

1.12 probablistyka
2.22 akustyczne metody badania
materiałów i układów
mechanicznych

Piotr Kazimierczyk
Zbigniew Kotulski

O OPTYMALNYM ROZSTAWIENIU
CZUJNIKÓW

42/1987
42/1987

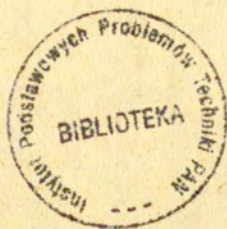
P.269a



WARSZAWA 1987

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 16 listopada 1987 r.



56892



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark.wyd. 5,49 Ark.druk. 7,75
Oddano do drukarni w lutym 1988 r.
Nr zamówienia 95/88

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Piotr Kazimierczyk

Zbigniew Kotulski

Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych

O OPTYMALNYM ROZSTAWIANIU CZUJNIKÓW

Streszczenie.

W niniejszej pracy przedstawiliśmy metody optymalnego planowania rozstawiania urządzeń pomiarowych w celu pozyskiwania danych służących kilku fundamentalnym rodzajom zadań związanych z diagnostyką pól losowych. Zawarte w niniejszym opracowaniu wyniki pozwalają efektywnie rozwiązać szereg najważniejszych problemów związanych ze statystycznym opracowywaniem danych eksperymentalnych: identyfikacja parametrów modeli regresyjnych, filtracja wartości losowych pól mechanicznych i falowych, detekcja położenia i kształtu źródeł w procesach falowych i innych. Rozważono liczne przykłady zastosowań prezentowanych rezultatów teoretycznych. Zamieszczono przykładowe wydruki programów komputerowych oraz ich listingi. Niniejsza praca stanowi również pierwszy krok w kierunku wypracowania zunifikowanego sposobu analizy tych zadań i konstruowania odpowiadających im kryteriów optymalności. Zbiera bowiem istniejące rezultaty związane z najważniejszymi formalizmami i prezentuje je w ramach jednego (nakreślonego w rozdziale drugim) podejścia metodologicznego.

*Motto: "Jeśli nie wiecie dokąd idziecie
dojdziecie najprawdopodobniej
gdzie indziej".*

Dr. Laurence Peter

I. Wstęp.

Zadanie pozyskania informacji o stanie i dynamice realnych obiektów leży u podstaw niemal każdej działalności naukowej. Wiąże się ono zawsze z dokonywaniem pomiarów. W przypadku, gdy cel, jakiemu służą pomiary ogranicza czas zbierania informacji oraz narzuca surowe wymagania jakościowe, szczególnego znaczenia nabiera sposób dokonywania pomiarów. Ma to miejsce w szczególności wówczas, gdy zebrane dane służyć mają do automatycznego podejmowania decyzji (np. sterowania "on line") w trakcie toczącego się procesu technologicznego - jest to typowa sytuacja w systemach zrobotyzowanych.

Zwielokrotnienie tempa i podniesienie jakości procesu pozyskiwania informacji wymaga między innymi doskonalenia aparatury pomiarowej, stosowania najnowszych technologii przeprowadzania pomiarów i opracowywania danych. Wiąże się to często ze znacznymi nakładami finansowymi. Ogromnej roli nabiera w tej sytuacji optymalizacja planowania eksperymentu i pomiarów. Jednym z najważniejszych zadań należących do tej dziedziny jest problem doboru miejsc (przez miejsce rozumiemy tu w ogólności punkt czasoprzestrzeni - położenie oraz moment dokonywania pomiaru), w których lokalizuje się czujniki.

Co niezwykle istotne, przeprowadzenie optymalizacji doboru punktów pomiarowych nie wymaga zazwyczaj istotnych nakładów (koszty przeprowadzenia analizy - nawet wymagającej uzbrojenia w nowoczesny sprzęt komputerowy - są najczęściej minimalne w porównaniu z kosztami samych eksperymentów na realnych obiektach podlegających pomiarom). Natomiast efekty uzyskane dzięki tym analizom mogą prowadzić nie tylko do polepszenia jakości wyników oraz skrócenia czasu eksperymentów, ale również ograniczenia skali i kosztów badań a w pewnych przypadkach wręcz decydują o samej możliwości pozyskania pewnych danych. Zastosowanie

optymalizacji planowania eksperymentu pozwala bowiem często zastąpić bez utraty jakości informacji :

- a) wielką liczbę danych pochodzących z wielu czujników - mniejszą liczbą danych zbieranych w mniejszej ilości punktów,
- b) dane zbierane w punkcie, gdzie warunki technologiczne wymagają stosowania niezwykle drogiej aparatury pomiarowej - danymi pochodzącymi z miejsc nie stwarzających takich wymagań,
- c) dane pochodzące z punktów, w których aparatura pomiarowa ulega zniszczeniu - danymi zbieranymi w bezpiecznych dla ludzi i sprzętu miejscach,
- d) dane, których nie można uzyskać bez ingerencji w badany proces technologiczny (który może zostać zakłócony przez wprowadzenie czujników lub dokonanie pomiaru) - innymi danymi, osiągalnymi bez podobnych niedogodności,
- e) dane, których zebranie jest technologicznie niemożliwe - danymi możliwymi do uzyskania.

Przykłady takich sytuacji opisano w punkcie 2 niniejszej pracy.

Oczywiście z samego założenia optymalizacja jest zadaniem celowym (polega wszak na wyborze opcji najlepiej służącej zadanemu celowi). Zatem również optymalne rozstawianie czujników z samej definicji jest zadaniem niezwykle atrakcyjnym i godnym poważnych nakładów teoretycznych prac badawczych. Jednak omawiana przez nas działalność optymalizacyjna jest wyjątkowa. Jest tak zarówno ze względu na minimalne koszty planowania eksperymentu, jak i nieproporcjonalnie duże efekty - jak wskazano powyżej mogą one prowadzić do jakościowo nowych (tańszych, dokładniejszych, szybszych, realizowalnych) metod pozyskiwania informacji.

Informacja, jaka jest wymagana dla osiągnięcia danego celu nie zawsze jest jednoznacznie zdefiniowana. Terminem tym posługiwaliśmy się do tej pory w ogólnie rozumianym znaczeniu. Jest jednak naturalnym spodziewać się, że różnym celom odpowiadać będą różne wymagania odnośnie znajomości obiektów realnych z którymi są związane. Jakkolwiek wygodnie byłoby móc posługiwać się pewną uniwersalną kategorią, którą można by nazwać informacją, to jednak dotychczas wszelkie wysiłki idące w kierunku zdefiniowania takiej kategorii okazały się nieskuteczne (por. [9] D). Wbrew bowiem autorom proponującym te lub inne wielkości jako kryteria optymalności dla różnorodnych zadań wymagających wykorzystywania wyników pomiarów (w pracy [44]]

takim uniwersalnym kryterium miała być wzajemna statystyczna informacja, jaką niosą o sobie wyniki pomiarów przeprowadzonych w wybranych punktach - aby zapobiec powtarzaniu się informacji postuluje się minimalizować tę wielkość; por. też [55]) już sama definicja celu zawierać musi dostatecznie precyzyjne instrumenty, które pozwalają stwierdzić kiedy cel jest osiągnięty. Na przykład, kiedy celem jest estymacja pewnej wielkości musimy stworzyć jednoznaczne kryterium jakości estymacji dla porównywania różnych estymatorów - inaczej zadanie będzie źle postawione (nie będziemy na przykład w stanie odróżnić estymatora największej wiarygodności od estymatora stałego równego 777,2 niezależnie od wyników pomiarów). Intuicje te zostaną rozwinięte i uzasadnione w rozdziale 2. Wykazujemy w nim na przykładach, że kryterium optymalności wyprowadzać należy zawsze z definicji celu oraz wymieniamy niektóre ważniejsze klasy problemów wymagających zbierania i opracowywania wyników pomiarów dokonywanych na polach losowych.

W kolejnych rozdziałach zadania powyższe są analizowane w sposób bardziej szczegółowy. Zapisujemy w nich rozwiązania najważniejszych klas problemów statystyki pól losowych i związanych z nimi kryteriów optymalnego rozstawiania czujników.

Trzeci rozdział dotyczy zadań związanych z identyfikacją parametrów modeli pól losowych. Stanowią one rozszerzenia klasycznych problemów analizy regresji na przypadek, kiedy kolejne wyniki nie spełniają podstawowego założenia klasycznej teorii analizy regresji - niezależności błędów nakładających się na kolejne pomiary. W przypadku, gdy podlegające badaniu i pomiarom wielkości są wartościami pola losowego opisującego stan konstrukcji, miejsce błędów pomiarowych z klasycznego schematu zajmują losowe fluktuacje tych wartości, które są oczywiście w ogólności zależne.

Czwarty rozdział w podobny sposób uogólnia klasyczne regresyjne metody związane z ekstrapolacją i filtracją pola losowego reprezentującego na przykład sygnał akustyczny, promieniowanie elektromagnetyczne lub pole przemieszczeń powłoki czy innych elementów konstrukcji. Rozważono w nim w szczególności przykład porównujący rozmieszczenie czujników przy pomiarze wartości pola jednorodnego i niejednorodnego.

W piątym rozdziale zadanie optymalnego rozmieszczania

czujników stawiane jest jako zadanie optymalnego sterowania z niepełną informacją opisywanego równaniem w przestrzeni nieskończonej - wymiarowej. Metodę tę stosuje się tam do problemu pomiarów procesu falowego w skończonej liczbie punktów.

W rozdziale szóstym rozważa się jeszcze inne kryterium optymalności, zgodnie z którym wybiera się taki sposób rozstawiania czujników, który zapewnia osiągnięcie najwyższej wrażliwości (rozdzielczości) ze względu na zadany sygnał.

W dodatku zamieszczamy listingi programów używanych dla znajdowania optymalnych położzeń czujników w prezentowanych w rozdziałach 3 i 4 wybranych zadaniach statystycznego opracowywania wyników pomiarów pól losowych. Programy te zaprojektowano w taki sposób aby w przypadku konkretnych potrzeb niewielkie adaptacje pozwalały na ich wykorzystanie do analizy innych problemów rozstawiania czujników (należy w tym celu przededefiniować procedury zależne od postaci kryterium optymalności związanego oczywiście z konkretnym rozważanym problemem).

2. Problem rozstawiania czujników.

1. Postawienie zadania; cel pomiarów; kryterium optymalności rozstawiania czujników.

Celem przeprowadzenia eksperymentu i pomiarów różnorodnych wielkości jest zazwyczaj uzyskanie informacji o takich podmiotach, które nie mogą podlegać pomiarowi. Na przykład, przemieszczenia często mierzymy po to aby wnioskować z nich na temat naprężeń, częstości i amplitudy - z myślą o identyfikacji stałych materiałowych, temperaturę na powierzchni narzędzia - dla oceny temperatury wewnątrz itp.

W przypadku obiektów stochastycznych najczęściej na podstawie obserwacji kilku realizacji pewnych funkcjonałów określonych na przestrzeni stanów obiektu ocenić chcemy globalne charakterystyki probabilistycznego modelu obiektu. Przykładem może być pomiar w kilku punktach losowego pola amplitud (natężenia) sygnału akustycznego w celu wyznaczenia funkcji wartości średniej tego pola w zależności od zmiennych przestrzennych i czasu. Zależność ta może być pożądana ze względu na nadrzędny cel, jakim może być na przykład :

- a) zbadanie skuteczności tłumienia szkodliwego hałasu,
- b) przeciwnie - zbadanie skuteczności zastosowanych środków transmisji sygnału akustycznego,
- c) analiza możliwości wykorzystania tego sygnału dla detekcji położenia jego źródła.

We wszystkich wymienionych zadaniach nie są przedmiotem zainteresowania bezpośrednio mierzone wielkości, ale obiekty z nimi w jakiś sposób związane. Czujniki należy zatem rozmieszczać tak, aby mierzone przez nie wielkości niosły jak najwięcej informacji o interesującym nas obiekcie.

Tak dla interpretacji wyników pomiarów, jak i dla dokonania analizy rozstawienia czujników konieczne jest istnienie modelu (lub klasy modeli), za pomocą którego formalizuje się związki wielkości mierzonych z badanym podmiotem. Warunek, że cel badań zostanie zapisany w terminach takich modeli za pomocą obiektów

matematycznych jest oczywiście w szczególności warunkiem koniecznym możliwości zastosowania matematycznych środków optymalizacji planu eksperymentu.

To w jaki sposób owo matematyczne sformułowanie wiąże się z nadrzędnym celem badań leży poza tematem niniejszego opracowania i nie będzie w nim głębiej rozwijane. Aby zaprezentować kontekst, w jakim pojawia się zasadniczy problem rozważany w tej pracy - optymalizacja doboru punktów pomiarowych - niezbędne jest jednak choćby kótkie naskicowanie tych związków. Uczynimy to na przykładzie wprowadzonym powyżej.

Rozważmy w jaki sposób jeden z wyliczonych trzech nadrzędnych celów (a,b,c) może być reprezentowany w matematycznym opisie celu eksperymentu.

W przypadku celu (a) najbardziej interesujące są wartości średniego natężenia hałasu w okolicach chronionych. Kryterium jakości estymacji funkcji średniego natężenia pola winno być najbardziej uczulone na te regiony.

W przypadku celu (b) zasadniczą wagę ma związek pola w punkcie nadawania i w obszarze odbioru - te dwa regiony winny być najbardziej uwzględnione przez kryterium jakości estymacji średniej.

W celu (c) istotny jest opis geometrii średniego pola - nie tylko jego lokalne własności.

Zatem przykładowym kryterium jakości odpowiadającym celowi pierwszemu może być całka wariancji błędów estymacji średniej pola w obszarze chronionym; w drugim przypadku może to być ślad macierzy kowariancji błędów estymacji współczynników funkcji regresji podającej zależność średniego natężenia pola w otoczeniu nadajnika i w obszarze odbioru, zaś w trzecim - wariancja sumy odległości Czebyszewa estymatora średniej od średniej pola oraz odległości Czebyszewa ich pochodnych.

Sposób tworzenia kryteriów podobnych do powyższych i ich doboru do nadrzędnego kryterium nie jest tematem naszych rozważań. W dalszym ciągu zakładamy, że cel badań jest już reprezentowany poprzez konkretną matematyczną definicję kryterium optymalności przeprowadzenia statystycznego opracowania wyników pomiarów :

$$(2.1) \quad \mathcal{J}(\mathcal{X}, \mathbb{B}(\mathcal{X}), \Theta) \longrightarrow \min_{\Theta \in \Theta}$$

gdzie \mathcal{J} jest kryterium optymalności zależnym od postaci przyjętej klasy modeli $\langle \mathbb{M}(\Theta), \Theta \in \Theta \rangle$ oraz ich związku z wynikami pomiarów \mathbb{B} oraz z nadrzędnym celem dotyczącym obiektu modelowanego przez $\mathbb{M}(\Theta)$.

Θ jest zbiorem możliwych opcji θ (na przykład zestawów parametrów liczbowych charakteryzujących model), spośród których należy wybrać jedną na podstawie wyników \mathbb{B} tak, aby zapewnić osiągnięcie minimum funkcjonału \mathcal{J} - wówczas najlepiej osiągnany będzie cel nadrzędny (o ile kryterium \mathcal{J} jest adekwatnie do tego celu dobrane - przypominamy, że taką właśnie założenie przyjmujemy nie wnikając w broblematykę doboru kryterium do celu).

Przez \mathcal{X} oznaczono konfigurację (w czasoprzestrzeni) punktów, w których dokonywane są odczyty wyników $\mathbb{B}(\mathcal{X})$. \mathcal{X} może być zbiorem skończonym (gdy pomiary wykonuje się w skończonej liczbie miejsc i w skończonej liczbie momentów czasu) lub nieskończonym (najczęściej wówczas, gdy rejestruje się w sposób ciągły wskazania urządzeń pomiarowych a czas modeluje się za pomocą przedziału liczbowego).

Określenie.

Zbiór \mathcal{X} nazywany będzie w dalszym ciągu *planem eksperymentu* (por. [22 1,140 1,141 1]). Zbiór wszystkich możliwych do zrealizowania w danym eksperymencie planów \mathcal{X} oznaczymy \mathcal{X} i będziemy nazywać przestrzenią planów eksperymentu.

Zależność \mathcal{J} od \mathcal{X} nie tylko poprzez $\mathbb{B}(\mathcal{X})$ ale i bezpośrednio wynika z faktu, że cel nadrzędny może być (i najczęściej jest) powiązany z kosztami przeprowadzonych pomiarów zależnymi oczywiście od liczby i konfiguracji punktów pomiarowych.

Nietrudno wykazać, że powyższa interpretacja zapisu (2.1) może służyć nie tylko optymalnemu wykorzystaniu danych lecz również określeniu kryterium optymalności rozstawiania czujników

(wyboru optymalnego planu x). Załóżmy, że dla każdego planu x potrafimy wyznaczyć

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \mathcal{J}(x, \mathbb{B}(x), \theta)$$

lub też, ze względu na trudności matematyczne bądź wystarczalność suboptymalnych rozwiązań posługujemy się regułą

$$\tilde{\theta} \approx \arg \min_{\theta \in \Theta} \mathcal{J}(x, \mathbb{B}(x), \theta).$$

Zauważmy, że zarówno $\hat{\theta}$ jak i $\tilde{\theta}$ są funkcjami wyników pomiarów $\mathbb{B}(x)$ a więc - pośrednio - funkcjami planu eksperymentu x .

Niech

$$\theta^* = \theta^*(\mathbb{B}(x))$$

będzie wspólnym dla $\hat{\theta}$ i $\tilde{\theta}$ oznaczeniem odpowiedniej funkcji. Skoro osiaganie celu wymaga wyboru tej opcji θ , która pozwala minimalizować wartość funkcjonau \mathcal{J} , to realizacja tego celu będzie najpeiniejsza wówczas, gdy minimalizacja przeprowadzona zostanie ze względu na wszystkie argumenty, co prowadzi do następującego kryterium optymalności planu eksperymentu:

$$\mathcal{J}(x, \mathbb{B}(x), \theta^*(\mathbb{B}(x))) \longrightarrow \min_{x \in \mathcal{X}}$$

Określenie:

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{J}(x, \mathbb{B}(x), \theta^*(\mathbb{B}(x)))$$

nazywać będziemy optymalnym planem eksperymentu.

Uwaga 1.

Powyższe sformułowanie można w całości powtórzyć w terminach maksimum zamiast minimum. Wystarczy w tym przypadku funkcjonal \mathfrak{J} zamienić na funkcjonal $-\mathfrak{J}$. Tak określonej funkcji wyrażającej kryterium optymalności można nadać interpretację informacji - chodzi wszak o jej maksymalizację - maksymalizację informacji niesionej przez wyniki o opcjach najlepiej odpowiadających nadrzédnemu celowi.

Określenie.

Funkcję

$$-\mathfrak{J}(x, \mathfrak{M}(x), \theta^{\#}(\mathfrak{M}(x)))$$

gdzie \mathfrak{J} jest kryterium optymalności (wyboru opcji θ) dobranym stosownie do nadrzédnego celu nazywać będziemy *informacją włączającą* (dla danego zadania) jaką niosą pomiary zebrane w punktach planu x .

Istnienie uniwersalnego miernika tak rozumianej informacji - odpowiadającego różnym celom wymagającym statystycznej obróbki sygnałów losowych, w świetle powyższych rozważań, jest niemożliwe - kryterium \mathfrak{J} zależy istotnie od nadrzédnego celu badań. Tym niemniej w literaturze poświęconej planowaniu eksperymentów dla pól losowych opisujących pola mechaniczne pogląd taki sformułowano ([42]) oraz rozwijano ([32], [55]). Dlatego we wszystkich częściach naszego opracowania uwypuklamy związek pomiędzy celem oraz kryterium optymalności a także zależność wyników optymalizacji od tego kryterium. Dyskusję tego ważnego metodologicznie problemu pogłępbimy w punkcie 2.4. Wcześniej jednak (w punktach 2.2 i 2.3) scharakteryzujemy krótko istniejące wyniki oraz wskażemy kilka przykładów ilustrujących tak sposób stawiania zadań i różnorodność wynikłych kryteriów, jak i wagę prowadzenia optymalizacji planowania eksperymentów. Wnioski z tych rozważań znajdą następnie pełne potwierdzenie w kolejnych rozdziałach opracowania poświęconych ściślemu postawieniu oraz rozwiązaniu kilku fundamentalnych klas problemów

związanych z interpretacją danych doświadczalnych (wyliczono je we wstępie). W szczególności również inny z zakorzenionych lecz nie zawsze uzasadnionych schematów związanych z planowaniem eksperymentów - polegający na równomiernym rozstawianiu czujników - okazał się być dalekim od optymalnego w większości badanych przykładów.

2.2 Krótka charakterystyka literatury.

Mówiąc o optymalizacji planowania eksperymentu nie sposób przedstawić tej dziedziny jako odkrycia ostatnich lat. Już w latach trzydziestych opracowano idee stanowiące po dziś dzień o zasadniczych kierunkach badań w zakresie analizy czynnikowej (patrz [12]) opartej na aparacie analizy regresji. Idee te rozwinęto znacznie w okresie powojennym ([7], [9], [37], [49], [50], [51], [52]). Również w języku polskim dostępne są monografie związane z tym zagadnieniem (np. [25] - tłumaczenie z jęz. rosyjskiego, [8], [17], [22], [39] - rodzimych autorów). Jeszcze bogatsza jest bibliografia zagadnień planowania eksperymentu z lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych (patrz spis literatury w [41], zawierający ponad 100 pozycji, głównie monograficznych).

Jeżeli chodzi o wybór momentów próbkowania (kwantyzację jedynie w dziedzinie czasu - nie przestrzeni), to pierwszych rezultatów poszukiwać można już w literaturze lat dwudziestych ([26])! Zasadnicze dla wyboru okresu próbkowania twierdzenie podali też niezależnie autorzy prac [29], [36] i [45]. Do dzisiaj analizy dotyczące kwantyzacji odbieranych sygnałów prowadzone są zazwyczaj przy ograniczeniu się do próbkowania równomiernego (por. [13], [23]). Nierównomierne próbkowanie było przedmiotem pracy [58].

Oczywiście w zakres planowania eksperymentu wchodzi wiele problemów nie związanych z tematem tego opracowania jak dobór postaci modelu i jego wpływ na wyniki badań, kształtowanie wielkości wejściowych w eksperymencie czynnym, projektowanie sprzężenia zwrotnego w trakcie eksperymentu itp. (por. np. [14], [24] w [33] oraz bibliografie tamże).

Jak zatem na tle powyżej scharakteryzowanej przebogatej literatury rysuje się niniejsza praca?

Oto niemal wszystkie istniejące rezultaty dotyczą sytuacji, w których akceptowalne są założenia leżące u podstaw klasycznej analizy regresji (patrz p.3.1). Rozważane są wielowymiarowe, deterministyczne modele, w których na wejściach i wyjściach pojawiają się nieskorelowane zmienne gaussowskie (por [22], [51]). Jak pisze autor [23] "Występowanie korelacji między awielkościami wejściowymi istotnie utrudnia identyfikację modelu matematycznego badanego obiektu. Zreguły otrzymuje się funkcje regresji nieistotne z punktu widzenia testu F". Tymczasem, istnienie tych korelacji nierzadko nie daje się zaniedbać.

W [41] czytamy w tym kontekście ;" W sytuacji, gdy pomiary wyjść obiektu okazują się być skorelowane celowym jest interpretowanie ich jako realizacji pola losowego". Oczywiście ta sama interpretacja jest najbardziej naturalna, gdy sam obiekt modelowany jest od początku za pomocą pól losowych (ew. w szczególnym przypadku - procesów stochastycznych). Takich właśnie sytuacji dotyczy niniejsza praca pisana z myślą o automatyzacji i algorytmizacji diagnostyki losowych pól mechanicznych i falowych (np. akustycznych, termicznych).

Spośród wszystkich prac wymienionych powyżej oraz cytowanych w nich kilkuset innych minimalna część dotyczy teorii optymalizacji doboru punktów dla pomiarów pól losowych. Jeszcze mniej można znaleźć opisów zastosowań, które wykorzystują teoretyczne rezultaty tych prac do analizy problemów pomiarowych z interesującej nas dziedziny. Większość spośród nielicznych opisanych zastosowań dotyczy zagadnień meteorologicznych i oceanograficznych. W wielu innych dziedzinach natomiast problematyka ta jest mało znana i popularna (por.[28]). Co więcej jeśli chodzi o (bardzo już nieliczne) prace dotyczące pól mechanicznych to budzą one metodologiczne wątpliwości wspomniane w p.2.4.

Tym istotniejsze jest naszym zdaniem przedstawienie najważniejszych wyników teoretycznych oraz wskazanie na przykładach sposobu ich właściwego i metodologicznie konsyentnego zastosowania do konkretnych zadań diagnostycznych. Takie są cel i zawartość niniejszej pracy.

2.3. Przykłady problemów; związane z nimi kryteria optymalności;
waga optymalizacji planowania eksperymentu.

a) W [46] dokonano porównania wyników optymalizacji planu rozbudowy sieci stacji obserwacyjnych (dokonujących pomiarów oceanograficznych). Rozbudowa miała polegać na lokalizacji w rejonie $D=[-1,1] \times [-1,1]$ siódmej stacji. Istniejące stacje położone były w punktach $x^{(1)}(0,0), x^{(2)}(1,1), x^{(3-6)}(\pm 0.5, \pm 0.5)$. Obserwowane pole modelowane było za pomocą wielkości

$$(2.3) \quad y(x_1, x_2) = \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_1^2 + \beta_6 x_2^2 + \zeta(x_1, x_2)$$

gdzie $(x_1, x_2) = x$ - współrzędne kartezjańskie,

$\zeta(x_1, x_2)$ - pole odchyień od normy klimatycznej opisanej

$$\text{składnikiem } \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_1^2 + \beta_6 x_2^2.$$

O polu odchyień ζ zakłada się, że ma zerową średnią oraz funkcję kowariancji:

$$K(x, y) = \exp(-0.5|x-y|).$$

Porównanie dotyczyło wyników uzyskanych na drodze zastosowania dwu różnych kryteriów. Pierwsze (patrz [40]) związane było z badaniem współczynników regresji β . Jeżeli celem pomiarów jest wyznaczenie ich wartości to kryterium jakości \mathfrak{J} (patrz p. 2.2) winno wybierać te położenia stacji badawczej, przy których optymalny estymator wektora parametrów $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_6]^T$ będzie miał najmniejszy błąd. Wybrane w [40] kryterium miało postać:

$$\mathfrak{J}_1 = \det E(\beta - \hat{\beta})(\beta - \hat{\beta})^T$$

(zadania tego typu omawiane będą bardziej szczegółowo w rozdziale trzecim).

Drugie z rozważonych kryteriów związane jest z celem odmiennym. Zamiast oceny parametrów normy klimatycznej chodzi

tym razem o ocenę odchyień od normy w regionie D na podstawie pomiarów dokonywanych w stacjach. Zgodnie z tym celem pod budowę nowej stacji należy wybierać te punkty regionu, dla których trudno wnioskować o ξ (na podstawie danych pochodzących z istniejących stacji). Kryterium optymalności przybiera postać:

$$\mathfrak{J}_2 = E \left[\xi(x) - E[\xi(x) | y(x^{(1)}), \dots, y(x^{(n)})] \right]^2,$$

gdzie $x^{(i)} = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}]$ - punkty, w których istnieją już stacje pomiarowe. Powyższe zadanie jest jednym z rodziny zadań filtracji omawianych szerzej w rozdziale 4. Okazało się (patrz [49]), że w celu estymacji stałych β_1 określających normę klimatyczną należy dobudować stację w punkcie (-1,1) lub (1,-1) (efekt symetrii pola oraz rozmieszczenia istniejących stacji). Natomiast chcąc podnieść jakość oceny odchyień ξ stanu w regionie od normy klimatycznej należy stację zbudować w punkcie (-1,-1). Dodajmy, że wartość kryterium \mathfrak{J}_1 w punkcie (-1,-1) była ok. dziesięciokrotnie wyższa niż w (-1,1) lub (1,-1)!

b) W pracy [46] opisano rozwiązanie problemu wyznaczania optymalnego planu eksperymentu w zadaniu ekstrapolacji pola losowego, którym można zastąpić nieomal niemożliwy do przeprowadzenia pomiar pewnej wielkości. Wielkość ta to ważny dla wielu teoretycznych i praktycznych zagadnień fizyki cząstek elementarnych makroskopowy przekrój czynny na efekt Comptona dla kąta rozpraszania 0° . Umieszczenie detektora zliczającego cząstkę na osi wiązki głównej jest niecelowe, gdyż detektor ten zliczałby przede wszystkim cząstki nierozproszone! Pozostaje wykorzystać możliwość statystycznej ekstrapolacji (patrz rozdział 3), przy czym należy dokonać wyboru kilku różnych od zera kątów rozproszenia przy których dokonywany będzie pomiar. Wbrew pozorom bardzo małe kąty nie są preferowane ponieważ dla uniknięcia detekcji cząstek nierozproszonych wymagałyby minimalizacji wymiarów detektora co prowadzi do zmniejszenia liczebności próbki i wzrostu statystycznych błędów pomiaru. Kilka podobnych przykładów z zadań z różnych dziedzin (elektrochemii, radiochemii, radiotechniki) prowadzących do zadań ekstrapolacji statystycznej zebrano w pracy [46].

c) W pracy [34] rozważono problem optymalnego doboru gęstości wymuszeń w trakcie eksperymentu czynnego związanego z identyfikacją stałych w modelu oscylatora liniowego. Kryterium optymalności wyprowadzono z fundamentalnego w statystyce warunku efektywności estymacji - wymagającego od estymatora maksymalizacji macierzy informacyjnej Fishera (patrz np. [15], por. rozdz.3). Jednym z interesujących wniosków wynikających z tej pracy jest stwierdzenie, że uzupełnienie eksperymentów przez przeprowadzenie dodatkowych pomiarów z pewnymi częstościami wymuszenia (zależnymi od już wykorzystanych) nie wnosi żadnej poprawy dla wariancji błędów estymacji! Zatem, planowanie eksperymentu jest w tym przypadku warunkiem uniknięcia całkowicie bezużytecznych pomiarów.

d) W artykule [44] analizowano błędy pewnej klasy estymatorów pola losowego (zadanie filtracji pola - patrz rozdział 4) w zależności od ilości punktów pomiarowych oraz kroku ich rozstawienia (rozważono jedynie przypadek jednorodnej kwantyzacji obserwowanego obszaru). Niezależnie od faktu, że rozważany w [44] estymator jest suboptymalny a założenia pierwszej części tegoż artykułu nie są spełnione w jego części drugiej (gdzie są oczywiście wykorzystywane), to szereg interesujących wniosków w nim wyprowadzonych pozostaje słusznych. W szczególności opracowano w omawianej pracy pouczający przykład. Rozważono zadanie filtracji pola losowego w punkcie $(0,0)$ na podstawie pomiarów tego pola obarczonych zakłóceniami i przeprowadzanych w jednym z następujących zestawów punktów:

(i) $(-a,-b), (a,b), (-a,b), (a,b)$,

(ii) $(-2a,-b), (0,-b), (2a,-b), (-2a,b), (0,b), (2a,b)$.

W przypadku (i) używa się więc czterech czujników, zaś w przypadku (ii) - sześciu, przy czym krok kwantowania jest w obu przypadkach ten sam. Tym bardziej zaskakujący jest fakt, że gdy odpowiednio dobrać się przykładowe funkcje korelacyjne filtrowanego pola oraz pola zakłóceń, to filtr oparty na pomiarach (i) obarczony będzie mniejszym błędem średniokwadratowym niż filtr oparty na większej liczbie pomiarów (ii)!

Powyższe przykłady wskazują jak istotna jest rola planowania

eksperymentu. Na uwagę i podkreślenie zasługują następujące wnioski:

- 1) wyniki optymalizacji istotnie zależą od celu badań poprzez wynikające z celu kryterium optymalności (różne dla różnych celów),
- 2) optymalizacja planu może prowadzić nie tylko do zmian ilościowych ale i jakościowych jeśli chodzi o rezultaty i koszty badań,
- 3) stan teorii planowania eksperymentów jest w chwili obecnej bardzo zróżnicowany - w przypadku nieskorelowanych danych istnieje ogromna teoria, zaś dla danych skorelowanych (na skutek korelacji zakłóceń pomiarowych lub wielkości wejściowych) - interpretowanych jako wartości realizacji procesów stochastycznych lub pól losowych rozważane są dopiero najprostsze modele (oscylator liniowy - przykład c) oraz procedury suboptymalne (równomierne kwantowanie, analiza suboptymalnych estymatorów - przykład d).

2.4. W poszukiwaniu optymalnego kryterium.

W dziedzinie rozstawiania czujników dla badania mechanicznych pól losowych istnieje zaledwie kilka prac. Zaproponowane w [42] następujące kryterium zyskało więc wiele zainteresowania.

Jedną z charakterystyk zmiennych losowych znanych z teorii prawdopodobieństwa jest tak zwana miara wzajemnej informacji, jaką zmienna losowa X niesie o zmiennej losowej Y (i na odwrót):

$$(2.4) \quad I(X,Y) = E \left[\log f_{XY}(X,Y) - \log f_X(X) - \log f_Y(Y) \right],$$

gdzie f_{XY} - łączna gęstość prawdopodobieństwa zmiennych X i Y , f_X i f_Y - odpowiednie gęstości brzegowe.

Funkcję (2.4) nazywać będziemy w dalszym ciągu statystyczną informacją dla podkreślenia faktu, że jest ona po prostu jedną z wielu możliwych charakterystyk wzajemnej relacji dwu zmiennych losowych a nie uniwersalną miarą ogólnie pojętej informacji, czy choćby informacji właściwej (pojęcie to zostało wprowadzone w punkcie 2.1 - patrz uwaga 1).

W [42] zaproponowano, by czujniki rozstawiać na polu losowym $\eta(x)$ tak, aby wzajemna statystyczna informacja

$$I(\eta(x_1), \eta(x_2))$$

była minimalna. Autor stwierdził, że kryterium to jest najważniejsze dla wielu różnorodnych zadań związanych z wykorzystaniem losowych wyników pomiarów: identyfikacji parametrycznej, testowania hipotez dotyczących pola, filtracji pola i innych. Koncepcję tę podjęto również w [55] (por. też [92]). Podejście informacyjne (w nieco innej formie) przyjęto też w kilku innych pracach (patrz np. [41] str. 113).

Uzasadnienie wyboru funkcji (2.4) na kryterium doboru punktów pomiarowych jakie znajdujemy w [42] jest jedynie heurystyczne. Autor pisze, że w przypadku, gdy wzajemna informacja między danymi w dwu punktach jest duża, to informacje odbierane w nich "zachodzą na siebie" i oczywiście prowadzi to do utraty informacji, która byłaby możliwa do uzyskania w dwu punktach w których informacja "nie powtarza się". Rozumowanie to opiera się na dwu błędnych założeniach:

1. że użycie terminu "informacja" dla nazwania funkcji (2.4) gwarantuje iż statystyczna informacja jest informacją właściwą dla dowolnego problemu - jest właśnie tą informacją, która najlepiej służy wszelkim celom;
2. że ilość statystycznej informacji pobieranej w każdym punkcie pomiarowym jest taka sama i łączna informacja daje się wyrazić jako suma informacji zebranych w poszczególnych punktach pomniejszona o tę część informacji, która "powtarza się" - informację wzajemną.

Pierwsze założenie jest błędne zgodnie z rozważaniami punktu 2.1 - z samej definicji różnego typu informacje (informacje właściwe) będą potrzebne w różnych zadaniach. Przykłady tego faktu podano w punkcie 2.3 (dalszych dostarcza niniejsza praca). Już sam powyższy fakt decyduje o tym, że tezę o uniwersalnym walorze powyższego kryterium należy odrzucić.

Co więcej również drugie założenie jest niesłuszne, co

dodatkowo ogranicza zakres stosowalności kryterium minimalizacji funkcji (2.4) nawet wśród zadań, dla których kryterium maksymalizacji statystycznej informacji, jaką niosa dane o badanym obiekcie byłoby właściwe. Minimalizacja wzajemnej informacji zmiennych losowych X i Y nie zapewnia bowiem maksymalizacji statystycznej informacji, jaką para (X, Y) niesie o trzeciej zmiennej losowej Z ! Co gorsza, minimalizacja wzajemnej informacji X i Y realizuje się w szczególności wszędzie tam, gdzie nie ma wcale informacji! Przykładu takiej sytuacji dostarcza (nie zauważając tego sam autor pracy [42]). Rozważa on drgania belki zamocowanej na końcach przegubowo. W wyniku zastosowania powyższego kryterium zaleca umieszczenie miernika drgań poprzecznych belki na końcu belki (koniec ten jest zamocowany!). Miernik ten nie może oczywiście nic zmierzyć - zatem realizuje minimum wzajemnej informacji (o pomiarach innych czujników).

Podobne (nieco bardziej rozbudowane) zadanie rozważamy w rozdziale 3.4 stosując kryteria adekwatne do stawianych tam problemów. Prezentujemy tam właściwy sposób analizy rozstawiania mierników w zadaniach identyfikacji parametrów średniej i kowariancji pola przemieszczeń poprzecznych belki.

Oczywiście dla innych zadań statystycznych, które można rozważać w związku z modelem belki właściwe kryteria muszą być dobierane indywidualnie. Powyższa krytyka nie przesądza o tym, że kryterium minimum wzajemnej statystycznej informacji nie może również w pewnych zadaniach okazać się kryterium właściwym.

Teoria prawdopodobieństwa oferuje wiele probabilistycznych charakterystyk zmiennych losowych, które w różnych okolicznościach mogą okazać się użyteczne dla konstrukcji kryterium optymalnego rozstawiania czujników. Należy do nich między innymi wielkość zwana entropią zmiennej losowej. Realizuje ona te same heurystyczne przesłanki, które legły u podstaw koncepcji stosowania kryterium informacyjnego. Entropię zmiennej losowej X (ew. wielo- a nawet nieskończenie-wymiarowej) definiuje się następująco:

$$(2.5) \quad H(X) = E(-\log f_X(X))$$

gdzie f_x jest gęstością rozkładu zmiennej losowej X rozumiana jako pochodna Radona - Nikodyma rozkładu prawdopodobieństwa indukowanego z wyjściowej przestrzeni probabilistycznej przez zmienną X na przestrzeń stanów zmiennej X , względem ustalonej miary borelowskiej określonej na tej przestrzeni w stosunku do której rozkład indukowany jest absolutnie ciągły (dla zmiennych rzeczywistych typu ciągłego jest to zwykła gęstość rozkładu względem miary Lebesgue'a, dla zmiennych skokowych $f_x(x)$ jest równa skokowi dystrybuanty zmiennej X w punkcie x).

Funkcja (2.5) jako kryterium optymalności wolna jest od wady funkcji (2.4) polegającej na preferowaniu punktów niosących zerową informację statystyczną o wartościach pola winnych punktach. Jest w teorii prawdopodobieństwa traktowana jako miernik losowości zmiennej X . Kryterium wybierające punkty, w których pole losowe ma wartości o największej entropii może więc znaleźć zastosowanie w takich zadaniach, w których przedmiotem badań są losowe charakterystyki pola.

Łatwo wykazać, że w pewnych przypadkach kryteria minimalizacji wzajemnej statystycznej informacji i maksymalizacji łącznej entropii są równoważne. Przykładem takiej sytuacji jest pomiar pola losowego $\eta(x)$ o stałej entropii

$$H(\eta(x)) = h.$$

Niech $X = \eta(x)$, $Y = \eta(y)$.

Ponieważ

$$\begin{aligned} -I(X,Y) &= H(X,Y) - H(X) - H(Y) = \\ &= H(X,Y) - 2h, \end{aligned}$$

zatem $I(X,Y)$ osiąga minimum w tym samym punkcie, w którym $H(X,Y)$ osiąga maksimum.

Oczywiście również kryterium maksimum entropii nie może być stosowane uniwersalnie - entropia osiąga minimum w punktach, w których pole jest deterministyczne - wszak w tych punktach często można uzyskać wiele najcenniejszych (dla pewnych zadań) danych nie "rozmytych" losowością. Zależy to jak zwykle od konkretnego

celu badań i postaci informacji właściwej .

W kolejnych rozdziałach będziemy wyprowadzać kryteria właściwe dla stawianych w nich problemów oraz porównywać je z kryteriami omawianymi w niniejszym punkcie. W ten sposób chcemy zaakcentować jak ważne jest ściśle postawienie problemu oraz powiązanie z nim kryterium optymalizacji rozmieszczania czujników. Wyniki uzyskiwane przy zastosowaniu różnych kryteriów będą bowiem w ogólności różne.

3. Zadania identyfikacji parametrów funkcji regresji a dobór optymalnych punktów pomiaru pól losowych.

3.1. Uogólnienie klasycznego zadania planowania eksperymentu w zadaniach regresyjnych.

Klasyczne zadanie planowania eksperymentu (patrz [22],[25], [44],[47],[48],[49],[53],[57],[58]) może być po krótko przedstawione następująco.

Celem postępowania jest ustalenie wartości parametrów charakteryzujących związek współrzędnych punktu pomiarowego oraz wielkości mierzonej. Pomiarów dokonuje się w punkcie $x \in X$, gdzie $x = [x_1, \dots, x_l]^T$ - wektor złożony z tych spośród wielkości określających stan badanego obiektu, które podlegają kształtowaniu lub wyborowi (mogą to być współrzędne podające położenie punktu pomiarowego w przestrzeni lub zespół współrzędnych uogólnionych mechanicznego układu dynamicznego, wielkości wstępnych odkształceń czy naprężeń w danym eksperymencie itp.).

Zakłada się, że wielkość podlegająca pomiarowi wiąże się z punktem pomiarowym poprzez relację postaci:

$$(3.1) \quad y(x) = \theta^T f(x) + \zeta(x)$$

gdzie y - wynik pomiaru,

θ - wektor poszukiwanych parametrów regresji,

f - znana, wektorowa funkcja punktu x ,

ζ - losowy składnik pomiaru - na przykład błąd pomiarowy lub efekt stochastycznych fluktuacji parametrów.

Ograniczymy się do przypadku, gdy zbiór X jest skończony:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Fundamentalnym założeniem przedstawianej teorii jest, że pomiar może być dokonywany w każdym z punktów x_i r_i razy, przy czym wynik k -tego pomiaru:

$$y_{ik} = \theta^T f(x_i) + \zeta_{ik},$$

gdzie

$$E \zeta_{ik} \zeta_{jm} = \delta_{ij} \delta_{km} \sigma^2(x_i) \quad (3.2)$$

$$E \zeta_{ik} = 0$$

to znaczy, że wyniki pomiarów nie są skorelowane.

Zazwyczaj zakłada się również, że ζ_{ik} mają rozkład normalny, skąd wobec (3.2) wynika, że są zmiennymi niezależnymi.

Oznaczmy:

$$N = \sum_{i=1}^n r_i$$

(N - liczba dokonanych pomiarów),

$$p_i = r_i N^{-1}$$

(p_i - udział pomiarów dokonanych w punkcie x_i w stosunku do liczby wszystkich pomiarów).

Wobec założonej niezmienniczości charakterystyk układu względem numeru doświadczenia oraz wobec założeń (3.2), kolejność wykonywania pomiarów nie odgrywa roli, zatem zgodnie z określeniem z punktu 2.1 plan eksperymentu w pełni określa zespół wielkości:

$$\{(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)\}$$

oraz liczba przeprowadzonych pomiarów N . Zgodnie z oznaczeniem z 2.1 parę tę oznaczać będziemy symbolem ξ .

W ramach powyższego modelu można rozważać następujące dwa zadania odpowiadające zadaniom optymalizacyjnym rozważanym w

punkcie 2.1):

Z1. najlepszego statystycznie wykorzystania danych zebranych w trakcie eksperymentu przeprowadzonego zgodnie z danym planem ξ ;

Z2. najlepszego doboru planu ξ przy ustalonym (najlepiej optymalnym) sposobie opracowania danych.

Pierwsze zadanie prowadzi od ustalenia postaci funkcjonału jakości \mathfrak{J} (patrz 2.1) do postaci estymatora $\hat{\theta}^*$ parametrów θ . Podstawienie tego estymatora do (2.1) w sposób omówiony w p. 2.1 definiuje kryterium optymalności dla planów ξ i sprowadza drugie zadanie do klasycznego zadania optymalizacji. Najczęściej używane postaci funkcjonałów jakości \mathfrak{J} wykorzystują macierz kowariancji błędów estymacji

$$D = D(\xi) = E (\hat{\theta}^* - \theta)(\hat{\theta}^* - \theta)^T.$$

Przykładowe kryteria to:

A. $\mathfrak{J}_A = |D|$

B. $\mathfrak{J}_B = \text{tr } D$

C. $\mathfrak{J}_C = v^T D v$

gdzie v jest stosownie wybranym wektorem (np. $v=f(x_0)$, gdzie x_0 jest punktem, w którym szczególnie istotna jest dokładność opisu (3.1)),

D. $\mathfrak{J}_D = \sup_{\xi' \in \mathfrak{K}_1} v^T(\xi') D v(\xi')$

gdzie w zależności od doboru regionu \mathfrak{K}_1 otrzymujemy kryteria odpowiadające różnym zadaniom; na przykład dla $v = f$ oraz $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K} = \emptyset$ odpowiada zadaniu statystycznej ekstrapolacji funkcji średniej mierzonego pola (zadanie to było wspomniane w przykładach rozdziału 2)

E. $\mathfrak{J}_E = \mathfrak{G}(D)$

- jest to bardzo ogólna postać funkcjonału jakości; o funkcjonałe \mathcal{Q} zakłada się, że jest wypukły oraz posiada minimum w punkcie $I(\theta)$, gdzie $I(\theta)$ jest macierzą informacyjną Fishera (patrz [19]) - wobec nierówności Rao-Cramera (patrz [15]) i wypukłości \mathcal{Q} można kryterium E interpretować w ten sposób, że wybiera ono efektywny estymator (o najmniejszej dyspersji, przy czym termin najmniejszy należy rozumieć poprzez relację częściowego porządku w zbiorze macierzy dyspersyjnych oraz nierówność Rao-Cramera); w dalszym ciągu zawsze będziemy zakładać, że kryterium \mathcal{J} jest zapisane w postaci E; możliwość kształtowania postaci funkcji \mathcal{Q} pozwala przeprowadzać oprócz optymalizacji dyspersji estymatora przy ustalonym N również optymalizację tempa zbieżności ewentualnych procedur sekwencyjnych dla estymacji (por [59]);

$$F. \quad \mathcal{J}_F = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r (y_{ik} - \theta^T f(x_i))^2.$$

Ostatnie z kryteriów τ realizujące postulat minimalizacji sumy kwadratów odchyłeń obserwacji od odpowiedzi modelu - jest najpowszechniej używany w analizie regresji. W przypadku powyżej scharakteryzowanych założeń jest to uzasadnione faktem, że prowadzi do estymatora efektywnego będącego liniową funkcją obserwacji - wygodną dla realizacji estymacji. Przyjęcie kryterium \mathcal{J}_F jest równoważne założeniu liniowości estymatora. Jak już wspomniano, przy założeniach (3.2) nie prowadzi to do rozwiązań nieoptymalnych gdyż optymalny (efektywny) estymator jest liniowy. Równocześnie realizuje on minimum również dla pozostałych kryteriów ogólnej postaci \mathcal{J}_E (przy ogólniejszych założeniach wynik ten nie pozostaje słuszny). Dlatego zazwyczaj, niezależnie od przyjętego kryterium, rozwiązanie zadania Z1 (zadania estymacji) przyjmuje się w postaci estymatora minimum

sumy kwadratów. Postać przyjętego kryterium odgrywa natomiast istotniejszą rolę w trakcie rozwiązywania zadania ZZ (optymalizacji planowania eksperymentu).

W przypadku użycia powyższego estymatora macierz D staje się odwrotnością macierzy informacyjnej Fishera i przyjmuje postać:

$$D(x) = \left[N \sum_{i=1}^n p_i \sigma^{-2}(x_i) f(x_i) f^T(x_i) \right]^{-1}.$$

Problem planowania eksperymentu sprowadza się więc do zadania optymalizacji - minimalizacji funkcji

$$G(D(x)).$$

Optymalizację można prowadzić przy ustalonej liczbie pomiarów N - ze względu na parametry p_i , lub dla $N \rightarrow \infty$ (wówczas usprawiedliwione jest używanie $p_i \in (0,1)$ określających tak zwany plan ciągły - termin ten oznacza co innego niż plan ciągły w rozumieniu punktu 2; por.[41]). Przy optymalnym doborze p_i celem jest zbadanie jak dużej liczby obserwacji N potrzeba do osiągnięcia zadanej dokładności.

Jak łatwo zauważyć przedstawione powyżej postępowanie można częściowo przeprowadzić również w przypadku, gdy w schemacie (3.1) wyraz $\xi(x)$ nie będzie interpretowany poprzez założenia (3.2) lecz jako centrowane pole losowe (tzn. $E\xi(x)=0$).

Rozważmy przypadek, gdy pole losowe $\xi(x)$ albo nie zmienia się w czasie (zatem powtarzanie pomiarów w tych samych punktach mija się z celem - ponieważ w modelu (3.1) właśnie ξ reprezentowało błędy pomiaru przy założeniu niezależności ξ od czasu każdy pomiar w punkcie x musi dać ten sam wynik), albo wyniki pomiarów przeprowadzonych w różnych chwilach czasowych nie są od siebie niezależne. W obu tych przypadkach dokonuje się

zawsze tylko jednego pomiaru w danym punkcie x (w drugim przypadku bowiem czas wygodnie jest traktować jako jedną ze współrzędnych x - argumentu przestrzenno-czasowego pola losowego ξ). Zatem, w odróżnieniu od powyżej przedstawionego klasycznego problemu planowania eksperymentu (którego dotyczy przytłaczająca większość istniejącej literatury - patrz 2.2) optymalizację przeprowadzać będziemy nie ze względu na dobór p_i (gdyż $n=N$, $r_i=1$, $p_i=n^{-1}$ dla wszystkich x_i) lecz na dobór samych x_i .

Ponieważ założenia (3.2) są w rozważanym przypadku pogwałcone w ogólności nakreślone powyżej postępowanie przestaje być optymalne i uzasadnione. Tym niemniej ogólna koncepcja może być przeniesiona. Zakłada się mianowicie, że (choć mogą one być już tylko suboptymalne ze względu na przyjęty funkcjonal jakości) wykorzystuje się jak poprzednio estymatory $\hat{\theta}^n$ otrzymywane metodą najmniejszych kwadratów, która to metodę uogólnia się definiując dla zadania Z1 osobne kryterium jakości (dla zadania Z2 używamy zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami funkcjonal postaci \mathcal{J}_E):

$$F. \quad \mathcal{J}_F = (Y - F^T \theta)^T W (Y - F^T \theta)$$

gdzie:

$$Y = Y_n = [y(x_1), \dots, y(x_n)]^T,$$

$$F = F_n = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T,$$

zaś $W = W_n$ jest macierzą wagową wymiaru $n \times n$.

W miejsce (3.2) przyjmujemy:

$$E \xi(x) = 0$$

(3.2')

$$E \xi(x_1) \xi(x_2) = k(x_1, x_2, \theta)$$

(θ jest wektorem parametrów charakteryzujących funkcję kowariancji w odróżnieniu od wektora θ związanego z opisem średniej pola pomiarów).

Oznaczmy:

$$(3.3) \quad K = K_n = \langle k(x_i, x_j, \theta) \rangle_{i,j=1}^n$$

$$F = F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Estymator średniokwadratowy (minimalizujący \mathfrak{J}_F) ma postać:

$$(3.4) \quad \theta^* = (F^T W F)^{-1} F^T W Y,$$

jest nieobciążony ($E \theta^* = \theta$) oraz ma macierz kowariancji³ równa

$$(3.5) \quad D = D_n = (F^T W F)^{-1} F^T W K W F (F^T W F)^{-1}.$$

Analizując wzór (3.5) łatwo zauważyć, że jeżeli macierz K jest znana z dokładnością do skalarneho mnożnika, to minimalizacja macierzy dyspersyjnej D estymatora (3.4) może być osiągnięta przez przyjęcie $W = K^{-1}$. Wówczas oczywiście

$$(3.6) \quad \theta^* = (F^T K^{-1} F)^{-1} F^T K^{-1} Y,$$

oraz

$$(3.7) \quad D = D_n = (F^T K^{-1} F)^{-1},$$

przy czym estymator θ^* jest w tym przypadku estymatorem o najmniejszej możliwej dyspersji (jest estymatorem efektywnym - zatem minimalizuje on oprócz funkcjonału średniokwadratowego \mathfrak{J}_F , również funkcjonał \mathfrak{J}_E co oznacza, że w tym przypadku kryteria optymalności dla zadań Z1 i Z2 pozostają te same i całe postępowanie jest konsyistentne; powszechność tego przypadku usprawiedliwia przyjmowanie estymatora średniokwadratowego w analizie zadań optymalizacji rozstawiania czujników).

W [41] można znaleźć analogony powyższych wzorów w przypadku funkcji regresji zależących od parametrów θ w sposób nieliniowy.

3.2. Rozmieszczanie czujników dla identyfikacji parametrów średniej i kowariancji pola losowego.

Wobec założenia (3.3) funkcja $\eta(x, \theta) = \theta^T f(x)$ jest funkcją średnią pola losowego $y(x)$ określonego wzorem (3.1). Oczywiście składnik ξ w (3.1) nie musi być interpretowany wyłącznie jako błąd pomiarowy - przeciwnie, nadajemy mu ogólnie interpretację losowych fluktuacji mierzonego pola, na które nakładają się ewentualnie losowe błędy pomiarów. Zatem, przy założeniu że pomiary nie są obciążone błędami systematycznymi wzór (3.6) (ew. (3.4) - gdy nie jest znana macierz kowariancji pola) określają estymatory średniokwadratowe parametrów funkcji średniej pola. Zadanie optymalnego rozstawiania czujników sprowadza się do minimalizacji (względem f) funkcjonau $\Phi(D(f))$ gdzie macierz dyspersji D określa wzór (3.7) (bez znajomości macierzy korelacyjnej K z dokładnością do zależnego być może od planu f skalarnego mnożnika można by się co najwyżej oprzeć na wzorach (3.4), (3.5), które jednak nie określają w pełni macierzy D w tym przypadku).

Rozważymy teraz sytuację, gdy średnia pola jest znana, zaś przedmiotem zainteresowania jest wektor parametrów θ , przy czym funkcja korelacyjna pola pomiarów którą te parametry charakteryzują zależy od nich liniowo:

$$k(x_1, x_2, \theta) = \theta^T g(x_1, x_2).$$

W tym przypadku analizę rozstawiania czujników dla optymalnej estymacji parametrów θ można również przeprowadzić zgodnie ze schematem poprzedniego punktu.

Zdefiniujmy pole losowe

$$(3.8) \quad z(v) = \nu(v, \theta) + \xi(v),$$

gdzie

$$v = (x_1, x_2) \in X \times X$$

zaś

$$z(v) = (y(x_1) - \eta(x_1)) \quad (y(x_2) - \eta(x_2))$$

(3.9)

$$v(v, \theta) = k(x_1, x_2, \theta) = \theta^T g(v)$$

$$\zeta(v) = \zeta(x_1) \zeta(x_2) - k(x_1, x_2, \theta).$$

Funkcja korelacyjna pola (scentrowanego) ζ ma zatem postać (pomijamy dla uproszczenia zapisu zależność k od θ):

$$\begin{aligned} K_{\zeta}(v, v') &= K_{\zeta}(x_1, x_2, x_1', x_2') = \\ (3.10) \quad &= E [\zeta(x_1) \zeta(x_2) \zeta(x_1') \zeta(x_2')] + \\ &\quad - k(x_1, x_2) \quad k(x_1', x_2') \end{aligned}$$

W przypadku pola gaussowskiego, czwarty moment w (3.10) można wyrazić za pomocą momentów drugiego rzędu (funkcji korelacyjnej k). Wzór (3.10) przyjmuje wtedy postać

$$(3.10') \quad K_{\zeta}(v, v') = k(x_1, x_1') k(x_2, x_2') + k(x_1, x_2') k(x_1', x_2).$$

Zatem rozważenie K_{ζ} nie wymaga w tym przypadku wprowadzenia do analizy żadnych nowych obiektów i parametrów. Oczywiście poprzez (3.8) problem został sprowadzony do poprzednio rozważonego, zatem dla estymatora otrzymujemy wzór:

$$(3.11) \quad \theta^* = (G^T H^{-1} G)^{-1} G^T H^{-1} Z$$

gdzie

$$\begin{aligned} Z &= [z(v_1), \dots, z(v_m)]^T \\ (3.12) \quad G &= [g(v_1), \dots, g(v_m)]^T \\ H &= (K_{\zeta}(v_i, v_j))_{i, j=1}^m \end{aligned}$$

zaś problem doboru punktów pomiarowych sprowadza się do minimalizacji $\mathfrak{J}_x = \mathfrak{B}(D)$, gdzie

$$(3.13) \quad D = D_m(\eta) = (G^T H^{-1} G)^{-1}$$

Oczywiście plan $\eta = (v_1, \dots, v_m)$, przy czym ze względu na symetrię pola ζ punkty $v_1 = (x_1, x_2)$ oraz $v_2 = (x_2, x_1)$ należy utożsamiać - nie mogą się one pojawić razem w planie η gdyż doprowadzi to do osobliwości macierzy H . Przeprowadzając pomiar pola y w n punktach x_i można więc analizować plany η złożone z co najwyżej $m = 0.5 n (n-1)$ punktów $v_i = (x_i, x_j)$.

W [41] rozważono również zadanie łącznej identyfikacji parametrów θ i θ .

Powyższy aparat zastosujemy obecnie do znalezienia rozwiązania dość ogólnego zadania wyboru dwu miejsc pomiarowych pola gaussowskiego w celu estymacji skalarnego stałego mnożnika funkcji korelacyjnej pola. Zakładamy, że losowe pole pomiarów zadane jest przez (3.1), przy czym zachodzi (3.2') oraz znana jest średnia pola $\eta(x, \theta)$. O funkcji $k(x_1, x_2, \theta)$ zakładamy, że jest postaci

$$(3.14) \quad k(x_1, x_2, \theta) = \theta g(v)$$

gdzie g jest znaną funkcją, zaś skalarny parametr θ jest przedmiotem estymacji.

Przy dwu punktach pomiarowych x_1, x_2 można skorzystać z następujących trzech punktów do stworzenia planu:

$$v_1 = (x_1, x_1) \stackrel{0 \leq n}{=} u$$

$$v_2 = (x_1, x_2) \stackrel{0 \leq n}{=} v$$

$$v_3 = (x_2, x_2) \stackrel{0 \leq n}{=} w$$

Wobec (3.10') otrzymujemy dla funkcji korelacyjnej pola $\zeta(v)$:

$$K_\zeta(u, u) = 2 p p$$

$$K_\zeta(v, v) = p r - q q$$

$$K_\zeta(u, v) = 2 p q$$

$$K_\zeta(v, w) = 2 q r$$

$$K_\zeta(u, w) = 2 q q$$

$$K_\zeta(w, w) = 2 r r$$

gdzie $p = g(u)$, $q = g(v)$, $r = g(w)$. Zatem

$$H = H_g = \begin{bmatrix} 2 p^2 & 2 p q & 2 q^2 \\ 2 p q & p r - q^2 & 2 q r \\ 2 q^2 & 2 q r & 2 r^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det } H = 4 (p r - q^2)^3.$$

Oznaczmy $W = p r - q^2$.

Z własności funkcji korelacyjnych wynika, że jeżeli pole losowe ζ nie jest zdegenerowane to dla $x_1 \neq x_2$ spełniony jest warunek

$$(3.15) \quad W \neq 0.$$

Wówczas istnieje macierz H^{-1} i jest dana wzorem

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 r^2 & - q r & 0.5 q^2 \\ - q r & W & - p q \\ 0.5 q^2 & - p q & 0.5 p^2 \end{bmatrix} W^{-2}.$$

Ze wzoru (3.13) otrzymujemy

$$D = \left([p, q, r] H^{-1} [p, q, r]^T \right)^{-1} = 1.$$

Powyższy zaskakujący wynik oznacza, że niezależnie od doboru punktów pomiarowych, jeżeli tylko spełniony jest warunek (3.15) to wariancja estymatora średniokwadratowego stałej θ (estymator ten jest w rozważanym przypadku optymalnym - bo efektywnym - estymatorem największej wiarygodności) jest równa 1. Optymalne są zatem dowolne dwa punkty spełniające warunek (3.15).

3.3. Zastosowanie: optymalizacja doboru punktów pomiarowych dla estymacji stałych w modelu belki.

Rozważmy płaskie, poprzeczne drgania swobodnie podpartej na obu końcach belki poddanej działaniu losowego, zmiennego w czasie obciążenia. Drgania takie opisuje równanie (patrz [18],[31]):

$$(3.a) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(\bar{x}) J(\bar{x}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} y \right] + \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial t} y + A(\bar{x}) \rho(\bar{x}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} y = \bar{z}(\bar{x}, \bar{t})$$

gdzie: $E(\bar{x})$ - moduł sprężystości,

$J(\bar{x})$ - geometryczny moment bezwładności przekroju belki względem osi prostopadłej do osi belki oraz płaszczyzny drgań,

$\bar{\beta}$ - współczynnik charakteryzujący tłumienie (zewnątrzne) np. tarcie typu wiskotycznego,

$A(\bar{x})$ - pole powierzchni przekroju poprzecznego,

$\rho(\bar{x})$ - gęstość materiału belki,

$\bar{z}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{z}(\bar{x}, \bar{t}, \gamma)$ - pole losowe (czasowo-przestrzenne) opisujące wymuszenia zewnętrzne działające na belkę.

Z równaniem (3.a) wiążemy warunki brzegowe:

$$(3.b) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(l) = y(0) = y(l) = 0$$

Zakładamy, że do momentu \bar{t}_0 belka pozostawała w spoczynku, zaś od tego momentu działa nań pole losowych obciążeń $\bar{z}(\bar{x}, \bar{t})$.

Zgodnie z równaniami (4.57), (4.58) z [31] średnią oraz funkcję korelacyjną pola losowego y można wyrazić na podstawie średniej i funkcji korelacyjnej wymuszenia \bar{z} przy pomocy funkcji Greena dla układu (3.a), (3.b).

Rozważmy przypadek, gdy wielkości E, J, A, ρ są stałe.

Dobieramy układ jednostek tak, by $l=1$ (tzn.:

$$x = \frac{\bar{x}}{l}$$

oraz

$$t = \frac{\bar{t}}{a}$$

gdzie

$$a = \sqrt{\frac{A \rho}{E J}} l^2 \quad]$$

Oznaczając

$$\beta = \frac{1}{2} \bar{\beta} l^4 a^{-1}$$

oraz

$$z(x,t) = l^4 \bar{z}(l x, a t)$$

otrzymujemy w miejsce (3.a):

$$(3.c) \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} y + 2 \beta \frac{\partial}{\partial t} y + \frac{\partial^2}{\partial t^2} y = z(x,t)$$

z jednorodnymi warunkami brzegowymi postaci (3.6). Stosując metodę Fouriera (patrz [18]) - poszukując rozwiązania w postaci:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin n\pi x$$

otrzymujemy (" " oznacza różniczkowanie względem t):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n\pi)^4 y_n + 2 \beta \dot{y}_n + \ddot{y}_n \right] \sin n\pi x = z(x,t),$$

skąd:

$$(3.d) \quad (n\pi)^4 y_n + 2 \beta \dot{y}_n + \ddot{y}_n = 2 \int_0^1 z(u,t) \sin n\pi u du = z_n(t).$$

Założmy, że tłumienie $\bar{\beta}$ jest na tyle małe, że równanie charak-

terystyczne równania (3.d) posiada dwa pierwiastki zespolone:

$$r_{1/2} = -\beta \pm i \sqrt{(n\pi)^2 - \beta^2} = -\beta \pm ik_n.$$

Wobec jednorodnych warunków początkowych w t_0 otrzymujemy :

$$(3.e) \quad y_n(t) = \frac{1}{k_n} \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} \sin k_n(t-\tau) z_n(\tau) d\tau.$$

Z (3.d) i (3.e) wynika, że :

$$y(x,t) = 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} e^{-\beta(t-\tau)} \sin k_n(t-\tau) \sin n\pi u \sin n\pi x z(u,\tau) du d\tau,$$

zatem poszukiwana funkcja Greena ma postać (por [31]) :

$$(3.f) \quad G(x,t,u,\tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} e^{-\beta(t-\tau)} \sin k_n(t-\tau) \sin n\pi u \sin n\pi x.$$

Założmy, że z jest stacjonarnym i jednorodnym polem losowym :

$$E z(x,t) = \eta_0,$$

o funkcji kowariancji :

$$(3.g) \quad E [z(x_1, t_1) - \eta_0][z(x_2, t_2) - \eta_0] = \sigma^2 \delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2).$$

Wobec liniowości równania (3.c) rozwiązanie y można przedstawić jako :

$$y = y^0 + y^1,$$

gdzie y^0 jest rozwiązaniem (3.c) z prawą stroną równą η_0 , zaś

y^1 jest rozwiązaniem (3.c) z prawą stroną równą $z(x,t) - \eta_0$.

Z postaci funkcji G wynika, że dla $t_0 \rightarrow -\infty$ $y^0(x,t) \rightarrow y^0(x)$

rozwiązanie y^0 dąży do statycznego ugięcia belki pod wpływem stałego obciążenia (jednorodnie rozłożonego) η_0 . Wyznaczamy je z warunków brzegowych (3.b) oraz z

$$(3.7) \quad \frac{d^4}{dx^4} y^0(x) = \eta_0.$$

Zatem :

$$(3.8) \quad y^0(x) = 0.5 \eta_0 x (x-1)(x^2 - x - 1).$$

Składnik y^1 jest polem losowym o zerowej wartości oczekiwanej, zaś dla jego funkcji korelacyjnej otrzymujemy wobec (3.6) następujące przedstawienie :

$$\begin{aligned} E [y(x_1, t_1) y(x_2, t_2)] & \stackrel{\text{ozn.}}{=} K = \\ & = \sigma^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} G(x_1, t_1, u_1, \tau_1) G(x_2, t_2, u_2, \tau_2) \delta(u_1 - u_2) \delta(\tau_1 - \tau_2) \times \\ & \quad \times d\tau_1 d\tau_2 du_1 du_2 = \\ & = \sigma^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} G(x_1, t_1, u, \tau) G(x_2, t_2, u, \tau) d\tau du = \\ & = \sigma^2 \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{1}{k_m k_n} \sin m\pi x_1 \sin n\pi x_2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \sin m\pi u \sin n\pi u du \times \\ & \quad \times \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-\beta(t_1 + t_2 - 2\tau)} \sin k_m(t_1 - \tau) \sin k_n(t_2 - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_0^m \sin n\pi u \sin m\pi u du = 2 \delta_{mn}$,

więc przy oznaczeniu $t_1 \wedge t_2 = t$ otrzymujemy :

$$\begin{aligned} K & = \sigma^2 e^{-\beta|t_1 - t_2|} \sum_{m, n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{k_n} \right)^2 \sin n\pi x_1 \sin n\pi x_2 \times \right. \\ & \quad \times \int_0^t e^{-2\beta(t-\tau)} \{ \cos k_n |t_1 - t_2| - \cos(2k_n(t-\tau) + k_n |t_1 - t_2|) \} d\tau. \end{aligned}$$

Wprowadzając nową zmienną całkowania : $s = t - \tau$, obliczamy:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t e^{-2\beta(t-\tau)} \left(\cos k_n |t_1 - t_2| - \cos(2k_n(t-\tau) + k_n |t_1 - t_2|) \right) d\tau = \\ & = \int_0^t e^{-2\beta s} \left(\cos k_n |t_1 - t_2| - \cos(2k_n s + k_n |t_1 - t_2|) \right) ds = \\ & = \frac{1}{2\beta} \cos k_n |t_1 - t_2| \left[1 - e^{-2\beta(t-t_0)} \right] - \frac{1}{2(n\pi)^2} \left\{ \cos(k_n |t_1 - t_2| + \delta) + \right. \\ (3.1) \quad & \left. - e^{-2\beta(t-t_0)} \cos(2k_n(t-t_2) + \delta) \right\}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(3.2) \quad \delta = \arccos \frac{\beta}{(n\pi)^2} \quad \left[= \arcsin \frac{k_n}{(n\pi)^2} \right].$$

Jak widać, gdy chwila przyłożenia stacjonarnego obciążenia z dąży do $-\infty$ powyższe wyrażenie dąży do funkcji zależnej jedynie od $|t_1 - t_2|$, co odpowiada funkcji korelacyjnej stacjonarnego pola losowego.

Dysponując średnią i kowariancją stacjonarnego rozwiązania równania (3.c) z warunkiem brzegowym (3.b):

$$\begin{aligned} E \cdot y & = \frac{1}{2^4} \eta_0 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x^2 - x - 1) \\ (3.3) \quad K & = \frac{1}{2} \sigma^2 e^{-\beta |t_1 - t_2|} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{k_n} \right]^2 \sin n\pi x_1 \sin n\pi x_2 \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{\beta} \cos k_n |t_1 - t_2| - \frac{1}{2(n\pi)^2} \cos(k_n |t_1 - t_2| + \delta) \right] \right\}, \end{aligned}$$

można wykorzystać wzory poprzedniego podpunktu dla wyznaczenia współrzędnych przestrzennych oraz chwil czasowych, w jakich należy zmierzyć przemieszczenie belki, aby najlepiej (w sensie

minimum średniego kwadratu błęd) ocenić stałe charakteryzujące model. Dla przykładu, przedmiotem zainteresowania może być obciążenie średnie η_0 , lub stała tłumienia β (w istocie β reprezentuje wiele stałych - patrz (3.e)), ewentualnie intensywność fluktuacji obciążenia - σ^2 . Zauważmy, że w ogólności K jest nieliniową funkcją parametru β , zatem odpowiednie zadanie optymalizacji jest bardzo złożone. Sytuację komplikuje fakt, że funkcja K jest zadana w postaci szeregu. Zazwyczaj, w większości analiz dotyczących rozwiązań równania falowego (3.a) danego w postaci analogicznego szeregu rozważa się tylko pierwsze składniki tego szybko zbiegającego szeregu (w naszym przypadku zbieżność jest rzędu n^{-4}). Na przykład we wspomnianych wyżej pracach [42], [55] rozważano jedynie dwa pierwsze wyrazy. Zależność uzyskanego rozwiązania od ilości składników branych pod uwagę nie była do tej pory badana.

Rozważmy dla przykładu przypadek, gdy dokonuje się równoczesnego pomiaru w dwu punktach belki, zaś zadanie polega na optymalnym doborze miejsc pomiaru, przy czym optymalizację przeprowadza się z myślą o estymacji :

- a) stałej η_0 ,
- b) stałej σ^2/β .

W rozważanym przypadku $|t_1 - t_2| = 0$, zatem z (3.k), wobec definicji k_n oraz (3.j) wyrażenie określające funkcję kowariancji upraszcza się do następującego :

$$K = \frac{1}{2\pi^4} \frac{\sigma^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin n\pi x_1 \sin n\pi x_2.$$

Zauważmy, że niezależnie od tego, czy znane są stałe σ^2 i β funkcja korelacyjna K jest znana z dokładnością do skalarnego

stałego mnożnika a zatem optymalizację doboru punktów pomiarowych dla zadania (a) (identyfikacji średniej charakteryzującej funkcję średniego ugięcia belki) można przeprowadzić bez znajomości tych stałych. Ma to znaczenie o tyle, że następnie, korzystając z efektów tej identyfikacji - znajomości średniej pola - można zastosować wynik poprzedniego punktu dla identyfikacji stałej $\sigma^2 \beta^{-1}$ charakteryzującej wariancję losowych fluktuacji ugięcia belki. Ponieważ zgodnie z 3.2 dla tego ostatniego zadania optymalne będą dowolne dwa różne punkty nie będące końcami belki (punkty jednakowe oraz końce są wykluczone ze względu na warunek (3.15)), zatem dla identyfikacji średniej i wariancji pola ugięcia belki można przyjąć punkty optymalne ze względu na zadanie (a) (spełniają one bowiem również warunek (3.15)).

Zgodnie ze wzorem (3.13) kryterium optymalności związane z zadaniem (a) jest równoważne minimalizacji średniokwadratowego błędu estymacji stałej η_0 , wyrażającego się w rozważanym przypadku wzorem:

$$\begin{aligned}
 D(\hat{\eta}) &= D(x_1, x_2) = \\
 &= C \left\{ [x_1(x_1-1)(x_1^2-x_1-1)]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin^2 n\pi x_2 \right. \\
 &\quad - 2 [x_1(x_1-1)(x_1^2-x_1-1)] [x_2(x_2-1)(x_2^2-x_2-1)] \\
 &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin^2 n\pi x_1 \sin^2 n\pi x_2 \\
 &\quad \left. + [x_2(x_2-1)(x_2^2-x_2-1)]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin^2 n\pi x_1 \right\} \\
 &\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin^2 n\pi x_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin^2 n\pi x_2 \right\}
 \end{aligned}
 \tag{3.m}$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin^2 n\pi x_1 \sin^2 n\pi x_2 \right\}$$

(oczywiście stała $C = \frac{288 \sigma^2}{\eta_0 \pi^4 \beta}$ nie ma żadnego znaczenia dla wartości x_1, x_2 minimalizujących wyrażenie (3.m)).

Optymalny plan \hat{x} wyznaczono numerycznie stosując metodę gradientów sprzężonych Polaka-Ribbiera (patrz. np [27]) poszukiwania minimum funkcji $D(x_1, x_2)$, przy czym szeregi nieskończone zastąpione były oczywiście sumami skończonymi. Liczba N wyrazów branych pod uwagę wpływa oczywiście na wyniki minimalizacji. Okazało się, że wpływ ten jest znaczący przy małych N . Przy $N=1$ macierz D jest źle określona (pierwszy wyraz szeregu określa macierz, która nie jest macierzą korelacyjną żadnego pola i jej wyznacznik znika co prowadzi do dzielenia przez zero w (3.m)). Przy $N=2$ optymalne wartości bliskie są końców przedziału. Natomiast dla $N > 5$ uzyskiwane wyniki \hat{x}_1, \hat{x}_2 praktycznie już się nie zmieniają ze wzrostem N . Niektóre wyniki programu użytego do tych badań przedstawiane są w następnym punkcie; listing zamieszczono w dodatku. Program ten może być wykorzystany w szeregu innych zadań optymalizacji planowania eksperymentów. Wymagane jest tylko zdefiniowanie odpowiednich procedur określających właściwe dla danego problemu konkretne funkcje (np funkcję $\eta(x)$).

Położenie czujników, które jest optymalne w przypadku identyfikacji średniego ugięcia belki porównano z położeniami optymalnymi ze względu na inne kryteria. Są nimi kryterium minimalnego błędu estymacji wariancji ugięcia, kryterium minimum wzajemnej informacji i maksimum łącznej entropii. Wyniki zestawiono w poniższej tabeli.

| Nr. | kryterium | optymalny plan \hat{x}_1, \hat{x}_2 | |
|-----|--|---|------|
| 1 | $E (\eta_0^* - \eta_0)^2 \rightarrow \min$ | .310 | .690 |
| 2 | $E \left[\left(\frac{\sigma^2}{\beta} \right)^* - \frac{\sigma^2}{\beta} \right]^2 \rightarrow \min$ | $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in (0, 1), \quad \hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$ | |
| 3 | $I(x_1, x_2) \rightarrow \min$ | .0 | 1. |
| 4 | $H(x_1, x_2) \rightarrow \min$ | .311 | .689 |

Należy podkreślić, że podobieństwo wyników 1 i 4 potwierdza wprawdzie sugestię, że kryterium entropijne może być użyteczne w przypadku, gdy ocenia się losowe własności pola, jednak nie stanowi to reguły (patrz przykłady następujących rozdziałów). Rzeczywiście, kryteria informacyjne oraz entropijne są niewrażliwe na asymetrię funkcji η_0 (ponieważ zależą tylko od funkcji korelacyjnej); tymczasem, jeżeli średnie obciążenie belki będzie niesymetryczne to niesymetryczne będzie również rozwiązanie równania (3.η) (analogon funkcji (3.h) otrzymanej powyżej przy stałym średnim obciążeniu). Wówczas oczywiście we wzorze (3.m) pojawi się niesymetryczna funkcja w miejsce wielomianu $x(x-1)(x^2-x-1)$ - symetrycznego względem środka belki (0.5). Optymalnego położenia czujników w tej sytuacji nie będzie charakteryzować symetria, zaś w przypadku bardzo asymetrycznych obciążeń efekt ten może być bardzo istotny (patrz przykład w 3.4). Zatem powyżej dobrany przykład wskazuje również, że wnioskowanie o przydatności jakiegoś kryterium na podstawie jednego zastosowania nie może być właściwe pomimo znacznej zgodności z kryterium specjalnie dobranym do danego zadania. Warto również porównać powyższe wyniki z jednorodnym podziałem odcinka ($\hat{x}_1=0.3333\dots, \hat{x}_2=0.6666\dots$), którego zastosowanie prowadzi do wzrostu błędu estymacji o kilka do kilkuset promili.

3.4. Przykładowe wyniki obliczeń.

Zależność wyników optymalizacji od liczby składników szeregu aproksymującego funkcję kowariancji przy zastosowaniu kryterium minimum błędu estymatora średniej pola. Dla różnych liczb składników branych pod uwagę kryterium to daje wyniki znacznie różniące się od wyników uzyskiwanych przy liczbie składników przekraczającej 5.

```

#####
|          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI          |
|          PARAMETROW SREDNIEJ POLA                              |
|          |
| #SREDNIE OBCIAZENIE ROWNOMIERNE                               |
| #LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU          2                         |
| #STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW          .10000000 , .40000000 |
| #OPTIMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW          .16778760 , .99998900 |
| #ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI  12                      |
| #WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ          .62041990       |
| #STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI          .64597810       |
| #WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI          .00001000       |
|          |
#####
    
```

```

#####
|          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI          |
|          PARAMETROW SREDNIEJ POLA                              |
|          |
| #SREDNIE OBCIAZENIE ROWNOMIERNE                               |
| #LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU          3                         |
| #STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW          .10000000 , .40000000 |
| #OPTIMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW          .00196776 , .50634540 |
| #ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI  5                      |
| #WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ          .63348780       |
| #STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI          .65627710       |
| #WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI          .00001000       |
|          |
#####
    
```

```

#####
|          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI          |
|          PARAMETROW SREDNIEJ POLA                              |
|          |
| #SREDNIE OBCIAZENIE ROWNOMIERNE                               |
| #LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU          5                         |
| #STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW          .10000000 , .40000000 |
| #OPTIMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW          .31151600 , .68623940 |
| #ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI  11                     |
| #WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ          .63613100       |
| #STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI          .65897100       |
| #WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI          .00000001       |
|          |
#####
    
```

```

#####
|          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI          |
|          PARAMETROW SREDNIEJ POLA                              |
|          |
| #SREDNIE OBCIAZENIE ROWNOMIERNE                               |
| #LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU          50                        |
| #STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW          .10000000 , .40000000 |
| #OPTIMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW          .30997650 , .68992250 |
| #ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI  13                     |
| #WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ          .63637980       |
| #STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI          .65986350       |
| #WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI          .00000001       |
|          |
#####
    
```

Zależność wyników optymalizacji od liczby składników szeregu aproksymującego funkcję korelacyjną przy zastosowaniu kryterium maksimum entropii. Zauważaj, że kryterium to jest mniej wrażliwe na tę liczbę niż kryterium odpowiadające minimalizacji błędów estymatora średniej.

```
#####
|          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA POMIAROW POLA          |
|          KRYTERIUM MAKSYMUM ENTROPII                                |
|          |
| LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU                2                          |
| *STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW             .10000000 , .40000000    |
| *OPTYMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW           .30409580 , .69592000    |
| *ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI     6                          |
| *WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ      .63379990                |
| *STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI      .64597810                |
| *WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI       .00000100                |
|          |
#####
```

```
#####
|          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA POMIAROW POLA          |
|          KRYTERIUM MAKSYMUM ENTROPII                                |
|          |
| LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU                3                          |
| *STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW             .10000000 , .40000000    |
| *OPTYMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW           .30323730 , .69676260    |
| *ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI     7                          |
| *WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ      .63467230                |
| *STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI      .65627710                |
| *WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI       .00000100                |
|          |
#####
```

```
#####
|          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA POMIAROW POLA          |
|          KRYTERIUM MAKSYMUM ENTROPII                                |
|          |
| LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU                5                          |
| *STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW             .10000000 , .40000000    |
| *OPTYMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW           .31228260 , .68776390    |
| *ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI     7                          |
| *WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ      .63613110                |
| *STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI      .65897100                |
| *WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI       .00000100                |
|          |
#####
```

```
#####
|          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA POMIAROW POLA          |
|          KRYTERIUM MAKSYMUM ENTROPII                                |
|          |
| LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU                50                         |
| *STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW             .10000000 , .40000000    |
| *OPTYMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW           .31086020 , .68890600    |
| *ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI    16                         |
| *WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ      .63638060                |
| *STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI      .65986350                |
| *WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI       .00000001                |
|          |
#####
```

Ilustracja poprawności metod obliczeniowych - dla różnych punktów startowych program optymalizujący znajduje to samo minimum globalne; dotyczy to w szczególności punktów leżących nawet poza belką.

```

*****
1          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI
1          PARAMETROW SREDNIEJ POLA
1
1
1#SREDNIE OBCIĄZENIE RÓWNOCIERNE
1#LICZBA SKŁADNIKÓW SZEREGU          5
1#STARTOWE POŁOŻENIE CZUJNIKÓW      .10000000 , .90000000
1#OPTIMALNE POŁOŻENIE CZUJNIKÓW     .31260640 , .68739140
1#ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI 4
1#WARIANCJA BŁĘDU ESTYMACJI SREDNIEJ .63613100
1#STARTOWA WARIANCJA BŁĘDU ESTYMACJI .68303280
1#WZGLEDNA DOKŁADNOSC OPTIMALIZACJI .00000001
*****
    
```

```

*****
1          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI
1          PARAMETROW SREDNIEJ POLA
1
1
1#SREDNIE OBCIĄZENIE RÓWNOCIERNE
1#LICZBA SKŁADNIKÓW SZEREGU          5
1#STARTOWE POŁOŻENIE CZUJNIKÓW      .40000000 , .60000000
1#OPTIMALNE POŁOŻENIE CZUJNIKÓW     .31258690 , .68741280
1#ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI 2
1#WARIANCJA BŁĘDU ESTYMACJI SREDNIEJ .63613100
1#STARTOWA WARIANCJA BŁĘDU ESTYMACJI .64131280
1#WZGLEDNA DOKŁADNOSC OPTIMALIZACJI .00000001
*****
    
```

```

*****
1          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI
1          PARAMETROW SREDNIEJ POLA
1
1
1#SREDNIE OBCIĄZENIE RÓWNOCIERNE
1#LICZBA SKŁADNIKÓW SZEREGU          5
1#STARTOWE POŁOŻENIE CZUJNIKÓW      .60000000 , .90000000
1#OPTIMALNE POŁOŻENIE CZUJNIKÓW     .31366050 , .68833310
1#ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI 12
1#WARIANCJA BŁĘDU ESTYMACJI SREDNIEJ .63613100
1#STARTOWA WARIANCJA BŁĘDU ESTYMACJI .65897090
1#WZGLEDNA DOKŁADNOSC OPTIMALIZACJI .00000001
*****
    
```

```

*****
1          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI
1          PARAMETROW SREDNIEJ POLA
1
1
1#SREDNIE OBCIĄZENIE RÓWNOCIERNE
1#LICZBA SKŁADNIKÓW SZEREGU          5
1#STARTOWE POŁOŻENIE CZUJNIKÓW      -.50000000 , .50000000
1#OPTIMALNE POŁOŻENIE CZUJNIKÓW     .31209610 , .68707810
1#ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI 13
1#WARIANCJA BŁĘDU ESTYMACJI SREDNIEJ .63613090
1#STARTOWA WARIANCJA BŁĘDU ESTYMACJI .00000000
1#WZGLEDNA DOKŁADNOSC OPTIMALIZACJI .00000001
*****
    
```

Zależność wyników od stosowanego kryterium. Można porównać wyniki dla pięciu różnych kryteriów: min. estymacji średniej przy obciążeniu równomiernym, kwadratowym i sześciennym oraz maksimum entropii i kryterium przyjmując równomierne podział odcinka.

```

#####
#          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI          #
#          PARAMETROW SREDNIEJ POLA                                #
#          #                                                       #
# #SREDNIE OBCIAZENIE ROWNOMIERNE                                 #
# #LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU          10                          #
# #STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW          .33333330 , .66666660 #
# #OPTIMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW          .31051970 , .68948130 #
# #ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI    3                      #
# #WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ    .63628980             #
# #STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI    .63670980             #
# #WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI     .00000001             #
#####
    
```

```

#####
#          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA POMIAROW POLA      #
#          KRYTERIUM MAKSYMUM ENTROPII                            #
#          #                                                       #
# #LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU          10                          #
# #STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW          .33333330 , .66666660 #
# #OPTIMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW          .31115380 , .68884610 #
# #ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI    3                      #
# #WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ    .63628940             #
# #STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI    .63670980             #
# #WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI     .00000001             #
#####
    
```

```

#####
#          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI          #
#          PARAMETROW SREDNIEJ POLA                                #
#          #                                                       #
# #SREDNIE OBCIAZENIE NIESYMETRYCZNE - III 2                     #
# #LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU          10                          #
# #STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW          .33333330 , .66666660 #
# #OPTIMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW          .33367400 , .99988360 #
# #ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI    7                      #
# #WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ    .19326070             #
# #STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI    .23750730             #
# #WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI     .00000010             #
#####
    
```

```

#####
#          BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA ESTYMACJI          #
#          PARAMETROW SREDNIEJ POLA                                #
#          #                                                       #
# #SREDNIE OBCIAZENIE NIESYMETRYCZNE - III 9                     #
# #LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU          10                          #
# #STARTOWE POLOZENIE CZUJNIKOW          .33333330 , .66666660 #
# #OPTIMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW          .34182550 , .99987620 #
# #ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI    9                      #
# #WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ    .06867082             #
# #STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI    .10081030             #
# #WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI     .00000001             #
#####
    
```

4. Optymalne rozmieszczenie czujników w zagadnieniu stochastycznej / ekstrapolacji.

1. Sformułowanie problemu.

Niech D będzie pewnym zbiorem w \mathbb{R}^n a D_1 i D_2 - jego dwoma rozłącznymi podzbiorem. Załóżmy, że pole losowe $\Psi = \Psi(x, \gamma)$ jest określone dla wszystkich $x \in D$ i $\gamma \in \Gamma$, gdzie (Γ, F, P) jest przestrzenią probabilistyczną. W zagadnieniu ekstrapolacji w punktach obszaru D_1 mogą zostać rozmieszczone czujniki, w punktach D_2 - nie mogą.

Celem naszych rozważań jest ustalenie takiego sposobu rozmieszczenia pewnej liczby czujników (np. N) w obszarze D_1 , żeby otrzymać najlepszą informację o wartościach pola Ψ w punktach z D_2 .

Oznaczmy przez x_1, \dots, x_N punkty, w których czujniki zostały rozmieszczone, $x_i \in D_1$, $i=1, 2, \dots, N$ a przez $\sigma(x_1, \dots, x_N)$ - σ -ciało zdarzeń generowane przez obserwacje $z(x_i, \gamma)$ w tych punktach, t.j.:

$$(4.1) \quad \sigma(x_1, \dots, x_N) = \sigma(z(x_1, \gamma), \dots, z(x_N, \gamma)) \subset F.$$

Dla ustalonej konfiguracji czujników efektywnym nieobciążonym $\sigma(x_1, \dots, x_N)$ - mierzalnym estymatorem $\Psi(x, \gamma)$ jest warunkowa wartość oczekiwana [21]:

$$(4.2) \quad \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}(x) = E\{\Psi(x, \gamma) | \sigma(x_1, \dots, x_N)\}$$

Gdy punkty x_1, \dots, x_N w definicji (4.2) zmieniają się, otrzymujemy rodzinę estymatorów indeksowaną przez N parametrów. Optymalizacja polega na wyborze takich położeń x_1, \dots, x_N (oznaczmy je przez $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$), że $\hat{\Psi}_{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N}(x)$ najlepiej aproksymuje $\Psi(x, \gamma)$.

W szczególnym przypadku gdy interesuje nas wartość Ψ w pewnym ustalonym punkcie $x \in D_2$, powyższy warunek optymalności może być

zapisany jako:

$$(4.3) \quad E\left\{|\Psi(x, \gamma) - \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}^{\gamma}(x, \gamma)|^2\right\} = \\ = \min_{x_1, \dots, x_N \in D_1} E\left\{|\Psi(x, \gamma) - \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}^{\gamma}(x, \gamma)|^2\right\}$$

(Kryterium średniokwadratowe będzie używane w dalszych rozważaniach.)

Weryfikacja Ψ w całym podzbiórze D_2 prowadzi do następującego warunku optymalności:

$$(4.4) \quad \int_{D_2} E\left\{|\Psi(x, \gamma) - \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}^{\gamma}(x, \gamma)|^2\right\} dx = \\ = \min_{x_1, \dots, x_N \in D_1} \int_{D_2} E\left\{|\Psi(x, \gamma) - \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}^{\gamma}(x, \gamma)|^2\right\} dx .$$

W dalszych rozważaniach będziemy zajmować się zagadnieniem estymacji wartości pola Ψ w punkcie x z warunkiem optymalności (4.3).

2. Przypadek obserwacji bez szumów.

Rozważmy model w którym obserwowane jest pole Ψ , tzn.

$$(4.5) \quad z(x_i) = \Psi(x_i), \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Załóżmy, że znane są rozkłady $N+1$ - wymiarowe (ich gęstości) pola $\Psi(\cdot)$; oznaczmy przez $f_{x_1, x_2, \dots, x_k}(y_1, y_2, \dots, y_k)$, $x_1, x_2, \dots, x_k \in D$, $y_i \in K$, $i=1, 2, \dots, k$, k -wymiarową gęstość prawdopodobieństwa Ψ wektora $(\Psi(x_1, \gamma), \Psi(x_2, \gamma), \dots, \Psi(x_k, \gamma))$. Warunkowa gęstość prawdopodobieństwa Ψ w punkcie x pod warunkiem $\Psi(x_1, \gamma)=y_1$, $\Psi(x_2, \gamma)=y_2, \dots, \Psi(x_N, \gamma)=y_N$ ma postać:

$$(4.6) \quad f_{x|x_1, \dots, x_N}(y) = \frac{f_{x, x_1, \dots, x_N}(y, y_1, \dots, y_N)}{f_{x_1, \dots, x_N}(y_1, \dots, y_N)}$$

Uwzględniając wyrażenie (4.6) możemy przedstawić estymator (4.2) dla ustalonego zdarzenia z $\alpha(x_1, \dots, x_N)$ jako:

$$(4.7) \quad \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}(x, \gamma) = E\{\Psi(x, \gamma) | \Psi(x_1) = y_1, \Psi(x_2) = y_2, \dots, \Psi(x_N) = y_N\} = \\ = \int y \frac{f_{x, x_1, \dots, x_N}(y, y_1, \dots, y_N)}{f_{x_1, \dots, x_N}(y_1, \dots, y_N)} dy.$$

Sredni kwadrat (4.3) przyjmie wówczas postać:

$$(4.8) \quad E\{|\Psi(x, \gamma) - \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}(x, \gamma)|^2\} = \\ = \text{Var}(\Psi(x, \gamma)) - \int \dots \int \frac{[\int y f_{x, x_1, \dots, x_N}(y, y_1, \dots, y_N) dy]^2}{f_{x_1, \dots, x_N}(y_1, \dots, y_N)} dy_1 \dots dy_N.$$

Punkty $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$ minimalizujące (4.8) realizują również najlepszy estymator pola Ψ w punkcie x ; dla uzyskanych z pomiaru wielkości $\Psi(\hat{x}_1), \dots, \Psi(\hat{x}_N)$ ma on postać:

$$(4.9) \quad \hat{\Psi}_{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N}(x, \gamma) = \frac{\int y f_{x, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N}(y, \Psi(\hat{x}_1), \dots, \Psi(\hat{x}_N)) dy}{f_{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N}(\Psi(\hat{x}_1), \dots, \Psi(\hat{x}_N))}$$

W przypadku, gdy interesuje nas wartość pola Ψ w całym obszarze D_2 , tzn. optymalizacja przebiega zgodnie z kryterium (4.4), w warunku (4.8) należy wykonać dodatkowe całkowanie względem $x \in D_2$; wówczas optymalne punkty pomiaru $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$ w estymatorze (4.9) są te same dla wszystkich $x \in D_2$.

Rozważmy teraz szczególny przypadek, gdy pole Ψ jest gaussowskie i ma zerową średnią. Wówczas wyrażenia (4.7) dla estymatora i (4.8) dla wariancji błędu mogą być przedstawione przez odpowiednie kowariancje. Estymator (4.7) jest liniowy i ma postać:

$$(4.10) \quad \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}(x, \gamma) = k_N^T(x) K_N^{-1} Z_N,$$

gdzie

$$k_N^T(x) = (\text{cov}[\Psi(x_1), \Psi(x)], \dots, \text{cov}[\Psi(x_N), \Psi(x)]) ,$$

$$K_N = \left\{ K_{i,j} \right\}_{i,j=1, \dots, N}, \quad K_{i,j} = \text{cov}[\Psi(x_i), \Psi(x_j)]$$

a Z_N jest wektorem obserwacji, t.j.

$$Z_N = (\Psi(x_1), \dots, \Psi(x_N))$$

Wariancja błędu (4.8) ma postać:

$$(4.11) \quad E\left\{ |\Psi(x, \gamma) - \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}(x, \gamma)|^2 \right\} = \\ = \text{Var}(\Psi(x, \gamma)) - k_N^T(x) K_N^{-1} k_N(x)$$

Takie same wyrażenia dla estymatora i wariancji można znaleźć w monografiach [41] i [48]. Zostały tam one otrzymane dla dowolnego rozkładu pola Ψ przy dodatkowym założeniu, że poszukiwany najlepszy estymator jest liniowy (tzn. jest liniową kombinacją obserwacji).

3. Przypadek obserwacji zaszumionych.

Kozważmy teraz model, w którym obserwowane jest zaszumione pole Ψ , tzn.

$$(4.12) \quad z(x_i) = \Psi(x_i) + \eta(x_i), \quad i=1, 2, \dots, N,$$

gdzie η jest szumem o zerowej średniej ($E(\eta(x))=0 \quad \forall x \in D$).

Estymator pola Ψ w punkcie x ma w tym przypadku również postać (4.2); inaczej przedstawia się natomiast estymator wyrażony przez gęstość prawdopodobieństwa (odpowiednik (4.7)).

Niech $\xi_{x, x_1, \dots, x_N}(y, y_1, \dots, y_N; v_1, \dots, v_N)$ będzie łączną gęstością prawdopodobieństwa wektora $(\Psi(x, \gamma), \Psi(x_1, \gamma), \dots, \Psi(x_N, \gamma), \eta(x_1, \gamma), \dots,$

$\eta(x_N, \gamma)$ a $\delta_{x_1, \dots, x_N}(y_1, \dots, y_N; v_1, \dots, v_N)$ - gęstością powyższego wektora bez pierwszej współrzędnej. Wówczas wartość estymatora Ψ w punkcie x pod warunkiem $z(x_1, \gamma) = z_1, \dots, z(x_N, \gamma) = z_N$ ma postać:

$$(4.13) \quad \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}(x, \gamma) = \frac{\int y \int \dots \int \delta_{x, x_1, \dots, x_N}(y, z_1 - v_1, \dots, z_N - v_N, v_1, \dots, v_N) dv_1 \dots dv_N dy}{\int \dots \int \delta_{x_1, \dots, x_N}(z_1 - v_1, \dots, z_N - v_N, v_1, \dots, v_N) dv_1 \dots dv_N}$$

(Jeżeli zakłócenia i pole mierzone są niezależne, wówczas w wyrażeniu (4.13) zamiast całki z g mamy splot gęstości rozkładów wielowymiarowych pola Ψ i zakłóceń η .)

Błąd średniokwadratowy aproksymacji ma w tym wypadku następującą postać:

$$(4.14) \quad E\{|\Psi(x, \gamma) - \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}(x, \gamma)|^2\} = \text{Var}(\Psi(x, \gamma)) -$$

$$- \int \dots \int \frac{\left[\int y \int \dots \int \delta_{x, x_1, \dots, x_N}(y, z_1 - v_1, \dots, z_N - v_N, v_1, \dots, v_N) dv_1 \dots dv_N dy \right]^2}{\int \dots \int \delta_{x_1, \dots, x_N}(z_1 - v_1, \dots, z_N - v_N, v_1, \dots, v_N) dv_1 \dots dv_N} dz_1 \dots dz_N$$

Punkty $\hat{x}_i, i=1, \dots, N$ minimalizujące średni kwadrat (4.14) realizują najlepszy estymator pola Ψ w punkcie x . Ma on, analogicznie jak w poprzednim przypadku, następującą postać:

$$(4.15) \quad \hat{\Psi}_{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N}(x, \gamma) = \frac{\int y \int \dots \int \delta_{x, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N}(y, \hat{z}_1 - v_1, \dots, \hat{z}_N - v_N, v_1, \dots, v_N) dv_1 \dots dv_N dy}{\int \dots \int \delta_{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N}(\hat{z}_1 - v_1, \dots, \hat{z}_N - v_N, v_1, \dots, v_N) dv_1 \dots dv_N}$$

gdzie oznaczono $\hat{z}_i = z(x_i, \gamma), i=1, \dots, N$.

Rozważmy jeszcze szczególny przypadek kiedy pola Ψ i η mają

łącznie rozkład gaussowski ($E(\Psi)=0$).

Niech

$$\begin{aligned}
 E\{\Psi(x_1, \gamma)\Psi(x_2, \gamma)\} &= Q(x_1, x_2) \\
 (4.16) \quad E\{\Psi(x_1, \gamma)\eta(x_2, \gamma)\} &= R(x_1, x_2) \\
 E\{\eta(x_1, \gamma)\eta(x_2, \gamma)\} &= \rho(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

W tym wypadku zarówno estymator pola jak i wariancja błędu mają formalnie taką samą postać jak w (4.10) i (4.11), jednak występujące w nich macierze są odmienne:

$$\begin{aligned}
 (4.17) \quad K_N^T(x) &= [\text{cov}[z(x_1), \Psi(x)], \dots, \text{cov}[z(x_N), \Psi(x)]] = \\
 &= [Q(x_1, x) + R(x_1, x), \dots, Q(x_N, x) + R(x_N, x)]
 \end{aligned}$$

$$(4.18) \quad K_N = \{ K_{i,j} \}_{i,j=1, \dots, N}$$

$$K_{i,j} = \text{cov}[z(x_i), z(x_j)] = Q(x_i, x_j) + 2R(x_i, x_j) + \rho(x_i, x_j)$$

$$(4.19) \quad Z_N = (z(x_1, \gamma), z(x_2, \gamma), \dots, z(x_N, \gamma)).$$

Również te wzory zostały zamieszczone w pracy [41]; otrzymano je przy założeniu liniowej postaci estymatora pola losowego.

4. Przybliżona metoda znajdowania optymalnego położenia czujników.

Rozważmy jeszcze raz prostszy przypadek gdy obserwowany jest proces niezaburzony (równanie (4.5)). Do znalezienia estymatora i wariancji błędu potrzebne są skończenie wymiarowe gęstości prawdopodobieństwa pola losowego Ψ (por.(4.7) i (4.8)). W ogólnym przypadku, kiedy pole jest niegaussowskie, znalezienie skończenie wymiarowych gęstości prawdopodobieństwa jego rozkładów jest niemożliwe. Zwykle dużo łatwiejsze jest znajdowanie funkcji momentowych wyższych rzędów o postaci:

$$(4.20) \quad m_{\nu_1 \dots \nu_k}(x_1, \dots, x_k) = E \left\{ \Psi^{\nu_1}(x_1) \times \dots \times \Psi^{\nu_k}(x_k) \right\},$$

lub centrowanych funkcji momentowych;

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \mu_{\nu_1 \dots \nu_k}(x_1, \dots, x_k) &= \\ &= E \left\{ (\Psi(x_1) - m_1(x_1))^{\nu_1} \times \dots \times (\Psi(x_k) - m_1(x_k))^{\nu_k} \right\}, \end{aligned}$$

dla $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k = 1, 2, \dots$. Można wówczas skończenie wymiarowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa rzędu k dla pola Ψ zapisać w postaci szeregu Grama-Charliera (por. [10], [54]):

$$(4.22) \quad \begin{aligned} f_{x_1, x_2, \dots, x_k}(y_1, y_2, \dots, y_k) &= \\ &= \left[(2\pi)^k |K_k| \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} (Y_k - N_k)^T K_k^{-1} (Y_k - N_k) \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_k = l} \frac{c_{\nu_1 \dots \nu_k}(x_1, \dots, x_k)}{\nu_1! \dots \nu_k!} H_{\nu_1 \dots \nu_k}(y_1 - m_1(x_1), \dots, y_k - m_1(x_k)) \right\} \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots$, gdzie: $Y_k = (y_1, \dots, y_k)^T$, $N_k = (m_1(x_1), \dots, m_1(x_k))^T$,

$K_k = \{ K_{i,j} \}$, $K_{i,j} = \mu_{11}(x_i, x_j) = E \left\{ (\Psi(x_i) - m_1(x_i)) \times (\Psi(x_j) - m_1(x_j)) \right\}$,

$$(4.23) \quad c_{\nu_1 \dots \nu_k}(x_1, \dots, x_k) =$$

$$= \int \dots \int f_{x_1, \dots, x_k}(y_1, \dots, y_k) G_{\nu_1 \dots \nu_k}(y_1 - m_1(x_1), \dots, y_k - m_1(x_k)) dy_1 \dots dy_k$$

natomiast $H_{\nu_1 \dots \nu_k}$ i $G_{\nu_1 \dots \nu_k}$ są wielomianami Hermita (por. [54]):

$$(4.24) \quad H_{\nu_1 \dots \nu_k}(y_1, \dots, y_k) =$$

$$= (-1)^{|\nu|} \exp\left\{\frac{1}{2} Y_k^T K_k^{-1} Y_k\right\} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial y_1^{\nu_1} \dots \partial y_k^{\nu_k}} \exp\left\{-\frac{1}{2} Y_k^T K_k^{-1} Y_k\right\}$$

$$(4.25) \quad G_{\nu_1 \dots \nu_k}(y_1, \dots, y_k) =$$

$$= (-1)^{|\nu|} \exp\left\{\frac{1}{2} Y_k^T K_k^{-1} Y_k\right\} \left[\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial \xi_1^{\nu_1} \dots \partial \xi_k^{\nu_k}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \Xi_k^T K_k^{-1} \Xi_k\right\} \right]_{\Xi_k = K_k^{-1} Y_k}$$

$$(|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_k \text{ i } \Xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)).$$

Współczynniki $c_{\nu_1 \dots \nu_k}$ są funkcjami momentów pola losowego Ψ .

Czasami, w celu uproszczenia wyrażeń dla rozwinięcia (4.22) funkcji wielowymiarowej gęstości prawdopodobieństwa pola Ψ , wygodniej jest rozważyć unormowaną wektorową zmienną losową $\Phi_k = (\phi(x_1), \dots, \phi(x_k))^T$ określoną jako:

$$(4.26) \quad \Phi_k = K_k^{-\frac{1}{2}} (\Psi_k - M_k)$$

gdzie: $K_k = \left[K_k^{\frac{1}{2}} \right]^T K_k^{\frac{1}{2}}$, $\Psi_k = (\psi(x_1), \dots, \psi(x_k))^T$.

Wówczas rozwinięcie (4.22) gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej ma postać:

$$(4.27) \quad f_{x_1, x_2, \dots, x_k}(s_1, s_2, \dots, s_k) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} S_k^T S_k\right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_k = l} \frac{\tilde{c}_{\nu_1 \dots \nu_k}(x_1, \dots, x_k)}{\nu_1! \dots \nu_k!} \tilde{h}_{\nu_1 \dots \nu_k}(s_1, \dots, s_k) \right\}$$

gdzie $S_k = (s_1, \dots, s_k)^T$,

$$(4.28) \quad \tilde{h}_{\nu_1 \dots \nu_k}(s_1, \dots, s_k) =$$

$$= (-1)^{|\nu|} \exp\left\{\frac{1}{2} S_k^T S_k\right\} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial s^{\nu_1} \dots \partial s^{\nu_k}} \exp\left\{-\frac{1}{2} S_k^T S_k\right\}$$

1

$$(4.29) \quad \tilde{c}_{\nu_1 \dots \nu_k}(x_1, \dots, x_k) = \int \dots \int_{x_1, \dots, x_k} (s_1, \dots, s_k) \tilde{h}_{\nu_1 \dots \nu_k}(s_1, \dots, s_k) ds_1 \dots ds_k$$

Z definicji (4.28) wynika, że

$$(4.30) \quad \tilde{h}_{\nu_1 \dots \nu_k}(s_1, \dots, s_k) = \tilde{h}_{\nu_1}(s_1) \times \dots \times \tilde{h}_{\nu_k}(s_k)$$

gdzie

$$(4.31) \quad \tilde{h}_n(s) = (-1)^n \exp\left\{\frac{1}{2} s^2\right\} \frac{d^n}{ds^n} \exp\left\{-\frac{1}{2} s^2\right\}$$

są klasycznymi wielomianami Hermita (por. [10]). Wielomiany \tilde{h}_n spełniają następujące równania rekurencyjne:

$$(4.32) \quad \tilde{h}_{n+1}(s) = s\tilde{h}_n(s) - n\tilde{h}_{n-1}(s) \quad . \quad n = 1, 2, \dots$$

Kolejne wielomiany Hermita \tilde{h}_n niższych stopni mają postać:

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \tilde{h}_0(s) &= 1, \\ \tilde{h}_1(s) &= s, \\ \tilde{h}_2(s) &= s^2 - 1, \\ \tilde{h}_3(s) &= s^3 - 3s, \\ \tilde{h}_4(s) &= s^4 - 6s^2 + 3, \\ \tilde{h}_5(s) &= s^5 - 9s^3 + 12s, \text{ itd.} \end{aligned}$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa (4.22) może być otrzymywana z (4.27) przez zamianę zmiennych :

$$(4.34) \quad S_k = K_k^{-\frac{1}{2}} (Y_k - H_k)$$

czyli

$$Y_k = K_k^{\frac{1}{2}} S_k + H_k$$

Ma ona wtedy postać:

$$(4.35) \quad f_{x_1, x_2, \dots, x_k}(y_1, y_2, \dots, y_k) = \\ = \left[(2\pi)^k |K_k| \right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (Y_k - M_k)^T K_k^{-1} (Y_k - M_k) \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_k = l} \frac{\tilde{c}_{\nu_1 \dots \nu_k}(x_1, \dots, x_k)}{\nu_1! \dots \nu_k!} \tilde{h}_{\nu_1 \dots \nu_k}(s_1, \dots, s_k) \right\}.$$

W wyrażeniu (4.35) wielomian $\tilde{h}_{\nu_1 \dots \nu_k}$ ma nadal postać (4.30), jednak w każdym z wielomianów jednej zmiennej $\tilde{h}_{\nu_i}(s_i)$ podstawione jest $s_i = s_i(y_1, \dots, y_k)$ otrzymane z zamiany zmiennych (4.34).

Do chwili obecnej rozważaliśmy dwa przypadki ekstrapolacji. Pierwszy (dowolna gęstość prawdopodobieństwa) może być utożsamiony z sytuacją, gdy jako wymaganą gęstość bierzemy pełne rozwinięcie Grama-Charliera. Drugi (pole gaussowskie) odpowiada przybliżeniu w którym w reprezentacjach funkcji gęstości przy pomocy szeregu (4.22) ograniczamy się do jednego członu. Metoda znajdowania optymalnego położenia czujników którą proponujemy w tym punkcie polega na zastąpieniu odpowiednich gęstości prawdopodobieństwa w estymatorze (4.7) skończoną liczbą wyrazów rozwinięcia (4.22) (większą od jednego). Estymator ma wówczas postać (zakładamy, że $E(\Psi) = 0$):

$$(4.36) \quad E\left\{ \Psi(x, \gamma) \mid \Psi(x_1) = y_1, \Psi(x_2) = y_2, \dots, \Psi(x_N) = y_N \right\} \\ = \int \frac{y \left[(2\pi)^{N+1} |K_{N+1}| \right]^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} Y_{N+1}^T K_{N+1}^{-1} Y_{N+1} \right\}}{\left[(2\pi)^N |K_N| \right]^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} Y_N^T K_N^{-1} Y_N \right\}} \times$$

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \sum_{l=0}^p \sum_{\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_N = l} \frac{c_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_N}(x, x_1, \dots, x_N)}{\nu_0! \nu_1! \dots \nu_N!} H_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_N}(y, y_1, \dots, y_N) \right\} \\ & \times \frac{\int y \left[|K_N| \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} \left[y + \frac{\beta^T Y_N}{\alpha} \right]^2 \right\}}{\left[2\pi |K_{N+1}| \right]^{1/2}} \times \\ & \left\{ 1 + \sum_{l=0}^p \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_N = l} \frac{c_{\nu_1 \dots \nu_N}(x_1, \dots, x_N)}{\nu_1! \dots \nu_N!} H_{\nu_1 \dots \nu_N}(y_1, \dots, y_N) \right\} \\ & \times \frac{\int y \left[|K_N| \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} \left[y + \frac{\beta^T Y_N}{\alpha} \right]^2 \right\}}{\left[2\pi |K_{N+1}| \right]^{1/2}} \times \\ & \left\{ 1 + \sum_{l=0}^p \sum_{\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_N = l} \frac{c_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_N}(x, x_1, \dots, x_N)}{\nu_0! \nu_1! \dots \nu_N!} H_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_N}(y, y_1, \dots, y_N) \right\} \\ & \times \frac{\int y \left[|K_N| \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} \left[y + \frac{\beta^T Y_N}{\alpha} \right]^2 \right\}}{\left[2\pi |K_{N+1}| \right]^{1/2}} \times \\ & \left\{ 1 + \sum_{l=0}^p \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_N = l} \frac{c_{\nu_1 \dots \nu_N}(x_1, \dots, x_N)}{\nu_1! \dots \nu_N!} H_{\nu_1 \dots \nu_N}(y_1, \dots, y_N) \right\} \end{aligned} \quad dy =$$

gdzie:

$$K_N = \left\{ \text{cov}(\Psi(x_i), \Psi(x_j)) \right\}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

$$K_{N+1} = \left\{ \text{cov}(\Psi(x_i), \Psi(x_j)) \right\}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = x,$$

$$Y_N = (y_1, \dots, y_N)^T,$$

$$Y_{N+1} = (y, y_1, \dots, y_N)^T,$$

$$\alpha = \frac{1}{k_0 - k_N^T K_N^{-1} k_N}, \quad \beta = -\alpha K_N^{-1} k_N = \frac{K_N^{-1} k_N}{k_N^T K_N^{-1} k_N - k_0},$$

$$k_N^T(x) = (\text{cov}[\Psi(x_1), \Psi(x)], \dots, \text{cov}[\Psi(x_N), \Psi(x)]) ,$$

$$k_0 = \text{Var}(\Psi(x)).$$

Wyrażenie (4.36) można zapisać w odmiennej postaci wykonując jedno całkowanie:

$$(4.37) \quad \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}(x) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{K_N^T K_N^{-1} Y_N}{\left\{ 1 + \sum_{l=3}^p \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_N = l} \frac{c_{\nu_1 \dots \nu_N}^{(x_1, \dots, x_N)}}{\nu_1! \dots \nu_N!} H_{\nu_1 \dots \nu_N}^{(y_1, \dots, y_N)} \right\}} \times \\
 &\frac{[|K_N|]^{1/2}}{\left[2\pi |K_{N+1}| \right]^{1/2} \left\{ 1 + \sum_{l=3}^p \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_N = l} \frac{c_{\nu_1 \dots \nu_N}^{(x_1, \dots, x_N)}}{\nu_1! \dots \nu_N!} H_{\nu_1 \dots \nu_N}^{(y_1, \dots, y_N)} \right\}} \times \\
 &\times \sum_{l=3}^p \sum_{\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_N = l} \frac{c_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_N}^{(x, x_1, \dots, x_N)}}{\nu_0! \nu_1! \dots \nu_N!} \int \left[y H_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_N}^{(y, y_1, \dots, y_N)} \times \right. \\
 &\left. \times \exp \left\{ - \frac{\alpha}{2} \left[y + \frac{\beta^T Y_N}{\alpha} \right]^2 \right\} \right] dy
 \end{aligned}$$

Jak widać z (4.37), przy aproksymacji gęstości prawdopodobieństwa pierwszymi p wyrazami szeregu Grama-Charliera otrzymujemy estymator pola losowego $\Psi(x)$ który jest funkcją wymierną obserwacji $\Psi(x_1), \dots, \Psi(x_N)$. Wielomiany w liczniku i mianowniku są stopnia co najwyżej p . Możliwe są przy tym dwie sytuacje: gdy $p \leq 2$ to $\hat{\Psi}$ jest liniową funkcją obserwacji lub gdy $p \geq 3$ to $\hat{\Psi}$ jest funkcją wymierną stopnia wyższego lub równego trzy.

Wariancja błędu dla estymatora (4.37) (również obliczona w sposób przybliżony) ma postać:

$$(4.38) \quad E \left\{ |\Psi(x, \gamma) - \hat{\Psi}_{x_1, \dots, x_N}(x, \gamma)|^2 \right\} = \text{Var}(\Psi(x)) -$$

$$- \int dy_N \dots \int dy_1 \left[\left[\int dy y \exp \left\{ - \frac{\alpha}{2} \left[y + \frac{\beta^T Y_N}{\alpha} \right]^2 \right\} \right] \times \right.$$

$$\left. \left\{ 1 + \sum_{l=3}^p \sum_{\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_N = l} \frac{c_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_N}^{(x, x_1, \dots, x_N)}}{\nu_0! \nu_1! \dots \nu_N!} H_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_N}^{(y, y_1, \dots, y_N)} \right\}^2 \right] \times$$

$$\frac{\left[|K_N| \right]^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} Y_N^T K_N^{-1} Y_N \right\}}{\left[(2\pi)^{N+2} \right]^{1/2} |K_{N+1}| \left\{ 1 + \sum_{l=3}^p \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_N = l} \frac{c_{\nu_1} \dots c_{\nu_N} (x_1 \dots x_N)}{\nu_1! \dots \nu_N!} H_{\nu_1} \dots H_{\nu_N} (y_1 \dots y_N) \right\}}$$

Wzory (4.37) i (4.38) wystarczają do skonstruowania algorytmu optymalnego pomiaru pola losowego Ψ . Zauważmy, że o ile wzór (4.37) jest stosunkowo prosty (całka w nim występująca łatwo daje się wyrazić przez momenty zmiennej losowej o rozkładzie gaussowskim ze średnią $-\beta^T Y_N / \alpha$ i wariancją $1/\alpha$), to obliczanie całek w (4.38) względem y_1, \dots, y_N może sprawiać kłopot. Należy tam przeprowadzić całkowanie funkcji wymiernych wielu zmiennych z gaussowską funkcją wagową. Jednak w wypadku gdy rozkład pola Ψ jest silnie niegaussowski, wysiłek poświęcony obliczeniom może zaowocować istotnym polepszeniem estymacji.

Zauważmy jeszcze na zakończenie, że całkowanie wyrażenia (4.36) i następných może sprawić dodatkowe kłopoty wynikające z faktu iż funkcje podcałkowe nie są pełnymi gęstościami prawdopodobieństwa lecz tylko ich przybliżeniami. Mogą one niekiedy przyjmować wartości ujemne. W trakcie obliczeń numerycznych należy to uwzględnić i dokonać niezbędnych korekt.

5. Uwagi.

a) Wzory podane w tym rozdziale oparte są na znajomości momentów mierzonego pola losowego. Ta szczególnie prosta postać estymatorów i wyrażeń dla wariancji błędu sprawia, że mogą być one łatwo przystosowane do obliczeń komputerowych. Przykłady obliczeń z ich wykorzystaniem podajemy w punkcie 6 tego rozdziału.

b) Zagadnienie ekstrapolacji pola skalarnego może być łatwo uogólnione na przypadek wektorowy. Należy wówczas zamiast wariancji błędu w postaci np. (4.8) rozważać wyrażenie $E\{|\hat{\Psi}(x) - \Psi(x)|^2\}$, gdzie pionowe kreski oznaczają normę w \mathbb{R}^n . W szczególnym przypadku estymatorów liniowych wyrażenie dla błędu

średniokwadratowego zawiera ślad odpowiednich tensorów korelacyjnych.

c) W rozważanym tutaj przypadku ekstrapolacji gaussowskiego pola losowego (lub, co daje takie same wzory dla wariancji błędu i współczynników estymatora, w przypadku założenia a priori liniowej regresji) wymagana jest znajomość funkcji korelacyjnej pola również w punkcie, który jest poza zasięgiem naszych czujników (punkt $x \in D_2$). Oczywiście, w niektórych przypadkach znalezienie tej funkcji jest możliwe (np. powodem ekstrapolowania wartości pola Ψ w punkcie x jest duży koszt zdobycia informacji (eksperymentów); po znalezieniu odpowiednich korelacji ograniczamy się do tańszych pomiarów w pewnym jego otoczeniu). W sytuacji, gdy dokładne wartości funkcji korelacyjnych nie mogą być ustalone a priori przed dokonaniem pomiarów funkcje korelacyjne są nieznanne, należy proces optymalnego wyboru punktów pomiarowych połączyć z zadaniem optymalnej filtracji. W tym celu, oprócz równania obserwacji (odpowiednik (4.5) lub (4.12)) należy również znać równanie opisujące zachowanie się pola losowego Ψ w czasie i przestrzeni. Równanie to może być dyskretne w czasie (opisywać zachowanie się pola losowego Ψ w ustalonych chwilach - momentach obserwacji) lub ciągłe (pełen opis zjawiska w czasie). Przyjęcie odpowiedniego schematu prowadzi do filtracji dyskretnej (por. [16]) lub ciągłej (por. [5]). Zadanie optymalnego rozmieszczania czujników sprowadza się teraz do do równoczesnej filtracji procesu (łącznie ze znajdowaniem miary dokładności ekstrapolacji) oraz minimalizowania błędu estymacji poprzez przemieszczanie czujników. Pewien przypadek tak postawionego zagadnienia analizujemy w następnym rozdziale.

6. Przykład numeryczny.

Jako przykład zastosowania omawianych w tym rozdziale zagadnień rozważymy zadanie optymalnego rozmieszczenia czujników służących do pomiaru wartości pola losowego w punkcie na podstawie niezaszumionych obserwacji dokonywanych w pewnym jego otoczeniu. Założmy, że czujniki rozmieszczone są w równej

odległości od interesującego nas punktu i leżą w płaszczyźnie zawierającej ten punkt (leżą na okręgu którego środkiem jest punkt w którym pole ma być ekstrapolowane). Optymalizacji dokonamy posługując się dwoma kryteriami. Jednym z nich jest omawiane w tym rozdziale kryterium średniokwadratowe (odpowiada to minimalizacji wyrażenia (4.11)), drugim - kryterium entropijne (co odpowiada maksymalizacji wyznacznika macierzy kowariancji pola w punktach, w których umieszczono czujniki). W obu wypadkach informacją wystarczającą do znalezienia optimum jest znajomość funkcji korelacyjnej (gaussowskiego) pola losowego.

Rozważymy trzy przykłady dla różnych funkcji korelacyjnych:

$$k_1(x, y) = \sigma^2 \exp(-a|x-y|),$$

$$k_2(x, y) = \sigma^2 |x||y| \exp(-a|x-y|),$$

$$k_3(x, y) = \sigma^2 \exp\left\{-\alpha\sqrt{a(x_1-y_1)^2+b(x_2-y_2)^2}\right\}.$$

Pierwsza funkcja odpowiada jednorodnemu polu losowemu, druga - niejednorodnemu lecz będącemu deterministyczną funkcją pola jednorodnego, trzecia - polu niejednorodnemu.

W celu dokonania wyboru optymalnego położenia czujników posłużymy się programem opracowanym przez stypendystę z University of Lund (Szwecja) Petera Alva. Tekst programu wraz z dokładnym opisem sposobu użycia (zbiór HELP.PAS) zamieszczony jest w Dodatku na końcu pracy.

Program wyrysowuje optymalne położenie detektorów na okręgu oraz podaje wyniki liczbowe (wyrażone jako kąty między osią układu współrzędnych OX a promieniem łączącym środek okręgu z czujnikiem). Miarą jakości (nazywaną w programie "epsilon") jest:

dla kryterium średniokwadratowego:

$$E = k_N^T(x) K_N^{-1} k_N(x),$$

dla kryterium entropijnego:

$$E = \det K_N.$$

Funkcje te są w programie maksymalizowane.

W obliczeniach przyjęto:

$$\sigma^2 = 1,$$

$$a = 1,$$

$$a = 0.5,$$

$$b = 10,$$

położenie środka okręgu: $(0.5, 0.5)$,

promień okręgu: $r = 1$.

Wyniki zestawiono na rysunkach. (Var oznacza wariancję błędu aproksymacji pola zdefiniowaną w (4.11)).

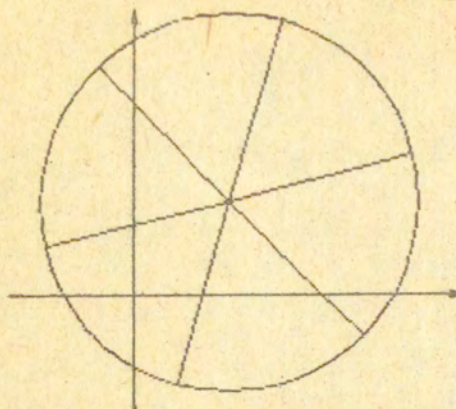
Widać, że w przypadku pola jednorodnego oba kryteria dają identyczne rozmieszczenia czujników (równomierne na okręgu). Taka sama jest wówczas dokładność aproksymacji wartości pola Ψ w środku okręgu.

Dla funkcji korelacyjnej $K_2(x,y)$ (pole niejednorodne będące funkcją pola jednorodnego) kryterium średniokwadratowe daje równomierne (zorientowane względem środka współrzędnych) położenie czujników, kryterium entropijne - bardzo nierównomierne (również zorientowane). Tutaj wyniki możliwej aproksymacji pola w środku na podstawie pomiarów w ustalonych punktach okręgu są dokładniejsze w pierwszym przypadku.

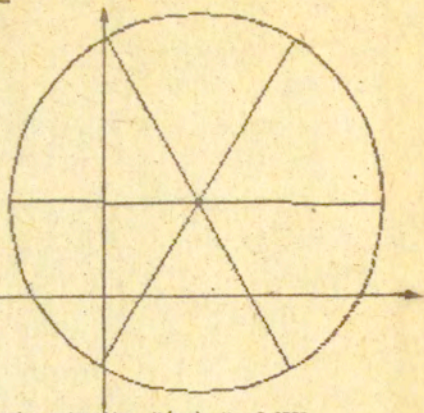
Dla ostatniej funkcji korelacyjnej $K_3(x,y)$ (pole niejednorodne) kryterium entropijne daje bardziej równomierne rozmieszczenie czujników. Jednak, na skutek silnej niejednorodności pola, dokładniejszy wynik aproksymacji otrzymujemy przy skoncentrowanym położeniu czujników wyznaczonym przez kryterium średniokwadratowe.

Wnioskiem płynącym z powyższego przykładu jest to, że dla pól niejednorodnych oba rozważane kryteria dają całkowicie różne wyniki. Przy tym, gdy naszym celem jest ekstrapolacja wartości pola w danym punkcie na podstawie pomiarów dokonywanych w

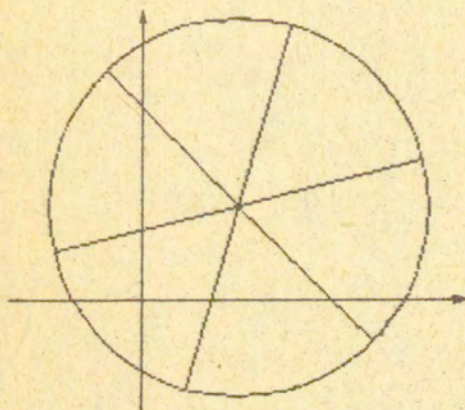
punktach z jego otoczenia, lepsze wyniki daje kryterium średniokwadratowe. Ponadto, co warto podkreślić, w obu wypadkach rozmieszczenie czujników jest nierównomierne. Odstępstwo od tej reguły w przypadku kryterium średniokwadratowego i funkcji korelacyjnej $K_2(x,y)$ można wytłumaczyć faktem, iż badane pole, jako deterministyczna funkcja pola jednorodnego, jest w swej stochastycznej istocie jednorodne i fakt ten został przez kryterium odkryty.



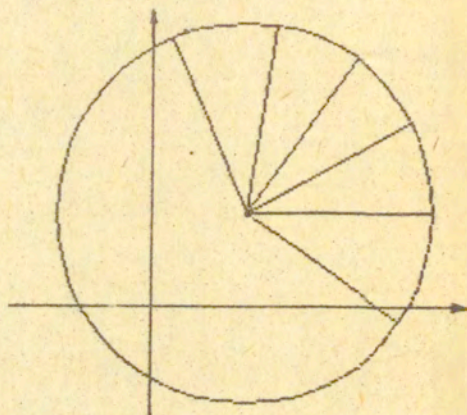
Kryterium średniokwadratowe, $K_{\frac{1}{2}}(x, y)$, $\text{Var}=0.6350$



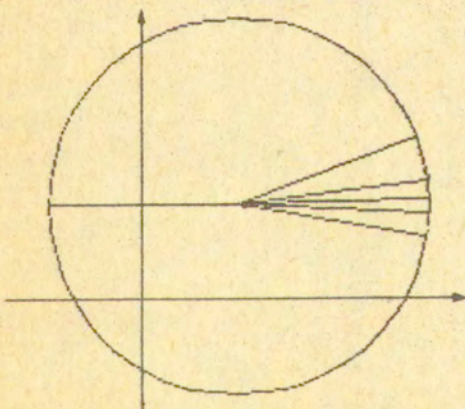
Kryterium entropijne, $K_{\frac{1}{2}}(x, y)$, $\text{Var}=0.6350$



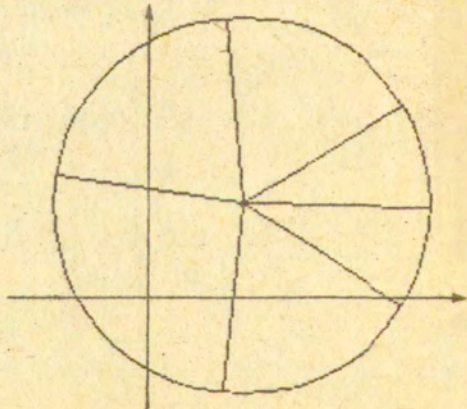
Kryterium średniokwadratowe, $K_{\frac{1}{2}}(x, y)$, $\text{Var}=0.3148$



Kryterium entropijne, $K_{\frac{1}{2}}(x, y)$, $\text{Var}=0.3553$



Kryterium średniokwadratowe, $K_{\frac{1}{2}}(x, y)$, $\text{Var}=0.5755$



Kryterium entropijne, $K_{\frac{1}{2}}(x, y)$, $\text{Var}=0.6471$

CALCULATION OF OPTIMAL POSITIONS OF DETECTORS

| | |
|--|---|
| Input data: | Results: |
| Coordinates for the source: | Maximum value of epsilon: |
| 0.5000 x | 3.6495624E-001 |
| 0.5000 y | |
| Initial detector angles: | Optimal detector angles: |
| 10.00 degrees | 193.75 degrees |
| 20.00 degrees | 254.13 degrees |
| 30.00 degrees | 314.46 degrees |
| 40.00 degrees | 14.32 degrees |
| 50.00 degrees | 73.80 degrees |
| 60.00 degrees | 133.31 degrees |
| Maximum number of iterations of the basic procedure: | Number of iterations of the basic procedure: |
| 10 iterations | 6 iterations |
| Maximum number of iterations when optimizing in one direction: | Highest number of iterations when optimizing in one direction: |
| 100 iterations | 10 iterations |
| Tolerance: | |
| 0.0001 relatively | |
| Length of first step when finding the interval for minisubbracketing: | |
| 3.00 degrees | |

KRYTERIUM SREDNIOKWADRATOWE, $K1(x,y)$

CALCULATION OF OPTIMAL POSITIONS OF DETECTORS

| | |
|---|---|
| Input data: | Results: |
| Coordinates for the sources: | Maximum value of epsilon: |
| 0.5000 x | 4.1739450E-001 |
| 0.5000 y | |
| Initial detector angles: | Optimal detector angles: |
| 10.00 degrees | 179.14 degrees |
| 20.00 degrees | 119.13 degrees |
| 30.00 degrees | 239.14 degrees |
| 40.00 degrees | 359.12 degrees |
| 50.00 degrees | 59.13 degrees |
| 60.00 degrees | 299.13 degrees |
| Maximum number of iterations of the basic procedure: | Number of iterations of the basic procedure: |
| 10 iterations | 6 iterations |
| Maximum number of iterations when optimizing in one direction: | Highest number of iterations when optimizing in one direction: |
| 100 iterations | 12 iterations |
| Tolerance: | |
| 0.0001 relatively | |
| Length of first step when finding the interval for minimum bracketing: | |
| 3.00 degrees | |

KRYTERIUM ENTROPIJNE, $K_1(x,y)$.

CALCULATION OF OPTIMAL POSITIONS OF DETECTORS

Input data:

Coordinates for the source:

0.5000 x

0.5000 y

Initial detector angles:

10.00 degrees

20.00 degrees

30.00 degrees

40.00 degrees

50.00 degrees

60.00 degrees

Results:

Maximum value of epsilon:

1.8247812E-001

Optimal detector angles:

193.75 degrees

254.13 degrees

314.46 degrees

14.32 degrees

73.80 degrees

133.31 degrees

Maximum number of iterations of
the basic procedure:

10 iterations

Number of iterations of the
basic procedure:

6 iterations

Maximum number of iterations when
optimizing in one direction:

100 iterations

Highest number of iterations when
optimizing in one direction:

10 iterations

Tolerance:

0.0001 relatively

Length of first step when finding
the interval for minimum bracketing:

3.00 degrees

KRYTERIUM SREDNIOKWADRATOWE, $K_2(x, y)$.

CALCULATION OF OPTIMAL POSITIONS OF DETECTORS

| | |
|---|---|
| Input data: | Results: |
| Coordinates for the source: | Maximum value of epsilon: |
| 0.5000 x | 2.0094343E+001 |
| 0.5000 y | |
| Initial detector angles: | Optimal detector angles: |
| 10.00 degrees | 325.00 degrees |
| 20.00 degrees | 0.37 degrees |
| 30.00 degrees | 29.21 degrees |
| 40.00 degrees | 54.12 degrees |
| 50.00 degrees | 81.04 degrees |
| 60.00 degrees | 113.14 degrees |
| Maximum number of iterations of the basic procedure: | Number of iterations of the basic procedure: |
| 10 iterations | 9 iterations |
| Maximum number of iterations when optimizing in one direction: | Highest number of iterations when optimizing in one direction: |
| 100 iterations | 10 iterations |
| Tolerance: | |
| 0.0001 relatively | |
| Length of first step when finding the interval for minimum bracketing: | |
| 3.00 degrees | |

KRYTERIUM ENTROPIJNE, $K2(x,y)$.

CALCULATION OF OPTIMAL POSITIONS OF DETECTORS

Input data:

Coordinates for the source:

0.5000 x

0.5000 y

Initial detector angles:

10.00 degrees

20.00 degrees

30.00 degrees

40.00 degrees

50.00 degrees

60.00 degrees

Results:

Maximum value of epsilon:

4.2449018E-001

Optimal detector angles:

180.04 degrees

336.48 degrees

1.68 degrees

349.43 degrees

7.68 degrees

20.98 degrees

Maximum number of iterations of
the basic procedure:

10 iterations

Number of iterations of the
basic procedure:

5 iterations

Maximum number of iterations when
optimizing in one direction:

100 iterations

Highest number of iterations when
optimizing in one direction:

15 iterations

Tolerance:

0.0001 relatively

Length of first step when finding
the interval for minimization:

3.00 degrees

KRYTERIUM SREDNIOKWADRATOWE, $K3(x,y)$.

CALCULATION OF OPTIMAL POSITIONS OF DETECTORS

| | |
|--|---|
| Input data: | Results: |
| Coordinates for the source: | Maximum value of epsilon: |
| 0.5000 x | 7.9949288E-001 |
| 0.5000 y | |
| Initial detector angles: | Optimal detector angles: |
| 10.00 degrees | 95.43 degrees |
| 20.00 degrees | 264.12 degrees |
| 30.00 degrees | 327.15 degrees |
| 40.00 degrees | 357.98 degrees |
| 50.00 degrees | 31.88 degrees |
| 60.00 degrees | 171.29 degrees |
| Maximum number of iterations of the basic procedure: | Number of iterations of the basic procedure: |
| 10 iterations | 4 iterations |
| Maximum number of iterations when optimizing in one direction: | Highest number of iterations when optimizing in one direction: |
| 100 iterations | 12 iterations |
| Tolerance: | |
| 0.0001 relatively | |
| Length of first step when finding the interval for minisubbracketing: | |
| 3.00 degrees | |

KRYTERIUM ENTROPIJNE, $K3(x,y)$.

5. Optymalizacja rozmieszczenia czujników jako zadanie sterowania z niepełną informacją.

1. Sformułowanie zagadnienia.

Klasyczne zagadnienie teorii sterowania z niepełną informacją składa się z trzech elementów. Pierwszym z nich jest równanie stanu opisujące zachowanie się procesu który jest badany (podlega sterowaniu). Drugim jest równanie obserwacji, które dostarcza nam wiedzy o procesie niezbędnej do prowadzenia sterowania (estymowania dokładnej wartości procesu). Wreszcie trzecim - funkcjonał kosztu definiujący kryterium optymalności sterowania.

W sytuacji, gdy optymalizujemy rozmieszczenie czujników służących do mierzenia wartości procesu, te trzy elementy powyższego schematu mają szczególną postać. Równanie stanu nie podlega sterowaniu (chyba że równocześnie z optymalizacją lokalizacji punktów pomiarowych rozważamy dodatkowe zadanie sterowania). W równaniu obserwacji uwzględnione są parametry, które odpowiadają różnym położeniom czujników. To właśnie to równanie jest sterowane. Należy teraz znaleźć (wg. zadanej reguły) estymator interesującej nas wielkości oparty na wynikach pomiarów a następnie zoptymalizować położenie czujników w taki sposób, by błąd aproksymacji był najmniejszy. Funkcjonał kosztu, oprócz członu wartościującego dokładność aproksymacji, może zawierać również cenę przeprowadzenia pomiaru (zależną od położenia czujników). Cały proces pomiarowy polega teraz, kolejno, na: skonstruowaniu wszystkich wielkości niezbędnych do utworzenia funkcjonału kosztu, znalezieniu optymalnego położenia czujników poprzez minimalizację tego funkcjonału, ostateczne ustalenie równania obserwacji (z optymalnie położonymi czujnikami) i, w końcu, aproksymowaniu mierzonego pola losowego

Jako praktyczną realizację powyższego schematu rozważmy zagadnienie analizowane w pracy [6], gdzie obserwacje prowadzono w pewnym przedziale czasu. Równanie stanu jest tu stochastycznym równaniem różniczkowym o postaci:

$$(5.1) \quad dy + a(t)y dt = f(t) dt + B(t) d\zeta(t),$$

$$y(0) = y_0 + \zeta.$$

gdzie, dla przestrzeni Hilberta $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{Y}^{\otimes n}$ i \mathcal{E} , oraz przestrzeni probabilistycznej (Γ, \mathcal{F}, P) :

$$a(\cdot) \in L^{\infty}(0, T; L(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^{\otimes n})),$$

$$\langle a(t)p, p \rangle \geq c|p|^2, \quad \forall p \in \mathcal{Y} \text{ i pewnego } c > 0,$$

$$B(\cdot) \in L(0, T; L(\mathcal{E}, \mathcal{X})),$$

$\zeta(t, \gamma)$ jest procesem Wienera o wartościach w \mathcal{E} , tzn.

$$E(\zeta(t)) = 0,$$

$$E(\langle \zeta(t), e_1 \rangle \langle \zeta(s), e_2 \rangle) = \int_0^{\min(t, s)} (Q(\tau) e_1, e_2) d\tau, \quad \forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}.$$

natomiast operator $Q(\cdot) \in L^{\infty}(0, T; L(\mathcal{E}, \mathcal{E}))$; $Q(t) \geq 0$ jest samosprężony i nuklearny;

$$y_0 \in \mathcal{X},$$

$$f(\cdot) \in L^2(0, T; \mathcal{X}),$$

ζ jest gaussowską zmienną losową o wartościach w \mathcal{X} ,

$$E(\zeta) = 0, \quad E(\langle \zeta, h_1 \rangle \langle \zeta, h_2 \rangle) = \langle \mathcal{P}_0 h_1, h_2 \rangle \quad \forall h_1, h_2 \in \mathcal{X}.$$

Zakładamy, że $\zeta(t)$ i ζ są niezależne.

Rozwiązanie $y(t)$ równania (5.1) jest procesem stochastycznym o wartościach w \mathcal{X} .

Proces obserwacji określony jest następującym równaniem różniczkowym:

$$(5.2) \quad dz(t; v) = G(t; v) dy(t) + d\eta(t; v),$$

gdzie

$$G(\cdot; v) \in L^{\infty}(0, T; L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})), \quad \forall v \in V,$$

V - przestrzeń sterowań (układów czujników),

\mathcal{Y} jest skończone wymiarową przestrzenią Hilberta,

$\eta(t, \gamma; v) \forall v \in V$ jest procesem Wienera na \mathcal{Y} , tzn.

$$E(\eta(t; v)) = 0,$$

$$E(\langle \eta(t; v), f_1 \rangle \langle \eta(s; v), f_2 \rangle) = \int_0^{\min(t, s)} \langle \mathcal{R}(\tau; v) f_1, f_2 \rangle d\tau.$$

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{Y}.$$

$\mathcal{R}(\cdot; v) \in L^{\infty}(0, T; L(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}))$; $\mathcal{R}(t; v) \geq 0$ jest samosprężony, nuklearny i odwracalny $\forall v \in V$.

Proces $\eta(\cdot; v)$ jest niezależny od ζ i ξ .

Jak widać, w powyższym modelu zarówno proces jak i obserwacja poddane są działaniu szumu. Parametr v odpowiada tutaj układowi czujników; każdej konfiguracji sensorów może odpowiadać inna wielkość zaszumienia. Znalezienie najlepszej aproksymacji procesu y na podstawie pomiarów z wymaga również zneutralizowania wpływu szumów. Dla ustalonego v (danej konfiguracji czujników) najlepszym $\alpha(z(s), s; t)$ - mierzalnym estymatorem $y(t)$ jest warunkowa wartość oczekiwana $\hat{y}(t)$ spełniająca następujące równanie (filtr Kalmana, por. [5]):

$$\begin{aligned} (5.3) \quad & d\hat{y} + \mathcal{A}(t)\hat{y} dt + P(t; v)D(t; v)\hat{y} dt = \\ & = f(t) dt + P(t; v)\mathcal{G}^{\#}(t, v)\mathcal{R}^{-1}(t; v)\mathcal{G}(t; v) dz(t; v), \\ & \hat{y}(0) = y_0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.4) \quad D(t; v) = P(t; v)\mathcal{G}^{\#}(t, v)\mathcal{R}^{-1}(t; v)\mathcal{G}(t; v),$$

a $P(t, v)$ jest rozwiązaniem równania Ricattiego:

$$\begin{aligned} (5.5) \quad & \frac{d}{dt} P + P\mathcal{A}^{\#}(t) + \mathcal{A}(t)P + PD(t; v)P = \mathcal{B}(t)Q\mathcal{B}^{\#}(t) = D_0(t), \\ & P(0) = P_0. \end{aligned}$$

$P(t, v)$ jest wówczas operatorem kowariancji błędu estymatora
 $\varepsilon(t, v) = \hat{y}(t, v) - y(t, v)$.

Pozostaje teraz jeszcze ustalenie kryterium jakości optymalizacji. Naturalny jest wybór miary będącej kompromisem między jakością aproksymacji, mierzona przez

$$(5.6) \quad E(|\varepsilon(T; v)|^2) = \text{tr } P(T; v)$$

a kosztem dokonywania pomiarów $N(v)$.

Zatem funkcjonal kosztu można zdefiniować jako:

$$(5.7) \quad J(v) = N(v) + \text{tr } P(T; v)$$

W pracy [6] podany jest prostszy warunek optymalności rozmieszczenia czujników gdy $N=0$. Należy wówczas minimalizować operator $D(t; v)$ (por. (5.4)) w sensie porządku nieujemnych operatorów samosprzężonych. Parametr \hat{v} minimalizujący $D(t; v)$ (jeżeli istnieje) realizuje również minimum $J(v)$.

2. Warunek istnienia optymalnego rozmieszczenia czujników.

Wypisanie warunków dostatecznych istnienia optymalnego rozmieszczenia czujników wymaga poczynienia pewnych założeń.

Zakładamy, że V jest przestrzenią Hilberta; odwzorowanie $v \rightarrow N(v)$ jest słabo ciągle z dołu i koercywne.

Niech $h_i, i=1, 2, \dots$ będzie bazą ortonormalną w X . Zgodnie z twierdzeniem o dekompozycji [5], jeżeli rozważymy rodzinę dwupunktowych zagadnień brzegowych

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_j + A(t) \varphi_j + D_0(t) \psi_j &= 0 \\ - \frac{d}{dt} \psi_j + A^*(t) \psi_j - D_0^*(t) \varphi_j &= 0 \\ \varphi_j(0; v) + P_0 \psi_j(0; v) &= 0, \\ \psi_j(T; v) &= h_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

gdzie $\varphi_j = \varphi_j(t; v)$, $\psi_j = \psi_j(t; v)$,

to otrzymujemy:

$$(5.9) \quad \varphi_j(T; v) = - P(T; v) h_j$$

i wówczas

$$(5.10) \quad \text{tr } P(T; v) = - \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j(T; v), h_j).$$

Funkcjonał kosztu ma wtedy postać:

$$(5.11) \quad J(v) = N(v) - \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j(T; v), h_j).$$

Warunkiem istnienia optymalnej konfiguracji sensorów jest ciągłość odwzorowania:

$$(5.12) \quad v \longmapsto DC(\cdot; v)\psi(\cdot) : V \longrightarrow L^2(K), \quad \forall \psi \in L^2(K),$$

gdzie V i $L^2(K)$ są wyposażone w słabe topologie (por. [6]).

3. Przykład zastosowania.

Bardzo często przez wielkość opisującą położenie sensora v rozumiemy współrzędne punktów w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wówczas, jeżeli optymalizujemy położenie N sensorów w przestrzeni \mathbb{R}^n , to przestrzeń układów czujników ma postać $v = (\mathbb{R}^n)^N$.

Jako przykład modelu opisanego równaniem postaci (5.1) rozważmy proces falowy będący rozwiązaniem następującego problemu początkowo - brzegowego:

$$(5.13) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = f(x, t) + \dot{\zeta}(x, t), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$$u|_{\Sigma} = 0, \quad \Sigma =]0, T[\times \partial\Omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u|_{\Sigma} = 0$$

$$u(x, 0) = u_1^0(x) + \zeta_1(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = u_2^0(x) + \zeta_2(x),$$

(Δ jest operatorem Laplace'a w \mathbb{R}^n .)

Zapiszmy równanie (5.13) w postaci ewolucyjnej:

$$(5.14) \quad dU + AU \, dt = f(t)dt + Bd\zeta(t)$$

gdzie: $U(t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))^T$,

$$u_1(x, t) = u(x, t), \quad u_2(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t),$$

$$(5.15) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -\Delta & 0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x, t) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}.$$

$\zeta(t) = \zeta(x, t)$ jest procesem Wienera o operatorze kowariancji Q przyjmującym wartości w pewnej przestrzeni

funkcyjnej \mathcal{E} , $P_0 = \begin{bmatrix} p_{00}^{11} & p_{00}^{12} \\ p_{00}^{12} & p_{00}^{22} \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie równania (5.14) przyjmuje wartości w przestrzeni $X = H_0^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ (por. [38]).

Obserwujemy wektor $U = (u_1, u_2)^T$ w punktach $b_1, b_2, \dots, b_N \in \mathbb{R}^n$ których optymalne położenie należy ustalić. Równanie obserwacji ma postać:

$$(5.16) \quad Z = (z_1(t), \dots, z_N(t))^T,$$

gdzie z_j , $j=1, 2, \dots, N$, jest wektorem $(z_j = (z_j^1, z_j^2)^T)$ o współrzędnych:

$$z_j^i = \frac{1}{\text{mes } K(b_j)} \int_{K(b_j)} u_i(x, t) \, dx + \eta_j^i(t), \quad i=1, 2.$$

(Przestrzeń $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^2)^N$; $K(b_j)$ oznacza kulę w \mathbb{R}^n o środku w b_j i promieniu zbiegającym do zera.)

Zakładamy dla uproszczenia, że \mathcal{X} jest stałe, tzn.

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} r_1 & r_3 \\ r_3 & r_2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_3 \\ \rho_3 & \rho_2 \end{bmatrix}.$$

Istnienie optymalnego położenia czujników w zbiorze Ω jest zagwarantowane, o ile dla równania (5.13) spełniony jest warunek (5.12). W tym wypadku dla

$$\psi_1 = (\psi_1^1, \psi_1^2)^T, \quad \psi_2 = (\psi_2^1, \psi_2^2)^T \in L^2(0, T; \mathcal{X}) \quad \text{otrzymujemy:}$$

$$\begin{aligned} (5.17) \quad & \int_0^T (D(t; b) \psi_1(t), \psi_2(t)) dt = \\ & = \int_0^T (\mathfrak{R}^{-1}(t; b) \mathcal{E}(t; b) \psi_1(t), \mathcal{E}(t; b) \psi_2(t)) dt = \\ & = \sum_{j=1}^N \int_0^T \left\{ \left[\frac{\rho_1}{\text{mes } K(b_j)} \int_{K(b_j)} \psi_1^1(x, t) dx + \frac{\rho_3}{\text{mes } K(b_j)} \int_{K(b_j)} \psi_2^1(x, t) dx \right] \times \right. \\ & \quad \times \frac{1}{\text{mes } K(b_j)} \int_{K(b_j)} \psi_2^1(x, t) dx + \frac{1}{\text{mes } K(b_j)} \int_{K(b_j)} \psi_2^2(x, t) dx \cdot \times \\ & \quad \left. \times \left[\frac{\rho_3}{\text{mes } K(b_j)} \int_{K(b_j)} \psi_1^1(x, t) dx + \frac{\rho_2}{\text{mes } K(b_j)} \int_{K(b_j)} \psi_1^2(x, t) dx \right] \right\} dt \end{aligned}$$

Ponieważ każde z wyrażeń

$$\frac{1}{\text{mes } K(b_j)} \int_{K(b_j)} \psi_l^k(x, t) dx, \quad k, l = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N$$

jest ciągle jako funkcja $\mathbb{R}^n \rightarrow L^2(0, T)$, to również odwzorowanie

$$b \rightarrow \int_0^T (D(t; b) \psi_1(t), \psi_2(t)) dt$$

jest ciągle jako odwzorowanie z $(\mathbb{R}^n)^N$ do $\mathbb{R} \forall \psi_1, \psi_2 \in L^2(0, T; \mathcal{D})$.

Zatem warunek dostateczny istnienia optymalnego rozmieszczenia N czujników w zbiorze Ω jest spełniony.

4. Uwagi.

a) Równanie (5.1) opisujące ekstrapolowane pole może odpowiadać wielu procesom fizycznym (por. [35]). Warto podkreślić, że obejmuje ono również zjawiska niestacjonarne. Istotnym ograniczeniem jest w nim jednak założenie liniowości operatora $\mathcal{A}(t)$. Nie pozwala to stosować powyższej metody w przypadku zjawisk, w których opis przy pomocy modelu liniowego jest nieodpowiedni. Właśnie w takich przypadkach szczególnie ważne jest dokładne obserwowanie zjawiska. Dlatego w przyszłości należy uogólnić powyższą metodę znajdowania optymalnego położenia czujników również na taki przypadek.

b) Odpowiednik zagadnienia (5.1-5.2) w przypadku skończonego wymiarowym rozpatrywany był w pracy [1].

6. Wrażliwościowe kryterium optymalnego rozmieszczenia czujników.

1. Wstęp.

Wśród reguł optymalnego rozmieszczania punktów pomiarowych na uwagę zasługuje metoda lokalizacji którą w tej pracy nazwaliśmy wrażliwościową. Może ona stanowić podstawę zarówno optymalnego pomiaru pola (ekstrapolowania jego wartości) jak i identyfikowania pewnych jego parametrów (estymowania ich wartości na podstawie obserwacji pola w ustalonych punktach). Według niej, za optymalne uznamy takie położenia punktów pomiarowych, w których wskazania czujników są najbardziej wrażliwe na zmiany mierzonej (lub identyfikowanej) wielkości.

Tę ogólną zasadę można sprecyzować w różnorodny sposób. W tym rozdziale zajmiemy się kryterium wrażliwości będącym adaptacją metod wprowadzonych i rozwiniętych, w pracach [2], [3], [4], [30]. Ich ideę można przedstawić następująco.

Niech ψ i $\psi + \Delta$ oznaczają dwie dopuszczalne dokładne wartości pola (parametru) które podlegają mierzeniu. Wśród kilku możliwych konfiguracji czujników za lepszą uznamy tę, która po dokonaniu pomiarów, pozwoli rozróżnić obie wartości pola przy mniejszej (co do wartości bezwzględnej) wielkości Δ .

Powyższe kryterium może być stosowane zarówno gdy ψ jest deterministyczne jak i wówczas gdy ma własności losowe. W pierwszym przypadku możliwe jest również, że choć samo pole (parametr) jest deterministyczne, to wyniki pomiarów są zmiennymi losowymi. Wszystkie te sytuacje wymagają dokładnego sprecyzowania i ustalenia algorytmów prowadzących do znalezienia optymalnej konfiguracji detektorów.

Zaznaczmy jeszcze, że powyższe kryterium optymalnej lokalizacji czujników nie wymaga zdefiniowania samego algorytmu estymacji (identyfikacji). Wybór położenia czujników może być od niego niezależny.

2. Pomiar deterministycznego parametru multiplikatywnego.

Rozważmy na początku najprostszy przypadek gdy w celu zmierzenia pewnego parametru c posługujemy się jednym detektorem umieszczonym w punkcie $x \in D \subset R^n$. Niech $f(x)$ oznacza wskazanie czujnika gdy parametr c jest równy jedności. Fakt, iż parametr c jest multiplikatywny oznacza, że gdy $c = c_0$ to detektor wskaże nam $f^{c_0}(x) = c_0 f(x)$.

Niech teraz dla ustalonej dokładnej wartości c_0 wyniki pomiarów nie będą jednoznacznie określone lecz niech mieszczą się w przedziale $[f_{\min}^{c_0}(x), f_{\max}^{c_0}(x)]$. W konkretnym przypadku ta niejednoznaczność może być spowodowana np. nieznanymi wszystkimi wielkościami niezbędnymi do wyznaczenia c ze wskazań detektora (c jest jednym z kilku parametrów mających wpływ na $f^c(x)$).

Oznaczmy:

$$(6.1) \quad F(x) = [f_{\min}^{c_0}(x), f_{\max}^{c_0}(x)]$$

Wówczas będziemy mogli odróżnić dwie dopuszczalne wartości parametru c , np. c_0 i $c_0 + \Delta$, gdy

$$(6.2) \quad c_0 F(x) \cap (c_0 + \Delta) F(x) = \emptyset,$$

lub, co z tego wynika

$$(6.3) \quad (c_0 + \Delta) f_{\min}^{c_0}(x) > c_0 f_{\max}^{c_0}(x),$$

czyli

$$(6.4) \quad \frac{c_0 + \Delta}{c_0} > \frac{f_{\max}^{c_0}(x)}{f_{\min}^{c_0}(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0(x).$$

Parametr $\zeta_0(x)$ zdefiniowany w (6.4) można inaczej określić jako najmniejszą liczbę dla której istnieją $f_1, f_2 \in F(x)$ spełniające:

$$(6.5) \quad f_1 = \zeta_0 f_2.$$

Optymalizacja położenia czujnika polega teraz na znalezieniu takiego x , dla którego wartość Δ pozwalająca odróżnić dwie

wartości parametru jest najmniejsza - czyli $\zeta_0(x)$ jest najbliższe jedności. Zatem optymalne położenie czujnika \hat{x} spełnia związek:

$$(6.6) \quad \hat{x} = \arg \min_{x \in D} \zeta_0(x).$$

W przypadku gdy dysponujemy większą liczbą czujników (N) zadanie ich optymalnego rozmieszczenia komplikuje się nieco. Zbiór wartości pomiarów $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ zawiera N -elementowe wektory dopuszczalnych wskazań detektorów (f_1, f_2, \dots, f_N) umieszczonych w punktach x_1, x_2, \dots, x_N . W tym wypadku dwie wartości mierzonego parametru c_0 i $c_0 + \Delta$ można odróżnić z całą pewnością, gdy

$$(6.7) \quad c_0 F(x_1, \dots, x_N) \cap (c_0 + \Delta) F(x_1, \dots, x_N) = \emptyset.$$

Najmniejsza wartość Δ przy której warunek (6.7) będzie spełniony jest osiągana, gdy zbiór $F(x_1, \dots, x_N)$ ma najmniejszą średnicę liczoną jako długość maksymalnego przecięcia zbioru prostą (w \mathbb{R}^N) wychodzącą ze środka układu współrzędnych. Precyzyjnie sformułowany warunek rozróżnialności parametru c na podstawie pomiarów dokonanych przez N czujników został podany w pracy [4]. Przytoczymy go tutaj pomijając dowody.

Niech zbiór $F \subset \mathbb{R}^N$ będzie domknięty. Oznaczmy przez B zbiór układów N liczb $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ dla których $\sum \beta_i f_i$ jest niezerowa i ma stały znak dla wszystkich $f = (f_1, \dots, f_N) \in F$.

Dla $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in B$ definiujemy:

$$(6.8) \quad \begin{aligned} p_{\max}(\beta_1, \dots, \beta_N) &= \max_{f \in F} |\sum \beta_i f_i|, \\ p_{\min}(\beta_1, \dots, \beta_N) &= \min_{f \in F} |\sum \beta_i f_i|, \\ \eta(\beta_1, \dots, \beta_N) &= \frac{p_{\max}(\beta_1, \dots, \beta_N)}{p_{\min}(\beta_1, \dots, \beta_N)}. \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy $F = F(x_1, \dots, x_N)$, to warunek (6.7) jest spełniony, gdy:

$$(6.9) \quad \frac{c_0 + \Delta}{c_0} > \eta(\beta_1, \dots, \beta_N) = \eta_{x_1, \dots, x_N}(\beta_1, \dots, \beta_N),$$

$$\forall (\beta_1, \dots, \beta_N) \in B.$$

W szczególności spełniony jest on, gdy

$$(6.10) \quad \frac{c_0 + \Delta}{c_0} > \min_{(\beta_1, \dots, \beta_N) \in B} \eta_{x_1, \dots, x_N}(\beta_1, \dots, \beta_N) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_{x_1, \dots, x_N}.$$

Tak zdefiniowana wielkość ζ_{x_1, \dots, x_N} jest potrzebną nam średnicą zbioru obserwacji. Optymalizacja rozmieszczenia czujników polega na znalezieniu takich punktów $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N$, że

$$(6.11) \quad \zeta_{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N} = \min_{x_1, \dots, x_N \in D} \zeta_{x_1, \dots, x_N}.$$

Zauważmy, że przedstawione w tym punkcie kryterium optymalnego rozmieszczenia czujników oparte jest wyłącznie na rozważaniach geometrycznych. Nie stosuje się tutaj aparatu teorii prawdopodobieństwa, nie wnika się w metody identyfikacji (estymacji) parametru c na podstawie wskazań detektorów. Oczywiście, zarówno rozważania probabilistyczne, jak i konkretne formuły obliczeniowe tkwią w tym kryterium implicite. Mogły one bowiem posłużyć do wyznaczenia zbioru F - dopuszczalnych wskazań detektorów przy ustalonym parametrze c .

3. Przykład zastosowania.

Kozważmy propagację fali skalarniej w ośrodku trójwymiarowym opisaną równaniem:

$$(6.12) \quad \nabla^2 u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, t),$$

z zerowymi warunkami początkowymi.

Kozwiązanie równania (6.12) ma postać (por. [18]):

$$(6.13) \quad u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V G(x, \zeta, t) f(\zeta, t) d\nu(\zeta),$$

gdzie

$$G(x, \xi, t) = \frac{\theta\left(t - \frac{R}{a}\right)}{|x - \xi|}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$R = |x - \xi|$, czyli

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_{at}^x} \frac{f(\xi, t)}{|x - \xi|} d\xi,$$

(K_{at}^x oznacza kulę o środku w x i promieniu at .)

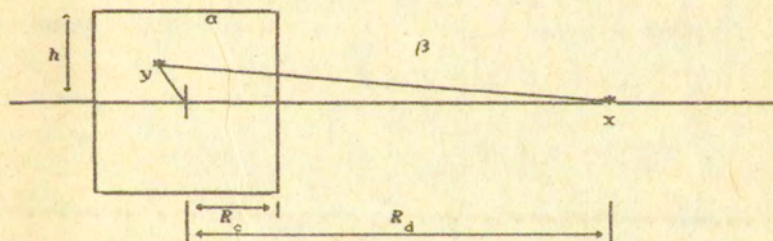
Załóżmy, że siła wymuszająca $f(x, t)$ jest skoncentrowana w punkcie y i ma charakter harmoniczny o stałej amplitudzie, t.j.:

$$(6.14) \quad f(\xi, t) = f_0(\xi) e^{i\omega t} = A \delta(\xi - y) e^{i\omega t}.$$

Funkcja $u(x, t)$ ma teraz postać:

$$(6.15) \quad u(x, t) = \frac{Ae^{i\omega t}}{4\pi} \int_{K_{at}^x} \frac{\delta(\xi - y)}{|x - \xi|} d\xi = \begin{cases} 0 & , |x - y| > at \\ \frac{Ae^{i\omega t}}{4\pi|x - y|} & , |x - y| \leq at \end{cases}$$

Zadanie optymalnego pomiaru postawmy w następujący sposób. Załóżmy, że chcemy zmierzyć amplitudę wymuszenia A . Źródło promieniowania znajduje się w nieznanym punkcie wewnątrz walca którego wymiary i położenie podane są na rysunku.



gdzie:

x - położenie detektora,

- y - położenie źródła,
- α - maksymalna droga fali w walcu,
- β - maksymalna droga fali poza walcem,
- R_c - promień walca,
- R_d - odległość detektora od środka walca,
- h - połowa wysokości walca.

Zakładamy, że detektor znajduje się w punkcie na osi (jak to zaznaczono na rysunku), którego optymalne położenie należy ustalić. Pomiary przeprowadzamy przy dużych t ($t > (\alpha + \beta) / a$).

Maksymalne i minimalne wskazania detektora są równe odpowiednio:

$$(6.16) \quad f_{\min}^A = \frac{A}{4\pi(\alpha + \beta)},$$
$$f_{\min}^A = \frac{A}{4\pi(R_d - R_c)}.$$

(Czynnik $e^{i\omega t}$ pomijamy jako nieistotny.)

Zgodnie z wzorem (6.4) znajdujemy, że dwie wartości amplitudy A i A Δ są rozróżnialne z całą pewnością, gdy

$$(6.17) \quad \Delta > \left[\frac{\sqrt{h^2 + (R_c + R_d)^2}}{R_d - R_c} - 1 \right].$$

Zmienną opisującą położenie detektora jest w (6.17) R_d . Z (6.17) wynika wniosek, że czujniki rozmieszczone dalej od źródła fali pozwalają dokładniej mierzyć amplitudę wymuszenia. (Zaznaczmy, że zakładamy tu brak tłumienia oraz zaburzeń w ośrodku.)

Podobnie można optymalizować położenie kilku czujników służących do pomiaru amplitudy.

4. Uwagi o optymalnym rozmieszczeniu czujników w warunkach losowości.

W przykładzie rozważanym w poprzednim punkcie przyjęliśmy, że źródło fal leży wewnątrz pewnego walca, nie precyzując, jakie

reguły rządzą jego dokładnym umiejscowieniem. Może się zdarzyć, że prawdopodobieństwo jego wystąpienia w pewnych podobszarach walca jest znikome (choć nie równe zero).

Obserwacje dokonywane przez detektor są również zmiennymi losowymi w wielu innych sytuacjach. Należy do nich także przypadek, gdy chcemy mierzyć wartość oczekiwaną α parametru będącego zmienną losową. Obok nieokreśloności położenia źródła sygnału i jego stochastycznych własności, na losowy charakter wyników pomiarów mogą mieć wpływ także warunki przenoszenia informacji (właściwości ośrodka w którym sygnał jest przenoszony od źródła do detektora) i zaburzenia zewnętrzne (szumy).

Kryterium optymalności' położenia czujników może tutaj być identyczne jak w przypadku deterministycznym. Ustalenie wymaga jedynie zbiór F dopuszczalnych wskazań detektorów. Przyjmowanie jako F wszystkich możliwych wyników pomiarów mogłoby doprowadzić do błędnych wyników (np. zbiór byłby nieograniczony lub znaczny udział miałyby wartości przyjmowane z małym prawdopodobieństwem). Dlatego do zbioru F zaliczamy tylko najbardziej prawdopodobne wartości pomiarów. Nówiąc bardziej precyzyjnie F jest najmniejszym zbiorem możliwych wskazań, dla którego

$$(6.18) \quad P\{f \in F\} > \alpha,$$

(prawdopodobieństwo, że uzyskany pomiar należy do F jest większe od α), gdzie α jest zadany poziom ufności.

Dalsze postępowanie jest w swej istocie podobne jak w przypadku deterministycznym, może jednak prowadzić do komplikacji rachunkowych.

Jako przykład rozważmy zagadnienie z poprzedniego punktu w którym wymuszenie ma postać:

$$(6.19) \quad f(\xi, t) = A(1 + \epsilon n(\gamma)) \delta(\xi - y) e^{-i\omega t},$$

gdzie ϵ jest liczbą a $n(\gamma)$ - zmienną losową o rozkładzie $N(0, 1)$. Jeżeli przyjmujemy, że F^A jest przedziałem o końcach

$$f_{\text{min}}^A = \frac{A}{4\pi(\alpha+\beta)} - \frac{3\varepsilon A}{4\pi(\alpha+\beta)}$$

(0.20)

$$f_{\text{min}}^A = \frac{A}{4\pi(R_d - R_c)} + \frac{3\varepsilon A}{4\pi(R_d - R_c)},$$

to wówczas $P(f \in F) \geq 0.98$ (reguła 3 σ dla rozkładu normalnego).

Dwa parametry A i $A+\Delta$ są rozróżnialne (z prawdopodobieństwem większym niż 0.98) gdy

$$(0.21) \quad \frac{A}{4\pi(R_d - R_c)} + \frac{3\varepsilon A}{4\pi(R_d - R_c)} < \frac{A+\Delta}{4\pi(\alpha+\beta)} - \frac{3\varepsilon(A+\Delta)}{4\pi(\alpha+\beta)},$$

czyli

$$(0.22) \quad \frac{\alpha + \beta}{(R_d - R_c)} < \frac{(1-3\varepsilon)(A+\Delta)}{(1+3\varepsilon)A}$$

Jak widać w powyższym przykładzie, nierówność stanowiąca podstawę optymalizacji rozmieszczenia czujników jest tu odmienna niż w przypadku deterministycznym. Inna jest też jej interpretacja. O ile uprzednio rozróżnienie parametrów następowało z całą pewnością, obecnie możemy mówić jedynie o prawdopodobieństwie odróżnienia mierzonych wielkości. Ponadto optymalne położenie czujnika zależy od wartości mierzonego parametru (A). Oznacza to, że w praktyce optymalizacja położenia czujników wymaga metod przybliżonych, dobieranych każdorazowo w zależności od konkretnego problemu. Zagadnienia tego nie będziemy tu szerzej rozwijać.

7. Zakończenie.

W niniejszej pracy przedstawiliśmy metody optymalnego planowania rozstawiania urządzeń pomiarowych w trakcie pozyskiwania danych służących kilku fundamentalnym rodzajom zadań związanych z diagnostyką pól losowych. Zadania te wymagają posługiwania się różnymi kryteriami optymalności. To natomiast powoduje, że rozmieszczenie mierników, które jest optymalne dla osiągnięcia jednego celu okazuje się w ogólności różne od optymalnego dla innego celu. Z kolei stosowanie nieoptymalnych planów powoduje ilościowe obniżenie stopnia osiagania celu a często prowadzi nawet do jakościowych strat. Przekonują o tym przykłady zastosowań rozważone w niniejszej pracy.

Konkluzje wynikające z powyższego ciągu implikacji są następujące. Planowanie eksperymentu jest zadaniem niezwyklej wagi. Wymaga ono zawsze ścisłego precyzowania celu oraz konstrukcji adekwatnego funkcjonału optymalności sprowadzającego problem doboru punktów pomiarowych do zadania optymalizacji. Jesteśmy przekonani, że zawarte w niniejszym opracowaniu wyniki nie tylko przekonują o tym, ale również pozwalają efektywnie rozwiązać szereg najważniejszych problemów związanych ze statystycznym opracowywaniem danych eksperymentalnych: identyfikacją parametrów modeli regresyjnych, filtracją wartości losowych pól mechanicznych i falowych, detekcją położenia i kształtu źródeł w procesach falowych i innych.

Różnorodność kryteriów odpowiadających różnym celom stanowi bez wątpienia istotną niedogodność. Powoduje ona, że trudno dziedzinę planowania eksperymentów traktować jako metodologicznie

spójną teorię. W związku z tym, wydaje się, że jednym z najważniejszych problemów, które powinny być rozwiązane w przyszłości jest wypracowanie zunifikowanego sposobu analizy tych zadań i konstruowania odpowiadających im kryteriów optymalności. O ile - co podkreślaliśmy w całej pracy - niemożliwe jest stworzenie uniwersalnego kryterium, o tyle nie jest wykluczone, że różne kryteria można wyprowadzić i zapisać stosując podobny aparat metodologiczny i matematyczny. Niniejsza praca stanowi pierwszy krok w tym kierunku zbiera bowiem istniejące rezultaty związane z najważniejszymi formalizmami i prezentuje je w ramach jednego (nakreślonego w rozdziale drugim) podejścia metodologicznego.

8. Literatura.

- [1] M.ATHANS, IFAC Congress, Paris, June 1972.
- [2] Y.BEN-HAIM, *Convex sets and nondestructive assay*, SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol.6, No.4, Oct. 1985, pp.688-706.
- [3] Y.BEN-HAIM, *The Assay of Spatially Random Material*, D.Reidel Publ.Comp., 1985.
- [4] Y.BEN-HAIM, N.SHENHAV, *The measurement of spatially random phenomena*, SIAM J. Appl.Math., Vol.44, No.6, Dec. 1984, pp.1150-1163.
- [5] A.BENSOUSSAN, *Filtrage optimal des systemes lineaires*, Dunod, Paris, 1971.
- [6] A.BENSOUSSAN, *Optimization of Sensors' Location in a Distributed Filtering Problem*, w Lect. Not. in Math., vol.294, pp.62-84.
- [7] B.E.P.BOX, K.B.WILSON, *On the experimental attainment of optimum conditions*, J.of Royal Stat.Soc., Ser.B, No.1, 1951.
- [8] CZ.CEMPEL, *Podstawy wibroakustycznej diagnostyki maszyn*, WNT, Warszawa 1982.
- [9] W.G.COCHRAN, G.M.COX, *Experimental Designs*, J.Wiley& Sons, New York, Chapman and Hall, London, 1957.
- [10] H.CRAMER, *Metody matematyczne w statystyce*, PWN, Warszawa 1958.
- [11] R.DEUTCH, *Teoria estymacji*, PWN, Warszawa, 1969.
- [12] R.A.FISHER, *The Design of Experiments*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1935.

- [13] G.C.GOODWIN, R.L.PAYNE, *Dynamic System Identification. Experiment Design and Data Analysis*, Academic Press, 1977.
- [14] I.GUSTAVSSON, L.LJUNG, T.SODERSTROM, *Choice and effect of differential feedback configurations*, w [33], str.367- 388.
- [15] I.A.IBRAGIMOV, R.Z.HASMINSKIJ, *Statistical Estimation. Asymptotic Theory*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [16] A.JAZWINSKI, *Nonlinear Filtering Theory*, Academic Press, New York, 1969.
- [17] B.KACPRZYNSKI, *Planowanie eksperymentów. Podstawy Matematyczne*, WNT, Warszawa, 1974.
- [18] S.KALISKI, ed., *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa, 1966.
- [19] S.KULLBACK, *Information Theory and Statistics*, John Willey & Sons, Inc., New York, 1959.
- [20] J.L.LIONS, *Controle optimal des systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles*, Dunod, Paris, 1968.
- [21] R.SZ.LIPCER, A.N.SZIRIAJEV, *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa, 1981.
- [22] K.MANCZAK, *Technika planowania eksperymentów*, WNT, Warszawa, 1976.
- [23] K.MANCZAK, *Metody identyfikacji obiektów sterowania*, (wyd.II), WNT, Warszawa, 1979.
- [24] R.K.MEHRA, *Experimental Conditions*, w [33], str. 305- 366.
- [25] W.W.NALINOW, N.A.CZERNOVA, *Statystyczne metody planowania doswiadczen ekstremalnych*, WNT, Warszawa, 1967.

- [26] M. NYQUIST, *Certain topics in telegraph transmission theory*,
Trans. AIEE, April 1928.
- [27] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING,
Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing, Cambridge
University Press, Cambridge, 1986.
- [28] *Proc. of Summer Workshop on Sound Sources and Sound
Propagation Paths*, Jablonna, July 6-11 1981, IPPT PAN, WDN
Warszawa, 1983.
- [29] C. E. SHANNON, *Communication in the presence of noise*, Proc.
IRE, No. 1, 1949.
- [30] N. SHENHAV, Y. BEN-HAIM, *A General Method for Optimal Design
of Nondestructive Assay Systems*, Nuclear Science and
Engineering, Oct. 1984.
- [31] B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Stochastic processes in
dynamics*, PWM - Martinus Nijhoff Publ., Warszawa, 1982.
- [32] K. SOBCZYK, *Theoretic-information approach to identification
and signal processing*, Proc. IFIP Conf. on Reliability and
Optimisation of Structural Systems, Lect. Not. in Eng.,
Springer Verlag.
- [33] *Trends and Progress in System Identification*, ed.
P. Eykhoff, Pergamon Press, 1981.
- [34] F. E. UDWADIA, *Some results on the optimal spacing of
measurement in the identification of structural systems*, Quart.
Appl. Math., Vol. XLII, No. 3, Oct. 1985, pp. 263-274.
- [35] J. WALKER, *Dynamical Systems and Evolution Equations, Theory
and Applications*, Plenum Press, 1980.

- [36] J.M. WHITTAKER, *Interpolatory Function Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No.33, Cambridge University Press, 1935.
- [37] WILDE, *Optimum Seeling Methods*, Prentire Hall, Englewood Clifts, New York, 1964.
- [38] K.YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1965.
- [39] R.ZIELINSKI, *Wybrane zagadnienia optymalizacji statystycznej*, PWN, Warszawa, 1974.
- [40] У.Н. БРИМКУЛОВ, Г.К. КРУГ, В.Л. САВАНОВ, Рационализация измерительной сети по критерию точности математического описания поля норм, *Метеорология и гидрология*, 1978, No.7, стр.25-34.
- [41] У.Н. БРИМКУЛОВ, Г.К. КРУГ, В.Л. САВАНОВ, Планирование экспериментов при исследовании случайных полей и процессов, Nauka, Moskwa, 1986.
- [42] Р.Ф. ГАНЧЕВ, В.М. КУЗЬМА, Оптимальное размещение вибродатчиков на случайно колеблющихся конструкциях с использованием теории информации, *Прикладная механика*, 1973, т.9, в.12, стр.3-9.
- [43] В.Г. ГОРСКИЙ, Ю.П. АДЛЕР, А.М. ТАЛАЛАЙ, Планирование промышленных экспериментов (модели динамики), *Metalurgia*, Moskwa, 1978.
- [44] Т.И. ДУБЕНКО, Оптимальное пасположение датчиков при оценке значений однородного случайного поля при наличии аддитивных помех, *Автоматика и телемеханика*, 1970, в.7, стр.34-39.

- [45] В. А. КОТЕЛЬНИКОВ, О пропускной способности "эфира" и проболоки в электросвязи, в: Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам реконструкции деле связи и развития слаботочной промышленности, Всесоюзный энерг. комитет, Москва, 1933.
- [46] Г. К. КРУГ, В. А. КАБАНОВ, Г. А. ФОМИН, Е. С. ФОМИНА, Планирование эксперимента в задачах нелинейного оценивания и распознавания образов, Наука, Москва, 1981.
- [47] Г. К. КРУГ, Ю. В. СОСУЛИН, В. А. ФАТУЕВ, Планирование эксперимента в задачах идентификации, Наука, Москва, 1977.
- [48] Математическая теория планирования эксперимента, под редакцией С. М. Ермакова, Наука, 1983.
- [49] С. А. МАШКОВИЧ, О повышении качества объективного анализа барического поля над пайонами с педкой цепью аэрологических станций, Труды ММЧ, 1965, в. 10, стр. 31-39.
- [50] Новые идеи в планировании эксперимента, ред. В. В. Налимов, Наука, Москва, 1969.
- [51] Планирование эксперимента, Наука, Москва, 1969.
- [52] Планирование эксперимента в исследованиях технологических процессов, przekład z niemieckiego, ред. Э. К. ЛЕЦКИЙ, Mir, Москва, 1977.
- [53] Проблемы планирования эксперимента, Наука, Москва, 1969.
- [54] В. С. ПУГАЧОВ, И. Н. ЦИНСЫН, Стохастические дифференциальные системы, Наука 1985.
- [55] С. РАДКОВСКИ, А. ТЫЛИКОВСКИ, Мера количества информации-функции цели в планировании виброизмерения случайных пластинок, X Konferencja Dynamiki Maszyn, WPW, Warszawa, 1976, str. 235-243.

- [56] А. Б. УСПЕНСКИЙ, В. В. ФЕДОРОВ, Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов, Nauka, Moskwa, 1975.
- [57] В. В. ФЕДОРОВ, Теория оптимального эксперимента, Nauka, Moskwa, 1971.
- [58] З. ФРЫДРЬХ, К вопросу неравномерной дискретизации нелинейных сигналов, Радиофизика, Но. 2, 1960.
- [59] Я. З. ЦЫПКИН, Основы информационной теории идентификации, Nauka, Moskwa, 1984.

DODATEK

Zbior CZUJNY.FOR.

C NINIEJSZY PROGRAM WYZNACZA WSPOLRZEDNE PUNKTOW. W KTORYCH NALEZY
C UMIESCIĆ CZUJNIKI DLA OPTYMALNEGO PRZEPROWADZENIA POMIAROW POLA
C POPRZECZNYCH PRZEMIESZCZEN BELKI SWOBODNIE PODPARTEJ POD WPLYWEM
C STOCHASTYCZNYCH WYMUSZEN (TYPU CZASOPRZESTRZENNEGO BIALEG0 SZUMU.
C Kryteria optymalnoscI zadawane sa w procedurze "FUM". MODYFIKACJA
C TEJ PROCEDURY POZWALA WYKORZYSTAC PROGRAM DO OPTYMALIZACJI DOBORU
C MIEJSC POMIAROWYCH ZGODNIE Z INNymi Kryteriami. NINIEJSZA IMPLI-
C MENTACJA WYKORZYSTUJE NASTĘPUJACE Dwa Kryteria:
C 1. Kryterium Zapewniajace Minimalizacje Sredniego Kwadratu Bledu
C Optymalnego Linowego Estymatora Sredniego Obciazenia Belki:
C Kryterium to jest wrażliwe na zadawana funkcje Sredniego Obciaze-
C nia Belki. w Istniejacej wersji mozna WybiErac Srednie Obciazenie
C Stale lub niesymetryczne - postaci x#9. Zadanie Innych Srednich
C Obciazen następuje poprzez zmianę funkcji F3 I DF3
C 2. Kryterium Wybierajace te Polozenia CZUJNIKOW, dla ktorYch Wy-
C niki pomiarow maja maksymalna entropie.
C Funkcja korelacyjna mierz0nego pola jest aproksymowana obcietym
C szeregiem fouriera. ilosc skladnik0w szeregu jest parametrem za-
C danym Interakcyjnie.
C Optymalizacja jest prowadzona metoda gradientow sprzezonych pola-
C ka - Ribbiera. Dokladnosc optymalizacji jest rowniez parametrem
C Interakcyjnie wprowadzanym przez uzytkownika. Pozostale opcje to
C startowe Polozenie optymalizowanych Wspolrzednych - Ich Zmiana
C pozwala Przeszukac caly obszar zmiennosci (0. - Polozenie Lewego
C konca Belki. 1. - Polozenie Prwego konca Belki) co zabezpiecza
C wyniki przeprowadzonych badan przed efektami ewentualnych miniow
C lokalnych stosowanych kryteriow.
C Wykorzystanie programu następuje w trybie Interakcyjnym - program
C sam pyta o kolejne parametry informujac o postaci oczekiwanych
C danych wejsciowych. Wyniki wyprawdazane sa na monitor. mozna je
C rowniez zapisac na zbiorach 3 I 4. Zbior 3 definiuje uzytkownik
C na poczatku sesji - proponuje sie definicje "PRN:" umozliwiajaca
C natychmiastowe drukowanie wybranych wynikow. Zbior 4 mozna defi-
C niowac w trakcie sesji wielokrotnie. umozliwia to zapisywanie wy-
C nikow na wielu zbiorach stalych.

PONIZSZY SEGMENT GLOWNY ORGANIZUJE KOMUNIKACJE Z UZYTEKOWNIKIEM

PARAMETER (NMAX=10)
DIMENSION P(NMAX)
COMMON / IZ,M
COMMON /F/IMAR
OPEN (1,FILE='CON:')
OPEN (2,FILE='CON:')
OPEN (3,FILE=' ')
1 N=1
WRITE(2,10)
'READ(1,*)IZ'
GO TO (2,2,7,8,99),IZ1
2 WRITE(2,11)
IZ=IZ1
READ(1,*)M1
M=M1
WRITE(2,12)
READ(1,*)FT
WRITE(2,17)
21 READ(1,*)P1,P2
P(1)=P1
P(2)=P2
WRITE(2,18)
READ(1,*)IMAR
CALL FRPRM(P,2,FT,IT,FR)
IF (FR.EQ.12345.E+11) GO TO 21
R1=P(1)
R2=P(2)

```

FR=-FR
IF (I7.EQ.2) FR=-FUSR(R1,R2)
FR=1./FR
FRP=-1./FUSR(P1,P2)
3 N=N+1
60 TO (4.5).I2
4 WRITE(N,I3)
IF (IWAR.EQ.1) THEN WRITE(N,I9)
ELSE WRITE(N,20)
ENDIF

60 TO 6
5 WRITE(N,I4)
6 WRITE(N,I5)M.P1,P2,R1,R2,I7,FR,FRP,FT
IF(N.GE.3) 60 TO 1
WRITE(2,I6)
READ(1,I)IP
60 TO (3.I),IP
7 OPEN(4,FILE=' ')
60 TO 1
8 N=3
60 TO 3
99 STOP
10 FORMAT(////IHI,'PISZ NUMER ZADANIA'/ (1-SREDNIA,2-ENTROPIA,3-OPEN
1 4.4-PISZ NA 4,5-STOP) ')
11 FORMAT(I1,'LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU (1,2,3,...) ')
12 FORMAT(I1,'WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI (0.xxxxx) ')
13 FORMAT(//I1.70(IH#)/2H #.12%, 'BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA E
1STYMACJI',I2X,IH#/2H #.12%, ' PARAMETROW SREDNIEJ POLA',26X,IH
24/2H #.68X,IH#)
14 FORMAT(//I1.70(IH#)/2H #.10X, 'BADANIE ROZSTAWIENIA CZUJNIKOW DLA P
10MIAROW POLA',10X,IH#/2H #.11X, ' KRYTERIUM MAKSYMUM ENTROPII'
2.24X,IH#/2H #.68X,IH#)
15 FORMAT(2H #,'LICZBA SKLADNIKOW SZEREGU ',I1X,I3,27X,IH#/2H #,
1'STARTEWO POLOZENIE CZUJNIKOW ',7X,F12.8, ' ',F12.8,4H #/2H #
2,'OPTIMALNE POLOZENIE CZUJNIKOW ',7X,F12.8, ' ',F12.8,4H #/2H
3X,'ILOSC ITERACJI PODCZAS OPTIMALIZACJI ',I3,27X,IH#/2H #,
4'WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI SREDNIEJ',F16.8,18X,IH#/2H #,
6'STARTOWA WARIANCJA BLEDU ESTYMACJI',F16.8,18X,IH#/2H #,
5'WZGLEDNA DOKLADNOSC OPTIMALIZACJI ',7X,F9.6,18X,IH#/1X.70(IH#))
16 FORMAT(I1,'CZY ZAPISAC TEN WYNIK NA BIAOR 3? (1-TAK,2-NIE) ')
17 FORMAT(//I1,'WPISZ PUNKTY STARTOWE P1,P2=(0,1) ')
18 FORMAT(I') WYBIERZ WARIANT SREDNIEGO OBCIAZENIA'/
1' 1 - ROWNOMIERNE, 2 - NIESYMETRYCZNE ')
19 FORMAT(2H #,'SREDNIE OBCIAZENIE ROWNOMIERNE',39X,IH#)
20 FORMAT(2H #,'SREDNIE OBCIAZENIE NIESYMETRYCZNE',35X,IH#)
END

```

C
C
C
C

PONIZSZA PROCEDURA ORGANIZUJE WIELOWYMIAROWA OPTIMALIZACJE

```

SUBROUTINE FRPRMN(P,N,FTOL,ITER,FRET)
PARAMETER (NMAX=10,I7MAX=200,EPS=1.E-10)
DIMENSION P(NMAX),G(NMAX),H(NMAX),XI(NMAX)
ITE=0
FP=FUN(P)
CALL DFUN(P,I1)
DO 11 J=1,N
G(J)=-I1(J)
H(J)=G(J)
XI(J)=H(J)
11 CONTINUE
DO 14 ITER=1,I7MAX
WRITE(2,100)ITER
100 FORMAT(I1,'FRPRMN ',I3)
CALL LINMIN(P,I1,N,FRET)
IF (FRET.EQ.12345.E+11) RETURN
CALL DFUN(P,I1)
POM=XI(1)##2+XI(2)##2
IF (2.*ABS(FRET-PP).LE.FTOL*(ABS(FRET)+ABS(PP)+EPS)) THEN
IF (POM.LE.FTOL)RETURN
ITE=ITE+1
IF (ITE.GT.5) RETURN
ELSE
ITE=0
ENDIF

```



```

FP=FUN(P)
GG=0.
DGG=0.
DO 12 J=1,N
    GG=GG+G(J)*I2
    DGG=DGG+XI(J)*I2
    DGG=DGG+(XI(J)+G(J))*XI(J)
12 CONTINUE
IF (GG.EQ.0.)RETURN
GAM=DGG/66
DO 13 J=1,N
    G(J)=-XI(J)
    H(J)=G(J)+GAM*H(J)
    XI(J)=H(J)
13 CONTINUE
14 CONTINUE
PAUSE 'PRZEKROCZONA DOPUSZCZALNA LICZBA ITERACJI'
RETURN
END

```

C
C
C
C
C

LINMIN REDUKUJE ETAP WIELOWYMIAROWEJ MINIMALIZACJI DO JEDNOMYMIAROWEGO PROBLEMU MINIMALIZACJI PRZEKROJU WYJSCIOWEJ FUNKCJI

```

SUBROUTINE LINMIN(P, XI, N, FRET)
PARAMETER (NMAX=10, TOL=1.E-4)
EXTERNAL F1DIM, DF1DIM
DIMENSION P(NMAX), XI(NMAX)
COMMON /FICOM/ NCOM, PCOM(NMAX), XICOM(NMAX)
NCOM=N
DO 11 J=1,N
    PCOM(J)=P(J)
    XICOM(J)=XI(J)
11 CONTINUE
AX=0.
XI=.25
BX=.5
CALL MNBRAK(AX, XI, BX, FA, FX, FB, F1DIM)
IF (AX.EQ.12345.E+11) THEN
    FRET=AX
    RETURN
ENDIF
FRET=DBRENT(AX, XI, BX, F1DIM, DF1DIM, TOL, XMIN)
DO 12 J=1,N
    XI(J)=XMIN*XI(J)
    P(J)=P(J)+XI(J)
12 CONTINUE
RETURN
END

```

C
C
C
C
C
C

F1DIM I DF1DIM TO JEDNOARGUMENTOWA FUNKCJA I JEJ POCHODNA POWSTALA Z WYJSCIOWEJ FUNKCJI OKRESLAJACEJ KRYTERIUM PRZEZ PRZEKROJ JEJ WYKRESU PŁASZCZYŻNA PIONOWA WYZNACZONA PRZEZ LINMIN

C

```

FUNCTION F1DIM(X)
PARAMETER (NMAX=10)
COMMON /FICOM/ NCOM, PCOM(NMAX), XICOM(NMAX)
DIMENSION XT(NMAX)
DO 11 J=1,NCOM
    XT(J)=PCOM(J)+X*XICOM(J)
11 CONTINUE
F1DIM=FUN(XT)
RETURN
END

```

C
C
C

```

FUNCTION DF1DIM(X)
PARAMETER (NMAX=10)
COMMON /FICOM/ NCOM, PCOM(NMAX), XICOM(NMAX)
DIMENSION XT(NMAX), DF(NMAX)
DO 11 J=1,NCOM
    XT(J)=PCOM(J)+X*XICOM(J)

```

```
11 CONTINUE
CALL DFUN(XT,DF)
DFIDIM=0.
DO 12 J=1,NCOM
  DFIDIM=DFIDIM+DF(J)*XICOM(J)
12 CONTINUE
RETURN
END
```

C
C
C
C
C

DBRENT POSZUKUJE MINIMUM FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ METODA ZLOTEGO
PODZIALU MODYFIKOWANA INFORMACJAMI O POCHODNEJ

```
FUNCTION DBRENT(AI,BI,CI,XI,F,DF,TOL,XMIN)
PARAMETER (ITMAX=100,ZEPS=1.0E-10)
LOGICAL OK1,OK2
A=MIN(AI,CI)
B=MAX(AI,CI)
V=BI
W=V
X=V
E=0.
FX=F(X)
FV=F1
FW=FX
DX=DF(X)
DV=DI
DW=DX
DO 11 ITER=1,ITMAX
WRITE(2,100)ITER
100 FORMAT(40X,'DBRENT ',I3)
XM=0.5*(A+B)
TOL1=TOL*ABS(X)+ZEPS
TOL2=2.*TOL1
IF (ABS(X-XM).LE.(TOL2-.5*(B-A))) GOTO 3
IF (ABS(E).GT.TOL1) THEN
  D1=2.*(B-A)
  D2=D1
  IF (DW.NE.DX) D1=(W-X)*DX/(DX-DW)
  IF (DV.NE.DX) D2=(V-X)*DX/(DX-DV)
  U1=X+D1
  U2=X+D2
  OK1=((A-U1)*(U1-B).GT.0.).AND.(DX*D1.LE.0.)
  OK2=((A-U2)*(U2-B).GT.0.).AND.(DX*D2.LE.0.)
  OLDE=E
  E=D
  IF (.NOT.(OK1.OR.OK2)) THEN
    GO TO 1
  ELSE IF (OK1.AND.OK2) THEN
    IF (ABS(D1).LT.ABS(D2)) THEN
      D=D1
    ELSE
      D=D2
    ENDIF
  ELSE IF (OK1) THEN
    D=D1
  ELSE
    D=D2
  ENDIF
  IF (ABS(D).GT.ABS(0.5*OLDE)) GO TO 1
  U=X+D
  IF (U-A.LT.TOL2 .OR. B-U.LT.TOL2) D=SIGN(TOL1,XM-X)
  GOTO 2
ENDIF
1 IF (DX.GE.0.) THEN
  E=A-X
ELSE
  E=B-X
ENDIF
2 D=0.5*E
IF (ABS(D).GE.TOL1) THEN
  U=X+D
  FU=F(U)
ELSE
  U=X+SIGN(TOL1,D)
```

```

FU=F(U)
IF(FU.GT.FX)GO TO 3
ENDIF
DU=DF(U)
IF(FU.LE.FX) THEN
IF(U.GE.X) THEN
A=X
ELSE
B=X
ENDIF
V=W
FV=FW
DV=DW
W=X
FW=FX
DW=DX
X=U
FX=FU
DX=DU
ELSE
IF(U.LT.X) THEN
A=U
ELSE
B=U
ENDIF
IF(FU.LE.FW .OR. W.EQ.X) THEN
V=W
FV=FW
DV=DW
W=U
FW=FU
DW=DU
ELSE IF(FU.LE.FV .OR. V.EQ.X .OR. V.EQ.W) THEN
V=U
FV=FU
DV=DU
ENDIF
ENDIF
11 CONTINUE
PAUSE 'DBRENT przekroczył maksymalna liczbe iteracji'
3 XMIN=X
DBRENT=FX
RETURN
END

C
C
C
C
C
C
C
SUBROUTINE MNBRAK(AI,BI,CI,FA,FB,FC,FUNC)
PARAMETER (GOLD=1.618034, GLIMIT=20., TINY=1.E-20)
FA=FUNC(AI)
FB=FUNC(BI)
IF(FB.GT.FA)THEN
DUM=AI
AI=BI
BI=DUM
DUM=FB
FB=FA
FA=DUM
ENDIF
CX=BI+GOLD*(BX-AI)
FC=FUNC(CX)
IKA=0
1 IF(FB.GE.FC)THEN
IKA=IKA+1
C WRITE(2,100)IKA
100 FORMAT(20X,'MNBRAK ',I4)
IF (ABS(BI)+ABS(AI).GT.1.E+10)THEN
PAUSE 'MNBRAK ROZBIEGA:ZADAJ INNE PUNKTY STARTU'
AI=12345.E+11
RETURN
ENDIF
R=(BI-AI)*(FB-FC)

```

```
Q=(BX-CX)*(FB-FA)
U=B1-((BX-CX)*Q-(BX-AX)*R)/(2.*SIGN(MAX(ABS(Q-R),TINY),Q-R))
ULIM=B1+GLIMIT*(CX-BX)
IF((BX-U)*(U-CX).GT.0.)THEN
  FU=FUNC(U)
  IF(FU.LT.FC)THEN
    AX=BX
    FA=FB
    BX=U
    FB=FU
    GO TO 1
  ELSE IF(FU.GT.FB)THEN
    CX=U
    FC=FU
    GO TO 1
  ENDIF
  U=CX+GOLD*(CX-BX)
  FU=FUNC(U)
ELSE IF((CX-U)*(U-ULIM).GT.0.)THEN
  FU=FUNC(U)
  IF(FU.LT.FC)THEN
    BX=CX
    CX=U
    U=CX+GOLD*(CX-BX)
    FB=FC
    FC=FU
    FU=FUNC(U)
  ENDIF
  ELSE IF((U-ULIM)*(ULIM-CX).GE.0.)THEN
    U=ULIM
    FU=FUNC(U)
  ELSE
    U=CX+GOLD*(CX-BX)
    FU=FUNC(U)
  ENDIF
  AX=BX
  BX=CX
  CX=U
  FA=FB
  FB=FC
  FC=FU
  GO TO 1
ENDIF
RETURN
END
```

C
C
C
C
C

FUN OKRESLA STOSOWANE KRYTERIUM OPTIMALNOSCI

```
FUNCTION FUN(P)
PARAMETER (NMAX=10,P1=3.14159265358979)
COMMON / IZ,M
DIMENSION P(NMAX)
P1=P(1)
P2=P(2)
A1=ABS(P1-.5)
A2=ABS(P2-.5)
IF (MAX(A1,A2).LT..5) THEN
  IF (IZ.EQ.1) THEN
    FUN=FUSR(P1,P2)
    RETURN
  ENDIF
  FUN=ROVM(P1,P2)**2-ROVM(P1,P1)*ROVM(P2,P2)
  RETURN
ENDIF
FUN=H(A1)+H(A2)
IF (IZ.EQ.2) RETURN
A1=MIN(A1,A2)
FUN=FUN+BRZEG(A1)
RETURN
```

END

C
C
C
C

C
C
C

F3 I DF3 TO FUNKCJE POMOCNICZE DLA FUN: DFUN LICZY GRADIENT FUN

```
FUNCTION F3(X)
COMMON /F/IWAR
IF (IWAR.NE.1) GO TO 1
F3=X*(X*X*X-2.*X*X+1.)
RETURN
1 X2=X*X
  X3=X*X*X
  X2=X2*X3
  X2=X2*X2-26.
  F3=X2*X3+25.*X
RETURN
END
```

C
C
C

```
FUNCTION DF3(X)
COMMON /F/IWAR
IF (IWAR.NE.1) GO TO 1
DF3=4.*X*X*(X-1.5)+1.
RETURN
1 X2=X*X
  X4=X2*X2
  X4=X4*X4*X2-6.
  DF3=13.*X2*X4
RETURN
END
```

C
C
C

```
SUBROUTINE DFUN(X,D)
PARAMETER (NMAX=10,P1=3.14159265358979)
COMMON /I2.M
COMMON /F/COM/NC,PC(NMAX),XC(NMAX)
DIMENSION X(NMAX),D(NMAX),D1(2)
P1=X(1)
P2=X(2)
POM=MAX(ABS(P1-.5),ABS(P2-.5))
IF (POM.GE..5) GO TO 15
GO TO (11,14),I2
11 CALL DFU(P1,P2,D1)
  D(1)=D1(1)
  D(2)=D1(2)
RETURN
14 R=ROVM(P1,P2)
  D(1)=2.*R*(DROVM(P1,P2)-DROVM(P1,P1)*ROVM(P2,P2))
  D(2)=2.*R*(DROVM(P2,P1)-DROVM(P2,P2)*ROVM(P1,P1))
RETURN
15 D(1)=-1.
  D(2)=-1.
  IF (P1.GE.1.) D(1)=1.
  IF (P2.GE.1.) D(2)=1.
  IF ((P1.GT.0.).AND.(P1.LT.1.)) D(1)=FLOAT(I2-2)*POC(P1)
  IF ((P2.GT.0.).AND.(P2.LT.1.)) D(2)=FLOAT(I2-2)*POC(P2)
RETURN
END
```

C
C
C

```
FUNCTION POC(A)
IF (.5-ABS(A-.5).LT.1.E-20) THEN
  POC=1.E-22
  IF (A.LT..5) POC=-POC
ENDIF
PO=F3(A)/ROVM(A,A)
POC=2.*PO*(PO*DROVM(A,A)-DF3(A))
RETURN
END
```

C
C
C
C

C
C
C
C

FUSR OBLICZA WARIANCJE OPTIMALNEGO LINIOWEGO ESTYMATORA
SREDNIEGO OBCIAZENIA BELKI

```
FUNCTION FUSR(P1,P2)
R1=ROVM(P1,P1)
R2=ROVM(P2,P2)
R=ROVM(P1,P2)
WY2=R1R-R1R2
IF (WY2.GE.-1.E-50) THEN
    WY2=-1.E-20
    PAUSE 'KORELACJA BLISKA 1: UWAGA GRUBE BLEDY'
ENDIF
F1=F3(R1)
F2=F3(P2)
FUSR=(F1F1R2-2.F1F2R+F2F2R1)/WY2
RETURN
END
```

C
C
C

```
FUNCTION H(X)
IF (X.GT..5) THEN
    H=X-.5
    RETURN
ELSE
    H=0.
    RETURN
ENDIF
END
```

C
C
C

```
FUNCTION BRZEG(A1)
PARAMETER (PI=3.14159265358979)
COMMON / IZ,M
A=.5-A1
PI1=-1./PI/PI
IF (A.LT.1.E-20) THEN
    BRZEG=0.
    DO 1 J=1,M
    RJ=FLOAT(J)
    BRZEG=BRZEG+1./RJ/RJ
1    BRZEG=PI1/BRZEG
    RETURN
ENDIF
R=ROVM(A,A)
B=F3(A)
BRZEG=-B#B/R
RETURN
END
```

C
C
C
C
C
C
C

ROVM OBLICZA FUNKCJE KOWARIANCJI POLA PRZENIESIEN BELKI
M - JEST LICZBA SKLADOWYCH SZEREBU FOURIERA APROKSIMUMUJACEGO
FUNKCJE KOWARIANCJI

```
FUNCTION ROVM(P1,P2)
PARAMETER (NMA1=10,PI=3.14159265358979)
COMMON / IZ,M
ROVM=0.
DO 12 J=1,M
    RM=FLOAT(J)#PI
    JJ=J#J
    F=SIN(RM#P1)#SIN(P2#RM)/JJ/JJ
    ROVM=ROVM+F
12 CONTINUE
RETURN
END
```

C
C
C
C
C

C
C
C
C
C
C
C

DROVM WYZNACZA POCHODNA CZASTKOWA KOWARIANCJI ROVM WZGLEDEM
POLOZENIA PIERWSZEGO CZUJNIKA

```
FUNCTION DROVM(P1,P2)
PARAMETER (PI=3.14159265358979)
COMMON / IZ,M
DROVM=0.
DO 1 J=1,M
  RJ=FLOAT(J)*PI
  JJ=J*J
  DROVM=DROVM+COS(RJ*PI)*SIN(RJ*PI)*PI/JJ/2
1 RETURN
END
```

C
C
C
C
C

DFU WYZNACZA GRADIENT FUNKCJI KOWARIANCJI POLA PRZEMIESZCZEN

```
SUBROUTINE DFU(P1,P2,DI)
DIMENSION B1(2)
R1=ROVM(P1,P1)
R2=ROVM(P2,P2)
R=ROVM(P1,P2)
MYZ=R*R-R1*R2
IF (MYZ.GE.-1.E-50) THEN
  MYZ=-1.E-20
  PAUSE 'KORELACJA BLISKA 1; UWAGA GRUBE BLEDY'
ENDIF
B1=DROVM(P1,P1)
B=DROVM(P1,P2)
F1=F3(P1)
F2=F3(P2)
D=DF3(P1)
FUS=FUSR(P1,P2)
I=0
1 I=I+1
S=F2*(B1*F2-B*F1)+D*(R2*F1-R*F2)
S=S+FUS*(B1*R2-R*B)
DI(I)=2.*S/MYZ
IF (I.EQ.2) RETURN
B=DROVM(P2,P1)
B1=DROVM(P2,P2)
D=DF3(P2)
R2=R1
F=F1
F1=F2
F2=F
GO TO 1
END
```

Zbior HELP.PAS.

Zawiera program instrukcyjny, informujący o całym pakiecie optymalizacyjnym.

```
program detector_help (input,output);
begin
writeln('This diskette contains a program for calculating the optimal positions');
writeln('for detectors on a circle around a source. The main program will be');
writeln('found on the file placedet.pas. To execute it you will need a turbo');
writeln('pascal compiler.');
```

writeln;

```
writeln('The program requires three external routines, one for calculating the');
writeln('cross covariance between two points, one for calculating the value');
writeln('epsilon, and one for maximizing epsilon as a function of the detector');
writeln('angles. These three routines must be written on the files phi.pas,');
writeln('epsilon.pas and powell.pas.');
```

writeln;

```
writeln('The diskette contains three different cross covariance functions. The');
writeln('file phiinv.pas contains the function');
```

writeln;

```
writeln('  phi = sqrt(sigma) * exp(-alpha * abs(x-y)) ,');
```

writeln(' the file phiinv.pas contains the function');

writeln;

```
writeln('  phi = abs(x) * abs(y) * sqrt(sigma) * exp(-alpha * abs(x-y))');
```

writeln(' the file phiinv.pas contains the function');

writeln;

```
writeln('  phi = sqrt(sigma)*exp(-alpha*sqrt(a*sqrt(x1-y1)+b*sqrt(x2-y2)))');
```

writeln('Press C/R to continue!');

readln;

```
writeln('To use one of these definitions, simply copy the file to a file named');
writeln('phi.pas. If you want to define a new cross covariance function, make');
```

writeln('sure that the heading will be');

writeln;

```
writeln('  function phi (x,y:coordinatetype):real;');
```

writeln;

```
writeln('where coordinatetype is defined in the main program as');
```

writeln;

```
writeln('  coordinatetype = array [1..2] of real;');
```

writeln;

```
writeln('On the diskette there are also two different functions for calcula-');
writeln('ting the value epsilon. On the file eps1.pas it is defined as');
```

writeln;

writeln;

writeln;

writeln;

```
writeln('  epsilon = transp(b)*inv(R)*b');
```

writeln;

```
writeln('and on the file eps2.pas as');
```

writeln;

writeln;

writeln;

```
writeln('Press C/R to continue!');
```

readln;

```
writeln('  epsilon = det(R)');
```

writeln;

```
writeln('To use one of these definition, copy the file to epsilon.pas. If you');
```

writeln('want to define a new function epsilon, the heading must be');

writeln;

```
writeln('  function epsilon ( var K:satricetype; n:integer):real;');
```

writeln;

```
writeln('where satricetype is defined in the main program as');
```

writeln;

```
writeln('  satricetype = array [1..nmax,1..nmax] of real;');
```

writeln;

```
writeln('On the file powell.pas, there is a routine that miniaizes a function');
```

writeln('named fnc, which is defined in the main program as -epsilon. This func-');
writeln('tion uses Powell's method for the optimization. For a description of');

writeln('this method, see the manual for paslib. If you want to change the algo-');
writeln('rithm for the optimization, it will probably require some changes of the');

writeln('main program as well.');

writeln;

Zbiór PLACEDET.PAS.

Zawiera główny program rozstawiający czujniki na okręgu w optymalny sposób.

```
program detector_positions (input,output);
  (* This program calculates the optimal positions of a given number of detec- *)
  (* tors on a circle around the source. The criteria for the optimization is *)
  (* to maximize an external function epsilon, which is calculated from the *)
  (* cross-covariance matrix K. The matrix K is obtained from an external *)
  (* covariance function. *)
  (* The algorithm for optimization is also given in an external file to make *)
  (* it easier to change algorithm. Currently Powell's method is used. *)
  (* The structure of each external routine will be explained under the im- *)
  (* clude directives. *)

const nmax = 10;          (* Maximum size of the cross-covariance *)
                          (* matrix K, i.e. the maximum number of *)
                          (* detectors is nmax-1. *)

pi = 3.14159265358979;

type matrixtype = array [1..nmax,1..nmax] of real;
   vectortype = array [1..nmax] of real;
   coordinatetype = array [1..2] of real;
   coordvectortype = array [1..nmax] of coordinatetype;

var detector_angle,
    start_angle : vectortype;
    nr_of_detectors, p,
    ndim_iter,
    onedim_iter,
    max_n_iter,
    max_one_iter : integer;
    source : coordinatetype;
    eps, tolerance,
    radius, firststep : real;
    ok_n, ok_1 : boolean;

procedure drawscreen ( source:coordinatetype;
                      radius:real;
                      detector_angle:vectortype;
                      nr_of_detectors:integer;
                      eps:real );
  (* Draws a coordinatesystem containing the source and the detectors, *)
  (* and writes the current value of epsilon. *)

const source_x = 159; (* Screen coordinates *)
      source_y = 109; (* for the source. *)
      radpoints = 90; (* Number of screen points for the radius. *)
      ycorr = 0.9; (* Correction in y-direction to make the number *)
                  (* of screen points equal to the x-direction. *)

var p, origin_x, origin_y, unitpoints,
    detector_x, detector_y : integer;

procedure circle (xr,yr,r,color:integer);
  (* Draws a circle with radius r and the center in xr, yr. *)

const n = 14;
      ycorr = 0.9;
      x : array [1..n] of integer =
        (0,121,239,355,465,568,663,749,823,885,935,971,993,1000);

var xfact, yfact : real;
    xk1, yk1, xk2, yk2,
    xp1, yp1, xp2, yp2, i : integer;

begin(* circle *)
  xfact := abs(r * 0.001);
  yfact := xfact * ycorr;
  if xfact > 0 then begin
    xk1 := trunc(x[1]*xfact + 0.5);
    yk1 := trunc(x[n]*yfact + 0.5);
```

```
for i := 2 to n do begin
  xk2 := trunc(x[i]*xfact + 0.5);
  yk2 := trunc(x[n-1+i]*yfact + 0.5);
  xp1 := xr - xk1;
  yp1 := yr + yk1;
  xp2 := xr - xk2;
  yp2 := yr + yk2;
  draw(xp1,yp1,xp2,yp2,color);
  xp1 := xr + xk1;
  xp2 := xr + xk2;
  draw(xp1,yp1,xp2,yp2,color);
  yp1 := yr - yk1;
  yp2 := yr - yk2;
  draw(xp1,yp1,xp2,yp2,color);
  xp1 := xr - xk1;
  xp2 := xr - xk2;
  draw(xp1,yp1,xp2,yp2,color);
  xk1 := xk2;
  yk1 := yk2;
end;
end
else
  plot(xr,yr,color);
end;(* circle *)

begin(* drawscreen *)

  graphcolor:=ode;

  (* Choose the background colour to be blue, and the rest of *)
  (* the colours to be green( = 1), red( = 2), and brown( = 3). *)
  graphbackground(LightBlue);
  palette(0);

  (* Number of screenpoints for one unit in the coordinate system. *)
  unitpoints := trunc(radpoints/radius);

  (* Screen coordinates for the origin. *)
  origin_x := source_x - round(source[1] # unitpoints);
  origin_y := source_y + round(source[2] # unitpoints # ycorr);

  (* Draw the coordinate axes. These will be visible *)
  (* only if they are within the screen. *)
  draw(0,origin_y,319,origin_y,1);
  draw(origin_x,0,origin_x,199,1);

  circle(source_x,source_y,radpoints,2);

  (* Draw the detectors. *)
  for p := 1 to nr_of_detectors do begin
    detector_x :=
      trunc(radpoints # cos(detector_angle[p])) + source_x;
    detector_y :=
      -trunc(radpoints # sin(detector_angle[p]) # ycorr) + source_y;
    draw(source_x,source_y,detector_x,detector_y,3);
  end;

  writeln('Eps=',eps:10);

end;(* drawscreen *)

procedure lastdraw ( source:coordinatetype;
  radius:real;
  detector_angle:vectortype;
  nr_of_detectors:integer;
  start_angle:vectortype;
  tolerance:real;
  max_n_iter,max_one_iter:integer;
  firststep:real;
  ndim_iter,onedim_iter:integer;
  eps:real;
  ok_n,ok_1:boolean );
  (* Draws the coordinatesystem with the source and detectors, then waits for *)
  (* a C/R, and finally prints the input data and the result of the optima- *)
```

```

($ tion.
var angle : real;
    p : integer;
    aaaa : text;
    ga : string[14];

begin($ lastdraw $)

    ga:='a:w.pas';
    assign(aaaa,ga);

    drawscreen(source,radius,detector_angle,nr_of_detectors,eps);

    writeln('Press C/R to');
    writeln('continue!');
    readln;

    textmode;
    rewrite(aaaa);

    writeln(aaaa,'          CALCULATION OF OPTIMAL POSITIONS OF DETECTORS');
    writeln(aaaa,'          #####');
    writeln(aaaa);writeln(aaaa);

    writeln(aaaa,'Input data:                               Results:');

    write(aaaa,'Coordinates for the source:                ');
    if ok_n and ok_l then
        writeln(aaaa,'Maximum value of epsilon:');
    else
        writeln(aaaa,'Maximum number of iterations');

    write(aaaa,source[1]:12:4,' x                            ');
    if ok_n and ok_l then
        writeln(aaaa,'          ',eps:14)
    else if not ok_n then
        writeln(aaaa,'of the basic procedure has')
    else
        writeln(aaaa,'when optimizing in one di-');

    write(aaaa,source[2]:12:4,' y                            ');
    if not ok_n then
        write(aaaa,'been exceeded!')
    else if not ok_l then
        write(aaaa,'rection has been exceeded!');
    writeln(aaaa);writeln(aaaa);

    write(aaaa,'Initial detector angles:                    ');
    if ok_n and ok_l then
        write(aaaa,'Optimal detector angles:');
    writeln(aaaa);

    for p := 1 to nr_of_detectors do begin
        write(aaaa,start_angle[p]:12:2,' degrees                ');
        if ok_n and ok_l then begin
            angle := detector_angle[p]/pi#180;
            if angle < 0 then
                angle := angle + 360#trunc(-angle/360 + 1)
            else
                angle := angle - 360#trunc(angle/360);
            write(aaaa,angle:12:2,' degrees');
        end;
        writeln(aaaa);
    end;
    writeln(aaaa);

    write(aaaa,'Maximum number of iterations of                ');
    if ok_n and ok_l then
        write(aaaa,'Number of iterations of the');
    writeln(aaaa);

    write(aaaa,'the basic procedure:                            ');
    if ok_n and ok_l then
        write(aaaa,'basic procedure:');

```

```
writeln(aaaa);

write(aaaa,max_n_iter:12,' iterations ');
if ok_n and ok_l then
  write(aaaa,ndim_iter:12,' iterations');
writeln(aaaa);writeln(aaaa);

write(aaaa,'Maximum number of iterations when ');
if ok_n and ok_l then
  write(aaaa,'Highest number of iterations when');
writeln(aaaa);

write(aaaa,'optimizing in one direction: ');
if ok_n and ok_l then
  write(aaaa,'optimizing in one direction:');
writeln(aaaa);

write(aaaa,max_one_iter:12,' iterations ');
if ok_n and ok_l then
  write(aaaa,onedim_iter:12,' iterations');
writeln(aaaa);writeln(aaaa);

writeln(aaaa,'Tolerance:');
writeln(aaaa,tolerance:12:4,' relatively');
writeln(aaaa);writeln(aaaa);

writeln(aaaa,'Length of first step when finding');
writeln(aaaa,'the interval for minima bracketing:');
writeln(aaaa,firststep:12:2,' degrees');

end;($ lastdraw $)

procedure Calculate_K ( var x:coordvectortype; n:integer;
                       var K:matricetype );
($ Calculates the cross-covariance matrix K for the points given by the $)
($ vector x. $)

var p, q : integer;

($i phi.pas)
($ Gives the cross-covariance between two points. The function must be given $)
($ the name phi and be written on the file phi.pas in the form $)
($ $ function phi ( x,y:real ):real; $)
($ $ $)

begin($ Calculate_K $)

  ($ Calculate the cross-covariance for the upper right half. $)
  for p := 1 to n do
    for q := p to n do
      K[p,q] := phi(x[p],x[q]);

  ($ Copy the upper right half to the lower left half (symmetric matrix). $)
  for p := 2 to n do
    for q := 1 to p-1 do
      K[p,q] := K[q,p];

end;($ Calculate_K $)

($i epsilon.pas)
($ Calculates the value epsilon for the covariance matrix K. The function $)
($ must be written in the form $)
($ $ $)
($ $ function epsilon ( var K:matricetype; n:integer ):real; $)
($ $ $)

procedure maxima_of_eps ( source:coordinatetype;
                          var detector_angle:vectortype;
                          nr_of_detectors:integer;
                          tolerance:real;
                          max_n_iter, max_one_iter:integer;
                          firststep:real;
                          var ndim_iter, onedim_iter:integer;
                          var eps:real;
```

```

                                var ok_n, ok_l: boolean;
    {# For given starting positions of the detectors, this routine finds a lo- }
    {# cal maximum of the function epsilon. On input detector_angle should con- }
    {# tain the starting position, and on output it will contain the optimal }
    {# positions. The maximum value of the function epsilon is given by the pa- }
    {# rameter eps. The number of iterations of Powell's basic procedure is gi- }
    {# ven by the parameter ndia_iter, and the highest number of iterations }
    {# when optimizing in one direction is given by onedia_iter. The parameter }
    {# ok_n will be false on output if the maximum number of iterations of the }
    {# basic procedure is exceeded, and ok_l will be false if the maximum num- }
    {# ber of iterations when optimizing in one direction is exceeded. The }
    {# routine has found a solution if both parameters are true. }
type {# Type declarations needed for the routines }
    {# powell, linin, anbrak and brent. }
    glnp = vectortype;
    glnpno = matricetype;
    glndia = vectortype;
    glnarray = vectortype;
    glnpbynp = matricetype;
var x1 : matricetype; {# Contains the set of directions }
    p, q : integer;
    ncoa : integer; {# Variables used by }
    pcoa, xicoa : vectortype; {# the routine linin }
function fnc (detector_angle: vectortype): real;
    {# Function to be minimized by the routine powell. The function calculates }
    {# the cross-covariance matrix K and then the value epsilon for this con- }
    {# figuration. The output value of fnc is -epsilon. }
var x : coordvectortype;
    K : matricetype;
    eps : real;
    p : integer;
begin {# fnc }
    {# Calculate the Cartesian coordinates for the detectors. }
    x[1,1] := source[1];
    x[1,2] := source[2];
    for p := 1 to nr_of_detectors do begin
        x[p+1,1] := source[1] + cos(detector_angle[p]) * radius;
        x[p+1,2] := source[2] + sin(detector_angle[p]) * radius;
    end;
    Calculate_K(x, nr_of_detectors + 1, K);
    fnc := -epsilon(K, nr_of_detectors + 1);
end; {# fnc }
{# powell.pas }
{# Contains routines for minimizing the function fnc using Powell's method. }
{# This method is described in the manual for paslib, from where the rou- }
{# tines are copied. The routines are slightly changed so that the current }
{# configuration of the detectors are drawn on the screen after each minimi- }
{# zation in one direction. They are also altered so that the user can }
{# choose the maximum number of iterations, both in one direction and of the }
{# basic procedure. }
{# The structure of the procedure to call is }
{# }
{# PROCEDURE powell (VAR p: glnarray; VAR x1: glnpbynp; n, np: integer; }
{# ftol: real; }
{# VAR iter, onedia_iter: integer; VAR fret: real; }
{# VAR ok_n, ok_l: boolean); }
{# }
{# On input p contains the starting positions of the detectors, and on put- }
{# the optimal positions. The matrix x1 will on output contain the last }
{# set of directions. On input it is set to firststep[i], where i is the unit }
{# matrix. The parameter n is the number of detectors, np is the constant }
{# nmax, and ftol is the tolerance. The output parameter iter will be the }
{# number of iterations of the basic procedure and onedia_iter the highest }
{# number of iterations when optimizing in one direction. The minimum value }
{# of fnc is fret. The boolean parameter ok_n is true if the maximum number }

```

```
{% of iterations of the basic procedure has not been exceeded, and ok_1 will %}  
{% be true if the maximum number of iterations when optimizing in one direc- %}  
{% tion has not been exceeded. %}  
begin(% maximum_of_eps %)  
  drawscreen(source,radius,detector_angle,nr_of_detectors,  
    -fnc(detector_angle));  
  
  (% Initialize the directions set to firststep*I, %)  
  (% where I is the unit matrix. %)  
  for p := 1 to nr_of_detectors do begin  
    for q := 1 to nr_of_detectors do  
      x1[p,q] := 0;  
      x1[p,p] := firststep;  
    end;  
  
    (% Find the minimum of the function fnc (= -epsilon). %)  
    powell(detector_angle, xi, nr_of_detectors, nmax,tolerance,  
      ndim_iter, onedim_iter, eps, ok_n, ok_1);  
  
    eps := -eps;  
  end;  
  
begin(% detector_positions %)  
  
  writeln('          CALCULATION OF OPTIMAL POSITIONS OF DETECTORS');  
  writeln('#####');  
  writeln;  
  writeln('Coordinates for the source?');  
  readln(source[1],source[2]);  
  writeln('Radius to detectors?');  
  readln(radius);  
  writeln('Number of detectors?');  
  readln(nr_of_detectors);  
  for p := 1 to nr_of_detectors do begin  
    writeln('Angle of detector nr ',p:1,'?');  
    readln(start_angle[p]);  
    detector_angle[p] := start_angle[p]/180 % pi;  
  end;  
  writeln('Tolerance?');  
  readln(tolerance);  
  writeln('Length of the first step?');  
  readln(firststep);  
  writeln('Maximum number n-dimensional iterations?');  
  readln(max_n_iter);  
  writeln('Maximum number of iterations in one direction?');  
  readln(max_one_iter);  
  
  maximum_of_eps(source, detector_angle, nr_of_detectors, tolerance,  
    max_n_iter, max_one_iter, firststep/180*pi,  
    ndim_iter, onedim_iter, eps, ok_n, ok_1);  
  
  lastdraw(source,radius,detector_angle,nr_of_detectors,  
    start_angle,tolerance,max_n_iter,max_one_iter,firststep,  
    ndim_iter,onedim_iter,eps,ok_n,ok_1);  
  
end.(% detector_positions %)
```

```

Zbior POWELL.PAS.
Zawiera procedure znajdujaca maksimum miary jakosci (epsilon).

(* Modfile.pas, copied from paslib. *)
(* Contains declarations to adapt the following routines to turbo pascal. *)
TYPE double = real; char12 = string[12];
FUNCTION snql(x:real):real; BEGIN snql := x END;
PROCEDURE glopen(VAR infile:text; filename:char12);
    BEGIN assign(infile,filename); reset(infile) END;
(* Fidia.pas, copied from paslib. *)
(* Used to adapt the one dimensional routines mnrak and Brent *)
(* to an n-dimensional function. *)
FUNCTION fdia(x: real): real;
(* Programs using FIDIM must declare the variables
TYPE
    gndim = ARRAY [1..ndim] OF real;
VAR
    ncom: integer;
    pcom,xcom: gndim;
and assign values to them externally. *)
VAR
    j: integer;
    xt: gndim;
BEGIN
    FOR j := 1 to ncom DO BEGIN
        xt[j] := pcom[j]+x*xcom[j]
    END;
    fdia := fnc(xt)
END;
(* Func.pas *)
(* Called upon by mnrak and Brent. *)
function func (x:real):real;
begin
    func := fdia(x);
end;
(* Mnrak.pas, copied from paslib. *)
(* Brackets a local minimum. *)
PROCEDURE mnrak(VAR ax,bx,cx,fa,fb,fc: real);
(* Programs using routine MNRAK must supply an external
function func(x:real):real for which a minimum is to be found *)
LABEL l;
CONST
    gold=1.618034;
    glimit=100.0;
    tiny=1.0e-20;
VAR
    ulim,u,r,q,fdum: real;
FUNCTION max(a,b: real): real;
    BEGIN
        IF (a > b) THEN max := a ELSE max := b
    END;
FUNCTION sign(a,b: real): real;
    BEGIN
        IF (b > 0.0) THEN sign := abs(a) ELSE sign := -abs(a)
    END;
BEGIN
    fa := func(ax);
    fb := func(bx);
    IF (fb > fa) THEN BEGIN
        dum := ax;
        ax := bx;
        bx := dum;
        dum := fb;
        fb := fa;
        fa := dum
    END;
    cx := bx+gold*(bx-ax);
    fc := func(cx);
l: IF (fb >= fc) THEN BEGIN
        r := (bx-ax)*(fb-fc);
        q := (bx-cx)*(fb-fa);
        u := bx-((bx-cx)*q-(bx-ax)*r)/
            (2.0*sign(max(abs(q-r),tiny),q-r));
        ulim := bx+glimit*(cx-bx);
        IF ((bx-u)*(u-cx) > 0.0) THEN BEGIN
            fu := func(u);

```



```

IF (fu < fc) THEN BEGIN
  ax := bx;
  fa := fb;
  bx := u;
  fb := fu;
  GOTO 1 END
ELSE IF (fu > fb) THEN BEGIN
  cx := u;
  fc := fu;
  GOTO 1
END;
u := cx+gold*(cx-bx);
fu := func(u);
END ELSE IF ((cx-u)*(u-ulim) > 0.0) THEN BEGIN
fu := func(u);
IF (fu < fc) THEN BEGIN
  bx := cx;
  cx := u;
  u := cx+gold*(cx-bx);
  fb := fc;
  fc := fu;
  fu := func(u);
END
END ELSE IF ((u-ulim)*(ulim-cx) >= 0.0) THEN BEGIN
u := ulim;
fu := func(u);
END ELSE BEGIN
u := cx+gold*(cx-bx);
fu := func(u);
END;
ax := bx;
bx := cx;
cx := u;
fa := fb;
fb := fc;
fc := fu;
GOTO 1
END
END;

(* Brent.pas, copied from paslib. *)
(* Finds a local minimum between ax and bx using Brent's method. *)
FUNCTION brent(ax,bx,cx,tol: real; VAR xmin: real;
              VAR onedim iter: integer; VAR ok: boolean): real;
(* Programs using routine BRENT must supply an external function
func(x:real):real whose minimum is to be found. *)
LABEL 1,2,3;
CONST
  cgold=0.3819660;
  zeps=1.0e-10;
VAR
  a,b,d,e,etemp: real;
  fu,fv,fw,fx: real;
  iter, itmax: integer;
  p,q,r,tol1,tol2: real;
  u,v,w,x,x0: real;
FUNCTION sign(a,b: real): real;
BEGIN
  IF (b > 0.0) THEN sign := abs(a) ELSE sign := -abs(a)
END;
BEGIN
  itmax := max_one_iter;
  ok := true;
  IF ax < cx THEN a := ax ELSE a := cx;
  IF ax > cx THEN b := ax ELSE b := cx;
  v := bx;
  w := v;
  x := v;
  e := 0.0;
  fx := func(x);
  fv := fx;
  fw := fx;
  FOR iter := 1 to itmax DO BEGIN
    xm := 0.5*(a+b);
    tol1 := tol*abs(x)+zeps;
    tol2 := 2.0*tol1;

```

```

IF (abs(x-xm) <= (tol2-0.5*(b-a))) THEN GOTO 3;
IF (abs(e) >= tol1) THEN BEGIN
  r := (x-w)*(fx-fv);
  q := (x-v)*(fx-fw);
  p := (x-v)*q-(x-w)*r;
  q := 2.0*(q-r);
  IF (q > 0.0) THEN p := -p;
  q := abs(q);
  etemp := e;
  e := d;
  IF ((abs(p) >= abs(0.5*q*etemp)) OR (p <= q*(a-x))
      OR (p >= q*(b-x))) THEN GOTO 1;
  d := p/q;
  u := x+d;
  IF ((u-a) <= tol2) OR ((b-u) <= tol2) THEN d := sign(tol1,xm-x);
  GOTO 2
END;
1: IF (x >= xm) THEN e := a-x ELSE e := b-x;
  d := cgolde;
2: IF (abs(d) >= tol1) THEN u := x+d ELSE u := x+sign(tol1,d);
  fu := func(u);
  IF (fu <= fx) THEN BEGIN
    IF (u >= x) THEN a := x ELSE b := x;
    v := u;
    fv := fw;
    w := x;
    fw := fx;
    x := u;
    fx := fu
  END ELSE BEGIN
    IF (u < x) THEN a := u ELSE b := u;
    IF ((fu <= fw) OR (w = x)) THEN BEGIN
      v := u;
      fv := fw;
      w := u;
      fw := fu
    END ELSE IF ((fu <= fv) OR (v = x) OR (v = 2)) THEN BEGIN
      v := u;
      fv := fu
    END
  END
END
END;
ok := false;
iter := itmax;
3: xmin := x;
  brent := fx;
  onedia_iter := iter;
END;

(* Linmin.pas, copied from paslib. *)
(* Minimizes the function fnc in the direction given by xi, *)
(* and draws the result on the screen. *)
PROCEDURE linmin(VAR p,xi: glnarray; n: integer; VAR fret: real;
  VAR iter: integer; VAR ok: boolean);
(* Programs using routine LINMIN must define the type *)
TYPE
  glnarray = ARRAY [1..n] OF real;
  They must also declare the variables
VAR
  ncom: integer;
  pcom,xicom: glnarray;
in the main routine. Also the function FUNC referenced by BRENT
and MNBRAK must be set to return the function FIDIM. *)
CONST
  tol=1.0e-4;
VAR
  j: integer;
  xx,xmin,fx,fb,fa,bx,ax: real;
BEGIN
  ncom := n;
  FOR j := 1 to n DO BEGIN
    pcom[j] := p[j];
    xicom[j] := xi[j]
  END;
  ax := 0.0;
  xx := 1.0;

```

```
bx := 2.0;
mbrak(ax,xx,bx,fa,fx,fb);
fret := brent(ax,xx,bx,tol,xmin,iter,ok);
FOR j := 1 to n DO BEGIN
  xi[j] := xmin*xi[j];
  p[j] := p[j]+xi[j];
END;
drawscreen(source,radius,p,nr_of_detectors,-fret);
END;

(* Powell.pas, copied from paslib. *)
(* Calculates the minimum of the function fnc. *)
PROCEDURE powell(VAR p: glnarray; VAR xi: glnbypn; n,np: integer; ftol: real;
  VAR iter, onedia_iter: integer; VAR fret: real;
  VAR ok_n,ok_l: boolean);
(* Programs using routine POWELL must define the types
TYPE
  glnarray = ARRAY [1..n] OF real;
  glnbypn = ARRAY [1..np,1..np] OF real;
in the main routine. *)
LABEL 1,99;
VAR
  j,ibig,i,itmax,temp: integer;
  t,fp,t,fp,del: real;
  pt,ptt,xit: glnarray;
BEGIN
  itmax := max_n_iter;
  ok_n := true;
  ok_l := true;
  fret := fnc(p);
  FOR j := 1 to n DO BEGIN
    pt[j] := p[j]
  END;
  iter := 0;
  onedia_iter := 0;
1: iter := iter+1;
  fp := fret;
  ibig := 0;
  del := 0.0;
  FOR i := 1 to n DO BEGIN
    FOR j := 1 to n DO BEGIN
      xit[i,j] := xi[j,i]
    END;
    linmin(p,xit,n,fret,temp,ok_l);
    if temp > onedia_iter then
      onedia_iter := temp;
    if not ok_l then goto 99;
    IF (abs(fp-fret) > del) THEN BEGIN
      del := abs(fp-fret);
      ibig := i
    END
  END;
  IF (2.0*abs(fp-fret) <= ftol*(abs(fp)+abs(fret))) THEN GOTO 99;
  IF iter = itmax THEN BEGIN
    ok_n := false;
    goto 99;
  END;
  FOR j := 1 to n DO BEGIN
    ptt[j] := 2.0*fp[j]-pt[j];
    xit[j] := p[j]-pt[j];
    pt[j] := p[j]
  END;
  fppt := fnc(ptt);
  IF (fppt > fp) THEN GOTO 1;
  t := 2.0*(fp-2.0*fret+fppt)*sqr(fp-fret-del)-del*sqr(fp-fret);
  IF (t >= 0.0) THEN GOTO 1;
  linmin(p,xit,n,fret,temp,ok_l);
  if temp > onedia_iter then
    onedia_iter := temp;
  if not ok_l then goto 99;
  FOR j := 1 to n DO BEGIN
    xit[j,ibig] := xit[j]
  END;
  GOTO 1;
99: END;
```

Zbior EPS1.PAS

Zawiera miare jakosci dla kryterium sredniokwadratowego.

```
function epsilon ( var K:matricetype; n:integer):real;
($ Calculates the value epsilon for the covariance matrix K, using the
($ formula
($
($ eps = transp(b)*inv(R)*b
($
($ where the matrix K is
($
($ K = ( a  btransp )
($      ( b    R   ).
($
($ The input parameter n should be the dimension of the K-matrix.
```

```
type ($ Type declarations used by the $)
($ routines ludcap and lubksb. $)
glnarray = vectortype;
glnindx = array [1..nmax] of integer;
glnpbynyp = matricetype;
```

```
var R, Rinv : matricetype;
b, teapvector : vectortype;
alpha, a, temp : real;
p, q : integer;
```

```
($ Modfile.pas, copied from paslib. $)
($ Declarations to adapt the routines ludcap and lubksb to turbo pascal. $)
TYPE double = real; char12 = string[12];
FUNCTION snql(x:real):real; BEGIN snql := x END;
PROCEDURE glopen(VAR infile:text; filename:char12);
BEGIN assign(infile,filename); reset(infile) END;
```

```
($ Ludcap.pas $)
($ Performs the LU decomposition of the matrix A, so that LU = A is two
($ triangular matrices, where the diagonal elements of L all are unity. $)
PROCEDURE ludcap(VAR a: glnpbynyp; n,np: integer;
VAR indx: glnindx; VAR d: real);
($ Programs using LUDCMP must define the types
TYPE
glnpbynyp = ARRAY [1..np,1..np] OF real;
glnarray = ARRAY [1..n] OF real;
glnindx = ARRAY [1..n] OF integer;
in the main routine. $)
CONST
tiny=1.0e-20;
VAR
k,j,imax,i: integer;
sum,dum,big: real;
vv: glnarray;
BEGIN
d := 1.0;
FOR i := 1 to n DO BEGIN
big := 0.0;
FOR j := 1 to n DO IF (abs(a[i,j]) > big) THEN big := abs(a[i,j]);
IF (big = 0.0) THEN BEGIN
writeln('pause in LUDCMP - singular matrix'); readln
END;
vv[i] := 1.0/big
END;
FOR j := 1 to n DO BEGIN
IF (j > 1) THEN BEGIN
FOR i := 1 to j-1 DO BEGIN
sum := a[i,j];
IF (i > 1) THEN BEGIN
FOR k := 1 to i-1 DO BEGIN
sum := sum-a[i,k]*a[k,j]
END;
a[i,j] := sum
END
END
END;
END;
```

```

big := 0.0;
FOR i := j to n DO BEGIN
  sum := a[i,j];
  IF (j > 1) THEN BEGIN
    FOR k := 1 to j-1 DO BEGIN
      sum := sum-a[i,k]*a[k,j]
    END;
    a[i,j] := sum
  END;
  dum := vv[i]*abs(sum);
  IF (dum > big) THEN BEGIN
    big := dum;
    imax := i
  END;
  IF (j < imax) THEN BEGIN
    FOR k := 1 to n DO BEGIN
      dum := a[imax,k];
      a[imax,k] := a[j,k];
      a[j,k] := dum
    END;
    d := -d;
    vv[imax] := vv[j]
  END;
  indr[j] := imax;
  IF (j < n) THEN BEGIN
    IF (a[j,j] = 0.0) THEN a[j,j] := tiny;
    dum := 1.0/a[j,j];
    FOR i := j+1 to n DO BEGIN
      a[i,j] := a[i,j]*dum
    END
  END
END;
IF (a[n,n] = 0.0) THEN a[n,n] := tiny
END;

```

(# lubksb.pas #)
 (# Solves a linear equation system using backward substitution. The matrix is (#)
 (# A must be decomposed into LU by the routine ludcmp. #)
 PROCEDURE lubksb(a: glnbypn; n,np: integer; indr: glindx; VAR b: glnarray);
 (# Program using LUBKS must define the types

```

TYPE
  glnarray = ARRAY [1..n] OF real;
  glindx = ARRAY [1..n] OF integer;
  glnbypn = ARRAY [1..np,1..np] OF real;
in the main routine #)
VAR
  j,ip,ii,i: integer;
  sum: real;
BEGIN
  ii := 0;
  FOR i := 1 to n DO BEGIN
    ip := indr[i];
    sum := b[ip];
    b[ip] := b[i];
    IF (ii < 0) THEN BEGIN
      FOR j := ii to i-1 DO BEGIN
        sum := sum-a[i,j]*b[j]
      END
    END ELSE IF (sum < 0.0) THEN BEGIN
      ii := i
    END;
    b[i] := sum
  END;
  FOR i := n DOWNTO 1 DO BEGIN
    sum := b[i];
    IF (i < n) THEN BEGIN
      FOR j := i+1 to n DO BEGIN
        sum := sum-a[i,j]*b[j]
      END
    END;
    b[i] := sum/a[i,i]
  END
END;

```

```

procedure inverse ( A:matrixtype; n:integer;
                  var Ainv:matrixtype );
(* Calculates the inverse of the matrix A with dimension n. *)
var   indx : qlindx;      (* Used by the routines ludcap and mprove *)
      d     : real;       (* - " - *)
      b     : vectortype;
      k,s   : integer;

begin(* inverse *)

  (* Calculate the matrix LU = A *)
  ludcap(A,n,nmax,indx,d);
  (* A contains the LU matrix *)

  for k := 1 to n do begin

    (* Let b be a unit vector with b[k] = 1 *)
    for s := 1 to n do
      b[s] := 0;
    b[k] := 1;

    (* Solve the linear equations Ax = b *)
    lubksb(A,n,nmax,indx,b);

    (* The vector b now contains column k of the matrix Ainv *)

    for s := 1 to n do
      Ainv[s,k] := b[s];
    end;
  end;(* inverse *)

procedure Split_K ( var K:matrixtype; n:integer;
                  var a:real; var b:vectortype; var R:matrixtype );
(* Splits the matrix K into the value a, the vector b and the matrix R. *)
var   p,q : integer;

begin(* Split K *)
  a := K[1,1];
  for p := 2 to n do
    b[p-1] := K[p,1];
  for p := 2 to n do
    for q := 2 to n do
      R[p-1,q-1] := K[p,q];
    end;(* Split_K *)
end;

begin (* epsilon *)

  Split_K(K,n,a,b,R);
  inverse(R,n-1,Rinv);

  (* tempvector = transp(b)#inv(R) *)
  for p := 1 to n-1 do begin
    tempvector[p] := 0;
    for q := 1 to n-1 do
      tempvector[p] := tempvector[p] + b[q]*Rinv[q,p];
    end;

  (* temp = transp(b)#inv(R)#b *)
  temp := 0;
  for p := 1 to n-1 do
    temp := temp + tempvector[p]*b[p];
  end;

  epsilon := temp;
end; (* epsilon *)

```

```
Zbior EPS2.PAS
Zawiera siare jakosci dla kryterium entropijnego.

function epsilon ( var K:matricetype; n:integer):real;
($ Calculates the value epsilon as $)
($
($   epsilon = det(R);
($
type ($ Type declarations used by $)
($ the routine ludcap. $)
  glnarray = vectortype;
  glindx = array [1..nmax] of integer;
  glnpbyn = matricetype;

var  R : matricetype;
     b : vectortype;
     a : real;

($ Modfile.pas, copied from paslib. $)
($ Declarations used to adapt the routine ludcap to turbo pascal. $)
  TYPE double = real; char12 = string[12];
  FUNCTION snq(x:real):real; BEGIN snq := x END;
  PROCEDURE glopen(VAR infile:text; filename:char12);
    BEGIN assign(infile,filename); reset(infile) END;

($ Ludcap.pas, copied from paslib. $)
($ Performs the LU decomposition of the matrice A, so that LU = A is two  $)
($ triangular matrices, where the diagonal elements of L all are unity.  $)
PROCEDURE ludcap(VAR a: glnpbyn; n,np: integer;
  VAR indx: glindx; VAR d: real);
($ Programs using LUDCMP must define the types
TYPE
  glnpbyn = ARRAY [1..np,1..np] OF real;
  glnarray = ARRAY [1..n] OF real;
  glindx = ARRAY [1..n] OF integer;
in the main routine. $)
CONST
  tiny=1.0e-20;
VAR
  k,j,imax,i: integer;
  sum,dum,big: real;
  vv: glnarray;
BEGIN
  d := 1.0;
  FOR i := 1 to n DO BEGIN
    big := 0.0;
    FOR j := 1 to n DO IF (abs(a[i,j]) > big) THEN big := abs(a[i,j]);
    IF (big = 0.0) THEN BEGIN
      writeln('pause in LUDCMP - singular matrix'); readln
    END;
    vv[i] := 1.0/big
  END;
  FOR j := 1 to n DO BEGIN
    IF (j > 1) THEN BEGIN
      FOR i := 1 to j-1 DO BEGIN
        sum := a[i,j];
        IF (i > 1) THEN BEGIN
          FOR k := 1 to i-1 DO BEGIN
            sum := sum-a[i,k]*a[k,j]
          END;
          a[i,j] := sum
        END
      END
    END;
    big := 0.0;
    FOR i := j to n DO BEGIN
      sum := a[i,j];
      IF (j > 1) THEN BEGIN
        FOR k := 1 to j-1 DO BEGIN
          sum := sum-a[i,k]*a[k,j]
        END;
        a[i,j] := sum
      END;
    END;
  END;
```

```

    dum := vv[i]*abs(sum);
    IF (dum > big) THEN BEGIN
        big := dum;
        imax := i
    END
END;
IF (j <> imax) THEN BEGIN
    FOR k := 1 to n DO BEGIN
        dum := a[imax,k];
        a[imax,k] := a[j,k];
        a[j,k] := dum
    END;
    d := -d;
    vv[imax] := vv[j]
END;
indx[j] := imax;
IF (j <> n) THEN BEGIN
    IF (a[j,j] = 0.0) THEN a[j,j] := tiny;
    dum := 1.0/a[j,j];
    FOR i := j+1 to n DO BEGIN
        a[i,j] := a[i,j]*dum
    END
END
END;
IF (a[n,n] = 0.0) THEN a[n,n] := tiny
END;

```

```

function determinant ( A:matricetype; n:integer ) : real;
(* Calculates the determinant of the matrice A with dimension n. *)

```

```

var   indx : glindx; (* Used by the routine ludcap *)
      d     : real;   (*          "          "          *)
      k     : integer;

```

```
begin(* determinant *)
```

```

    (* LU decomposition of A *)
    ludcap(A,n,nmax,indx,d);
    (* A now contains the matrice LU *)

```

```

    (* Calculate the determinant as the product of the diagonal elements of *)
    (* the matrice U. ( detA = detL * detU = 1 * detU ) *)
    for k := 1 to n do
        d := d*A[k,k];
    determinant := d;

```

```
end;(* determinant *)
```

```

procedure Split_K ( var K:matricetype; n:integer;
                    var a:real; var b:vector; var R:matricetype );
(* Splits the matrice K into the value a, the vector b and the matrice R. *)

```

```
var   p,q : integer;
```

```

begin(* Split K *)
    a := K[1,1];
    for q := 2 to n do
        b[q-1] := K[q,1];
    for p := 2 to n do
        for q := 2 to n do
            R[p-1,q-1] := K[p,q];
    end;(* Split_K *)

```

```
begin (* epsilon *)
```

```

    Split_K(K,h,a,b,R);
    epsilon := determinant(R,n-1);

```

```
end; (* epsilon *)
```


Zbiór PHIHOM.PAS

Zawiera funkcje korelacyjna K1(x,y).

```
function phi (x,y:coordinatetype):real;
const sigma = 1;
      alpha = 1;
var  nora_xy : real;
begin
  nora_xy := sqrt( sqr(x[1] - y[1]) + sqr(x[2] - y[2]) );
  phi := sqr(sigma) * exp(-alpha*nora_xy);
end;
```

Zbiór PHIIINHOM.PAS

Zawiera funkcje korelacyjna K2(x,y).

```
function phi (x,y:coordinatetype):real;
const sigma = 1;
      alpha = 1;
var  nora_x,
      nora_y,
      nora_xy : real;
begin
  nora_xy := sqrt( sqr(x[1] - y[1]) + sqr(x[2] - y[2]) );
  nora_x := sqrt( sqr(x[1]) + sqr(x[2]) );
  nora_y := sqrt( sqr(y[1]) + sqr(y[2]) );
  phi := nora_x * nora_y * sqr(sigma) * exp(-alpha*nora_xy);
end;
```

Zbiór PHIIINHOM.PAS

Zawiera funkcje korelacyjna K3(x,y).

```
function phi (x,y:coordinatetype):real;
const sigma = 1;
      alpha = 1;
      a =0.5;
      b =10.0;
var  nora_xy : real;
begin
  nora_xy := sqrt( a*sqr(x[1] - y[1]) + b*sqr(x[2] - y[2]) );
  phi := sqr(sigma) * exp(-alpha*nora_xy);
end;
```

10. Spis treści

| | |
|--|----|
| Streszczenie | 3 |
| 1. Wstęp | 4 |
| 2. Problem rozstawiania czujników | 8 |
| 2.1 Postawienie zadania; cel pomiarów; kryteria optymalności rozstawienia czujników | 8 |
| 2.2 Krótka charakterystyka literatury | 13 |
| 2.3 Przykłady problemów, związane z nimi kryteria optymalności, waga optymalizacji planowania eksperymentu | 15 |
| 2.4 W poszukiwaniu optymalnego kryterium | 18 |
| 3. Zadania identyfikacji parametrów funkcji regresji a dobór optymalnych punktów pomiaru pól losowych | 23 |
| 3.1 Uogólnienie klasycznego zadania planowania eksperymentu w zadaniach regresyjnych | 23 |
| 3.2 Rozmieszczanie czujników dla identyfikacji średniej i kowariancji pola losowego | 30 |
| 3.3 Zastosowania: optymalizacja doboru punktów pomiarowych dla estymacji stałych w modelu belki | 34 |
| 3.4 Przykładowe wyniki obliczeń | 43 |
| 4. Optymalne rozmieszczenie czujników w zagadnieniu stochastycznej ekstrapolacji | 47 |
| 4.1 Sformułowanie problemu | 47 |
| 4.2 Przypadek obserwacji bez szumów | 48 |
| 4.3 Przypadek obserwacji zaszumionych | 50 |
| 4.4 Przybliżona metoda znajdowania optymalnego położenia czujników | 52 |
| 4.5 Uwagi | 59 |
| 4.6 Przykład numeryczny | 60 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 4.7 | Przykładowe wyniki obliczeń | 64 |
| 5. | Optymalizacja rozmieszczenia czujników jako zadanie sterowania z niepełną informacją | 71 |
| 5.1 | Sformułowanie zagadnienia | 71 |
| 5.2 | Warunek istnienia optymalnego rozmieszczenia czujników | 74 |
| 5.3 | Przykład zastosowania | 75 |
| 5.4 | Uwagi | 78 |
| 6. | Wrażliwościowe kryterium optymalnego rozmieszczenia czujników | 79 |
| 6.1 | Wstęp | 79 |
| 6.2 | Pomiar deterministycznego parametru multiplikatywnego | 80 |
| 6.3 | Przykład zastosowania | 82 |
| 6.3 | Uwagi o optymalnym rozstawianiu czujników w warunkach losowości | 84 |
| 7. | Zakończenie | 87 |
| 8. | Literatura | 89 |
| 9. | Dodatek | 95 |
| 10. | Spis treści | 122 |