b^2ec + 10b^2d^2;
\end{aligned}$$

Dajmy nadto że C′ i D′ są funkcyami dopełniającemi C i D (które stają się zerami gdy trzy pierwiastki będą równemi), a dyskryminant będzie równy trzy razy wziętej ilości :

$$AB + 64CC' - 64DD'.$$

213. Kształty piątego stopnia mają nadto niezmiennik dwónastego stopnia który jest dyskryminantem kanonizanta. Forma kanoniczna kanonizanta jest : $abcxyz$, dyskryminanta zaś $-a^4b^4c^4$. Oznaczmy go przez L. Pan Fua de Bruno obliczył dla przypadku ogólnego :

$$\begin{aligned}
L = {} & a^4c^2d^2f^4 - 2(a^4c^2de^2f^3) + (a^4c^2e^4f^2) - 6(a^4cd^3ef^3) \\
& + 16(a^4cd^2e^3f^2) - 14(a^4cde^5f) + 4(a^4ce^7) + 4(a^4d^5f^3) \\
& - 11(a^4d^4e^2f^2) + 10(a^4d^3e^4f) - 3(a^4d^2e^6) + 4a^3b^2cde^2f^3 \\
& - 2(a^3b^2ce^4f^2) + 6(a^3b^2d^3ef^3) - 16(a^3b^2d^2e^3f^2) + 14(a^3b^2de^5f) \\
& - 4(a^3b^2e^7) + 50a^3bc^2d^2ef^3 - 82(a^3bc^2de^3f^2) + 32(a^3bc^2e^5f) \\
& - 36(a^3bcd^4f^3) + 30)a^3bcd^3e^2f^2) + 30(a^3bc^2de^4f) - 24(a^3bcdc^6) \\
& + 28(a^3bd^5ef^2) - 50(a^3bd^4e^3f) + 22(a^3bd^3e^5) + 16(a^3c^4e^5) \\
& + 22a^3c^3d^3f^3 + 50(a^3c^3d^2e^2f^2) - 16(a^3c^3de^4f) - 16(a^3c^3e^6) \\
& - 54(a^3c^2d^4ef^2) - 46(a^3c^2d^3e^3f) + 60(a^3c^2d^2e^5) + 6(a^3cd^6f^2) \\
& + 70(a^3cd^5e^2f) - 56a^3cd^4e^4 - 18(a^3d^7ef) + 14(a^3d^6e^3) \\
& + a^2b^4e^4f^2 + 132a^2b^3cde^3f^2 - 50(a^2b^3ce^5f) + 14(a^2b^3d^3e^2f^2) \\
& - 60(a^2b^3d^2e^4f) + 30(a^2b^3de^5) - 168a^2b^2c^2d^2e^2f^2 \\
& + 48(a^2b^2cd^2e^4f) + 4(a^2b^2c^2e^6) + 48(a^2b^2cd^4ef^2) + 2(a^2b^2cd^3e^3f) \\
& - 6(a^2b^2cd^2e^5) - 62(a^2b^2d^6f^2) + 90(a^2b^2d^5e^2f) - 39(a^2b^2d^4e^4) \\
& - 112(a^2bc^4e^4f) - 82a^2bc^3d^3ef^2 + 170a^2bc^3d^2e^3f + 104a^2bc^3de^5 \\
& + 108(a^2bc^2cd^5f^2) + 42(a^2bc^2d^4e^2f) - 298(a^2bc^2d^3e^4)
\end{aligned}$$

$$- 242(a^2bcd^6ef) + 294(a^2bcd^5e^3) + 62(a^2bd^8f) - 78(a^2bd^7e^2)$$
$$+ 164(a^2c^5de^3f) + 24(a^2c^5e^5) - 63a^2c^4d^4f^2 - 394(a^2c^4d^3e^2f)$$
$$- 194(a^2c^4d^2e^4) + 324(a^2c^3d^5ef) + 440(a^2c^3d^4e^3) - 78(a^2c^2d^7f)$$
$$- 428(a^2c^2d^6e^2) + 180(a^2cd^8e) - 27(a^2d^{10}) + 18ab^5c^5f$$
$$- 38ab^4cde^4f + 36(ab^4ce^6) + 204(ab^4d^3e^3f) - 102(ab^4d^2e^5)$$
$$- 308(ab^3c^2de^5) - 42ab^3c^2d^2e^3f - 674(ab^3cd^4e^2f) + 590(ab^3cd^3e^4)$$
$$+ 128(ab^3d^6ef) - 138(ab^3d^3e^5) + 4(ab^2c^4e^5) + 652(ab^2c^3d^2e^4)$$
$$+ 714ab^2c^3d^3e^2f + 498(ab^2c^2d^5ef) - 1246(ab^2c^5d^4e^3)$$
$$- 224(ab^2cd^7f) + 516(ab^2cd^6e^2) - 48(ab^2d^8e) - 136(abc^5de^4)$$
$$- 1078abc^4d^4ef - 206(abc^4d^3e^3) + 342(abc^3d^6f)$$
$$+ 804(abc^3d^5e^2) - 506(abc^2d^7e) + 90(abcd^9) - 16(ac^7e^4)$$
$$+ 220(ac^6d^2e^3) - 106ac^5d^5f - 392(ac^5d^4e^2) + 222(ac^4d^6e)$$
$$- 40(ac^3d^8) - 27b^6e^6 + 234b^5cde^5 - 32(b^5d^3e^4)$$
$$- 713b^4c^2d^2e^4 + 246(b^4cd^4e^3) - 4(b^4d^6e^2) + 866b^3c^3d^3e^3$$
$$- 550(b^3c^2d^5e^2) + 56(b^3cd^7e) + 4(b^3d^9) - 139b^2c^4d^4e^2$$
$$+ 354(b^2c^3d^6e) - 83(b^2c^2d^8) - 330bc^5d^5e + 72(bc^4d^7)$$
$$- 16c^6d^6.$$

Ten niezmiennik staje się zerem gdy $b = c = d = 0$.

Wynika ztąd że formuła $ax^5 + 5ex^4y + fy^5$, do której pan Jerrard sprowadził formę ogólną przez nielinijne przekształcenia, nie może mieć miejsca jak tylko dla $L = 0$.

214. Weźmy J, K, L, za niezmienniki zasadnicze kształtu, i zobaczmy czy inne niezmienniki w ich wyrazach napisać się dadzą. Zauważyć naprzód należy że zamiana x na y, lub x na z, stanowi przeobrażenie linijne mające -1 za moduł. Ztąd

jeżeli mamy taki niezmiennik, że po przeobrażeniu znajduje się pomnożonym przez potęgę parzystą modułu przeobrażenia, to dla formy kanonicznej nie ulegnie zmianie przez przemianę między sobą a, b, c; a więc jest ich funkcyą symetryczną. Jeżeli zaś niezmiennik rozmnożony jest przez potęgę nieparzystą modułu dla formy kanonicznej, zmieni on znak, gdy przemienimy między sobą dwie z trzech ilości a, b, c; czyli będzie iloczynem różnic $(a-b)(b-c)(c-a)$ przez funkcyą symetryczną z a, b, c. Zauważmy nadto że w przeobrażeniu niezmiennik znajduje się pomnożonym przez potęgę modułu mającą wykładnik równy jego ważności, czyli $\frac{5}{2}n$ (123) dla niezmiennika rzędu n, kształtu piątego stopnia : kształt ten nie może mieć niezmiennika rzędu nieparzystego; jeżeli rzęd n pomnożymy jest przez 4, ważność będzie liczbą parzystą, a przemiana między x i y w niezmienniku nie zmieni jego znaku; przeciwnie zaś, jeżeli rzęd niezmiennika nie jest podzielnym przez 4, niezmiennik będzie skośnym, czyli zmieni znak w skutek przemiany między x i y. Zbadajmy najprzód niezmienniki pierwszego gatunku, które jak wiemy są, dla formy kanonicznej funkcyami symetrycznemi a, b, c. Mamy :

$$\mathrm{J} = (bc + ca + ab)^2 - 4abc(a + b + c),$$

$$\mathrm{K} = a^2b^2c^2(bc + ca + ab),$$

$$\mathrm{L} = a^4b^4c^4.$$

Zrównania te dają :

$$\mathrm{H} = \frac{1}{4}(\mathrm{K}^2 - \mathrm{JL}) = a^5b^5c^5(a + b + c)\ (^*);$$

(*) Czytelnik pilnie baczyć powinien, że chociaż w przypadku kanonicznej formy, $a^5b^5c^5(a+b+c)$ jest podzielnem przez $a^4b^4c^4$, nie mamy prawa wnosić że H jest w ogóle podzielnem przez L, wyjąwszy przypadku dla któregoby dowiedziono że $abc(a+b+c)$ jest także niezmiennikiem.

wynika ztąd, że jeżeli kształt piątego stopnia sprowadzimy do formy kanonicznej przez podstawienie mające jedność za moduł, nowe wartości dla a, b, c będą pierwiastkami zrównania trzeciego stopnia

$$\alpha^3 - \frac{H}{L^{\frac{5}{4}}}\alpha^2 + \frac{K}{L^{\frac{1}{2}}}\alpha - L^{\frac{1}{4}} = 0.$$

Ponieważ rzęd funkcyi symetrycznej z a, b, c, jest ze względu na spółczynniki równym jej ważności, podzielnej przez cztery, więc funkcya sama będzie wymierną względem J, K, L.

Jeżeli więc mamy niezmiennik ze spółczynnikami rzędu podzielnego przez cztery, to dowiedliśmy, że dla formy kanonicznej, możemy napisać funkcyą wymierną J, K, L, mającą tą samą wartość co pierwsza, a więc równą jej tosamościowo. Byłoby niedorzecznem przypuszczać że funkcya całkowita spółczynników może być równą ułamkowi nie dającemu się uprościć; wynika ztąd że każdy niezmiennik, prócz skośnych jest funkcyą całkowitą J, K, L.

Uczyńmy $a = b = c = 0$, J, K, L znikną. Więc jeżeli trzy pierwiastki kształtu piątego stopnia są równemi, trzy jego nie zmienniki nikną (*). Jeżeli a, b, e, f są równe 0, będzie $J = -32c^2d^2$, $L = -16c^6d^6$, a więc $J^3 - 2048L = 0$. Ztąd kształty piątego stopnia mające dwie pary pierwiastków równych, mają dyskryminant równy 0, oraz $J^3 = 2048L$.

215. Najprostszy skośny niezmiennik otrzymuje się tworząc

(*) W ogóle wszystkie niezmienniki kształtu danego nikną, jeżeli jest więcej jak $\frac{1}{2}n$ pierwiastków równych między sobą; łatwo bowiem dostrzedz, że w razie zniknięcia więcej niż połowy spółczynników, licząc takowe od jednego końca, nie pozostaną one w liczbie dostatecznej do utworzenia wyrazu ważności żądanej (123).

wyznacznik wypadkowy kształtu $ax^5 + by^5 + cz^5$, i jego kanonizanta $abcxyz$. Podstawiając trzy pierwiastki ostatniego w kształt dany, i mnożąc te dwie ilości przez siebie, otrzymamy niezmiennik ośmnastego rzędu :

$$a^5b^5c^5(b-c)(c-a)(a-b).$$

Przed tem odkryciem P. Hermita (*), możliwość istnienia niezmienników skośnych nie była dowiedzioną. *Philosophical Transactions* (1858, str. 455 zawierają ten niezmiennik o dziewięciuset wyrazach obliczony przez P. Salmona. Pierwsze wyrazy są : $a^7d^5f^6 - a^5c^6f^7$; a jest to istotny skośny niezmiennik, bo wyrazy dopełniające się są znaków przeciwnych, a wyrazy symetryczne znoszą się. Dowodzenie użyte w paragrafie 214 pokazuje że każdy niezmiennik skośny kształtu piątego stopnia, jest iloczynem jego niezmiennika J przez funkcyą wymierną J, K, L.

216. Kwadrat I jako będący trzydziestego szóstego stopnia da się wymiernie wyrazić w funkcyi J, K, L (214). Łatwo go napisać.

Formując dyskryminant ilości (214),

$$\alpha^3 - \frac{K}{L^{\frac{3}{4}}}\alpha^2 + \frac{K}{L^{\frac{1}{2}}}\alpha - L^{\frac{1}{4}},$$

(*) (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, tom IX, str. 172). P. Hermite działa na nowej formie kanonicznej, której x i y są dwoma czynnikami spółzmiennika czwartego stopnia, a jest on taki że : $ae - 4bd + 3c^2$ i $bf - 4ce + 3d^2$ nikną razem, a spółzmiennik czwartego stopnia, staje się xy. Metoda ta przedstawia to ułatwienie że symbol z niej wynikający jest $\dfrac{d^2}{dxdy}$, i że wiele spółzmienników jakim daje początek są nadzwyczaj prostemi. Mimo to P. Salmon użył metody P. Sylwestra do obliczenia niezmiennika skośnego kształtu piątego stopnia.

otrzymujemy iloczyn z kwadratów różnic a, b, c, w funkcyi J, K, L, czyli

$$J^3L = H^2K^2 + 18HKL^2 - 27L^4 - 4K^3L^2 - 4H^3;$$

a wstawiwszy $\frac{1}{4}(K^2 - JL)$ za H, i podzieliwszy przez L przyjdzie

$$16I = JK^4 + 8LK^3 - 2J^2LK^2 - 72JKL^2 - 432L^3 + J^2L^2.$$

217. Nie mam zamiaru wchodzenia w szczegóły dotyczące niezmienników kształtów piątego stopnia. Najciekawszemi po wzmiankowanych są linijne spółzmienniki. Działając dwa razy spółzmiennikiem czwartego stopnia $bcyz + cazx + abxy$ na kształt dany, otrzymamy wypadek pierwszego stopnia, który dla formy kanonicznej będzie

$$abc(bcx + cay + abz).$$

Rugownik między tym niezmiennikiem a kanonizantem daje niezmiennik I p. Hermite; rugowanie zaś między tymże niezmiennikiem a kształtem danym da $I(J^2 - 3K)$. Tak więc jeżeli I zniknie, zrównanie piątego stopnia rozwiąże się natychmiast, bo spółzmiennik linijny wydaje jeden pierwiastek; toż samo ma miejsce dla $J^2 - 3K = 0$.

Działając spółzmiennikiem linijnym na spółzmiennik czwartego stopnia, otrzymamy inny linijny spółzmiennik siódmego rzędu

$$\begin{aligned} abc\{ & x(a^2c^2 - a^2b^2 + ab^2c - abc^2) \\ & + y(a^2b^2 - b^2c^2 + abc^2 - a^2bc) \\ & + z(b^2c^2 - c^2a^2 + a^2bc - ab^2c)\}. \end{aligned}$$

Dowiedliśmy że wszystkie spółzmienniki wyrazić można w funkcyi dwóch z pomiędzy nich i niezmienników. P. Hermitę wykonywa przeobrażenie biorąc za x i y dwa linijne spółzmienniki, a spółzmienniki przeobrażonego kształtu będą niezmiennikami. Ich wartość jednak nie jest prostą, a otrzymanie wypadku niepodobnem w razie gdyby dwa spółzmienniki były równemi sobie, co ma miejsce gdy ich wyznacznik wypadkowy $JK + 9L = 0$. Formując wyznacznik Jakobiowy dwóch spółzmienników, z których jeden czwartego stopnia a drugi jakiegokolwiek, otrzymamy spółzmiennik tego samego co ostatni co do zmiennych stopnia, a wyższego o dwa co do spółzmienników. W ten to sposób wywodzi się ze spółzmiennika kanonicznego, inny spółzmiennik trzeciego stopnia

$$abc\left\{bc(y^2z - yz^2) + ca(z^2x - zx^2) + ab(x^2y - xy^2)\right\},$$

łatwy także do otrzymania, działając spółzmiennikiem kanonicznym na Hessowy. Kształty piątego stopnia mają spółzmienniki linijne wszelkich stopni nieparzystych wyższych nad trzeci; wynika ztąd, prawem wzajemności, że kształty stopni nieparzystych, wyższych nad trzeci, posiadają spółzmienniki linijne za spółzmienniki piątego stopnia.

218. Wiemy że znak dyskryminanta daje bezpośrednio poznać, czy kształt z którego pochodzi, przyjmuje parzystą czy też nieparzystą liczbę pierwiastków urojonych. Rozłóżmy kształt dany na rzeczywiste czynniki drugiego stopnia, a jego dyskryminant (91) równy jest iloczynowi dyskryminantów wszystkich czynników drugiego stopnia, rozmnożonemu przez kwadrat z iloczynu wyznaczników wypadkowych wszelkich par czynników. Te wyznaczniki są rzeczywistemi, a dodatnemi ich kwadraty, więc znak dyskryminanta zależy jedynie od dyskryminantów czynników drugiego stopnia. Lecz kwadrat różnicy dwóch pierwiastków zrównania drugiego stopnia, jest dodatnym

lub odjemnym, w miarę jak pierwiastki są rzeczywistemi lub urojonemi, a iloczyn kwadratów z różnic pierwiastków zrównania jakiegokolwiek, jest dodatnym gdy zrównanie przyjmuje parzystą liczbę par pierwiastków urojonych, odjemnym zaś gdy liczba tych par jest nieparzystą. Piszemy dyskryminant dając znak więcej iloczynowi dwóch skrajnych wyrazów; będzie on miał ten sam znak co iloczyn kwadratów z różnic pierwiastków, kiedy kształt będzie stopnia $4m$ lub $4m+1$, znak zaś przeciwny gdy stopień ten równy $4m+2$ lub $4m+3$. A zatem dla kształtu piątego stopnia, jeżeli dyskryminant jest dodatny, istnieją cztery pierwiastki urojone lub żaden; gdy zaś dwa takie pierwiastki istnieją dyskryminant jest odjemnym.

Pozostają nam dwa przypadki do zbadania: gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistemi, lub gdy jeden tylko jest takim.

219. Dla rozróżnienia tych przypadków rozmaicie postępować można. Następujący sposób jest najprostszym (*); opiera on się na twierdzeniu Sturma. Weźmy jak zwykle J za niezmiennik; mamy

$$\mathrm{H} = b^2 - ac,$$

$$\mathrm{S} = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$\mathrm{T} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

$$\mathrm{M} = a^2e^2 - adf + 3abcf - 3abde + 4acd^2 - 4ac^2e$$
$$- 2b^3f + 5b^2ce + 2b^2d^2 - 8bc^2d + 3c^4.$$

Pierwsze wyrazy Sturma są proporcyonalne do ilości

$$a,\ a,\ \mathrm{H},\ 5\mathrm{HS} + 9a\mathrm{T},\ -\mathrm{HJ} + 12\mathrm{SM} + 4\mathrm{S}^3 - 216\mathrm{T}^2,$$

(*) Wartości te obliczył P. Roberts (*Quarterly Journal*, tom IV, str. 173). Tablica funkcyj Sturma obliczona przez P. Cayley (*Philosophical Transactions*, tom CXLVII, str. 735), zawiera w odniesieniu do czwartej i piątej funkcyi, błędy w znakach na które czytelnik baczyć powinien.

z których ostatnia jest dyskryminantem, a warunki podane przez twierdzenie Sturma w celu odróżnienia przypadku dającego cztery pierwiastki urojone, od przypadku w którym mamy same pierwiastki rzeczywiste, zależą na tem że w drugim razie, tak dyskryminant jak i ilości

$$\mathrm{H},\ \mathrm{SHS} + 9a\mathrm{T},\ -\mathrm{HJ} + \ldots.$$

są dodatnemi.

220. Zastosujmy te warunki do formy kanonicznej

$$(c-a)^5 + 5cx^4y + 10cx^3y^2 + 10cx^2y^2 + 5cxy^4 + (c-b)y^5,$$

w której równość spółczynników, z wyjątkiem dwóch, czyni łatwym rachunek bezpośredni. Znajdujemy spółczynniki $e-a$, $c-a$, $ac-a^2c^2$; a że ostatni jest widocznie odjemnym, nie potrzebujemy postępować dalej i widzimy że zrównanie dane posiadać musi pierwiastki urojone. Widzimy nadto że kiedy niezmiennik L zrównania piątego stopnia jest dodatnym, zrównanie nie może mieć samych tylko rzeczywistych pierwiastków.

Jeżeli zaś L jest odjemnem, czynniki kanonizanta będą urojonemi, a forma kanoniczna zamieni się na

$$a(-2x)^5 + \left\{c - d\sqrt{(-1)}\right\}\left\{x + y\sqrt{(-1)}\right\}^5$$
$$+ \left\{c + d\sqrt{(-1)}\right\}\left\{x - y\sqrt{(-1)}\right\}^5,$$

czyli na

$$dy^5 + 5cy^4x - 10dy^3x^2 - 10cy^2x^3 + 5dyx^4 + (c-16a)x^5.$$

Dajmy, dla skrócenia $c^2 + d^2 = r$, a stałemi funkcyi Sturma będą

$$d,\ d,\ r^2,\ r^4,\ r^2(-4a^2d^2 + 20acr^2 + 5r^4),$$

a ponieważ dyskryminant jest dodatnym, pierwiastki będą rzeczywistemi jeżeli d i $-4a^2d^2+20acr^2+5r^4$ są dodatne (*).

221. W praktyce, poznaki istnienia pierwiastków urojonych, wynikające z twierdzenia Sturma są dogodniejszemi od innych (**), bo funkcye które obliczyć wypada mają spółczynniki czyli *criteria* dane w wyrazach niezmienników; dokonali tego PP. Hermite i Sylwester. Zaczniemy od przedstawienia nadzwyczaj dowcipnej metody tego ostatniego.

Wiemy że mając dane niezmienniki J, K, L, możemy oznaczyć a, b, c formy kanonicznej przez zrównanie trzeciego stopnia, i że niezmiennikom danym odpowiada pewien kształt piątego stopnia, który jednak nie zawsze jest rzeczywistym. Widzieliśmy bowiem (216) że, aby to miało miejsce J, K, L powinny być takie aby G było dodatnem, zkąd

$$G = JK^4 + 8LK^3 - 2J^2LK^2 - 72JL^2K - 432L^3 + J^3L^2.$$

Dowiedliśmy że G jest kwadratem zupełnym funkcyi rzeczywistej spółczynników kształtu ogólnego $a^7d^5f^6 + \ldots$, będącej rugownikiem a zarazem kanonizantem kształtu danego, przeto

(*) Dając ten wypadek, podejrzywam jego prawdziwość, gdyż zdaje mi się być w sprzeczności z wypadkami innych metod.

(*Przyp. P. Salmon.*)

(**) Criteria te są liczne, gdyż każda symetryczna funkcya kwadratów z różnic pierwiastków $\Sigma(\alpha-6)^2$ musi być dodatną gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistemi. Napiszmy funkcyą będącą niezmiennikiem, a jeżeli ta jest odjemną, zrównanie przyjmuje pierwiastki urojone. Ale dla pierwiastków takich funkcye mogą być dodatnemi; idzie więc o znalezienie jednego *criterium* lub ich układu, któryby się sprawdzał w razie gdy nie wszystkie pierwiastki są rzeczywistemi, koniecznie dodatnej. Możemy zastąpić K przez jego wartość wyciągniętą z $J^2 - 128K = D$. Przyjdzie

$$G = JD^4 - 4(J^3 + 2^8L)D^3 + (6J^3 - 29.2^{10}L)J^2D^2$$
$$- (4J^6 - 61.2^8J^3L - 9.2^{22}L^2)JD$$
$$+ (J^3\ 2^{11}L)^2(J^3 - 27.2^{10}L).$$

Weźmy J, K, L za spółrzędne punktu w przestrzeni (*); G będzie powierzchnią. Punkta położone z jednej strony jako czyniące G dodatnem, odpowiadają kształtom rzeczywistym piątego stopnia, punkta zaś przeciwne, czyniąc G odjemnem, odpowiadają kształtom piątego stopnia o spółczynnikach urojonych (**).

222 Teraz zamierzamy dowieść, że jeżeli spółczynniki zrównania zmieniają się w sposób ciągły, to na przejściu z pierwiastków rzeczywistych do urojonych znaleźć musimy pierwiastki równe. Dajmy że $\varphi(x)$ przez bardzo małą zmianę spółczynników staje się $\varphi(x) + \varepsilon\psi(\alpha)$; ε jest nieskończenie małym przyrostem, α przyrostkiem pierwszego zrównania, $\alpha + h$ drugiego. Będzie przeto $\varphi(\alpha + h) + \varepsilon\psi(\alpha) = 0$, a jeżeli $\varphi(\alpha) = 0$, to $h\varphi(\alpha) + \varepsilon\psi(\alpha) = 0$, da wartość rzeczywistą na h. Następny pierwiastek $\alpha + h$ musi być rzeczywistym. Lecz jeżeli $\varphi'(\alpha)$ znika wraz z $\varphi(\alpha)$, to najmniejszy wyraz w rozwinięciu $\varphi(\alpha + h)$ jest h^2, a h może być urojonem. Czyli że gdy kształt ma pierwiastki równe, kształt pochodny może mieć pierwiastki urojone.

(*) P. Sylwester bierze L za x, J za y, D za z.

(**) Punkta dla których $G = 0$. odpowiadają kształtom rzeczywistym; w razie tym, zrównanie będzie rozbieżnem. Dowiedliśmy bowiem że dla $G = 0$, dwa ze spółczynników kształtu kanonicznego są równemi między sobą, a ztąd zrównanie przybiera kształt $ax^5 + ay^5 + b(x + y)^5 = 0$.

Wynika ztąd że przedstawiając, jak w paragrafie 221, układy wartości na J, D, L, przez punkta w przestrzeni, odpowiadać one będą kształtom piątego stopnia mającym tęż samą liczbę pierwiastków rzeczywistych, byleśmy od jednego do drugiego przejść mogli bez napotkania płaszczyzny D i powierzchni G. Jeżeli punkta leżą z obu stron D, to na przejściu z jednych do drugich może leżeć punkt $D = 0$, w którym zmiana charakteru pierwiastków zajść może. Dwa punkta czyniące G dodatnem, przedzielone przez płachty powierzchni G, nie pozwalają abyśmy w kształcie samym przeszli z jednego do drugiego bez naruszenia ciągłości, gdyż jeżeli w punkcie spotkania powierzchni mamy G ujemne, to odpowiedni kształt przypuszcza pierwiastki urojone. Dla dwóch zaś punktów nie przedzielonych wzmiankowanym sposobem, możliwe jest zawsze (w sposób ciągły) przejście z jednego do drugiego, bez spotkania zmiany w odpowiednim kształcie.

Ostatnia metoda P. Sylwestra polega na przeprowadzeniu dyskusyi nad G, pokazującej że punkta dla których G jest dodatnem (*), dadzą się podzielić na trzy części poprzedzielane przez D i G. Widocznie przeto kształty piątego stopnia rozpadają się na trzy gatunki, (to jest mają cztery, dwa lub zero pierwiastków urojonych), a punkta trzech części odpowiadają tym trzem gatunkom. Nie mamy czasu wdawania się w rozbiór powierzchni G za pomocą której P. Sylwester prawd tych dowodzi, lecz następne rozumowanie przekona czytelnika że są one niezbitemi.

223. Jedna z trzech części posiadająca punkta na stronie odjemnej D, odpowiada kształtowi mającemu dwa pierwiastki urojone. Weźmy naprzód D dodatne : widzieliśmy (222) że zmiana charakteru pierwiastków ma miejsce tylko dla $D = 0$,

---

(*) P. Sylwester nazywa je punktami ułatwiającemi.

co zwraca naszą uwagę na przecięcie G przez D. Czyniąc $D = 0$ w G wyprowadzamy na jaw czynnik kwadratowy (221), i pokaże się że G dotyka D wzdłuż krzywej $7^3 - 2L''$, przecina zaś toż D wzdłuż $J^3 - 27.2^{10}L$. Jeżeli powierzchnia przecina tylko płaszczyznę, linia przecięcia nie będzie linią przedziału między punktami leżącemi z jednej strony powierzchni. Przetnijmy na przykład stół, a punkta leżące z jednej strony przecięcia, wolny między sobą zachowują związek. Toż samo dziać się będzie z punktami leżącemi z drugiej strony przecięcia. Lecz jeżeli płaszczyzna dotyka powierzchni, jeżeli na przykład walec postawimy na stole, to tylko punkta zewnątrz walca znajdujące się, wolny związek między sobą mają, linia zetknięcia stanowi linią graniczną, przecinającą związek między punktami zewnętrznemi względem walca, a położonemi z jednej lub z drugiej strony linii granicznej.

P. Sylwester twierdzi, że nakreśliwszy w ćwiartce dla której J i L są odjemnemi, na płaszczyznie xy krzywą $J^3 - 2^{11}L$, wszystkie punkta ułatwiające leżące po za przestrzenią oznaczoną przez tęż krzywą i oś $L = 0$, tworzą część oddzielną od innych, a odpowiadającą pięciu pierwiastkom rzeczywistym.

224. Dla bliższego rozpatrzenia się w tej powierzchni, tworzę dyskryminant G uważany za funkcyą K; będzie

$$K = - L^7(J + 27L)^3.$$

Jeżeli J i L są odjemne dyskryminant takimże będzie, a dla zrównania w K znajdziemy dwa tylko pierwiastki rzeczywiste. Każdemu przeto układowi wartości na J i L, odpowiadają dwie wartości na K i dwie na D, a powierzchnia stanowi jedną z dwóch płacht. Mówię że między płachtami znajduje się przestrzeń dla której G dodatnem. Bo jeżeli $G = JD^4 + \ldots$ to rozłożywszy na czynniki przyjdzie

$$G = J(D - \alpha)(D - \beta)\left\{(D - \gamma)^2 + \delta^2\right\};$$

a J odjemne, pociąga dla D w obchodzącej nas przestrzeni, wartość pośrednią między α i β, jako jedynie zdolną uczynić G dodatnem. Ostatni wyraz zrównania będący

$$(J^3 - 2^{11}L)^3(J^2 - 27.2^{10}L),$$

przybierze znak przeciwny L, w razie zbliżania się J^3 do $2^{11}L$, a więc stanie się dodatnym. A ponieważ spółczynnik D^4 jest odjemnym, z jednej przeto strony linii $J^3 = 2^{11}L$ wartości będą dodatne, a odjemne z drugiej, czyli że jedna z płacht powierzchni leży nad, a druga pod D. Lecz górna płachta dotyka D wzdłuż $J^3 = 2^{11}L$, gdyż znak przedostatniego wyrazu zrównania dla D przekonywa że gdy ostatni wyraz równy zeru, dwa pierwiastki stają się 0 lub odjemne. Więc wyłożona teorya pokazuje że krzywa $J^3 = 2^{11}L$ tworzy linią graniczną przecinającą połączenie punktów ułatwiających na górnej stronie D. $L = 0$ toż samo czyni w drugim kierunku, gdyż L dodatne dyskryminant dodatnym czyni, i sprawia że D ma cztery pierwiastki rzeczywiste lub cztery urojone. Że zaś pierwsza stała funkcya Sturma jest proporcyonalna do $L(J^3 + 12L)$, więc dla $-J$ a $+L$ bardzo małego, ta stała będzie odjemną. Tuż za L, zrównanie dla D przyjmuje cztery pierwiastki urojone, a więc powierzchnia przestaje istnieć. Ułatwiające przeto punkta leżące wewnątrz powierzchni czyli między jej płachtami, przecina płaszczyzna L, na której łączą się dwie płachty, i odosobnia je od punktów po za nią leżących, jak to powyżej widzieliśmy.

Wypadałoby w podobne wejść szczegóły dla dowiedzenia że wszystkie inne ułatwiające punkta mają wolny między sobą związek. Linia styczności $2^{11}L - J^3$ nie stanowi linii przedziału w ćwiartce w której J i L są dodatnemi, gdyż widoczna że punkta ułatwiające leżą po za płachtami, a nie między powierzchnią a płaszczyzną do niej styczną.

Wypadek ostateczny poszukiwań naszych jest więc, że aby wszystkie pierwiastki były rzeczywistemi, ilość $2^{11}L - J^3$ musi być dodatną (*); L zaś, a więc i J odjemnem. Jeżeli nie istnieje żaden z tych warunków, pierwiastki stają się urojonemi, D, w obu razach jest dodatnem.

225. Walec równoległy do osi z a stojącyna krzywej $2^{11}L-J^3$, nie spotka G po za D, gdyż dwie wartości na z są, jedna równa 0, druga odjemna. Inna powierzchnia stojąca na tej samej krzywej i nie dotykająca G może zarówno służyć za wał dzielący dwa rodzaje punktów ułatwiających. Gdyż wszystkie punkta leżące między walcem a powierzchnią jako nieułatwiające nie należą do kwestyi. P. Sylwester postrzegł że $2^{11}L-J^3$ możemy zastąpić przez $2^{11}L-J^3+\mu JD$, byle to ostatnie zrównanie nie wyobrażało powierzchni spotykającej G po za D. Aby μ mogło zadosyć czynić temuwarunkowi, musi być zawartem między 1 a -2.

Używa on skutecznie *criteryów* wyrażonych jako symetryczne funkcye pierwiastków. Naprzód

$$\Sigma(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\delta-\varepsilon)^4$$

jest niezmiennikiem (116), a że jest tego samego rzędu i ważności co J, więc tylko czynnikiem liczebnym różnić sie od niego może, i to czynnikiem odjemnym, ponieważ funkcya jest dodatną z natury a J odjemnem w razie gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistemi. Powtóre, funkcya symetryczna

$$\Sigma(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\varepsilon-\alpha)^4(\varepsilon-\beta)^4$$
$$(\varepsilon-\gamma)^4(\delta-\alpha)^4(\delta-\beta)^4(\delta-\gamma)^4,$$

(*) P. Sylwester twierdzi że tym warunkiem jest odjemność $(2^{11}L-J^3)$. Widoczna to pomyłka. Wyraźnym jego dowodzeń wynikiem jest dodatność tej ilości. Gdyż płachta którą się zajmuje, leży z tej strony krzywej $2^{11}L-J^3$ w pobliżu osi $L=0$. A gdy $L=0$, i J odjemne, $(2^{11}L-J^3)$ będzie dodatnem.

(której związek z pierwszą jasno się pokazuje gdy tamtę napiszemy pod formą

$$D^2\Sigma(\alpha-\beta)^{-2}(\beta-\gamma)^{-2}(\gamma-\alpha)^{-2}(\delta-\varepsilon)^{-4},$$

w której D jest dyskryminantem), jest niezmiennikiem dwunastego rzędu. Toż samo więc ma miejsce względem

$$\alpha J^3+\beta JD+\gamma L.$$

Biorąc w pomoc kształt piątego stopnia (*),

$$x(x^2-a^2)(x^2-b^2),$$

obliczymy łatwo funkcyą symetryczną i wykażemy jej tożsamość z niezmiennikami, będzie ona proporcyonalną do $2^{11}L-J^3+\frac{4}{5}JD$. A że czynnik liczebny ilości JD zawarty jest w granicach wyżej oznaczonych, więc może służyć za *criterium;* P. Sylwester znalazł, że dwie wzmiankowane funkcye symetryczne, nietylko są razem dodatnemi dla pierwiastków rzeczywistych (co widoczna), lecz nadto że jeżeli te funkcye i D są dodatne, pierwiastki rzeczywistemi być muszą. Można to sprawdzić bezpośrednio w razie gdy jedno zrównanie da cztery pierwiastki urojone.

226. P. Salmon usiłował sprawdzić wypadki, badając nie-

(*) Formuła w tym razie bezpiecznie użytą być może, często jednak wystrzegać się jej należy. Bo gdy czynnik linijny kształtu piątego stopnia, jest zarazem czynnikiem Jakobiowego dla pozostałego kształtu czwartego stopnia, to niezmienniki związek ścisły łączyć musi. Lecz obliczenie go jest nadzwyczaj trudne, daje bowiem na J, D, L ilości bardzo wysokich stopni.

zmienniki iloczynu linijnego czynnika i kształtu czwartego stopnia

$$(\alpha x + \beta y)(x^4 + 6mx^2y^2 + y^4)\ ;$$

niezmienniki te są koniecznie spółzmiennikami czwartego stopnia (198). Spółczynniki piątego stopnia są

$$5\alpha,\ \delta,\ 3m\alpha,\ 3m\beta,\ \alpha,\ 5\beta;$$

$$\mathrm{J} = 48(8\mathrm{SH} - 3\mathrm{TU}),$$

$$\mathrm{J} = 48\left\{(5m + 27m^3)(\alpha^4 + \beta^4) + (8 - 18m^2 - 54m^4)\alpha^2\beta^2\right\}.$$

Wszystkie zaś pierwiastki będą rzeczywistemi dla $-m$, wraz z $9m^2 > 1$. Lecz m odjemnemu odpowiadają wszystkie wyrazy odjemne prócz jednego. Granicą odjemnych na m wartości jest $\frac{1}{5}$; wartość ta, a tem bardziej wszelka wyższa odjemna wartość czyni J odjemnem. Przypuszczenie $\beta = 0$ to samo pokaże, biorąc pod uwagę sam spółczynnik najwyższej potęgi α w $8\mathrm{SH} - 3\mathrm{TU}$, który jest $8(b^2 - ac)\mathrm{S} - 3\mathrm{T}a$. Nazwijmy A, B, C, trzy stałe funkcyi Sturma, to jest

$$\mathrm{A} = b^2 - ac,\quad \mathrm{B} = 2\mathrm{SA} + 3\mathrm{T}a,\quad \mathrm{C} = \mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2,$$

będzie $\mathrm{J} = 6\mathrm{AS} - \mathrm{B}$, wartość odjemna w razie pierwiastków rzeczywistych.

W obrachunku tym wypada

$$\mathrm{L} = 54(8\mathrm{SH} - 3\mathrm{TU})^3 - 6400(\mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2)(4\mathrm{H}^3 - \mathrm{SHU} + \mathrm{TU}^3)$$

$$+ 150(\mathrm{S}^3 - 27\mathrm{T}^2)\mathrm{U}^2(8\mathrm{SH} + 15\mathrm{TU})$$

$$- 4050\mathrm{U}^2\mathrm{S}^3(2\mathrm{SH} - 3\mathrm{TU}),$$

zkąd $2^{11}L - J^3$ różnić się tylko będzie czynnikiem stałym mnożącym ilość

$$-128(S^3 - 27T^2)(4H^3 - 3HU + TU^3)$$

$$+ 3(S^3 - 27T^2)U^2(8SH + 15TU)$$

$$- 81U^2S^3(2SH - 3TU).$$

Czyniąc $\theta = a^2d - 3abc + 2b^3$, spółczynnik najwyższej potęgi a będzie

$$128C\theta^2 + 81a^2S^3 + 45a^2CB - 54a^2CSA.$$

Dla pierwiastków rzeczywistych, wszystkie wyrazy są dodatne, prócz jednego, lecz gdy jeden jest odjemnym zbyteczna formułę przyoblekać w formę prawa. Dosyć powiedzieć że gdy formuła jest dodatną a J odjemnem pierwiastki muszą być rzeczywistemi. Nie ma więc wątpliwości że roztrząsania powyższe są niejako dowodem na prawo P. Sylwestra, a ściślejszego podać niepodobna (*).

(*) Sprawdzenie jest jednak łatwem w szczególnym przypadku

$$x(x^4 + 6mx^2y^2 + y^4).$$

Mamy bowiem

$$J = 48m(5 + 27m^2),$$

$$L = 12m(5 - 9m^2)^4;$$

wreszcie $2^{11}L - J^3$ proporcyonalne do

$$m(1 - 9m^2)(50 + 45m^2 + 648m^4 + 729m^6).$$

Więc jeżeli mamy mniej m i $9m^2 > 1$, będzie J i L, odjemne a $2^{11}L - J^3$ dodatne. Ostatnia ilość jest dodatną i dla pierwiastków urojo-

227. Nie może wchodzić w zakres niniejszego dzieła opowiadanie poszukiwań którym dało początek zagadnienie rozwiązania kształtów piątego stopnia (*). Następujące poszukiwanie zamieszczamy tu jednak z powodu związku jaki ma z teoryą niezmienników. Wiadomo że Lagrange czyni zależnem rozwiązanie zrównań piątego od rozwiązania zrównań szustego stopnia, łatwo bowiem dowieść że funkcye o pięciu literach, mogą przybierać sześć wartości przez przeobrażenie liter. I tak niech 12345 będzie funkcyą cykliczną pierwiastków piątego stopnia, tąką na przykład jak iloczyn

$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\delta)^2(\delta-\varepsilon)^2(\varepsilon-\alpha)^2;$$

widoczna że 23451 jak 15432 oznaczają to samo co 12345, że zatem możemy napisać naszą funkcyą dwunastoma sposobami. Te dwanaście funkcyj dzielą się na pary, a między niemi znajdziemy funkcye tylko sześć wartości przybrać zdolne. Na przykład : 12345 + 13524, 12435 + 14523, 13245 + 12534, 13425 + 14532, 14235 + 12543, 14325 + 13542. Takie uszykowanie kształtu szóstego stopnia mającego wartości swych

nych, lecz w tym razie J zostanie dodatnem. Każda więc z metod użytych wykaże istnienie tych pierwiastków.

Dyskusyą o charakterach rzeczywistości pierwiastków zrównań, zasadzającą się na niezmiennikach, rozpoczął P. Hermite roku 1854 w *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Streścił ją tegoż roku w znakomitej pracy przedstawionej Akademii francuzkiej. Wyraziwszy ją w naszym sposobie znakowania wypadnie że gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywiste, a dyskryminant dodatny, dodatnemi też będą

$$K,\quad 2^{11}L - J^3 + D,\qquad K(JL+K^2)-18L^2.$$

Criteria P. Sylwestra prostotą swoją mają pierwszeństwo przed tym wypadkiem.

(*) Do najznakomitszych nowych odkryć, tego przedmiotu dotyczących należy zastosowanie do niego przez PP. Hermite i Kronecker teoryi funkcyj eliptycznych.

pierwiastków, jest niesłychanie trudnem. Jednakoważ P. Hermite uważa że jeżeli funkcya 12345 jest iloczynem z różnic kwadratów pierwiastków $(\alpha - \beta)^2 \ldots$ to wszystkie spółczynniki kształtu będą niezmiennikami, a przeto ich obliczenie podobnem (*). Jest stosownem utworzyć to zrównanie w chwili przejścia do kształtów szóstego stopnia, aby jasno wykazać cechy oparte na niezmiennikach kształtu szóstego stopnia, których rozwiązanie opiera się na rozwiązaniu zrównań piątego stopnia, i nieraz dogodném być może posiadanie pewnej liczby pierwszych wynikłych z dyskusyi nad drugiemi (**). Biorę prosty przykład

$$x^5 + 2mx^3 y^2 + xy^4,$$

gdyż jeżeli to zrównanie da dwie pary pierwiastków równych, a znakami przeciwnych, funkcyą różnic łatwo napisać przyjdzie. Znajdujemy że kształt szóstego stopnia jest iloczynem

$$t^2 + 2^6(m + m^3)t + 2^{10}(m^6 - 2m^4 + 5m^2),$$

przez kwadrat z ilości,

$$t^2 + 2^4(m^3 + 3m)t + 2^6(m^6 + 5m^4 + 19m^2 - 25).$$

(*) W metodzie PP. Harley i Cockle, 12345 jest

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha,$$

a dany kształt szóstego stopnia ma za pierwiastki 12345 — 13524..... Wypadek ten obliczył P. Cayley (*Philosophical Transactions*, 1861, str. 263). Staje się on bardzo prostym, gdy w kształcie nie dostaje dwóch wyrazów, lecz spółczynniki nie są niezmiennikami.

(**) Kształt otrzymany przez PP. Kronecker i Brioschi jest

$$(x - a)^5(x - 5a) + 10b(x - a)^3 - c(x - a) + 5b^2 - ac = 0.$$

Przy pomocy formuł danych wyżej, obliczają się niezmienniki tego zrównania, a rugują ilości a, b, c.

Lecz pomnóżmy pierwszy kształt piątego stopnia przez 5, a jego niezmienniki są

$$J = 2^4 m(5 + 3m^2),$$

$$D = 2^8 5^3 (1 - m^2)^2,$$

$$L = 4m(5 - m^2)^4.$$

Dla uniknienia ułamków, dajemy

$$J = 2A, \quad D = 250B, \quad J^3 - 2^{11}L = 50C.$$

Utwórzmy kształt szóstego stopnia i wyraźmy jego spółczynniki w wyrazach niezmienników, a otrzymamy

$$t^6 + 4At^5 + (6A^2 - 25B)t^4 + (4A^3 + 2C - 30AB)t$$

$$+ t^2(A^4 + 4AC - 17A^2B + \frac{625}{4}B^2)$$

$$+ t(2A^2C - 4A^3B - 7BC + 110AB^2) + C^2 - 4ABC + 20A^2B^2.$$

Ilość ta jest kwadratem doskonałym i musi nim być z powodu $D = 0$ (*).

228. P. Hermite szczegółowo rozbierał niezmienniki wyrażone w zrównaniach pierwiastków. Przekształca on zrównanie tak, aby pierwszy i ostatni wyraz zniknął, to jest tak aby jeden pierwiastek był 0, a drugi ∞. Rachunek taki zasadza się na utworzeniu funkcyi symetrycznej z pierwiastków zrównania stopnia trzeciego. Dyskusya zagadnienia z parag. 227 doprowa-

(*) Chociaż kształt na który działaliśmy nie jest ogólny, wypadek jednak ogólnym się zdaje, gdyż sądzić należy że jedynie przyjęte spółczynniki w jednaki sposób powstają z wyrazów niezmienników.

działa P. Salmon'a do tego samego przekształcenia, lecz otrzymał on je w taki sposób że nie upraszczało zagadnienia. Potrzeba przekształcić zagadnienie trzeciego stopnia na takie zrównanie szóstego stopnia, aby jego pierwiastki były sześcioma wartościami ilości

$$\alpha^2(\beta-\gamma)^2(\alpha-\gamma)^2+\beta^2\gamma^2(\alpha-\beta)^2,$$

a wypadek zrównać z kombinacyami kształtów jakie przybierają niezmienniki zrównania piątego stopnia, gdy a i f staną się zerami. Z wypadków P. Hermite podamy tylko wartości jego własnego niezmiennika L. Weźmy

$$F=(\alpha-\beta)(\alpha-\varepsilon)(\delta-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\varepsilon),$$

$$G=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\varepsilon-\delta)+(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma),$$

$$H=(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\varepsilon-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\alpha-\varepsilon)(\delta-\beta);$$

ich iloczyn jest symetrycznym względem wszystkich pierwiastków prócz α, a jeśli go pomnożymy przez iloczyny podobne, otrzymane dla czterech innych pierwiastków, będziemy mieli L.

229. Kształty szóstego stopnia. Mało dotąd nad niemi robiono postrzeżeń. Mają one cztery niezmienniki niezależne oznaczone przez A, B, C, D, rzędów 2, 4, 6, 10; i piąty niezmiennik skośny E, piętnastego rzędu, u którego kwadrat jest całkowitą i wymierną funkcyą czterech innych.

Pierwsza A, jest niezmiennikiem $\overline{12}^{6}$ otrzymanym wedle artykułu 96; forma jego ogólna

$$ag-6bf+15ce-10d^2.$$

Podaliśmy (262 i 163) kanoniczną formę kształtu szóstego stopnia, lecz użyjemy tu (210) formy równie dogodnej

$$au^6 + bv^6 + cw^6 + dz^6;$$

prowadzi nas do niej teorya kształtów piątego stopnia, które nie dają się prościej wyrazić jak tylko jako summa czterech piątych potęg. Dla formy tej mamy (210)

$$\begin{aligned} A &= ab(12)^6 + ac(13)^6 + ad(14)^6 + bc(23)^6 + bd(24)^6 \\ &\quad + cd(34)^6 \\ &= \Sigma ab(12)^6. \end{aligned}$$

Hessowy $\overline{12}^6$ kształtu szóstego stopnia jest osmego stopnia, a ogólne jego spółczynniki są

$$ac - b^2,\quad 4(ad - be),\quad 6ae + 4bd - 10c^2,$$

$$4af + 16be - 20cd,\quad ag + 14bf + 5ce - 20d^2, \ldots,$$

Hessowy zaś formy nowo podanej będzie

$$\Sigma abu^4v^4(12)^2.$$

Kształt szóstego stopnia posiada inny spółzmiennik, będący J emananta czwartego stopnia, o spółczynnikach drugiego rzędu, ze spółczynnikami

$$ae - 4bd + 3c^2,\quad 2af - 6be + 4cd,\quad ag - 9ce + 8d^2, \ldots;$$

a który dla formy kanonicznej jest

$$\Sigma abu^2v^2(12)^4.$$

Wspomniemy jeszcze współzmiennik trzeciego rzędu, (jest to T emananta czwartego stopnia) mający za spółczynniki

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

$$2acf - 2ade - 2b^2f + 2bce + 2bd^2 - 2c^2d,$$

$$acg + 2adf - 3ae^2 - b^2g - 2bcf - 4bde + 2c^2e - 3cd^2,$$

$$2adg - 2aef - 2bcg + 4bdf - 2be^2 - 2c^2f + 6cde - 4a^3, \ldots,$$

a który jest dla formy kanonicznej

$$\Sigma abc(12)^2(23)^2(31)^2u^2v^2w^2.$$

230. Niezmiennik B (P. Sylwester zowie go *catalectican*), który wyraża warunek aby kształt szóstego stopnia mógł być sprowadzonym do summy trzech szóstych potęg; jest on wyznacznikiem

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ b, & c, & d, & e \\ c, & d, & e, & f \\ d, & e, & f, & g \end{vmatrix},$$

który rozwinięty da

$$\mathrm{B} = aceg - acf^2 - ad^2g + 2adef - ae^3 - b^2eg + b^2f^2$$
$$+ 2bcdg - 2bcef - 2bd^2f + 2bde^2 - c^3g + 2c^2df$$
$$+ c^2e^2 - 3cd^2e + d^4.$$

Utworzywszy niezmiennik drugiego stopnia wyznacznika Hessowego, znajdziemy go proporcyonalnym do $\mathrm{A}^2 + 300\mathrm{B}$; dla spółzmiennika S znajdziemy $A^2 - 36B$, a działając za pomocą T na kształcie danym wrócimy do B. Zastosowawszy to działanie do formy kanonicznej znajdziemy

$$B = adcd(12)^2(23)^2(34)^2(41)^2(13)^2(24)^2,$$

ilość równą 0, jeżeli niektóre z ilości a, b, c, d, staną się zerami, lub jeżeli którekolwiek z funkcyj u, v, w, z będą sobie równemi.

231. Weźmiemy za niezmiennik zasadniczy szóstego stopnia C, ten który nie zawiera potęgi pierwszego spółczynnika a wyższej nad drugą.

$$\begin{aligned}
C = {} & a^2d^2g^2 - ba^2defg + 4a^2df^3 + 4a^2e^3g - 3a^2e^2f^2 - 6abcdg^2 \\
& + 18abcefg - 12abcf^3 + 12abd^2fg - 18abde^2g + 6abe^3f \\
& + 4ac^3g^2 - 24ac^2e^2g - 18ac^2dfg + 30ac^2ef^2 + 54acd^2eg \\
& - 12acd^2f^2 - 42acde^2f + 12ace^4 - 20ad^4g + 24ad^3ef \\
& - 8ad^2e^3 + 4b^3dg^2 - 12b^3efg + 8b^3f^3 - 3b^2c^2g^2 + 30b^2ce^2g \\
& - 24b^2cef^2 - 12b^2d^2eg - 24\,b^2d^2f^2 + 60b^2def^2 - 27b^2e^4 \\
& + 6be^3fg - 42bc^2deg + 60bc^2df^2 - 30bc^2e^2f + 24bcd^3g \\
& - 84bcd^2ef + 66bcde^3 + 24bd^4f - 24bd^3e^2 + 12c^4eg \\
& - 27c^4f^2 - 8c^3d^2g + 6bc^3def - 8c^3e^3 - 24c^2d^3f - 39c^2d^2e^2 \\
& + 36cd^4e - 8d^6.
\end{aligned}$$

Inne niezmienniki szóstego stopnia dadzą się wyrazić w funkcyi poprzednich. I tak niezmiennik trzeciego stopnia spółzmiennika czwartego stopnia jest

$$A^3 - 108AB - 54C;$$

a niezmiennik trzeciego stopnia Hessowego

$$3A^3 - 100AB + 2750C;$$

niezmiennik wreszcie czwartego stopnia dla spółzmiennika stopnia szóstego będzie

$$2AB - C.$$

Ten ostatni łatwo obliczonym być może za pomocą formy kanonicznej. Mamy działać przez

$$\Sigma abc(12)^2(23)^2(31)^2u^2v^2w^2$$

na tejże samej ilości. Jeżeli działamy przez $u^2v^2z^2$ na $u^2v^2w^2$ wypadek będzie proporcyonalny do $(12)^2MN$, gdzie M i N mają to samo znaczenie jak w paragrafie 210. Otrzymamy w ten sposób $-(12)^2(23)^2(31)^2$; a niezmiennik szukany będzie

$$\Sigma a^2b^2c^2(12)^6(23)^6(31)^6 - 2abcd\Sigma ab(12)^6M^3N^3.$$

232. Gdy a, b, c stają się zerami, będzie $A = -10d^2$, $B = d^4$, $C = -8d^6$. A więc jeżeli kształt dany ma za czynnik sześcian zupełny, powinno być

$$A^2 = 100B, \quad 4AB = 5C, \quad AC = 80B^2.$$

Jeżeli uczynimy $a = b = f = g = 0$, niezmienniki staną się

$$15ce - 10d^2, \quad c^2e^2 - 3cde + d^4,$$

$$-8c^3e^3 - 39c^2d^2e^2 + 36cd^4e - 8d^6;$$

a następnie jeżeli kształt szóstego stopnia przyjmuje za czynniki dwa zupełne kwadraty, to niezależnie od warunku dostarczonego przez dyskryminant, być musi

$$(A^3 - 300AB + 250C)^2 = 5(A^2 - 100B)^3.$$

233. Jeżeli $b = d = f = 0$ w równaniu danem, dyskryminant będzie ag rozmnożone przez kwadrat z dyskryminanta ilości

$$(a,\ 5c,\ 5e,\ g \between x, y)^3;$$

a jeżeli znikną wszystkie wyrazy prócz a, d, g, dyskryminant będzie a^2g^2 rozmnożone przez sześcian dyskryminanta ilości

$$(a,\ 10d,\ g \between x,\ y)^2.$$

Znając te wyrazy dyskryminanta, obliczymy resztę za pomocą zrównania różniczkowego i znajdziemy wartość na Δ $\{$P. Salmon (*Lessons introductive to the modern higher Algebra*, Dublin, 1866, rozd. XVII, str. 205-207), podaje wypadek obliczania Δ z 246 wyrazów złożony$\}$.

234. Zamiast dyskryminanta Δ możemy szukać, niezmiennika D, do którego skrajne spółczynniki a i g nie wchodzą w potęgach wyższych nad czwartą i który nadto nie zawiera iloczynu a^4g^4. Ilość mnożąca a^4 w D jest $(eg - f^2)^3$; Δ zaś i D łączy związek

$$\Delta = A^5 - 375A^3B - 625A^2C + 3125D.$$

(P. Salmon w dziele zacytowanem w poprzednim paragrafie, na stronach 207-209, podaje wypadek obliczania D z 298 wyrazów złożony. Sądziliśmy zbytecznem przytaczać w niniejszem tłómaczeniu odnośnego rozdziału P. Salmon'a, wartości przez niego na Δ i D otrzymanych.)

235. Teorya P. Cayley o liczbie niezmienników kształtu szóstego stopnia pokazuje że kształty te posiadają prócz czterech niezmienników wskazanych, niezmiennik skośny piętnastego stopnia zwany E. Niezmiennik piątego stopniaj est wyznacznikiem wypadkowym dwóch spółzmienników, lecz nie wiemy czy E da się w podobny sposób wyprowadzić z dwóch spółzmienników szóstego stopnia. Możemy je wyrachować za pomocą zrównania różniczkowego. Czynnik a nie wchodzi w potędze wyższej nad szóstą; toż a ma za czynnik

$$(dg^2 - 3efg + 2f^3)(eg - f^2)^3. \quad (1)$$

Wyrażenie E w funkcyi innych niezmienników daje się otrzymać za pomocą następujących uwag. Jeżeli b, d, f są zerami, mamy $E = 0$; gdyż ważność jego jest 45 (123) a więc ważność jednego przynajmniej z czynników każdego wyrazu musi być nieparzystą, ztąd gdy czynniki z ważnością nieparzystą staną się zerami, będzie $E = 0$. Wynika ztąd że $E = 0$ jest warunkiem aby pierwiastki zrównania szóstego stopnia stanowiły układ w inwolucyi. Dajemy przeto $b = d = f = 0$ w wyrażeniach A, B, C, D, i wyrugujemy a, c, e, g, a związek jaki otrzymamy między A, B, C, D będzie sprowadzonym przez $E = 0$, które przeto jako czynnik zawierać musi (*).

Uczyńmy $ag = \lambda$, $ce = \mu$, $ae^2 + gc^2 = \nu$, a zarazem

(*) P. Salmon w dziele swem tyle razy wspominanem podaje wypadek obliczenia E, w dodatku na str. 253-265. Wypadek ten zawiera 1241 wyrazów.

$b = d = f = 0$, otrzymamy

$$A = \lambda + 15\mu, \qquad B = \lambda\mu + \mu^2 - \nu,$$

$$C = -24\lambda\mu^2 - 8\mu^3 + 4(\lambda + 3\mu)\nu,$$

$$\Delta = \lambda(\lambda^2 - 150\lambda\mu - 1875\mu^2 + 500\nu)^2.$$

Wyrugujmy ν, a dwa ostatnie zrównania staną się :

$$C = 4\mu(\lambda - \mu)^2 + 4(\lambda + 3\mu)B,$$

$$\Delta = \lambda(\lambda^2 + 350\lambda\mu - 1375\mu^2 - 500B)^2.$$

Wyrugujmy następnie μ za pomocą pierwszego zrównania przyjdzie :

$$1024\lambda^3 - 1152\lambda^2 A + (132A^2 - 10800B)\lambda$$

$$+ 3375C + 2700AB - 4A^3 = 0,$$

$$\lambda(256\lambda^2 - 320A\lambda + 55A^2 - 4000B)^2 - \Delta = 0.$$

Rugownik tych dwóch zrównań będzie miał spółczynniki trzydziestego stopnia, i, jak wiemy, tylko spółczynnikiem liczebnym różnić się może od E^2.

136. Paragraf 218 uczy, że w razie dyskryminanta dodatnego kształt szóstego stopnia ma sześć albo dwa pierwiastki rzeczywiste, cztery zaś lub zero gdy dyskryminant jest odjemnym. Możemy z góry twierdzić że rozbiór E prowadzi nas do tych samych wypadków odnośnie do przypadków rzeczywistości pierwiastków, jak rozbiór G przy piątym stopniu. Przez analogią sądzimy także, że przypuszczenie $\Delta = 0$ E może być obfitem w następstwa ważne; a chociaż obliczenie E jest nader pracowitem, jego część niezależna od Δ łatwo się otrzymuje,

jest ona iloczynem

$$3375C + 2700AB - 4A^3,$$

przez kwadrat wyznacznika wypadkowego kształtów trzeciego i czwartego stopnia

$$256\lambda^2 - 320A\lambda - 55A^2 + 4500B.$$

Analogia także sądzić każe że tylko drugi z tych dwóch czynników jest ważnym w poszukiwaniu rzeczywistości pierwiastków.

Czyniąc $100B = B'$, $125C = C'$, znalazłem (to jest P. Salmon) że czynnik kwadratowy różni się od
$4A^6 - 19A^4B' - 49A^2B'^2 - 4A^3C' - 80B'^3 + 52AB'C' - 4C'^2$
tylko o czynnik stały.

Analogia też pozwala wnosić że *criteria* dające poznać liczbę pierwiastków rzeczywistych zależą od znaku tej ostatniej ilości, jako też od ilości,

$$A^3 - 100B^2, \qquad A^3 - 125C,$$

$$(A^3 - 300AB + 250C^2)^2 - 5(A^2 - 100B)^3,$$

które, jak widzimy, stają się zerami w razie równości pierwiastków.

ROZDZIAŁ XVI.

O RZĘDZIE RESTRYKCYJNYCH UKŁADÓW ZRÓWNAN (*).

237. Zagadnienia które w tym rozdziale nas zajmą są czysto algebraiczne, i nie wymagają pomocy prawd geometrycznych. Dla uniknienia jednakomówień, i dla pokazania w jaki sposób znane twierdzenia o potrójnych i poczwórnych kształtach, do wszelkich w ogóle kształtów zastosować się dadzą, zapożyczyłem od geometryi kilku wyrazów.

Wiemy (59) że dla k zrównań o k zmiennych niezależnych (**), liczba układów spólnych wartości zmiennych, sprawdzających je spółcześnie, jest równą iloczynowi rzędów zrównań.

W geometryi dwa lub trzywymiarowej układ wartości $x=a$, $y=b$, lub $x=a$, $y=b$, $z=c$, oznacza punkt zamiast więc wyrażenia *układ wartości ilości zmiennych*, użyjemy wyrazu

(*) W pierwszem wydaniu Wyższej Algebry p. Salmona (*Lessons introductory to the modern higher Algebra*), i w jego francuzkiem tłumaczeniu przez p. Bazin, rozdział ten zastąpiony jest rozdziałem *O kształtach potrójnych*; lecz ponieważ przedmiot ten wymaga obszernych rozwinięć, a wszystkie jego wypadki znajdują zastosowanie w geometryi, przeto p. Salmon wyrzucił go z drugiej edycyi a do dzieł geometrycznych włączył, z których jednak, a mianowicie swej Geometryi o trzech wymiarach (*Geometry of Three Dimensions*), wyjął i wcielił do Wyższej Algebry to wszystko co jest w związku z przedmiotem traktowanym w tem dziele.

(**) Używa się zwykle zrównań jednorodnych, mających $k+1$ zmiennych.

punkt; i tak twierdzenie o którem mowa wysłowi się jak następuje: «Układ k zrównań o k zmiennych stopni $l, m, n, p, q,\ldots,$ oznacza $lmnpq\ldots$ punktów,» co znaczy że «$lmnpq\ldots$ układów wartości ilości zmiennych» zadosyć czyni zrównaniom. Liczbę $lmnpq\ldots$ *rzędem układu zrównań.*

238. Dla $k-1$ zrównań o k zmiennych nie podobna oznaczyć spólnego układu wartości tych zmiennych, zrównania dane oznaczają nieskończoną liczbę punktów, czyli *krzywą.* Jeżeli do układu $k-1$ zrównań dołączymy dowolne zrównanie stopnia pierwszego, otrzymamy liczbę punktów równą iloczynowi stopni zrównań. A zatem *rzędem krzywej* będzie liczba punktów oznaczonych przez układ dany, w połączeniu z jednem dowolnem zrównaniem stopnia pierwszego.

Układ $k-2$ zrównań o k zmiennych wyobraża dwa nieskończone szeregi punktów, i bez przybrania dwóch zrównań pomocniczych żadnego punktu ściśle nie oznacza. Mówimy że oznacza *powierzchnią.* Układ dany z pomocą jednego dowolnego zrównania stopnia pierwszego da *krzywą* rzędu równego iloczynowi stopni $k-2$ zrównań. W ogóle *rzęd powierzchni* równy jest albo *rzędowi krzywej* danej przez układ po przybraniu jednego zrównania stopnia pierwszego, albo liczbie punktów danych przez układ uzupełniony dwoma dowolnemi zrównaniami stopnia pierwszego.

Rzęd układu zrównań w liczbie $k-n$ o k zmiennych, oznaczony jest przez liczbę punktów danych przez układ napełniony n dowolnemi zrównaniami stopnia pierwszego. W obchodzącym nas przypadku jest on iloczynem stopni zrównań do układu wchodzących.

239. Możemy wyrugować k zmiennych stopni $l, m, n,\ldots,$ wchodzących do układu złożonego z $k+1$ zrównań, i wiemy że rzęd w jakim spółczynniki każdego zrównania wchodzą do wyznacznika wypadkowego jest iloczynem stopni zrównań

pozostałych (57-59). Weźmy przypadek czwartego stopnia; dajmy że rzędy zrównań są l, m, n, r, i że pewna ilość wchodzi w skład spółczynników zrównań w stopniach λ, μ, ν, ρ, ta ilość będzie miała w wyznaczniku wypadkowym stopień

$$\lambda mnr + \mu nrl + \nu rlm + \rho lmn.$$

Przez *rzęd* rozumieć będziemy stopni l, m, n, r, w których zrównania zawierają zmienne przeznaczone do wyrugowania, przez *ważność* zaś stopnie λ, μ, ν, ρ w których wchodzi ilość nie wyrugowana; wypadek zaś dopiero co napisany pokazuje że ważność czy to wyznacznika wypadkowego, czy układu, równa się summie ważności każdgo ze zrównań rozmnożonej przez rzęd układu pozostałych po wyrugowaniu zrównań.

Pozostaje to prawdziwem dla układów na które rozdzielimy układ dany. I tak, dwa pierwsze tworzą układ rzędu lm a ważności $\lambda m + \mu l$, dwa drugie układ rzędu nr a ważności $\nu r + \mu n$; ważność zaś układu całego dopiero co napisana, czyli

$$nr(\lambda m + \mu l) + lm(\nu r + \rho n)$$

jest summą ważności układów cząstkowych pomnożonych przez odpowiednie rzędy. Korzyść ostatniego uważania rzeczy zaraz się pokaże.

240. To co dotąd w niniejszym powiedzieliśmy rozdziale znanem jest, chociaż innemi wyrazy, z rozdziału o rugowaniu; lecz dla łatwiejszego zrozumienia następnych poszukiwań dotyczących rzędu i ważności, ten sam przedmiot w odmienny przedstawimy sposób.

Wiemy że k zrównań o k zmiennych oznacza $lmnp$.. punktów; dodajmy do układu zrównanie nowe któremu zadosyć czynią niektóre tylko z pomiędzy $lmnp$... punktów. Układ nowy złożony z $k+1$ zrównań wyobraża punkta w liczbie mniejszej od iloczynu stopni k zrównań pierwotnych. Że przypadek ten zdarza się zawsze, gdy żądanej liczby punktów nie możemy oznaczyć na innej drodze prócz dopiero opisanej, prosty geometryczny przykład łatwo da zrozumieć. Weźmy punkta leżące na płaszczyznie; niech liczba pierwotna p oznacza ich ilość; dajmy że punkta te nie są położone na linii prostej, gdyż nie są one przecięciem dwóch krzywych, i że wziąwszy dwie krzywe przecinające się we wszystkich punktach danych, to krzywe te w innych jeszcze punktach przecinać się będą. Dla ścisłego oznaczenia punktów danych, musimy przybrać trzecią krzywą przez nie przechodzącą, lecz omijającą inne punkta przecięcia dwóch pierwszych krzywych. Nasze więc punkta są przecięciem trzech krzywych; zamierzamy zaś wykryć, dla ważnych przypadków, rzęd układu punktów danych przez liczbę zrównań k, wyższą od liczby zrównań też punkta oznaczających, czyli chcemy wykryć wszystkie układy wartości zadosyć czyniące zrównaniom danym.

Podobnież układ $k-1$ zrównań sprawdza się przez nieskończoną ilość wartości, czyli oznacza krzywą; lecz zdarzyć się może że przybrane zrównanie ogranicza liczbę wartości sprawdzających nowy układ z k zrównań. W niniejszym rozdziale zamierzamy obliczyć rzęd i ważność układu zrównań który nazwiemy *restrykcyjnym* (ograniczonym), jako odpowiadający wartościom nieznanych zadosyć czyniącym zrównaniom przybranym, które sprawdzają niektóre wartości sprawdzających zrównania dane oznaczające punkta, krzywe lub powierzchnie, lecz wyłączają inne wartości zadosyć czyniące układowi pierwotnemu.

241. Najprostszy przykład takiego układu dostarczy warstwa wyznaczników.

$$\left\| \begin{matrix} u, & v, & w \\ u' & v', & w' \end{matrix} \right\| = 0.$$

czyli, opuszczając zawsze jedną kolumnę,

$$vw' - v'w = 0, \quad wu' - w'u = 0, \quad uv' - u'v = 0.$$

Te zrównania napiszemy pod kształtem

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'},$$

a jasno zobaczymy że pierwiastki dwóch pierwszych zrównań sprawdzą trzecie. Wyjątek w tym razie stanowią wartości czyniące zarazem, u i u', lub v i v', lub w i $w' = 0$, bo w obu razach tylko dwa pierwsze zrównania sprawdzonemi będą. Łatwo potrafimy obliczyć rzęd układu trzech zrównań. Niech rzędy u i u', v i v', w i w' będą l, m, n; dwa pierwsze zrównania mają za rzęd $m+n$, $n+l$, a ich układ $(m+n)(n+l)$. Lecz do układu tego wchodzą wartości zadosyć czyniące w i w', lecz nie zadosyć czyniące trzeciemu zrównaniu, którego rzęd równy n^2; wyłączając je z wypadku $(m+n)(n+l)$, otrzymamy za rzęd układu spólnego trzem wyznacznikom ilość

$$mn + nl + lm.$$

Weźmy układ złożony z trzech linij i czterech kolumn

$$\left\|\begin{matrix} u, & u', & u'', & u''' \\ v, & v', & v'', & v''' \\ w, & w', & w'', & w''' \end{matrix}\right\| = 0,$$

i napiszmy wyznaczniki dane przez opuszczenie trzeciej i czwartej kolumny:

$$u''(vw' - v'w) + v''(wu' - w'u) + w''(uv' - u'v) = 0,$$
$$u'''(vw' - v'w) + v'''(wu' - w'u) + w'''(uv' - u'v) = 0.$$

Te dwa zrównania sprawdzone będą przez wartości sprawdzające trzy zrównania

$$vw' = v'w, \qquad wu' = w'u, \qquad uv' = u'v.$$

Lecz wartości nie sprawdzą innych wyznaczników układu danego. Od rzędu $(l+m+n)^2$ dwóch zrównań napisanych jedno wciąż drugiego, odciągnijmy $mn+nl+lm$, rzęd układu tych dwóch zrównań, a otrzymamy $l^2+m^2+n^2+lm+mn+nl$ na rzęd układu spólnego wszystkim wyznacznikom. Sposób obliczenia rzędu układu o trzech liniach i czterech kolumnach, stosuje się do układu o czterech liniach i pięciu kolumnach. Postępując coraz dalej przekonamy się że kiedy jest prawdziwym dla układu o k liniach, i dla układu o $k+1$ liniach prawdziwym być musi.

242. Otrzymane formuły prościej i ogólniej wyrazić się dadzą. Niech rzędy funkcyj przedstawione będą przez odpowiednie litery,

$$\left\|\begin{matrix} a+\alpha, & b+\alpha, & c+\alpha, & d+\alpha, & \ldots \\ a+\beta, & b+\beta, & c+\beta, & d+\beta, & \ldots \\ a+\gamma, & b+\gamma, & c+\gamma, & d+\gamma, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right\|;$$

Niech p oznacza summę ilości $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, q summę ich iloczynów po dwa branych, P zaś i Q odpowiednie summy ilości $a, b, c, \ldots$, a rzęd układu będzie $\mathrm{Q}+p\mathrm{P}+p^2-q$. Bo jeżeli uważać będziemy wyznaczniki otrzymane przez kolejne opuszczenie pierwszej i drugiej kolumny, będą one rzędów $p+\mathrm{P}-a$, $p+\mathrm{P}-b$, a ich układ rzędu $(p+\mathrm{P}-a)(p+\mathrm{P}-b)$. Lecz dwa te wyznaczniki sprawdzonemi będą przez wszystkie wartości które sprawdzają wszystkie wyznaczniki *Mniejsze* układu niższego utworzone wymazaniem dwóch pierwszych kolumn, chociaż wartości te nie sprawdzają innych wyznaczników układu danego. Aby więc znaleźć rzęd układu spólnego wszystkim należy od $(p+P-a)(p+P-b)$ odjąć rzęd układu niższego, który obliczyć możemy, jeżeli formułę daną prawdziwą przyjmiemy. Ponieważ w układzie niższym liczba linij jest większą od liczby kolumn, musimy dla zastosowania formuły, napisać linie jako kolumny, a kolumny jako linie, tak że dawne p i q zamienią się na P i Q. Nowe p widocznie równe $P-a-b$, a q będąc summą iloczynów ilości $c, d, \ldots,$ parami branych, będzie

$$Q-(a+b)P+a^2+ab+b^2.$$

Tak, rzęd niższego układu formuł jest

$$P^2-Q-P(a+b)+ab+p(P-a-b)+q.$$

Odciągając tę liczbę od $(p+P-a)(p+P-b)$ otrzymamy $Q-pP+p^2-q$. A więc jeżeli formuły są prawdziwemi dla układu niższego, prawdziwemi też pozostaną dla układu bezpośrednio po naddanym stojącego, i sprawdzić go łatwo dla układu o trzech liniach i trzech kolumnach. Stosując to mamy w ogóle α lub $a=0$. Jeżeli wszystkie linie są jednego rzędu, przyjdzie $\alpha=\beta=\ldots\ldots=0$, a więc $p=q=0$; rzęd zaś układu być musi Q.

243. W ten sam sposób obliczymy ważność układu wyznaczników uważanych w paragrafie 242. A zaczynając od najprostszego przypadku

$$\left\|\begin{matrix} u, & v, & w \\ u', & v', & w' \end{matrix}\right\|,$$

zkombinujmy go z jednem lub więcej zrównań i wyrugujmy zmienne. Wypadek rugowania między $uv' - u'v$, $uw' - u'w$ i innemi zrównaniami, zawierać musi jako czynnik wyznacznik wypadkowy u, u' i innych zrównań. Odrzuciwszy ten czynnik przychodzimy do wypadku rugowania między $uv' - u'v$, $vw' - v'w$ i innemi zrównaniami, i odrzucenia czynnika otrzymanego przez rugowanie między v i v' i innemi zrównaniami. Dla objaśnienia użytej metody dajmy że u, u', v, v', w, w' zawierają pewną ilość niewyrugowaną stopni λ, μ, ν, w każdym z powyższych układów; i że mamy zkombinować z wyznacznikami układu danego, inne zrównanie $R = 0$, rzędu v, a stopnia p dla niewyrugowanej ilości. Ta ilość przeto, wejdzie w wyznacznik wypadkowy ilości R, $uv' - u'v$, $uw' - u'w$ w stopniu

$$\rho(l+m)(l+n) + r\{(l+m)(\lambda+\nu) + (l+n)(\lambda+\mu)\}.$$

Wyznacznik zaś wypadkowy ilości R, u, u' zawiera tę samą ilość w stopniu

$$\rho l^2 + 2rl\lambda.$$

Odrzuciwszy ten czynnik z pierwszego wypadku pozostanie

$$\rho(mn + nl + lm) + r\{\lambda(m+n) + \mu(n+l) + \nu(l+m)\}.$$

Rzędem układu trzech wyznaczników jest ilość mnożąca ρ, a ich ważnością ilość mnożąca r.

244. Znalazłszy na tej drodze ważność układu o dwóch liniach i trzech kolumnach, podwyższać stopniowo będziemy o jedność liczbę linij i kolumn, aż dojdziemy do układu o k liniach i $k+1$ kolumnach. Wypadek będzie ten sam jak gdybyśmy rzędy wielu funkcyj raz pisali jak w paragrafie 242, ich zaś

ważności (to jest stopnie w jakich zawierają zmienną niewyrugowaną) będą $a' + \alpha'$, $b' + \alpha'$,..., $a' + \beta' + ...$; gdyż formuła na ważności pochodzi od formuły na rzędy, po wykonaniu na niej działania

$$a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + ... + \alpha' \frac{d}{d\alpha} + \beta' \frac{d}{d\beta} + ...$$

więc ważność

$$\Sigma(ab') + pP' + p'P + 2\Sigma(\alpha\alpha') + \Sigma(\alpha\beta'),$$

daje się napisać

$$(P + p)(P' + p') + \Sigma(\alpha\alpha') - \Sigma(aa'),$$

wypadek otrzymany przez wykonanie działania $a' \frac{d}{da} + ...$ na

$$Q + pP + p^2 - q.$$

245. Warunek aby dwa zrównania

$$at^m + bt^{m-1} + ct^{m-2} + ... = 0, \quad a't^n + b't^{n-1} + c't^{n-2} + ... = 0,$$

miały pierwiastek spólny, otrzymujemy za pomocą jednego zrównania, a jest nim wyznacznik wypadkowy dwóch zrównań danych. Dwa pierwiastki równe, nie dwóch zrównań (63) lecz całego układu zrównań waruukowych wymagają układu równoważnego dwom warunkom, skoro ich dwa zrównania dane objąć nie mogą. Dajmy że p jest wyrugowanym parametrem, i że a, b,..., zawierają zmienne; zamierzamy wynaleźć rzęd układu zawierającego w mowie będące warunki. Objęte one są w wyznacznikach układu

$$\left\|\begin{matrix} a, b, c, d, \ldots\ldots \\ a, b, c, \ldots\ldots \\ a, b, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a' b', c', d' \ldots\ldots \\ a', b', c' \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\|$$

gdzie pierwsza linia $n-1$, druga zaś $m-1$ razy jest powtórzoną, tak że mamy $m+n-2$ linij i $m+n-1$ kolumn; jest to szczególny przypadek zagadnienia paragrafu 242. Przypuszczamy że stopnie wprowadzonych zrównań o równej ilości różnią się między sobą, to jest że jeżeli λ, μ są stopniami a, a', stopniami b, b', będą $\lambda+\alpha$, $\mu+\alpha$, a $\lambda+2\alpha$, $\mu+2\alpha$ stopniami c i c'. Możemy napisać formułę paragrafu 242 w dogodniejszym kształcie, mianowicie

$$Q+pP-\frac{1}{2}(p^2+s_2),$$

gdzie s_2 jest summą kwadratów z $\alpha, \beta, \ldots$ Aby te formuły zastosować do obecnego przypadku weźmiemy $0, \alpha, 2\alpha, \ldots$, za $a, b, c, \ldots$, $\lambda, \lambda-\alpha, \lambda-2\alpha\ldots$ za $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; P jest więc summą $m+n-2$ wyrazów szeregów $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$, a dla $m+n=k$ jest ono $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)\alpha$. Q jest summą iloczynów tychże ilości po dwie branych, więc

$$Q=\frac{(k-3)(k-2)(k-1)(3k-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\alpha^2.$$

Zaś p jest summą $n-1$ wyrazów szeregów $\lambda, \lambda-\alpha, \lambda-2\alpha, \ldots$, i $m-1$ wyrazów szeregów $\mu, \mu-\alpha, \mu-2\alpha, \ldots$ Ztąd

$$p=(n-1)\lambda+(m-1)\mu-\frac{1}{2}\alpha\left\{(m-1)(m-2)+(n-1)(n-2)\right\}.$$

Podobnież s_2 jest summą kwadratów tych samych ilości, a więc

$$s_2=(n-1)\lambda^2+(m-1)\mu^2-\lambda\alpha(n-1)(n-2)-\mu\alpha(m-1)(m-2)$$

$$+\alpha^2\left\{\frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{1.2.3}+\frac{(m-1)(m-2)(2m-3)}{1.2.3}\right\}.$$

Zbierając te wszystkie wyrazy, znajdziemy za rzęd żądanego układu

$$\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2+\frac{1}{2}m(m-1)\mu^2+(m-1)(n-1)\lambda\mu$$

$$+\frac{1}{2}n(n-1)(2m-1)\lambda\alpha+\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)\mu\alpha$$

$$+\frac{1}{2}mn(m-1)(n-1)\alpha^2.$$

Jeżeli dwa te zrównania są jednego stopnia, czyli jeżeli $m=n$, możemy napisać $\lambda+\mu=p$, $\lambda\mu=q$, a rzęd będzie

$$\frac{1}{2}n(n-1)(p+n\alpha)\left\{p(n-1)\alpha\right\}-(n-1)q.$$

Jeżeli wszystkie funkcye $a, b, \ldots$ są pierwszego stopnia, czyli $\lambda=\mu=1$, $\alpha=0$, to wstawiwszy te wartości w ostatnie zrównanie otrzymamy

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2).$$

246. Jeżeli stopnie w których zmienne niewyrugowane napotykają się w niektórych wyrazach oznaczymy akcentowanemi literami odpowiednemi tym które wyrażają ich stopnie w zmiennych mających być wyrugowanemi, natenczas formuła ważności układu wywodzi się z formuły rzędu, przez poddanie jej działaniu :

$$\lambda' \frac{d}{d\lambda} + \mu' \frac{d}{d\mu} + \alpha' \frac{d}{d\alpha}.$$

Ważność będzie

$$n(n-1)\lambda\lambda' + m(m-1)\mu\mu' + (m-1)(n-1)(\lambda\mu' + \lambda'\mu)$$

$$+\frac{1}{2}n(n-1)(2m-1)(\lambda\alpha'+\lambda'\alpha)+\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)(\mu\alpha'+\mu'\alpha)$$

$$+mn(m-1)(n-1)\alpha\alpha'.$$

247. Przejdźmy do dyskusyi układu zawierającego warunek aby trzy zrównania $at^l+bt^{l-1}+\ldots=0$, $a't^m+b't^{m-1}+\ldots=0$, $a''t^n+b''t^{n-1}+\ldots=0$ posiadały czynnik spólny. Układ ten wyraża się przez trzy równania otrzymane kolejnem wyrugowaniem t między zrównaniami danemi branemi po dwa; jest on równoważny dwom warunkom. Rzęd układu otrzymany rugując ze zrównań zmienne wchodzące domyślnie w $a, b, c, \ldots$, gdyż rzęd zrównania wypadkowego na t będzie rzędem układu.

Dajmy że a, a', a'', są funkcyami jednorodnemi x, y, z, stopni λ, μ, ν, że b, b', b'', są stopni $\lambda-1$, $\mu-1$, $\nu-1$, i weźmy wzajemną względem t za czwartą zmienną, a zrównania będą odnośnie rzędów λ, μ, ν, ich zaś układ rzędu $\lambda\mu\nu$. Lecz układ wartości $x=0$, $y=0$, $z=0$, jest punktem wielokrotnym w trzech zrównaniach rzędów $\lambda-l$, $\mu-m$, $\nu-n$; rzęd przeto układu podzielić trzeba przez $(\lambda-l)(\mu-m)(\nu-n)$; otrzymamy rzęd układu szukanego,

$$l\mu\nu+m\nu\lambda+m\lambda\mu-\lambda mn-\mu ln-\nu lm+lmn.$$

Jeżeli rzędy ilości b, b', c, c', są $\lambda+\alpha$, $\mu+\alpha$, $\lambda+2\alpha$, $\mu+2\alpha$, rzęd układu będzie

$$l\mu\nu+m\nu\lambda+n\lambda\mu+\alpha(mn\lambda+nl\mu+lm\nu)+\alpha^2 lmn.$$

Na tej ilości działając przez $\lambda'\dfrac{d}{d\lambda}+\ldots$ otrzymamy ważność

$$l(\mu\nu'+\mu'\nu)+m(\nu\lambda'+\nu'\lambda)+n(\lambda\mu'+\lambda'\mu)$$

$$+mn(\alpha\lambda'+\alpha'\lambda)+nl(\alpha\mu'+\alpha'\mu)+lm(\alpha\nu'+\alpha'\nu)$$

$$+2lmn\alpha\alpha'.$$

248. Znalezienie rzędu i ważności układu warunków pozwalających aby zrównanie $at^n+bt^{n-1}+\ldots$ mogło mieć trzy pierwiastki równe jest, szczególnym przypadkiem poprzedzającego, bo te warunki znajdują się wyrażając że trzy drugie różniczki mogą mieć czynnik spólny. W wartości na rzęd układu jest

$$3(n-2)\lambda(\lambda+n\alpha)+n(n-1)(n-2)\alpha^2.$$

W podobny sposób otrzymamy na wartość ważności

$$6(n-2)\lambda\lambda'+3n(n-2)(\alpha'\lambda-\alpha\lambda')+2n(n-1)(n-2)\alpha\alpha'.$$

Dla znalezienia rzędu i ważności warunków nieodzownych w celu aby jedno zrównanie miało dwie pary pierwiastków równych, trzeba znaleźć rzęd i ważność układu pozwalającego aby pierwsze różniczki zrównań $at^{n-1}+\ldots$, $bt^{n-1}+\ldots$, miały dwa czynniki spólne, i odciągnąć te ilości od rzędu i ważności układu, znalezionych nieco wyżej. Rzęd będzie

$$2(n-2)(n-3)\lambda(\lambda+n\alpha)+\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)\alpha^2,$$

ważność zaś

$$4(n-2)(n-3)\lambda\lambda'+2n(n-2)(n-3)(\alpha'\lambda+\alpha\lambda')$$

$$+n(n-1)(n-2)(n-3)\alpha\alpha'.$$

Nim postąpimy dalej w poszukiwaniu rzędów i ważności różnych układów, przedyskutować musimy rozmaite zagadnienia, a przedtem jeszcze wytłumaczyć dwa wyrazy które zapożyczamy od geometryi.

249. *Przecięcie kształtów mających spólne krzywe.* Mówić będziemy że dwa układy kształtów *przecinać* się będą jeżeli mają jeden lub więcej punktów spólnych, czyli jeżeli je sprawdza tenże sam układ wartości zmiennych. Mówić będziemy że *powierzchnia* zawiera *krzywą*, jeżeli każdy układ wartości sprawdzających $k-1$ zrównań krzywej, sprawdzi $k-2$ zrównań powierzchni. I tak w przypadku czterech zmiennych, trzy zrównania $U=0$, $V=0$, $W=0$, oznaczać będą krzywą, dwa zaś zrównania $U=0$, $V=0$ powierzchnią na której leży krzywa dana.

Widzieliśmy że układ złożony z k kształtów o k zmiennych przecina powierzchnią w liczbie punktów równej iloczynowi rzędów kształtów danych. Zdarzyć się może że liczba punktów spólnych jest nieskończoną i że one tworzą krzywą w znaczeniu jakie przywiązujemy do tego wyrazu. Oprócz tej krzywej mieć jeszcze zwykle będziemy pewną punktów spólnych których ścisłem oznaczeniem zajmiemy się obecnie. Weźmy na przykład przykład czterech zmiennych niezależnych, niech będą cztery zrównania

$$U = Au + Bv + Cw = 0$$

$$V = A'u + B'v + C'w = 0$$

$$W = A''u + B''v + C''w = 0$$

$$Z = A'''u + B'''v + C'''w = 0,$$

U, V, W, Z są stopni l, m, n, p; u, v, w stopni λ, μ, ν; nadto A, B, — A', B', — ..., muszą widocznie być funkcyami stopni $l-\lambda$, $l-\mu$, $-m-\lambda$, $m-\mu$, — ... Zrównaniom danym zadosyć czyni wszelki układ wartości robiący $u=0$, $v=0$, $w=0$, a ponieważ te zrównania nie są w ilości dostatecznej do oznaczenia punktów, więc sprawdzi je nieskończona ilość wartości zmiennych, a cztery kształty U, V, W, Z, determinują spólną krzywą. Lecz jeżeli U, V, W, Z sprawdzanemi bedą przez pewną liczbę wartości które nie wszystkie ilości u, v, w, czynią razem równemi zeru, to tę liczbę oznaczyć wypada. Przedsiębierzemy przeto rozwiązać zagadnienie: gdy pewien układ kształtów oznacza spólną krzywą, idzie o wykrycie ile z punktów przecięcia $lmnp$... należy do krzywej, a ile po za nią leży.

250. Weźmy na samprzód pod uwagę krzywą utworzoną przez $k-1$ kształtów, na przykład krzywą UVW dla czterech zrównań paragrafu 249. Widocznie że jej część stanowi krzywa uvw, i że po za tą ostatnią leży nieskończenie wiele punktów sprawdzających UVW, a nie sprawdzających u, v, w. UVW

jest przeto *krzywą złożoną;* w skład jej wchodzą dwie krzywe: jedna *uvw*, druga uzupełniająca. Rzęd krzywej złożonej jest summą rzędów dwóch składowych; gdyż według określenia rzęd ten stanowi liczba punktów otrzymanych ze zrównań układu danego połączonych ze zrównaniem stopnia pierwszego; w obecnym razie rzęd ten równa się *lmn*. Widoczna że jeżeli z pomiędzy *lmn* punktów, $\lambda\mu\nu$ punktów leży na *uvw*, będzie ich leżało $lmn - \lambda\mu\nu$ na krzywej uzupełniającej.

Liczbę *i* punktów przecięcia dwóch krzywych otrzymać łatwo. Gdyż punkta sprawdzające trzy zrównania

$$Au + Bv + Cw = 0,\quad A'u + B'v + C'w = 0,\quad A''u + B''v + C''w = 0,$$

a nie sprawdzające *u*, *v*, *w*, muszą sprawdzić wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

będący stopnia $l + m + n - \lambda - \mu - \nu$. Przecięcie tego nowego kształtu z *uvw*, daje wszystkie punkta w których *uvw* spotyka krzywą dodatkową. Mamy

$$i = \lambda\mu\nu(l + m + n - \lambda - \mu - \nu).$$

251. Dla wynalezienia liczby punktów spólnych UVWZ wziąć trzeba pod uwagę punkta w których krzywa UVW spotyka Z; a wtedy dopiero szukać będziemy ile z nich nie leży na *uvw*. Lecz gdy *uvw* jest częścią UVW, więc punkta szukane zawarte są pomiędzy $p(lmn - \lambda\mu\nu)$ punktami w których krzywa dodatkowa spotyka Z; od tej liczby odjąć należy *i* punktów w których taż krzywa spotyka *uvw*, a pozostała reszta będzie ilością szukaną. Ilość zaś tę, używszy wartości na *i*

z paragrafu 250, da nam formuła

$$lmnv - \lambda\mu\nu(l + m + n + v) + \lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu).$$

Czyli, jeżeli k kształtów których rzędy są l, m, n, p,..., mają spólną krzywą rzędu α, to liczba spólnych im po za tą krzywą punktów, jest mniejszą od iloczynu rzędów kształtów danych przez $\alpha(l + m + n + ...) - \beta$, gdzie β jest stałą zależną tylko od natury krzywej, a bynajmniej od rzędów kształtów. Tę stałą nazwiemy *rangą* krzywej. Widzieliśmy że krzywa dana jako przecięcie u, v, w, jest rzędu $\lambda\mu\nu$; znajdziemy zaś że jej ranga równa się $\lambda\mu\nu(l + \mu + \nu)$.

Wiemy podług ostatniego paragrafu że dla przecięcia UVW mającego dwa przecięcia uzupełniające rzędów α, α' i rang β, β', liczba punktów przecięć tych krzywych jest $\alpha(l + m + n) - \beta$; będzie ona także $\alpha'(l + m + n) - \beta'$, tak że rzędy i rangi dwóch krzywych uzupełniających łączą zrównania

$$\alpha + \alpha' = lmn, \quad \beta - \beta' = (\alpha - \alpha')(l + m + n).$$

252. Teraz, rozważymy przypadek w którym kształty dane posiadają dwie lub więcej krzywych przecięcia, oznaczonych jak zwykle przez uvw, $u'v'w'$.... Dajmy na przykład że przecięcie UVW składa się z dwóch krzywych uvw, $u'v'w'$, i z krzywej uzupełniającej α''. Otrzymamy: 1° że rzęd $\alpha'' = lmn - \lambda\mu\nu - \lambda'\mu'\nu'$; 2° widzieliśmy że uvw spotyka pozostałe przecięcia UVW w punktach których liczba jest

$$\lambda\mu\nu(l + m + n - \lambda - \mu - \nu).$$

Jeżeli ilość i z pomiędzy nich leży na $u'v'w'$, (czyli jeżeli uvw spotyka $u'v'w'$ w i punktach) natenczas krzywa dodatkowa α'' ma na sobie

$$\lambda\mu\nu(l + m + n - \lambda - \mu - \nu) - i$$

punktów tych. Podobnież α'' spotyka $u'v'w'$ w punktach których liczba jest

$$\lambda'\mu'\nu'(l + m + n - \lambda' - \mu' - \nu') - i.$$

Liczbą zaś punktów nie leżących na krzywych uvw, $u'v'w'$, a w których α'' spotyka Z, będzie

$$(lmn - \lambda\mu\nu - \lambda'\mu'\nu')p - \lambda\mu\nu(l + m + n - \lambda - \mu - \nu)$$

$$- \lambda'\mu'\nu'(l + m + n - \lambda' - \mu' - \nu') + 2i$$

$$= lmnp - (\lambda\mu\nu + \lambda'\mu'\nu')(l + m + n + p)$$

$$+ \lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu) + \lambda'\mu'\nu'(\lambda' + \mu' + \nu') + 2i.$$

A więc zmniejszenie ilości $lmnp$ spowodowane przez krzywą złożoną, jest równem summie zmniejszeń sprawdzanych przez pojedyncze krzywe, mniej podwójną ilością punktów przecięć tych krzywych. Prawo to jest niezależnem od ilości krzywych spólnych kształtom danym, i powiedzieć możemy że krzywa złożona z kilku pojedyńczych, ma rzęd równy summie rzędów krzywych składowych, a rangę równą summie ich rang, zwiększonej podwójną liczbą punktów spólnych krzywym dwie po dwie branym.

253. Dla objaśnienia powyższych zasad rozwiążemy zagadnienie : ile powierzchni drugiego stopnia poprowadzić można przez pięć punktów, tak aby one do czterech płaszczyzn stycznemi były. Niech S, T, U, V, W będą pięcioma powierzchniami przechodzącemi przez pięć punktów; każda inna powierzchnia oznaczoną będzie przez zrównanie $\alpha S + \beta T + \gamma U + \delta V + \varepsilon W$, a warunek by takowa dotykała płaszczyzny będzie funkcyą trzeciego stopnia pięciu ilości α, β, γ, δ, ε. Mamy cztery zrównania takie, a chcemy wiedzieć ile jest układów

wartości mogących je sprawdzić. Jeżeli cztery zrównania nie przyjmują spólnych krzywych, ta liczba spólnych im punktów będzie $3^4 = 81$. Lecz o istnieniu spólnych krzywych możemy się przekonać. Warunek aby powierzchnia drugiego rzędu dotykała płaszczyzny staje się zerem, jeżeli powierzchnia zamieni się na dwie płaszczyzny. Niech S i T będą temi płaszczyznami przechodzącemi przez pięć punktów danych; $S = (123)(145)$, $T = (123)(245)$; $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, sprawdzą $\alpha S + \beta T + \gamma U + \delta V + \varepsilon W$, jeżeli powierzchnia ta ma dotykać płaszczyzny. Krzywa pierwszego stopnia będzie spólną czterem kształtom; nazwijmy $(123)(45)$, i powtarzajmy powyższe rozumowanie, a przekonamy się że kształty nasze posiadają dziesięć takich linij, jako to $(124)(35)$...

Teraz, jeżeli S i T uważać będziemy jak poprzednio za układ dwóch płaszczyzn, zkąd $S = (123)(145)$, $T = (123)(245)$, i jeżeli dodamy $U = (145)(234)$, to ponieważ linia $(123)(45)$ oznaczona jest przez $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, a linia $(145)(23)$ przez $\beta = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, wynika że te dwie linie, jako sprawdzone każda osobno przez układ spólnych wartości $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, przeciąć się z sobą muszą. Podobnież, $(123)(45)$ przeciętem będzie przez $(245)(13)$ i $(345)(12)$. Tak więc dziesięć linij posiadają piętnaście punktów przecięć. Ranga każdej z krzywych pierwszego stopnia, otrzymuje się z formuły $\lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu)$ czyniąc w niej $\lambda = \mu = \nu = 0$; ranga zaś układu równa się $10.3 + 2.15 = 60$, wreszcie liczba punktów zadosyć czyniących czterem zrównaniom jest $81 - 10(3 + 3 + 3 + 3) + 60 = 21$.

254. Umiemy oznaczyć (242) rzęd układu wyznaczników, w których liczba kolumn różni się o jedność od liczby linij. Zobaczmy jak się znajduje ranga krzywej wyrażonej przez układ dany. Weźmy na początek przykład najprostszy

$$\left\| \begin{matrix} u, & v, & w \\ u', & v', & w' \end{matrix} \right\|,$$

a przekonamy się że przecięcie $uv' - u'v$, $uw' - u'w$ jest krzywą złożoną z uu' i z krzywej która nas zajmuje; znając rzęd i rangę krzywej, łatwo je znajdziemy dla tej ostatniej. W podobnyż sposób znajdziemy rzęd i rangę układu o czterech kolumnach i trzech liniach, a wznosząc się kolejno coraz wyżej, przyjdziemy przez indukcyę do ogólnego wyrażenia rangi

$$(p^2 - q + p\mathrm{P} + \mathrm{Q})(\mathrm{P} - 2p) - q(p + \mathrm{P}) + \mathrm{R} + r,$$

gdzie $p, q, \mathrm{P}, \mathrm{Q}$, mają to samo znaczenie jak w paragrafie 242, R zaś i r są summami iloczynów trójek $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$. Gdyż widzieliśmy (251) że rangi dwóch krzywych uzupełniających, które kompletują przecięcia dwóch kształtów mających μ, ν za swe rzędy, związane są zrównaniem

$$\beta - \beta' = (\alpha - \alpha')(\mu + \nu).$$

Wiemy nadto (242), że przecięcie dwóch kształtów rzędów $p + \mathrm{P} - a$, $p + \mathrm{P} - b$, uzupełniają krzywe rzędów

$$\alpha = p^2 - q + p\mathrm{P} + \mathrm{Q}, \quad \alpha' = \mathrm{P}^2 - \mathrm{Q} + p\mathrm{P} + q - p'(p + \mathrm{P}) + q',$$

gdzie uczyniliśmy $p' = a + b$, $q' = ab$.

Dla znalezienia rangi niższego układu, w przypuszczeniu prawdziwości powyższych formuł, musimy napisać r dawne za R nowe, a za nowe r

$$\mathrm{R} - p'\mathrm{Q} + (p'^2 - q')\mathrm{P} - (p'^3 - 2p'q').$$

Po małem uproszczeniu przyjdzie

$$\begin{aligned}\beta' = (\mathrm{P}^2 + p\mathrm{P} + q)(2\mathrm{P} + p) - \mathrm{Q}(3\mathrm{P} + 2p) + \mathrm{R} + r \\ - p'(\mathrm{P} + p)(3\mathrm{P} + p) + 2p'(\mathrm{Q} - q) + p'^2(\mathrm{P} + p) \\ + 2q'(\mathrm{P} + p) - p'q'.\end{aligned}$$

Dodawszy $(\alpha - \alpha)(\mu + \nu)$ do tej wartości, otrzymamy

$$\{p^2 - P^2 - 2(Q - q) + p'(P + p) - q'\}(2P + 2p - p'),$$

wartość znana na β. A że te formuły łatwo się sprawdzają w przypadku dwóch linij, więc uogólnienia są prawdziwemi.

155. Przejdźmy do układu

$$\left\|\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e, & f \\ a', & b', & c', & d', & e', & f' \\ a'', & b'', & c'', & d'', & e'', & f'' \\ a''', & b''', & c''', & d''', & e''', & f''' \end{matrix}\right\|,$$

w którym ilość kolumn przewyższa o dwie ilość linij, i obliczmy rzęd układu ograniczonego, spólnego wszystkim tym wyznacznikom. Którekolwiek trzy z pomiędzy nich, $(ad'e''f''')$, $(bd'e''f''')$, (c, d', e'', f'''), mają spólną krzywą

$$\left\|\begin{matrix} d, & d', & d'', & d''' \\ e, & e', & e'', & e''' \\ f, & f', & f'', & f''' \end{matrix}\right\|.$$

Niech l, m, n, będą rzędami trzech naszych wyznaczników, α, β, rzędem i ważnością krzywej, a wyznaczniki przetną się po za krzywą w punktach będących w liczbie

$$lmn - \alpha(l + m + n) + \beta.$$

Przedstawmy rzędy niektórych funkcyj sposobem używanym w paragrafie 242, a łatwo ujrzymy że stopnie trzech wyznaczników być muszą

$$P + p - b - c, \quad P + p - c - a, \quad P + p - a - b;$$

uczyniwszy zaś

$$a+b+c=p', \quad bc+ca+ab=q', \quad abc=r',$$

będziemy musieli podstawić

$$(P+p)^3-2p'(P+p)^2+(P+p)(p'^2+q')-(p'q'-r')$$

za lmn, a $3P+3p-2p'$ za $l+m+n$.

α i β, rzęd i rangę krzywej, znajdziemy wedle formuł paragrafów 242 i 254, podstawiając p, q, r, za P, Q, R, a

$$P-p', \quad Q-Pp'+p'^2-q', \quad R-p'Q+(p'^2-q')P$$
$$-(p'^3-2p'q'+r')$$

za p, q, r. Znajdziemy jak poprzednio

$$\alpha=P^2-Q+pP+q-p'(P+p)+q',$$

$$\beta=(P^2+pP+q)(2P+p)-Q(3P+2p)+R+r$$

$$-p'(P+p)(3P+p)+2p'(Q-q)+p'^2(P+p)$$

$$+2q'(P+p)-p'q'-r'.$$

Do tej wartości znalezionej dołączmy wartość daną

$$\beta=lmn+\alpha(l+m+n),$$

a otrzymamy na szukany wypadek

$$R+pQ+(p^2-q)P+p^3-2pq+r.$$

Jeżeli niektóre linie są tego samego stopnia, czyli jeżeli mamy $\alpha = \beta = \ldots = 0$, natenczas rzęd układu będzie R.

Zgodność tego wypadku z wypadkiem paragrafu 242 uwydatni się pisząc symetryczną funkcyą

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \ldots p_2, \quad \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 + \ldots p^3,$$

gdyż wedle paragrafu 242 przyjdzie $Q + Pp + p_2$, a wedle obecnego $R + pQ + p_2P + p^3$. Indukcya poprowadzi nas do prawa, że rzęd układu w którym ilość kolumn przewyższa o trzy ilość linij, będzie

$$S + pR + p_2Q + p_3P + p_4.$$

Nie posuniemy obecnie tego rachunku dalej, lecz paragrafy następne przekonają nas jak łatwo stosować się on daje do układów o większej liczbie kolumn i linij.

We wszystkich przypadkach tych, ważność układu wyprowadza się z jego rzędu, wedle podanego powyżej prawidła.

256. Zastosujemy formuły paragrafu poprzedzającego do obliczenia rzędu układu warunków potrzebnych aby zrównania $at^m + \ldots$, $a't^n + \ldots$, miały trzy pierwiastki spólne. Warunki te zawiera układ wyznaczników, których sposób tworzenia widzieliśmy w paragrafie 245; podany tam jest pierwowzór tworzenia się tego. Niech w niej linia a, b, c, powtórzy się razy $m-2$, linia zaś a', b', c', razy $n-2$, i niech będzie $m+n-2$ kolumn, $m+n-4$ linij.

Rzęd układu (255) będzie :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mu$$

$$+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(m-2)\lambda^2\mu+\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(n-2)\lambda\mu^2$$

$$+\frac{1}{2}(m-1)n(n-1)(n-2)\lambda^2\alpha+\frac{1}{2}(n-1)m(m-1)(m-2)\mu^2\alpha$$

$$+\frac{1}{2}(m-2)(n-2)\left\{m(n-1)+n(m-1)\right\}\lambda\mu\alpha$$

$$+\left\{\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)m(m-2)+\frac{1}{3}m(n-1)(n-2)\right\}\alpha^2\lambda$$

$$+\left\{\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)n(n-2)+\frac{1}{3}n(m-1)(m-2)\right\}\alpha^2\mu.$$

$$+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)n(n-1)(n-2)\alpha^3.$$

A w razie $\alpha=0,\ \lambda=\mu=1$ zamieni się na

$$+\frac{1}{6}(m+n-2)(m+n-3)(m+n-4).$$

Na ważność układu otrzymamy

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\lambda^2\lambda'+\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)\mu^2\mu$$

$$+(n-1)(n-2)(m-2)(\lambda\mu\lambda'+\frac{1}{2}\lambda^2\mu')$$

$$+(m-1)(m-2)(n-2)(\lambda\mu\mu'+\frac{1}{2}\mu^2\lambda')$$

$$+(m-1)n(n-1)(n-2)(\lambda\lambda'\alpha+\frac{1}{2}\lambda^2\alpha')$$

$$+(n-1)m(m-1)(m-2)(\mu\mu'\alpha+\frac{1}{2}\mu^2\alpha')$$

$$+\frac{1}{2}(m-2)(n-2)(2mn-m-n)(\lambda\mu'\alpha+\lambda'\mu\alpha+\lambda\mu\alpha')$$

$$+\left\{\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)m(m-2)+\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)\right\}(\alpha^2\lambda'+2\alpha\alpha'\lambda)$$

$$+\left\{\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)n(n-2)+\frac{1}{3}m(m-1)(m-2)\right\}(\alpha^2\mu'+2\alpha\alpha'\mu)$$

$$+\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)n(n-1)(n-2)\alpha^2\alpha'.$$

257. W następującem zagadnieniu zamierzamy dojść, ile punktów przecięcia spólnego kilku kształtów zawiera ich linia spólnego przecięcia, jeżeli takowa istnieje. Nazywamy rzędem i rangą powierzchni, rzęd i rangę krzywej wynikającej z przecięcia powierzchni danej z kształtem pierwszego stopnia. Weźmy przypadek pięciu zmiennych niezależnych; układ trzech z pomiędzy nich stanowi powierzchnią; rzędy pojedynczych zrównań są λ, μ, ν, rzęd zaś powierzchni $\lambda\mu\nu$, a jej ranga $\lambda\mu\nu(\lambda+\mu+\nu)$, i są to ilości otrzymane przez połączenie zrównań danych ze zrównaniem dodatkowem pierwszego stopnia.

Kształty w liczbie $k-1$ mają spólną powierzchnią rzędu α i rangi β, i zwykle po za nią krzywą uzupełniającą dopiero co znalezionego rzędu. Gdyż dołączywszy do kształtu danego inne ilości stopnia pierwszego, otrzymujemy k kształtów mających krzywę spólną, a przecinających się po za nią w $lmnr-\alpha(l+m+n+r)=\beta$ punktach. Lecz są to właśnie punkta w których kształt pierwszego stopnia przecina krzywą uzupełniającą, a więc jest to rzęd tej krzywej.

258. Szukajmy z kolei liczby punktów przecięć powierzchni danej z uzupełniającą krzywą. Niech U, V, W, Y,

będą formy

$$\begin{aligned} Au &+ Bv + Cw = 0, \\ A'u &+ B'v + C'w = 0, \\ A''u &+ B''v + C''w = 0, \\ A'''u &+ B'''v + C'''w = 0 \end{aligned}$$

Punkta ogólne U, V, W, Y, a nie czyniące $u = v = w = 0$, sprawdzą układ wyznaczników

$$\left\| \begin{matrix} A, & A', & A'', & A''' \\ B, & B', & B'', & B''' \\ C, & C', & C'', & C''' \end{matrix} \right\| = 0.$$

A jest rzędu $l - \lambda$, B rzędu $l - \mu$, A' rzędu $m - \lambda, \ldots$; rzęd warstwy wyznaczników (242) będzie $Q - pP + p_2$, gdzie P jest summą ilości l, m, n, r, Q summą iloczynów tych ilości po dwie branych, $p = \lambda + \mu + \nu$, $p_2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda$. Kombinując układ wyznaczników równoważny dwom warunkom, z $k - 2$ warunkami stanowiącemi powierzchnią, otrzymamy punkta spólne tejże z krzywą uzupełniającą; ich liczba równa się rzędowi układu wyznaczników rozmnożonemu przez $\lambda\mu\nu$. Pisząc więc $\lambda\mu\nu$ za α, $\lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu)$ za β i uczyniwszy

$$\lambda\mu\nu(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) = \gamma,$$

otrzymamy

$$i = \alpha Q - \beta P + \gamma.$$

Ilość tę nazwiemy *klassą* powierzchni.

259. Przybierzmy kształt uzupełniający Z, zawierający także powierzchnią daną, i szukajmy ile punktów nie leżących na

niej są spólnemi wszystkim k kształtom. Będą to widocznie punkta przecięcia Z z uzupełniającą krzywą, zmniejszone liczbą punktów przecięcia tej ostatniej z powierzchnią. Oznaczmy przez $l, m, n, r, s,$ rzędy kształtów, a otrzymamy liczbę szukaną biorąc

$$s\{lmnr - \alpha(l+m+n+r)+\beta\},$$

i odciągając

$$\alpha(lm+ln+mn+lr+mr+nr)-\beta(l+m+n+r)+\gamma.$$

Wypadek szukany będzie ostatecznie

$$lmnrs - \alpha Q + \beta P - \gamma.$$

260. Rozważmy jeszcze przypadek w którym układ kształtów danych posiada nietylko spólną powierzchnią oznaczoną przez α, β, γ, lecz i spólną krzywą oznaczoną przez α', β', a przecinającą powierzchnią w i punktach. Weźmy jak poprzednio $k-1$ kształtów. Ich przecięcie składa się z powierzchni i z krzywej uzupełniającej rzędu

$$lmnr - \alpha(l+m+n+r)+\beta.$$

Krzywa uzupełniająca może jeszcze być złożoną, na przykład z krzywej α', i z innej rzędu α'', a dla której

$$\alpha'' = lmnr - \alpha(l+m+n+r)+\beta-\alpha'.$$

Punkta przeto, których szukamy otrzymują się odciągając od $\alpha''s$ punktów przecięcia krzywej α'' z jednym z pozostałych kształtów układu o k kształtach, ilość $\delta+\delta'$, w której δ oznacza liczbę punktów spotkania krzywej α'' z powierzchnią $(\alpha\beta\gamma)$, δ'

zaś liczbę punktów spotkania krzywej α'' z krzywą α'. Lecz mamy δ znając (258) liczbę punktów spotkania powierzchni z całą krzywą uzupełniającą; mamy przeto

$$\delta + i = \alpha(lm + ln + \ldots) - \beta(l + m + n + r) + \gamma;$$

znamy zaś δ' znając (250) liczbę punktów spotkania krzywej α' z całą krzywą uzupełniającą; mamy znowu

$$\delta' + 2i = \alpha'(l + m + n + r) - \beta'.$$

Te wartości na δ i δ' wstawiając w $\alpha''s - \delta - \delta'$ przyjdzie

$$lmnrs - \alpha Q + \beta P - \gamma - \alpha' P + \beta' + 3i;$$

innemi słowy, zmniejszenie liczby $lmnrs$ pochodzące tak od krzywej jak od powierzchni, będzie równe summie zmniejszeń osobno przez krzywą i przez powierzchnią spowodowanych, po dodaniu do tej ilości $3i$, to jest liczby spólnych krzywej i powierzchni punktów.

261. Wypadek ten stwierdzić można przypuszczając że jeden z kształtów danych na przykład $Z'Z''$ jest złożonym, tak że Z' (potęgi s') zawiera spólną powierzchnią, a Z'' (potęgi s'') spólną krzywą. Kształty U, V, W, Y, Z', mają (259) po za powierzchnią spólne punkta w ilości

$$lmnrs' - \alpha\{s'(l + m + \ldots) + lm + mn + \ldots\} + \beta(s' + l + m + \ldots) - \gamma.$$

Między niemi znajduje się $\alpha's'$ punktów spotkania spólnej krzywej z Z', po odtrąceniu jednakże i punktów spólnych krzywej z powierzchnią. Liczba przeto punktów spotkania się UVWYZ' nie leżących ani na krzywej ani na powierzchni wywodzi się z ilości $\alpha's' - i$.

Weźmy przecięcia U, V, W, Y, Z'; tworzą one układ kształtów mających dwie spólne krzywe przecinające się w i punktach; krzywe te są: α' i krzywa przecięcia spólnej powierzchni z Z'', będącą rzędu $\alpha s''$, i rangi $\alpha s''(\lambda + \mu + \nu + s'')$. Liczba punktów UYWYZ'' nie leżących ani na krzywej ani na powierzchni będzie:

$$lmnrs'' - (\alpha' + \alpha s'')(l + m + n + r + s'') + \beta'$$
$$+ \alpha s''(\lambda + \mu + \nu + s'') + 2i.$$

Dodajmy i uczyńmy $s' + s'' = s$, a przyjdzie jak w ostatnim paragrafie

$$lmnrs - \alpha Q + \beta P - \gamma - \alpha' P + \beta' + 3i.$$

262. Przypuśćmy jeszcze że kształty dane mają dwie powierzchnie spólne, przecinające się w i punktach. Metoda której użyjemy i do większej liczby powierzchni da się zastosować. Niech kształt ostatni składa się z Z' i Z'', z których Z' przechodzi przez pierwszą, a Z'' przez drugą powierzchnią. Układ U, V, W, Y, Z' posiada spólną powierzchnią $\lambda\mu\nu$ i krzywą $\lambda'\mu'\nu's'$, mające i spólnych punktów, a przecina się w następującej liczbie punktów nie leżących na żadnej z nich:

$$lmnrs' - \lambda\mu\nu\{(l + m + n + r)s' + lm + \ldots\}$$
$$+ \beta(l + m + n + r + s') - \gamma - \lambda'\mu'\nu's'(l + m + n + r + s')$$
$$+ \lambda'\mu'\nu's'(\lambda' + \mu' + \nu' + s') + 3i.$$

Podobnież punkta spólne U, V, W, Y, Z'', są w liczbie

$$lmnrs'' - \lambda\mu\nu s''(l + m + n + r + s'') + \lambda\mu\nu s''(\lambda + \mu + \nu + s'')$$
$$- \lambda'\mu'\nu'\{(l + m + n + r)s'' + lm + \ldots\}$$
$$+ \beta'(l + m + n + r + s'') + 3i.$$

Co dodawszy przyjdzie

$$lmnr(s'+s'')-(\lambda\mu\nu+\lambda'\mu'\nu')\{(l+m+n+r)(s'+s'')+lm+\ldots\}$$

$$+(\beta+\beta')(l+m+n+r+s'+s'')-\gamma-\gamma'+6i.$$

Innemi słowy, wpływ dwóch powierzchni razem wziętych, równa się summie wpływów tychże powierzchni pojedynczo uważanych, a zmniejszonej sześć razy wziętą liczbą ich spólnych punktów. Chociaż tylko cztery zmienne mamy, powierzchnie posiadają jednak punkta przecięcia.

263. Przypuśćmy nareszcie że dwie spólne układowi powierzchnie mają spólną krzywą rzędu α'', a rangi β''. Postępując jak w poprzedzającym paragrafie, znajdziemy że układ $UVWYZ'$ posiada spólną powierzchnią $\lambda\mu\nu$ i spólną krzywą $\lambda'\mu'\nu's$. Lecz że krzywa jest złożoną i że jej część α'', β'', leży na powierzchni, więc tylko powinniśmy zwracać uwagę na krzywą uzupełniającą rzędu $\lambda'\mu'\nu's$, rangi

$$\beta''+(\lambda'\mu'\nu's'-z\alpha'')(\lambda'+\mu'+\nu'+s'),$$

a przecinającą α'', β'' w punktach których liczba,

$$\alpha''(\lambda'+\mu'+\nu'+s')-\beta''.$$

Liczba przecięć jest więc

$$lmnrs'-\lambda\mu\nu\{(l+m+n+r)\nu''+lm+\ldots..\}$$

$$+\beta(l+m+n+r+s'')-\gamma-(\lambda'\mu'\nu's'-\alpha'')(l+m+n+r+s')$$

$$+\beta''+(\lambda'\mu'\nu's'-2\alpha'')(\lambda'+\mu'+\nu'+s')$$

$$+3\alpha''(\lambda'+\mu'+\nu'+s')-3\beta''.$$

Podobnież liczba przecięć UVWYZ' jest

$$lmnrs'' - \lambda'\mu'\nu'\{(l+m+n+r)s'' + lm + \ldots\}$$

$$+\beta'(l+m+n+r+s'') - \gamma' - (\lambda\mu\nu s'' - \alpha'')(l+m+n+r+s'')$$

$$+\beta'' + (\lambda\mu\nu s'' - 2\alpha'')(\lambda+\mu+\nu+s'')$$

$$+3\alpha''(\lambda+\mu+\nu+s'') - 3\beta''.$$

Dodawszy przyjdzie

$$lmnr(s'+s'') - (\lambda\mu\nu + \lambda'\mu'\nu')\{(l+m+n+r)(s'+s'') + lm + \ldots\}$$

$$+(\beta+\beta'+2\alpha'')(l+m+n+r+s'+s'')$$

$$-\gamma - \gamma' + \alpha''(\lambda+\mu+\nu)(\lambda'+\mu'+\nu') - 4\beta''.$$

Czyli innemi wyrazy, dwie powierzchnie stanowią powierzchnią złożoną, rzędu równego summie rzędów powierzchni składowych, rangi równej summie ich rang zwiększonej dwa razy wziętym rzędem spólnej krzywej, a klassy równej summie ich klass zwiększonej cztery razy wziętą rangą spólnej krzywej, a zmniejszonej ilością $\alpha''(\lambda+\mu+\nu+\lambda'+\mu'+\nu')$.

Pominęliśmy wiele przypadków, mianowicie ten w którym powierzchnie dotykają się w punktach lub wzdłuż krzywej. Przypadki rozebrane pozwalają nam obliczyć rzęd kategoryi wyznaczników w których liczba kolumn jest większą o trzy od liczby linij. Biorąc cztery wyznaczniki tego układu znajdujemy spólną powierzchnią, której rzęd, ranga i klassa, dadzą rzęd układu.

264. Rozwiążmy teraz zagadnienie: jak znaleźć rzęd układu warunków potrzebnych aby trzy potrójne kształty miały dwa punkta spólne. Metoda której użyjemy podaną została przez

p. Cayley do rugowania trzech ze trzech zrównań o trzech zmiennych (75). Weźmy trzy zrównania stopni l, m, n; rozmnóżmy pierwsze przez wszystkie wyrazy $x^{m+n-3}, yx^{m+n-4}, \ldots$ zrównania stopnia $m+n-3$, drugie przez wszystkie wyrazy zrównania stopnia $n+l-3$, a trzecie przez wszystkie wyrazy zrównania stopnia $l+m-3$. Otrzymamy

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+\frac{1}{2}(n+l-1)(n+l-2)$$

$$+\frac{1}{2}(l+m-1)(l+m-2)$$

zrównań stopnia $l+m+n-3$, z których wyrugować trzeba

$$\frac{1}{2}(l+m+n-1)(l+m+n-2)$$

wyrazów $x^{l+m+n-3}, \ldots$. Widzieliśmy na właściwem miejscu, że zrównania te nie są niezależne, lecz że je łączy

$$\frac{1}{2}(l-1)(l-2)+\frac{1}{2}(m-1)(m-2)+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

związków. Odciągnijmy tę liczbę, a ilość zrównań niezależnych będzie o jedność mniejszą od liczby wielkości które rugować mamy; odnosi się to do przypadku (242) w którym liczba kolumn przewyższa o jedność liczbę linij. Lecz widzieliśmy (74) że w razie pewnej liczby zrównań połączonych danemi związkami, wyznaczniki utworzone z dostatecznej liczby zrównań, powinny być zmniejszone podzieleniem przez obce czynniki, będące wyznacznikami utworzonemi ze spółczynników związków danych. Jeżeliśmy w obecnym razie, wzięli dostateczną ilość zrównań i oznaczyli rzęd wedle prawa w paragrafie 242 podanego, to wypadek otrzymany należy zmniejszyć przez liczbę, której wyznaczenie zajmie nas obecnie.

265. Zacznijmy od najprostszego przypadku, biorąc k zrównań połączonych jednym związkiem, a mających k zmiennych; w szczególności napiszmy układ o trzech liniach

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} a, & b, & c & \lambda \\ a', & b', & c' & \lambda' \\ a'', & b'', & c'' & \lambda'' \end{array} \right\|,$$

którego ilości łączą związki

$$\lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' = 0, \quad \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' = 0$$

$$\lambda c + \lambda' c' + \lambda'' c'' = 0.$$

Przpuszczamy nadto że λa, $\lambda' a'$, $\lambda'' a''$, są jednego rzędu, czyli

$$\lambda + a = \lambda' + a' = \lambda'' + a''.$$

Przypuśćmy teraz że dwa pierwsze zrównania są najprostszej formy i że $\lambda'' = -1$. Prawdziwy rzęd dadzą dwa pierwsze zrównania, czyli oznaczając rzędy jak w paragrafie 242 otrzymamy

$$Q + P(\alpha + \beta) + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta.$$

Opuśćmy teraz pierwszą linię, a druga i trzecia dadzą

$$Q + P(\beta + \gamma) + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma.$$

Ilość ta dla dania rzeczywistego rzędu powinna być zmniejszoną przez

$$(\gamma - \alpha)(P + \alpha + \beta + \gamma),$$

czyli przez rzęd iliści λ rozmnożony przez rzęd wyznacznika otrzymanego ze trzech zrównań danych.

Przychodzimy ztąd do ogólnego prawidła: opuść jedną z linij, znajdź według paragrafu 242 wyznacznik pozostałego układu, a od tak otrzymanej liczby odciągnij rzęd wyznacznika utworzonego ze wszystkich zrównań a pomnożonego przez rzęd wyrazu kolumny, należącego w związku danym do opuszczonej linii. Łatwo sprawdzić, że ten sam otrzymamy wypadek, jakąkolwiekbyśmy opuścili linię. Ponieważ $\lambda - \lambda''\gamma = \alpha$, przeto

$$Q + P(\alpha + \beta) + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \lambda''(P + \alpha + \beta + \gamma)$$

$$= Q + P(\beta + \gamma) + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma - \lambda(P + \alpha + \beta + \gamma).$$

Gdzie uczyniwszy $\lambda + \alpha$, $\lambda' + \beta$ i $\lambda'' + \gamma = 0$, otrzymamy wypadek symetryczny

$$Q + P(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta$$

$$- A(P + \alpha + \beta + \gamma),$$

albo:

$$Q + Pp + p^2 - q - A(P + p).$$

266. A w ogóle jeżeli istnieje pewna liczba kolumn wyrażających związki, to przez postępowanie podobne przyjdziemy łatwo do prawidła: niech wyrazy kolumn tych będą $\lambda, \lambda', \lambda'',\ldots, \mu, \mu', \mu'',\ldots, \nu, \nu' \nu'',\ldots,$ przyjść musi

$$\lambda + \alpha = \lambda' + \beta',\ldots,\ \mu + \alpha = \mu' + \beta',\ldots,\ \nu + \alpha = \nu' + \beta',\ldots$$

Niech dalej A, B, C, oznaczaią spólne wartości tych summ, P′ i Q′, 1° summę ilości, 2° summy iloczynów parami branych z ilości A, B, C; rzęd układu będzie

$$Q + Pp + p^2 - q - P'(P + p) + Q.$$

Wypadek ten może być stwierdzonym drugą która może prowadzić do odpowiedzi na pytania dotyczące rzędu układu zrównań. W naszym przykładzie, całkowita liczba kolumn, wraz z kolumnami zawierającemi związki, przenosi o jedność liczbę linij, a rzędu układu dostarczy nam prawidło paragrafu 242, jeżeli rzędom kolumn zawierającym związki, nadamy znak mniej. Podobnież, jeżeli liczba jednych i drugich kolumn, równą jest liczbie rzędów, układ, wedle twierdzenia P. Cayley, wyobraża wyznacznik tego samego rzędu, jakibyśmy otrzymali przy obliczaniu rzędu całego układu uważanego za wyznacznik w którymby rzędy kolumn wyrażających związki, miały znak mniej. Nie ulega wątpliwości że w układzie mającym ilość kolumn większą o dwa od ilości linij, rzęd układu znajdziemy przez podaną modyfikacyę prawidła paragrafu 257.

267. Zastosujmy wreszcie dopiero co otrzymane prawidło, do zagadnienia paragrfu 264. Przypuszczamy że w trzech potrójnych kształtach, spółczynniki najwyższych potęg x, czyli x^l, x^m, x^n są λ, μ, ν; spółczynniki $x^{l-1}y$, $x^{l-1}z$,..., rzędów $\lambda + \alpha$, $\lambda + \alpha'$,... i tak dalej, tak że dla potęg y o jedność wzrastających rzęd rośnie o α, a dla takichże potęg z o ilość α'. Gdyż wyrazy pierwszej kolumny składają się z:

1° $\frac{1}{2}(m + n - 1)(m + n - 2)$ wyrazów mających rzędy:

λ; $\lambda - \alpha$, $\lambda - \alpha'$; $\lambda - 2\alpha$, $\lambda - \alpha - \alpha'$, $\lambda - 2\alpha'$;...;

2° $\frac{1}{2}(n + l - 1)(n + l - 2)$ wyrazów mających rzędy,

μ, $\mu - \alpha$ $\mu - \alpha'$,...; i

3° $\frac{1}{2}(l+m-1)(l+m-2)$ podobnych wyrazów w ν.

A mogą być one wzięte za liczby α, β, γ,... (242). Liczby a, b, c,.., zacytowanego paragrafu są obecnie: 0, α, α', 2α, $\alpha+\alpha'$, $2\alpha'$...; a będzie $\frac{1}{2}(l+m+n-1)(l+m+n-2)$, podobnych wyrazów. Wreszcie znaleźliśmy że liczby A, B, C,... ostatniego paragrafu składają się z $\frac{1}{2}(l-1)(l-2)$ wyrazów $\mu+\nu$, $\mu+\nu-\alpha$, $\mu+\nu-\alpha'$, z $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ i $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ odpowiedniemi wyrazami w $\nu+\lambda$ i $\lambda+\mu$. Przy obliczaniu uznałem za stosowne zamienić formę paragrafu 266 na

$$\frac{1}{2}\{(P+p-P')^2-(S_2+S'_2-s_2)\},$$

gdzie S_2 oznacza summę kwadratów z wyrazów a, b, c, ... Jeżeli,

$$\varphi(\lambda)=Al^4+Bl^3+Cl^2+Dl+E,$$

to przyjdzie

$$\varphi(l+m+n)+\varphi(l)+\varphi(m)+\varphi(n)-\varphi(l+m)$$

$$-\varphi(m+n)-\varphi(n+l)$$

$$=12Almn(l+m+n)+6Blmn+E.$$

Przyszliśmy przeto do wypadku że rzęd układu jest

$$\frac{1}{2}mn(mn-1)\lambda^2 + \frac{1}{2}nl(nl-1)\mu^2 + \frac{1}{2}lm(lm-1)\nu^2$$

$$+\left\{(nl-1)(lm-1)-\frac{1}{2}(l-1)(l-2)\right\}\mu\nu$$

$$+\left\{(lm-1)(mn-1)-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)\right\}\nu\lambda$$

$$+\left\{(nl-1)(nm-1)-\frac{1}{2}(n-1)(n-2\right\}\lambda\mu$$

$$+\, mn\lambda\left\{lmn-l+1-\frac{1}{2}(m+n)\right\}(\alpha+\alpha')$$

$$+\, nl\mu\left\{lmn-m+1-\frac{1}{2}(n+l)\right\}(\alpha+\alpha')$$

$$+\, lm\nu\left\{lmn-n+1-\frac{1}{2}(l+m)\right\}(\alpha+\alpha')$$

$$+\frac{1}{2}lmn(lmn-l-m-n+2)(\alpha^2+\alpha'^2)$$

$$+\frac{1}{2}lmn(2lmn-l-m-n+1)\alpha\alpha.$$

Jeżeli rzęd wszystkich tych wyrazów w pierwszem zrównaniu jest λ, w drugiem μ, w treciem ν, to należy uczynić $\alpha=\alpha'=0$ w poprzedzającej formule. Przypuściwszy nadto $\lambda=\mu=\nu=1$ i $l=m=n$, da ona na rzęd szukany

$$\frac{9}{2}n(n-1)(n^2+n-1).$$

ROZDZIAŁ XVII

ZASTOSOWANIA SYMBOLICZNYCH METOD.

268. Rozdział ten będzie uzupełnieniem dwunastego. Pragniemy zbadać, o ile wyłożone tamże symboliczne znakowanie dostarcza metody rachunku, za pomocą którego niezmienniki i spółzmienniki przeobrażone być mogą, a tożsamość różnych wyrażeń udowodnioną. Podstawą naszych poszukiwań w odniesieniu do kształtów podwójnych jest zrównanie które w tej chwili podamy. Dajmy że

$$D_1 = x\frac{d}{dx_1} + y\frac{d}{dy_1},$$

i jak poprzednio

$$\overline{12} = \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}$$

a łatwo sprawdzimy formułę

$$D_1\overline{23} + D_2\overline{31} + D_3\overline{12} = 0, \ldots\ldots (A),$$

gdyż w razie rozwinięcia spółczynniki x i y spółcześnie stają się zerami. Dla wykazania użyteczności tego zasadniczego zrównania, przy pierwszem jego zastosowaniu wejdziemy w szczegóły, które byłyby zbytecznemi przy dalszych przykładach.

Zrównanie A da się napisać

$$D_1\overline{23} = D_2\overline{13} - D_3\overline{12};$$

podnosząc je do kwadratu przyjdzie

$$2D_2D_3\overline{12}\,.\,\overline{13} = D_2^2\overline{13}^2 + D_3^2\overline{12}^2 - D_1^2\overline{23}^2; \;.\;.\;(B).$$

W tej formie, zrównanie jest prawdziwem nawet gdy funkcye U_1, U_2, U_3, na których działamy, zupełnie są między sobą co do formy różnemi. Lecz przypadek który nas wyłącznie w obecnym zajmuje rozdziale, zasadza się na tworzeniu pochodnych pojedyńczej funkcyi U, względem której U_1, U_2, U_3, stają się równemi przez proste zmazanie wskaźników. A w tym przypadku widzieliśmy (133), że

$$D_1^2.\overline{23}^2, \quad D_2^2.\overline{31}^2, \quad D_3^2.\overline{12}^2,$$

są różnemi tej samej rzeczy wyrażeniami. Ztąd zrównanie B staje się

$$D_3^2.\overline{12}^2 = 2D_2D_3\overline{12}\,.\,\overline{13}.$$

Podług twierdzenia o funkcyach jednorodnych, działanie jakieśmy na D odbyli, zastosowane do innych funkcyi, tylko na ich liczby wpłynie czynnik. Po lewej stronie zrównania, ponieważ D_3^2 wywiera wpływ tylko na U_3 i przeto nie było gdzieindziej różniczkowanem, $n(n-1)$ będzie mnożnikiem; po prawej zaś stronie, każda z ilości D_2, D_3, wpływa na funkcye które raz różniczkowanemi były, a ztąd wprowadzają czynnik $(n-1)$. W następstwie jeżeli rozwiniemy zrównanie

$$2D_2D_3\overline{12}\,.\,\overline{13} = D_3^2\overline{12}^2,$$

opuszczając wskaźniki i dzieląc obie strony przez $2(n-1)$, to otrzymamy

$$(n-1)\left\{\frac{d^2U}{dx^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 - 2\,\frac{d^2U}{dxdy}\frac{dU}{dx}\frac{dU}{dy} + \frac{d^2U}{dy^2}\left(\frac{dU}{dx}\right)^2\right\}$$

$$= nU\left\{\frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^2U}{dy^2} - \left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)^2\right\}.$$

269. Zauważyć należy, że jeżeli przy przeobrażeniu, ilość znaków symbolicznych zmniejszy się w symbolu, będzie to dowodem że sam kształt U wchodzi do pochodnych jako czynnik. I tak w obranym przykładzie dowiedliśmy że $\overline{12}.\overline{13}$ tylko liczebnym czynnikiem różni się od $\overline{12}^{2}$. Lecz że działamy na iloczynie $U_1U_2U_3$ i że $\overline{12}^{2}$ nie wchodzi wcale do U_3, przeto mimo zmazania wskaźników, U nie przestanie być czynnikiem.

270. W ogóle są symbole tak się przeobrażać dające że najwyższa potęga czynników niektórych jak $\overline{12}$ parzystą zostanie. Gdyż znaczenie symbolu nie ulega zmianie przez wzajemną między sobą zmianę figur 1 i 2. Ztąd

$$\overline{12}^{2m+1}\varphi_1 = -\overline{12}^{2m+1}\varphi_2 = \frac{1}{2}\,\overline{12}^{2m+1}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

a przy pomocy zrównania A, ilość $\varphi_1 - \varphi_2$, tak przeobrażoną być może, aby się stała podzielną przez $\overline{12}$. Na przykład, pochodna parzysta $\overline{12}^{m}.13$ tylko o liczebny czynnik różni się od $\overline{12}^{m+1}$. Gdyż

$$2D_2\overline{12}^{m}.13 = \overline{12}^{m}\left\{D_2\overline{13} - D_1\overline{23}\right\} = D_3\overline{12}^{m+1},$$

a jeżeli n jest stopniem U, na którym odbywaliśmy działanie, przyjdzie

$$2(n-m)\overline{12}^{m}.\overline{13}=n(12)^{m+1}.$$

271. Prócz równania tożsamości i owego podanego wyżej, używamy jeszcze zrównania łatwego do sprawdzenia :

$$\overline{12}.\overline{34}+\overline{13}.\overline{42}+\overline{14}.\overline{23}=0. \;.\;.\;.\;.\; (C).$$

Za pomocą tych zrównań, możemy przywieść wszystkie symbole do pewnej liczby chorągwi kształtu; dla dwóch czynników formą taką będzie Hessowy $\overline{12}^2$, który nazwiemy H; dla trzech $\overline{12}^2.\overline{13}$, oddawna (13[6]) oznaczone przez G; dla trzech czynników $\overline{12}^4=S(195)$; dla pięciu $\overline{12}^4.\overline{13}=F$ albo $\overline{12}^2.\overline{13}.\overline{45}^2=GH$; dla sześciu $\overline{12}^6=A$, (229), albo $\overline{12}^2.\overline{34}^2.\overline{56}^2=H^3$, etc. Następujące przykłady pokażą jak się wykonywają skrócenia te.

272. Pierwsze przykłady dane, objaśnić mają następujące twierdzenie : « Wypadek podstawienia w funkcyą U, i $\frac{dU}{dy}$ za x, i $-\frac{dU}{dx}$ za y, jest spółzmiennikiem, zawsze przez U podzielnym. » A nasamprzód wyraźmy symbolicznie w mowie będący spółzmiennik. Funkcya dana da się napisać $\left(x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}\right)^n U$. Jeżeli uczynimy zamierzoną zmianę, każdy z n czynników działających na U przybierze postać $\frac{d}{dx}\frac{d}{dy_2}-\frac{d}{dy}\frac{d}{dx_2}$, a spółzmiennik nasz $\frac{d^nU}{dx^n}\left(\frac{dU}{dy}\right)^n-\ldots$ wyrazi się

symbolicznie jako iloczyn n czynników $\overline{12}.\overline{13}.\overline{14}\ldots$ Jeden symbol (ten który daje $n^{\text{tą}}$ różniczką w razie rozwinięcia iloczynu) pozostaje niezmiennym dla każdego czynnika; inny znowu symbol zmienia się w każdym czynniku, a to dla tego, abyśmy po dokonaniu mnożenia, mogli mieć same potęgi pierwszych różniczek. Napiszmy $\overline{12}.\overline{13}=Q_2$, $\overline{12}.\overline{13}.\overline{14}=Q_3$, i wyraźmy Q_3 w chorągwi kształtu; Q_2 już było obliczonem.

PRZYKŁAD I. — Obliczyć $Q^3=\overline{12}.\overline{13}.\overline{14}$. Pomnóżmy zrównanie B przez $\overline{14}$; pierwsze dwa wyrazy po prawej ręce, stają się równemi, ponieważ ostatni równy zeru, i mamy

$$D_2D_3\overline{12}.\overline{13}.\overline{14}=D_2^2\overline{13}^2\,\overline{14},$$

albo:

$$(n-1)Q_3=nGU.$$

W ogóle każdy symbol może być sprowadzonym do formy bardziej skupionej przez podstawienie za każdą parę pojedyńczych czynników mających spólną figurę, jak na przykład $\overline{12}.\overline{13}$, ich wartości ze zrównania B, i tym sposobem wyrażając symbol dany w funkcyi innych symbolów, w którym ta para czynników jest zastąpioną przez pojedyńczy kwadratowy czynnik.

PRZYKŁAD II. — Obliczmy $Q_4=\overline{12}.\overline{13}.\overline{14}.\overline{15}$. Pomnóżmy spółcześnie

$$2D_2D_3\overline{12}.\overline{13}=D_3^2\overline{12}^2+D_2^2\overline{13}^2-D_1^2\overline{23}^2,$$

$$2D_4D_5\overline{14}.\overline{15}=D_5^2\overline{14}^2+D_4^2\overline{15}^2-D_1^2\overline{45}^2,$$

skróćmy wyrazy podobne, będzie

$$4(n-1)^4Q_4=D_1^4\overline{23}^2.\overline{45}^2-4D_1^2D_3^2\overline{12}^2.\overline{45}^2+4D_3^2D_5^2\overline{12}^2.\overline{14}^2$$

$$=-3n(n-1)(n-2)(n-3)H^2U+4n^2(n-1)^2U^2\,\overline{12}^2.\overline{13}^2.$$

Pozostaje przywieść do chorągwi kształtu. Podnieśmy do czwartej potęgi $D_1\overline{23} = D_2\overline{13} - D_3\overline{12}$ i zbierzmy wyrazy podobne, a otrzymamy :

$$6D_2^2 D_3^2 \overline{12}^2 . \overline{13}^2 = 8D_3^3 D_2 \overline{13}^3 . \overline{13} - D_3^4 \overline{12}^4 .$$

Lecz w paragrafie 270

$$8D_3^3 D_2 \overline{12}^3 . \overline{13} = 4D_3^4 \overline{12}^4$$

ztąd

$$2(n-2)(n-3)\left(\overline{12}^2 . \overline{13}^2\right) = n(n-1)\mathrm{SU}.$$

Zkąd inąd, Algebra elementarna uczy nas że zrównanie $a + b + c = 0$ pociąga za sobą

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0.$$

Ztąd zrównanie daje :

$$D_1^4 \overline{23}^4 + D_2^4 \overline{31}^4 + D_3^4 \overline{12}^4 - 2D_1^2 D_2^2 \overline{31}^2 . \overline{23}^2 - 2D_2^2 D_3^2 \overline{31}^2 . \overline{12}^2$$
$$- 2D_3^2 D_1^2 \overline{12}^2 . \overline{23}^2 = 0 \; ; \; \ldots\ldots \; (\mathrm{D})$$

a więc jak poprzednio

$$2D_2^2 D_3^2 \overline{12}^2 . \overline{13}^2 = D_3^4 \overline{12}^4 .$$

Będzie przeto

$$4(n-1)^4(n-2)(n-3)Q_4$$
$$= -3n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2\mathrm{UH}^2 + 2n^3(n-1)^3\mathrm{U}^3\mathrm{S}.$$

Łatwo spostrzedz że jeżeli w symbol $\overline{12} . \overline{13} . \overline{14} . \overline{15} \ldots\ldots$ podstawimy za każdą parę czynników $\overline{12} . \overline{13}$ wartości ze zrównania B, to zmniejszy się liczba figur wchodzących w symbol, a więc okaże się że U jest czynnikiem. Wartości Q_5 i Q_6 obliczone zostały w *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (Tom 9, str. 23).

PRZYKŁAD III. — Skróćmy $\overline{12}^4 . \overline{13}^2$. Pomnóżmy zrównanie D przez $\overline{12}^2$; przyjdzie

$$2D_2^4\overline{13}^4 . \overline{12}^2 + D_3^4\overline{12}^6 = 2D_1^2 D_2^3\overline{12}^2 . \overline{23}^2 . \overline{31}^2 + 4D_2^2 D_3^2\overline{12}^4 . \overline{13}^2,$$

albo

$$2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\left(\overline{12}^4 . \overline{13}^2\right) = n(n-1)(n-2)(n-3)AU$$
$$-2(n-4)^2(n-5)^2T.$$

PRZYKŁAD IV. — Skróćmy $\overline{12}^2 . \overline{13}^2 . \overline{14}^2$. Pomnóżmy trzy zrównania

$$2D_2D_3\overline{12} . \overline{13} = D_3^2\overline{12}^2 + D_2^2\overline{13}^2 - D_1^2\overline{23}^2,$$

$$2D_3D_4\overline{13} . \overline{14} = D_4^2\overline{13}^2 + D_3^2\overline{13}^2 - D_1^2\overline{34}^2,$$

$$2D_4D_2\overline{14} . \overline{12} = D_2^2\overline{14}^2 + D_4^2\overline{12}^2 - D_1^2\overline{24}^2;$$

zbierzmy wyrazy podobne i skróćmy

$$6D_2^2D_4^2D_6^2\overline{12}^2 . \overline{13}^2 . \overline{14}^2 = -4D_4^6\overline{12}^2 . \overline{23}^2 . \overline{31}^2 - 3D_1^2D_2^2D_3^2\overline{14}^4 . \overline{23}^2$$
$$+ 6D_3^2D_4^4\overline{12}^4 . \overline{13}^2.$$

Zrównanie to daje nam $\overline{12}^2 . \overline{13}^2 . \overline{14}^2$, ponieważ obliczyliśmy $\overline{12}^4 . \overline{13}^2$.

PRZYKŁAD V. — Skróćmy $\overline{12}^2 . \overline{13}^2 . \overline{34}^2$. Możemy, albo mnożąc zrównanie D^2 przez 34^2 otrzymać wyrażenie na obchodzącą nas pochodną funkcyi $\overline{12}^4.\overline{13}^2$ i $\overline{12}^2.\overline{13}^2.\overline{14}^2$, wyrażenie które już obliczyliśmy, albo postępować jak następuje: pomnóżmy przez $\overline{14}^2$ iloczyn ilości

$$2D_2D_3\overline{12}.\overline{13} = D_3^2\overline{12}^2 + D_2^2\overline{13}^2 - D_1^2\overline{23}^2;$$

$$2D_2D_3\overline{24}.\overline{34} = D_3^2\overline{24}^2 + D_2^2\overline{34}^2 - D_4^2\overline{23}^2;$$

a otrzymamy

$$4D_2^2D_3^2\overline{12}.\overline{13}.\overline{24}.\overline{34}.\overline{14}^2 = 2D_3^4\overline{12}^2.\overline{24}^2.\overline{41}^2 + D_1^2D_4^2\overline{23}^4.\overline{14}^2$$
$$- 2D_2^2D_4^2\overline{14}^2.\overline{13}^2.\overline{23}^2.$$

Zrównanie C daje

$$2.\overline{14}^2\left(\overline{12}.\overline{13}.\overline{24}.\overline{34}\right) = \overline{14}^2\left(\overline{12}^2.\overline{34}^2 + \overline{13}^2.\overline{24}^2 - \overline{14}^2.\overline{23}^2\right),$$

przeto lewa strona poprzedniego zrównania staje się

$$4D_2^2D_3^2\overline{12}^2.\overline{14}^2.\overline{34}^2 - 2D_2^2D_3^2\overline{14}^4.\overline{23}^2,$$

skracając przyjdzie

$$6D_2^2D_3^2\overline{12}^2.\overline{14}^2.\overline{34}^2 = 3D_2^2D_3^2\overline{14}^4.\overline{23}^2 + 2D_3^4\overline{12}^2.\overline{24}^2.\overline{41}^2,$$

albo

$$6(n-2)(n-3)\overline{12}^2.\overline{14}^2.\overline{34}^2 = 3(n-2)(n-3)SH + 2n(n-1)TU.$$

273. Zastanowimy się teraz nad sposobem utworzenia symbolu wyrażającego pochodną pochodnej. Mając daną funkcyą

ilości x_1, x_2, x_3,..., widoczna że do tego samego przyjdziemy wypadku, czy to przemazując wskaźniki i różniczkując względem x czy to różniczkując względem x_1, x_2, x_3,..., a potem dopiero przemazując wskaźniki. Różniczka względem x symbolu pochodnego, zawierającego figury 1, 2, 3,... (np. $\overline{12}$, $\overline{13}$) otrzymuje się działając na symbol za pośrednictwem $\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2} + \frac{d}{dx_3} + \ldots$. Sposób wyrażania innych pochodnych, na szczegółowym przypadku objaśnimy, np. przy symbolicznem przedstawianiu Hessowego Hessowego. Przypomnieć należy że Hessowy powstaje z iloczynu U_1 przez tęż samą funkcyą U_2 z innych liter złożoną, na który działamy za pośrednictwem

$$(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2, \quad \text{zkąd} \quad \xi_1 = \frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2}, \quad \xi_2 = \frac{d}{dx_3} + \frac{d}{dx_4}, \ldots$$

A tak jasno widzimy że Hessowy Hessowego jest

$$\left(\overline{13}.\overline{14}.\overline{23}.\overline{24}\right)^2.\overline{12}^2.\overline{34}^2,$$

i że po rozwinięciu staje się

$$4\left(\overline{12}^2.\overline{13}^3.\overline{34}^2\right) + 4\left(\overline{12}^2.\overline{34}^2.13.34\right) + 8\left(13.14.\overline{12}^2.\overline{34}^2\right).$$

Za przykład zawilszy weźmiemy szukanie wyrażenia symbolicznego, oznaczającego uskutecznienie działania $\overline{12}^2.\overline{23}^2.\overline{31}^2$ na trzech funkcyach, z których pierwsza Hessowy $\overline{12}^2$, druga T albo $\overline{12}^2.\overline{23}^2.\overline{31}^2$, a trzecia samaż funkcya U. Gdyż szukać należy rozmaitych figur dla dwóch pochodnych, i dla tego to utworzylismy iloczyn $\overline{12}^2$ przez $\overline{34}^2 . \overline{45}^2 . \overline{53}^2$, i działali nań przez

$$(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)^2(\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)^2,$$

gdzie włożywszy $\dfrac{d}{dx_1} + \dfrac{d}{dx_2}$ za ξ_1; $\dfrac{d}{dx_3} + \dfrac{d}{dx_4} + \dfrac{d}{dx_5}$ za ξ_2; a $\dfrac{d}{dx_6}$ za ξ_3 otrzymamy po rozwiązaniu symbol szukany

$$\left(\overline{13} + \overline{14} + \overline{15} + \overline{23} + \overline{24} + \overline{25}\right)^2\left(\overline{36} + \overline{46} + \overline{56}\right)^2\left(\overline{16} . \overline{26}\right)^2$$

$$. \overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{45}^2 . \overline{53}^2 .$$

PRZYKŁAD. — Sprowadzić Hessowy Hessowego do formy $\alpha SH + \beta TU$ (207). Widzieliśmy (172, przykład 5) że $\overline{12}^2 . \overline{13}^2 . \overline{34}^2$, dają się wyrazić w tej formie, idzie tylko o dowodzenie że to samo ma miejsce dla innych wyrazów danego w tym paragrafie wyrażenia Hessowego Hessowego. Pomnóżmy przez $\overline{12}^2$ iloczyn dwóch zrównań

$$2D_4D_1\overline{13} . \overline{34} = D_1^2\overline{34}^2 + D_4^2\overline{13}^2 - D_3^2\overline{14}^2,$$

$$2D_2D_3\overline{24} . \overline{34} = D_2^2\overline{34}^2 + D_3^2\overline{24}^2 - D_4^2\overline{24}^2;$$

a dalej

$$- 4D_1D_2D_3D_4\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{24} = D_1^2D_2^2\overline{12}^2 . \overline{34}^4 + 2D_3^2D_4^2\overline{12}^2 . \overline{13}^2 . \overline{24}^2$$
$$- 2D_4^4\overline{12}^2 . \overline{23}^2 . \overline{31}^2;$$

biorąc zaś za $\overline{12}^2 . \overline{13}^2 . \overline{24}^2$, znalezioną jego wartość

$$- 12(n-3)^3\left(\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{24}\right) = 6(n-2)^2(n-3)SH$$
$$- 4n(n-1)(n-2)TU.$$

Wzajemnie $\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{14}$ obliczyć łatwo przyjdzie; idzie o wstawienie ze zrównania B, wartości za $\overline{13} . \overline{14}$, aby otrzymać

$$2D_3D_4\left(\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{14}\right) = 2D_4^2\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13}^2 - D_1^2\overline{12}^2 . \overline{34}^4 .$$

Podstawiając zaś jak poprzednio przyjdzie

$$6(n-3)^2\left(\overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{14}\right) = 2n(n-1)TU,$$

wartość która pomoże do wynalezienia Hessowego Hessowego w żądanej formie

274. Dogodną w ogóle być powinna możność dania ogólnego symbolicznego wyrażenia na wypadek rugowania między dwoma zrównaniami. Nie trudno spostrzedz że wypadek rugowania między prostem w swej formie równaniem (272) a zrównaniem stopnia n jest $\overline{12} . \overline{13} . \overline{14} . \overline{15} \ldots$, gdzie zawarte są symbole odnoszące się do zrównania stopnia n i symbol prostego zrównania pierwszego stopnia. Szukajmy czy podobna ogólna formuła da się wyprowadzić na przypadek gdy jedno ze zrównań jest stopnia drugiego (*). Wypadek będzie tegoż stopnia względem spółczynników zrównania ogólnego, a stopnia n względem spółczynników zrównania kwadratowego i w swem symbolicznem wyrażeniu zawierać musi dwa symbole odnoszące się do zrównania stopnia n, a n powtórzone razy n, i n symbo-

(*) P. Salmon podał w *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (tom IX, str. 32, r. 1853), formułę ogólną na wyznacznik wypadkowy zrównania stopnia n, i stopnia drugiego. P. *Clebsch*, w roku 1860, na nowo to twierdzenie podał i zastosował je do układu zrównania złożonego, z jednego zrównania stopnia n, z jednego stopnia drugiego, i z pewnej liczby zrównań stopnia pierwszego (*Crelle*, tom LVIII). Twierdzenie podane według notacyi P. Cayley, my zaś w paragrafie 278 podaliśmy wypadki otrzymane przez P. *Clebsch*.

lów powtórzonych razy dwa, a odnośnych do zrównania stopnia drugiego. Pierwsze symbole oznaczymy przez 1, 2, drugie zaś przez A, B, ... L, M, N. Czynniki te na rozmaite warstwy podzielić możemy, tak aby każda warstwa zawierała n czynników pierwszego rodzaju, a dwa drugiego. Napiszmy warstwy :

$$(1A)(2A)(1B)(2B)\ldots(1M)(2M)(1N)(2N)$$

$$(1A)^2(2A)^2(1B)(2B)\ldots(1M)(2M)$$

$$(1A)^2(1B)^2(2M)^2(2N)^2(1C)(2C)\ldots(1L)(2L),\ldots$$

W pierwszej warstwie każdy symbol A, połączony jest z obydwoma symbolami 1 i 2 drugiego rodzaju; w drugiej, jeden symbol A jest tylko z 1 połączony w $(1A)^2$; w trzeciej, dwa symbole A i B połączone są z 1, $(1A)^2$ i $(1B)^2$, i t. d., i t. d. Następujące uwagi posłużą do takiego ułożenia warstw tych, iżby tworzyły symbol będący rugownikiem szukanym. Rozłóżmy zrównanie stopnia drugiego na jego czynniki, i odeślijmy a i a' do różniczek tych czynników. Wypadek rugowania będzie

$$(1a)(1b)(1c)\ldots(1n)(2a')(2b')(2c')\ldots(2n').$$

Lecz

$$A = a + a', \quad (1A) = (1a) + (1a'), \quad (1B) = (1b) + (1b'),\ldots$$

Mnożąc i pamiętając że $(1a)^2$, $(1a)(2a)$ stają się zerami z powodu że symbol a napotykamy razy dwa, a zatem że nasze proste pierwszego stopnia zrównanie dwa razy różniczkowanem było, przyjdzie

$$(1A)^2 = 2(1a)(1a'), \quad (1A)(2A) = (1a)(2a') + (1a')(2a),$$

ostatnie zrównanie należy napisać

$$(1A)(2A) = (1, 0) + (0, 1),$$

gdzie pierwsza figura oznacza ilość nieakcentowanych liter połączonych z 1, druga zaś ilość tychże liter połączonych z 2. W tym znakowania sposobie, będzie

$$(1A)(2A)(1B)(2B)\dots(1N)(2N)$$

$$= (n, 0) + n(n-1, 1) + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2, 2) + \dots$$

Podobnież

$$(1A)^2(2N)^2(1B)(2B)\dots(1M)(2M)$$

$$= 4\{(n-1, 1) + (n-2)(n-2, 2) + \dots\}.$$

$$(1A)^2(1B)^2(2M)^2(2N^2)(1C)(2C)\dots\dots$$

$$= 16\{(n-2, 2) + (n-4) + \dots\dots\}.$$

Rugownikiem wedle znakowania $(n, 0)$ będzie

$$(1A)(2A)\dots\dots - n\,\frac{(1A)^2(2N)^2\dots}{4}$$

$$+ \frac{n(n-3)}{1.2}\,\frac{(1A)^2(1B)^2(4M)^2(2N)^2\dots\dots}{16} - \dots\dots$$

a spółczynniki otrzymamy te same jakie napotykamy przy rozwinięciu summy odwrotnych n^{tych} potęg pierwiastków zrównania stopnia drugiego, na przykład

$$\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}, \quad \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}.$$

275. Poprzedzające szeregi, przeobrazić można, tak iżby postępowały według potęg dyskryminanta zrównania stopnia drugiego. Bo jeżeli

$$(1A)(2B) - (1B)(2A) = (12)(AB),$$

to przyjdzie

$$2(1A)(2A)(1B)(2B) = (1A)^2(2B)^2 + (2A)^2(1B)^2 - (12)^2(AB)^2$$

$$= 2(1A)^2(2B)^2 - (12)^2(AB)^2$$

gdzie $(AB)^2$ będąc dyskryminantem stopnia drugiego wprowadzone zostało. Dla dwóch zrównań stopnia drugiego, formuła podana w ostatnim paragrafie staje się

$$2(1A)(2A)(1B)(2B) - (1A)^2(2B)^2,$$

a przez podstawienie

$$(1A)^2(2B)^2 - (12)^2(AB)^2.$$

Jest to formuła p. *Boole* (184). W razie zrównań, z których jedne stopnia drugiego, a drugie stopnia trzeciego formuła paragrafu 274 staje się

$$4(1a)(2a)(1b)(2b)(1c)(2c) - 3(1a)^2(2b)^2(1c)(2c),$$

i w podobnyż sposób

$$(1a)^2(1b)^2(1c)(2c) - (ab)^2(12)^2(1c)(2c).$$

276. W podobnyż sposób dochodzić możemy czy podobna otrzymać ogólną formułę na dyskryminanta zrównania danego. Łatwo napisać formuły na niezmienniki tego zrównania. Dy-

skryminant będzie stopnia $2(n-1)$. Podzielmy więc symbole na dwie warstwy 1, 3, 5 ... 2, 4, 6,... zawierające po $(n-1)$ symbolów, i utwórzmy iloczyn z $(n-1)$ takich czynników aby każdy z nich zawierał jeden czynnik z każdej warstwy. Jeżeli $n=4$, to będzie $A=(12)(34)(56)$. Gdyż przemieniając *cyklicznie* jedną z warstw symbolów, tworzymy $(n-1)$ iloczynów; a tak dla $n=4$ mamy

$$B=(14)(36)(52), \qquad C=(16)(32)(54).$$

Funkcya stopnia n ilości A, B,... oznacza niezmiennik, tego samego co i dyskryminant stopnia. Dwie trudności teoryi ogólnej będą : 1° oznaczyć z pewnością która z tych funkcyj jest dyskryminantem; 2° wynaleźć związki istniejące między niezmiennikami w ten sposób utworzyć się mogącemi, jak niemniej wskazać najprostszą formę, do jakiej takowe przywieść się dają. I tak, jeżeli n jest parzystem, $k+1$ będzie liczbą czynników w A, samo zaś

$$A^n = 2^k A^{n-1} B.$$

W przypadku jednego zrównania stopnia czwartego, różne niezmienniki które utworzyć można są : A^4, A^2B, A^2BC, opuszczając A^3B, które jak wiemy nie jest czem innem jak $\frac{1}{4}A^4$. Pierwszem zagadnieniem do rozwiązania jest utworzenie z tych niezmienników kombinacyi stającej się tosamościowo zerem, gdy funkcya dana jest u^2v, u zaś stopnia pierwszego. Dla osiągnięcia tego wypadku przypuśćmy że funkcya jest formy żądanej, podstawmy 1, $a+\alpha$ (a odnosi się do v, α do u^2) za 2, $b+\beta$, i śledźmy skutków tego podstawienia na każdy z niezmienników obecnie nas obchodzących. Widoczna że wyrazy stopnia wyższego nad drugi, a zawierające a lub α zniknąć muszą. Oznaczając przez M warunek $(a\alpha)^2$, wskazujący że u powinno być czynnikiem v, znajdziemy bez innych rachunków, prócz tego podstawienia

$$A^4 = 216M^6, \quad A^2B^2 = 66M^6, \quad A^2BC = 42M^6;$$

dyskryminant przeto wyraża się przez jedno z trzech zrównań

$$\frac{A^4}{36} = \frac{A^2B^2}{4} = \frac{A^2BC}{7} \ (*).$$

277. Użytą obecnie metodę zastosować można do kształtów o ilukolwiek zmiennych. Zrównania tosamościowe używane głównie przy kształtach potrójnych są :

$$D_4\overline{123} = D_1\overline{234} - D_2\overline{134} + D_3\overline{124}, \ldots.. (E)$$

$$\overline{123}\,.\,\overline{145} + \overline{124}\,.\,\overline{153} + \overline{125}\,.\,\overline{134} = 0, \ldots.. (F)$$

do których dodać należy zrównania odpowiednie na symbole przeciwzmienników (140)

$$P\,\overline{123} = D_1\overline{\alpha 23} + D_2\overline{\alpha 31} + D_3\overline{\alpha 12}, \ldots.. (G)$$

$$\overline{\alpha 12}.\overline{\alpha 34} + \overline{\alpha 23}.\overline{\alpha 41} + \overline{\alpha 31}.\overline{\alpha 24} = 0, \ldots.. (H)$$

gdzie $P = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Dla powodów wyłożonych powyżej, z lekka tylko dotykamy w tym tomie geometrycznych poszukiwań; parę więc tylko dodając przykładów, odsyłamy czytelnika

(*) O sprawozdaniu tych zrównań do sztandaru kształtu, w następstwie o wyprowadzeniu z kształtu zwykłego dyskryminanta stopnia czwartego, zobacz *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tom IX, str. 33.

po szersze rozwinięcia do *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tom. IX, str. 27.

PRZYKŁAD I. — Wiemy (113) że kształt potrójny trzeciego stopnia posiada niezmiennik czwartego rzędu $\overline{123}.\overline{124}.\overline{234}.\overline{314}$. Idzie o wynalezienie wyrażenia symbolicznego na wypadek działania na Hessowy za pomocą przewoźnika niezmiennika tego. Przewoźnik jest $123.\overline{a12}.\overline{a23}.\overline{a31}$. a metoda paragrafu 273, wymaga zkombinowania z nią czynnika $\overline{456}^2$ podstawienia $4+5+6$ za a. Ponieważ opuścić należy każdy wyraz zawierający którykolwiek z symbolów 4, 5, 6, więcej jak trzy razy, przeto żądany symbol sprowadza się do

$$\overline{123}.\overline{124}.\overline{235}.\overline{316}.\overline{456}^2.$$

PRZYKŁAD II. — W teoryi podwójnych stycznych do krzywych płaskich, wyłożonej w *Higher Plane Curves* str. 81 (krzywe płaskie wyższych stopni), potrzeba obliczyć wypadek podstawienia w kolejne emananty ilości

$$\gamma\frac{dU}{dy}-\beta\frac{dU}{dz},\quad \alpha\frac{dU}{dz}-\gamma\frac{dU}{dx},\quad \beta\frac{dU}{dx}-\alpha\frac{dU}{dy},$$

za x, y, z, i pokazania że wypadek przybiera postać

$$P_nU + Q_n(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2.$$

W tym i następnym przykładzie należy obliczyć Q_2, Q_3, Q_4. Łatwo dochodzimy do symbolicznego wyrażenia podstawienia tego. Będzie to

$$\overline{\alpha12}.\overline{\alpha13}.\overline{\alpha14}.\overline{\alpha15}.\ldots$$

Do obliczenia $\overline{\alpha12}.\overline{\alpha13}$, posiadamy jedno tylko zrównanie stopnia drugiego (G); zkąd wyciągamy

$$P^2\overline{123}^2 = 3D_3^2\overline{\alpha12}^2 - 6D_2D_3\overline{\alpha12}.\overline{\alpha13}.$$

Oznaczywszy zaś Hessowy $\overline{123}^2$ i Hessowy zespolony z $\overline{\alpha 12}^2$ przez G i H, przyjdzie

$$6(n-1)^2\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13} = 3n(n-1)\mathrm{GU} - \mathrm{P}^2\mathrm{H}.$$

PRZYKŁAD III. — Obliczmy $\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13}\,.\,\overline{\alpha 14}$. Zrównanie (G) daje

$$-2\mathrm{D}_2\mathrm{D}_3\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13} = \mathrm{P}^2\overline{123}^2 - 2\mathrm{PD}_1\overline{123}\,.\,\overline{\alpha 23}$$
$$+ \mathrm{D}_1^2\overline{\alpha 23}^2 - \mathrm{D}_2^2\overline{\alpha 31}^2 - \mathrm{D}_3^2\overline{\alpha 12}^2\,.$$

Pomnóżmy przez $\overline{\alpha 14}$, zniknął dwa wyrazy i pozostanie

$$-2(n-1)\overline{\alpha 12}\,.\,\overline{\alpha 13} = \mathrm{P}^2\overline{\alpha 123}^2\,.\,\overline{\alpha 14} - 2n(n-1)\mathrm{U}\overline{\alpha 12}^2\,.\,\overline{\alpha 13}.$$

Dla dowiedzenia że $\overline{123}\,.\,\overline{\alpha 23}\,.\,\overline{\alpha 14}$ znika tosamościowo, pomnóżmy zrównanie (H) przez $\overline{123}$; ponieważ wyrazy o których mowa, różnią się tylko przemianą figur 1, 2, 3, przeto stają się zerami. W podobnyż sposób dowieść można że $\overline{123}\,.\,\overline{\alpha 23}\,.\,\overline{\alpha 14}\,.\,\overline{\alpha 15} = 0$.

278. W paragrafach poprzednich używaliśmy wyłącznie metody znakowania p. *Cayley*. Znamy znakowanie p. *Armhold* (149), dla lepszego jednak obeznania się z niem, podam *Clebscha* poszukiwania nad zagadnieniem (274) rugowania z układu zrównań, z których jedno jest stopnia n, drugie stopnia drugiego, a wszystkie inne stopnia pierwszego. Weźmiemy tylko cztery zrównania o czterech zmiennych, zastrzegając jednak z góry że metoda podana w razie obecnym, daje się zastosować do ilukolwiek zmiennych. Weźmy zrównania

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$
$$\beta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = 0,$$
$$\mathrm{U} = u_{11}x_1^2 + 2u_{12}x_1x_2 + \ldots\ldots\ldots = 0,$$

i $\varphi = 0$, gdzie φ jest zrównaniem rzędu n w x_1, x_2, x_3, x_4, mogącym się napisać symbolicznie

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4).$$

Znamy zaś znaczenie z tej notacyi (142). Metoda rugowania przez nas używana zasadza się na rozwiązaniu zrównania drugiego stopnia, wraz z linijnemi, na podstawienie w φ, dwóch znalezionych układów wartości, i na pomnożeniu obydwu wypadków. Możemy zaś nieskończoną liczbą sposobów kombinować zrównania kwadratowe z linijnemi pomnożonemi przez dowolne czynniki; w końcu przeto dojść musimy do wypadku na czynniki rozłożyć się dającego, jak naprzykład:

$$U + (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \ldots)(\alpha_1x_1 + \ldots) + (\mu_1x_1 + \ldots)(\beta_1, x_1 + \ldots)$$
$$= (p_1x_1 + \ldots)(q_1x_1 + \ldots).$$

Przypuścić należy że przeobrażenie dokonanem zostało, lecz zbyteczna szukać w tym celu wartości λ, μ,..., gdyż pokaże się że ilości te nikną z wypadku. Weźmy spółczynnik wyrazu x_1x_k w zrównaniu stopnia drugiego, a napisane nieco wyżej zrównanie wymaga aby było

$$2u_{ik} + (\alpha_i\lambda_k + \alpha_k\lambda_i) + (\beta_i\mu_k + \beta_k\mu_i) = p_iq_k + p_kq_i + \ldots \text{ (A)}.$$

Zamiast rozwiązywania zrównania stopnia drugiego i linijnych, otrzymamy obydwa układy wartości kombinując też zrównania linijne z

$$p_1x_1 + \ldots = 0, \quad q_1x_1 + \ldots = 0.$$

Podług teoryi zrównań linijnych wartości na x_1, x_2,... będą wyznacznikami układów.

$$\left\| \begin{matrix} p_1, & p_2, & p_3, & p_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} q_1, & q_2, & q_3, & q_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \end{matrix} \right\|.$$

Jeżeli podstawiemy w $a_1x_1 + \ldots$, pierwszą warstwę wartości, otrzymamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ p_1, & p_2, & p_3, & p_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \end{vmatrix},$$

który możemy napisać $(a_1p_2\alpha_3\beta_4)$. Wypadek rugowania wyrazi się symbolicznie

$$R = (a_1p_2\alpha_3\beta_4)^n(b_1q_2\alpha_3\beta_4)^n.$$

W drugim czynniku użyliśmy symbolu b w miejsce a dla przyczyn wyłożonych w paragrafie 150, to jest dla otrzymania potęg ze spółczynników w φ, lecz wiedzieć należy że to b nie ma odmiennego od a znaczenia, gdyż po rozwinięciu możemy jako rzeczy równe zastąpić iloczyny $a^ia^ka^la^m$, $b^ib^kb^lb^m$, przez odpowiedni czynnik z φ, to jest przez a^{iklm}. Wypadkowi rugowania możemy nadać bardziej symetryczną formę

$$2R = (a_1p_2\alpha_3\beta_4)^n(b_1q_2\alpha_3\beta_4)^n + (a_1q_2\alpha_3\beta_4)^n(b_1p_2\alpha_3\beta_4)^n,$$

która jest podwójną tylko względem pierwszej wartości,

Napiszmy :

$$(a_1p_2\alpha_3\beta_4)(a_1q_2\alpha_3\beta_4) = A,$$

$$(b_1p_2\alpha_3\beta_4)(b_1q_2\alpha_3\beta_4) = B,$$

$$(a_1p_2\alpha_3\beta_4)(b_1q_2\alpha_3\beta_4) + (a_1q_2\alpha_3\beta_4)(b_1p_2\alpha_3\beta_4) = 2C.$$

Łatwo wyrazimy R w funkcyi A, B, C, gdyż mamy

$$2R = \{C + \sqrt{(C^2 - AB)}\}^n + \{C - \sqrt{(C^2 - AB)}\}^n;$$

$$R = C^n + \frac{n(n-1)}{1.2} C^{n-2}(C^2 - AB)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} C^{n-4}(C^2 - AB)^2 + \ldots$$

279. Pozostaje nam jeszcze oznaczyć ściślej wyrażenia A, B, C, oraz pozbyć się ilości p i q, aby ostatecznie wypadek był wyrażony w samych tylko czynnikach danego zrównania stopnia drugiego.

A, będące czynnikiem dwóch wyznaczników napisać się daje jako wyznacznik pojedyńczy:

$$\left|\begin{array}{ccccccc} p_1q_1, & \frac{1}{2}(p_1q_2+p_2q_1), & \frac{1}{2}(p_1q_3+p_3q_1), & \frac{1}{2}(p_1q_4+p_4q_1), & \alpha_1, & \beta_1, & a_1 \\ \frac{1}{2}(p_1q_2+p_2q_1), & p_2q_2, & \frac{1}{2}(p_2q_3+p_3q_2), & \frac{1}{2}(p_2q_4+p_4q_2), & \alpha_2, & \beta_2, & a_2 \\ \frac{1}{2}(p_1q_3+p_3q_1), & \frac{1}{2}(p_2q_3+p_3q_2), & p_3q_3, & \frac{1}{2}(p_3q_4+p_4q_3), & \alpha_3, & \beta_3, & a_3 \\ \frac{1}{2}(p_1q_4+p_4q_1), & \frac{1}{2}(p_2q_4+p_4q_2), & \frac{1}{2}(p_3q_4+p_4q_3), & p_4q_4, & \alpha_4, & \beta_4, & a_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4, & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right|$$

pomnóżmy przez $(-1)^{m-1}$, gdzie m oznacza liczbę zmiennych, a więc cztery w obecnym razie.

Gdyż każdy składowy wyraz tego wyznacznika zawierać musi jeden takiż wyraz z każdej z trzech ostatnich linij i kolumn; jest więc pierwszego stopnia w wyrazach $p_1 q_1$, $\frac{1}{2}(p_1 q_2 + p_2 q_1), \ldots,$ a jeżeli spółczynnik jednego z tych wyrazów weźmiemy pod rozbiór, to znajdziemy, że liczba zmiennych będzie ta sama, z tym samym lub z przeciwnym znakiem, jak w iloczynie dwóch wyznaczników. W wyznacznik ten podstawmy ze zrównania (A):

$$p_1 q_1 = u_{11} + \alpha_1 \lambda_1 + \beta_1 \mu_1,$$

$$\frac{1}{2}(p_1 q_2 + p_2 q_1) = u_{12} + (\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1) + \frac{1}{2}(\beta_1 \mu_2 + \beta_2 \mu_1) + \ldots$$

Uskuteczniwszy to podstawienie odciągnijmy od każdej z czterech pierwszych kolumn i linij, kolumnę i linią α pomnożoną przez $\frac{1}{2}\lambda_1$, oraz kolumnę i linią β pomnożonemu przez $\frac{1}{2}\mu_1$, a dodatkowe wyrazy znikną i wyznacznik stanie się:

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14}, & \alpha_1, & \beta_1, & a_1 \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24}, & \alpha_2, & \beta_2, & a_2 \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34}, & \alpha_3, & \beta_3, & a_3 \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44}, & \alpha_4, & \beta_4, & a_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Clebsch oznacza powyższy wyznacznik w którym pierwowzór dyskryminanta funkcyi drugiego stopnia jest otoczony liniami i kolumnami $\alpha, \beta, \ldots$, które przez skrócenie napiszemy

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & a \\ \alpha, & \beta, & a \end{vmatrix},$$

bacząc że wyższa linia oznacza kolumny, niższe zaś linie otaczające pierwowzór. Znajdziemy dla jakiejkolwiek ilości zmiennych

$$A = (-1)^{m-1}\begin{Bmatrix} \alpha, & \beta, \ldots & a \\ \alpha, & \beta, \ldots & a \end{Bmatrix};$$

$$B = (-1)^{m-1}\begin{Bmatrix} \alpha, & \beta, \ldots & b \\ \alpha, & \beta, \ldots & b \end{Bmatrix};$$

$$C = (-1)^{m-1}\begin{Bmatrix} \alpha, & \beta, \ldots & a \\ \alpha, & \beta, \ldots & b \end{Bmatrix}.$$

Dowiedliśmy zaś (26, przykład drugi), że

$$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^2 = \Delta\begin{pmatrix} a, & b \\ a, & b \end{pmatrix},$$

gdzie Δ jest dyskryminantem funkcyi drugiego stopnia. Dowiedliśmy w podobnyż sposób że w ogóle mamy

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta, \ldots a \\ \alpha, \beta, \ldots a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, \beta, \ldots b \\ \alpha, \beta, \ldots b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha, \beta, \ldots a \\ \alpha, \beta, \ldots a \end{pmatrix}^2 = \Delta\begin{pmatrix} \alpha, \beta, \ldots a, b \\ \alpha, \beta, \ldots a, b \end{pmatrix}.$$

Jeżeli przeto oznaczymy przez D dopiero co napisaną funkcyą, przyjdzie

$$C^2 - AB = -\Delta D,$$

a formuła paragrafu 278, stanie się :

$$\mathrm{R} = \mathrm{C}^n - \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{C}^{n-2}\Delta\mathrm{D}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\mathrm{C}^{n-4}\mathrm{D}^2\Delta^2 + \ldots. \; (^*).$$

(*) Czytelnik znajdzie niektóre zastosowania prawd powyższych do geometrycznych zagadnień w *Clebsch'a* rozprawie umieszczonej w *Crell'a* tomie LVIII. Aby wypadek otrzymany, przenieść dla kształtów podwójnych drugiego stopnia, w używane przez nas znakowanie, trzeba wziąć za C^n iloczyn z n par czynników $1\mathrm{A}, 2\mathrm{A}, 1\mathrm{B}, 2\mathrm{B}, \ldots, \overline{12}^2$ za D. Odnoszą się do pracy *Clebsch'a* (Crelle, tom LIX) *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen* (o symbolicznem przedstawieniu algebraicznych form), by wskazać tamże ogólne prawidło otrzymania formuły na wyznacznik wypadkowy dwóch kształtów podwójnych, lub na dyskryminanta jednego kształtu takiego. Metoda postępowania zasadza się na zastosowaniu formy P. Cayley, do sposobu rugowania używanego przez Bézont; rzecz którąśmy rozebrali (71) w razie dwóch kształtów napisanych symbolicznie

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^n, \quad (a_1x_1 + a_2x_2)^n.$$

Prawidło ostateczne, jest, jak to przewidzieć łatwo, bardzo skomplikowanem.

NOTY

NOTA PIERWRZA.

O RÓŻNICZKOWANIU UŻYTÉM PRZY ROZWIJANIU FUNKCYJ NA SZEREGI BURMANNA, LAGRANGE'A, I WROŃSKIEGO;

PRZEZ **M. A.**

byłego ucznia Szkoły Politechnicznej.

Niech będą dwa zrównania

$$z = F(y), \qquad y = \varphi(x);$$

załóżmy sobie wyrachować $\frac{d^nz}{dx^n}$ nie przechodząc przez $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ..., $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$. Mamy

$$\frac{dz}{dx} = F'(y).\varphi'(x),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = F'(y)\varphi''(x) + F''(y)\varphi'(x)^2,$$

....

$$\frac{d^nz}{dx^n} = A_1F'(y) + A_2F''(y) + \ldots\ldots + A_nF^{(n)}(y),$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ są spółczynnikami zależnemi jedynie od $\varphi(x)$ a nie bynajmniéj od funkcyi $F(y)$, jak jest łatwo pokazać to dowodząc że prawo, przypuszczono prawdziwém dla pochodnéj $n^{téj}$, pozostanie niem jeszcze dla pochodnéj $(n+1)^{téj}$.

Można więc wziąć dla $F(y)$ funkcyą jakąkolwiek względem y, e^{py} na przykład, a A_1, A_2,..., A_n będą spółczynnikami mnożącemi pe^{py}, p^2e^{py},..., p^ne^{py} w wyrażeniu $\frac{d^n.e^{py}}{dx^n}$ jakie należy w skutku czego znaleźć.

Uważmy, w rzeczy saméj, że $\frac{1}{1.2.3...n}\frac{d^n.e^{p\varphi(x)}}{dx^n}$ jest spółczynnikiem potęgi h^n w rozwinięciu $e^{p\varphi(x+h)}$ podług potęg ilości h. Otóż

$$e^{p\varphi(x+h)}=e^{p[\varphi(x)+\varphi'(x)h+\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}+\dots]}$$

$$=e^{p\varphi(x)}.e^{p\varphi'(x)h}.e^{p\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}}.$$

Rozwijając $e^{p\varphi'(x)h}$, $e^{p\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}}$,..., i wykonywając iloczyn, otrzyma się na wyraz ogólny

$$e^{p\varphi(x)}\Sigma p^{m_1+m_2+\dots+m_n}\frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\dots m_1}\cdot\frac{\left[\frac{\varphi''(x)}{1.2}\right]^{m_2}}{1.2.3\dots m_2}\times\dots$$

$$\times\frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\dots n}\right]^{m_n}}{1.2.3\dots m_n}\cdot h^{m_1+2m_2+\dots+nm_n};$$

przeto, jeżeli się położy

$$m_1+2m_2+3m_3+\dots+nm_n=n,$$

spółczynnikiem potęgi h^n będzie

$$\frac{1}{1.2.3\dots n}\,\frac{d^n.e^{py}}{dx^n}=e^{p\varphi(x)}\Sigma p^{m_1+m_2+\dots+m_n}\frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\dots m_1}\times\dots$$

$$\times\frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\dots n}\right]^{m_n}}{1.2.3\dots m_n}.$$

Aby otrzymać w tém zrównaniu spółczynnik ilości $p^m e^{py}$ albo A_m, potrzeba wziąć widocznie tylko wyrazy dla których znajdzie się

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m.$$

Więc, ostatecznie, otrzyma się

$$A_m = 1.2.3\ldots n\Sigma \frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\ldots m_1} \cdot \frac{\left[\frac{\varphi''(x)}{1}\right]^{m_2}}{1.2.3\ldots m_2} \ldots \frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n}\right]^{m_n}}{1.2.3\ldots m_n},$$

$m_1, m_2 \ldots, m_n$ są liczbami całkowitemi i dodatnemi (licząc w to zero) które muszą zadosyć uczynić zrównaniom

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots + nm_n = n,$$

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = m.$$

W tém rozwiązaniu, szukano naprzód w rozwinięciu $e^{p[\varphi'(x)h + \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots]}$ $= e^{p[\varphi(x+h) - \varphi(x)]}$ wyrazu w h^n; i w tym wyrazie, wzięto tylko to co było pomnożoném przez p^m. Można widocznie rozwiązać to zadanie odwrotnie, szukać w rozwinięciu $e^{p[\varphi(x+h)-\varphi(x)]}$ wyrazu w p^m, którym jest

$$\frac{[\varphi(x+h) - \varphi(x)]^m}{1.2.3\ldots m},$$

a potém wziąć w tym wyrazie to co jest pomnożoném przez h^n, to jest, ponieważ różnica $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ jest podzielną przez h, spółczynnik potęgi h^{n-m} w funkcyi $\dfrac{\left[\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right]^m}{1.2.3\ldots m}$. Otóż tym spółczynnikiem jest, podług twierdzenia Taylora,

$$\frac{d^{n-m}}{dh^{n-m}}\left[\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right]_0^m \frac{1}{1.2.3\ldots(n-m)}$$

(zero wskazuje że powinno się zrobić $h = 0$ po różniczkowaniach).

Otrzyma się więc

$$A_m = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(n-m).1.2.3\ldots m}\ \frac{d^{n-m}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]_0^m}{dh^{n-m}}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}\ \frac{d^{n-m}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]_0^m}{dh^{n-m}}.$$

Inaczéj : niech będzie i przyrostek względem y odpowiedni przyrostkowi h względem x, tak aby

$$i = \varphi(x+h) - \varphi(x),$$

otrzyma się]

$$F(y+i) = F(y) + F'(y)i + \ldots + \frac{F^{(n)}(y)}{1.2.3\ldots n} i^n + \ldots$$

$$= F(y) + \frac{dF(y)}{dx} h + \ldots + \frac{d^nF(y)}{dx^n}\ \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

przypuściwszy że w $F(y)$, zostało zastąpionèm y przez $\varphi(x)$ i zamienionèm potém x na $x+h$.

Zastępując i przez swą wartość, w tém zrównaniu, zauważywszy ż $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ jest podzielną przez h, i że, tém samém, wyrazem potęgi h^n w i^m jest

$$\frac{d^{n-m}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]_0^m}{1.2.3\ldots(n-m).dh^{n-m}}$$

otrzyma się, kładąc

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \theta,$$

i identyfikując wyrazy w h^n,

$$\frac{\frac{d^n F(y)}{dx^n}}{1.2.3\ldots n} = \frac{F'(y)\,\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}}{1.2.3\ldots(n-m)} + \frac{F''(y)\,\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots$$

$$+ \frac{\frac{F^{(m)}(y)}{1.2.3\ldots m}\,\frac{d^{n-m}(\theta^m)_0}{dh^{n-m}}}{1.2.3\ldots(n-m)} + \ldots + \frac{F^{(n)}(y)(\theta^n)_0}{1.2.3\ldots n},$$

albo też

$$(a)\quad \begin{cases} \frac{d^n z}{dx^n} = \frac{n}{1} F'(y)\,\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} F''(y)\,\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}} \\ \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} (F'''y)\,\frac{d^{n-3}(\theta^3)_0}{dh^{n-3}} + \ldots \end{cases}$$

Gdyby się miało trzy zrównania

$$z = F(y), \qquad y = \varphi(x), \qquad x = f(u),$$

albo

$$z = \Psi(x) = \Pi(u);$$

położywszy

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \theta,$$

otrzymałoby się, przez to co poprzedza,

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \Psi^{(n)}(x) = \frac{n}{1} F'(y)\,\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} F''(y)\,\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}} + \ldots = \mathrm{U}n,$$

potém, robiąc $\frac{f(u+\varepsilon)-f(u)}{\varepsilon}=\omega$,

$$\frac{d^n\Psi(x)}{du^n}=\frac{d^nz}{du^n}\,\frac{1}{2}=\mathrm{U}_1\frac{d^{n-1}(\omega)_0}{d\varepsilon^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{U}_2\frac{d^{n-2}(\omega^2)_0}{d\varepsilon^{n-2}}+\ldots$$

Pozostawałoby więc tylko zastąpić $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n$ przez ich wartość aby wyjaśnić (wystawić na widok) prawo pochodzenia dla funkcyj funkcyj; i tak daléj jakąkolwiek by nie była liczba funkcyj położonych jedne na drugich.

Wróćmy do zrównania (a) jakie można jeszcze napisać

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^nz}{dx^n}&=(\theta^n)_0\frac{d^nz}{dy^n}+\frac{n}{1}\,\frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh}\,\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\\&+\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^2}\,\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

przeto, przypuściwszy że mamy $z=\mathrm{F}(x)$, $y=\varphi(x)$, szukajmy $\frac{d^nz}{dy^n}$. z mogąc widocznie być uważaném jak jakakolwiek funkcya niewyraźna względem y, otrzyma się, podług zrównania (1),

$$\frac{d^nz}{dx^n}=(\theta^n)_0\frac{d^nz}{dy^n}+\frac{n}{1}\,\frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh}\,\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^2}\,\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots,$$

$$\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=(\theta^{n-1})_0\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}+\frac{n-1}{1}\,\frac{d(\theta^{n-2})_0}{dh}\,\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots,$$

....

$$\frac{d^{n-m}z}{dx^{n-m}}=(\theta^{n-m})_0\frac{d^{n-m}z}{dy^{n-m}}+\frac{n-m}{1}\,\frac{d(\theta^{n-m-1})_0}{dh}\,\frac{d^{n-m-1}z}{dy^{n-m-1}}+\ldots,$$

....

$$\frac{d^2z}{dx^2} = (\theta^2)_0 \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{2}{1} \frac{d(\theta)_0}{dy} \frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx} = (\theta)_0 \frac{dz}{dy}.$$

Gdy się pomnoży te zrównania, zacząwszy od pierwszego, względnie przez

$$(\theta^{-n})_0, \quad \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh},$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}},$$

i gdy się doda wypadki, otrzyma się

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^nz}{dy^n} &= (\theta^{-n})_0 \frac{d^nz}{dx^n} + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2} \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \ldots \end{aligned} \right.$$

W rzeczy saméj, oznaczywszy przez $\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$ C spółczynnik $\frac{d^{n-m}z}{dy^{n-m}}$ w summie iloczynów powyższych, będzie

$$C = n(\theta^{-n})_0 \frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + (n-1) \frac{m}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \ldots\ldots$$

$$+ (n-m+1) \frac{m}{1} \frac{d^{m-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{m-1}} \frac{d(\theta^{n-m})_0}{dh} + (n-m) \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0,$$

albo też

$$C = n \left[\begin{aligned} &(\theta^{-n})_0 \frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + \frac{m}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \ldots \\ &\qquad\qquad + \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0 \end{aligned} \right].$$

$$-m\left[\begin{array}{l}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}\frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}}+\frac{(m-1)}{1}\frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2}\frac{d^{m-2}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-2}}+\ldots\\ \qquad\qquad\qquad+\frac{d^m(\theta^{-n})}{dh^m}(\theta^{n-m})_0\end{array}\right]$$

$$=n\left[\frac{d^m(\theta^{-n}.\theta^{n-m})_0}{dh^m}\right]-m\left[\frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}}\left(\frac{d(\theta^{-n})}{dh}.\theta^{n-m}\right)_0\right]$$

$$=n\left[\frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m}\right]-m\left[-n\frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}}\left(\theta^{-m-1}\frac{d\theta}{dh}\right)_0\right],$$

lub nakoniec

$$C=n\left[\frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m}\right]-m\left[\frac{n}{m}\ \frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m}\right]=0\,;$$

to co czyni widoczną dokładność zrównania (2).

Jeżeli się zauważy że mamy, ogólnie,

$$\frac{d^m F(x)}{dx^m}=\frac{d^m F(x+h)_0}{dh^m},$$

i gdy się położy

$$z=F(x),$$

zrównanie (2) będzie się mogło napisać, zwięzléj,

$$(3)\qquad \frac{d^n F(x)}{dy^n}=\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left[\theta^{-n}F'(x+h)\right]_0.$$

Wyciąga się z tego zrównania dowodzenie proste i bezpośredne szeregu Burmanna.

Niech będzie, w rzeczy saméj, x jakakolwiek funkcya względem y dana przez zrównanie $y=\varphi(x)$. Zastępując, w funkcyi $F(x)$, x przez swą wartość uważaną jako wyciągniętą z tego zrównania, i przypuściwszy że F(x) staje się wtedy funkcyą ciągłą względem y, twierdzenie Taylora da jakiekolwiek rozwinięcie kształtu

$$F(x) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots$$

Różniczkując n razy ten szereg i bacząc pilnie zrobić $y = 0$ po różniczkowaniach, znajdzie się, pod tym ostatnim warunkiem,

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^n F(x)}{dy^n},$$

albo też, mając wzgląd na zrównanie (3) i oznaczywszy przez a wartość na x, odpowiadającą wartości $y = 0$,

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} \left\{ \left[\frac{\varphi(a+h)}{h} \right]^{-n} F'(a+h) \right\} 0,$$

powyższe zrównanie przekształcone i należycie uproszczone daje,

$$(4) \qquad A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \left[\frac{x-a}{\varphi(x)} \right]^{-n} F'(x) \right\}_{(x=a)}.$$

Nie będziemy tu zajmować się wcale roztrząsaniem kwestyi pod jakiemi warunkami ten szereg Burmanna może istnieć.

Gdy się zrobi

$$\varphi x = \frac{x-a}{\psi(x)},$$

zrównanie (4) staje się

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\psi(a)^n F'(a)],$$

i znajduje się szereg Lagrange'a

$$F(x) = F(a) + [\psi(a) F'(a)] y + \frac{d}{da} [\psi(a)^2 F''(a)] y^2 + \ldots,$$

właściwy do przedstawienia w jakiéjkolwiek funkcyi $F(x)$ pierwiastku zrównania

$$x = a + y\psi(x),$$

który się sprowadza do a dla $y = 0$.

W zrównaniu (2), zróbmy kolejno $z = y, y^2, \ldots, y^n$, i oznaczmy, dla skrócenia, $\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}$ przez $D^n\varphi(x)$, otrzymamy tosamości

$$\text{(A)}\quad\left\{\begin{aligned}
0 &= (\theta^{-n})_0 D^n\varphi(x) + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}\varphi(x) + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D\varphi(x), \\
0 &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^2 + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}.\varphi(x)^2 + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^{n-1} + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1} + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^{n-1}, \\
1.2.3\ldots n &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^n \\
&\quad + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}.\varphi(x)^n + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^n.
\end{aligned}\right.$$

Te tosamości dają widzieć że jeżeli ma się zrównania

$$D.\varphi(x).y_1 + D.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D.\varphi(x)^n.y_n = D.F(x),$$

$$D^2.\varphi(x).y_1 + D^2.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^2.\varphi(x)^n.y_n = D^2.F(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$D^{n-1}.\varphi(x).y_1 + D^{n-1}.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^{n-1}.\varphi(x)^n.y_n = D^{n-1}.F(x),$$

$$D^n.\varphi(x).y_1 + D^n.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^n.\varphi(x)^n.y_n = D^n.F(x),$$

i gdy się pomnoży je względnie przez

$$\frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}}, \quad \frac{n-1}{1}\frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-2}}, \ldots, (\theta^{-n})_0$$

otrzyma się

$$1.2.3\ldots ny_n = (\theta^{-n})_0 D^n.F(x) + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}.D^{n-1}.F(x) + \ldots$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}F'(x+h)]_0.$$

Lecz zrównania (A), rozwiązane sposobem zwyczajnym, dają

$$y_n = \frac{\Sigma[\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}.D^n.F(x)]}{\Sigma[\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}.D^n.\varphi(x)]},$$

wyznaczniki są utworzone względem wskaźników różniczkowania. Równając te dwie wartości na y_n, znajdzie się

$$(\alpha) \qquad \frac{\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}F'(x+h)]_0}{1.2.3\ldots n} = \frac{\Sigma[\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2\ldots D^n.F(x)]}{\Sigma[\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2\ldots D^n.\varphi(x)]},$$

Rozwijając dwie strony tego zrównania podług pochodnych funkcyi $F(x)$ i zauważywszy że spółczynniki tychże samych pochodnych muszą być identycznemi, z powodu nieoznaczoności funkcyi $F(x)$, znajdzie się, równając spółczynniki względem $D^n.F(x)$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}(\theta^{-n})_0 = \frac{\Sigma[\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}]}{\Sigma[\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}D^n.\varphi(x)^n]};$$

zkąd wyciągnie się

$$(B)\quad \begin{cases} \Sigma[\pm D^1\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2\ldots D^n.\varphi(x)^n] \\ =1!.2!\ldots n!.\left[\theta^{-\frac{n(n+1)}{2}}\right]_0 1!.2!\ldots n!.[D\varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{cases}$$

a więc, tém samém, zrównanie (α) stanie się

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1.2.3\ldots n}\,\dfrac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}F'(x+h)] \\ =\dfrac{\Sigma[\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}.D\varphi(x)^{n-1}D^nF(x)]}{1!.2!.3\ldots n![D\varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}, \end{cases}$$

(symbol $r!$. przedstawia, według zwyczaju, iloczyn ciągły $1.2.3\ldots r$).

To piękne twierdzenie, tak jak zrównanie (3), są należne p. Wrońskiemu (*Philosophie de la Technie*, 2e sect., p. 110). P. Prouhet dał, przez inne rozważania, świetne dowodzenie zrównania (3).

(Wyciąg z *Nowych Roczników* P. Terquem, tomów IX i XI.)

NOTA DRUGA.

O TWIERDZENIU WROŃSKIEGO

PRZEZ PROFESSORA CAYLEY'A

(TŁOMACZENIE Z «QUARTERY JOURNAL OF PURE APPLIED MATHEMATICS» N° 47, ZESZYT KWIETNIOWY, 1873 R.)

Wyciąg z Pamiętników Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu. Tom IV, rok 1874 (*).

To twierdzenie, uważane przez autora jako odpowiedź na pytanie « En quoi consistent les Mathématiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences et de résoudre généralement ce problème universel? » jest podane bez dowodzenia w jego *Réfutation de la Théorie de Fonctions Analitiques de Lagrange*, Paryż, r. 1812, str. 30, i znów powtórzoném (z dowodzeniem, jak sądzę) w *Philosophie de la Technie*, Paryż, r. 1815; również jest podane i dowiedzione w *Supplément à la Réforme de la Philosophie*, Paryż, r. 1847, str. CIX i nast.; toż twierdzenie, lecz bez dowodzenia, znajduje się w *Encyclopédie Mathématique de Montferrer* (Paryż, bez daty), t. III, str. 398.

Twierdzenie to daje rozwinięcie funkcyi Fx pierwastku równania

$$0 = fx + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \text{etc.},$$

(*) Artykuł ten jednego z najznakomitszych dzisiejszych angielskich matematyków, podajemy w tłumaczeniu najwierniejszém, bez żadnych zmian w znakowaniu i w formie: posłuży on za dowód że w zawiłych i zaciemnionych często utworach Wrońskiego, znajdują się rzeczy mogące zwrócić na siebie uwagę pierwszorzędnych uczonych i nie pozwalające wydawać zbyt pospiesznego potępiającego sądu o pracach matematycznych naszego współziomka.

(*Przyp. tłómacza.*)

lecz w rzeczywistości ogólność jego nie przechodzi po za szczególny przypadek $0 = fx + x_1 f_1 x$; to jest kiedy równanie jest $0 = \varphi x + \lambda fx$ (*). Wziąwszy więc pod uwagę to równanie

$$\varphi x + \lambda fx = 0,$$

niech a będzie pierwiastkiem równania $\varphi x = 0$; twierdzenie jest następujące

$$
\begin{aligned}
Fx = {} & F \\
& - \frac{\lambda}{1}\,\frac{1}{\varphi'}\left|\left(\int fF'\right)'\right| \\
& + \frac{\lambda^2}{1.2}\,\frac{1}{\varphi^3}\left|\begin{array}{l} \left(\varphi',\ \int f^2F'\right)' \\ \left(\varphi'',\ \int f^2F'\right)'' \end{array}\right|\begin{array}{l}\frac{1}{1} \\ \\ \end{array} \\
& - \frac{\lambda^3}{1.2.3}\,\frac{1}{\varphi'^6}\left|\begin{array}{lll} \varphi', & (\varphi^2)', & \left(\int f^3F'\right)' \\ \varphi'', & (\varphi^2)'', & \left(\int f^3F'\right)'' \\ \varphi''', & (\varphi^2)''', & \left(\int f^3F'\right)''' \end{array}\right|\begin{array}{l}\frac{1}{1.1.2} \\ \\ \\ \end{array} \\
& + \text{i t. d.}
\end{aligned}
$$

gdzie F, f, F′, etc. oznaczają Fa, fa, F′a, etc. a kréski oznaczają różniczkowanie względem a; znak całkowy $\int$ jest napisanym zamiast $\int_a$;

(*) W saméj rzeczy, w wypadku danym w tekscie, zamiast λfx napisawszy $x_1 f_1 x + x_2 f_2 x +$ etc., następnie rozwinąwszy różne potęgi téj ilości, każdy wyznacznik będzie zastąpionym przez summę wyznaczników tego samego rzędu i będziemy mieli rozwinięcie Fx podług potęg $x_1, x_2 \ldots$

(*Przyp.* CAYLEY'A.)

wprowadzonym jest zresztą jedynie dla symetryi i widocznie znika; w saméj rzeczy możemy równie dobrze napisać :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}x &= \mathrm{F} \\
&- \frac{\lambda}{1}\frac{1}{\varphi'} f\mathrm{F}' \\
&+ \frac{\lambda^2}{1.2}\frac{1}{\varphi'^3}\left|\begin{matrix} \varphi', & f^2\mathrm{F}' \\ \varphi'', & (f^2\mathrm{F}')' \end{matrix}\right|\frac{1}{1} \\
&- \frac{\lambda^3}{1.2.3}\frac{1}{\varphi^6}\left|\begin{matrix} \varphi', & (\varphi^2)', & f^3\mathrm{F}' \\ \varphi'', & (\varphi^2)'', & (f^3\mathrm{F}')' \\ \varphi''', & (\varphi^2)''', & (f^3\mathrm{F}')'' \end{matrix}\right|\frac{1}{1.1.2}, \\
&+ \text{i t. d.}
\end{aligned}
$$

Zatrzymuję się na chwilę, by zauważyć że twierdzenie Laplace'a jest w rzeczywistości równoważném z twierdzeniem Lagrange'a; mamy bowiem w pierwszém z tych twierdzeń $x = \varphi(a + \lambda f x)$, to jest $\varphi^{-1}x = a + \lambda f\varphi.\varphi^{-1}x$, zaś $\mathrm{F}x = \mathrm{F}\varphi.\varphi^{-1}x$, według twierdzenia Lagrange'a

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}\varphi + \frac{\lambda}{1}\mathrm{F}\varphi'.f\varphi + \frac{\lambda^2}{1.2}[\mathrm{F}\varphi'.(f\varphi)^2]' + \text{etc.}$$

gdzie po prawéj stronie $\mathrm{F}\varphi$ i $f\varphi$ są oboje uważane za symbol, argumentem jest zawsze a i kréski oznaczają różniczkowanie względem a, tak, że $\mathrm{F}\varphi'$ jest

$$d_a.\mathrm{F}\varphi a = \mathrm{F}'\varphi a.\varphi a', \text{ etc.}$$

co znaczy twierdzenie Laplace'a.

Przypuśćmy w twierdzeniu Wrońskiego $\varphi x = x - a$; to jest niech równanie będzie następujące

$$x - a + \lambda f x = 0,$$

wtedy każdy wyznacznik zostaje sprowadzonym do pojedyńczego wyrazu: tak, wyznacznik trzeciego rzędu będzie

$$\begin{vmatrix} (x-a)', & [(x-a)^2]', & f^3F' \\ (x-a)'', & [(x-a)^2]'', & (f^3F')' \\ (x-a)''', & [(x-a)^2]''', & (f^3F')'' \end{vmatrix},$$

gdzie w pierwszéj i drugiéj kolumnie kréski oznaczają różniczkowanie względem x, która to zmienna późniéj zakłada się $=a$; wyznacznik staje się

$$=\begin{vmatrix} 1, & *, & * \\ 0, & 1.2, & * \\ 0, & 0, & (f^3F')'' \end{vmatrix},$$

to jest mamy go $=1.1.2\ (f^3F')''$,

i podobnie w innych przypadkach; wzór staje się zatém

$$Fx = F - \frac{\lambda}{1} fF' + \frac{\lambda^2}{1.2}(f^2F')' - \frac{\lambda^3}{1.2.3}(f^3F')'' + \text{etc.}$$

zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a.

Przypuśćmy w ogólności $\varphi x = (x-a)\psi x$, czyli załóżmy równanie

$$(x-a)\psi x + \lambda f x = 0,$$

czyli

$$x - a + \lambda \frac{fx}{\psi x} = 0,$$

mamy wtedy za pomocą twierdzenia Lagrange'a

$$Fx = F - \frac{\lambda}{1} F' \frac{f}{\psi} + \frac{\lambda^2}{1.2}\left\{F'\left(\frac{f}{\psi}\right)^2\right\}' - \frac{\lambda^3}{1.2.3}\left\{F'\left(\frac{f}{\psi}\right)^3\right\}'' + \text{etc.}$$

Weźmy na przykład pod uwagę wyraz $\left\{F'\left(\frac{f}{\psi}\right)^3\right\}''$; to jest

$$=\left\{F'x.\frac{(x-a)^3(fx)^3}{(\varphi x)^3}\right\}'',$$

kréski oznaczają różniczkowanie względem x, a x ostatecznie ma być założoném $= a$; lub, co na jedno wychodzi,

$$=\left(\frac{d}{d\theta}\right)^2\left[F'(a+\theta)\frac{\theta^3[f(a+\theta)]^3}{[\varphi(a+\theta)]^3}\right],$$

gdzie kréski oznaczają już różniczkowanie względem θ, które to θ ma być ostatecznie założoném $= 0$. To jest

$$\left(\frac{d}{d\theta}\right)^2\left[F'(a+\theta)\frac{[f(a+\theta)]^3}{\left(\varphi'a+\frac{\theta}{1.2}\varphi''a+\dots\right)^3}\right].$$

Co może być napisaném $\left(F'f^3\frac{1}{A^3}\right)''$, gdzie

$$A=\varphi'+\frac{1}{2}\theta\varphi''+\frac{1}{6}\theta^2\varphi'''+\dots,$$

gdzie rozumie się że co się tyczy $F'f^3$, które jest wyrażoném jako funkcya samego a (θ tymczasem zostało założoném $= 0$), kréski zewnętrzne oznaczają różniczkowanie względem a, co się zaś tyczy A, $=\varphi'+\frac{1}{2}\theta\varphi''+$ etc. oznaczają one różniczkowanie względem θ, które później ma być założoném $= 0$. Twierdzenie zaś będzie teraz

$$Fx=F-\frac{\lambda}{1}\left(F'f.\frac{1}{A}\right)+\frac{\lambda^2}{1.2}\left(F'f^2.\frac{1}{A^2}\right)'-\frac{\lambda^3}{1.2.3}\left(F'f^3.\frac{1}{A^3}\right)''+\text{etc.}$$

To musi być równoważném z twierdzeniem Wrońskiego, choć przedstawia się w bardzo odmiennym i, jak sądzę, dogodniejszym kształcie; lecz wypadki otrzymane z porównania są bardzo godne uwagi : zajmiemy się teraz tém porównaniem.

Wziąwszy pod uwagę powyższy spółczynnik $\left(F'f^3\frac{1}{A^3}\right)''$, spółczynnik ten musi być równym wyrazowi Wrońskiego

$$\frac{1}{1.1.2}\,\frac{1}{\varphi'^6}\begin{vmatrix} \varphi', & (\varphi^2)', & f^3F' \\ \varphi'', & (\varphi^2)'', & (f^3F')' \\ \varphi''', & (\varphi^2)''', & (f^3F')'' \end{vmatrix};$$

lub, co wychodzi na to samo, wyznacznik ma być

$$=1.1.2\varphi'^6\left(\frac{1}{A^3}f^3F'\right)''$$

$$=1.1.2\varphi'^6\left\{f^3F'\left(\frac{1}{A^3}\right)''+2(f^3F')'\left(\frac{1}{A^3}\right)'+(f^3F')''\frac{1}{A^3}\right\},$$

to jest wartości

$$1.1.2\varphi'^6\frac{1}{A^3},\quad 1.1.2\varphi'^6 2\left(\frac{1}{A^3}\right)',\quad 1.1.2\varphi'^6 2\left(\frac{1}{A^3}\right)''$$

muszą być odpowiednio

$$=\varphi'(\varphi^2)''-\varphi''(\varphi^2)',\quad \varphi'''(\varphi^2)'-\varphi'(\varphi^2)''',\quad \varphi''(\varphi^2)'''-\varphi'''(\varphi^2)''.$$

Lecz, co wychodzi na jedno, jeżeli

$$\frac{1}{\left(\varphi'+\frac{\theta}{2}\varphi''+\frac{\theta^2}{2.3}\varphi'''+\ldots\right)^3}=A_0+\frac{1}{1}A_1\theta+\frac{1}{1.2}A_2\theta^2+\ldots,$$

te powyższe funkcye muszą być

$$1.1.2\varphi'^6A_0,\quad 1.1.2\varphi'^6 2A_1,\quad 1.1.2\varphi'^6A_2,$$

mamy

$$A_0 = \frac{1}{\varphi'^3}, \quad A_1 = -\frac{3}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'^4}, \quad A_2 = -\frac{\varphi'''}{\varphi'^4} + \frac{3\varphi''^2}{\varphi'^5},$$

tożsamości zaś są następujące

$$\begin{aligned}
2\varphi'^3 &= \varphi'(\varphi^2)'' - \varphi''(\varphi^2)', \\
&= \varphi'(2\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2) - \varphi''.2\varphi\varphi', \\
-6\varphi''\varphi'^2 &= \varphi'''(\varphi^2)' - \varphi'(\varphi^2)''', \\
&= \varphi'''.2\varphi\varphi' - \varphi'(2\varphi\varphi''') + 6\varphi'\varphi''), \\
+6\varphi''^2\varphi' - 2\varphi'''\varphi'^2 &= \varphi''(\varphi^2)''' - \varphi'''(\varphi)''^2, \\
&= \varphi''(2\varphi\varphi''' + 6\varphi'\varphi'') - \varphi'''(2\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2),
\end{aligned}$$

co w saméj rzeczy ma miejsce. I w podobny sposób, dla sprawdzenia spółczynników λ^4, mielibyśmy do porównania, pierwsze cztery wyrazy rozwinięcia

$$\frac{1}{\left(\varphi' + \frac{\theta}{2}\varphi'' + \frac{\theta^2}{2.3}\varphi''' + \ldots\right)^4},$$

z wyznacznikami utworzonymi z pierwowzoru (matrix)

$$\left|\begin{array}{llll}
\varphi', & \varphi'', & \varphi''', & \varphi'''' \\
(\varphi^2)', & (\varphi^2)'', & (\varphi^2)''', & (\varphi^2)'''' \\
(\varphi^3)', & (\varphi^3)'', & (\varphi^3)''', & (\varphi^3)''''
\end{array}\right|.$$

Szereg równań może być przedstawionym jak następuje, pisząc jak powyżéj A dla oznaczenia funkcyi

$$\varphi' + \frac{\theta}{2}\varphi'' + \frac{\theta^2}{2.3}\varphi''' + \ldots,$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{1}{\varphi'}.1,$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}^2}=\frac{-1}{\varphi'^3}\begin{vmatrix}\theta, & 1\\ \varphi', & \varphi''\end{vmatrix}.\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}^3}=\frac{+1}{\varphi'^6}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\theta^2, & \frac{1}{2}\theta, & 1\\ \varphi', & \varphi'', & \varphi'''\\ (\varphi^2)', & (\varphi^2)'', & (\varphi^2)'''\end{vmatrix}.\frac{1}{1.1.2},$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}^4}=\frac{-1}{\varphi'^{10}}\begin{vmatrix}\frac{1}{6}\theta, & \frac{1}{6}\theta^2, & \frac{1}{3}\theta, & 1\\ \varphi', & \varphi'', & \varphi''', & \varphi''''\\ (\varphi^2)', & (\varphi^2)'', & (\varphi^2)''', & (\varphi^2)''''\\ (\varphi^3)', & (\varphi^3)'', & (\varphi^3)''', & (\varphi^3)''''\end{vmatrix}.\frac{1}{1.1.2.1.2.3},$$

i t. d.

gdzie w każdym przypadku funkcya po lewéj stronie ma być rozwinięta tylko do téj potęgi jaka zachodzi w wyznaczniku: spółczynniki liczebne pierwszych wierszy poziomych różnych wyznaczników, są odwróceniami liczb

$$n(n-1)\ldots 2.1,\quad n(n-1)\ldots 2,\quad n(n-1),\ n,\ 1,$$

gdzie n jest wskaźnikiem najwyższéj potęgi θ. A zatém dowód twierdzenia Wrońskiego polega ostatecznie na postawieniu powyższych równań. Jako sprawdzenie, w czwartym wzorze, napiszmy $\varphi=e^a$ $(a=0)$; mamy

$$\left(\frac{\theta}{e^\theta-1}\right)^4 \text{ lub } \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{6}\theta^2+\frac{1}{24}\theta^3+\ldots\right)^4}$$

$$=-\frac{1}{24}\begin{vmatrix}\frac{1}{6}\theta^3, & \frac{1}{6}\theta^2, & \frac{1}{5}\theta, & 1\\ 1, & 1, & 1, & 1\\ 2, & 4, & 8, & 16\\ 3, & 9, & 27, & 81\end{vmatrix},$$

gdzie wyrażenie po prawéj stronie jest

$$= -\frac{1}{12}\left(-1.12 + \frac{1}{5}\theta.72 - \frac{1}{6}\theta^2.132 + \frac{1}{6}\theta^3.72\right)$$

$$= \qquad 1 - 2\theta + \frac{11}{6}\theta^2 + \theta^3,$$

a rozwinąwszy lewą stronę aż do trzeciéj potęgi θ,

$$\begin{array}{llr} = & 1 & = 1 \\ - & 4\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^3\right) & -2\theta - \frac{2}{5}\theta^2 - \frac{1}{6}\theta^3 \\ + & 10\left(\qquad \frac{1}{4}\theta^3 + \frac{1}{6}\theta^3\right) & + \frac{5}{2}\theta^2 + \frac{5}{3}\theta^3 \\ - & 20\left(\qquad \frac{1}{8}\theta^3\right) & -\frac{5}{2}\theta^3 \\ \hline & & 1 - 2\theta + \frac{11}{6}\theta - \theta^3 \end{array}$$

co się zgadza.

Wracając do powyższego równania i rozwijając różne wyrazy $(\varphi^2)' = 2\varphi\varphi'$, $(\varphi^2)'' = 2\varphi\varphi', + 2\varphi'^2$, etc., a zatém, ponieważ w każdym przypadku lewa strona zawiera φ', φ'', φ''', etc. lecz nie zawiera φ, widoczném jest iż po prawéj ręce wyrazy zawierające φ znoszą się nawzajem; przypuściwszy że tak jest, równania przybierają najprostszą formę otrzymaną przez założenie $\varphi = 0$, to jest mamy w ten sposób $(\varphi^2)' = 0$, $(\varphi^2)'' = 2\varphi'^2$, etc. W celu uproszczenia wzorów, zastąpmy φ', $\frac{1}{2}\varphi''$, $\frac{1}{6}\varphi'''$, $\frac{1}{24}\varphi''''$, etc. przez b, c, d, e, etc. znajdziemy następujące proste kształty: napisawszy dla skrócenia

$$\Theta = b + c\theta + d\theta^2 + e\theta^3 + \text{etc.}$$

będziemy mieli

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1}{b}.1,$$

$$\frac{1}{\Theta^2} = -\frac{2}{b^3}\begin{vmatrix} \theta, & \frac{1}{2} \\ b, & c, \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{\Theta^3} = -\frac{3}{b^6}\begin{vmatrix} \theta^2, & \frac{1}{2}\theta, & \frac{1}{3} \\ b, & c, & d \\ & b^2, & 2bc \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{\Theta^2} = -\frac{4}{b^{10}}\begin{vmatrix} \theta^3, & \frac{1}{2}\theta^2, & \frac{1}{3}\theta, & \frac{1}{4} \\ b, & c, & d, & e \\ & b^2, & 2bc, & 2bd + c^2 \\ & & b^3, & 3b^2c \end{vmatrix},$$

to jest dla Θ^{-n} prawa strona daje rozwinięcia dochodzące do θ^{n-1}. Zauważyć należy, że w wyznacznikach różne wiersze poziome są spółczynnikami rozwinięć Θ, Θ^2, Θ^3, etc. odpowiednio.

Dowodzenie jest bardzo łatwe; dość jest wziąść pod uwagę równanie dla $\frac{1}{\Theta^4}$. Załóżmy

$$\frac{1}{\Theta^4} = \ldots r\theta^6 + q\theta^5 + p\theta^4 + \epsilon\theta^3 + \frac{1}{2}\gamma\theta^2 + \frac{1}{3}\delta\theta + \frac{1}{4}\varepsilon,$$

gdzie widocznie $\varepsilon = \frac{4}{b^4}$, i napiszmy

$$\Theta = B_1 + C_1\theta + D_1\theta^2 + E_1\theta^3 + \ldots,$$

$$\Theta^2 = B_2 + C_2\theta + D_2\theta^2 + \ldots,$$

$$\Theta^3 = B_3 + C_3\theta + \ldots,$$

gdzie $B_1 = b$, $B_2 = b^2$, $B_3 = b^3$; chcemy pokazać że

$$\beta B_1 + \gamma C_1 + \delta D_1 + \varepsilon E_1 = 0,$$
$$\gamma B_2 + \delta C_2 + \varepsilon D_2 = 0,$$
$$\delta B_3 + \varepsilon C_3 = 0,$$

bo gdy to ma miejsce, opuszczając wyrazy zawierające θ^4, θ^5, etc. i pisząc

$$\beta\theta^3 + \frac{1}{2}\gamma\theta^2 + \frac{2}{3}\delta\theta + \varepsilon\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\varepsilon\Theta^4}\right) = 0,$$

następnie rugując β, γ, δ, ε, mamy

$$\begin{vmatrix} \theta^3, & \frac{1}{2}\theta^2, & \frac{1}{3}\theta, & \frac{1}{4} - \frac{1}{\varepsilon\Theta^4} \\ B_1, & C_1, & D_1, & E_1 \\ & B_2, & C_2, & D_2 \\ & & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

w którém to równaniu wyraz zawierający

$$\frac{1}{\Theta^4} \text{ jest } + \frac{1}{\varepsilon} B_1 B_2 B_3 \frac{1}{\Theta^4}, \quad = \frac{1}{4} b^{10} \frac{1}{\Theta^4};$$

a tak równanie jest $\frac{1}{\Theta^4} = -\frac{4}{b^{10}}$ w wyznaczniku bez wyrazu o którym mowa (to jest z wyrazem narożnym sprowadzonym do $\frac{1}{4}$).

Na dowód tego pomocniczego twierdzenia pomnóżmy wyrażenie na $\frac{1}{\Theta^4}$ przez $\frac{1}{\theta^4}$, i zróżniczkujmy względem θ, otrzymamy:

$$\frac{4(\theta\Theta)}{(\theta\Theta)^5} = \ldots - 2r\theta - q + \frac{\beta}{\theta^4} + \frac{\gamma}{\theta^3} + \frac{\delta}{\theta^4} + \frac{\varepsilon}{\theta^5}.$$

Pomnożywszy przez

$$\theta\Theta = B_1\theta + C_1\theta^2 + D_1\theta^3 + E_1\theta^4;$$

widzimy że $B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta + E_1\varepsilon$ jest spółczynnikiem $\frac{1}{\theta}$ w $\frac{4(\theta\Theta)'}{(\theta\Theta)^4}$, i w podobny sposób $B_2\gamma + C_2\delta + E_2\varepsilon$ jest spółczynnikiem $\frac{1}{\theta}$ w $\frac{4(\theta\Theta)'}{(\quad)^3}$, zaś $B_3\delta + C_3\varepsilon$ spółczynnikiem $\frac{1}{\theta}$ w $\frac{4(\theta\Theta)'}{(\theta\Theta)^2}$. Niech będzie teraz m całkowitą dodatną, $\frac{1}{(\Theta\theta)^m}$ rozwinięte podług zwiększających się potęg θ, zawiera potęgi θ, dodatne i odjemne, lecz nie zawiera wyrazu logarytmowego: zróżniczkowawszy więc podług θ, $\frac{(\Theta\theta)'}{(\Theta\theta)^{m+1}}$ nie zawiera wyrazu mającego $\frac{1}{\theta}$ (*); a więc wyrażenia o których mowa są każde z nich $= 0$; co dopełnia dowodzenia.

Powyższe wzory dające rozwinięcie $\frac{1}{\Theta^n}$ aż do θ^{n-1} w wyrazach mających spółczynniki w rozwinięciu Θ, Θ^2, Θ^{n-1} są, sądzę, godnymi uwagi.

(*) Sposób ten jest znanym sposobem używanym przez Jacobi'ego i Murphy'ego. (*Przyp.* CAYLEY'A.)

KONIEC TOMU DRUGIEGO.

Nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej, a przewodniczącego w towarzystwach Naukowej Pomocy i Nauk Ścisłych w Paryżu, wyszły następujące dzieła matematyczne:

1. Norzewski Roch. *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géométrie*. Paris, 1852, in-8°, avec planches (wyczerpane).
2. G. H. Niewęgłowski, professor analizy w Szkole wyższéj Polskiéj Montparnasse, egzaminator matematyki w liceum Świętego Ludwika, w Raryżu, 1866. — *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych* i t. d. (Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, błędy samoistne i względne; noty dotyczące własności liczb, wiele rozwiązanych zagadnień i ćwiczenia), in-8°, stron 352. Paryż, 1866. Cena 1 tal. 10 srg.
3. — *Geometryi część I. Geometrya płaska*, (wydanie drugie) w Paryżu, 1868 r., stron 436, in-8°, figury w tekscie. Cena 1 talar 10 srg.
4. — *Geometryi część I i II*, kurs zupełny, drugie wydanie całkiem przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometryi nowoczesnéj (pierwsze wydanie z 1852 roku). Paryż, 1868, in-8°, stron VIII i 778. Cena 2 tal. 20 srg.
5. — *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami*. Paryż, 1870 r., in-8°, str. XV i 407. Cena 1 tal. 15 srg.
6. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami*, wyłożył W. Folkierski, inżynier cyw, b. uczeń Szkoły Politechnicznéj w Karlsruhe, licencyat n. m. P. F. Sorbony, Professor mechaniki w Szkole Wyższéj Przygotowawczéj w Paryżu, tom I, zawierający rachunek różniczkowy, oraz dodatek Władysława Trzaski o wyznacznikach. Paryż, 1870, in-8°, str. XLIII i 1087, fig. w tekscie 136. Cena 3 tal. 10 srg.
7. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom I (Główne artykuły przez pp. Frankego, Gosiewskiego, Sągajłę, Trzaskę, Żmurkę). Paryż, 1871, in-4°, stron 186, figur 5. Cena 2 tal.
8. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom II (Artykuły pp. Gosiewskiego, Kucharzewskiego, Sągajły, Trzaski i Żalińskiego). Paryż, 1872, in-4°, stron 240, figur 8. Cena 2 tal. (Obydwa tomy razem oprawne 3 tal. 22 srg. 6 fen.).
9. *Wykład Hydrauliki* wraz z teoryą machin wodnych, poprzedzony wiadomościami wstępnemi z hydrostatyki i hydrodynamiki, przez pp. Feliksa Kucharzewskiego i Wł. Klugera (Inżynierów dyplomowanych szkoły Drógi Mostów w Paryżu). Paryż, 1873, str. LVI i 1019. Figur w tekscie 110, oprawa angielska. Cena 20 fr.

10. *Zasady Rachunku różniczkowego i całkowego*, przez Władysława Folkierskiego, stałego Sekretarza i Wice-prezesa Towarzystwa Nauk Ścisłych, tom II. *Rachunek Całkowy*. Część pierwsza : Całkowanie różniczek i t d. Paryż, 1873, stron XVI i 740, figur 76, oprawa angielska. Cena 12 franków.

11. *Wykład mechaniki cząsteczkowej* (molekularnéj) przez Władysława Gosiewskiego, prof. Fizyki matematycznéj. Tomu Igo, Części różniczkowéj zeszyt pierwszy, Paryż, 1873, stron 176. Cena fr. 4.

12. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom III, zawierający prace pp. W. Folkierskiego, Klugera, Kucharzewskiego, Dolińskiego, Gosiewskiego i Martynowskeigo. Paryż, 1853, str. VIII i 358, figur 96. Cena fr. 12.

13. *Kurs Mechaniki Rozumowej* przez G. H. Niewęgłowskiego, dwa tomy, Tom I, *Statyka. — Dynamika punktu*. Paryż, 1873. In-8°, stron 544. z figurami, cena fr. 10.

14. *Wykład zupełny Algebry*, przez Adolfa Sągajłę w czterech tomach. Tom I : *Początki Algebry*. Paryż, 1873, in-8°, stron 632 z figurami. Cena 6 fr.

15. *Bibliografia Piśmiennictwa Polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań*, przez Dr. Teofila Żebrawskiego, Człon. Akad. Krakowskiéj. Kraków, 1873, in-8°, stron 617 z 4 tablicami. Cena 3 tal.

16. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom IV, zawierający wypracowania pp. A. Martynowskiego, K. Brandta, J.-N. Frankego, W. Klugiera, W. Puchewicza, S. Baranowskiego i Cayley'a (tłomaczenie z angielskiego). In-4°. Paryż, 1874, czterdzieści dwa arkuszy druku, stron 331, z 99 figurami w tekscie. Cena fr 12.

17. Adolf Sągajło, professor Matematyki : *Algebra*, tom II, *Teorya Wyznaczników i ich przedniejsze zastosowania*, in-8°, str. 400. Paryż, 1874.

ZNAJDUJĄ SIĘ OBECNIE W DRUKU.

18. *Kurs Mechaniki Rozumowéj* G. H. Niewęgłowskiego tom II : *Dynamika układów materyalnych, Hidrostatyka i Hidrodynamika*, in-8°.

19. *Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, Tom V.

Zarząd Biblioteki Kórnickiéj czuje potrzebę wyrazić żal swój, że był zmuszonym znacznie podnieść cenę ostatnich nakładów. Ma to miejsce szczególniéj w dziełach matematycznych, drukowanych w Paryżu, gdzie papier nowym obłożony podatkiem, podwyższone taryfy drukarskie i niesłychane trudności korekty wpłynęły tak niekorzystnie na koszta druku, iż nawet podniesione ceny o wiele jeszcze pokryć ich nie mogą.

Niżej wymienione księgarnie zgłosiły się z obietnicą sprzedawania po stałych cenach wszystkich nakładów Biblioteki Kórnickiej i odbierają je wprost od Zarządu zaraz po wykończeniu każdego tomu.

w WARSZAWIE, pp. GEBETHNER i WOLFF.
» » Michał GLÜCKSBERG.
» » Adolf KOWALSKI.
» » J. J. OKOŃSKI.
» » Maurycy ORGELBRAND.
» » G. SENNEWALD.
» » UNGER i BANARSKI.

w KRAKOWIE, » Józef CZECH.
» » D. E. FRIEDLEIN (Rynek, 11).
» » Stanisław KRZYŻANOWSKI.
» » Alexander NOWOLECKI.
» » Fr. TRZECIESKI (księgarnia wydawnictwa dzieł tanich i pożytecznych).

we LWOWIE, » A. D. BARTOSZEWICZ (księgarnia Polska, ulica Kopernika l. 12).
» » GUBRYNOWICZ i SCHMIDT.
» » MILIKOWSKI.
» » F. H. RICHTER.
» » Karol WILD.

w POZNANIU, » Mieczysław LEITGEBER i SPÓŁKA.
» » J. K. ŻUPAŃSKI.

w ŚREMIE, » K. GĄSIOROWSKI.

w PETERSBURGU i MOSKWIE. » B. M. WOLFF.

w PARYZU, Księgarnia Luksemburska, 16, *rue de Tournon*.

Z zamówieniami zgłaszać się należy do Zarządu Biblioteki Kórnickiej, pod adressem : Dr. Z. Celichowski w Kórniku (W. Ks. Poznańskie).

Paryż — Drukarnia E. MARTINET, rue Mignon, 2.

Niżej wymienione Księgarnie zajęły się z ochotą sprzedawania po stałych cenach wszystkich nakładów Biblioteki Kórnickiej i odbierają je wprost od Zarządu Zaraz po wykończeniu każdego tomu.

w WARSZAWIE,	pp.	Gebethner i Wolff.
»	»	Michał Glücksberg.
»	»	Adolf Kowalski.
»	»	J. J. Okoński.
»	»	Maurycy Orgelbrand.
»	»	G. Sennewald.
»	»	Unger i Bawarski.
w KRAKOWIE,	»	Józef Czech.
»	»	D. E. Friedlein (Rynek, 411).
»	»	Stanisław Krzyżanowski.
»	»	Aleksander Nowolecki.
»	»	Fr. Trzemeski (księgarnia wydawnictwa dzieł tanich i pożytecznych).
we LWOWIE,	»	A. D. Bartoszewicz (księgarnia Polska, ulica Kopernika l. 42).
»	»	Gubrynowicz i Schmidt.
»	»	Milikowski.
»	»	F. H. Richter.
»	»	Karol Wild.
w POZNANIU,	»	Mieczysław Leitgeber i Spółka.
»	»	J. K. Żupański.
w SREMIE,	»	K. Łasiołowski.
w PETERSBURGU i MOSKWIE.	»	B. M. Wolff.
w PARYŻU,		Księgarnia Luksemburska, 16, rue de Tournon.

Z zamówieniami zgłaszać się należy do Zarządu Biblioteki Kórnickiej, pod adresem: Dr. Z. Celichowski w Kórniku (W. Ks. Poznańskie).

Paryż. — Drukarnia E. Martinet, rue Mignon, 2.