D'OCAGNE * PRINCIPES USUELS DE NOMOGRAPHIE AVEC APPLICATION A DIVERS PROBLÈMES

PRINCIPES USUELS

DE

NOMOGRAPHIE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR
RELATIFS A LA NOMOGRAPHIE.

---

1. *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques* (Gauthier-Villars; 1891).
2. *Traité de Nomographie* (Gauthier-Villars, 1899).
3. *Calcul graphique et Nomographie* (Doin; 1re édition, 1908; 2e édition, 1914).
4. *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, Tome II, Chapitre XI (Gauthier-Villars; 1918).

L'autorisation ministérielle d'imprimer la présente brochure a été délivrée à la date du 24 janvier 1920, sous le timbre du 2e Bureau (3e Section) de la Direction de l'Artillerie.

PRINCIPES USUELS

DE

NOMOGRAPHIE

AVEC APPLICATION A DIVERS PROBLÈMES

CONCERNANT

L'ARTILLERIE ET L'AVIATION

CONFÉRENCES FAITES A LA SECTION TECHNIQUE DE L'ARTILLERIE
(FÉVRIER 1919)

Par le Lieutenant-Colonel d'OCAGNE

CHEF DE LA SECTION DE NOMOGRAPHIE,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

PRINCIPES USUELS
DE
NOMOGRAPHIE
AVEC APPLICATION A DIVERS PROBLÈMES
CONCERNANT
L'ARTILLERIE ET L'AVIATION

AVANT-PROPOS.

1. La *nomographie* est la théorie générale de la représentation graphique cotée des équations à un nombre quelconque de variables ; le but d'une telle représentation est de remplacer toute espèce de calcul numérique par de simples lectures faites sur des graphiques.

Tout graphique coté ainsi disposé est dit un *abaque* ou *nomogramme* (¹). A chacune des variables y intervenant correspond un système d'éléments cotés. Lorsque ces variables sont au nombre de n, un certain mode de liaison graphique, afférent au type de nomogramme considéré, permet de déduire des éléments correspondant à $n-1$ des variables, prises pour données, celui qui correspond à la $n^{\text{ème}}$, dont la cote fait connaître la valeur de cette variable prise pour inconnue dans la question.

Les principes de la nomographie ont été esquissés pour la première fois dans notre brochure **1**.

(¹) De νόμος, loi. Un nomogramme n'est autre, en effet, que l'expression graphique d'une loi mathématique susceptible, par ailleurs, de revêtir une forme analytique.

On verra plus loin [renvoi (¹) de la page 20] que, logiquement, l'abaque ne devrait être regardé que comme un cas particulier du nomogramme. L'habitude s'est néanmoins répandue d'étendre le terme d'abaque à toute espèce de diagramme coté, depuis la publication du traité **2** où cette extension a eu lieu pour la première fois.

La théorie a reçu ensuite, sous le rapport morphologique, son complet développement dans notre traité 2, où les modes de représentation les plus usuels ont été étudiés en grand détail, et bien au delà même de ce que peuvent exiger les applications courantes.

Résumée dans ses parties essentielles et complétée sur divers points, la nouvelle doctrine figure encore dans notre ouvrage 3.

On en trouve enfin un exposé beaucoup plus condensé dans le Tome II de notre *Cours* 4.

Le critérium qui nous a guidé dans le choix des principes figurant au présent exposé, d'ailleurs très sommaire, a été le suivant : ne retenir que ceux qui, au cours de ces dernières années, ont trouvé à s'appliquer fréquemment aux diverses techniques intéressant la conduite de la guerre, plus particulièrement à l'artillerie et à l'aviation, et qui, à la suite de cette vaste épreuve, peuvent être regardés comme d'un usage vraiment courant. La plupart de ces applications ont été étudiées à la Section de nomographie (S. N.) que nous avions reçu, au cours de la guerre, la mission d'organiser et de diriger, à la *Direction des Inventions, des études et des expériences techniques*, et qui avait ensuite été transférée à la *Section technique de l'Artillerie* (S. T. A.) [1].

Avant d'aborder ce nouvel exposé, nous rappellerons la notation qui nous a uniformément servi dans ceux qui l'ont précédé, à laquelle nous nous en tiendrons encore ici. Elle consiste à représenter les diverses variables intervenant dans une équation par la même lettre z affectée d'indices 1, 2, 3, ..., correspondant à chacune d'elles, et d'attribuer les mêmes indices aux signes fonctionnels portant sur ces variables, de telle sorte que f_1 désigne une fonction de la seule variable z_1, f_2 de la seule variable z_2, f_{12} des variables z_1 et z_2, f_{123} des variables z_1, z_2 et z_3, et ainsi de suite.

---

[1] Nous sommes heureux de pouvoir ici rendre hommage au précieux concours que nous ont apporté les jeunes officiers appelés successivement à collaborer aux travaux de la S. N. : l'enseigne de vaisseau Goybet, les capitaines Michel, de l'artillerie, et Desquaires, de l'infanterie, les lieutenants d'artillerie de Branges de Bourcia, de Gaillard de Lavaldène, Noël, Aubert, Giraudet de Boudemange.

ÉCHELLES FONCTIONNELLES.

2. Échelles fonctionnelles générales. — A la base même de la nomographie se trouve la notion d'*échelle fonctionnelle;* voici ce qu'il faut entendre par là : soit une fonction f de la variable z, considérée dans un intervalle où elle est uniforme, c'est-à-dire telle qu'à chaque valeur de z corresponde une valeur bien déterminée et une seule de f; si l'on porte sur un axe donné, avec une unité de longueur donnée μ, dite le *module*, à partir d'une même origine, les valeurs de f en inscrivant à l'extrémité du segment représentatif de chacune d'elles la valeur corespondante de z, l'ensemble des points cotés ainsi obtenus constitue l'*échelle de la fonction* f.

Il va sans dire qu'on ne marque effectivement sur cette échelle que les points correspondant à une suite discontinue de valeurs de z. Ces valeurs sont généralement choisies en progression arithmétique, à partir d'une certaine valeur ronde; la raison de cette progression est dite l'*échelon;* la distance de deux points consécutifs de l'échelle porte le non d'*intervalle;* cet intervalle n'est, bien entendu, constant que si la fonction f est linéaire en z.

On choisit l'échelon de telle sorte que l'on puisse, dans chaque intervalle, pratiquer *à vue* l'interpolation correspondant au degré d'approximation que l'on veut atteindre.

Il est désirable, d'autre part, que l'intervalle ne tombe guère au-dessous du millimètre, ce qui peut conduire à changer d'échelon en certains points (¹); on dit alors qu'il y a *césure* en ces points. Par exemple, sur une échelle logarithmique construite avec un module de $0^m,25$, entre les points cotés 1 et 10, on pratique généralement ces césures aux points 2 et 4 en adoptant respectivement pour les trois tronçons ainsi déterminés les échelons de 0,01 (de 1 à 2), 0,02 (de 2 à 4) et 0,05 (de 4 à 10).

3. Échelles dérivées et transformées. — L'échelle de la fonction de fonction $f(g)$ est dite *dérivée* de celle de la fonction f.

(¹) Sur la façon de satisfaire rationnellement à une telle condition, *voir* 2, p. 3.

On la déduit très rapidement de celle-ci lorsque l'on possède une table des valeurs de la fonction g. Il suffit, en effet, de prendre sur l'échelle de f le segment correspondant à la valeur de g et de le reporter sur l'axe de la nouvelle échelle en ayant soin d'inscrire à côté de chaque point ainsi obtenu, non cette valeur de g, mais bien celle de z.

Supposons que l'on dispose d'une échelle de $f(z)$. Ayant préparé le tableau des valeurs de z^2 pour celles de z que l'on veut inscrire sur la graduation (tableau rapidement calculable par différences puisque l'on fait croître z en progression arithmétique), puis appliqué l'échelle de $f(z)$ le long de l'axe sur lequel on veut porter celle de $f(z^2)$, on prolonge par un petit trait ceux de cette échelle de $f(z)$ correspondant aux diverses valeurs de z^2 envisagées et l'on inscrit à côté de chacun d'eux la valeur de z.

Au contraire, l'échelle de $g(f)$ est dite *transformée* de celle de f; elle s'en déduit géométriquement toutes les fois que g est une fraction rationnelle en f (¹). Le cas le plus simple est celui où g est de la forme $\frac{mf+n}{pf+q}$ (avec $mq-np$ différent de zéro) auquel cas la nouvelle échelle est *projective* de celle de f. Il suffit dès lors de placer trois couples de points de même cote (z', z'', z''') des deux échelles sur des rayons divergeant d'un même point S pour que tous les couples de points de même cote z se trouvent sur des rayons issus de S. La façon de procéder la plus simple consiste à faire coïncider, d'une échelle à l'autre, des points de même cote z'; les droites joignant, d'une part, les points cotés z'', de l'autre, les points cotés z''', font alors connaître le centre de projection S. La droite joignant ce point S à tout point coté z sur l'échelle donnée fait alors connaître le point coté z de l'échelle transformée.

En particulier, l'échelle de la fonction $\frac{mz+n}{pz+q}$, dite *homographique*, s'obtient ainsi par projection d'une échelle métrique; il suffit dès lors d'en avoir déterminé directement trois points.

4. Échelles usuelles. — Les considérations qui précèdent permettent de ramener la construction de la plupart des échelles qui

(¹) 3., *Remarque* du n° 67 (2ᵉ édition, p. 253).

se rencontrent dans les applications à l'emploi de quelques échelles fondamentales comme celles des fonctions z (*échelle métrique*), $\log z$ (*échelle logarithmique*), $\sin z$ (*échelle des sinus*), $\operatorname{tang} z$ (*échelle des tangentes*). Ces échelles dont, par dérivation ou transformation, on déduit celles qui se rencontrent dans la plupart des nomogrammes, peuvent recevoir le nom d'*étalons de graduation* (1).

La construction de ces diverses échelles, comme de la plupart de celles qui se rencontrent en dehors d'elles, dans la pratique, n'est que la traduction graphique immédiate des tables numériques que l'on possède pour les fonctions correspondantes, attendu que, dans ces tables, l'argument croît toujours en progression arithmétique.

Mais il arrive aussi que l'on ait à construire l'échelle de la fonction inverse de celle dont on a la table numérique; tel serait le cas de l'échelle exponentielle construite au moyen d'une table de logarithmes. Dans ce cas, ce sont les points marqués sur l'axe qui s'espacent régulièrement et leurs cotes qui diffèrent entre elles d'échelons variables (2). On peut alors, en pratiquant des interpolations dans les intervalles ainsi obtenus, y déterminer les points de cote ronde se succédant suivant des échelons uniformes et ramener ainsi l'échelle à la forme que lui aurait donnée l'emploi de la table de la fonction inverse de celle dont on s'est servi.

Pour effectuer les interpolations nécessaires, on peut, si les intervalles d'où l'on part sont assez petits, procéder par parties proportionnelles, sinon avoir recours à la courbe représentative de la fonction considérée, réalisée sous forme d'un trait continu passant par les points correspondant aux valeurs qui figurent dans la table numérique dont on dispose.

ABAQUES CARTÉSIENS.

5. **Abaque d'équation à deux variables.** — Si l'équation à deux

---

(1) L'étalon métrique est fourni par le double-décimètre du dessinateur. Des étalons logarithmiques gravés sur règles de buis sont en vente à la Maison Tavernier-Gravet, à Paris.

(2) Une telle échelle est dite *isograde* (2, p. 16).

variables $f_{12} = 0$ est mise sous la forme $f_1 = f_2$, on peut la représenter en portant de part et d'autre d'un même axe, à partir de la

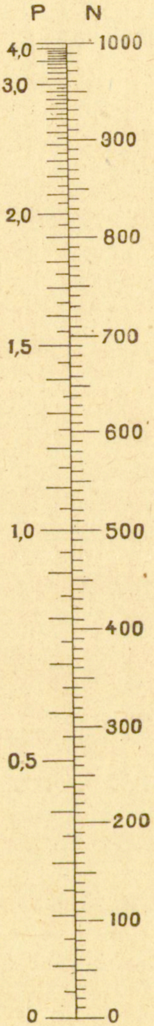


Fig. 1.

même origine, et *avec le même module*, les échelles des fonctions f_1 et f_2. C'est ce qu'on appelle une représentation par *échelles accolées*.

La figure 1 représente ainsi l'équation

$$N = 1000\,\Theta(0,4769\,\rho),$$

où

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2}\,dx,$$

qui fait connaître, sur 1000 écarts, le nombre N de ceux dont la valeur absolue est inférieure au nombre dont le rapport à l'écart probable est égal à ρ.

On peut aussi avoir recours à la représentation cartésienne de l'équation obtenue en prenant pour coordonnées courantes

$$x = \mu_1 z_1, \qquad y = \mu_2 z_2,$$

μ_1 et μ_2 étant des modules généralement différents en pratique

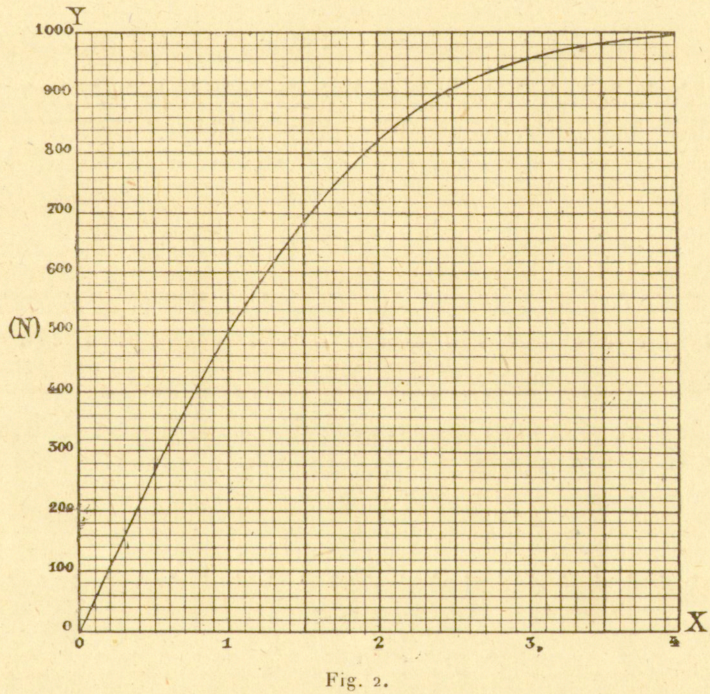


Fig. 2.

(alors que, pour les applications théoriques de la géométrie analytique, ces modules sont toujours supposés égaux).

La figure 2 montre la représentation de la même équation que ci-dessus, lorsqu'on prend

$$x = \mu_1 \rho, \qquad y = \mu_2 N,$$

avec

$$\mu_1 = 2^{cm}, \qquad \mu_2 = 0^{cm},008.$$

Pour que l'on puisse effectuer les interpolations à vue que comporte l'emploi du tableau, il est indispensable d'y faire figurer le quadrillage constitué par les perpendiculaires aux axes, menées par les points de division de chacun d'eux. Il suffit, en effet, avec ce dispositif, de jeter les yeux sur le tableau pour lire immédiatement, par exemple, qu'à $\rho = 1,5$ correspond la valeur $N = 695$.

Ce quadrillage donne au tableau l'aspect d'un damier (en grec : ἄβαξ); c'est pourquoi ce tableau peut être dit un *abaque;* nous ajoutons *cartésien* parce qu'il dérive de l'emploi des coordonnées cartésiennes.

6. **Abaque d'équation à trois variables.** — Si l'on veut représenter l'équation à trois variables la plus générale $f_{123} = 0$, il suffit, donnant successivement à la variable z_3 diverses valeurs, de construire, sur un même quadrillage, les courbes représentatives des équations en z_1 et z_2, correspondant à chacune des valeurs de z_3, et d'inscrire à côté de chacune de ces courbes cette valeur correspondante de z_3. Dès lors, si un système de valeurs de z_1, z_2, z_3 satisfait à l'équation donnée, la perpendiculaire à Ox cotée z_1 et la perpendiculaire à Oy cotée z_2 se rencontrent sur la courbe cotée z_3, et cette très simple relation graphique entre les trois lignes, savoir leur entrecroisement en un même point, permet, lorsqu'on se donne les valeurs de deux quelconques des trois variables, de lire immédiatement sur l'abaque la valeur de la troisième.

Pour la construction de l'abaque, écrivant l'équation donnée sous la forme plus explicite

$$f_{123}(z_1, z_2, z_3) = 0,$$

on pose

$$x = \mu_1 z_1, \qquad y = \mu_2 z_2,$$

μ_1 et μ_2 étant des modules convenablement choisis. Il vient dès lors, pour les courbes cotées (z_3), l'équation

$$f_{123}\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}, z_3\right) = 0.$$

On peut construire ces courbes par les procédés connus de la géométrie analytique; mais, dans bien des cas, on les obtiendra point par point, toutes ensemble, en construisant individuellement les échelles qu'elles déterminent sur chacune des droites du quadrillage perpendiculaires à l'un des axes. Donnons, par exemple, à z_1 une certaine valeur fixe; alors, sur la perpendiculaire à Ox correspondante, les courbes (z_3) détermineront l'échelle que définit l'équation

$$f_{123}\left(z_1, \frac{y}{\mu_2}, z_3\right) = 0,$$

où y doit être regardé comme fonction de z_3 seul variable. On réunit ensuite par un trait continu tous les points répondant à une même cote z_3 sur les échelles à supports perpendiculaires à Ox ainsi construites.

Si, dans cette dernière relation, y apparaît comme une fonction linéaire de z_3, les courbes (z_3) sont dites *métriquement espacées* dans le sens de Oy. Il suffit d'en construire deux, correspondant à des valeurs simples de z_3, comme 0 et 1, pour que toutes les autres s'en déduisent immédiatement.

7. **Exemple : Écarts probables du tir sur terrain incliné.** — Prenons comme exemple d'abaque cartésien à trois variables celui qui fait connaître l'écart probable du tir sur un terrain incliné, pour un canon, un projectile et une charge déterminés.

Si e_i représente l'écart probable correspondant à l'inclinaison i, ω l'angle de chute (angle de la trajectoire et de la ligne de site), i l'inclinaison de la ligne de site sur le terrain, l'équation à représenter est

$$e_i = \frac{e_0 \sin \omega}{\sin(\omega - i)},$$

où e_0 et ω sont des fonctions de la portée d, données par les tables.

Si l'on pose

$$x = \mu_1 i, \qquad y = \mu_2 d,$$

on obtient l'abaque cartésien de cette équation en construisant, sur la perpendiculaire à Ox correspondant à chaque valeur de i,

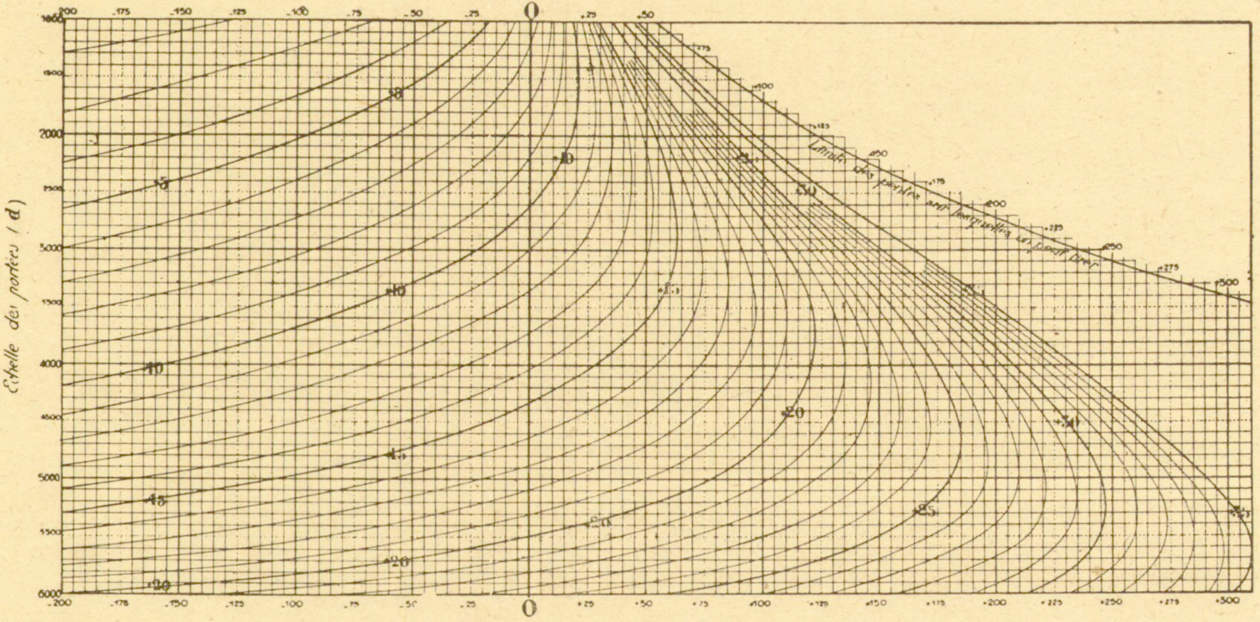


Fig. 3.

l'échelle de la fonction de d définie par l'équation elle-même, où i prend cette valeur constante.

En se servant des tables, on calcule les valeurs de e_i qui répondent aux diverses valeurs de d servant à coter, dans le quadrillage de l'abaque, les perpendiculaires à Oy, ou tout au moins à un nombre suffisant d'entre elles. Puis, conformément à ce qui a déjà été dit à la fin du n° 4, on interpole, entre les points ainsi obtenus sur chaque perpendiculaire à Ox, pour avoir les points de cote ronde situés sur cette perpendiculaire.

En unissant ensuite par un trait continu les points répondant à une même cote ronde, on a les courbes cotées (d'unité en unité) au moyen des valeurs de l'écart probable.

La figure 3 représente (¹) ainsi l'écart probable e_i (exprimé en mètres) en fonction de l'inclinaison i (en millièmes) et de la portée d (en mètres) pour le canon de 75, modèle 1897, avec l'obus explosif modèle 1900, à fusée I (courte) du poids de $5^{kg},315$ et la charge de poudre 250 BC, avec laquelle la vitesse initiale est de 344 m : sec.

Cet exemple fournit par ailleurs l'occasion d'une remarque intéressante touchant l'utilisation des abaques en vue de résoudre certaines questions de maximum ou minimum. On observe, en effet, que, pour i positif, chaque droite cotée (i) coupe chaque courbe cotée (e_i) en deux points qui, réels pour les valeurs de e_i supérieures à une certaine limite, deviennent imaginaires au-dessous de cette limite; il existe donc, pour chaque valeur de i, un minimum de e_i. Par suite, on a avantage, pour un terrain d'inclinaison i, à effectuer le tir à la distance d qui correspond à ce minimum de e_i; cette valeur de d est la cote de la perpendiculaire à Oy, passant par le point où la perpendiculaire à Ox correspondant à la valeur donnée de i, touche la courbe (e_i) qui lui est tangente. La cote de cette courbe (e_i) fait d'ailleurs connaître la valeur correspondante de l'écart probable. On voit, par exemple,

---

(¹) Cette figure provient de la réduction d'un des abaques ainsi construits par le lieutenant Jean Aubert, et qui font partie des tables graphiques de tir du 75. Sur ces abaques, ainsi que sur divers autres décrits plus loin, le sens positif de Oy a été pris de haut en bas pour imiter la disposition des tables numériques ordinaires.

sur la figure 3, que pour $i = 177$, le minimum de e_i, égal à 25, est atteint avec une portée de 4700^m.

On trouvera un autre exemple d'abaque cartésien intéressant la balistique au nº 26.

8. **Anamorphose.** — Un abaque cartésien n'est autre, en somme, que la traduction graphique d'une table à double entrée faisant connaître z_3, en fonction de z_1 et z_2 pris pour arguments, et l'on peut envisager sa construction à ce point de vue. Si, en effet, on suppose inscrite, à côté du point de rencontre des perpendiculaires aux axes, cotées z_1 et z_2, la valeur de z_3 correspondante, on peut dire que chaque courbe cotée (z_3) est celle qui unit tous les points du plan pour lesquels z_3 a la valeur considérée.

A priori, bien entendu, on fera correspondre à z_1 et z_2, respectivement le long de Ox et de Oy, des échelles métriques; mais cela n'a rien de nécessaire; on pourra tout aussi bien choisir ces échelles de manière quelconque; les courbes (z_3) ne cesseront pas pour cela d'unir les points de même cote z_3, obtenus comme ci-dessus.

On pourra se donner *graphiquement* les échelles (z_1) et (z_2) de façon à satisfaire à certaines conditions relatives à la disposition du tableau, par exemple, pour dégager les unes des autres les courbes (z_3) dans certaines parties où l'adoption d'échelles métriques pour z_1 et z_2 les ferait apparaître comme trop resserrées. On effectue alors ce qu'on peut appeler une *anamorphose graphique* (1).

Des exemples d'abaques présentant une telle anamorphose graphique sont fournis par la partie de droite de chaque nomogramme des tables graphiques de tir faisant connaître la dérive totale (somme algébrique de la dérive tabulaire et de celle due au vent) en fonction de la composante transversale de la vitesse du vent et de la portée.

Mais l'anamorphose peut prendre une forme mathématique lorsque le choix à faire des échelles (z_1) et (z_2) a pour but de réduire, si possible, les lignes (z_3) à certaines formes simplifiées. Si, par exemple, l'équation donnée est de la forme

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0,$$

(1) Pour plus de détail sur ce point, *voir* 2, p. 85.

il est clair qu'en définissant les échelles (z_1) et (z_2) au moyen des formules

$$x = \mu_1 f_1, \qquad y = \mu_2 f_2,$$

on a, pour les lignes (z_3), l'équation

$$\mu_2 g_3 x + \mu_1 h_3 y + \mu_1 \mu_2 f_3 = 0,$$

qui définit des droites (tangentes à la courbe dont l'équation proviendrait de l'élimination de z_3 entre la dernière écrite et sa dérivée prise par rapport à z_3).

Cet artifice s'applique en particulier aux équations de la forme

$$f_1 f_2 = f_3,$$

transformée en

$$\log f_1 + \log f_2 - \log f_3 = 0.$$

C'est d'ailleurs à ce propos que l'artifice s'est présenté pour la première fois à Lalanne, qui lui a donné le nom d'*anamorphose*.

On peut, partant de là, atteindre à un plus haut degré de généralisation en envisageant des nomogrammes constitués par trois systèmes de droites quelconques (¹), ou même de cercles quelconques (²). Mais, restant ici sur le terrain de la pratique courante, nous nous bornerons à ce qui précède, n'entrant même pas, pour ce cas réduit, dans de plus grands détails, les équations de la forme ci-dessus étant, comme on le verra plus loin (nº **12**), susceptibles d'un mode de représentation beaucoup plus avantageux.

9. Échelles binaires. — Lorsque, d'après la nature de la question traitée, l'équation $f_{123} = 0$ fait apparaître plutôt z_3 comme fonction de z_1 et z_2, c'est à ces deux dernières variables que l'on fait généralement correspondre les échelles portées le long de Ox et de Oy. On peut cependant tout aussi bien regarder l'abaque comme définissant z_1, par exemple en fonction de z_2 et z_3, et, par suite, les segments pris sur Ox comme représentatifs des valeurs d'une certaine fonction φ_{23}, le même point de Ox correspondant à tous les couples de valeurs de z_2 et z_3 qui donnent à cette fonction une même valeur. Pour cette raison, les points de Ox sont dits alors

(¹) **2**, p. 100; **3**, p. 190; **4**, p. 280.
(²) **2**, p. 113; **3**, p. 193; **4**, p. 281.

des *points* (z_2, z_3) *condensés*, et l'abaque, accolé à Ox, qui définit ces points, est dit lui-même une *échelle binaire*.

Si, ayant construit l'abaque cartésien d'une équation

$$\varphi(t, z_1, z_2) = 0$$

en portant les échelles (t) sur Ox et (z_1) sur Oy, on accole à Ox une échelle binaire définissant t, en fonction de z_3 et z_4, par une équation telle que

$$\psi(t, z_3, z_4) = 0,$$

on voit que l'on obtient ainsi une représentation de l'équation à quatre variables résultant de l'élimination de t entre les deux précédentes. Si, par exemple, de la première on peut tirer $t = \varphi_{12}$ et de la seconde $t = \psi_{34}$, on voit que cette équation prend la forme

$$\varphi_{12} = \psi_{34}.$$

Par des accolements successifs d'échelles binaires, on arrivera ainsi à représenter des équations à un nombre quelconque de variables, mais offrant ce caractère analytique très particulier d'être réductibles, moyennant l'introduction de variables auxiliaires (comme t dans l'exemple précédent), *à une suite d'équations ne contenant chacune que trois variables* [1]. Or, il s'en faut que toutes les équations à plus de trois variables rencontrées dans la pratique rentrent dans cette catégorie; de là l'une des raisons d'envisager des modes de représentation, tel que celui dont il va être maintenant question, fondés sur d'autres relations graphiques que le simple entrecroisement.

NOMOGRAMMES A POINTS ALIGNÉS.

10. Notions sur les coordonnées parallèles. — Étant donnés deux axes parallèles Au et Bv, pourvus d'un sens positif, sur lesquels A et B sont les origines (*fig.* 4), si une droite quelconque coupe ces axes respectivement en M et en N, les segments $AM = u$ et

---

[1] Pour plus de détail sur ce point, *voir* : 3, p. 206 (théorie des *systèmes ramifiés*).

$BN = v$, pris avec leur signe, constituent les *coordonnées parallèles* de la droite MN.

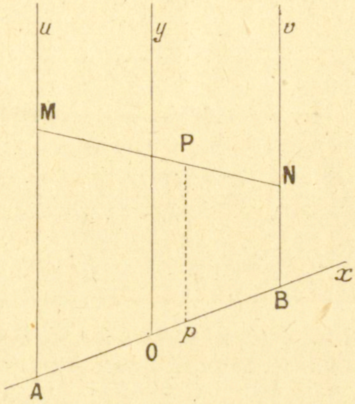


Fig. 4.

Les coordonnées u et v des tangentes à une courbe quelconque satisfont à une relation telle que

$$F(u, v) = 0,$$

qui, dans ce système spécial de coordonnées, constitue *l'équation tangentielle* de cette courbe.

Lorsque cette courbe se réduit à un point (qui, au point de vue tangentiel, peut être regardé comme une courbe de classe 1) cette équation est du premier degré. On peut le voir aisément comme suit :

Soit M_0N_0 une droite fixe quelconque, de coordonnées u_0, v_0, passant par le point P. Si, autour de ce point, on fait pivoter la droite variable MN, de coordonnées u, v, on voit que

$$\frac{M_0M}{N_0N} = \frac{PM_0}{PN_0},$$

ou, en appelant $-\frac{b}{a}$ la valeur constante du second membre (ce qui revient à regarder le point P comme barycentre des points M et N affectés respectivement des poids a et b),

$$\frac{u - u_0}{v - v_0} = -\frac{b}{a},$$

c'est-à-dire

$$au + bv = au_0 + bv_0,$$

ou encore, en posant $au_0 + bv_0 = -c$,

(1) $$au + bv + c = 0,$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

Remarquons d'ailleurs que les points répondant à une même valeur du rapport $\frac{b}{a}$ sont distribués sur une parallèle aux axes, située entre ces axes ou à l'extérieur suivant que ce rapport est positif ou négatif.

Le fait que le point est représenté, en coordonnées u et v, par une équation linéaire entraîne la conséquence que toute courbe algébrique de la $n^{\text{ième}}$ classe (à laquelle de tout point du plan on peut mener n tangentes, réelles ou imaginaires) a, en u et v, une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, et, en particulier, que toute conique a une équation du second degré en u et v.

Rapportons le point P aux axes cartésiens ainsi définis : l'origine O au milieu de AB; Ox confondu avec AB, avec sens positif de O vers B; Oy parallèle à Au et Bv, et de même sens. Posons, en outre, $OB = \delta$. Les points M et N ayant alors pour coordonnées l'un $-\delta$ et u, l'autre δ et v, et le point P étant, comme on vient de le voir, leur barycentre quand on les affecte des poids a et b, on a

(2) $$x = \delta\,\frac{b-a}{a+b}, \qquad y = \frac{au+bv}{a+b} = \frac{-c}{a+b}.$$

Si les origines A et B se trouvent rejetées en dehors des limites du dessin, on peut prendre pour axe des x la droite joignant les points A_0 et B_0 déterminés sur Au et Bv par $AA_0 = u_0$ et $BB_0 = v_0$, ce qui revient à changer, dans les équations précédentes, u et v en $u + u_0$ et $v + v_0$. Dans ces conditions, les coordonnées du point P deviennent, si l'on appelle δ_0 la demi-distance A_0B_0,

(2 *bis*) $$x = \delta_0\,\frac{b-a}{a+b}, \qquad y = \frac{-(au_0 + bv_0 + c)}{a+b}.$$

Telles sont les seules formules qu'il soit nécessaire de connaître pour comprendre la théorie des points alignés, les formules (2) ou

(2 *bis*) permettant de ramener toutes les constructions qu'elle comporte au seul emploi des coordonnées cartésiennes.

Toutefois, on pourrait se dispenser de ce retour aux coordonnées cartésiennes si l'on possédait les formules générales relatives au système de géométrie analytique tangentielle fondé sur l'emploi des coordonnées parallèles ([1]).

Sans insister sur ce point, nous ferons remarquer que la corrélation existant entre le système des coordonnées parallèles, dans le domaine tangentiel (où les courbes sont considérées comme des enveloppes de droites) et celui des coordonnées cartésiennes dans le domaine ponctuel (où elles apparaissent comme des lieux de points), permet, lorsqu'il s'agit d'éléments projectifs, de transformer immédiatement dans le premier système certains résultats établis dans les éléments classiques pour le second.

Par exemple, de même que l'équation cartésienne de la tangente au point (x_0, y_0) de la courbe décrite par le point (x, y) s'écrit

$$(y - y_0) = \frac{dy_0}{dx_0}(x - x_0),$$

l'équation en coordonnées parallèles du point de contact de la droite (u_0, v_0) avec l'enveloppe de la droite (u, v), sera

$$(v - v_0) = \frac{dv_0}{du_0}(u - u_0).$$

Et encore, alors que l'enveloppe de la droite

$$xf(t) + yg(t) + h(t) = 0,$$

où t est un paramètre variable, s'obtient par l'élimination de t entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à t, de même le lieu du point

$$uf(t) + vg(t) + h(t) = 0,$$

variable avec t, aura, en u et v, une équation qui résultera de l'élimination de t entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à t.

On pourra, au reste, tout aussi bien, former l'équation ponc-

([1]) L'exposé de ce système se trouve dans notre Mémoire intitulé : *Coordonnées parallèles et axiales*, paru en 1884 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, puis publié sous forme de brochure séparée, avec divers compléments, chez Gauthier-Villars, en 1885.

tuelle de ce lieu en écrivant, d'après (2), les expressions des coordonnées cartésiennes du point variable, savoir :

$$x = \delta \frac{g(t) - f(t)}{f(t) + g(t)}, \quad y = \frac{-h(t)}{f(t) + g(t)},$$

et éliminant t entre ces deux expressions.

Il sera même souvent plus commode de regarder ce lieu comme défini, sous forme de ce que, dans les Cours de mathématiques spéciales, on appelle une *courbe en* t, par l'ensemble de ces deux équations.

11. Échelles algébriques. — Si, dans l'équation ci-dessus du point dépendant du paramètre t, les fonctions f, g, h sont des polynomes entiers en t, et si chaque point ainsi défini est supposé coté au moyen de la valeur correspondante de t, l'ensemble de ces points constitue une *échelle algébrique* dont le *support*, lieu de ces points, est déterminé comme on vient de le voir.

Il est très remarquable qu'une telle échelle puisse, dans tous les cas, être construite point par point au moyen de projections successives à partir de l'échelle rectiligne représentant les variations du paramètre t lui-même, échelle métrique, par conséquent, si t est pris pour variable indépendante, fonctionnelle si t n'intervient lui-même qu'en tant que fonction d'une certaine variable regardée comme indépendante.

Les deux cas naturellement de beaucoup les plus fréquents sont ceux où t entre soit au premier, soit au second degré dans l'équation du point variable.

Dans le premier cas, U et V représentant deux fonctions linéaires en u et v, l'équation de ce point peut s'écrire

$$\mathrm{U} + t\mathrm{V} = 0.$$

Elle représente une échelle évidemment homographique portée sur la droite qui unit les points $\mathrm{U} = 0$ et $\mathrm{V} = 0$, cotés respectivement 0 et ∞. Il suffit donc, d'après ce qui a été vu au n° 3 (dernier alinéa), de déterminer directement un troisième point de cette échelle, par exemple $\mathrm{U} + \mathrm{V} = 0$, correspondant à la cote 1, pour pouvoir construire toute l'échelle (t) comme projective d'une échelle métrique.

Ces trois points cotés o, 1 et ∞ sont évidemment ceux qui se présentent tout d'abord à l'esprit; mais il est clair que l'on peut user de même de trois points de cotes quelconques.

Dans le cas du second degré, l'équation peut s'écrire

$$U + tV + t^2 W = 0,$$

U, V et W étant encore des fonctions linéaires en u et v.

Le support de l'échelle (t) est alors, d'après ce qu'on a vu à la fin du numéro précédent, la conique dont l'équation en u et v est

$$V^2 - 4UW = 0,$$

conique qui passe par les points $U = 0$ (cote o) et $W = 0$ (cote ∞), les tangentes en ces points se coupant d'ailleurs au point $V = 0$.

Si l'on considère les rayons qui projettent l'échelle (t) à partir d'un quelconque de ces points, coté t_0, dont l'équation est, par conséquent,

$$U + t_0 V + t_0^2 W = 0,$$

les u et v des rayons projetants, satisfaisant aux deux équations précédentes, satisfont aussi à celle que l'on obtient en les retranchant, c'est-à-dire à

$$V + (t + t_0) W = 0,$$

qui définit une échelle projective de celle de t. Si donc on tire les rayons joignant le point t_0 aux points t_1, t_2, t_3 de l'échelle (t), il suffit de couper ces rayons par l'échelle rectiligne de t de façon que les points cotés t_1, t_2, t_3 de cette échelle tombent respectivement sur les rayons précédents pour que les rayons unissant le point t_0 aux divers points de l'échelle rectiligne passent par les points de même cote de l'échelle (t) à construire.

Bien entendu, ici encore l'échelle rectiligne de t est métrique si t est pris comme variable indépendante.

Remarquons aussi que l'un des points t_1, t_2 ou t_3 peut être amené à coïncider avec le point t_0 pris pour centre de projection; le rayon correspondant se confond alors avec la tangente en ce point t_0 à la conique support de l'échelle (t).

12. Nomogrammes à points alignés. — Si, dans les équations qui définissent, en coordonnées cartésiennes, une figure où n'entrent que des droites, on remplace x et y par u et v, on définit une nouvelle figure uniquement composée de points et telle qu'à trois droites concourantes de la première figure correspondent trois points alignés sur la seconde. De là, par simple report de coordonnées, le moyen de transformer un nomogramme à droites entre-croisées en un nomogramme à points alignés. Mais on peut aborder directement la théorie d'un tel nomogramme. Reprenons une équation de la forme rencontrée au n° 8, savoir :

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0. \tag{1}$$

Portons sur les axes parallèles Au et Bv les échelles définies par

$$u = \mu_1 f_1 \qquad [\text{échelle } (z_1)] \tag{2}$$

et

$$v = \mu_2 f_2 \qquad [\text{échelle } (z_2)]. \tag{3}$$

Si dans l'équation (1) nous remplaçons f_1 et f_2 par leurs valeurs tirées de (2) et (3), ce qui nous donne

$$\mu_2 g_3 u + \mu_1 h_3 v + \mu_1 \mu_2 f_3 = 0, \tag{4}$$

nous définissons, comme il vient d'être dit, une certaine échelle (z_3). Or, la condition pour que trois points pris respectivement dans les échelles (z_1), (z_2) et (z_3) soient en ligne droite est que les équations (2), (3) et (4) aient une solution commune en u et v. Cette condition, résultat de l'élimination de u et v entre (2), (3) et (4), n'est autre que (1). Donc les *valeurs de z_1, z_2 et z_3 cotant trois points alignés, pris sur les échelles correspondantes, satisfont à l'équation* (1). Cet alignement de points fournit ainsi un mode de représentation graphique de l'équation (1) corrélatif de celui qui a été indiqué au n° 8. Pour cette raison, l'ensemble des échelles (z_1), (z_2) et (z_3) ci-dessus définies constitue ce qu'on appelle un *nomogramme à points alignés* [1] de l'équation (1).

---

[1] Dans nos premières publications sur la nomographie, y compris notre traité 2, nous avons fait usage du mot *abaque* pour désigner de tels graphiques cotés et, depuis lors, l'habitude en a persisté assez généralement. Vu l'explication fournie plus haut (n° 5) au sujet de l'étymologie du terme d'abaque, il nous a, par la suite, semblé plus rationnel d'adopter celui de nomogramme pour toute espèce de représentation graphique cotée en réservant l'appellation d'abaque à celles de ces représentations où s'accuse la disposition en damier.

La droite, dite *index* de la lecture, avec laquelle on prend les alignements sur le nomogramme, peut être constituée soit au moyen d'un trait fin marqué sur une règle transparente, soit au moyen d'un fil tendu.

On voit immédiatement qu'il ne s'agit ici que d'un cas particulier et que la méthode des points alignés s'étend en réalité à des cas beaucoup plus généraux pour lesquels le nomogramme comporte trois échelles curvilignes quelconques; mais c'est le cas particulier ici envisagé qui se présente, et de beaucoup, le plus fréquemment dans les applications; vu l'objet que nous avons ici en vue, nous nous en tiendrons là, renvoyant pour le surplus à nos précédentes publications ([1]).

Remarquons que si g_3 et h_3 se réduisent à des constantes, l'échelle (z_3) a pour support une parallèle aux axes que l'on peut d'ailleurs toujours prendre entre les axes. Il suffit, en effet, si par hasard, f_1 et f_2 sont de signes contraires, de porter sur Bv l'échelle de $-f_2$ au lieu de celle de f_2.

Si g_3 est nulle, l'échelle (z_3) est portée sur AB. On peut, dans ce cas, ramener le nomogramme à la disposition précédente. Si, en effet, on pose $\frac{h_3}{g_3} = -f_3$, l'équation, qui devient

$$f_1 - f_2 f_3 = 0,$$

peut s'écrire

$$\log f_1 = \log f_2 + \log f_3,$$

représentable au moyen de trois échelles rectilignes parallèles.

Le premier avantage que les nomogrammes à alignement présentent sur ceux à entrecroisement, et notamment sur les abaques cartésiens, tient à une bien plus grande netteté de lecture comportant une plus grande précision pour les interpolations à vue. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur les figures 5 et 5 *bis* ci-après qui représentent la même formule entre les mêmes limites, l'une par entrecroisement (la graduation portée le long

([1]) Esquissée dans **1** (Chap. IV, où la méthode est dite des *points isoplèthes* pour une raison exposée à l'endroit cité), cette théorie générale a reçu un plus large développement dans **2** (Chap. III); sous forme plus condensée, en même temps que complétée sur certains points de détail, elle se retrouve dans **3** (Chap. IV). Les principes en sont également donnés dans **4** (Chap. XI, *c*).

de Oy étant commune aux perpendiculaires à cet axe et aux droites qui sont tracées à travers le quadrillage), l'autre par alignement. La seconde a d'ailleurs été simplement obtenue par report, sous la forme u et v, des coordonnées x et y relevées sur la première, ainsi qu'il a été dit en tête de ce numéro.

Mais cet avantage, seulement relatif à une plus grande commo-

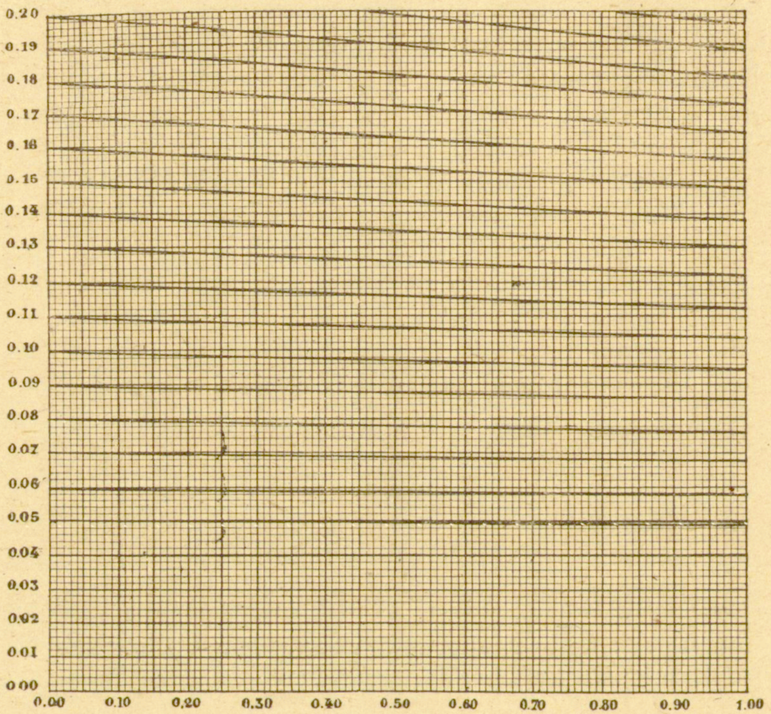


Fig. 5.

dité, n'est pas celui qui confère à la méthode des points alignés sa plus grande importance, et qui tient à ce que cette méthode s'applique très aisément, comme on le verra plus loin (n° 15), à des équations à quatre variables, d'un type fréquent dans la pratique, auxquelles ne se peut appliquer la représentation par entrecroisement.

Il est bien clair que, si une équation à n variables ($n > 3$) est réductible, grâce à l'introduction de variables auxiliaires, à une suite d'équations individuellement représentables par alignement, en accolant les nomogrammes partiels par leurs axes correspondant à une même variable auxiliaire, on aura la représentation, par *alignements multiples*, de l'équation à *n* variables proposée. Les

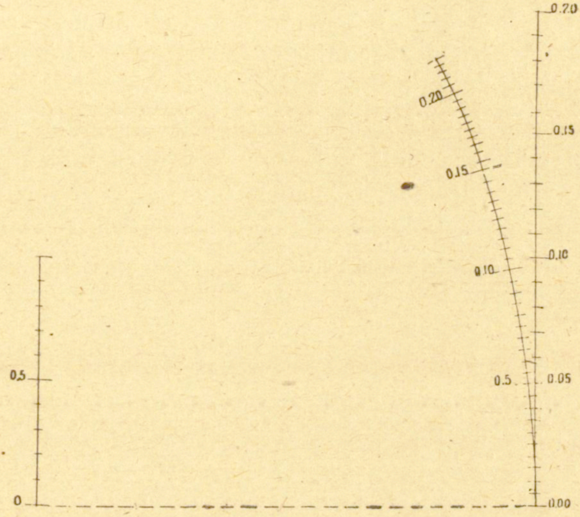


Fig. 5 *bis*.

échelles répondant aux variables auxiliaires n'ont d'ailleurs évidemment pas besoin d'être marquées; seuls, leurs supports ont à intervenir, les points de ces supports servant seulement de *pivots* pour le passage d'un des alignements partiels au suivant. Pour cette raison, ces supports sont dits les *charnières* du nomogramme.

13. **Construction des échelles d'un nomogramme.** — Pour les nomogrammes du type décrit au numéro précédent, aucune difficulté en ce qui concerne les échelles (z_1) et (z_2) portées sur Au et Bv au moyen d'étalons de graduation, soit directement (si l'on possède ceux relatifs aux fonctions f_1 et f_2 elles-mêmes), soit par dérivation (s'il s'agit, par exemple, de $\log f_1$ et de $\log f_2$), soit par transformation (si notamment on a affaire à des transformées projectives de f_1 et f_2).

Remarquons toutefois que ces échelles n'ont à être construites qu'entre certaines limites dépendant de la nature de la question traitée et avec des modules tels que l'interpolation à vue permette d'atteindre, sur ces échelles, au degré d'approximation que l'on a en vue.

Il arrivera souvent qu'avec les limites inférieures admises, les origines des axes seront rejetées en dehors des limites du tableau; nous devrons donc tenir compte de cette circonstance dans le procédé suivi pour la construction de l'échelle (z_3), dont nous allons maintenant nous occuper.

Remarquons tout d'abord que l'échelle (z_3) peut être construite sans qu'il soit besoin de former son équation lorsque, pour chacune des valeurs de z_3 à faire figurer sur le nomogramme, on peut se procurer deux couples correspondants de valeurs de z_1 et z_2; les positions de l'index correspondant à ces couples de valeurs lues sur les échelles (z_1) et (z_2) déjà marquées, se coupent au point (z_3) cherché. Nous disons de cette construction qu'elle a lieu *par deux index*.

Se plaçant à un point de vue en quelque sorte inverse, on peut rendre la construction de l'échelle (z_3) tout à fait indépendante des échelles (z_1) et (z_2). Reprenons l'équation (4) du numéro précédent qui définit cette échelle (z_3), savoir

$$\mu_2 g_3 u + \mu_1 h_3 v + \mu_1 \mu_2 f_3 = 0. \tag{1}$$

En vertu des formules (2) du n° 10, les coordonnées cartésiennes du point (z_3), rapporté aux axes Ox et Oy que nous avons liés aux axes parallèles Au et Bv (*fig.* 4), sont données par

$$x = \delta \frac{\mu_1 h_3 - \mu_2 g_3}{\mu_1 h_3 + \mu_2 g_3}, \qquad y = -\frac{\mu_1 \mu_2 f_3}{\mu_1 h_3 + \mu_2 g_3}. \tag{2}$$

Ces formules fixent la position du point (z_3) et permettent, par l'élimination de z_3, d'obtenir l'équation ponctuelle du support de l'échelle correspondante.

On a ainsi la construction *par les coordonnées cartésiennes*.

On peut encore procéder suivant un mode qui participe à la fois des deux précédents. En effet, au moyen d'un seul couple de valeurs de z_1 et z_2 correspondant à une valeur de z_3 donnée, on a une position de l'index sur laquelle se trouve le point (z_3) cherché. Mais, de plus, si l'on prend provisoirement cet index pour axe Ox, l'abscisse du point (z_3) est encore donnée, sur cet axe, par la première formule (2 *bis*) (où δ_0 représente toujours le demi-segment de ce nouvel axe, compris entre Au et Bv). Cette nouvelle construction peut être caractérisée comme effectuée *par un index*.

Enfin, lorsque l'échelle (z_3) est algébrique et, plus particulièrement, lorsqu'elle est du premier ou du second degré, on peut la construire *par projection*, ainsi qu'il a été expliqué au n° **11**.

Mais la méthode des projections peut encore s'appliquer à partir de centres autres que ceux auxquels conduit la théorie des échelles algébriques. On peut notamment envisager les projections sur les axes Bv et Au, faites à partir des origines A et B. Leurs équations s'obtiennent par annulation soit de u, soit de v dans (1).

Remarquons d'ailleurs que, si, pour $z_1 = 0$, l'équation représentée donne $z_2 = z_3$, la projection de l'échelle (z_3) faite, à partir de A, sur Bv, se confond avec l'échelle (z_2). De même sur Au, si, pour $z_2 = 0$, on a $z_1 = z_3$. En pareil cas, au lieu de projeter sur les axes eux-mêmes, on peut le faire sur des droites qui leur soient parallèles, sur lesquelles les échelles seront les mêmes, mais avec des modules réduits dans tel rapport que l'on veut.

En pratique, on combinera ces divers procédés en vue de la plus grande rapidité et commodité. Par exemple, ayant obtenu, par l'un ou l'autre des trois premiers procédés, quelques points principaux de l'échelle, on tracera le support au moyen d'un trait continu passant par ces points, comme on le fait sur les épures de géométrie descriptive lorsqu'on y construit, à l'aide d'un nombre suffisant de points, la projection de la courbe d'intersection de deux surfaces. On marque ensuite les points intermédiaires sur ce support par projection, soit en appliquant ce qui a été dit pour les échelles du premier et du second degré, soit en ayant recours à des positions de l'index d'une détermination particulièrement facile, par exemple lorsque, pour une valeur particulière de z_1, on a, par un calcul très simple, la valeur de z_2 correspondant à chaque valeur de z_3.

D'ailleurs, une construction par projection n'ayant de valeur qu'autant que les projetantes coupent le support préalablement tracé sous un angle assez grand, on pourra être amené à changer de centre de projection pour construire les diverses parties d'une même échelle.

La construction par projection est particulièrement commode lorsque le support de l'échelle (z_3) est rectiligne, ce support étant déterminé par deux points obtenus directement, comme il a été dit plus haut, s'il est de direction quelconque; par un seul, s'il est parallèle aux axes.

Dans le cas d'un support rectiligne, on peut aussi porter directement l'échelle (z_3) sur son support sans recourir à aucune projection. Si, en effet, ce support est transverse aux axes, l'échelle (z_3) y est déterminée par la première formule (2) (où δ est pris égal au demi-segment du support compris entre les axes); s'il est parallèle aux axes, par la seconde formule (2) où h_3 et g_3 sont remplacés par des constantes qui peuvent être prises égales à l'unité (attendu que les coefficients numériques que constituent alors h_3 et g_3 dans l'équation donnée peuvent être incorporés respectivement à f_1 et f_2). Dans ces conditions, on voit que l'échelle à porter sur le support parallèle à Au et Bv (dont les distances à ces axes sont proportionnelles à μ_1 et μ_2) n'est autre que celle de la fonction $-f_3$, portée avec le module μ_3 tel que

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \tag{3}$$

ou

$$\frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}.$$

Nous terminerons par cette importante remarque : si le champ de variation pratique pour les variables z_1 et z_2, combiné avec le degré d'approximation que l'on désire obtenir pour chacune de ces variables, conduit à adopter pour l'une de ces échelles, (z_2) par exemple, une longueur très supérieure à celle dont on peut se contenter pour (z_1), on peut fractionner cette échelle (z_2) en plusieurs tronçons amenés successivement en face de l'échelle commune (z_1), et construire, *sur la même feuille*, avec cette même échelle (z_1), les nomogrammes répondant à chacun d'eux. Chacun de ces nomogrammes comprendra un tronçon d'échelle, (z_3) et, pour éviter toute confusion, on aura soin de marquer les tronçons correspondants des échelles (z_2) et (z_3) d'un même signe de repérage [1].

---

[1] En pratique, le mieux est d'adopter pour ces signes des couleurs différentes, d'un nomogramme partiel à l'autre.

On observera que cette possibilité de faire coexister sur une même feuille les divers nomogrammes partiels n'existe pas avec les nomogrammes à entrecroisement ([1]), ce qui constitue un nouvel avantage très sérieux à l'actif de la méthode des points alignés.

14. Traduction nomographique d'une table empirique à double entrée. Corrections atmosphériques de l'angle de tir. — Une table empirique à double entrée peut toujours se traduire en un abaque cartésien, comme on l'a vu précédemment (n° 8).

Lorsque les circonstances s'y prêtent, il est bon, en raison des avantages déjà signalés, de recourir à la méthode des points alignés qui offre encore cet intérêt de permettre de faire tenir sur une seule feuille toute une série de nomogrammes, alors que les abaques cartésiens correspondants exigeraient chacun une feuille spéciale.

Il y a même mieux : dans bien des cas où l'on devra ainsi envisager toute une série de nomogrammes à trois échelles rectilignes parallèles (z_1, z_2, z_3) correspondant chacun à une valeur spéciale d'un quatrième paramètre z_4, les échelles des données (z_1) et (z_2) resteront les mêmes; seule l'échelle (z_3) variera d'une valeur à l'autre de z_4. On pourra donc, en ce cas, adopter effectivement les mêmes échelles (z_1) et (z_2) pour tous les nomogrammes de la série, en traçant entre celles-ci les diverses échelles (z_3), le support de chacune d'elles étant coté au moyen de la valeur de z_4 correspondante. On sera même tout naturellement conduit ainsi à joindre par un trait continu tous les points de même cote z_3 sur ces diverses échelles, ce qui revient à introduire, entre les échelles (z_1) et (z_2), *un réseau de points à deux cotes* (z_3, z_4) tel que ceux qui, sous une forme plus générale, se présenteront plus loin à nous (n° 15).

Mais ici une observation s'impose : il peut arriver que les diverses échelles (z_3) aient même support, la graduation seule variant de l'une à l'autre, ou même que les supports, quoique distincts, soient trop rapprochés pour qu'on puisse commodément en opérer la graduation et la lecture. Dans ces conditions, tout en

---

([1]) Sauf dans le cas très particulier où les lignes (z_3) se réduisent à des droites parallèles entre elles, ce qui est celui des abaques dits *hexagonaux* (**1**, Chap. III; **2**, Chap. II, § III; **3**, Chap. III, C; **4**, n° 266).

conservant en commun aux divers nomogrammes l'échelle (z_1), il

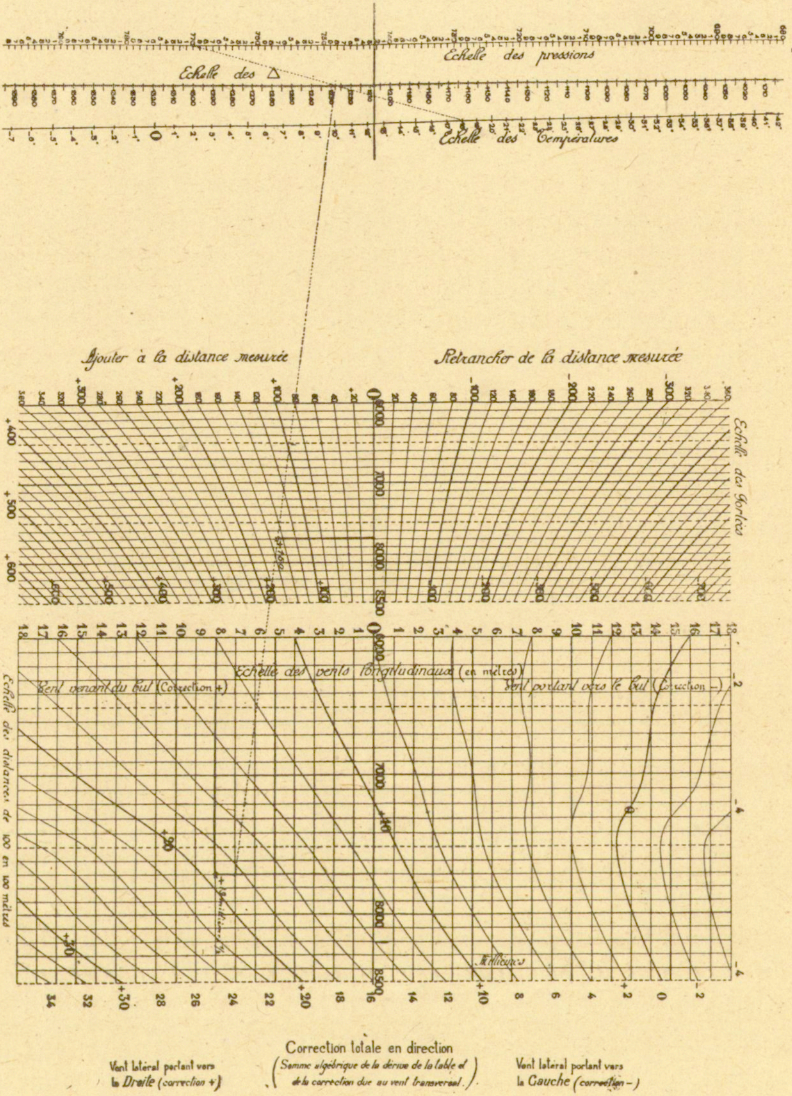


Fig. 6.

vaut mieux se donner *a priori* les supports des diverses échelles (z_3), régulièrement espacés, par exemple, et en déduire les supports des diverses échelles (z_2) correspondant aux valeurs considérées de z_4, échelles qui proviennent en somme de la translation, dans le sens de Ox, d'une seule et même échelle, en sorte que les points de même cote sur ces échelles (dont les supports sont cotés au moyen des valeurs de z_4) se trouvent à la rencontre de ces supports et de droites parallèles à Ox, cotées au moyen des valeurs de z_2.

C'est ainsi qu'ont été construits les nomogrammes des corrections atmosphériques qui se rencontrent dans les tables graphiques de tir des divers calibres, chacun d'eux correspondant à un obus et à une charge déterminés. La figure 6 donne un spécimen réduit de l'un d'eux (mortier de 220, tir plongeant; O. A. mod. 1915 D; charge S_1). Ici, la variable z_1 est le poids Δ du mètre cube d'air, z_2 la composante longitudinale de la vitesse du vent, z_3 la correction correspondante de la portée, z_4 la portée elle-même [1]. Le nomogramme partiel de gauche, qui fait connaître Δ en fonction de la pression atmosphérique et de la température, sera décrit plus loin (n° 18, 2°). Le réseau qui se trouve à droite a servi en même temps de quadrillage anamorphosé pour un abaque cartésien fournissant la dérive (n° 8).

Le mode d'emploi de ce nomogramme est le suivant : un premier alignement pris, sur le nomogramme partiel de gauche, entre la température et la pression barométrique, donne le poids Δ du mètre cube d'air. Le point Δ ainsi obtenu détermine avec le point répondant, sur le réseau de droite, à la composante longitudinale du vent et à la portée, un second alignement qui, sur le réseau central, coupe la parallèle aux axes, cotée avec la portée, en un certain point; la cote de la courbe (au besoin interpolée à vue dans le système effectivement représenté) qui passe par ce point fait connaître la correction de la portée, d'où la table numérique de tir, reproduite sur le tableau, permet de déduire l'angle de tir corrigé.

---

[1] Les premiers nomogrammes de ce genre ont été construits sous notre direction, à la S. N., pour les pièces de 19 de marine, par l'enseigne de vaisseau Goybet, qui en avait eu la première idée. Leur construction a été étendue aux divers calibres de l'artillerie de terre par plusieurs autres de nos collaborateurs, au premier rang desquels le capitaine d'infanterie Desquaires et le lieutenant d'artillerie de Branges. Le même système a été utilisé par le capitaine Michel pour les corrections dues aux variations de vitesse initiale et de poids du projectile.

Par exemple, sur le nomogramme de la figure 6, où l'on a marqué les deux alignements successifs en pointillé, pour une pression de 770^{mm} et une température de 18° (avec lesquelles le premier alignement donne $\Delta = 1228^{kg}$), une portée de 7700^{m} et une composante longitudinale du vent (venant du but) de 7 m : sec, on lit, à la rencontre du second alignement et de la droite cotée 7700 du réseau central, que la correction est de $+150^{m}$. On prend donc, dans la table de tir, l'angle correspondant à une portée de 7850^{m}, qui est de 28°21′.

Si, de plus, la composante transversale du vent est de 8^{m}, on lit, sur l'abaque cartésien dont le quadrillage est formé par le réseau de droite, que la correction totale en direction est de + 19,5 millièmes.

Maintenant, une question se pose : lorsqu'une quantité z_3 est déterminée, en fonction de z_1 et z_2, par une table empirique à double entrée, comment peut-on reconnaître la possibilité de sa représentation par points alignés?

Le mieux est de partir de la représentation cartésienne. Inscrivant sur un quadrillage, coté au moyen de z_1 et z_2, la valeur de z_3 à côté de chaque point correspondant à un couple de valeurs de z_1 et z_2 figurant dans la table à double entrée, on peut, par interpolation, sur les droites de ce quadrillage, en déduire les points de cote ronde. Si alors les points de même cote se disposent le long de lignes droites, la transformation au moyen des coordonnées parallèles fournira des points alignés; ces points alignés se disposeront sur un support rectiligne si les droites de l'abaque cartésien concourent en un même point; ce support rectiligne sera parallèle aux axes Au et Bv si ces droites de l'abaque cartésien sont parallèles entre elles. Ce dernier cas est celui de la correction de portée en fonction du poids du mètre cube d'air et de la composante longitudinale de la vitesse du vent.

Une telle circonstance est fréquente dans la pratique. Parfois aussi elle ne se révèle que lorsqu'on opère la traduction graphique de la table empirique à double entrée, non plus sur un quadrillage régulier, mais sur un quadrillage logarithmique ([1]).

([1]) On trouve maintenant du papier ainsi quadrillé dans le commerce. Comme exemples de construction de nomogrammes à points alignés traduisant des tables

15. **Nomogrammes à réseau de points à deux cotes.** — L'un des plus grands avantages de la méthode des points alignés, que nous avons fait déjà pressentir, consiste à permettre la représentation de certaines équations à quatre variables, d'un type fréquent dans la pratique, et non réductibles (comme l'exigerait l'application du principe des abaques cartésiens) à une suite de deux équations à trois variables, grâce à l'introduction d'une variable auxiliaire.

Tel est le cas des équations de la forme

$$f_1 g_{34} + f_2 h_{34} + f_{34} = 0. \tag{1}$$

Posons encore ici

$$u = \mu_1 f_1 \tag{2}$$

et

$$v = \mu_2 f_2 \tag{3}$$

Les points ainsi définis sur les axes seront, en vertu de l'équation donnée, alignés avec celui dont l'équation est

$$\mu_2 g_{34} u + \mu_1 h_{34} v + \mu_1 \mu_2 f_{34} = 0, \tag{4}$$

point dont les coordonnées cartésiennes, toujours rapportées aux mêmes axes (*fig.* 4), ont pour expression

$$x = \delta \frac{\mu_1 h_{34} - \mu_2 g_{34}}{\mu_1 h_{34} + \mu_2 g_{34}}, \qquad y = -\frac{\mu_1 \mu_2 f_{34}}{\mu_1 h_{34} + \mu_2 g_{34}}. \tag{5}$$

Si, dans ces formules, on fait varier l'un des paramètres, z_4 par exemple, en laissant l'autre, z_3, constant, on obtient une courbe qui peut être cotée au moyen de cette valeur de z_3. De là, la définition des systèmes de lignes cotées (z_3) et (z_4) dont l'ensemble forme un *réseau* où chaque point est défini par le couple (z_3, z_4) des cotes des lignes des deux systèmes qui s'y rencontrent.

On voit dès lors que, si l'on considère un système de valeurs de z_1, z_2, z_3, z_4 satisfaisant à l'équation (1), le point coté z_1 sur

---

empiriques, voir : **2**, Chap. III, § IV, et **3**, n° 74. Lorsque le champ de variation des variables de la question est peu étendu, on peut presque toujours réaliser approximativement une telle représentation. Le lieutenant-colonel Lafay, professeur à l'École Polytechnique, a fait connaître pour cet objet une méthode fort ingénieuse (*Génie civil*, t. XL, 1902, p. 298).

l'échelle portée par Au, le point coté z_2 sur l'échelle portée par Bv et le point doublement coté (z_3, z_4) dans le réseau sont alignés.

On peut évidemment former les équations des courbes des systèmes (z_3) et (z_4) en éliminant successivement z_4 et z_3 entre les deux formules (5); mais le plus souvent on aura avantage à se servir directement de ces formules pour la construction de ces diverses courbes, en opérant suivant ce que, dans les Cours de mathématiques spéciales, on appelle le procédé de la *courbe en t*.

Si, ce qui est souvent le cas, les fonctions h et g ne dépendent que d'une seule, z_3, des deux variables z_3 et z_4, la première des formules (5) montre que les lignes (z_3) du réseau ne sont autres que des parallèles aux axes Au et Bv.

Si, en outre, la fonction f_{34} est linéaire en z_4, la seconde formule (5) fait voir que les lignes (z_4) déterminent sur chacune des droites (z_3) une échelle métrique; autrement dit, suivant la terminologie définie à la fin du n° 6, les lignes (z_4) sont *métriquement espacées* dans le sens des axes. Il suffit, dès lors, de construire deux d'entre elles, pour que toutes les autres soient déterminées *ipso facto* (¹).

Il est important de remarquer que si les fonctions g_{34} et h_{34} se réduisent à des constantes (qui peuvent être incorporées respectivement à f_1 et à f_2) tous les points (z_3, z_4) sont situés sur une même parallèle à Au et Bv, où ils constituent ce que nous avons appelé précédemment un système de *points condensés* (n° 9), défini par la seconde formule (5) où le dénominateur est devenu constant. Il suffira alors d'accoler au support de ces points une échelle binaire déterminant graphiquement ces points, ainsi qu'on l'a vu au n° 9.

Enfin, il n'est pas inutile de remarquer que la considération du réseau de points à deux cotes, indispensable pour la représentation de certaines équations à quatre variables, peut parfois aussi offrir de l'intérêt en vue de la représentation de certaines équations à trois variables seulement.

Si, en effet, dans le type général (1) ci-dessus, l'une des

(¹) Une telle circonstance se présente, sous une forme particulièrement remarquable, dans le nomogramme de l'équation complète du troisième degré, qui est précisément celui dans lequel nous avons, pour la première fois, fait l'application de cette méthode (**1**, p. 81; **2**, p. 333; **3**, p. 278; **4**, p. 298).

variables disparaît, parce que la fonction correspondante se réduit à une constante, par exemple, si l'on a affaire à une équation à trois variables de la forme

$$g_3 + f_2 h_3 + f_{34} = 0,$$

qui ne soit pas réductible à la forme canonique comportant application de la méthode des points alignés avec trois échelles simples (n° 12), il peut se faire qu'au lieu de recourir au procédé cartésien, consistant à graduer le quadrillage au moyen de z_2 et z_3 et à y tracer les lignes (z_4), on ait avantage à traiter cette équation par le procédé de l'alignement avec réseau (z_3, z_4), l'index pivotant ici autour d'un point fixe [de l'ancienne échelle (z_1)] marqué sur Au. En effet, ici, le réseau (z_3, z_4) sera constitué par des parallèles cotées (z_3) aux axes Au et Bv et un système de lignes (z_4) qui peuvent être plus simples et de construction plus facile que les lignes qui, pour la même équation, seraient à tracer sur l'abaque cartésien.

De même, si, dans le type général (1), deux des variables z_1 et z_2 deviennent identiques, auquel cas les échelles portées sur Au et Bv correspondent à une même variable z_1, on voit qu'à chaque valeur de z_1 répondra une position unique de l'index joignant les points cotés au moyen de cette valeur à la fois sur Au et Bv. Ces positions de l'index constitueront alors un système de droites cotées (z_1) tracées à travers le réseau (z_3, z_4). On retombera donc ainsi sur un nomogramme à entre-croisement; mais ce nomogramme sera d'un autre type que l'abaque cartésien applicable à la même équation; et il pourra se faire que les lignes entrant dans sa construction soient plus faciles à tracer que celles intervenant sur l'abaque cartésien. Ce sera le cas notamment si les lignes (z_3) du réseau à deux cotes sont des parallèles à Au et Bv et si les lignes (z_4) sont métriquement espacées dans le sens de ces axes, auquel cas l'équation représentée sera de la forme

$$f_1 g_3 + \varphi_1 h_3 + z_4 f_3 + \varphi_3 = 0.$$

On trouvera au n° 23 un exemple d'un tel nomogramme (*fig.* 15).

Il va sans dire que l'artifice des alignements multiples, signalé à la fin du n° 12, peut s'appliquer encore en se combinant avec l'emploi de réseaux à deux cotes.

16. Extensions diverses des méthodes nomographiques. — Si l'on s'est volontairement restreint ici aux principes les plus courants de la nomographie, qu'illustrent les applications qui vont suivre (elles-mêmes choisies parmi un très grand nombre d'autres analogues, nées, comme elles, des besoins de la guerre), il ne faudrait pas qu'il en résultât pour le lecteur l'impression qu'à cela se borne la partie vraiment utilisable de la théorie générale. Outre, comme on l'a déjà indiqué au n° **12**, que la méthode des points alignés s'applique encore à des cas plus généraux où peuvent intervenir plusieurs échelles curvilignes ([1]), on doit encore regarder comme offrant un intérêt pratique les nomogrammes à index parallèles ou en équerre (**2**, Chap. III, § V, B; **3**, Chap. V, A), ainsi que les systèmes cotés mobiles comprenant notamment les échelles glissantes, tournantes ou orientées (**2**, Chap. V, § II; **3**, Chap. V, B), le nomogramme à échelles glissantes, du type le plus simple, étant d'ailleurs constitué par la classique règle à calcul.

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DES POINTS ALIGNÉS.

17. Échelle parallèle aux axes : Coefficient de réglage. — D étant la distance de réglage, en mètres; A la distance mesurée sur la planchette, également en mètres, le coefficient de réglage K est donné par la formule

$$K = \frac{D}{A}$$

qu'on peut écrire

$$\log K + \log A = \log D.$$

Pour la représenter, il suffit de poser (n° **12**)

$$u = \mu_1 \log A, \qquad v = \mu_2 \log K,$$

échelles faciles à construire, sur Au et Bv, au moyen d'un étalon logarithmique ([2]), ce qui donne pour D, sur la droite parallèle

([1]) Des applications de la sorte se rencontrent notamment parmi les nomogrammes construits pendant la guerre à la Section technique de l'Aéronautique, sous la direction du lieutenant-colonel Dorand.

([2]) *Voir* le renvoi du n° 4.

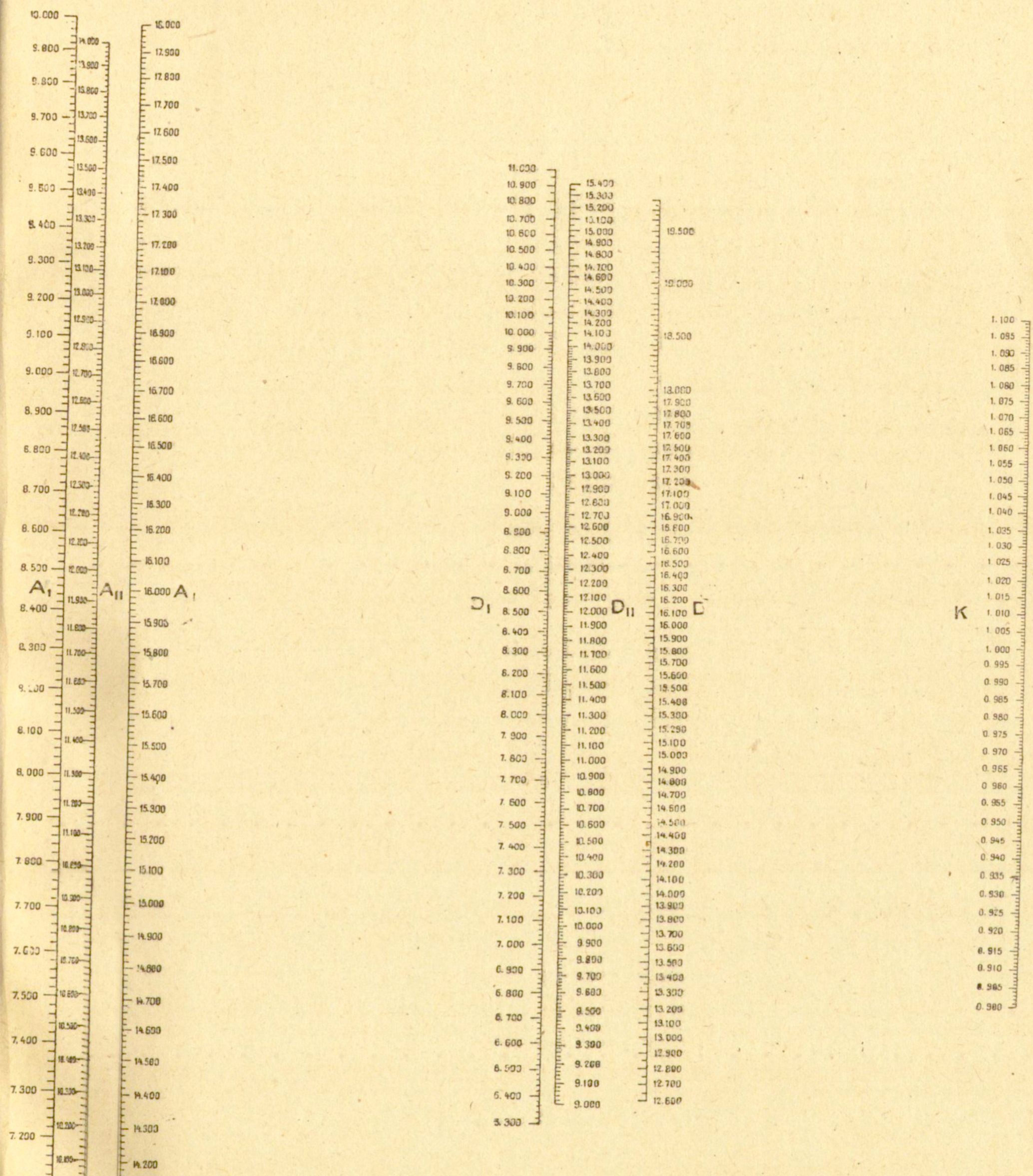


Fig. 7.

aux axes qui divise leur intervalle proportionnellement à leurs modules (n° **13**), l'échelle définie par

$$w = \mu_3 \log D \qquad \text{avec} \qquad \mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

D'ailleurs, pour fixer la position de cette échelle sur son support, il suffit d'en connaître un point. On fait choix pour cela, sur les échelles (A) et (K), de points de cote ronde, par exemple, $A = 1000$, $K = 1$, d'où l'on déduit immédiatement la valeur correspondante $D = 1000$, et l'on n'a qu'à placer le point coté au moyen de cette valeur de D sur l'alignement qui joint les points $(A = 1000)$ et $(K = 1)$.

Pratiquement, A variant de 1000 à 13000 pour K variant seulement de 0,9 à 1,1, on est conduit à fractionner (n° **13**, *in fine*) l'échelle (A) en trois troncons :

(A_I) de 1000 à 4000,
(A_{II}) de 4000 à 8000,
(A_{III}) de 7000 à 13000.

On obtient une bonne disposition (grâce à des essais préliminaires dont on passe ici le détail) en prenant respectivement pour ces trois tronçons d'échelle (A) :

(I) $\qquad \mu_1 = \frac{1}{5}\mu_2, \qquad$ d'où $\qquad \mu_3 = \frac{1}{6}\mu_2,$

(II) $\qquad \mu_1 = \frac{2}{5}\mu_2, \qquad$ » $\qquad \mu_3 = \frac{2}{7}\mu_2,$

(III) $\qquad \mu_1 = \frac{4}{5}\mu_2, \qquad$ » $\qquad \mu_3 = \frac{4}{9}\mu_2.$

Le nomogramme ainsi obtenu, dont la figure 7 est une réduction, a été construit à la S. N. par le capitaine Michel, pour les tables graphiques de tir de grand format, avec $\mu_2 = 250^{cm}$ (1).

18. Échelle transverse aux axes. — 1° *Angle de site*. — Z étant

(1) On trouve dans ces tables un autre exemple de nomogramme de ce type pour le calcul de l'angle du vent avec le but, nécessaire à connaître pour obtenir les composantes du vent, données, sur la même planche, par un nomogramme à échelle transverse, l'un et l'autre construits à la S. N. par le lieutenant de Branges de Bourcia.

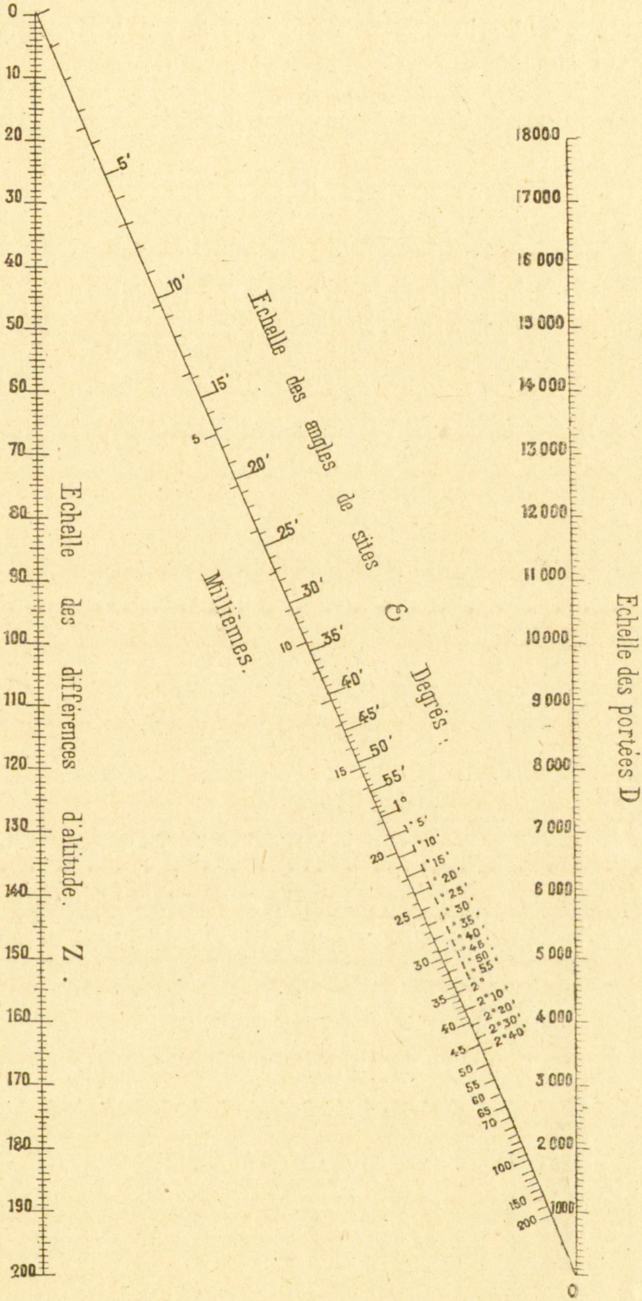

Echelle des différences d'altitude. Z.
Echelle des angles de sites ε
Degrés :
Millièmes.
Echelle des portées D

Fig. 8.

la différence d'altitude, en mètres; D la portée, également en mètres, l'angle de site est donné par la formule

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{Z}{D},$$

que l'on peut représenter en posant

$$u = -\mu_1 Z, \qquad v = \mu_2 D,$$

échelles métriques portées sur Au et Bv, ce qui donne, pour Z, l'échelle définie sur AB, *entre* les origines A et B, par

$$\mu_2 u + \mu_1 \operatorname{tang} \varepsilon . v = 0$$

ou, avec les axes cartésiens liés à Au et Bv (n° 10),

$$x = \delta \frac{\mu_1 \operatorname{tang} \varepsilon - \mu_2}{\mu_1 \operatorname{tang} \varepsilon + \mu_2}.$$

Pour construire cette échelle par projection d'une échelle des tangentes, il suffit d'en marquer trois points (n° 3); par exemple, pour $\varepsilon = 0$, on a

$$x = -\delta \qquad \text{(origine A)};$$

pour $\varepsilon = 90^\circ$, on a

$$x = \delta \qquad \text{(origine B)};$$

pour $\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, on a

$$x = 0 \qquad \text{(origine O, milieu de AB)}.$$

Si l'on fait varier Z de 0^m à 200^m (par mètre) et D de 0^m à 12000^m (par 100^m), on obtient une bonne disposition en prenant

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,01,$$

ce qui donne, pour la cote du point confondu avec O,

$$\varepsilon = 0^\circ 34' 20''.$$

C'est ainsi qu'a été construit, avec $\mu_1 = 0^{mm},96$, le nomogramme inséré dans les tables graphiques de tir, dont la figure 8 est une réduction.

2° *Poids du mètre cube d'air.* — Si h est la pression atmosphérique (en millimètres), t la température (en degrés centigrades), le poids Δ du mètre cube d'air est exprimé (en kilogrammes) par la formule

$$\Delta = \frac{1293\,h}{760(1+\alpha t)} \qquad (\text{où } \alpha = 0{,}00366).$$

Pour représenter cette formule, on posera

$$u = \mu_1 h, \qquad v = \mu_2 \Delta \qquad \text{(échelles métriques)};$$

d'où, pour t, l'échelle

$$1293\,\mu_2 u - 760(1+\alpha t)\mu_1 v = 0$$

portée sur l'axe AB des origines, mais en dehors de l'intervalle des origines (en vue de placer, comme dans les exemples précédents, l'échelle de l'inconnue entre les échelles des données), et projective de l'échelle métrique (t). Mais ici une particularité se présente, sur laquelle il y a lieu de fixer son attention.

h étant supposé varier de 680 à 800 par millimètre, Δ de 1000 à 1390 par kilogramme, on est amené, pour donner aux portions utiles de ces deux échelles des longueurs sensiblement équivalentes, à prendre

$$\mu_2 = 0{,}3\,\mu_1,$$

ce qui transforme l'équation de l'échelle (Δ) en

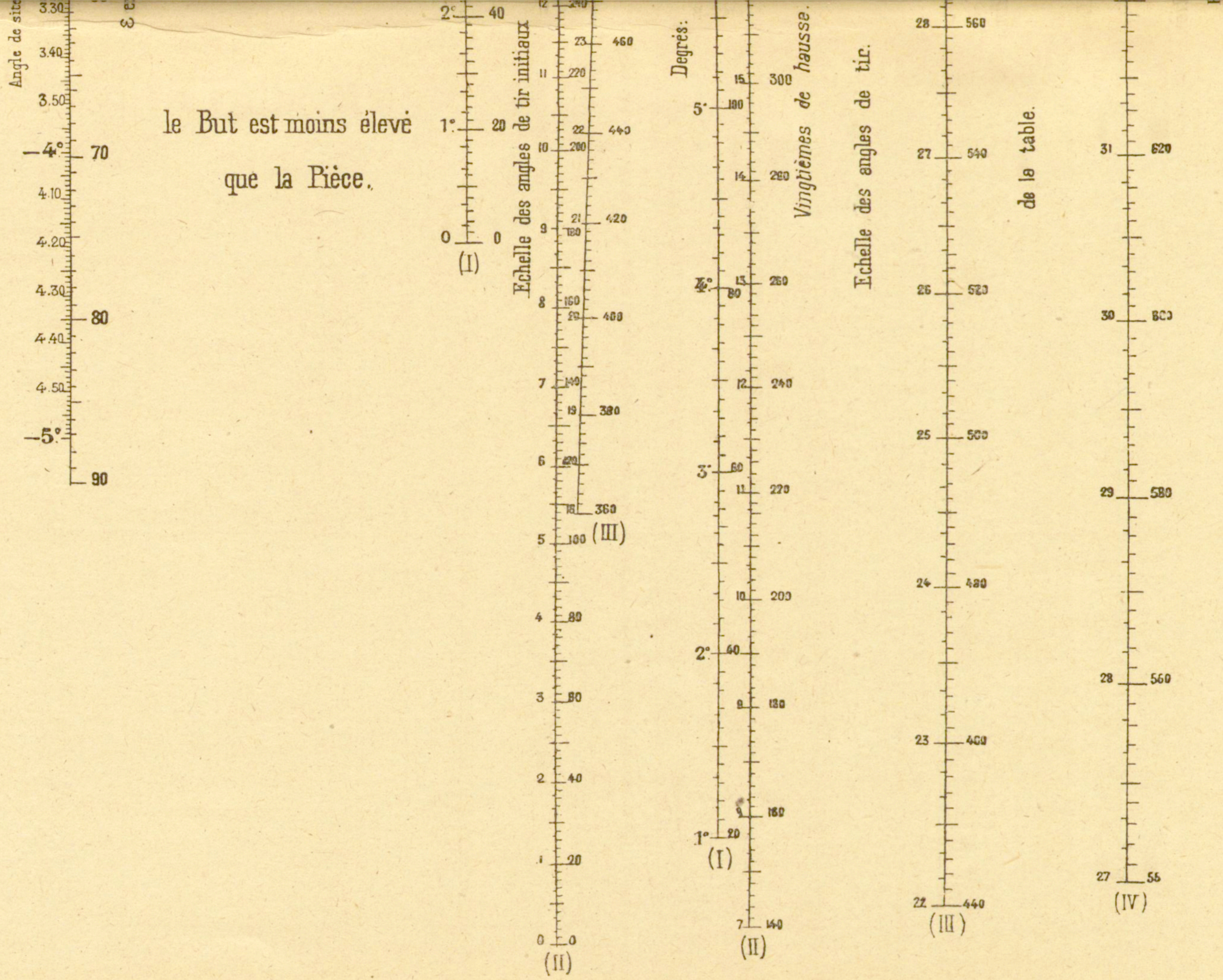
$$3879\,u - 7600(1+\alpha t)v = 0.$$

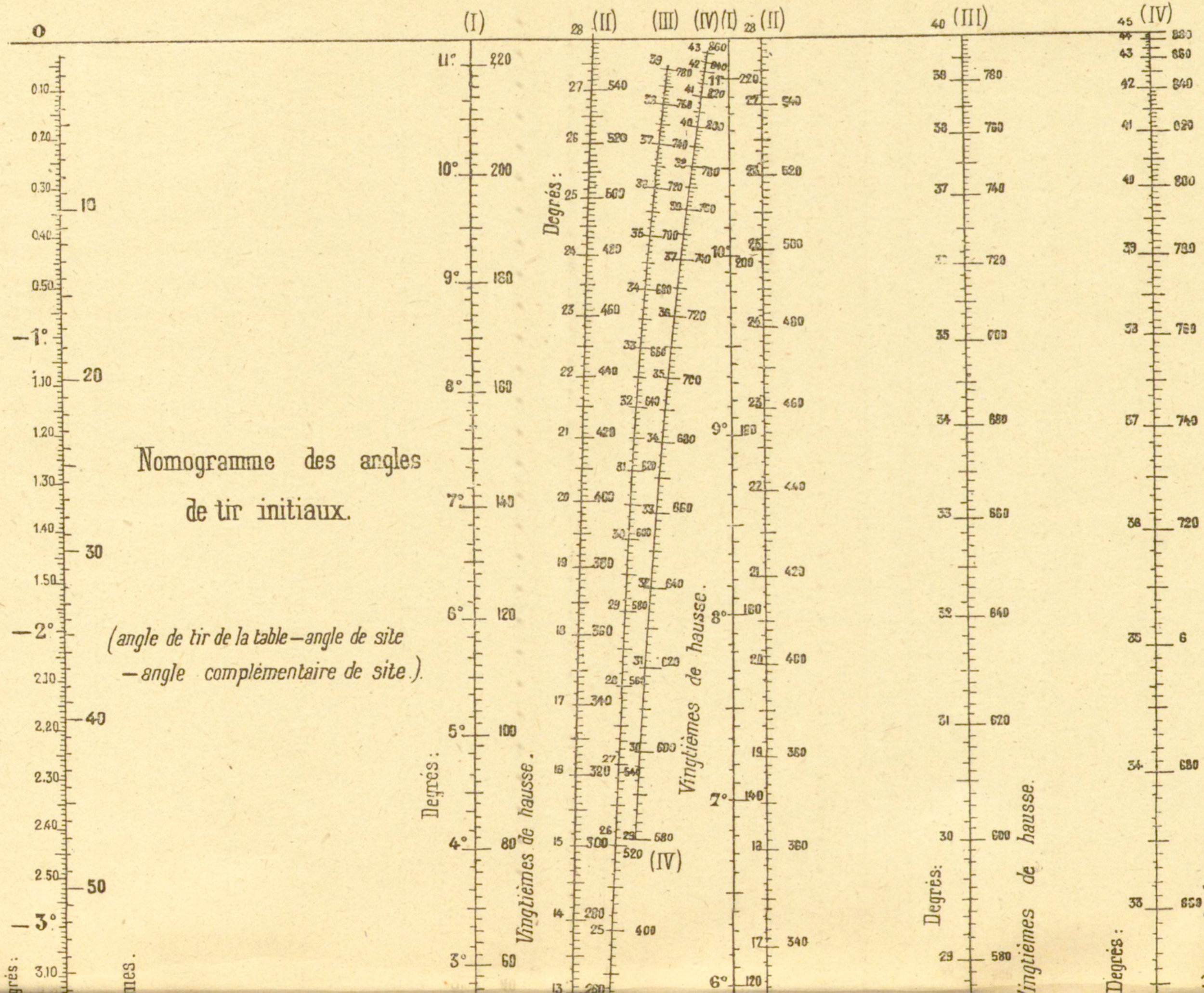
Mais les origines A et B sont alors rejetées loin en dehors des limites du nomogramme, et il convient de recourir à la construction par un index (n° 13).

On trouve, par exemple, au moyen de la formule donnée, que pour $t = 40^\circ$ et $\Delta = 1015^{\text{kg}}$, on a

$$h = 683^{\text{mm}},8.$$

Si donc on joint par une droite les points ($\Delta = 1015$) ou B_0, et ($h = 683{,}8$) ou A_0, lus sur les échelles (Δ) et (h) d'abord construites, le point ($t = 40^\circ$) se trouvera sur cette droite A_0B_0, et son abscisse rapportée au milieu O_0 de A_0B_0 sera donnée, en vertu de la première formule (2 *bis*) du n° 10, si l'on


Angle de site
le But est moins élevé
que la Pièce.
Echelle des angles de tir initiaux
Degrés:
Vingtièmes de hausse.
Echelle des angles de tir.
de la table.
(I)
(II)
(III)
(IV)


Nomogramme des angles
de tir initiaux.
(angle de tir de la table—angle de site
—angle complémentaire de site.)
(I)
(II)
(III)
(IV)
Degrés:
Vingtièmes de hausse.

pose $O_0B_0 = \delta_0$, par

$$x = 2{,}6\,\delta_0.$$

Cela définit entièrement le point ($t = 40^\circ$).

De même, pour $t = 0^\circ$ et $\Delta = 1320^{kg}$, on a

$$h = 775^{mm},8 \qquad \text{et} \qquad x = 3{,}08\,\delta_0,$$

ce qui permet de marquer le point ($t = 0^\circ$).

Sur la droite qui joint les deux points ainsi obtenus, on peut encore marquer le point ($t = 20^\circ$) en remarquant que, pour $t = 20^\circ$ et $\Delta = 1150^{kg}$, on a

$$h = 725^{mm},4.$$

Ayant les trois points 0°, 20° et 40° de l'échelle (t), on n'a plus qu'à construire cette échelle comme projective d'une échelle métrique [1]. Ainsi a été obtenu le nomogramme qui se trouve réduit sur la partie de gauche de la figure 6, et qui fournit, sur les nomogrammes des corrections atmosphériques, insérés dans les tables graphiques de tir, l'axe Δ servant pour l'une des entrées du second alignement [2].

19. Échelle curviligne : Angle initial de tir. — Si α est l'angle tabulaire de tir, corrigé des conditions atmosphériques (n° **14**), ε l'angle de site (n° **18**, 1°), φ l'angle initial de tir effectif, celui-ci se déduit des deux précédents par l'équation

$$(1 + \cos 2\varphi) \operatorname{tang} \varepsilon = \sin 2\varphi - \sin 2\alpha,$$

dans laquelle, pratiquement, ε varie de -5° à 5°, α et φ de 0° à 45°.

Pour obtenir la représentation en points alignés de cette équation, il suffit de poser

$$u = \mu_1 \operatorname{tang} \varepsilon, \qquad v = \mu_2 \sin 2\alpha,$$

échelles immédiatement construites sur les axes quand on dispose

(1) Il va sans dire que si, avec le centre de projection d'abord choisi, les projetantes rencontrent le support, dans une de ses parties, sous un angle trop petit, on n'a qu'à passer, pour cette partie, à un autre centre de projection (et, par suite, aussi, à une autre position de l'échelle projetée).

(2) Par suite de la disposition adoptée pour les échelles de ce nomogramme, il est à remarquer que le sens positif de Au et Bv y a été pris de haut en bas.

d'un étalon des tangentes et d'un étalon des sinus. Cela donne pour l'échelle (φ) l'équation

$$\mu_2(1 + \cos 2\varphi)u + \mu_1 v = \mu_1 \mu_2 \sin 2\varphi.$$

Suivant que l'on fait, dans cette équation, $u = 0$ ou $v = 0$, on obtient

$$v = \mu_2 \sin 2\varphi \qquad \text{ou} \qquad u = \mu_1 \tan \varphi,$$

formules qui, comparées aux deux précédentes, montrent que les projections de l'échelle (φ) faites, à partir de A et de B, sur Bv et sur Au, se confondent respectivement avec les échelles (α) et (ε) déjà construites.

De là, pour la construction de l'échelle (φ), le procédé le plus simple possible. Malheureusement, vu les limites entre lesquelles les variables restent comprises, cette construction ne serait applicable qu'entre 0° et 5°. D'autre part, le grand écart entre les limitations de ε et α conduit, d'une part, à construire deux nomogrammes distincts, l'un pour les ε positifs, l'autre pour les ε négatifs, et, d'autre part, à fractionner sur chacun d'eux l'échelle (α), et par suite aussi l'échelle (φ), en quatre tronçons; la construction ci-dessus ne saurait convenir qu'à celui d'entre eux qui comprend à la fois les portions des échelles (ε) et (α) s'étendant de 0° à 5°; pour les autres, l'origine B s'éloigne de plus en plus des limites de la feuille.

Mais, par le procédé de l'index (n° **13**), en usant de la seconde formule (2 *bis*) du n° **10**, on peut, pour chacun des nomogrammes partiels, déterminer individuellement un certain nombre de points (φ) de cote ronde, puis, au moyen de ces points, construire le support de l'échelle, et projeter enfin, sur ce support, les points de l'échelle (α), à partir du point A($\varepsilon = 0$). C'est ainsi qu'a été construit, pour les valeurs négatives de ε (but moins élevé que la pièce), le nomogramme reproduit sur la figure 9. La graduation de ε en degrés y a d'ailleurs été doublée par une graduation en millièmes, celle de α en degrés par une graduation en vingtièmes de hausse.

Un second nomogramme a été construit de même pour les valeurs positives de ε (but plus élevé que la pièce).

Il est, au reste, intéressant de se rendre compte de la nature du support de l'échelle (φ). Si, en effet, on exprime $\sin 2\varphi$ et $\cos 2\varphi$ en fonction de $\operatorname{tang}\varphi$, on voit que l'équation ci-dessus de cette échelle peut s'écrire

$$\mu_1 \operatorname{tang}^2\varphi . v - 2\mu_1\mu_2 \operatorname{tang}\varphi + 2\mu_2 u + \mu_1 v = 0,$$

dont, ainsi qu'on l'a vu au n° **11**, le support a pour équation en u et v

$$\mu_1\mu_2^2 - v(2\mu_2 u + \mu_1 v) = 0,$$

ellipse passant par les points $v = 0$, ou B, et $2\mu_2 u + \mu_1 v = 0$, qui divise AB dans le rapport $-\dfrac{\mu_1}{2\mu_2}$, et dont les tangentes en ces points sont parallèles aux axes.

Le nomogramme de la figure 9 a été construit avec

$$\mu_1 = 5\mu_2.$$

20. Double alignement : Vitesse limite des bombes fuselées. — K étant le coefficient de forme de la bombe (qui varie de 0,005 à 0,15), D son diamètre en millimètres (de 50^{mm} à 700^{mm}), p son poids en kilogrammes (de 5^{kg} à 500^{kg}), V la vitesse limite (qui varie pratiquement de 100 à 500 m : sec), cette vitesse limite résulte de l'équation

$$K\frac{\pi D^2}{4} = \frac{p}{V^2},$$

que l'on peut écrire

$$\log K + 2\log D + \lambda = \log p - 2\log V$$

en posant $\log\dfrac{\pi}{4} = \lambda$.

Appelant t la valeur commune des deux membres de cette équation, on représente chacune des équations

$$\log K + 2\log D + \lambda = t,$$
$$\log p - 2\log V = t,$$

par points alignés en prenant, pour la première,

$$u = -\mu_1 \log K, \qquad v = \mu_2 t;$$

pour la seconde,

$$u = -\mu_1' \log p, \qquad v = \mu_2 t,$$

et l'on fait coïncider les deux échelles (t) qui n'interviennent au

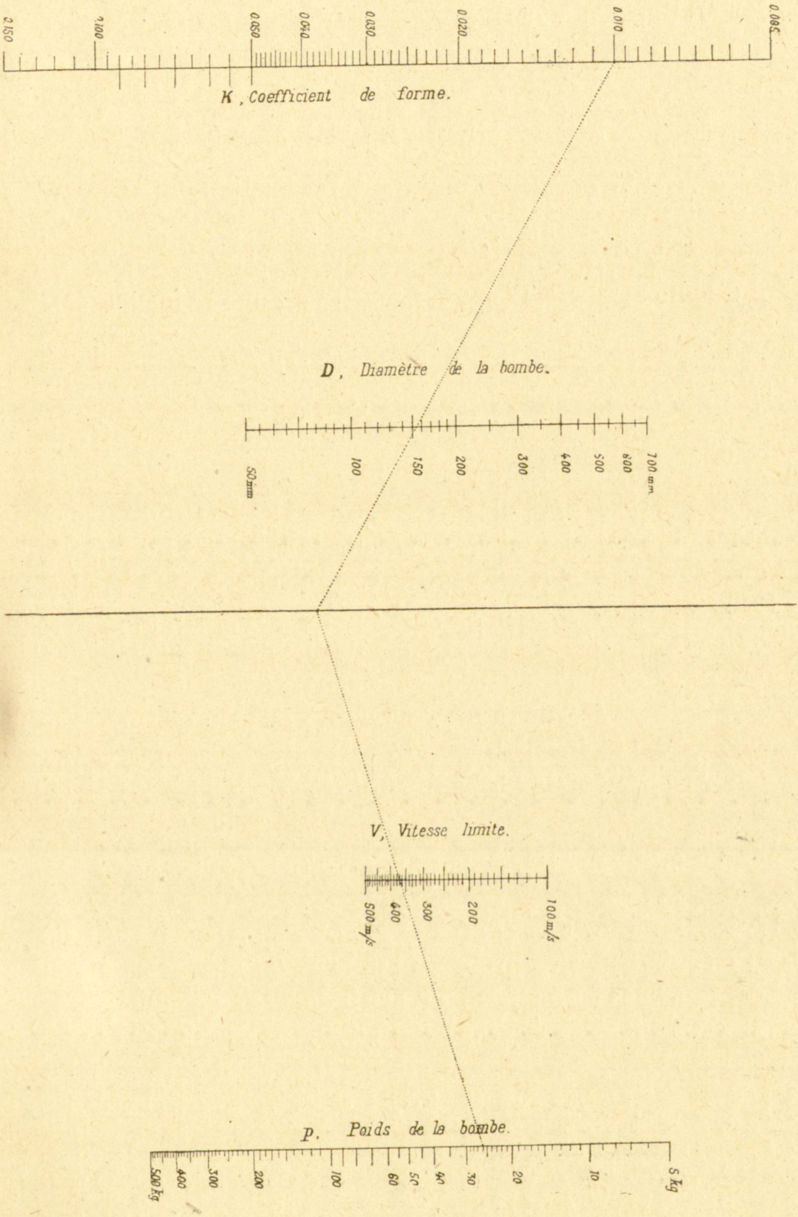

K, Coefficient de forme.
0.150
0.100
0.050
0.040
0.030
0.020
0.010
0.005
D, Diamètre de la bombe.
50 mm
100
150
200
300
400
500
600
700 mm
V, Vitesse limite.
500 m/s
400
300
200
100 m/s
P, Poids de la bombe.
500 Kg
400
300
200
100
60
50
40
30
20
10
5 Kg

Fig. 10.

reste que par leur support pris comme charnière. Cela donne pour (D) et (V), sur les parallèles aux axes divisant respectivement leurs intervalles dans les rapports $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ et $\frac{\mu_1'}{\mu_2}$ (n° 13), les échelles (¹)

$$w = 2\mu_3 \log D \qquad \text{avec} \qquad \mu_3 = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

et

$$w = -2\mu_3' \log V \qquad \text{avec} \qquad \mu_3' = \frac{\mu_1'\mu_2}{\mu_1' + \mu_2}.$$

Sur le nomogramme dont la figure 10 est une réduction (²), on a pris

$$\mu_1 = 2\mu_2 \qquad \text{et} \qquad \mu_1' = \mu_2,$$

d'où

$$\mu_3 = \frac{2}{3}\mu_2 \qquad \text{et} \qquad \mu_3' = \frac{1}{2}\mu_2.$$

Les supports des échelles ayant entre eux les écartements voulus, dont les rapports sont ici égaux à 2 pour le premier nomogramme et à 1 pour le second, on peut, avec les modules choisis, placer, *ad libitum*, trois de ces échelles sur leurs supports; la mise en place de la quatrième résulte de la position fixée pour un de ses points par le double alignement répondant à deux couples de valeurs de K et D, d'une part, de p et V, de l'autre, satisfaisant simultanément à l'équation donnée. On peut, par exemple, se servir du double alignement représenté sur la figure, qui correspond à la solution

$$K = 0{,}01, \qquad D = 155^{\text{mm}}, \qquad p = 26^{\text{kg}}, \qquad V = 370 \text{ m : sec.}$$

21. Points condensés (³). — 1° *Temps de montée d'un avion.* — Si t est le temps, exprimé en minutes, de la montée à l'altitude z, exprimée en mètres, d'un avion dont la hauteur de plafond est z_1 et la vitesse ascensionnelle au départ V, en mètres par

(¹) Le procédé de mise en place indiqué ci-dessous rend inutile de tenir compte du décalage $\mu_3\lambda$ de l'échelle (D).

(²) Ce nomogramme est extrait de la collection de ceux qui ont été construits pendant la guerre, à la Section technique de l'Aéronautique (S. T. Aé.), par MM. le lieutenant Chrétien et Lagrula, astronomes à l'Observatoire de Nice, puis par M. Poircuitte, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Reims.

(³) D'autres exemples de points condensés se rencontrent au n° 26.

seconde, on a

$$t = \frac{2,303}{60} \frac{z}{V} \log\left(1 - \frac{z}{z_1}\right),$$

d'où, en prenant les logarithmes et représentant la fonction log log par le symbole log²,

$$\log t + k = \log z - \log V + \log^2\left(1 - \frac{z}{z_1}\right),$$

représentable par points alignés si l'on pose

$$u = \mu_1 \left[\log z + \log^2\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\right] \qquad v = -\mu_2 \log V,$$

ce qui, sur la parallèle aux axes divisant leur intervalle dans le rapport $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, donne (à un décalage près, dont la mise en place par alignement, telle qu'elle a été indiquée au numéro précédent, permet de ne pas tenir compte) l'échelle

$$w = \mu_3 \log t \qquad \text{avec} \qquad \mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Reste à définir, sur l'axe Au, les points condensés correspondant à la fonction de z et z_1 dont l'expression est ci-dessus écrite. Pour cela, on a recours à une échelle binaire (n° 9) rapportée à deux axes cartésiens, dont l'axe Oy se confond avec Au, l'axe Ox lui étant perpendiculaire. Cela revient à poser

$$x = \mu z_1, \qquad y = u,$$

μ étant un module quelconque. Les courbes (z) de cette échelle binaire ont alors pour équation

$$y = \mu_1 \left[\log z + \log^2\left(1 - \frac{\mu z}{x}\right)\right].$$

On les obtient en construisant individuellement les échelles (z) ainsi définies, sur les différentes droites (z_1), et unissant par des traits continus les points de même cote de ces échelles.

Le nomogramme dont la figure 11 est une réduction a été ainsi construit (¹) avec les modules

$$\mu = 0^{mm},022, \qquad \mu_1 = 110^{mm}, \qquad \mu_2 = 280^{mm}, \qquad \mu_3 = 30^{mm}.$$

(¹) A la S. T. Aé.

La position de l'index, marquée en pointillé sur la figure, correspond à l'exemple $z = 1800^m$, $z_1 = 5400^m$, $V = 5$ pour lequel on a $t = 7$ minutes.

2° *Formules Gossot-Liouville de balistique intérieure.* — Avec les formules Gossot-Liouville, le calcul de la vitesse initiale dans l'âme de la pièce se présente comme suit :

a étant le calibre en décimètres (diamètre du cercle équivalent à la section droite de l'âme rayée); c le volume total de l'âme, y compris la chambre, en décimètres cubes; c' le volume de la chambre (culasse fermée et projectile dans sa position de chargement) en décimètres cubes; p le poids du projectile en kilogrammes; ϖ le poids de la charge en kilogrammes; θ la caractéristique de la poudre; si l'on pose, en outre,

$$\zeta = \frac{\sqrt{pc'}}{a^2\theta}, \qquad \Delta = \frac{\varpi}{c'}, \qquad \rho = \frac{c}{c'}, \qquad W = \frac{pV^2}{c},$$

on définit les fonctions ε et η de Δ et ρ par une suite de formules, où entrent diverses variables intermédiaires, et que vient encore compliquer le fait que leur forme change suivant que certaines variables sont comprises dans tel ou tel intervalle [1].

Dans ces conditions, on a d'abord

$$m = \zeta^{\frac{3}{4}}\varepsilon; \tag{1}$$

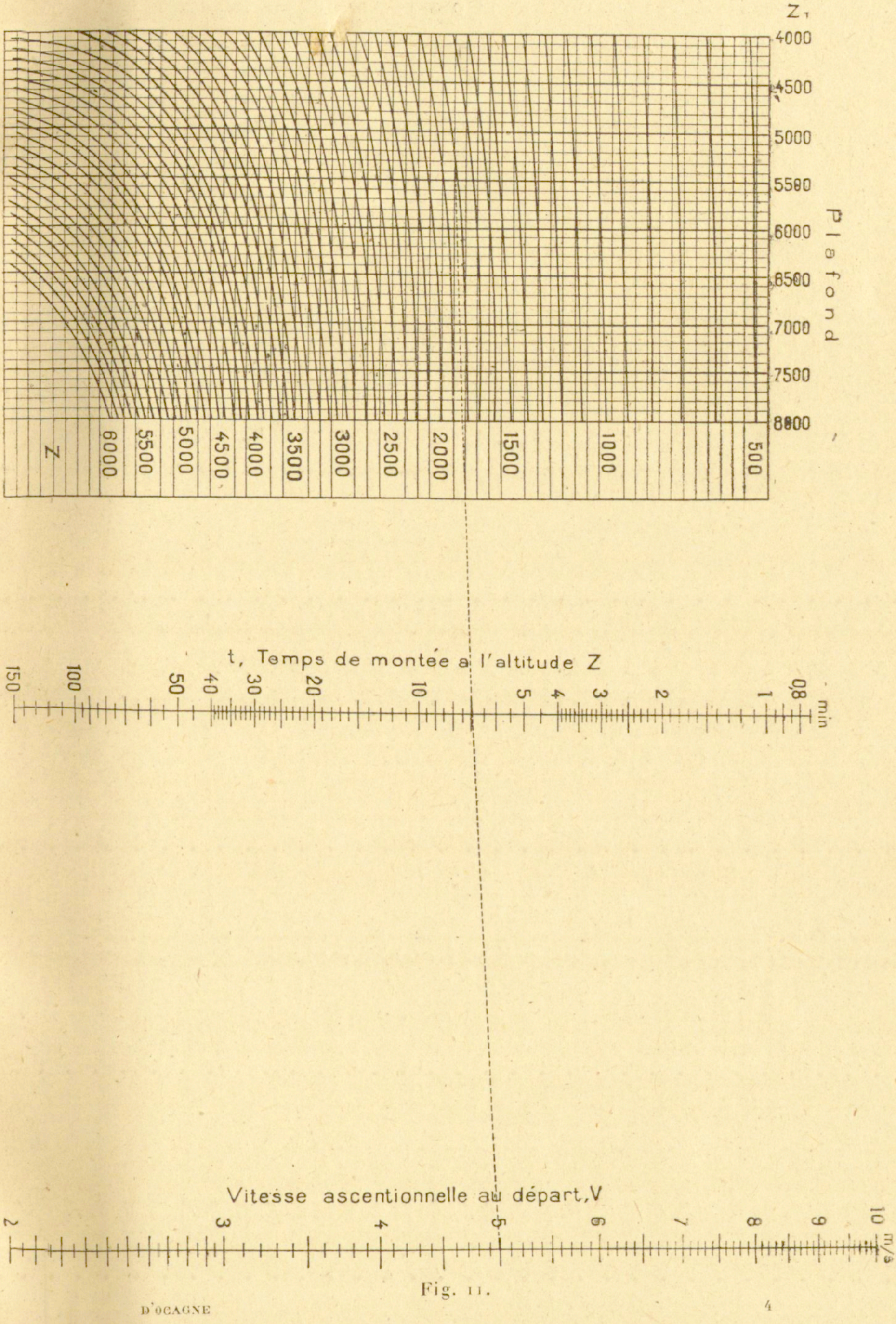
puis $F(m)$ étant encore une fonction à formes diverses en divers intervalles,

$$W = F(m)\eta. \tag{2}$$

L'ensemble de ces deux formules a, grâce à une anamorphose logarithmique, donné lieu à deux nomogrammes à échelles parallèles, sur l'un et l'autre desquels les fonctions ε et η de Δ et ρ sont représentées par des échelles binaires.

---

(1) On trouvera le détail de ces formules dans le document intitulé : *Balistique intérieure. Formules Gossot-Liouville, type* 1918 (septembre-octobre 1918), publié à la S. T. A. Signalons que, pour éviter, dans le présent exposé, toute confusion de notation, nous désignons ici par m la variable qui est appelée x dans ce document.



Z₁
Plafond
Z
t, Temps de montée à l'altitude Z
min
Vitesse ascentionnelle au départ, V
m/s

Fig. 11.

La construction de ces nomogrammes, très laborieuse, en raison de la forme compliquée des expressions analytiques qui y sont traduites, a été habilement réalisée par le capitaine d'infanterie Desquaires.

La figure 12 en fait connaître une réduction.

De simples coups de règle à calcul permettent d'avoir rapidement les valeurs de ζ, Δ et ρ. Le point (Δ, ρ) de la première échelle binaire (celle d'en haut), projeté sur l'axe des ε, lorsqu'on l'aligne avec le point ζ, donne m sur l'échelle $(m)_1$; puis l'alignement de la même valeur de m, lue sur l'échelle $(m)_2$, avec le point projeté du point (Δ, ρ) de la seconde échelle binaire (celle d'en bas) sur l'axe des η, donne W.

Les deux alignements marqués en pointillé sur la figure correspondent à l'exemple $\Delta = 0{,}44$, $\rho = 6$, $\zeta = 50$, pour lequel on a $W = 212$.

De cette valeur de W, un nouveau coup de règle à calcul permettrait de déduire V. L'usage de la règle à calcul pourrait être évité par des nomogrammes auxiliaires faciles à construire; mais cela compliquerait inutilement le tableau.

22. Réseau à deux systèmes de droites : Distance maxima d'un avion par vent nul. — K étant une constante numérique dont la valeur dépend de certaines caractéristiques de l'avion, m sa masse puissancique (prise ici égale à 2^{kg} par cheval), si l'on représente par A le paramètre de sécurité, ϖ la charge par cheval, π le poids total, la distance maxima D, exprimée en kilomètres que peut parcourir l'avion, est donnée par

$$D = K \log\left(\frac{3}{2} A \pi^{\frac{1}{2}} + \frac{m}{\varpi}\right),$$

que l'on peut écrire

$$10^{\frac{D}{K}} = \frac{3}{2} A \pi^{\frac{1}{2}} + \frac{m}{\varpi}.$$

Pour la représenter en points alignés, on peut poser

$$u = \mu_1 \frac{m}{\varpi}, \qquad v = \frac{3}{2} \mu_2 \pi^{\frac{1}{2}},$$

ce qui donne, pour le réseau (A, D) (nº 15), l'équation

$$\mu_2 u + \mu_1 A v - \mu_1 \mu_2 10^{\frac{D}{K}} = 0$$

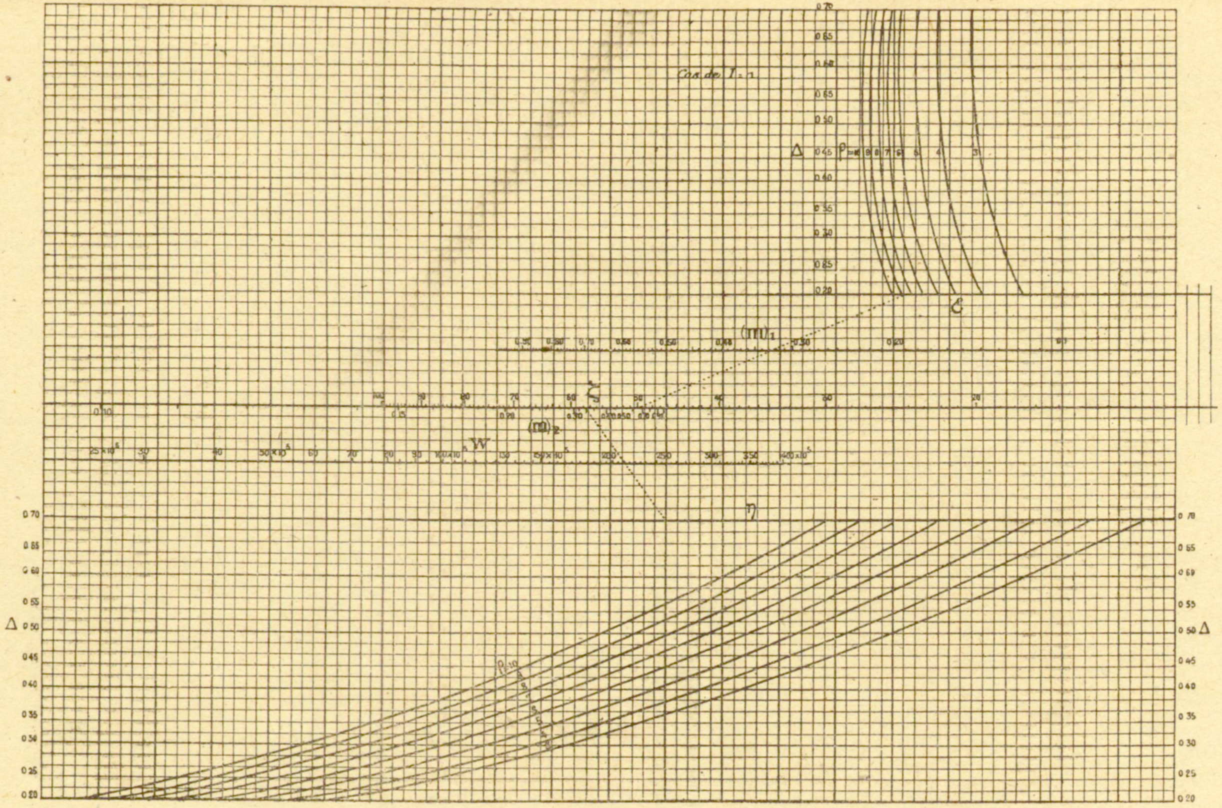


Fig. 12.

ou, si l'on rapporte les points aux axes cartésiens liés à $\mathrm{A}u$ et $\mathrm{B}v$ (nº 10),

$$x = \delta\,\frac{\mu_1 \mathrm{A} - \mu_2}{\mu_1 \mathrm{A} + \mu_2}, \qquad y = \frac{\mu_1 \mu_2\, 10^{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{K}}}}{\mu_1 \mathrm{A} + \mu_2}.$$

L'expression de x ne contenant pas D fournit l'équation des lignes (A) du réseau qui ne sont autres, comme on voit, que des

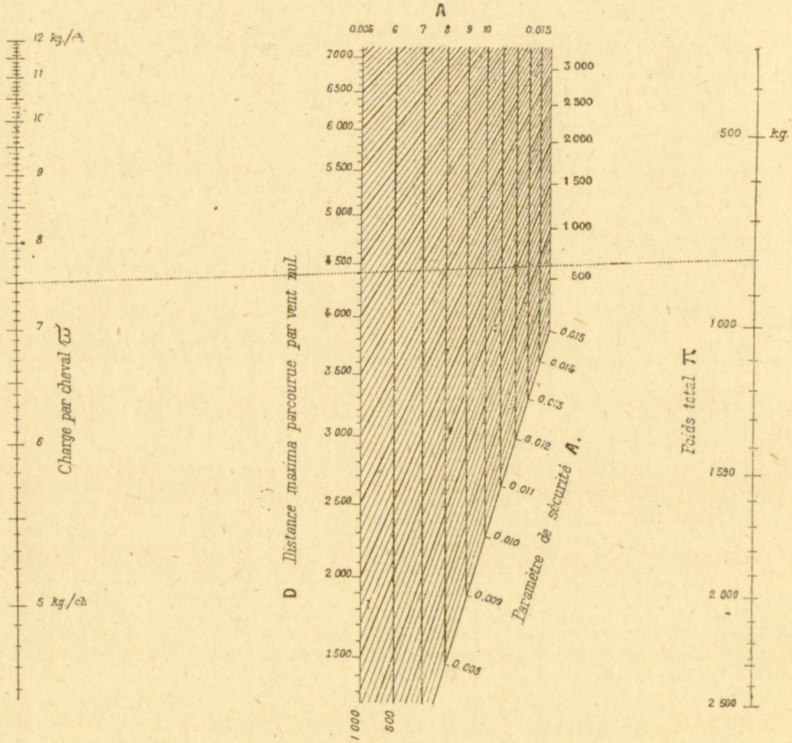


Fig. 13.

parallèles à $\mathrm{O}y$ menées par les points d'une échelle homographique déterminée sur l'axe $\mathrm{O}x$ par trois de ses points (nº 3).

Quant aux lignes (D), leur équation s'obtient très aisément par l'élimination de A entre les expressions de x et y, qui donne

$$\mu_1(x - \delta)\, 10^{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{K}}} + 2\,\delta y = 0,$$

droites issues du point ($x = \delta$, $y = 0$), c'est-à-dire de l'origine B de l'axe Bv, et déterminant sur l'axe Oy l'échelle exponentielle

$$y = \frac{1}{2} \mu_1 10^{\frac{K}{D}}.$$

La figure 13 donne une réduction de la partie utile de ce nomogramme [1]. L'alignement marqué en pointillé correspond à l'exemple $\pi = 800^{kg}$, $\varpi = 7{,}5$, $A = 0{,}012$, pour lequel on a $D = 1500^{km}$.

23. Réseau à un système de droites et un système de courbes : Pressions intérieures dans l'autofrettage. — L'équation suivante est empruntée à un travail de M. l'ingénieur général Jacob, entrepris à l'occasion de la construction du matériel d'artillerie lourde, confiée aux ateliers du Creusot, et relatif à l'autofrettage [2].

Elle lie, en certains cas, le rapport ϖ de la pression subie par le métal à la limite élastique qu'il comporte, au rapport ρ du rayon de la couche considérée au rayon de l'âme, et s'écrit

$$\varpi + 1{,}429 = \frac{\lambda_1}{\rho^n} + \frac{\lambda_2}{\rho^2} \qquad (\text{avec } n = 2{,}165),$$

les coefficients λ_1 et λ_2 variant d'un cas à l'autre ; mais on va voir comment, vu la façon dont sont fournies les données, on arrive à les éliminer.

On obtient la représentation de cette équation en posant

$$u = \mu\lambda_2, \qquad v = \mu\lambda_1,$$

μ étant un module appliqué à la fois aux axes Au et Bv, ce qui donne, pour le réseau des points (ρ, ϖ), l'équation

$$\rho^n u + \rho^2 v = \rho^{n+2} \mu(\varpi + 1{,}429)$$

---

(1) S. T. Aé.

(2) Un autre travail de l'ingénieur général Jacob a été publié en 1919 par les Établissements Schneider sous le titre : *Solutions nomographiques des problèmes de balistique extérieure*.

ou, en coordonnées cartésiennes (n° 10),

$$x = \delta \frac{\rho^2 - \rho^n}{\rho^2 + \rho^n}, \qquad y = (\varpi + 1,429) \frac{\rho^{n+2}}{\rho^2 + \rho^n}.$$

La première de ces formules ne contenant que ρ, on en conclut que les lignes (ρ) du réseau sont des parallèles à Oy.

L'équation en x et y des lignes (ϖ) proviendrait de l'élimination de ρ entre les expressions de x et y; mais la formation de cette équation est tout à fait inutile. En effet, l'expression de y, linéaire en ϖ, montre que, sur toute parallèle à Oy, caractérisée par une certaine valeur de ρ, les lignes (ϖ) déterminent une échelle métrique. Autrement dit, les lignes (ϖ) sont métriquement espacées suivant Oy (n° 6 *in fine*), et il suffit, sur chaque ligne (ρ), de déterminer les points appartenant à deux d'entre elles pour que ceux de toutes les autres s'en déduisent immédiatement.

En pratique, les données sont, dans chaque cas, constituées par deux couples de valeurs de ρ et ϖ correspondant aux deux cylindres limitant, dans l'épaisseur du tube, la couche à laquelle s'applique le nomogramme considéré; appelons les (ρ', ϖ') et (ρ'', ϖ''). Les points correspondants doivent se trouver sur l'alignement déterminé par les valeurs de λ_1 et λ_2 qui conviennent à ce cas; par suite, la droite joignant les points (ρ', ϖ') et (ρ'', ϖ'') ferait connaître, sur les axes Au et Bv, ces valeurs de λ_1 et λ_2; mais puisque, précisément, la position de l'index serait celle unissant les points cotés au moyen de ces valeurs, cette position est donnée par la droite qui vient d'être tirée et tous les couples de valeurs de ρ et ϖ, à l'intérieur de la couche considérée, sont fournis par les cotes des points (ρ, ϖ) qui se trouvent sur cette droite.

Il est dès lors inutile de faire figurer sur le nomogramme, dont la figure 14 offre une réduction, non seulement les échelles (λ_1) et (λ_2), mais même leurs supports.

On a tracé sur cette figure la position de l'index pour le cas où les couples des données sont

$$\rho' = 1, \qquad \varpi' = 1,35 \qquad \text{et} \qquad \rho'' = 1,53, \qquad \varpi'' = 0,82.$$

En suivant cet index, on voit, en particulier, que, pour $\rho = 2$, on a $\varpi = 0,25$.

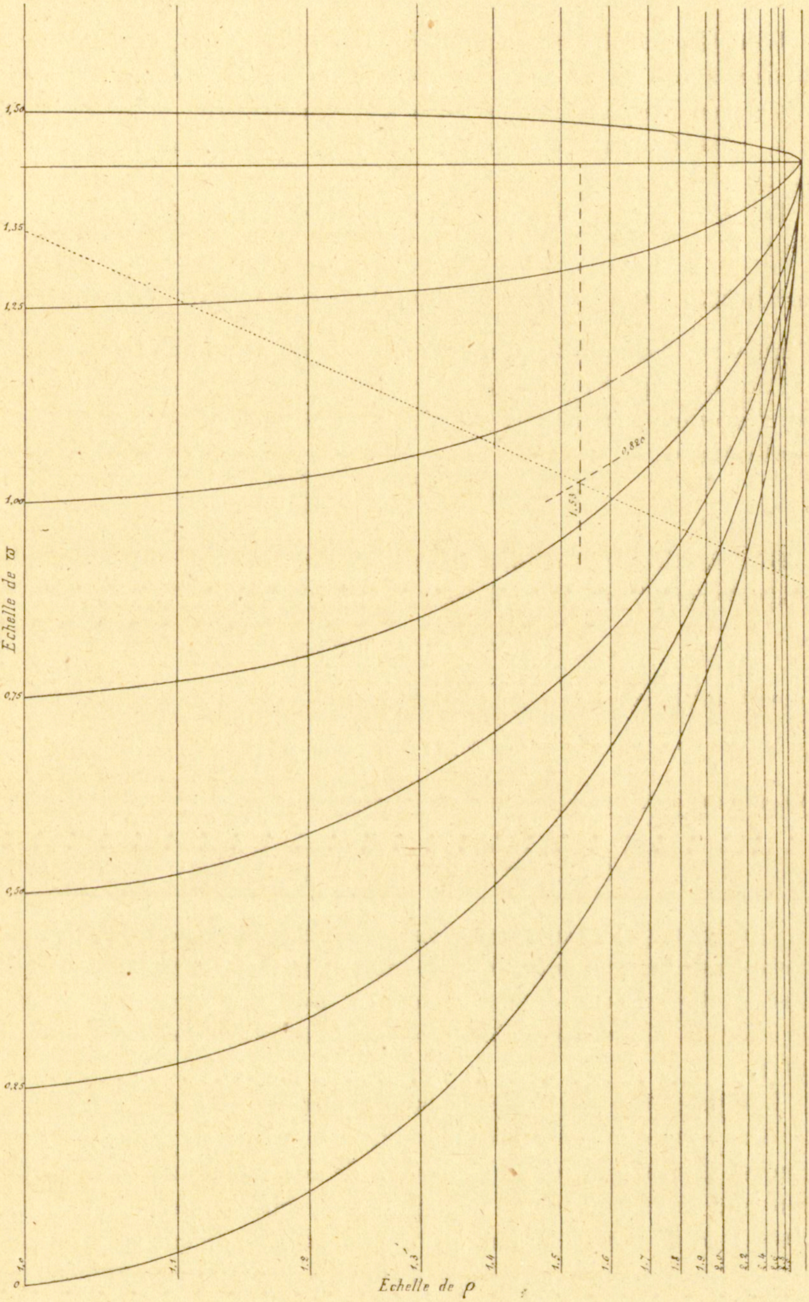

1,50
1,35
1,25
1,00
0,75
0,50
0,25
0
Échelle de ϖ
0,820
1,53
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2,0
2,2
2,4
Echelle de ρ

Fig. 14.

La collection des nomogrammes construits par M. l'ingénieur général Jacob va encore nous fournir un exemple d'application des réseaux de points à deux cotes à la représentation d'une équation à trois variables seulement, suivant la remarque faite à la fin du n° 15.

Les α et n étant des constantes numériques dont les valeurs sont

$$\alpha_1 = 1,429, \qquad \alpha_2 = 2,171, \qquad \alpha_3 = 0,0266, \qquad \alpha_4 = 0,5385, \qquad n = 0,684,$$

l'équation en question, où ϖ a la même signification que ci-dessus, a étant le rapport du rayon extérieur au rayon intérieur et z, qui est l'inconnue, le rapport du rayon du joint au rayon extérieur, peut s'écrire

$$\varpi + \alpha_1 = \frac{\alpha_2 a^n z^n}{1 + \alpha_4 z^2} + \frac{\alpha_3 a^2 z^2}{1 + \alpha_4 z^2}.$$

Si l'on fait correspondre à la variable a deux échelles définies respectivement sur $\mathrm{A}u$ et $\mathrm{B}v$ par

$$u = \mu\alpha_3 a^2 \qquad \text{et} \qquad v = \mu\alpha_2 a^n,$$

on obtient le réseau (z, ϖ) dont l'équation est

$$z^2 u + z^n v = \mu(1 + \alpha_4 z^2)(\varpi + \alpha_1),$$

ou, si l'on passe aux coordonnées cartésiennes,

$$x = \delta \frac{z^n - z^2}{z^n + z^2}, \qquad y = \mu \frac{(1 + \alpha_4 z^2)(\varpi + \alpha_1)}{z^n + z^2}.$$

Les lignes (z) de ce réseau sont, d'après l'expression de x, des parallèles à $\mathrm{O}y$; en outre, l'expression de y, linéaire en ϖ, montre que les lignes (ϖ) sont métriquement espacées suivant $\mathrm{O}y$, ce qui réduit leur construction d'ensemble à celle de deux d'entre elles.

Les positions de l'index pour la lecture du nomogramme, unissant sur $\mathrm{A}u$ et $\mathrm{B}v$ les points de même cote a, peuvent être tracées d'avance et cotées au moyen de ces valeurs de a, et l'on retombe finalement sur un nomogramme à entre-croisement; mais l'avantage de cette solution, par rapport à celle qu'eût constituée un abaque purement cartésien (à laquelle elle peut être rattachée par voie d'anamorphose), consiste dans le bénéfice qu'il y a à

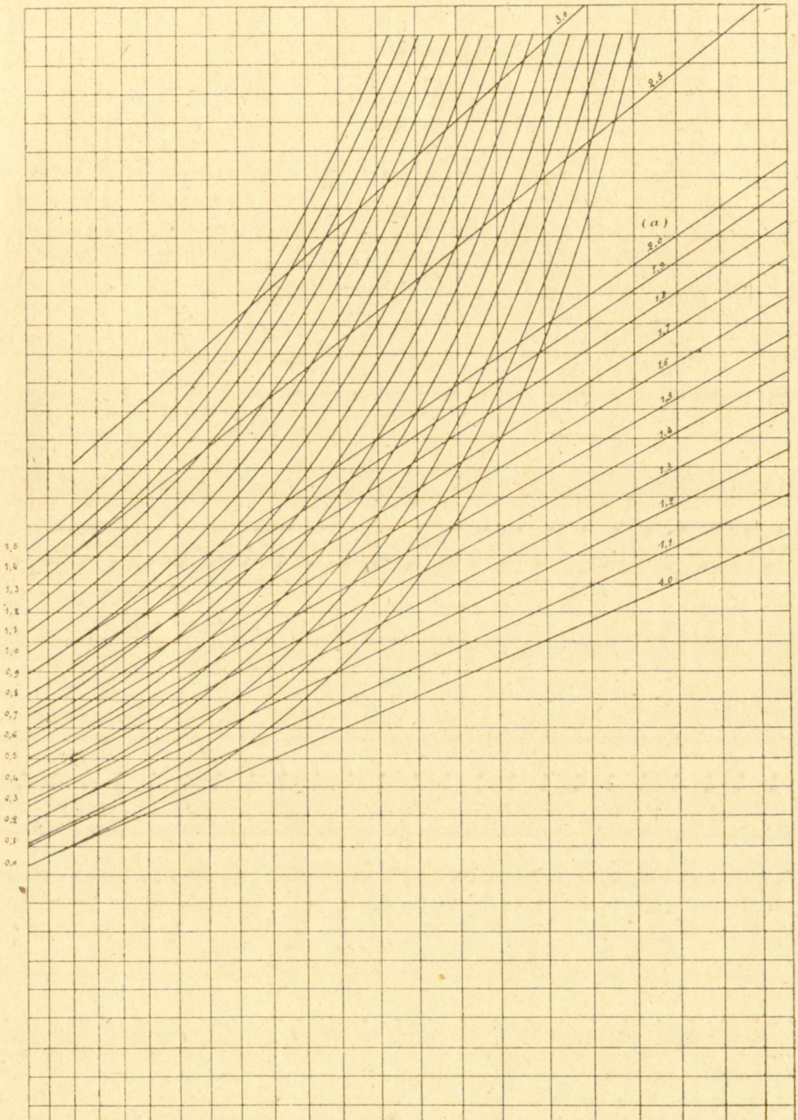


Fig. 15.

retirer, pour la rapidité de la construction, de l'introduction, en dehors de simples systèmes de droites, d'un unique système de courbes qui sont métriquement espacées, c'est-à-dire qui se déduisent immédiatement toutes de deux seulement d'entre elles.

La figure 15 offre une réduction de ce nomogramme dont l'usage se borne à lire la cote de la droite (z), parallèle à Oy, passant par le point de rencontre de la droite (a) et de la courbe (ϖ). Par exemple, pour $a = 1,6$, $\varpi = 0,3$, on lit $z = 0,55$.

24. Réseau à deux systèmes de courbes : Poids total transporté par un avion en vol horizontal. — Si p est ce poids total (variant de 0^{kg} à 1000^{kg}), T la puissance nominale (de 0 à 1000 chevaux), ϖ la charge par cheval (de 4^{kg} à 12^{kg}), A le paramètre de sécurité (de 0,005 à 0,015), ces variables sont liées par l'équation

$$\varpi T = A \varpi^{\frac{2}{3}} T^{\frac{2}{3}} + m T + p,$$

m étant la masse puissancique. On représente cette équation en posant

$$u = \mu_1 A, \qquad v = \mu_2 p,$$

ce qui donne deux échelles métriques sur Au et Bv.

On en déduit, pour le réseau (ϖ, T), l'équation

$$\mu_2 \varpi^{\frac{2}{3}} T^{\frac{2}{3}} u + \mu_1 v = \mu_1 \mu_2 (\varpi - m) T$$

ou, en coordonnées cartésiennes (n° 10),

$$x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2 \varpi^{\frac{2}{3}} T^{\frac{2}{3}}}{\mu_1 + \mu_2 \varpi^{\frac{2}{3}} T^{\frac{2}{3}}}, \qquad y = \frac{\mu_1 \mu_2 (\varpi - m) T}{\mu_1 + \mu_2 \varpi^{\frac{2}{3}} T^{\frac{2}{3}}}.$$

L'ensemble de ces deux expressions, suivant qu'on y donne à ϖ ou à T une valeur constante, permet, lorsqu'on fait varier le second paramètre, de déterminer point par point la courbe (ϖ) ou la courbe (T).

Pour construire le nomogramme [1] dont la figure 16 est une réduction, on a pris $\mu_1 = 100\,000 \mu_2$ en se plaçant dans l'hypo-

---

[1] S. T. Aé.

thèse où $m = 2$ (et en adoptant pour les axes le sens positif de haut en bas).

On remarque immédiatement que, pour un paramètre de sécu-

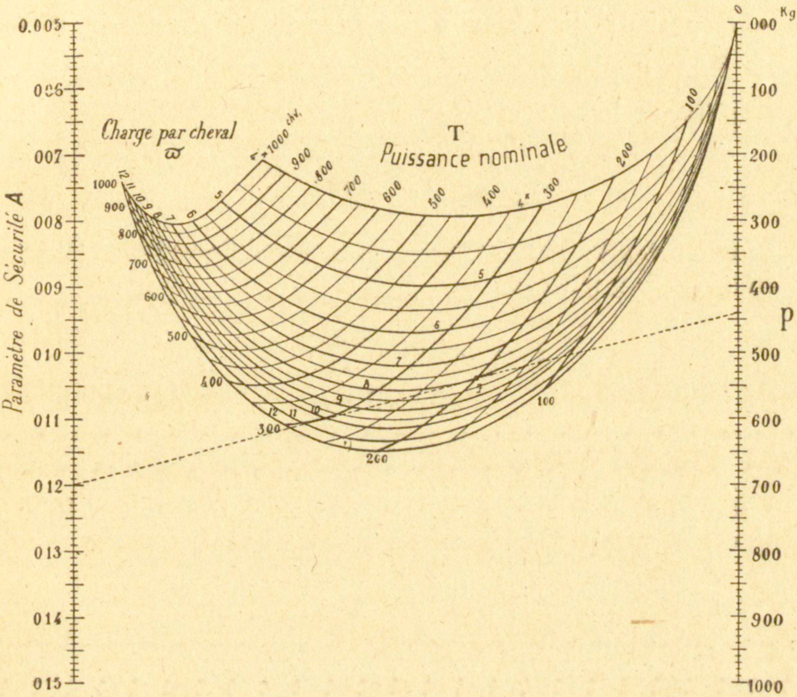


Fig. 16.

rité A et un poids total p donnés, ce nomogramme permet de déterminer un minimum de charge par cheval, qui n'est autre que la cote de la courbe (ϖ) tangente à la droite joignant les points (A) et (p). La cote de la courbe (T) passant par le point de contact fait connaître la puissance nominale correspondante. Par exemple, pour $A = 0,012$ et $p = 440^{kg}$, on voit que le minimum de la charge par cheval est $\varpi = 8^{kg}$ et que la puissance nominale correspondante est $T = 200$ chevaux, environ.

25. Triple alignement avec réseau à deux cotes : Épaisseurs minima des pales d'hélice vers le moyeu. — Désignons par :

h cette épaisseur en centimètres (de 0 à 24),

D la densité de la matière (de 0,1 à 1),
R sa tension en kg : cm² (de 25 à 300),
V la vitesse périphérique en m : sec (de 0 à 300),
P la poussée en kilogrammes (de 100 à 500),
ρ le rapport du diamètre de l'hélice à la largeur de la pale (de 4 à 20).

L'épaisseur cherchée est donnée par la formule

$$h = \sqrt{\frac{3}{2R}\left(1 + \frac{3DV^2}{8R}\right)}\sqrt{P\rho}.$$

Pour représenter cette formule, nous introduirons les variables auxiliaires ξ et η telles que

$$(1) \qquad \xi = \sqrt{\frac{3}{2R}\left(1 + \frac{3DV^2}{8R}\right)},$$

$$(2) \qquad \eta = \xi\sqrt{P},$$

$$(3) \qquad h = \eta\sqrt{\rho}.$$

Chacune de ces formules est représentable en points alignés. Pour (1), on prendra

$$u = -\mu_1 V^2, \qquad v = \mu_2 \xi;$$

pour (2), si l'on fait coïncider le nouvel axe des u avec l'axe des v précédents, de façon que cet axe commun constitue une charnière,

$$u = \mu_2 \xi, \qquad v = -\mu_3 \eta i;$$

et pour (3), de même,

$$u = -\mu_3 \eta, \qquad v = \mu_4 h.$$

Cela donne pour (1) le réseau (D, R)

$$3\sqrt{3}\,\mu_2 D u + 8\sqrt{2}\,\mu_1 R^{\frac{2}{3}} v = 8\sqrt{3}\,\mu_1 \mu_2 R$$

ou

$$x = \delta\,\frac{8\sqrt{2}\,\mu_1 R^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{3}\,\mu_2 D}{8\sqrt{2}\,\mu_1 R^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{3}\,\mu_2 D}, \qquad y = \frac{8\sqrt{3}\,\mu_1 \mu_2 R}{8\sqrt{2}\,\mu_1 R^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{3}\,\mu_2 D},$$

dans lequel les lignes (R), dont l'équation, provenant de l'élimi-

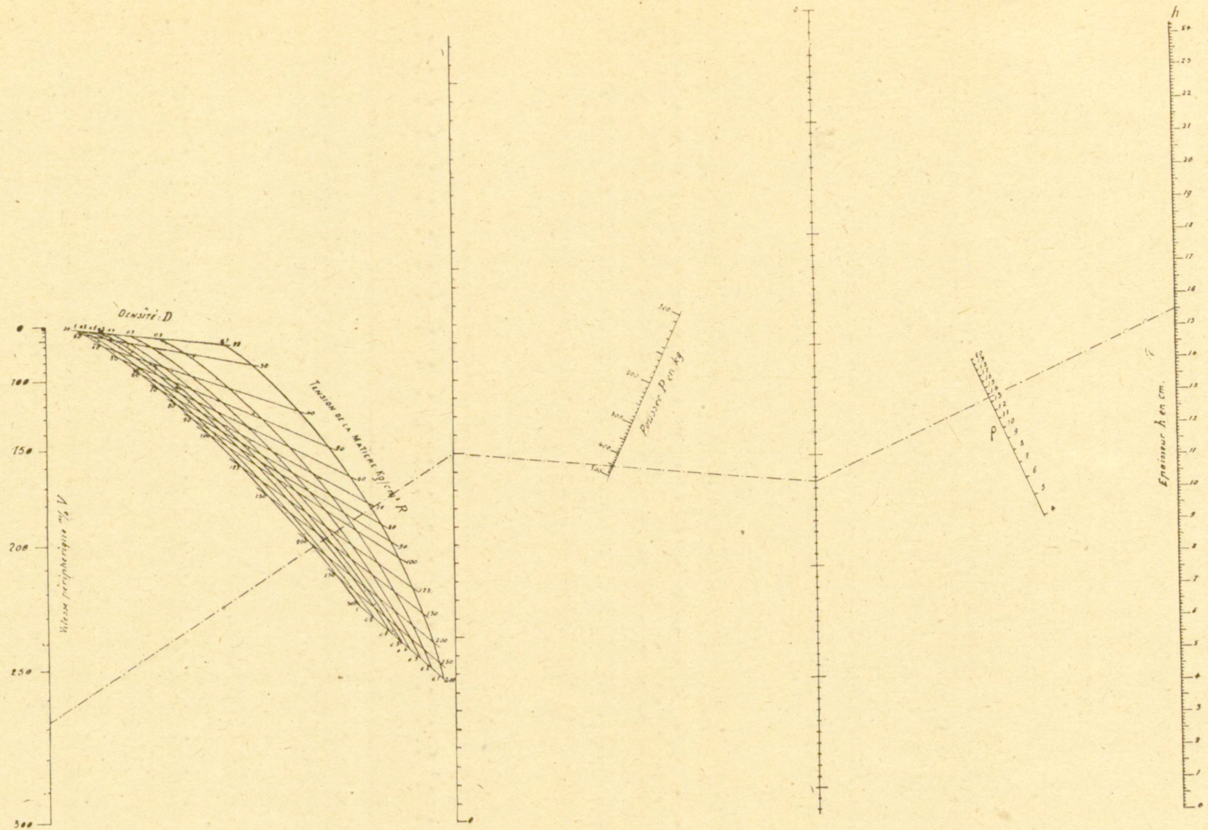

Densité : D
Tension de la Matière Kg/cm² R
Vitesse périphérique m/m V
Poussée P en kg
ρ
Epaisseur h en cm.
h

Fig. 17.

nation de D, est

$$\sqrt{3}\,\mu_3(x+\delta) = 2\sqrt{2}\,\delta\sqrt{\mathrm{R}}\,y,$$

sont des droites issues de l'origine A de l'axe Au.

Pour (2), on a l'échelle (P) définie par

$$\mu_3\sqrt{\mathrm{P}}\,u + \mu_2 v = 0$$

ou, sur l'axe Ox,

$$x = \delta\,\frac{\mu_2 - \mu_3\sqrt{\mathrm{P}}}{\mu_2 + \mu_3\sqrt{\mathrm{P}}};$$

pour (3), l'échelle (ρ) définie par

$$\mu_4\sqrt{\rho}\,u + \mu_3 v = 0$$

ou, sur l'axe Ox,

$$x = \delta\,\frac{\mu_3 - \mu_4\sqrt{\rho}}{\mu_3 + \mu_4\sqrt{\rho}}.$$

Les échelles (P) et (ρ), l'une et l'autre projectives de celle de $\sqrt{z}$, se construisent facilement au moyen de celle-ci par le procédé connu (n° 3).

Le nomogramme correspondant (¹), construit avec des modules tels que

$$\mu_2 = 3500\,\mu_1, \qquad \mu_3 = \frac{\mu_2}{17}, \qquad \mu_4 = \frac{2\,\mu_3}{7},$$

est reproduit, en réduction, sur la figure 17.

Les positions de l'index marquées sur la figure correspondent à l'exemple

$$\mathrm{V} = 268 \text{ m : sec}, \qquad \mathrm{D} = 0{,}655, \qquad \mathrm{R} = 167 \text{ kg : cm}^2,$$
$$\mathrm{P} = 454^{\mathrm{kg}}, \qquad \rho = 13{,}64,$$

pour lequel, le nomogramme donne $h = 15^{\mathrm{cm}},5$.

26. Emploi de transparents : Formules Charbonnier-Sugot de balistique intérieure. — Nous n'avons fait qu'indiquer en passant, au n° 16, l'extension qui peut être donnée aux méthodes nomographiques par l'emploi de systèmes mobiles pouvant, en certains cas, prendre la forme de transparents sur lesquels sont représentés

(¹) S. T. Aé.

certains éléments, cotés ou non, que l'on applique sur un autre nomogramme. Des représentations de ce genre ont été réalisées notamment par le commandant Batailler (1), et même à propos de questions de balistique.

Nous nous bornerons à signaler ici un ingénieux emploi de transparents, imaginé par l'ingénieur d'artillerie navale Bartoszewski, à l'occasion de certains problèmes à résoudre par le moyen des formules Charbonnier-Sugot de balistique intérieure (2).

En premier lieu, supposons que l'on représente par un abaque cartésien la relation

$$X_{45} = f(C, V_0)$$

faisant connaître la portée X_{45}, exprimée en kilomètres, d'une pièce tirant sous un angle de 45°, avec le coefficient balistique C et la vitesse initiale V_0. Sur cet abaque, dont l'axe Ox porte une échelle métrique pour C et l'axe Oy une échelle métrique pour V_0, les courbes (X_{45}) ont pu être construites point par point par application de la méthode des vitesses fictives de l'ingénieur en chef d'artillerie navale Sugot. Ainsi a été obtenu l'abaque dont la figure 18 est une réduction.

Or, pour une pièce déterminée, dont on connaît les caractéristiques P_M (pression maximum), ρ (rapport du volume de l'âme au volume de la chambre), Δ (rapport du poids de la charge en kilogrammes au volume de la chambre en décimètres cubes), Δ_p (rapport du poids du projectile en kilogrammes au même volume), L (longueur du canon), il existe, en vertu des formules Charbonnier, une relation

$$V_0 = \varphi(C)$$

entre la vitesse initiale et le coefficient balistique que l'on peut représenter au moyen d'une courbe Φ sur un transparent, en se servant des mêmes échelles (C) et (V_0) que précédemment.

Si l'on applique ce transparent sur l'abaque précédent, avec coïncidence des échelles (C) et (V_0), chaque point de rencontre

(1) 3, p. 364.

(2) Les nomogrammes ici pris pour exemples font partie d'un ensemble intéressant, relatif auxdites formules, qui a été réalisé par l'ingénieur Bartoszewski avec la collaboration de M. Maurice Janet, agrégé des sciences mathématiques.

de la courbe Φ avec une des courbes (X_{45}) de l'abaque fait connaître par les cotes des axes du quadrillage qui s'y croisent les valeurs correspondantes de V_0 et C, et, par suite, la vitesse initiale V_0 qui permet à la pièce considérée, tirant sous un angle de 45°, d'atteindre la portée X_{45}. Dès lors, il suffit de voir à

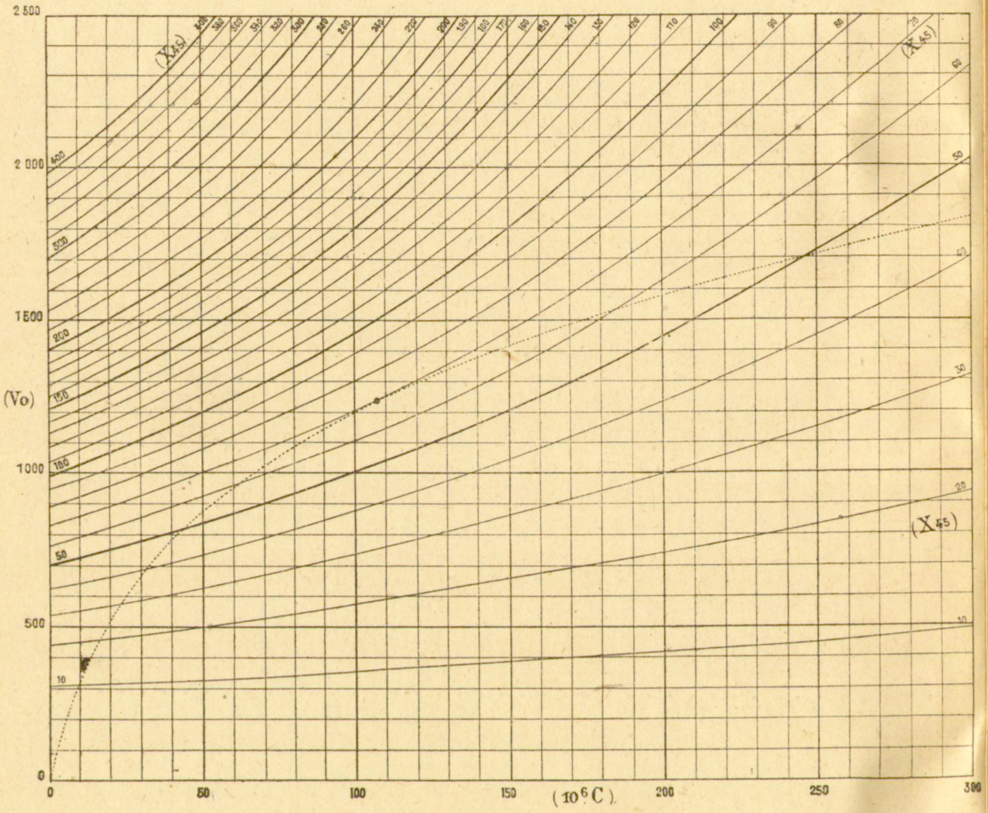


Fig. 18.

quelle courbe (X_{45}) la courbe Φ, placée comme il a été dit, se trouve être tangente, pour savoir quelle est la plus grande portée que la pièce peut atteindre en tirant à 45°.

La courbe, représentée en pointillé sur la figure 18, est celle qui a été tracée sur le transparent avec les données

$$P_M = 4000 \text{ kg : cm}^2; \qquad \rho = 4; \qquad \Delta = 0{,}30; \qquad L = 20^m$$

Elle montre que la portée maximum est, dans ce cas, $X_{45} = 70^{km}$, et qu'elle est atteinte pour une vitesse initiale $V_0 = 1250^m$ environ.

Comme second exemple, nous prendrons le nomogramme représentatif de la relation entre les variables P_M, Δ et Δ_p ci-dessus définies et le coefficient de vivacité A de la poudre, ou, plus exactement, la fonction α de ce coefficient définie par

$$\alpha = \log \frac{A c'}{a^2},$$

c' étant encore le volume de la chambre en décimètres cubes et a le calibre en décimètres.

Cette relation est de la forme

$$\alpha = U(\Delta, \Delta_p) + V(\Delta, P_M).$$

Pour en obtenir la représentation, M. Bartoszewski a eu l'idée de recourir aux points alignés avec échelles binaires définies, le long de Au et Bv, au moyen des formules

$$u = \mu U(\Delta, \Delta_p), \qquad v = \mu V(\Delta, P_M),$$

les lignes (Δ) de chacune de ces échelles binaires étant des parallèles menées par les points de division d'échelles métriques, symétriques l'une de l'autre par rapport à Oy, d'une échelle binaire à l'autre.

Le tracé des lignes (Δ) et (P_M) de ces échelles binaires résultant des formules Charbonnier-Sugot, on obtient ainsi le nomogramme dont la figure 19 est une réduction.

Quant à l'échelle (α), alors définie par $\mu\alpha = u + v$ ou $x = 0$, $y = \frac{\mu}{2}\alpha$, elle n'est autre, comme on voit, qu'une échelle métrique portée sur Oy.

On peut, au reste, remarquer que, puisque les points correspondant à une même valeur de Δ dans les deux échelles binaires, sont à égale distance l'un de Au, l'autre de Bv, il n'y a pas lieu de les projeter sur ces axes pour prendre l'alignement, celui qui serait ainsi déterminé coupant l'axe (α) au même point que la droite qui joint directement les points (Δ, Δ_p) et (Δ, P_M).

Mais il arrive que, se donnant la vivacité de la poudre, par suite α, on se propose au contraire de trouver le poids correspondant de la charge à employer, c'est-à-dire Δ. La difficulté tient, en ce cas, à ce que Δ figure à la fois dans les deux échelles binaires; M. Bartoszewski l'a très heureusement levée par la simple remarque que, dans tous les cas, le point (α) est le milieu de l'intervalle entre les points (Δ, Δ_p) et (Δ, P_M) et, par suite,

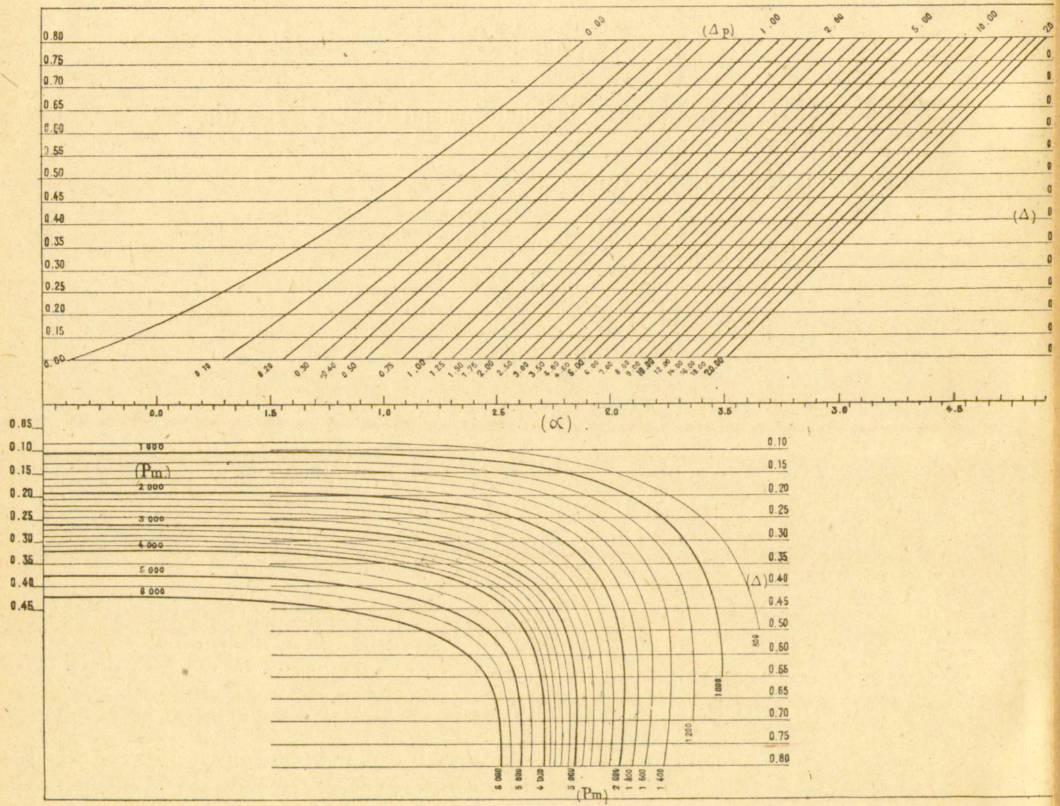


Fig. 19.

que, si l'on peut faire tourner l'échelle binaire supérieure de 180° autour du point (α), le point (Δ, Δ_p) de cette échelle vient en coïncidence avec le point (Δ, P_M) de l'échelle inférieure. Il suffit, dès lors, ayant reproduit l'échelle binaire supérieure sur un transparent, de faire tourner ce transparent de manière à appliquer son axe (α) sur celui du nomogramme fixe tout en faisant coïncider, de l'un à l'autre de ces axes, le point (α) ayant pour cote la valeur de α donnée. Dans ces conditions, les lignes (Δ_p) et (P_M), cotées au moyen des valeurs données, se coupent au point provenant de la coïncidence des points (Δ, Δ_p) et (Δ, P_M) ainsi qu'il a été dit. La cote de la ligne (Δ) passant par ce point fait alors connaître la valeur cherchée de Δ.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie},
Quai des Grands-Augustins, 55.
61707-20