

4.41 — optymalizacja
4.43 — próby, braki, układy
prętowe

R. Bogacz, R. Janiszewski

**ZAGADNIENIA ANALIZY
I SYNTEZY KOLUMN
OBCIĄŻONYCH SIŁAMI ŚLEDZĄCYMI
ZE WZGLĘDU NA STATECZNOŚĆ**

6/1986

P. 269



WARSZAWA 1986

ISSN 0208-56

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 sierpnia 1985 r.



56873



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark.wyd. 3,64 Ark.druk. 5,75
Oddano do drukarni w lutym 1986 r.
Nr zamówienia 134/86

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Roman Bogacz
Pracownia Teorii Materiałów
Niesprężystych IPPT
Ryszard Janiszewski
Politechnika Lubelska

ZAGADNIENIA ANALIZY I SYNTEZY KOLUMN
OBCIĄŻONYCH SIŁAMI ŚLEDZĄCYMI ZE
WZGLĘDU NA STATECZNOŚĆ

1. Wstęp

Projektowanie kolumn narażonych na utratę stateczności, a w szczególności projektowanie optymalne wymaga określenia optymalnych przekrojów oraz parametrów charakteryzujących podparcia. Obciążenia konstrukcji można podzielić na dwa rodzaje: konserwatywne i niekonserwatywne (obciążenia nie posiadające potencjału).

Stosownie do rodzaju obciążenia istnieją odpowiednie metody badania stateczności. W przypadku obciążeń konserwatywnych wystarczy stosować statyczne kryteria stateczności. Natomiast jeżeli obciążenie jest niekonserwatywne poza szczególnymi przypadkami [67, 108] wymagane jest stosowanie kinetycznego kryterium stateczności.

Pierwsze rozwiązania optymalnego kształtowania kolumn dotyczyły kolumn obciążonych siłą Eulera. Zagadnienie to było przedmiotem badań takich badaczy jak: T. Clausen [36], H. Blasius [17], N. Czencow [208], E. Nikolai [201], M. Życzkowski [180], J. B. Keller [76], J. Tadjbakhsh i J. B. Keller [157], W. Krzyś i M. Życzkowski [91], J. E. Taylor [158].

Optymalne kształtowanie kolumn obciążonych konserwatywnymi siłami było również przedmiotem prac A. Gajewskiego i Życzkowskiego [51], M. Farshada i J. Tadjbakhsha [43], A. Gajewskiego i R. Paleja [50]. Szereg prac poświęconych zostało poszukiwaniom minimalnego ciężaru kolumny przy zadanym obciążeniu [79, 203, 204, 207], a także zagadnieniu odwrotnemu, w którym należy

wyznaczyć maksymalną siłę wybaczącą dla zadanej objętości kolumny [36,77,187,188].

Badania stateczności układów niekonserwatywnych zostały zapoczątkowane w latach dwudziestych przez E.Ė.Nikolai'a (1880r-1950r.) [98-200], a następnie w latach pięćdziesiątych kontynuowane przez H.Zieglera [173-176,178], który poświęcił wiele prac zagadnieniom stateczności tych układów. Istotnym wydarzeniem w rozwoju badań nad statecznością układów niekonserwatywnych było opublikowanie w 1961 roku przez Bołotina [183] monografii dotyczącej zagadnień niekonserwatywnych teorii stateczności układów sprężystych. Rozwój metod analizy tych zagadnień stał się możliwy dzięki wprowadzeniu przez H.H.E.Leipholza [92,94-107,110,112] uogólnionej zasady Hamiltona, uogólnionej samosprężoności, uogólnionego ilorazu Rayleigha i tzw. układu konserwatywnego drugiego rodzaju. Wielu badaczy poświęciło swoje prace [1,15,31,78,113,150,153,133,138,140,163,166,172] metodzie Ritza, Galerkina, metodzie różnic skończonych i elementów skończonych w zastosowaniu do analizy stateczności układów niekonserwatywnych. W pracy N.Olhoffa [124] podano metodę poszukiwania optymalnego kształtu elementów konstrukcyjnych polegającą na maksymalizacji wybranej pojedynczej wartości własnej (np. pierwszej siły krytycznej). Metoda ta nazywana jest optymalizacją jednomodalną (unimodalną). Tak sformułowane zagadnienie optymalizacji okazuje się w wielu przypadkach niewystarczające. Zwrócili na to uwagę N.Olhoff i H.Rasmussen w pracy [125]. W pracy swej postawili zagadnienie optymalizacji bimodalnej. Sformułowanie bimodalne było również przedmiotem badań Błachuta i Gajewskiego w pracach [18,19,49] poświęconych optymalnemu kształtowaniu sprężystych i sprężysto-plastycznych kolumn ściskanych siłami śledzącymi skupionymi i rozłożonymi, a także Seyraniana i Bratusa w pracach [184,203,204]. Mankamentem obu metod (unimodalnej i bimodalnej) jest brak możliwości przewidzenia w jakich przypadkach stosować sformułowanie unimodalne, a w jakich sformułowanie bimodalne. Istnieje także możliwość otrzymania zerowego przekroju poprzecznego jako przekroju optymal-

nego, w przypadku nierozalnie sformułowanego zadania. Coraz większą popularność wśród metod optymalnego projektowania kolumn zdobywa analiza wrażliwości. P.Pedersen i A.P.Seyranian [128,129] zastosowali tę analizę do optymalnego projektowania kolumn obciążonych siłami niekonserwatywnymi.

Badania doświadczalne kolumn obciążonych siłami śledzącymi prowadzili: W.T.Feld, S.Nemat-Nasser, S.N.Prasad i G.Herrmann [44,139], N.Willems [65,170], W.G.Wood, S.S.Saw, P.M.Saunders [141,171], G.T.Done, A.Simpson [38,40], Y.Sugiyama [147] oraz O.Mahrenholtz wraz z pierwszym z autorów niniejszej pracy [24].

Przegląd różnorodnych zagadnień stateczności układów sprężystych poddanych siłom śledzącym zawarty jest w pracach [18,59,106,152,181,182,202,206].

Celem tej pracy jest prezentacja metod analizy oraz optymalnego projektowania kolumn ze względu na stateczność. W drugim rozdziale pracy prezentowane są klasyczne zagadnienia stateczności kolumn Becka, Reuta, Leipholza i Haugera. Optymalizacja kształtu kolumn jest tematem rozdziału trzeciego. Zależność optymalnych warunków utraty stateczności od rozstawu mas skupionych jest przedmiotem rozważań, którym poświęcono rozdział czwarty. Wpływ tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego oraz wpływ podłoża lepkosprężystego na stateczność kolumn to zagadnienia omawiane w rozdziale piątym i szóstym. Ostatni rozdział jest poświęcony zagadnieniom stateczności kolumn z nieciągłością sztywności.

2. Stateczność kolumn obciążonych siłami śledzącymi.

W niniejszej części pracy omówimy wyniki analizy stateczności kolumn poddanych obciążeniom niekonserwatywnym. Jako klasyczne przykłady zostaną podane rozwiązania dla kolumn: Becka, Reuta, Leipholza i Haugera.

2.1. Klasyczne zagadnienia Becka i Reuta

Kolumna obciążona na wolnym końcu siłą skupioną, która zachowuje kierunek styczny do zgiętej osi przedstawiona została na rysunku 2.1.a. Taką konstrukcję nazywamy kolumną Becka, gdyż Beck [16] w 1952 r. pierwszy podał wartość siły krytycznej dla tego przypadku. Druga kolumna obciążana jest siłą skupioną, skierowaną zawsze wzdłuż nieodkształconej osi kolumny jak zilustrowano na rysunku 2.1b. Konstrukcję tę nazwano w literaturze kolumną Reuta [119].

Równanie ruchu dla obu kolumn (Becka i Reuta) jest postaci:

$$(2.1) \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

gdzie: EI - sztywność na zginanie,
ρ - liniowa gęstość masy,
w - przemieszczenie
t - czas.

Warunki brzegowe dla kolumny Becka są następujące

$$\text{dla } z=0 : \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$(2.2) \quad \text{dla } z=L : \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] = 0.$$

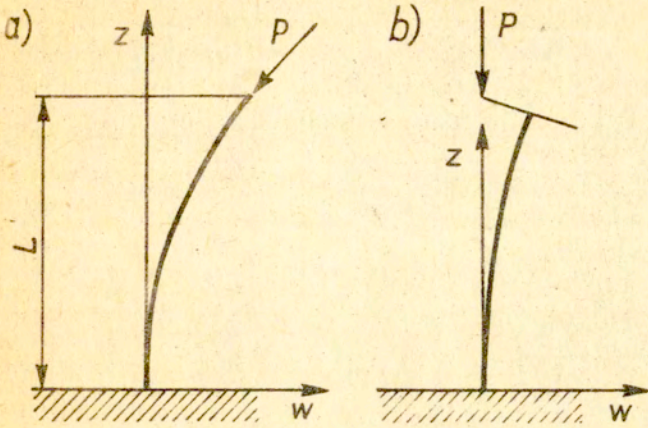
Natomiast dla kolumny Reuta warunki brzegowe przyjmują postać:

$$\text{dla } z=0 : \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial z}=0$$

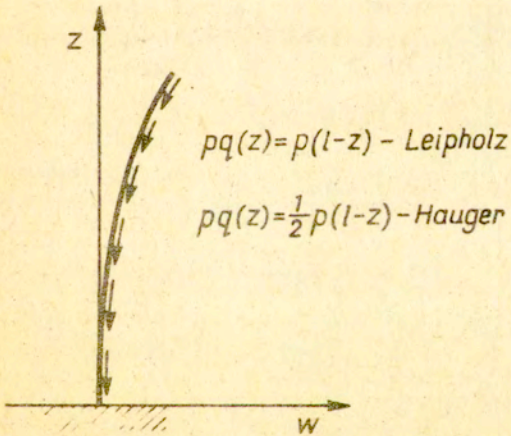
$$\text{dla } z=L : \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Pw = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Pw \right] = 0$$

(2.3)

Obydwa przedstawione problemy nie są samosprężone, są one jednak wzajemnie sprzężone [12,13,119], a ponadto zarówno kolumna Becka jak i Reuta traci stateczność przy tej samej wartości siły krytycznej.



Rys. 2.1. Kolumna Becka i kolumna Reuta.



Rys. 2.2. Kolumna Leipholza i kolumna Haugera.

Zakładamy następującą harmoniczną postać rozwiązania równania (2.1) [16, 188] :

$$(2.4) \quad w(z,t) = u(z) e^{i\Omega t},$$

która prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego

$$(2.5) \quad u^{(4)} + \bar{P} u'' - \omega^2 u = 0.$$

W równaniu (2.5) przyjęto następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(2.6) \quad x = \frac{z}{L}, \quad \bar{P} = \frac{PL^2}{EI}, \quad \omega^2 = \frac{\Omega^2 L^4}{EI}.$$

Rozwiązanie równania (2.5) może być zapisane w postaci:

$$(2.7) \quad u(x) = C_1 \operatorname{sh} k_1 x + C_2 \operatorname{ch} k_1 x + C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x,$$

gdzie:

$$k_{1,2}^2 = \frac{\mp \bar{P} + \sqrt{\bar{P}^2 + 4\omega^2}}{2}.$$

Beck [16] otrzymał krytyczną wartość siły śledzącej $P_{kr} = 20,05 EI/L^2$, natomiast Dejnego i Leonow [188] otrzymali wartość $P_{kr} = 19,767 EI/L^2$ przy $\Omega^2 = 0,993 \pi^4 EI / \rho L^4$. Przybliżony rezultat otrzymany przez Kordas i Życzkowskiego [80] wynosi $P_{kr} = 20,0509 EI/L^2$ i $\Omega^2 = 1,24572 \pi^4 EI / \rho L^4$. Leipholz [92] przy pomocy metody Galerkin'a otrzymał wartość $P_{kr} = 20,03 EI/L^2$, a Altman i De Oliveira [1-3] wartość $P_{kr} = 20,08 EI/L^2$.

2.2. Klasyczne zagadnienie Leipholza i Haugera

Przedstawimy teraz zagadnienie stateczności kolumn poddanych działaniu rozłożonego obciążenia śledzącego stycznego do osi kolumny. Równanie ruchu kolumny przedstawionej na rysunku 2.2 można zapisać następująco:

$$(2.8) \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + PQ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$Q = \int_z^L q(z) dz,$$

wraz z warunkami brzegowymi

$$(2.9) \quad \begin{aligned} w(0,t) = \frac{\partial w(0,t)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial z^3} = 0. \end{aligned}$$

W zależności od wielkości $q(z)$ rozróżniamy przypadki kolumny Leipholza [93] oraz Haugera [55]. Przy czym dla kolumny Leipholza obciążenie jest opisane następująco:

$$(2.10)_1 \quad q(z) = L \Rightarrow Q = L - z,$$

natomiast dla kolumny Haugera wyraża się ono wzorem:

$$(2.10)_2 \quad q(z) = L - z \Rightarrow Q = \frac{1}{2}(L - z)^2.$$

Poszukując rozwiązania równania (2.8) w postaci

$$(2.11) \quad w(z,t) = u(z) e^{i\Omega t},$$

otrzymujemy dla kolumny Leipholza następujące sformułowanie problemu na wartości własne

$$(2.12) \quad u'''' + \bar{P}(1-x)u'' - \omega^2 u = 0, \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0.$$

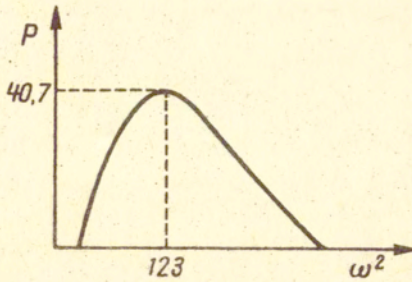
Natomiast dla kolumny Haugera otrzymamy:

$$(2.13) \quad u'''' + \frac{1}{2}\bar{P}(1-x)^2 u'' - \omega^2 u = 0, \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0.$$

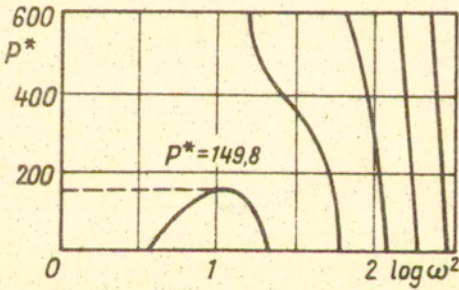
Krzywe charakterystyczne (\bar{P}, ω) dla kolumny Leipholza [93] przedstawione zostały na rysunku 2.3. Obciążenie krytyczne uzyskane metodą Galerkiną przyjmuje wartość $P_{kr} = 40.7EI/L^3$. Podczas gdy stosując metodę różnic skończonych otrzymujemy $P_{kr} = 38,6 EI/L^3$ przy $\Omega^2 = 110 EI/\rho L^4$. Hauger otrzymał dla przypadku (2.13) wartość $\bar{P}_{kr} = 158.2$, natomiast rezultaty otrzymane przez Seyraniana i Szaraniuka [205] wynoszą $\bar{P}_{kr} = 149.8$ przy $\omega^2 = 131$, są one ilustrowane na rysunku 2.4. Claudon [33] otrzymał rezultat $\bar{P}_{kr} = 150.6$ przy $\omega^2 = 132$, a Pedersen i Seyranian [128] siłę krytyczną $\bar{P}_{kr} = 151,1$ przy $\omega^2 = 132,25$.

2.3. Uogólnione kolumny Becka i Reuta

Beck i Reut zakładali, że obciążenie śledzące jest siłą styczną do osi odkształcanej kolumny. Kordas i Życzkowski [80], Lejtes [193, 194], Hauger [57] i Sugiyama [147] rozpatrywali kolumny, dla których kierunek siły ściskającej określony jest przez współczynnik śledzenia (rys. 2.5 i rys. 2.6). Współczynnik śledzenia - η kolumny Becka zdefiniowany jest jako iloraz wartości kąta zawartego między kierunkiem siły działającej na odkształcaną kolumnę a osią nieodkształconej kolumny do kąta



Rys. 2.3. Krzywe charakterystyczne dla kolumny Leipholza [93] .



Rys. 2.4. Krzywe charakterystyczne dla kolumny Haugera [205] .

nachylenia stycznego na swobodnym końcu. Szczególnymi wartościami współczynnika η są $\eta = 0$ (przypadek konserwatywny) i $\eta = 1$ (siła styczną). Przyjmując współczynnik śledzenia dla kolumny Reuta - α , dla $\alpha = 0$ otrzymujemy przypadek klasycznej kolumny Reuta, natomiast dla $\alpha = 1$ otrzymujemy przypadek konserwatywny.

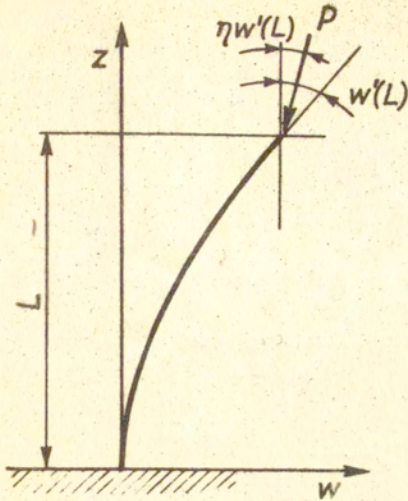
Kordas i Życzkowski [80] badali zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia. Zależność ta podana została na rysunku 2.7. W zakresie $\eta \leq 0,5$ otrzymuje się poprawne rezultaty stosując kryterium statyczne. Krzywa $\bar{p} = \bar{p}(\eta)$ posiada asymptotę poziomą dla $\bar{p}_{kr} = 47,774$. Jest to największa możliwa wartość obciążenia krytycznego osiowo ściskanej kolumny o zamocowanym jednym końcu.

Sugiyama [147] podał zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia $\bar{p} = \bar{p}(\alpha)$ dla uogólnionej kolumny Reuta. Wyniki zostały przedstawione na rysunku 2.8.

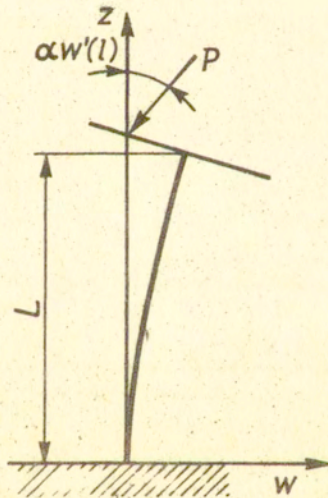
2.4. Układy złożone

Część prac poświęconych obciążeniom złożonym wypełniła lukę pomiędzy wynikami badań stateczności kolumn obciążonych konserwatywnie i przypadkami obciążeń niekonserwatywnych. Autorzy prac [45,66,68,115,148,149] analizowali stateczność kolumny z rozłożonym obciążeniem pionowym (konserwatywnym) q^0 i rozłożoną siłą śledzącą q (rys.2.10). Znany jest fakt, że przy działaniu siły konserwatywnej q^0 utrata stateczności ma charakter divergentny, podczas gdy w przypadku siły śledzącej następuje oscylacyjna utrata stateczności (flutter). Flutter jest możliwy także dla pewnej kombinacji wartości obciążeń q i q^0 . Badania potwierdziły znany fakt, że siły śledzące mogą stabilizować układ tzn., że stan krytyczny ma miejsce dla wyższych wartości obciążenia aniżeli dla obciążenia konserwatywnego.

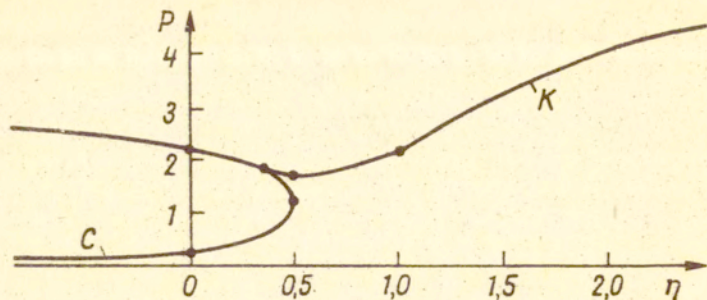
W przypadku kolumny obciążonej niekonserwatywną siłą skupioną P i niekonserwatywną siłą rozłożoną q (obciążenie złożone), możliwa jest taka sytuacja jak pokazano na rysunku 2.10 będąca kombinacją zagadnienia Becka i Leipholza. Zależność pomiędzy



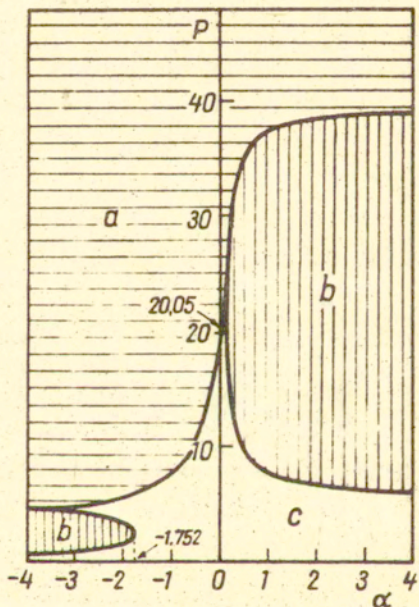
Rys. 2.5. Uogólniona kolumna Becka.



Rys. 2.6. Uogólniona kolumna Reuta.



Rys. 2.7. Zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia dla uogólnionej kolumny Becka.



Rys. 2.8. Zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia dla uogólnionej kolumny Reuta; a-flatter; b-diwersgencja; c-stateczność [147] .

krytycznymi obciążeniami q i P jest prawie liniowa [45,68]. Flax [47] dla kolumny przedstawionej na rysunku 2.10 podaje warunki, przy których nie zachodzi diwergentna utrata stateczności.

5. Wpływ siły tnącej i bezwładności obrotu na obciążenie krytyczne kolumny.

W poprzednich rozważaniach w równaniach ruchu kolumn nie uwzględniano odkształceń wywołanych ścinaniem oraz siłami bezwładności towarzyszącymi obrotowi kolumny. Równanie ruchu dla kolumny Becka z uwzględnieniem siły tnącej i bezwładności obrotu przyjmie postać [86,161,192]:

$$(2.14) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{P}{EI^*} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{\rho}{AE} + \frac{\rho}{AK'G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho}{AK'EG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\rho}{EI^*} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie: A - pole przekroju poprzecznego kolumny,
 G - moduł ścinania,
 K' - współczynnik ścinania Timoszenki [37],

$$I^* = \frac{I}{1 + \frac{P}{AGK'}}.$$

Rozwiązanie równania (2.14) można również przedstawić w postaci:

$$(2.15) \quad w(z,t) = u(z) e^{i\Omega t},$$

która prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego

$$(2.16) \quad \frac{d^4 u}{dx^4} + \left(\frac{\rho \Omega^2 L^2}{AK'G} + \frac{\rho \Omega^2 L^2}{AE} + \frac{PL^2}{EI^*} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\rho \Omega^2 L^4}{EI^*} \left(1 - \frac{\rho \Omega^2 I^*}{A^2 K'G} \right) u = 0.$$

Całką ogólną równania (2.16)₁ jest [81] :

$$(2.16)_2 \quad u(x) = C_1 \operatorname{sh} k_1 x + C_2 \operatorname{chk}_1 x + C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x,$$

gdzie:

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho \Omega^2 L^2}{AK'G} + \frac{\rho \Omega^2 L^2}{AE} + \frac{PL^2}{EI^*} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\rho \Omega^2 L^2}{AK'G} + \frac{\rho \Omega^2 L^2}{AE} + \frac{PL^2}{EI^*} \right)^2 + \frac{\rho \Omega^2 L^4}{EI^*} \left(1 - \frac{\rho \Omega^2 I^*}{A^2 K'G} \right)}$$

Siłę tnącą $T(x)$, moment $M(x)$ i kąt obrotu przekroju poprzecznego $\Phi(x)$ można przedstawić następująco:

$$(2.17) \quad T(x) = \frac{EI^* L^3}{1 - \frac{\rho \Omega^2 I^*}{A^2 K'G}} \left[u''(x) + \left(\frac{\rho \Omega^2 L^2}{AK'G} + \frac{\rho \Omega^2 L^2}{AE} + \frac{PL^2}{EI^*} \right) u'(x) \right],$$

$$(2.18) \quad M(x) = - \frac{EI^*}{L^2} \left[u''(x) + \frac{\rho \omega^2 L^2}{AK'G} u(x) \right],$$

$$(2.19) \quad \Phi(x) = \frac{\frac{1}{L}}{1 + \frac{P}{AK'G}} \left[u'(x) - \frac{L T(x)}{K'G} \right].$$

Warunki brzegowe dla kolumny Becka przy pomocy wielkości $T(x)$, $M(x)$ i $\Phi(x)$ są postaci:

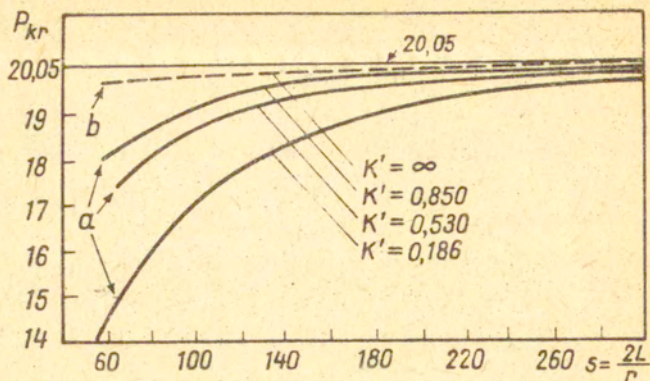
$$(2.20) \quad u(0)=0, \quad \Phi(0)=0, \quad M(1)=0, \quad T(1)=-P u'(1)/L.$$

Wpływ siły tnącej i bezwładności obrotu na obciążenie krytyczne kolumny Becka dla różnych współczynników smukłości badali: Nemat-Nasser [118] oraz Kounadis i Katsikadelis [86]. Sundararamaiah i Venkateswara Rao [155] oprócz kolumny Becka zbadali także wpływ siły tnącej i bezwładności obrotu na obciążenie krytyczne kolumny Leipholza. Kounadis i Katsikadelis oparli swą analizę na podanym przez Cowpera [37] sposobie wyznaczania współczynnika ścinania Timoszenki - K' . Uwzględnienie siły ścinania i bezwładności obrotu obniża siłę krytyczną w stopniu zależnym od współczynnika smukłości i kształtu przekroju (rysunek 2.9). Na przykład dla kolumn o współczynniku smukłości $s=60$ i $K'=0,186$ siła styczna i bezwładność obrotu zmniejszają obciążenie krytyczne o ponad 30% siły krytycznej $(20,0509 \frac{EI}{L^2})$ klasycznej kolumny Becka. Uwzględnienie tylko bezwładności obrotu ma pomijalnie mały wpływ na siłę krytyczną dla krótkich kolumn (rysunek 2.9). Podobne wyniki jak Kounadis i Katsikadelis otrzymał Nemat-Nasser [118], który badał szczególną wartość współczynnika ścinania $K' (= \frac{1}{4} E/G)$. Obniżenie siły krytycznej kolumny Becka, a także kolumny Leipholza spowodowane uwzględnieniem siły tnącej i bezwładności obrotu również podają Sundararamaiah i Venkateswara Rao [155].

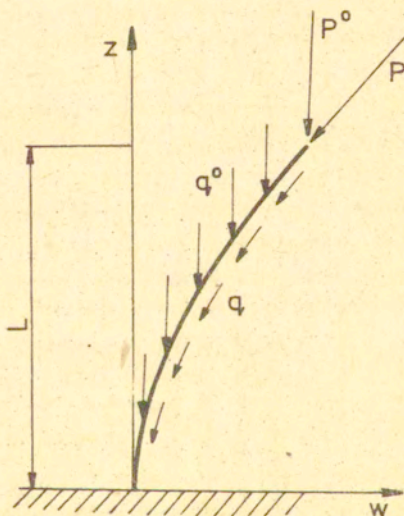
3. Optymalizacja kształtu kolumn

3.1. Kryteria optymalizacji

Kolumna o stałym przekroju poprzecznym nie zawsze jest najbardziej ekonomiczną konstrukcją, co stwierdzono doświadczalnie i teoretycznie zarówno w przypadku obciążeń konserwatywnych jak i niekonserwatywnych. Rozróżniamy dwa zasadnicze podejścia w optymalizacji kształtu kolumn. Pierwsze to poszukiwanie maksymalnego obciążenia krytycznego dla danego kosztu



Rys. 2.9. Zależność obciążenia krytycznego kolumny Becka od smukłości i współczynnika ścinania Timoszenki; a-wpływ ścinania i bezwładności obrotu; b-wpływ bezwładności obrotu.



Rys. 2.10. Kolumna obciążona siłami konserwatywnymi P^0 , q^0 i siłami niekonserwatywnymi P i q .

wytwarzania kolumny lub jej ciężaru. Drugie podejście to poszukiwanie najmniejszego kosztu (ciężaru) kolumny dla zadane- go obciążenia krytycznego.

3.2. Optymalny kształt kolumny Becka

Wielu badaczy [33,54,75,89,90,122,123,131,134,135,137,167] poszukiwało takiego rozkładu masy $m(x)$ wzdłuż osi tej kolumny, dla którego obciążenie krytyczne \bar{P}_{kr} osiąga maksimum. Przyjmo- wano, że całkowita masa kolumny jest dana. Zwykle zakładano, że jest równa jedności:

$$(3.1) \quad \int_0^1 m(x) dx = 1 .$$

Plaut [134,135] stosując metodę gradientową otrzymał opty- malną wartość obciążenia krytycznego równą $\bar{P}_{kr}=57,8$ przy $\omega_{kr}^2 = 466$. Taki sam wynik osiągnął Claudon [33]. Błachut i Gajewski [18] otrzymali kształt kolumny Becka, dla której $\bar{P}_{kr}=65,351$ ($\omega_{kr}^2=404,09$) w przypadku nie wprowadzania dodat- kowych ograniczeń na rozkład masy $m(x)$. Po wprowadzeniu ograniczeń $m_1(x) \leq m(x)$, stosując metodę gradientową otrzy- mali oni wartości mniejsze np. maksymalna siła krytyczna osią- gała wartość $\bar{P}_{kr}=36,4$ ($\omega_{kr}^2=241,31$). Stosując metodę bimodal- ną przy ograniczeniu $m_1(x)=0,2$ maksymalna siła krytyczna przyjmuje wartość $\bar{P}_{kr}=42,05$.

Hanaoka i Washizu [54] podali korektę wyników uzyskanych przez Claudona [33]. Ich zdaniem dla kształtu podanego przez Claudona poprawnie obliczona maksymalna siła krytyczna równa jest $\bar{P}_{kr}=47,96$, a nie $\bar{P}_{kr}=57,8$. Hanaoka i Washizu otrzymali rozkład masy, dla którego $\bar{P}_{kr}=83,53$. Jest to z dotychczas znanej autorom literatury (1984r.) najlepiej przeprowadzona optymalizacja na maksimum siły krytycznej. Optymalny rozkład masy podnosi wartość siły krytycznej o 317% w stosunku do kolumny o stałym przekroju oraz takiej samej masie całkowitej.

Wydaje się, że wyniki optymalizacji układów z ciągłą zmia-

ną przekroju mają mniejszą wartość praktyczną ze względu na technologię wykonania kolumny o skomplikowanym kształcie. Bardziej oczekiwane ze względów technologicznych są wyniki optymalizacji kolumn o skokowej zmianie przekroju. Optymalizację kolumny Becka i Reuta ze skokową zmianą przekroju przeprowadzili przy pomocy techniki macierzy przeniesienia autorzy prac [20-22]. Numeryczne wyniki optymalnej segmentacji kolumny Becka i Reuta podane zostały dla funkcjonaułu kosztu całkowitego danego wzorem:

$$(3.2) \quad K = k_1 \sum_{j=1}^m A_j L_j + (m-1) k_2 \quad ,$$

gdzie: k_1 - jest kosztem jednostkowym materiału, m - liczbą segmentów, a k_2 - kosztem jednostkowym połączenia segmentów, przy ograniczeniu $A_j \leq A$.

Na rysunku 3.1 podane zostały kształty kolumn dla $m=1, \dots, 4$, które mają minimalne objętości V_1 . Dla kolumny z dwoma segmentami ($m=2$) na rysunku 3.2 przedstawiona została wartość siły krytycznej w zależności od objętości usuniętej odniesionej do objętości kolumny jednosegmentowej $\Delta V = (1 - A_2/A) \cdot L_2/L$ dla różnych wartości ilorazu L_1/L . Optymalną objętość uzyskuje się przy $L_1/L = 0,62$, wówczas zadana wartość $\bar{P}_{kr} = 20,05$ osiąga się przy $A_2/A = 0,43$. Maksymalizacja wartości siły krytycznej \bar{P}_{kr} jako funkcja ilorazu L_1/L przedstawiona została na rysunku 3.3. Dla wszystkich wartości $L_1/L \leq 0,62$ maksymalne obciążenie krytyczne jest równe $P_{kr} = 20,05 EI/L^2$, co odpowiada kolumnie o stałym przekroju ($\Delta V = 0$). Natomiast dla kształtów kolumn odpowiadających $L_1/L > 0,62$ maksymalna wartość siły krytycznej jest większa od $20,05 EI/L^2$. W przypadku, gdy koszt całkowity K (3.2) zależy od kosztu połączenia (rysunek 3.4), dla $k_2 > 0,22 k_1 AL$ rozwiązaniem optymalnym jest $m=1$; dla $0,19 k_1 AL < k_2 < 0,22 k_1 AL$ otrzymujemy $m=2$, natomiast dla $0,05 k_1 AL < k_2 < 0,19 k_1 AL$ optymalną liczbę segmentów jest $m=3$ itd.

W celu dokonania porównań z wynikami innych badaczy maksymalizujących siłę krytyczną należy powyższe wyniki odnieść do

siły krytycznej kolumny o stałym przekroju i objętości $V=1-\Delta V$.

Na rysunku 3.5 zestawione zostały optymalne kształty kolumny Becka ze względu na maksymalne obciążenie krytyczne i minimalną objętość uzyskane przez różnych badaczy.

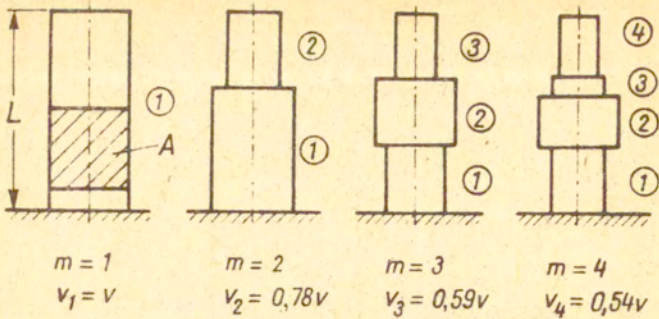
Plaut [135] oraz Claudon i Sunakawa [35] poszukiwali optymalnego kształtu kolumny Becka z tłumieniem wewnętrznym Kelvina-Voigta. Plaut otrzymał siłę krytyczną $\bar{P}_{kr}=27,5$, natomiast Claudon i Sunakawa osiągnęli $\bar{P}_{kr}=39,2$. Na rysunku 3.6 zestawione zostały optymalne kształty kolumny Becka z tłumieniem wewnętrznym $\delta_w=0.01$ ze względu na maksymalną siłę krytyczną.

3.3. Optymalizacja kształtu kolumny Haugera i Leipholza

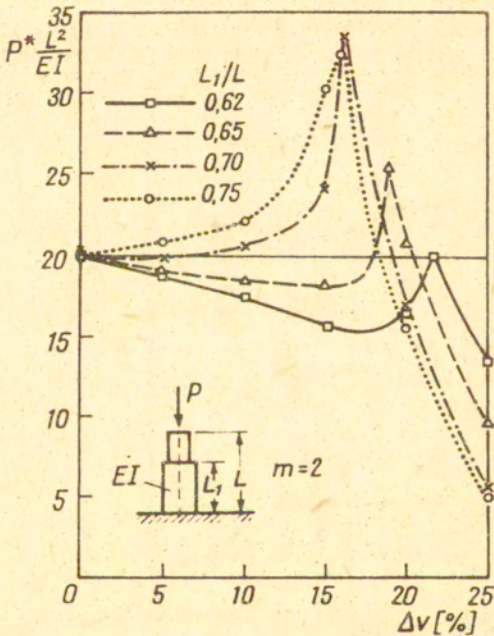
Optymalnego kształtu kolumny Haugera poszukiwali: Plaut [131], Anderson [6], Thomas [159,160], Claudon [33], Irretier i Mahrenholtz wraz z pierwszym z autorów niniejszej pracy [20] oraz Seyranian i Szaraniuk [205].

Claudon [34] dla zadanej masy całkowitej kolumny Haugera uzyskał maksymalną wartość siły krytycznej $\bar{P}_{kr}=445$. Seyranian i Szaraniuk przy pomocy analizy wrażliwości otrzymali $\bar{P}_{kr}=470$. Autorzy pracy [20] poszukiwali optymalnej segmentacji kolumny Haugera. Uzyskane rezultaty projektowania dwusegmentowej kolumny zarówno dla przypadku minimalnej objętości jak i maksymalnej siły krytycznej przedstawione zostały na rysunku 3.7. Na rysunku 3.8 przedstawiono obciążenie krytyczne kolumny dwusegmentowej w zależności od objętości usuniętej ΔV przy różnych wartościach ilorazu L_1/L . Kolumna przedstawiona na rysunku 3.7b ma objętość ok. 24% mniejszą aniżeli jednosegmentowa kolumna Haugera, a jej obciążenie krytyczne pomimo to jest większe o ok. 20%.

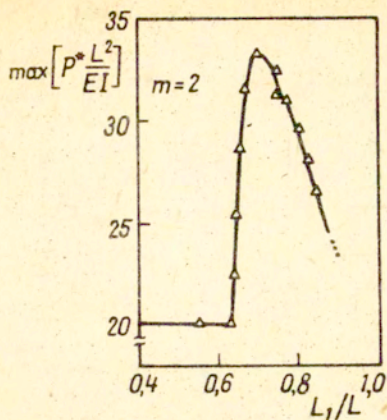
Na rysunku 3.9 zestawione zostały wyniki optymalizacji kolumny Haugera ze względu na maksymalne obciążenie krytyczne. Zmiana rozkładu masy powoduje wzrost od $\bar{P}_{kr}=149,7$ dla kolumny o stałym przekroju do $\bar{P}_{kr}=470$ dla kolumny o rozkładzie masy



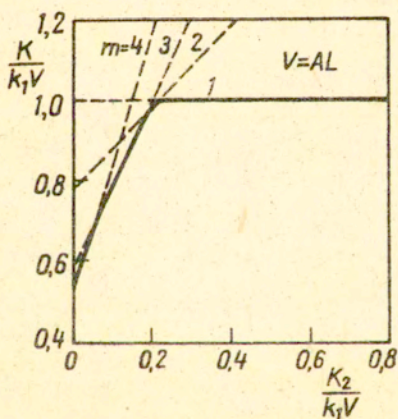
Rys. 3.1. Segmentacja kolumny Becka o minimalnej objętości [22] .



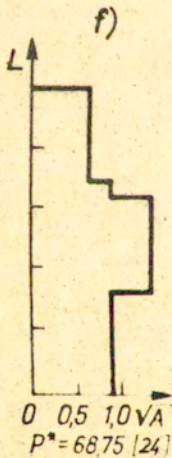
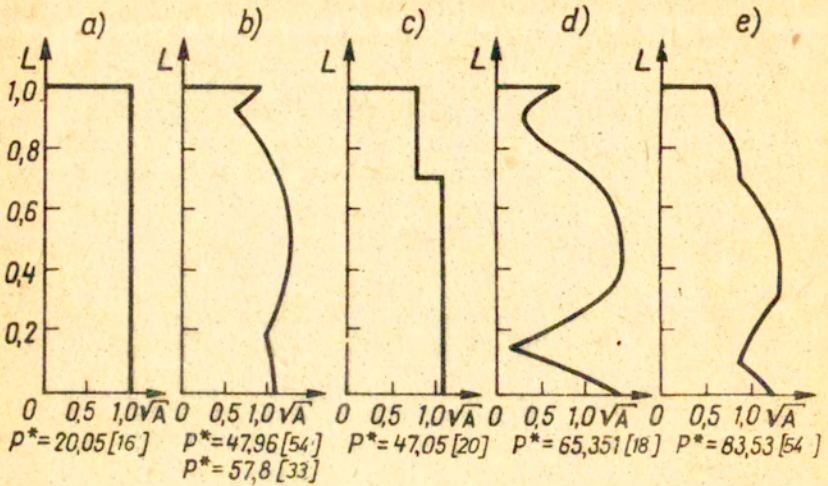
Rys. 3.2. Obciążenie krytyczne w zależności od objętości usuniętej dla $m=2$ przy różnych proporcjach segmentów (kolumna Becka) [22] .



Rys. 3.3. Maksymalne obciążenie krytyczne w zależności od względnej długości pierwszego segmentu (kolumna Becka) [22] .



Rys. 3.4. Optymalna segmentacja w zależności od jednostkowego kosztu materiału oraz kosztu połączeń segmentów [22] .



Rys. 3.5. Optymalne kształty kolumny Becca przy maksymalizacji obciążenia - b,c,d,e i minimalizacji objętości -f.

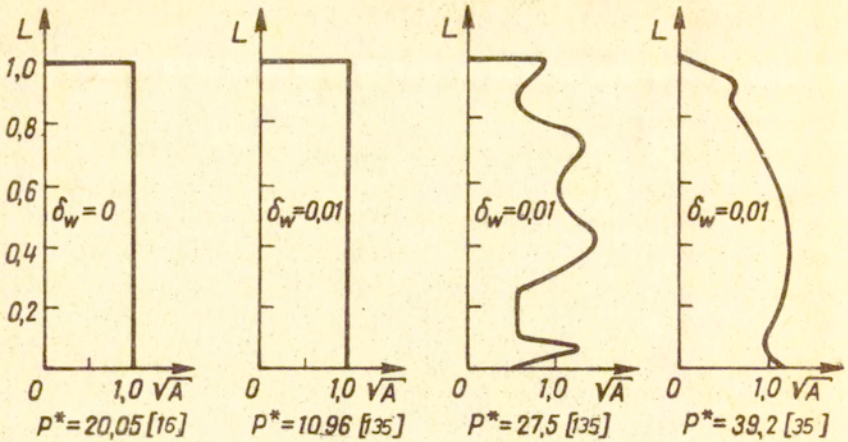
podanym przez Seyraniana i Szaraniuka. Wynik Seyraniana i Szaraniuka jest z dotychczas znanej autorom literatury (1984r.) najlepiej przeprowadzoną optymalizacją na maksimum siły krytycznej kolumny Haugera.

Claudon [34] optymalizował kształt kolumny Haugera z wewnętrznym tłumieniem Kelvina-Voigta ($\delta_w=0,01$) maksymalizując siłę krytyczną. Uzyskał kształt, dla którego obciążenie krytyczne jest o 144% większe w porównaniu z kolumną o stałym przekroju i tej samej wartości współczynnika tłumienia wewnętrznego.

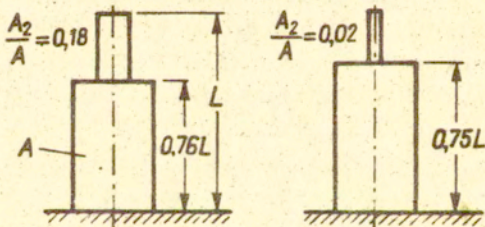
Również autorzy pracy [21] poszukiwali optymalnej segmentacji kolumny Leipholza. Dla dwusegmentowej kolumny otrzymali kształty przedstawione na rysunku 3.10. Obciążenie krytyczne kolumny o kształcie "a" równe jest obciążeniu krytycznemu kolumny o stałym przekroju, której objętość jest o ok. 25% większa. Kolumna o kształcie "b" ma objętość ok. 20% mniejszą od klasycznej kolumny jednorodnej, natomiast obciążenie krytyczne jest o ok. 18% większe.

4. Wpływ mas skupionych na warunki utraty stateczności

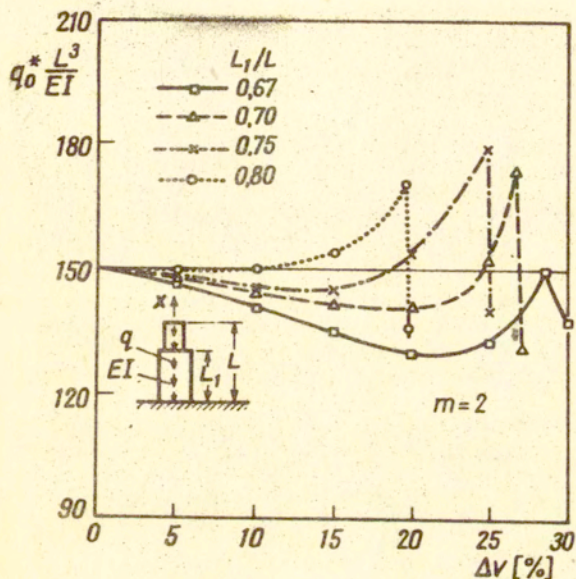
W wielu nowszych pracach rozważa się zagadnienia stateczności zakładając, że masa kolumny rozłożona jest w sposób ciągły lub skokowo wzdłuż osi kolumny. W tej części pracy przedstawimy wyniki badań stateczności kolumn, w których poza rozłożoną masą kolumny uwzględniano dodatkowo masy skupione. Studia dotyczące stateczności kolumn z dodatkowymi masami skupionymi można podzielić na dwie klasy. Do pierwszej należą badania dotyczące zagadnienia wpływu stosunku masy skupionej do masy rozłożonej równomiernie na wartości krytyczne utraty stateczności kolumny. Zagadnienia związane z wpływem położenia masy skupionej na obciążenie krytyczne i częstotliwość krytyczną to druga klasa zagadnień.



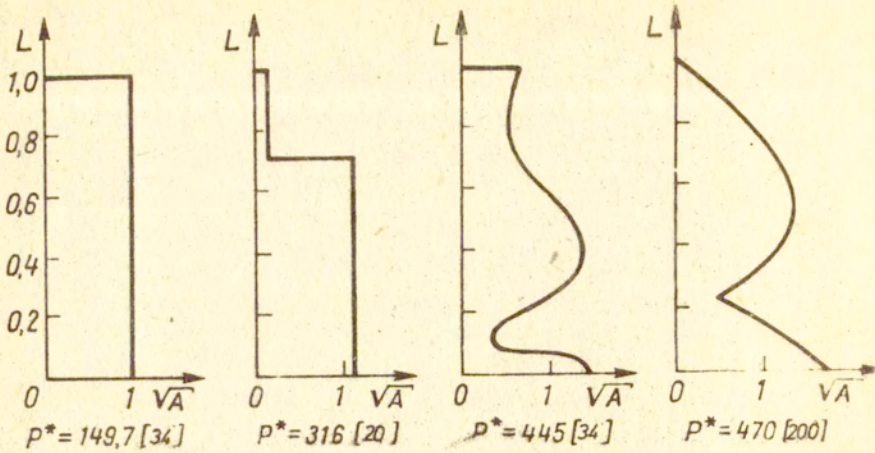
Rys. 3.6. Optymalne kształty kolumny Becka z tłumieniem wewnętrznym ($\delta_w=0,01$) przy maksymalizacji obciążenia.



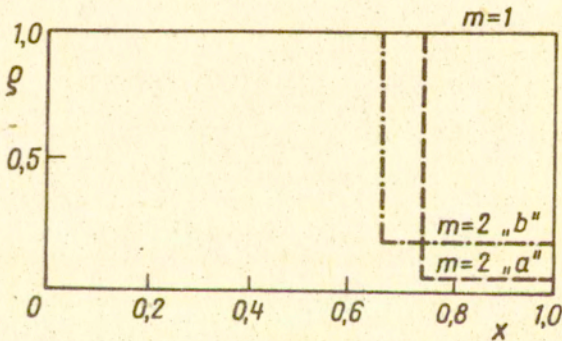
Rys. 3.7. Optymalne kształty kolumny Hegerera o minimalnej objętości -a, maksymalnej sile krytycznej-b, dla $m=2$ [22].



Rys. 3.8. Obciążenie krytyczne w zależności od objętości usuniętej przy różnych wartościach L_1/L (kolumna Haugera z $m=2$) [22] .



Rys. 3.9. Różne rezultaty optymalizacji kształtu kolumny Haugera ze względu na maksymalne obciążenie.

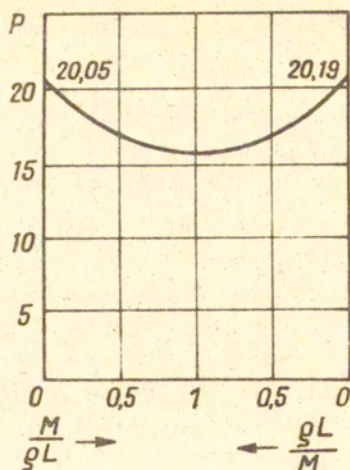


Rys. 3.10. Optymalna segmentacja kolumny Leipholza dla $m=2$ [21].

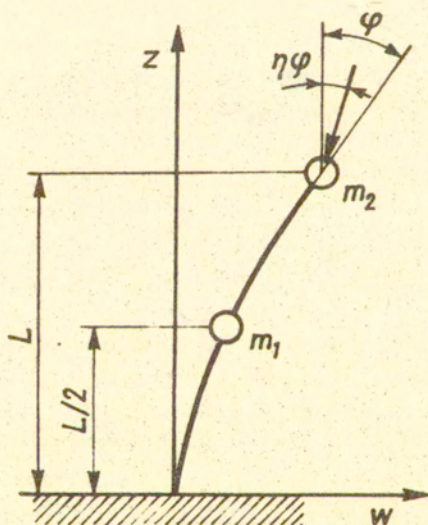
4.1. Wpływ współczynnika masy na parametry krytyczne

Pflüger [130] przeprowadził badania układu złożonego z kolumny o ciągle rozłożonej masie oraz dodatkowej masie skupionej na swobodnym końcu kolumny. Wyniki przedstawione zostały w zależności od współczynnika masy tzn. stosunku masy skupionej do masy rozłożonej. Wykazał on, że istnieje najbardziej niekorzystny rozkład masy, przy którym siła krytyczna jest najmniejsza (rysunek 4.1). W przypadku masy skupionej równej zeru otrzymujemy klasyczny wynik Becka. Natomiast gdy masa pręta jest pomijalnie mała w stosunku do masy skupionej na końcu pręta obciążenie krytyczne osiąga maksymalną wartość równą $\bar{P}_{kr}=20,19$ [41,42,46] .

Dejneco i Leonow [189] a także Oran [126,127] przyjęli model z dwiema masami skupionymi. Założono, że jedna z nich znajduje się w środku a druga na swobodnym końcu kolumny. Masę rozłożoną kolumny przyjęto za pomijalnie małą w stosunku do mas skupionych. Także i dla tego modelu istnieje najbardziej niekorzystny dyskretny rozkład masy, przy którym siła krytyczna osiąga minimum. W przypadku, gdy masa skupiona znajdująca się w środku kolumny jest równa zeru, otrzymujemy model Pflügera i $\bar{P}_{kr}=20,19$. W modelu Dejneco i Leonowa kolumna obciążona jest siłą śledzącą o współczynniku śledzenia równym $\eta=1$. Kordas i Życzkowski [80] zbadali cały zakres zmienności współczynnika śledzenia dla modelu z dwiema masami skupionymi (rysunek 4.2). Wyniki uzyskano przy pomocy metody energetycznej. Rezultaty te można częściowo porównać z wynikami uzyskanymi przez Dejneco i Leonowa. Porównanie dokładności podano dla przypadku $\eta=1$. Błąd nie przekracza 15%. Dla stosunku mas skupionych m_1/m_2 obserwujemy zmniejszenie się siły krytycznej wraz ze wzrostem współczynnika śledzenia η w zakresie $0,5 < \eta < 1$. Minimum siły krytycznej występuje dla współczynnika śledzenia $\eta=1,455$. Wyniki dla $\eta > 1$ obarczone są już dużym błędem. Wraz ze wzrostem wartości stosunku mas skupionych m_1/m_2 minimum siły krytycznej osiągane jest przy mniejszej wartości współczynnika śledzenia.



Rys. 4.1. Obciążenie krytyczne w funkcji współczynnika masy [183] .



Rys. 4.2. Model kolumny z dwiema masami skupionymi.

Hauger [56] badał zachowanie modelu z masą skupioną na końcu kolumny z uwzględnieniem ciężaru tej masy. Podał on parametry optymalne (wartość współczynnika masy), dla których obciążenie krytyczne osiąga swoje maksimum. Podobne wyniki otrzymali Leipholz i Lindner [109].

Uwzględnienie w modelu matematycznym wpływu ciężaru masy skupionej pozwoliło oszacować wpływ pola grawitacyjnego na stateczność tego typu układów. Dalszym rozwinięciem modelu jest uwzględnienie tłumienia wewnętrznego, tłumienia zewnętrznego oraz bezwładności obrotu. Kapoor i Leipholz [70] zbadali model obdarzony powyższymi cechami. Przyjęli oni wartości współczynników tłumienia materiałowego wyznaczone eksperymentalnie w pracy [64]. Równanie ruchu dla tego modelu (rysunek 4.3) przyjęto w postaci:

$$(4.1) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} + (P_m + P_p + M_s) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial^5 W}{\partial W^4 \partial t} \cdot \delta_w + \\ + \alpha \delta_w \frac{\partial^5 W}{\partial W^4 \partial t^2} + \delta_z \frac{\partial W}{\partial t} - \chi_1 \frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial t^2} = 0,$$

przy następujących warunkach brzegowych:

$$\text{dla } z=0, \quad W = \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

$$\text{dla } z=1, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \delta_w \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial t} + \alpha \delta_w \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \varepsilon \chi_2 = 0,$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} + \delta_w \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial t} + \alpha \delta_w \frac{\partial^5 W}{\partial x^3 \partial t^2} - \chi_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} +$$

$$- \chi_3 \delta_z \frac{\partial W}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + (P_m + M_s) \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Przyjęto tu następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\alpha = \gamma_1^{-1} \gamma_2 (EI)^{1/2} (\rho L^4)^{-1/2}, \quad \chi_1 = k_1^2 L^2, \quad \chi_2 = k_2^2 L^2,$$

$$\chi_3 = 0,25 \pi D^{*2} (d^* L)^{-1}, \quad \varepsilon = M (\rho L)^{-1}, \quad M_s = \varepsilon R,$$

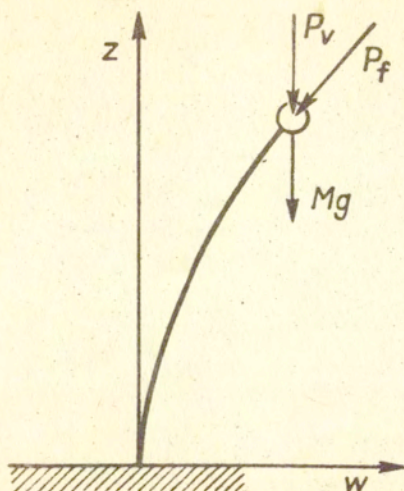
$$P_m = P_v L^2 (EI)^{-1}, \quad P_p = P_f L^2 (EI)^{-1}, \quad \delta_w = (\rho L^4 EI)^{-1/2} \gamma_1,$$

$$\delta_{w_1} = \alpha \delta_w, \quad \delta_z = d^* L^4 (\rho L^4 EI)^{-1/2} \beta,$$

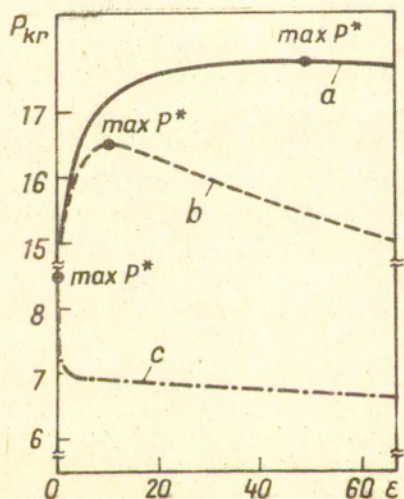
gdzie : ρ - liniowa gęstość masy, M - ciężar masy skupionej, P_v - pionowo skierowana siła konserwatywna, P_f - siła śledząca, γ_1, γ_2 - współczynniki tłumienia materiałowego Higuchi, d^* - średnica pręta, D^* - średnica masy skupionej, β - współczynnik tłumienia zewnętrznego.

Zbadano trzy następujące przypadki szczególne:

- kolumna nietłumiona bez uwzględnienia bezwładności obrotu,
 - kolumna nietłumiona z uwzględnieniem bezwładności obrotu,
 - kolumna tłumiona z uwzględnieniem bezwładności obrotu.
- Otrzymane wyniki zostały przedstawione na rysunku 4.4. Dla kolumny nietłumionej bez uwzględnienia bezwładności obrotu istnieje optymalna wartość współczynnika masy $M/\rho L = 49,9$, przy której siła krytyczna osiąga maksimum i wynosi $\bar{P}_{kr} = 17,724$. Podobny wynik uzyskał Hauger [56]. Ponadto wykazano, że uwzględnienie bezwładności obrotu powoduje zmniejszenie optymalnej wartości obciążenia do $\bar{P}_{kr} = 16,464$ przy współczynniku masy $M/\rho L = 10,2$. Jednoczesne uwzględnienie bezwładności obrotu, tłumienia materiałowego i tłumienia zewnętrznego powoduje dalsze istotne zmniejszenie wartości obciążenia krytycznego, a także zmianę jakościową charakteryzującą się tym, że maksymalna wartość obciążenia krytycznego występuje przy $M/\rho L = 0$ (rysunek 4.4). Zmniejszaniu się krytycznej wartości obciążenia towarzyszy zmniejszenie wartości częstotliwości krytycznej (rysunek 4.5).



Rys. 4.3. Model kolumny badanej przez Kapoora i Leipholza [70]

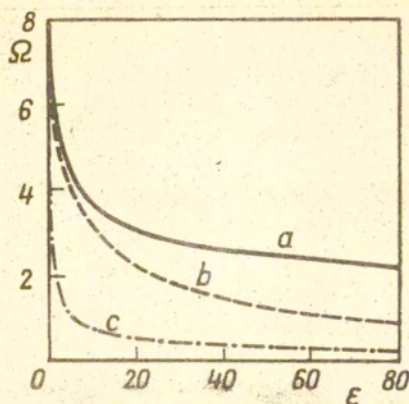


Rys. 4.4. Obciążenie krytyczne w zależności od współczynnika masy; a-kolumna nietłumiona bez uwzględnienia bezwładności obrotu; b-k.nietłumiona z uwzględnieniem bezwładności; c-k.tłumienia z uwzględnieniem bezwł. obrotu [70]

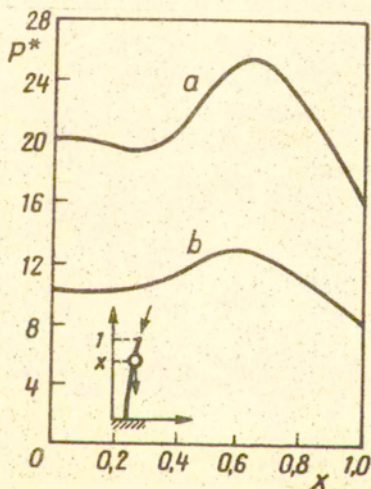
4.2. Położenie masy skupionej

Omówione w poprzedniej części badania dotyczyły głównie wpływu stosunku masy skupionej do masy rozłożonej na wartości krytyczne obciążenia i częstotliwości. Kapoor i Leipholz [71] badali również wpływ położenia masy skupionej na wartości krytyczne obciążenia i częstotliwości kolumny. Rozważono model kolumny z dwiema masami skupionymi przyjmując obciążenie siłą śledzącą i siłami ciężkości mas skupionych. Uwzględniono tłumienie materiałowe, tłumienie zewnętrzne i bezwładność obrotu. Zbadano dwa przypadki: z jedną i z dwiema masami skupionymi. W pierwszym przypadku układu z jedną masą skupioną bez uwzględnienia wpływu tłumienia i bezwładności obrotu położenie masy w pobliżu punktu utwierdzenia kolumny powoduje zmniejszenie obciążenia krytycznego od $\bar{P}_{kr}=20,1$ dla $x=0$ do $\bar{P}_{kr}=19,6$ przy $x=0,38$. Dalszy wzrost współrzędnej położenia masy powoduje wzrost siły krytycznej do wartości $\bar{P}_{kr}=25,4$ przy $x=0,65$, po czym obciążenie krytyczne maleje, osiągając minimum $\bar{P}_{kr}=16,0$ w przypadku masy skupionej umieszczonej na swobodnym końcu kolumny. Położenie masy $x=0,69$ jest zatem optymalnym położeniem masy skupionej ze względu na obciążenie krytyczne. Uwzględnienie tłumienia i bezwładności obrotu powoduje obniżenie wartości obciążenia krytycznego oraz przesunięcie położenia optymalnego do wartości $x=0,60$ (rysunek 4.6). Analogiczne wyniki uzyskał Kounadis [82,88], który wyznaczył także obciążenie krytyczne kolumny Becka z trzema masami skupionymi. Kapoor i Leipholz wykazali ponadto, że częstotliwość krytyczna monotonicznie maleje wraz ze zmianą położenia masy skupionej w kierunku swobodnego końca (Rysunek 4.7), co jest intuicyjnie oczywiste. W drugim przypadku, gdy położenie jednej z mas jest ustalone a druga zmienia swe położenie, wyniki jakościowo nie ulegają zasadniczym zmianom.

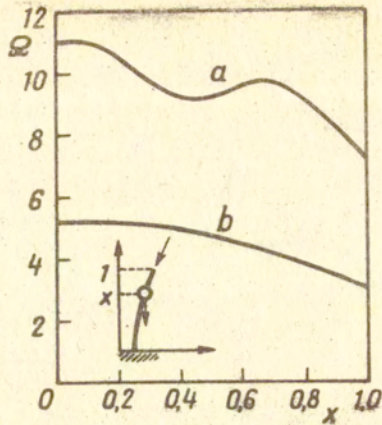
Leipholz i Piché [111] zbadali wpływ masy skupionej na obciążenie krytyczne kolumny z rozłożonym obciążeniem śledzącym. Wyznaczyli oni obszary stateczności oraz divergentnej i oscylacyjnej niestateczności w zależności od wartości siły śledzącej i masy skupionej (rysunek 4.8).



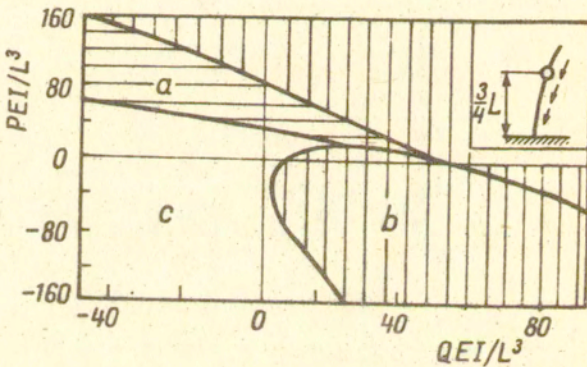
Rys. 4.5. Częstotliwość krytyczna w zależności od współczynnika masy; a-kolumna nietłumiona bez uwzględnienia bezwładności obrotu, b-k.nietłumiona z uwzględnieniem bezwł. obrotu, c-k.tłumiona z uwzględnieniem bezwł.obrotu [70] .



Rys. 4.6. Zależność obciążenia krytycznego od współrzędnej masy skupionej; a-k.nietłumiona bez uwzgl.bezwł. obrotu, b-k.tłumiona z uwzględnieniem bezwł.obrotu [71] .



Rys. 4.7. Zależność częstotliwości krytycznej od współrzędnej masy skupionej; a-kolumna nietłumiona bez uwzględnienia bezwł.obrotu, b-k.tłumiona z uwzględnieniem bezwł.obrotu [71] .



Rys. 4.8. Obszary stateczności i niestateczności w zależności od wartości siły śledzącej P i masy skupionej Q; a-flatter, b-diwergecja, c-stateczność [111] .

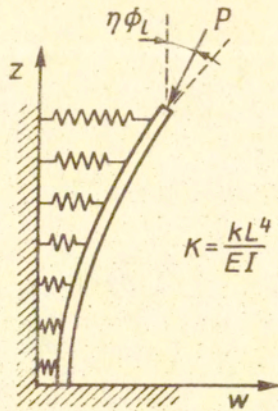
5. Stateczność kolumn na podłożu lepkosprężystym

Zagadnienie stateczności kolumny na sprężystym podłożu poddanej sile śledzącej prowadzi niekiedy do nieoczekiwanych intuicyjnie wyników. Smith i Herrmann [146] badając kolumnę Becka na podłożu sprężystym Winklera (rysunek 5.1) stwierdzili, że kolumna traci stateczność przez flatter przy obciążeniu krytycznym niezależnym od modułu podłoża. Wraz ze wzrostem wartości modułu podłoża wzrasta jedynie częstotliwość (rysunek 5.2). Sundararajan [151] uogólnił te wyniki wykazując, że obciążenie krytyczne kolumny Becka nie zmniejsza się przez podparcie jej podłożem sprężystym Winklera o rozkładzie modułu proporcjonalnym do rozkładu masy tej kolumny. Niezależność obciążenia krytycznego od wartości modułu podłoża dotyczy jedynie długich kolumn (stosunek długości do promienia bezwładności przekroju kolumny powyżej 500). Jak wykazali Sundararamaiah i Venkateswara Rao [156] dla krótkich kolumn Becka i Leipholza, w których uwzględniono siły tnące i bezwładność obrotu, obciążenie krytyczne maleje ze wzrostem wartości modułu podłoża Winklera.

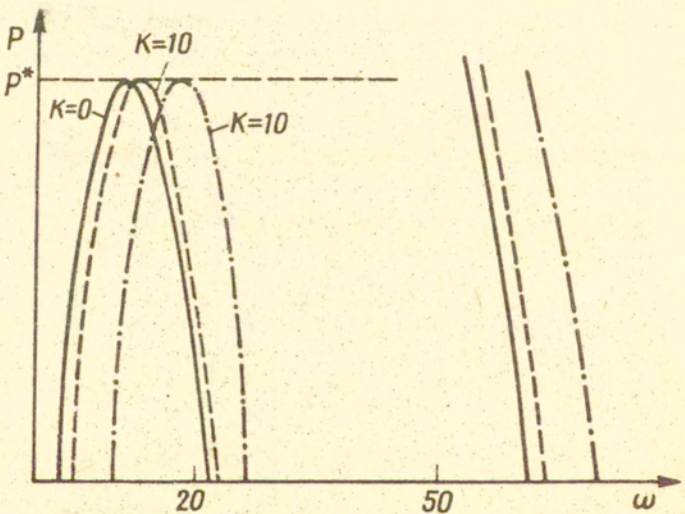
Hauger i Vetter [58] badali także kolumnę Becka przyjmując podłożę sprężyste Winklera o zmiennym module. Dla rozkładu modułu podłoża $\mathcal{H}(z)$ określonego wzorem (rysunek 5.3) :

$$(5.1) \quad \mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_0 \left[4(1-\gamma)(z^2 - z) + 1 \right],$$

wartości otrzymanego obciążenia krytycznego dla różnych wartości parametrów \mathcal{H}_0 i γ przedstawiono na rysunku 5.4. Można również zauważyć, że dla $\gamma = 1$, to jest dla stałej wartości modułu podłoża, obciążenie krytyczne jest niezależne od wartości tego modułu, co jest zgodne z wynikami podanymi przez Smitha i Herrmanna [146] oraz Sundararajana [151]. Tak zwane osłabienie podłoża ($\gamma < 1$) powoduje wzrost siły krytycznej podczas gdy wzmocnienie podłoża ($\gamma > 1$) może obniżyć jej wartość. Dla biliniowego rozkładu modułu podłoża Winklera wzdłuż kolumny



Rys. 5.1. Kolumna Becka na podłożu sprężystym.



Rys.5.2. Krzywe charakterystyczne przy różnej sztywności podłoża [146].

rysunek 5.5 opisanego wzorami:

$$(5.2) \quad \mathcal{H}(z) = \begin{cases} \mathcal{H}_0(-z+\lambda)/\lambda & , 0 \leq z < \lambda \\ \mathcal{H}_0(z-\lambda)/(\lambda-1) & , \lambda \leq z \leq 1 \end{cases} ,$$

$$(5.3) \quad \mathcal{H}(z) = \begin{cases} \mathcal{H}_0 z / \lambda & , 0 \leq z \leq \lambda \\ \mathcal{H}_0(z-1)/(\lambda-1) & , \lambda \leq z \leq 1 \end{cases} .$$

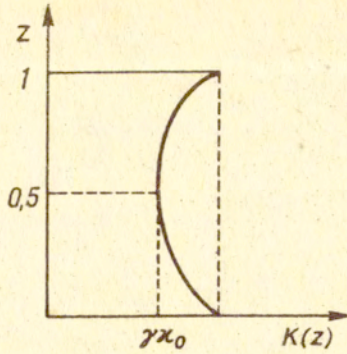
Hauger i Vetter zbadali stateczność kolumny dla różnych wartości parametrów \mathcal{H}_0 i λ (rysunek 5.6) wykazując, że rozkład modułu podłoża w tym przypadku może mieć również stabilizujący lub destabilizujący wpływ. Wydaje się interesującym, że istnieje optymalna wartość parametru λ , przy której stabilizacja albo destabilizacja przyjmuje maksimum.

Wahed [168] badał stateczność kolumny Becka na podłożu sprężystym Winklera uwzględniając tłumienie lepkie (rysunek 5.7). Równanie różniczkowe drgań kolumny przyjęto w postaci:

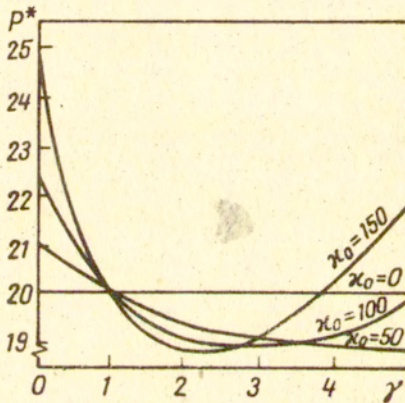
$$(5.4) \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Kw + B \frac{\partial w}{\partial t} + \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 ,$$

gdzie: K - jest modułem podłoża, B - współczynnikiem tłumienia. Rozwiązanie uzyskano metodą Galerkin. Granice niestateczności wyznaczone zostały przy pomocy kryterium Routha. Stwierdzono, że kolumna traci stateczność przez flutter, przy czym tłumienie zewnętrzne powoduje wzrost siły krytycznej. Obecność podłoża sprężystego powoduje zwiększenie działania stabilizującego tłumienia lepkościowego. W przypadku góy nie ma tłumienia ($B=0$) potwierdzono wcześniejsze rezultaty, że stała podłoża sprężystego nie ma wpływu na obciążenie krytyczne (rysunek 5.8).

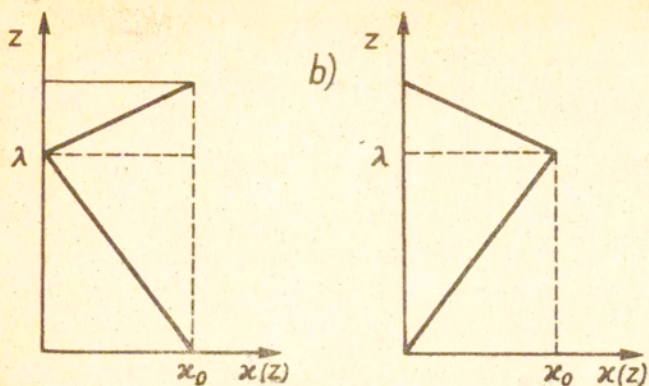
Celep w [32] przyjął, że kolumna spoczywa na podłożu



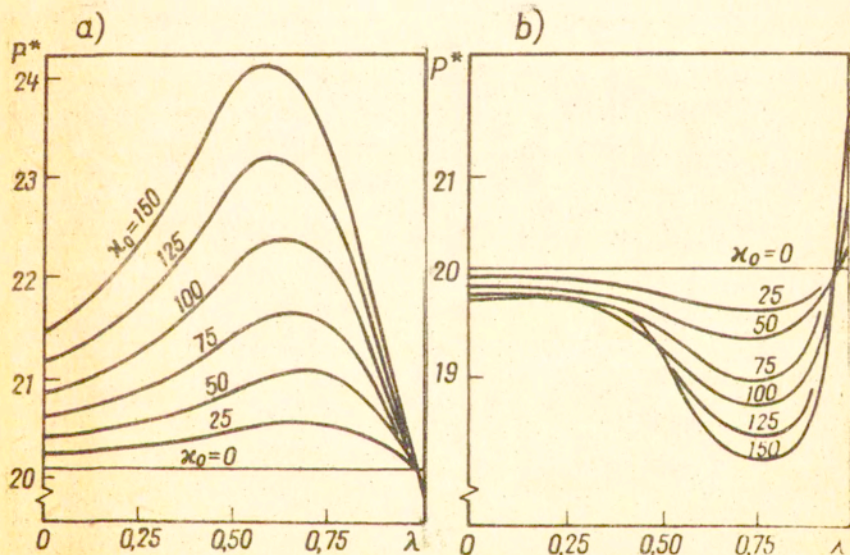
Rys. 5.3. Zmienność modułu podłoża sprężystego wzdłuż kolumny.



Rys. 5.4. Obciążenie krytyczne dla różnych wartości parametrów κ_0 i γ [58].



Rys. 5.5. Zmienność modułu podłoża sprężystego wzdłuż kolumny.



Rys. 5.6. Obciążenie krytyczne dla różnych wartości parametrów κ_0 i λ [58].

sprężystym o modułach proporcjonalnych odpowiednio do ugięcia i obrotu kolumny. Badał on wpływ wartości modułów podłoża na obciążenie krytyczne kolumny ściśkanej jednocześnie siłą konserwatywną i siłą śledzącą.

Anderson [8,9] badał wpływ tłumienia wewnętrznego, bezwładności obrotu kolumny i masy skupionej, masy skupionej na stateczność kolumny podpartej podłożem sprężystym Winklera i Wiegwardta. Wykazano, że obciążenie krytyczne kolumny z małym tłumieniem wewnętrznym lub z masą skupioną na końcu kolumny zależy od modułu podłoża sprężystego Winklera.

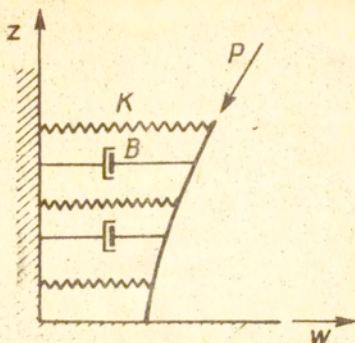
Autorzy dotychczas omówionych prac badali kolumny o stałym przekroju. Natomiast Kar [72,73] badał wpływ lepkosprężystego podłoża typu Kelvina-Voigta na stateczność kolumny o liniowo zmiennym przekroju prostokątnym obciążonej siłą śledzącą (rysunek 5.9). Przyjęto, że materiał kolumny jest także lepkosprężysty typu Kelvina-Voigta. Równanie ruchu kolumny zapisano w postaci:

$$(5.5) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[I(z) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \eta^* \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial t} \right) \right] + P \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + K w + B \frac{\partial w}{\partial t} + m(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

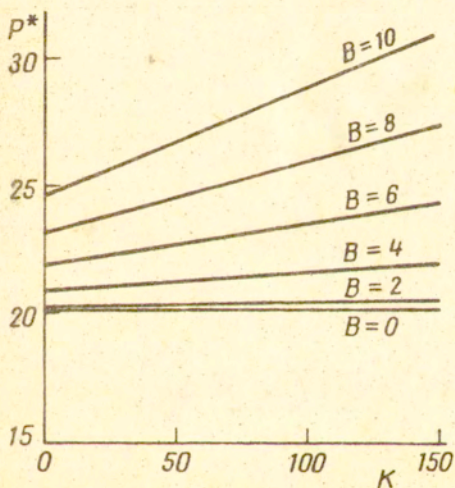
gdzie: $\eta^* = E^* c / E$, $c^2 = EI_0 / \xi A_0 L^4$. Kształt kolumny określony został przy pomocy wielkości α, β wzorami (rysunek 5.10).

$$(5.6) \quad b = b_0(1 - \alpha z) \quad , \quad h = h_0(1 - \beta z).$$

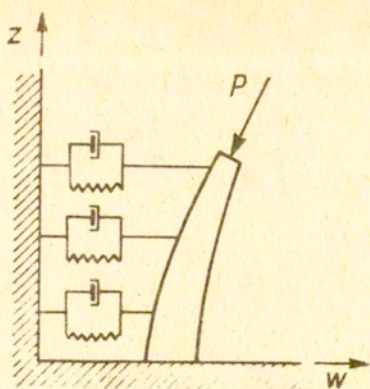
Dla małych wartości modułu podłoża sprężystego wzrost α powoduje zmniejszenie się wartości obciążenia krytycznego. Jednak, dla wystarczająco dużych wartości modułu podłoża K wzrost wartości α znacznie podnosi wartość obciążenia krytycznego (rysunek 5.11). Wzrost wielkości β zmniejsza wartość obciążenia krytycznego dla danych wartości modułu podłoża K, tłumie-



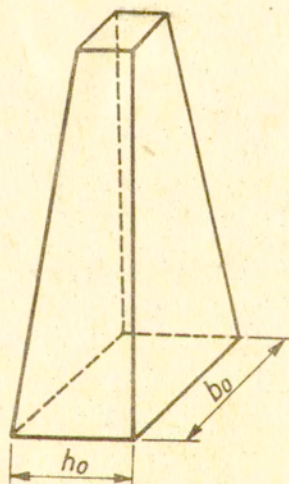
Rys. 5.7. Kolumna Becka na podłożu lepkosprężystym.



Rys. 5.8. Obciążenie krytyczne dla różnych wartości modułu podłoża i współczynnika tłumienia [168].



Rys. 5.9. Kolumna o zmiennym przekroju na podłożu lepkościowym.



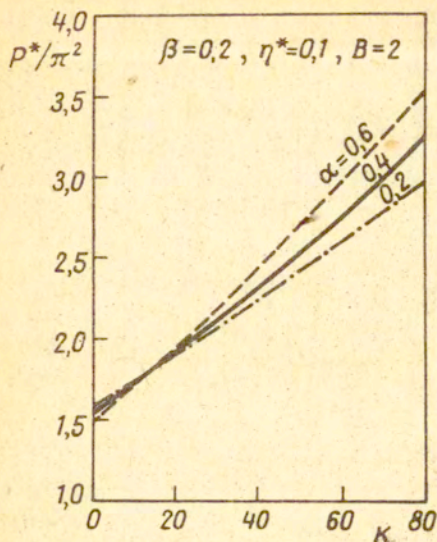
Rys. 5.10. Kształt kolumny.

-nia wewnętrznego i zewnętrznego (rysunek 5.12). Wystarczająco mała wartość tłumienia wewnętrznego (np. $\eta^* = 0,01$) ma destabilizujący wpływ przy małych wartościach modułu podłoża (rysunek 5.13). Jednak większe tłumienie wewnętrzne (np. $\eta^* = 0,1$) ma stabilizujący wpływ na całym rozpatrywanym przedziale wartości modułu podłoża Winklera. Wzrost wartości współczynnika tłumienia podłoża podwyższa wartość obciążenia krytycznego w całym zakresie rozpatrywanego modułu sprężystości podłoża (rysunek 5.14). Szczególnym przypadkiem rozpatrywanego przez Kara zagadnienia są wyniki uzyskane przez Waheda [168].

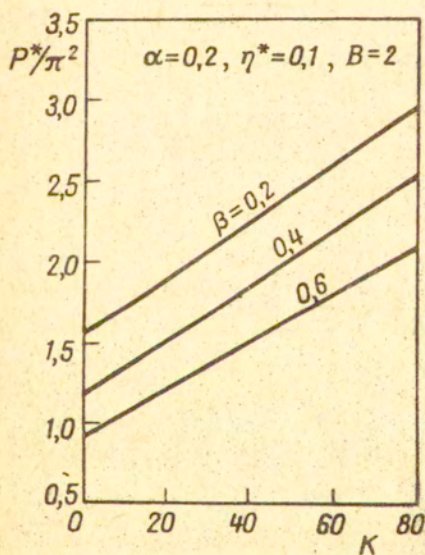
Dalsze badania omawianego modelu dotyczyły wpływu wstępnego skręcania kolumny na jej stateczność. Kar i Hauger [74] wykazali, że wstępne skręcenie kolumny wywiera wpływ stabilizujący.

Sinha, Morgan i Pawłowski [116,144] przeprowadzili dokładną analizę stateczności kolumny Becka na podłożu Kelvina-Voigta, Maxwella oraz na podłożu, które jest ich liniową kombinacją. Dla danej wartości modułu sprężystości podłoża Kelvina-Voigta obciążenie krytyczne wzrasta monotonicznie wraz ze wzrostem intensywności tłumienia w podłożu. Podobnie podłożo Maxwella ma wpływ stabilizujący. Istnieje w tym przypadku optymalna kombinacja wartości obu modułów podłoża, przy której występuje maksimum obciążenia krytycznego.

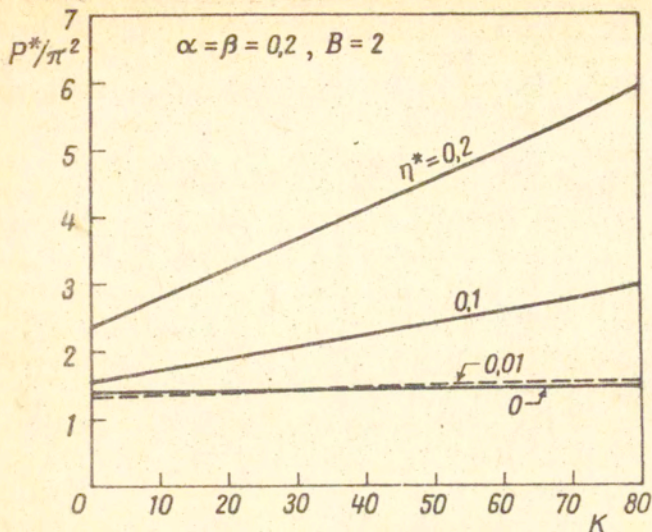
Autorzy prac [21,83,84,87,114,195,196,197] wykazali, że podparcie sprężyste kolumny w jednym punkcie może zwiększać lub zmniejszać obciążenie krytyczne kolumny Becka w zależności od położenia podpory i jej sztywności, podczas gdy moduł podłoża sprężystego Winklera nie ma wpływu na obciążenie krytyczne kolumny Becka [146,151]. W przypadku kolumny Becka z podporą na swobodnym końcu kolumny otrzymano maksymalną wartość obciążenia krytycznego równą $\bar{P}_{kr,opt} \approx 38$ przy $\eta = 34,5$ [114] (rysunek 5.15). Zbliżone wartości dla tego przypadku otrzymali także Sundararajan [154] $\eta = 34,85$ oraz Kounadis [85] $\eta = 34,815$ i $\bar{P}_{kr,opt} = 38,279$. Wyniki badań autorów pracy [114] dotyczące wpływu położenia podpory sprężystej na wartość siły krytycznej kolumny Becka zostały przedstawione na rysunkach 5.16 - 5.18. Na rys. 5.16 przedstawiona została zależność



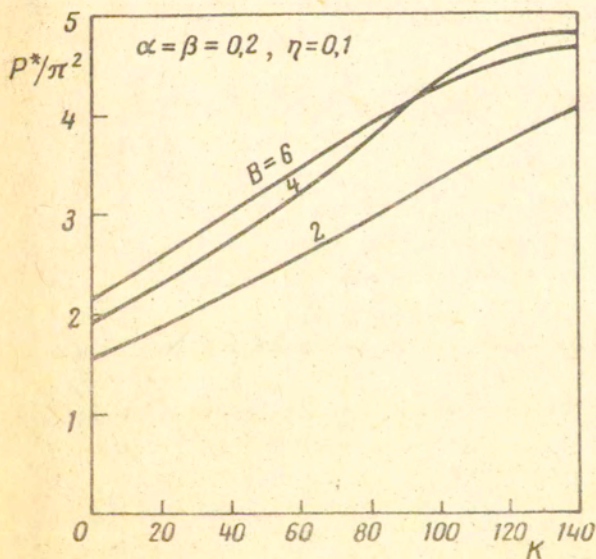
Rys. 5.11. Zmiana obciążenia krytycznego w funkcji modułu podłoża sprężystego dla różnych wartości parametru α [72] .



Rys. 5.12. Zmiana obciążenia krytycznego w funkcji modułu podłoża sprężystego dla różnych wartości parametru β [72] .



Rys. 5.13. Zmiana obciążenia krytycznego w funkcji modułu podłoża dla różnych wartości tłumienia wewnętrznego [72].



Rys. 5.14. Zmiana obciążenia krytycznego w funkcji modułu podłoża dla różnych wartości tłumienia zewnętrznego [72].

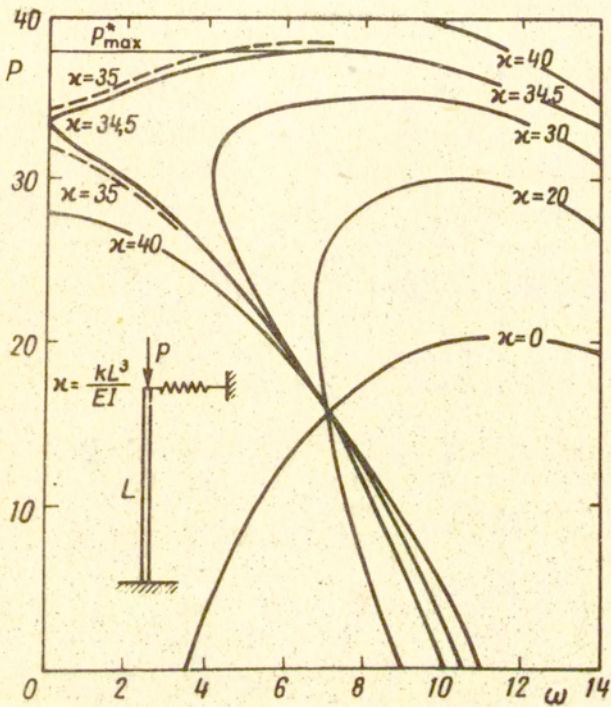
siły krytycznej od położenia podpory dla sztywności mniejszych od \mathcal{H}_{opt} . Siła krytyczna osiąga wówczas największą wartość w przypadku, gdy podpora położona jest na swobodnym końcu kolumny. Kolumna podparta taką podporą w odległości pomiędzy $0,55 + 0,82$ od utwierdzonego końca ma mniejszą wartość siły krytycznej aniżeli kolumna bez podpory. Dla sztywności podpory około dziesięć razy większej niż w poprzednim przypadku, wyniki ilustrowane są na rys. 5.17. Siła krytyczna osiąga w tym przypadku maksimum lokalne obciążenia krytycznego przy $x \approx 0,52$. Przy wartości $x=0,67$ obciążenie krytyczne doznaje skoku od $\bar{P}_{kr}=30$ do absolutnego maksimum $\bar{P}_{kr}=50$. Na rys. 5.18 przedstawiony jest przypadek sztywności $\mathcal{H}=3400$. Maksimum wartości siły krytycznej osiąga się wówczas dla kolumny podpartej w połowie jej wysokości.

6. Wpływ tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego na stateczność kolumn.

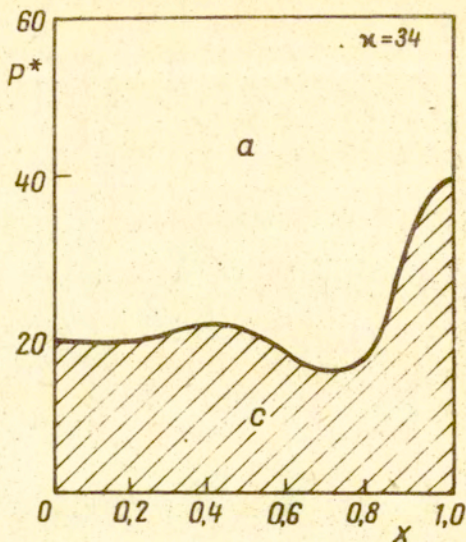
6.1. Model dyskretny - model Zieglera

Wielu badaczy zajmujących się analizą stateczności układów niekonserwatywnych zwraca uwagę na paradoksalne zjawisko braku przejścia granicznego do układu sprężystego przy intensywności tłumienia dążącej do zera. Zjawiskiem destabilizacji kolumn zajmował się już Ziegler [175-177,179], który badał parametry krytyczne podwójnego wahadła z lepkosprężystymi przegubami obciążonego siłą śledzącą. Wykazał on, że małe lepkie tłumienie może powodować znaczne obniżenie siły krytycznej (rys.6.1).

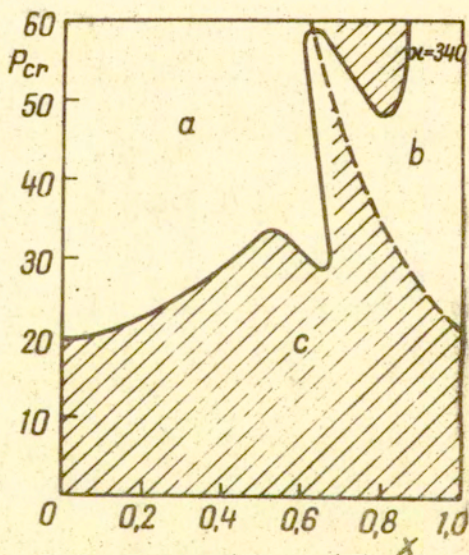
Bołotin [183] rozpatrywał matematyczny model układu z dwoma stopniami swobody wykazując, że wielkość destabilizacji zależy (dla zanikającego tłumienia) od ilorazu współczynników tłumienia w obu stopniach swobody. Maksymalna wartość obciążenia krytycznego układu z tłumieniem występuje przy jednakowej intensywności tłumienia w obu stopniach swobody. Nemat-Nasser i Herrmann [120] wykazali ponadto, że obciążenie krytyczne układu dyskretnego o n stopniach swobody bez tłumienia jest kresem górnym dla obciążenia krytycznego tego samego układu.



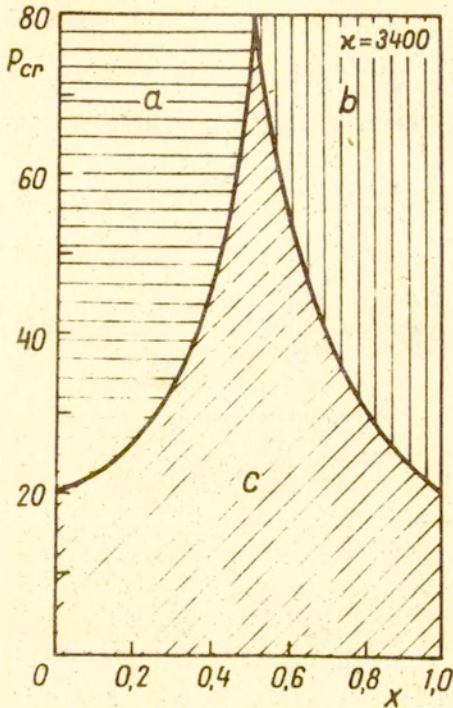
Rys. 5.15. Krzywe charakterystyczne dla różnych wartości sztywności podpory [114].



Rys. 5.16. Obciążenie krytyczne w zależności od położenia podpory dla $\chi = 34$; a-flatter, c-staceczność [114].



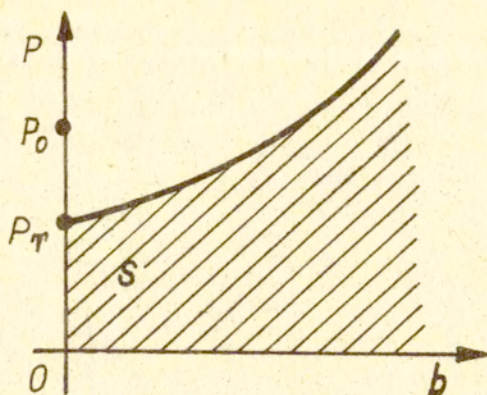
Rys. 5.17. Obciążenie krytyczne w zależności od położenia podpory dla $\chi = 340$; a-flatter, b-diwersgencja, c-staceczność [114].



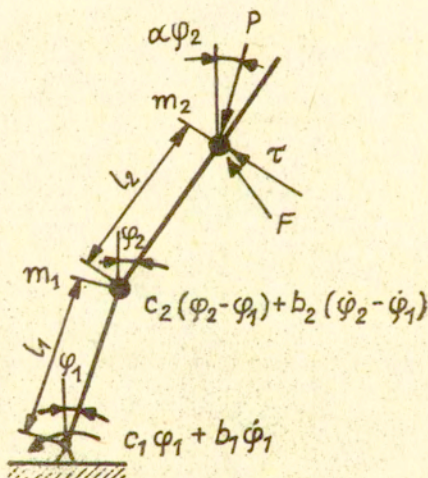
Rys. 5.18. Obciążenie krytyczne w zależności od położenia podpory dla $\chi = 3400$; a-flatter, b-diwersgencja, c-stałość [114] .

poddanego działaniu dostatecznie małych sił będących funkcjami liniowymi prędkości uogólnionych. Model Zieglera z tłumieniem wewnętrznym był również przedmiotem badań Barta [14] , Herrmanna [60] , Andersona [7] , Done'a [39] , Hagedorna [53] , Urbano [165] , Augusti [11] , Plauta [132] , Walkera [169] , a także Trogera, Scheidla i Zemana [142,143,164] .

Herrmann i współautorzy [61-63] badali model Zieglera w przypadkach: bez tłumienia, z nieznacznym lepkiem tłumieniem oraz z tłumieniem zanikającym (Rysunek 6.2) . W przypadku



Rys. 6.1. Obszar stateczności modelu kolumny Zieglera z uwzględnieniem tłumienia lepkiego b . Siła krytyczna P_τ w przypadku zanikającego tłumienia, oraz siła krytyczna $-P_0$ w przypadku sprężystym. S -obszar stateczności.



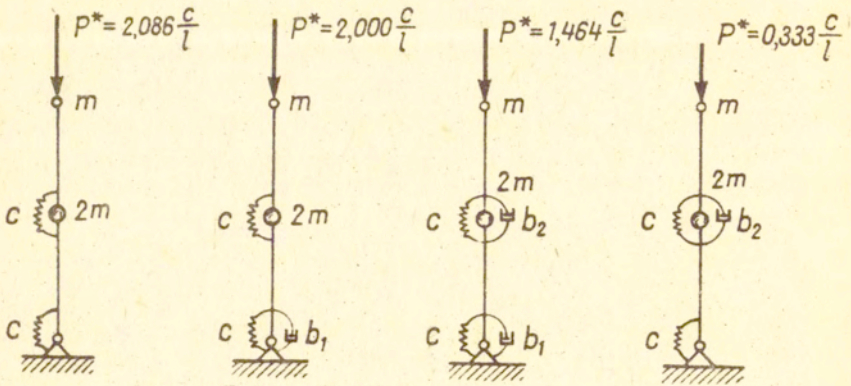
Rys. 6.2. Uogólniony model Zieglera,

układu bez tłumienia otrzymano największą wartość obciążenia krytycznego równą $P_0 = 2,086$ c/l. W przypadku tłumienia tylko dolnego przegubu ($b_1 > 0$, $b_2 = 0$) obciążenie krytyczne równe jest $P_T = 2c/l$. Natomiast, gdy tłumienie występuje tylko w górnym przegubie ($b_1 = 0, b_2 > 0$) siła krytyczna jest znacznie mniejsza i równa $P_T = 0.333$ c/l.

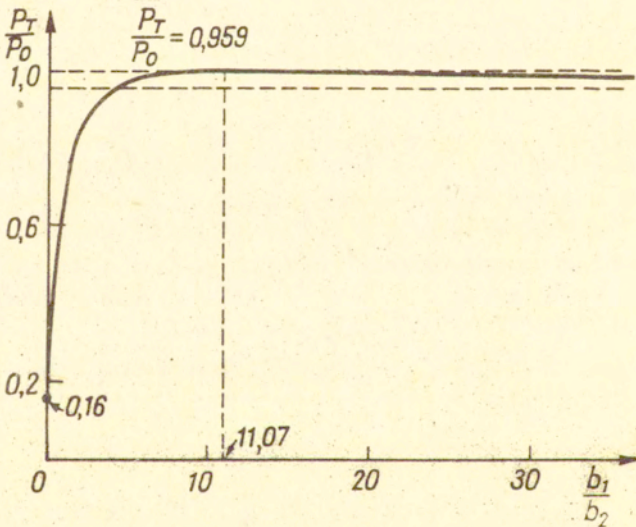
Nieznaczące tłumienie w obu przegubach ($b_1 = b_2 = 0.01$) daje siłę krytyczną $P_T = 1.464$ c/l, (rysunek 6.3). Jeśli rozpatrujemy model Zieglera z nieznacznym zanikającym tłumieniem ($b_1, b_2 \ll 1$) wówczas siła krytyczna P_T zależy od ilorazu współczynników tłumienia i nie przewyższa siły krytycznej P_0 w modelu bez tłumienia. Dla $b_1/b_2 = 0$ stosunek sił krytycznych P_T/P_0 osiąga swoje minimum równe 0.16 i jest to maksymalny efekt destabilizacji równy 84% (rysunek 6.4) [62]. Siła krytyczna osiąga swoje maksimum ($P_T/P_0 = 1$) przy $b_1/b_2 = 11.07$. W tym szczególnym przypadku efekt destabilizacji jest wyeliminowany. Efektu destabilizacji nie można wyeliminować przy każdej wartości współczynnika śledzenia α . Przy $\alpha = 0.6$ efekt destabilizacji jest nie mniejszy aniżeli 1,6% (rysunek 6.5). Herrmann i Bungay [61] wykazali ponadto, że w modelu Zieglera dla współczynników śledzenia z przedziału $(3/7; 3/4)$ ma miejsce destabilizacja niezależnie od wartości ilorazu b_1/b_2 (rysunek 6.6).

Gajewski i Życzkowski [52] badali również stateczność modelu Zieglera, uwzględniając tłumienie lepkie w przegubach oraz działanie na sztywne pręty skupionych sił oporu proporcjonalnych do liniowych prędkości w punktach działania tych sił (rysunek 6.7). Równanie Lagrange'a drugiego rodzaju dla takiego układu przyjęto w następującej postaci:

$$(6.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\psi}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2.$$



Rys. 6.3. Siła krytyczna dla różnych przypadków przegubów.



Rys. 6.4. Obciążenie krytyczne w zależności od ilorazu współczynników tłumienia ($b_{1,2} \ll 1$) [62].

gdzie:

energia kinetyczna T , potencjał sił sprężystych V , funkcja dyssypacji D i siły uogólnione wyrażone są zależnościami:

$$T = \frac{1}{2} l^2 \left[(m_1 \delta_1 + \frac{1}{4} m_2) \dot{\psi}_1^2 + m_2 \delta_2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 + m_2 \delta_2^2 \dot{\psi}_2^2 \right],$$

$$V = \frac{1}{2} \left[(c_1 + c_2) \psi_1^2 - 2c_2 \psi_1 \psi_2 + c_2 \psi_2^2 \right],$$

(6.2)

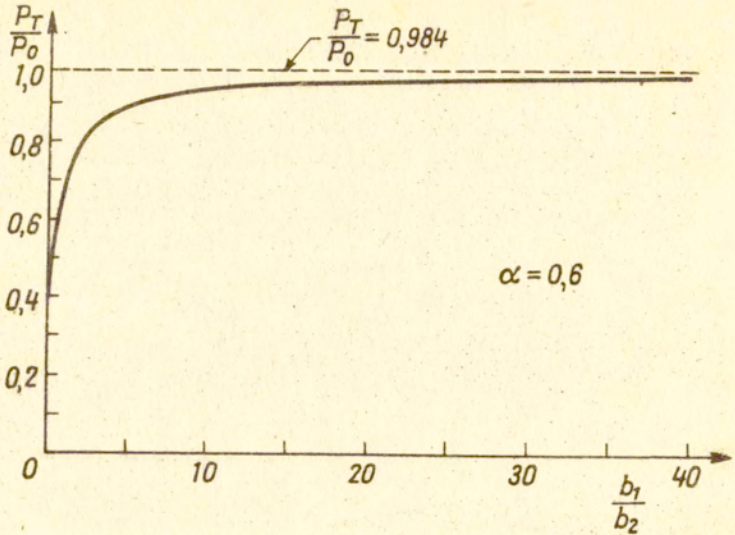
$$D = \frac{1}{2} \left[(b_1 + b_2) \dot{\psi}_1^2 - 2b_2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 + b_2 \dot{\psi}_2^2 \right] + \frac{1}{2} \left[(\delta_1^2 \tau_1 + \frac{1}{4} \tau_2) \dot{\psi}_1^2 + \delta_2 \tau_2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 + \delta_2^2 \tau_2 \dot{\psi}_2^2 \right],$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} PL(\psi_1 - \alpha \psi_2) \quad , \quad Q_2 = \frac{1}{2} PL(1 - \alpha) \psi_2 \cdot$$

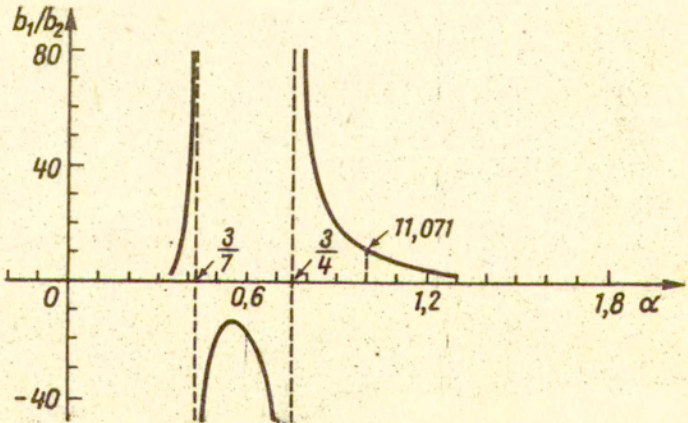
Przyjęto następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(6.3) \quad \Omega = l \left(\frac{m_2}{c_2} \right)^{1/2} \omega \quad , \quad \beta = \frac{PL}{c} \quad , \quad \mu = \frac{m_1}{m_2} \quad , \quad \psi = \frac{c_1}{c_2} \quad ,$$

$$B_i = \frac{b_i}{l \sqrt{m_2 c_2}} \quad , \quad T = \frac{\tau_i}{l \sqrt{m_2 c_2}} \quad , \quad \tau_i = l^2 \bar{\tau}_i \quad , \quad i = 1, 2.$$



Rys. 6.5. Obciążenie krytyczne w zależności od ilorazu współczynników tłumienia przy współczynniku śledzenia $\alpha=0,6$ ($b_{1,2} \ll 1$) [63] .



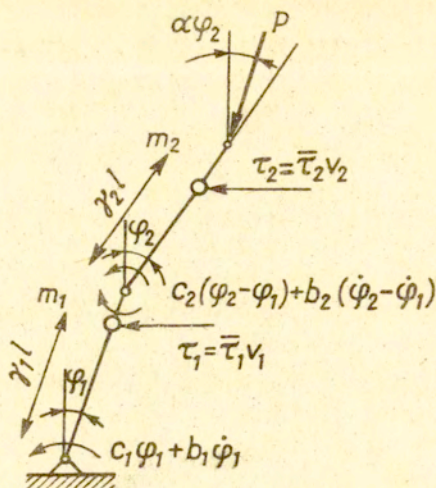
Rys. 6.6. Eliminacja efektu destabilizacji doбором ilorazu współczynników tłumienia w funkcji współczynników śledzenia [63] .

W przypadku szczególnym dla: $\gamma_1 = \frac{1}{4}$, $\gamma_2 = \frac{1}{4}$, $\mu = 1$, $\nu = 1$ otrzymano następujące równanie charakterystyczne:

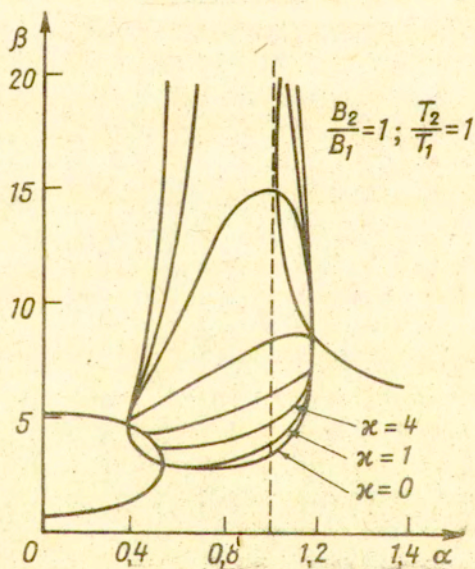
$$(6.4) \quad \Omega^4 + (16B_1 + 160B_2 + T_1 + T_2)\Omega^3 + [176 - 24(2-\alpha)\beta + 256B_1B_2 + 16B_1T_2 + 144B_2T_2 + 16B_2T_1 + T_1T_2]\Omega^2 + \left\{ 128(2-\beta+\alpha\beta)B_1 + 256(1+\alpha\beta-\beta)B_2 + 8(2+\alpha\beta-\beta)T_1 + [160 + 8(2\alpha-5)\beta]T_2 \right\}\Omega + 64[4-6(1-\alpha)\beta + (1-\alpha)\beta^2] = 0.$$

Równanie charakterystyczne (6.4) umożliwiło analizę wpływu tłumienia wewnętrznego, zewnętrznego oraz przypadku równoczesnego działania obu rodzajów tłumienia. W przypadku działania tylko tłumienia w przegubach zmierzającego do zera, stopień destabilizacji w istotny sposób zależy od ilorazu współczynników tłumienia. Tłumienie zewnętrzne T_1, T_2 może również powodować destabilizację układu. W rozpatrywanym przez Gajewskiego i Życzkowskiego przypadku destabilizacja to jest bardzo mała, a przy sile stycznej (współczynnik śledzenia $\alpha = 1$) nie występuje. Na rysunku 6.8 przedstawiony został wykres $\beta = \beta(\alpha)$ dla równoczesnego, jednorodnego ($B_1 = B_2 = B$, $T_1 = T_2 = T$) tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego. Siła krytyczna zależy od stosunku tłumienia zewnętrznego do wewnętrznego $-T/B = \eta$, przy $T \rightarrow 0$ i $B \rightarrow 0$. Jeśli tłumienie jest niejednorodne ($B_2/B_1 \neq 1$; $T_2/T_1 \neq 1$) to siła krytyczna zależy od stosunku współczynników tłumienia oraz od niejednorodności tłumienia wewnętrznego (B_2/B_1) i zewnętrznego (T_2/T_1).

Saw i Wood [141] zbadali model Zieglera obciążony siłą śledzącą, skupioną siłą zewnętrznego tłumienia, oraz siłą Coriolisa (Rys. 6.2). Badali oni efekt destabilizacji w zależności od stosunku długości obu ramion kolumny, rozkładu mas skupionych i sztywności przegubów sprężystych. Rozważano następujące przypadki szczególne:



Rys. 6.7. Model Zieglera ze skupionymi siłami oporu proporcjonalnymi do prędkości liniowych.



Rys. 6.8. Zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia w przypadku równoczesnego, jednorodnego tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego przy różnych ilorazach tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego κ [52]

- model bez sił zależnych od prędkości - siła krytyczna P_0 ,
- model tylko z tłumieniem wewnętrznym (w przegubach) - siła krytyczna P_1 ,
- model tylko z tłumieniem zewnętrznym - siła krytyczna P_2 ,
- model tylko z siłą Coriolisa - siła krytyczna P_3 ,
- model z tłumieniem zewnętrznym i siłą Coriolisa - siła krytyczna P_4 ,
- model z tłumieniem wewnętrznym i zewnętrznym oraz z siłą Coriolisa - obciążenie krytyczne P_5 .

Na rys. 6.9 przedstawione zostały wyniki dla modelu bez tłumienia ($b_1=b_2=0$, $T=F=0$). Minimum siły krytycznej $P_0=2c_1/l_1$ występuje dla $m_2/m_1=1$, to jest - dla jednakowych wartości mas skupionych. Dla $m_2/m_1=0.5$ otrzymano szczególny przypadek rozpatrywany przez Herrmanna i Jonga [62] z siłą krytyczną $P_0=2.086 c_1/l_1$. Przy stosunku sprężystej sztywności przegubów $c_2/c_1=0.04$ obciążenie krytyczne osiąga minimum. Wpływ ilorazu długości ramion wahadła na obciążenie krytyczne jest podobny do wpływu ilorazu mas skupionych. Obciążenie krytyczne osiąga minimum przy długości prętów $l_2/l_1=2,444$. Wpływ tłumienia wewnętrznego b ($b_1=b_2=b$) na siłę krytyczną P_1/P_0 dla różnych wartości m_2/m_1 , l_2/l_1 oraz c_2/c_1 przedstawiony został na rys. 6.10. Skupiona siła zewnętrznego tłumienia T przyłożona na końcu pręta wpływa destabilizująco niezależnie od stosunku mas skupionych, długości ramion kolumny oraz sztywności przegubów sprężystych. Możliwość wyeliminowania efektu destabilizacji występuje dla $m_2/m_1=l_2/l_1=c_2/c_1=1$ (rysunek 6.11). Wydaje się interesujące, że wpływ takich parametrów jak m_2/m_1 , l_2/l_1 czy c_2/c_1 dla modelu z zewnętrznym tłumieniem jest identyczny jak dla modelu z siłą Coriolisa, oraz dla modelu z siłą Coriolisa i tłumieniem zewnętrznym łącznie. W modelu Zieglera, w którym występuje równocześnie tłumienie wewnętrzne b , tłumienie zewnętrzne T i siła Coriolisa, wzrost tłumienia wewnętrznego ($b_1=b_2=b$) powoduje stabilizację lub destabilizację układu w zależności od intensywności tłumienia zewnętrznego. Im mniejszy współczynnik tłumienia zewnętrznego, tym jego działanie destabilizujące jest większe (rysunek 6.12). Wyniki eksperymentalne przytoczone w drugiej

części pracy potwierdzają powyższe wnioski teoretyczne.

6.2. Model ciągły kolumny

Równanie ruchu kolumny z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego (materiał Kelvina - Voigta) i zewnętrznego jest postaci [4,121,186,186,190]:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} + PQ \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \delta_w \frac{\partial^5 W}{\partial z^4 \partial t} + \delta_z \frac{\partial W}{\partial t} + \xi \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie: δ_w - współczynnik tłumienia wewnętrznego,
 δ_z - współczynnik tłumienia zewnętrznego,
 $Q = \int_z^1 q(z) dz.$

Gdy: $Q = 1$ - kolumna Becka,
 $Q = 1-z$ - kolumna Leipholza,
 $Q = \frac{1}{2}(1-z)^2$ - kolumna Haugera.

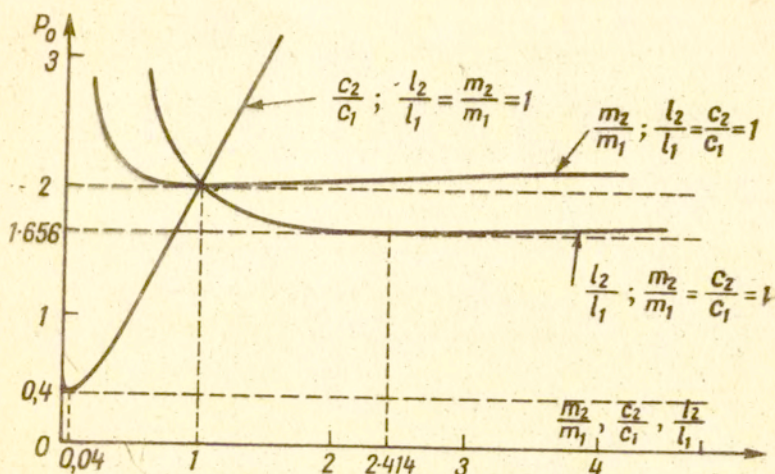
Warunki brzegowe precyzowano następująco [5,135]:

$$\text{dla } z=0, \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\text{dla } z=1, \quad EI \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \delta_w \frac{\partial^3 W}{\partial z^2 \partial t} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} + \delta_w \frac{\partial^4 W}{\partial z^3 \partial t} = 0.$$

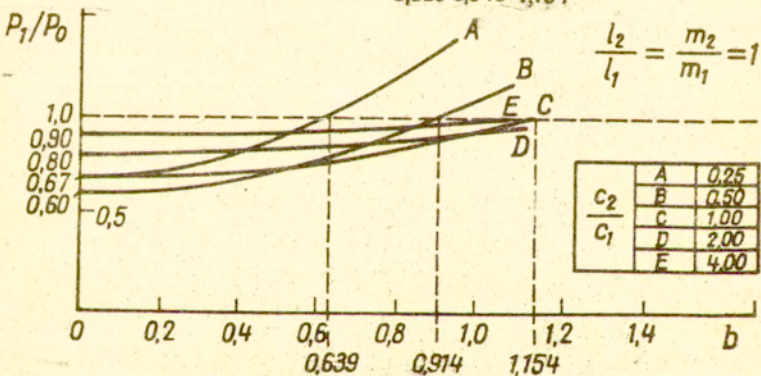
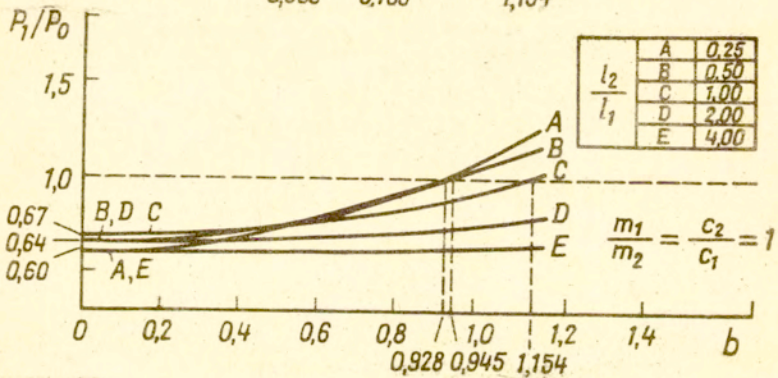
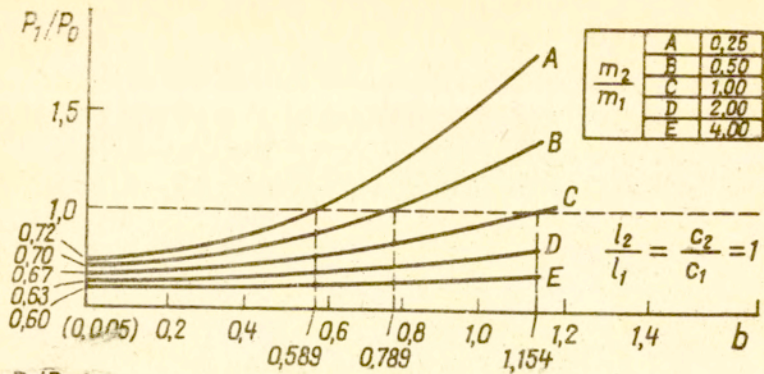
Wpływ liniowego tłumienia wewnętrznego na stateczność kolumny obciążonej siłą śledzącą i siłą ciężkości badany był przez Bołotina i Żinżera [29,30,194] w końcu lat sześćdziesiątych. Stwierdzono wówczas destabilizujący jego wpływ. Destabilizujący wpływ tłumienia wewnętrznego na kolumnę Becka potwierdziły także badania Nemat-Nassera, Prasada, Herrmanna [117,121] oraz Denisowa i Nowikowa [190]. Plaut i Infante otrzymali wyniki świadczące o stabilizującym wpływie zewnętrznego lepkiego tłumienia działającego na kolumnę Becka [136]. Wniosek ten jest jednak kwestionowany przez Saw'ą i Wood'a [141]:

Smith i Herrmann w [145] stwierdzają destabilizujący wpływ zewnętrznego tłumienia magnetycznego na kolumnę Becka. Wpływ tłumienia wewnętrznego (model Kelvina-Voigta) i tłumienia zew-

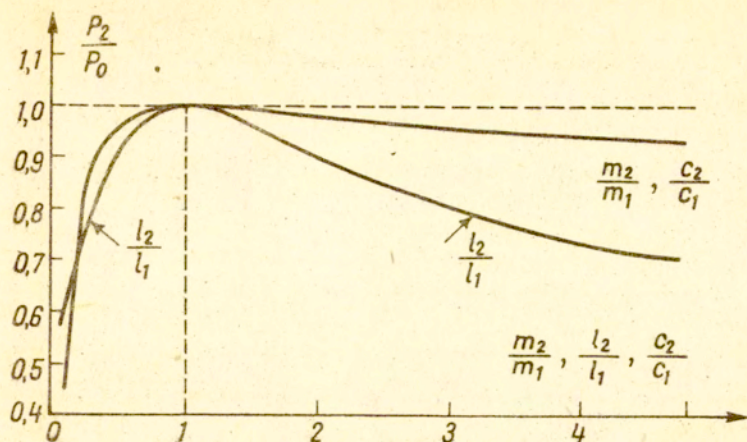


Rys. 6.9. Wpływ stosunku mas, długości i sztywności sprężystych przegubów na wartość siły krytycznej dla modelu sprężystego [141].

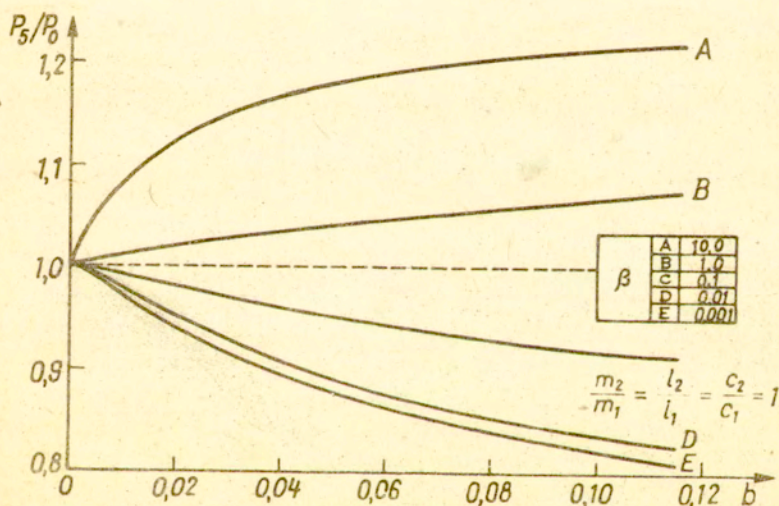
nętrznego na stateczność kolumn Becka i Leipholza podał również Anderson [5]. Zależność obciążenia krytycznego kolumny Haugera od tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego była przedmiotem prac Andersona [4], Thomasa [159,160], Kapoora i Leipholza [69]. Bardziej ogólny przypadek obciążenia rozważony został przez Gajewskiego [48]. Badał on zjawisko destabilizacji kolumny obciążonej siłą niekonserwatywną z jednoczesnym działaniem nieskończenie małego tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego. Otrzymane wyniki świadczą, że wartość siły krytycznej zależy od ilorazu współczynników charakteryzujących odpowiednio tłumienie zewnętrzne δ_z i wewnętrzne δ_w . W przypadku braku tłumienia zewnętrznego ($\delta_z=0$), i tłumieniu wewnętrznym dążącym do zera ($\delta_z/\delta_w=0$) efekt destabilizacji jest maksymalny. Wyniki eksperymentalne, które uzyskali Wood, Saw i Saunders [171] są



Rys. 6.10. Wpływ wewnętrznego tłumienia na obciążenie krytyczne P_1 przy różnych stosunkach mas, długości ramion i sztywności przegubów [141].



Rys. 6.11. Wpływ stosunku mas, długości ramion i sztywności przegubów na siłę krytyczną modelu z tłumieniem zewnętrznym- τ [141] .



Rys. 6.12. Wpływ tłumienia wewnętrznego na siłę krytyczną modelu z tłumieniem wewn., zewnętrznym oraz siłą Coriolisa dla różnych wartości współczynników tłumienia zewnętrznego- β [141] .

zgodne z rezultatami teoretycznymi otrzymanymi dla przypadku bez tłumienia wewnętrznego ($b_z/b_w \rightarrow \infty$).

W tabeli 6.1. podano za Pedersenem i Seyranianem [128] obciążenia krytyczne (flutter) i częstotliwości krytyczne dla kolumn Becka, Leipholza i Haugera dla niektórych współczynników tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego.

6.3. Model kolumny z układami tłumików lepkosprężystych i sprężystoplastycznych.

Bogacz i Mahrenholtz [23,24] analizowali model ciągły kolumny sprężystej z tłumikami dyskretnymi. Kolumna obciążona siłą śledzącą oraz skupioną siłą oporu proporcjonalną do prędkości translacji lub prędkości obrotu w punkcie zamocowania tłumika. Otrzymane rezultaty świadczą, że siła krytyczna w przypadku kolumny z tłumikiem wrażliwym na prędkość translacji jest niezależna od współczynnika tłumienia, ale zależy istotnie od współrzędnej jego położenia (rysunek 6.13). Zależność siły śledzącej od częstotliwości w zależności od położenia tłumika x (0,2; 0,75; 0,85; 0,99) zilustrowano na rysunku 6.14. Ciągłe i przerywane linie reprezentują odpowiednio rzeczywiste i urojone części równania charakterystycznego. Punkty przecięcia wyznaczają wartości krytyczne. Kształt obszarów niestateczności przedstawiony jest na rysunkach 6.13, 6.15, i 6.16. Przez "A" oznaczono obszar niestateczności pierwszej formy własnej "B" drugiej, a "C" trzeciej. Przez "E" oznaczono obszar niestateczności drugiej i trzeciej formy własnej jednocześnie. Natomiast przez "D" oznaczono jednoczesną niestateczność pierwszej i trzeciej formy własnej. Obszar niestateczności w przypadku tłumika wrażliwego na prędkość obrotową kolumny ilustruje rys. 6.15. Na rysunku 6.16 przedstawiono wpływ wartości ilorazu współczynników obu rodzajów tłumienia na wartość siły krytycznej kolumny. Układ ten jest szczególnie wrażliwy na zmianę wartości η_2/η_1 przy $\eta_2/\eta_1 \rightarrow 0$.

Autorzy pracy [28] podjęli próbę zbadania wpływu dyskretyzacji kolumn. Porównali w tym celu wyniki prac [52,181] z pra-

	Kolumna Becka		Kolumna Leipholza				Kolumna Haugera				
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
δ_z	0	0	0,01	0	0,01	0,01	0	0	0,01	0,01	
δ_w	0	0	0,01	0	0,01	0,01	0	0	0,01	0,01	
\bar{p}^*	20,0	20,1	11,0	17,8	40,1	40,2	21,9	35,6	151,1	151,5	132,0
ω	10,9	11,0	5,4	7,8	11,0	11,0	5,4	7,8	11,5	11,5	5,4
											8,0

Rys. 6.1. Obciążenie krytyczne i częstotliwość krytyczna dla kolumn Becka, Leipholza i Haugera z tłumieniem zewnętrznym δ_z i wewnętrznym δ_w [128] .

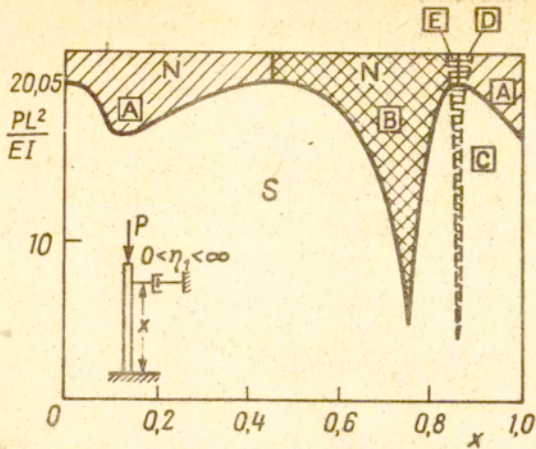
cami [23,24]. Stwierdzili istotny wpływ dyskretyzacji rozważanego układu. Występują różnice ilościowe oraz jakościowe polegające na tym, że dla układu dyskretnego obszar niestateczności jest ograniczony, natomiast układ ciągły charakteryzuje się nieograniczonym obszarem niestateczności.

W pracach [24,25] prowadzone są badania nad statecznością kolumn sprężystych z układami tłumików dyskretnych lepkosprężystych i sprężystoplastycznych. W pracy [25] podane zostały wyniki badania wpływu dyssypacji energii, układem tłumików lepkosprężystych na stateczność kolumny sprężystej (rysunek 6.17). Autorzy założyli, że kolumna podparta jest na swobodnym końcu układem tłumików, dla których $k_{12}=k_{22} \rightarrow \infty$, $k_{21}=\eta_{11}=0$, $\eta_{21} \geq 0$. Krzywe charakterystyczne przy różnych wartościach bezwymiarowych parametru $\mathcal{K}=k_{11}L^2\alpha/EI$ pokazane są na rysunku 6.18. Można tutaj zauważyć, że dla względnie małych wartości \mathcal{K} oraz $\eta_{21}=0$ obciążenie krytyczne określane jest przez styczną poziomą wyznaczającą niestateczność typu oscylacyjnego (flatter). Gdy \mathcal{K} osiąga wartość 4,65, krzywa charakterystyczna styka się z osią pionową współrzędnych w $\bar{P}=\bar{P}_{kr}=21,0$. Wówczas rozpoczyna się divergentny typ niestateczności o mniejszej wartości siły krytycznej P_{kr} . Obciążenie osiąga swoje maksimum absolutne $P_{kr\ opt.} \approx 29$ przy parametrze \mathcal{K} nieznacznie mniejszym od 4,65. W przypadku uwzględnienia tłumienia $\eta_{21} > 0$ obciążenie krytyczne wyznaczają przecięcia krzywych reprezentujących części rzeczywiste i urojone równania charakterystycznego:

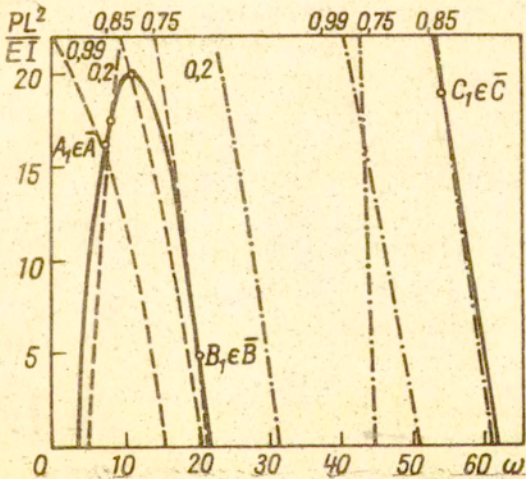
$$\operatorname{Re} \left[\Phi(P, k_{ij}, \eta_{ij}, \omega) \right] + j \operatorname{Im} \left[\Phi(P, k_{ij}, \eta_{ij}, \omega) \right] = 0.$$

Wyniki obliczeń dla $\eta_{21} > 0$ i $\eta_{21} = 0$ pokazane są na rysunku 6.19. Widać tutaj, że wartości siły krytycznej dla $\eta > 0$ i $\eta = 0$ dla $\mathcal{K} < 4,65$ różnią się, natomiast dla $\mathcal{K} > 4,65$ mają tę samą wartość.

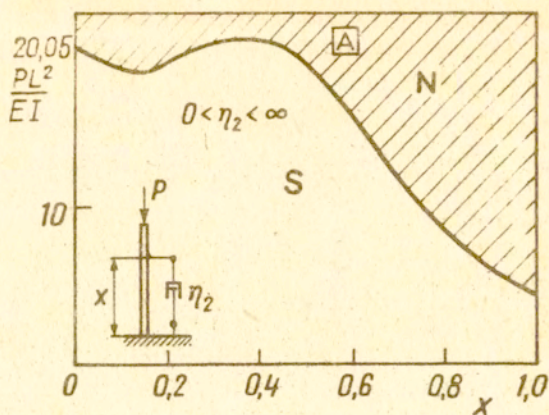
Bogacz i Mahrenholtz [24,27] zajmowali się także analizą jakościową wpływu podpory sprężystoplastycznej na charakter utraty stateczności (rysunek 6.20). Wykazano, że w zależności



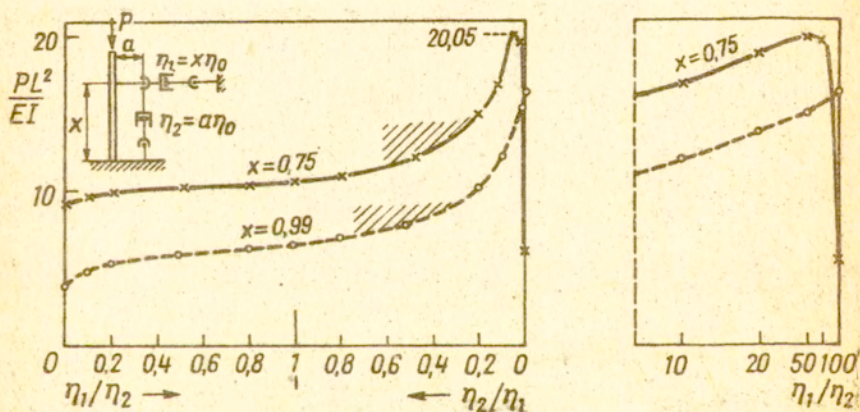
Rys. 6.13. Siła krytyczna w funkcji współrzędnej położenia tłumika wrażliwego na prędkość translacji; S-stalność; N-niestalność [23] .



Rys. 6.14. Zależność siły śledzącej od częstotliwości. Wartości krytyczne dla różnych współrzędnych położenia tłumika. $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ oznaczają domknięcia zbiorów A, B, C [23] .



Rys. 6.15. Siła krytyczna w funkcji położenia tłumika wrażliwego na prędkość obrotu; S-stalność; N-niestalność [23] .



Rys. 6.16. Siła krytyczna w funkcji ilorazu współczynników tłumienia; S-stalność; N-niestalność [23] .

od wartości parametrów charakteryzujących podporę i wartości siły śledzącej mogą występować stateczne i niestateczne cykle graniczne a także dodatkowe, niezerowe położenia równowagi.

7. Stateczność kolumn z nieciągłością sztywności

W tym rozdziale przedstawimy wyniki analizy wpływu szczeliny, a także małego objętościowo wycięcia zmniejszającego sztywność na stateczność kolumny Becka. Anifantis i Dimarogonas [10] badali stateczność kolumny Becka i Eulera z jedną szczeliną krawędziową (rysunek 7.1). Przy obu typach obciążeń szczelina jest modelowana jednostronnym przegubem o sztywności c , będącej funkcją głębokości szczeliny. Modelem matematycznym zagadnienia było równanie ruchu kolumny Becka (2.5) z rozwiązaniem ogólnym (2.7). Założono, że szczelina dzieli kolumnę na dwie części, którym odpowiadają rozwiązania:

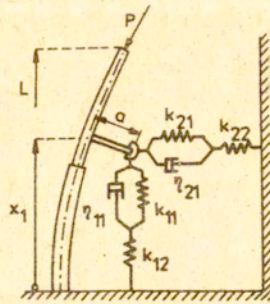
$$(7.1) \quad \begin{aligned} u_1(x) &= C_1 \operatorname{sh} k_1 x + C_2 \operatorname{ch} k_1 x + C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x, \\ u_2(x) &= C_1^0 \operatorname{sh} k_1 x + C_2^0 \operatorname{ch} k_1 x + C_3^0 \sin k_2 x + C_4^0 \cos k_2 x. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe przyjęto następujące:

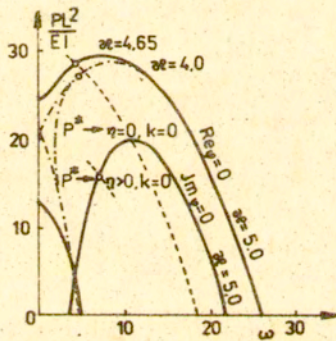
$$(7.2) \quad \begin{aligned} u_1(0) &= 0, \quad u_1'(0) = 0, \\ u_2(0) &= 0, \quad u_2'''(l) = 0, \\ c u_2'''(x_1) &= u_1'(x_1) - u_2'(x_2), \\ u_1(x_1) &= u_2(x_1), \quad u_1''(x_1) = u_2''(x_1), \quad u_1'''(x_1) = u_2'''(x_1), \end{aligned}$$

gdzie:

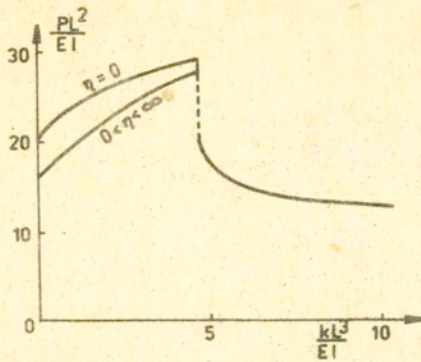
$$x_1 = \frac{l_1}{L}, \quad c = \frac{EI}{cL}.$$



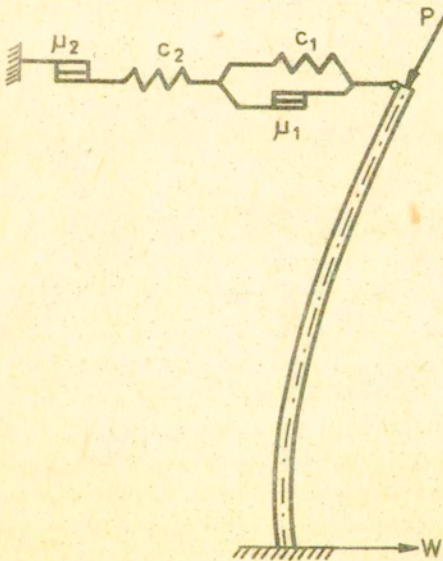
Rys. 6.17. Kolumna z układem tłumików dyskretnych lepko-sprężystych.



Rys. 6.18. Krzywe charakterystyczne [25] .



Rys. 6.19. Siła krytyczna dla kolumny z układem tłumików lepko-sprężystych [25].



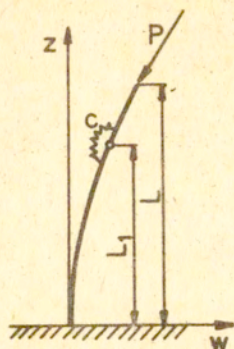
Rys. 6.20. Kolumna z układem tłumików dyskretnych sprężysto-plastycznych.

Z warunków brzegowych (7.2) Anifantis i Dimarogonas otrzymali równanie charakterystyczne, które pozwoliło wyznaczyć krzywe charakterystyczne dla różnych położenia szczeliny x_1 i różnych wartości sztywności sprężystej c . Utrata stateczności w przypadku kolumny Becka ze szczeliną oraz kolumny Eulera przy niektórych lokalizacjach i sztywnościach szczeliny ma charakter oscylacyjny. Autorzy omawianej pracy wykazali, że w pewnych przypadkach położenia i głębokości szczeliny możliwe jest zwiększenie obciążenia krytycznego w stosunku do kolumny Becka bez szczeliny (rys.7.2) .

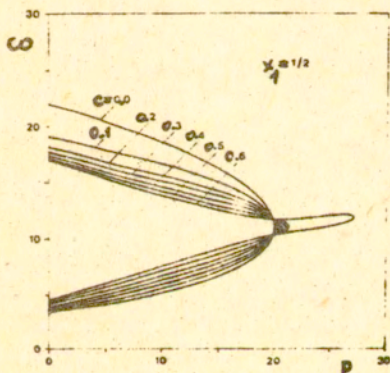
W pracy [26] badano kolumnę Becka z imperfekcją polegającą na lokalnej utracie sztywności, to jest małym objętościowo wycięciu kolumny (rys. 7.3) określonym następującym współczynnikiem:

$$(7.3) \quad \tilde{\kappa} = \frac{EI_1 L^2}{EI L_1^2} \quad \left| \quad EI_1 L_1^2 \rightarrow 0 \right.$$

Na rysunku 7.4 podane zostały krzywe charakterystyczne przy różnych położeniach wycięcia x_1 . Natomiast na rysunku 7.5 naniesione zostały wartości obciążeń krytycznych przy różnych jego położeniach $x_1=0,3;0,4;0,48;0,49;0,495;0,5;0,51;0,6;0,8;0,9$ w zależności od współczynnika sztywności $\tilde{\kappa}$. Dla większości zbadanych przypadków lokalne obniżenie sztywności powoduje wzrost obciążenia krytycznego w stosunku do klasycznej kolumny Becka. Dla danego położenia wycięcia x_1 istnieje optymalna sztywność ze względu na wartość obciążenia krytycznego. Można również zauważyć, że najbardziej korzystnym ze względu na stateczność jest umiejscowienie wycięcia w połowie długości kolumny.

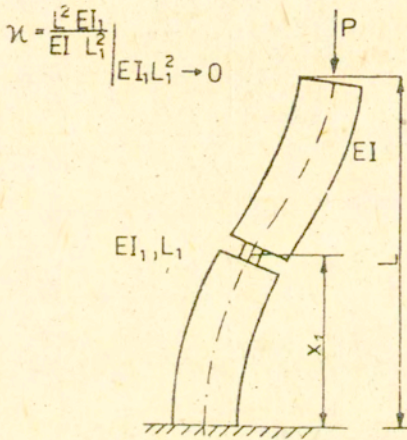


Rys. 7.1. Kolumna Becka z pojedynczą szczeliną krawędziową.

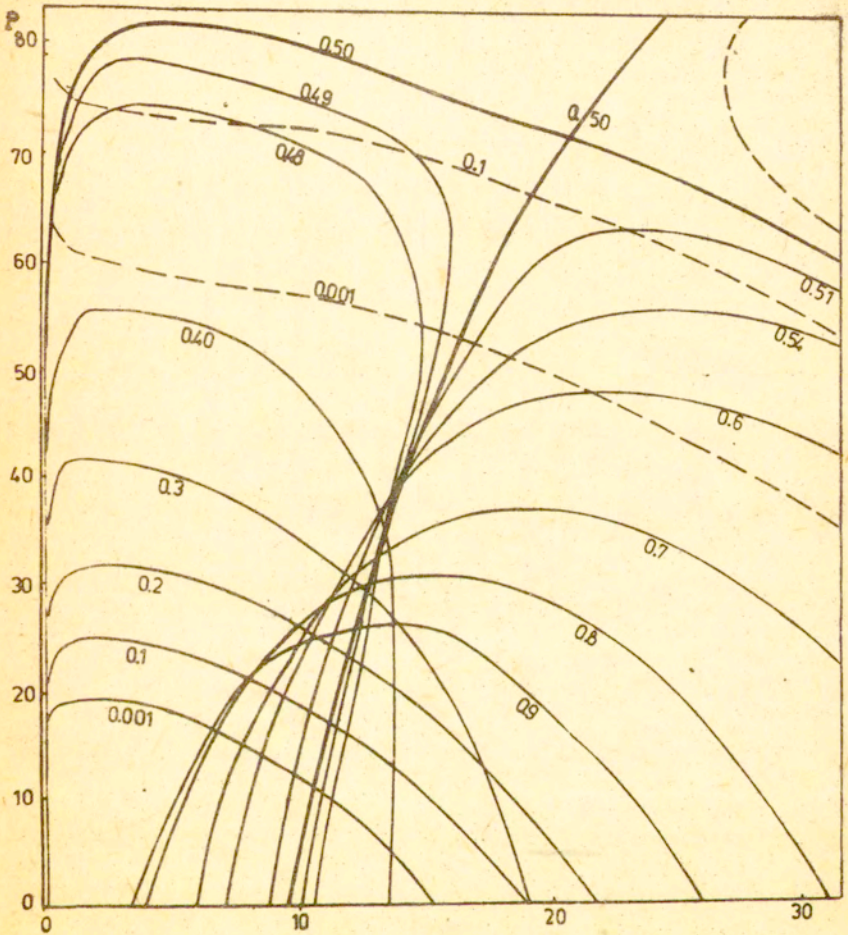


Rys. 7.2. Krzywe charakterystyczne dla kolumny Becka z pojedynczą szczeliną krawędziową w połowie wysokości kolumny

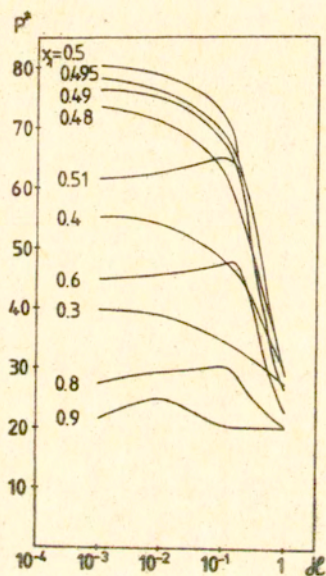
[10]



Rys. 7.3. Kolumna Becka z wycięciem.



Rys. 7.4. Krzywe charakterystyczne dla kolumny Becka z wycięciem $[2\epsilon]$.



Rys. 7.5. Obciążenie krytyczne dla kolumny Becka z wycięciem przy różnych położeniach x_1 i wartościach współczynnika sztywności α [26].

8. Zakończenie

Niniejsza praca miała na celu przedstawienie aktualnego stanu badań nad analizą i syntezą kolumn obciążonych niekonserwatywnie ze względu na stateczność. Badania te początkowo prowadzono głównie ze względów poznawczych [162]. Dalszy rozwój uwarunkowany był potrzebami praktyki inżynierskiej (technika lotnicza, raketowa, robotyka). Trudno przewidzieć dalszy rozwój badań w dziedzinie optymalizacji statecznych kolumn obciążonych siłami niekonserwatywnymi. Jednym z kierunków rozwoju badań jest analiza wpływu różnego rodzaju imperfekcji, szczelin, a także kolumn z materiałów sprężysto-plastycznych. Warunki praktyki inżynierskiej wymagają jeszcze rozważenia innych pokrewnych konstrukcji obciążonych siłami śledzącymi. Zagadnienia wpływu sprężystości ramion kolumn Zieglera bądź wpływu przegubów lepkosprężystych kolumn sprężystych o modelach ciągłych na ich stateczność będą przedmiotem badań w najbliższym czasie.

LITERATURA

- [1] Altman, W. and De Oliveira, A.M., On the use of the Quadratic Functional and its derived principles in structural mechanics. Computers and Structures 15, 3, 291-297, 1982.
- [2] Altman, W. and De Oliveira, A.M., Application of the quadratic functional to nonconservative problems of elastic stability. Computers and Structures 18, 1, 141-145, 1984.
- [3] Altman, W. and De Oliveira, A.M., The quadratic functional as an indicator of the convergence of approximate methods. Computers and Structures 19, 4, 689-692, 1984.
- [4] Anderson, G.L., On the role of the adjoint problem in dissipative, nonconservative problems of elastic stability. Meccanica 7, 3, 165-173, 1972.
- [5] Anderson, G.L., Application of variational method to dissipative, non-conservative problems of elastic stability. J.Sound Vib. 27, 279-296, 1973.
- [6] Anderson, G.L., Optimal design of a cantilever subjected to dissipative and non-conservative forces. J.Sound Vib. 32, 2, 155-169, 1974.
- [7] Anderson, G.L., On non-conservative stability problems of rotating elastic systems with internal damping. J.Sound Vib. 37, 3, 335-348, 1974.
- [8] Anderson, G.L., The influence of rotatory inertia, tip mass and damping on the stability of a cantilever beam on an elastic foundation. J.Sound Vib. 43, 543-552, 1975.
- [9] Anderson, G.L., The influence of a Wieghardt type elastic foundation on the stability of some beams subjected to distributed tangential forces. J.Sound Vib. 44, 1, 103-118, 1976.
- [10] Anifantis, N. and Dimarogonas, A., Stability of columns with a single crack subjected to follower and vertical loads. Int.J.Solids Struct. 19, 4, 281-291, 1983.
- [11] Augusti, G., Instability of struts subject to radiant heat. Meccanica 3, 1, 167-176, 1968.
- [12] Barta, J., Das Becksche Stabilitätsproblem und verwandte Probleme. Acta Techn., Acad.Sci.Hungar. 31, 1-2, 241-259, 1960.

- [13] Barta, J., Sätze über die Stabilität der Ruhestellung eines elastischen Gebildes. Acta Techn., Acad.Sci.Hungar. 59, 1-2, 165-182, 1967.
- [14] Barta, J., Examples on the stabilizing and destabilizing effects. Proc.IUTAM Symp. on Instability of Continuous Systems 1969 /Ed.H.H.E.Leipholz/, 263-265, Springer, Berlin 1971.
- [15] Barsoum, R.S., Finite element method applied to the problem of nonconservative system. J. of Num.Meth. in Eng. 2, 63-87, 1971.
- [16] Beck, M., Die Knicklast des einseitig eingespannten Tangential gedrückten stabes. ZAMP 2, 3, 225-228, 1952.
- [17] Blasius, H., Träger kleinster Durchbiegung und Stabe grösster Knickfestigkeit bei gegebenem Materialverbrauch. ZAMP 62, 182-187, 1914.
- [18] Błachut, J., Gajewski, A., A unified approach to optimal design of columns. SM Archives 2, 4, 363-413, 1980.
- [19] Błachut, J., Gajewski, A., Unimodalna oraz bimodalna optymalizacja drgających i narażonych na utratę stateczności prętów i łuków. Konferencja nt.Optymalizacja Wytrzymałościowa Konstrukcji, Jabłonna 1980, 35-72, Ossolineum, Wrocław 1983.
- [20] Bogacz, R., Irretier, H., Mahrenholtz, O., Optimal design of structures under non-conservative forces with stability constraints. Proc.of EUROMECH 112 Coll. on Bracketing of Eigenfrequencies of Continuous Structures, 43-65, Hungary, 1979.
- [21] Bogacz, R., Mahrenholtz, O., Optimally stable structures subjected to follower forces. Proc.of the IUTAM Symp., Waterloo, Canada 1979, in: Structural Control, Ed. H.H.E.Leipholz, North-Holland P.C., 139-157, 1980.
- [22] Bogacz, R., Irretier, H., Mahrenholtz, O., Optimal design of structures subjected to follower forces. Ing.Arch. 49, 63-71, 1980.
- [23] Bogacz, R., Mahrenholtz, O., On the optimal design of viscoelastic structures subjected to circulatory loading. in: Optimization Methods in Structural Design, 281-288, Wissenschaftsverlag, 1983.
- [24] Bogacz, R., Mahrenholtz, O., Modal analysis in application to design of inelastic structures subjected to circulatory loading. Proc. of EUROMECH 174 Coll. on Inelastic Structures under Variable Loads, Italy, Palermo 1983.

- [25] Bogacz, R., Mahrenholtz, O., Multi-modal analysis of critical forces on tangentially loaded structures. ZAMM 64, T 34-T 36, 1984.
- [26] Bogacz, R., Mahrenholtz, O., Proc. of EUROBSCH 190 Coll. on Dynamic Stability of Inelastic Structures, Hamburg-Harburg 1984 /w druku/.
- [27] Bogacz, R., Mahrenholtz, O., On limiting cycles of inelastic structures under circulatory load. ZAMM 65, 4, 1985 /w druku/.
- [28] Bogacz, R., Niespodziana, A., O obszarach niestateczności pewnych modeli kolumn obciążonych siłą śledzącą. Prace IPPT PAN 36/1984, Warszawa 1984.
- [29] Bolotin, V.V., Stability of viscoelastic systems subjected to nonconservative forces. Proc.IUTAM Symp.Herrenalb/Karlsruhe 1969, 349-360, Springer-Verlag 1971.
- [30] Bolotin, V.V., Zhinzher, N.J., Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. Int.J.Solids Struct. 5, 965-989, 1969.
- [31] Bredehöft, M., Hauger, W., An iteration procedure and bounds for the eigenvalues for a class of non-self-adjoint eigenvalue problems. Mech.Res.Comm. 6, 2, 105-111, 1979.
- [32] Celep, Z., Stability of a beam on an elastic foundation subjected to a nonconservative load. J.Appl.Mech. 47, 111-120, 1980.
- [33] Claudon, J.L., Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads. J. de Mécanique 14, 3, 531-543, 1975.
- [34] Claudon, J.L., Détermination et maximisation de la charge critique d'une colonne de Hauger en présence d'amortissement. ZAMP 29, 226-236, 1978.
- [35] Claudon, J.L., Sunakawa, M., Optimizing distributed structures for maximum flutter load. AIAAJ. 19, 7, 957-959, 1981.
- [36] Clausen, T., Über die Form architektonischer Säulen. Bull. Physico-Math. et Astronomique 1, 279-294, 1849-1853.
- [37] Cowper, G.R., The shear coefficient in Timoshenko beam theory. J.Appl.Mech. 44, 731-736, 1977.
- [38] Done, G.T.S., Follower force instability of pool-mounted jet engine. The Aeronautical J.of The Royal Aeron.Soc., Febr. 103-107, 1972.

- [39] Done, G.T.S., Damping configurations that have a stabilizing influence on nonconservative systems. *Int.J.Solids Struct.* 9, 203-215, 1973.
- [40] Done, G.T.S., Simpson, A., Dynamic instability of certain conservative and non-conservative systems. *J.Mech.Engng. Sci.* 19, 6, 251-263, 1977.
- [41] El Naschie, M.S., Some remarks on the Beck problem. *AIAAJ.* 15, 8, 1200-1201, 1977.
- [42] El Naschie, M.S., Reply by autor to A.H.Flax. *AIAAJ.* 16, 8, 862-863, 1978.
- [43] Farshad, M., Tadjbakhsh, I., Optimum shape of columns with general conservative and loading. *JOTA* 11, 4, 413-420, 1973.
- [44] Feldt, W.T., Nemat-Nasser, S., Prasad, S.N., Herrmann, G., Instability of a mechanical system induced by impinging fluid jet. *J.Appl.Mech.* 36, 693-701, 1969.
- [45] Fischer, W., Die Kniclast des einseitig eigenspannten Stabes als zweiparametriges, nichtkonservatives Eigenproblem. *ZAMP* 20, 544-547, 1969.
- [46] Flax, A.H., Comment on "Some remarks on the Beck problem". *AIAAJ* 16, 8, 861-862, 1978.
- [47] Flax, A.H., Divergence of cantilever columns under combined conservative and follower loads. *J.Appl.Mech.* 51, 2, 443-444, 1984.
- [48] Gajewski, A., On the destabilizing effect in a non-conservative system with slight internal and external damping. *Proc.Vibr.Probl.* 13, 2, 187-198, 1972.
- [49] Gajewski, A., A note on unimodal and bimodal optimal design of vibrating compressed columns. *Int.J.Mech.Sci.* 22, 1, 11-16, 1981.
- [50] Gajewski, A., Palej, R., Badanie stateczności i optymalizacja kształtu sprężystości utwierdzonego pręta rozciągającego. *Rozpr.Inż.* 22, 2, 265-279, 1974.
- [51] Gajewski, A., Życzkowski, M., Optimal design of elastic columns subject to the general conservative behaviour of loading. *ZAMP* 21, 5, 806-818, 1970.
- [52] Gajewski, A., Życzkowski, M., Wpływ jednoczesnego niejednorodnego tarcia wewnętrznego i zewnętrznego na stateczność układów niekonserwatywnych. *Mech.Teor.Stos.* 10, 1, 127-142, 1972.

- [53] Hagedorn, P., On the destabilizing effect of non-linear damping in non-conservative systems with follower forces. *Int.J.Non-Linear Mech.* 5, 2, 341-358, 1970.
- [54] Hanaoka, M., Washizu, K., Optimum design of Beck's column. *Computers and Structures* 11, 473-480, 1980.
- [55] Hauger, W., Die Knicklasten Elastischer Stäbe unter Gleichmäßig Verteilten und Linear Veränderlichen, Tangentialen Druckkräften. *Ing.Arch.* 35, 221-229, 1966.
- [56] Hauger, W., Bemerkungen zu dem Einfluss der Massenverteilung bei nichtkonservativen Stabilitätsproblemen elastischer Stäbe. *Ing.Arch.* 36, 283-291, 1967.
- [57] Hauger, W., Stability of compressible rod subjected to nonconservative forces. *J.Appl.Mech.* 42, 4, 887-888, 1975.
- [58] Hauger, W., Vetter, K., Influence of an elastic foundation on the stability of a tangentially loaded column. *J.Sound Vib.* 47, 2, 296-299, 1976.
- [59] Herrmann, G., Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces. *Appl.Mech.Rev.* 20, 2, 103-108, 1967.
- [60] Herrmann, G., Determinism and uncertainty in stability. *Proc.IUTAM Symp.Herrenalb/Karlsruhe 1969*, Springer, 238-247, Berlin 1971.
- [61] Herrmann, G., Bungay, R.W., On the stability of elastic systems subjected to non-conservative forces. *J.Appl. Mech.* 31, 435-440, 1964.
- [62] Herrmann, G., Jong, I.C., On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems. *J.Appl.Mech.* 32, 3, 592-597, 1965.
- [63] Herrmann, G., Jong, I.C., On nonconservative stability problems of elastic systems with slight damping. *J.Appl. Mech.* 33, 125-133, 1966.
- [64] Higuchi, S., On the logarithmic decrement of the damped oscillation of an elastic thin beam. *ZAMM* 51, 427-432, 1971.
- [65] Huang, N.C., Nachbar, W., Nemat-Nasser, S., On Willems' experimental verification of the critical load in Beck's problem. *J.Appl.Mech.* 34, 243, 1967.
- [66] Huseyin, K., Vibrations and stability of multiple parameter systems. *Noordhoff Int.Publ.*, Alphen aan den Rijn 1978.

- [67] Huseyin, K., Leipholz, H.H.E., Divergence instability of multiple-parameter circulatory systems. *Quart.Appl.Math.* 31, 185-197, 1973.
- [68] Huseyin, K., Plaut, R.H., The elastic stability of two-parameter nonconservative systems. *J.Appl.Mech.* 40, 1, 175-180, 1973.
- [69] Kapoor, R.N., Leipholz, H.H.E., Optimal stability envelope of the damped Hauger system. *Meccanica* 8, 4, 265-269, 1973.
- [70] Kapoor, R.N., Leipholz, H., On mass distribution rotary inertia and external damping of a viscoelastic polygenic system. *ZAMM* 54, 3, 205-208, 1974.
- [71] Kapoor, R.N., Leipholz, H., Stability analysis of a damped polygenic systems with relocatable mass along its length. *Ing.Arch.* 43, 4, 233-239, 1974.
- [72] Kar, R.C., Stability of a nonuniform viscoelastic cantilever beam on a viscoelastic foundation under the influence of a follower force. *SM Archives* 4, 457-473, 1980.
- [73] Kar, R.C., Stability of a nonuniform cantilever subjected to dissipative and nonconservative forces. *Computers and Structures* 11, 175-180, 1980.
- [74] Kar, R.C., Hauger, W., Stability of a pretwisted tapered cantilevered beam subjected to dissipative and follower forces. *J.Sound Vib.* 81, 4, 565-573, 1982.
- [75] Karihaloo, B.L., Niordson, F.I., Optimum design of vibrating cantilevers. *JOTA* 11, 638-654, 1973.
- [76] Keller, J.B., The shape of the strongest column. *Arch. Rat.Mech.Anal.* 5, 4, 275-285, 1960.
- [77] Keller, J.B., Niordson, F.I., The tallest column. *J.Math. and Mech.* 16, 5, 443-446, 1966.
- [78] Kikuchi, F., A finite element method for non-self-adjoint problems. *J.of Num.Meth.in Eng.* 6, 39-54, 1973.
- [79] Kiusalaas, J., Optimal design of structures with buckling constraints. *Int.J.Solids Struct.* 9, 863-878, 1973.
- [80] Kordas, Z., Życzkowski, M., On the loss of stability of a rod under a super-tangential force. *Arch.Mech.Stos.* 15, 1, 7-31, 1963.
- [81] Kounadis, A.N., Beam-columns under lateral harmonic loads. *Ing.Arch.* 44, 1, 43-51, 1975.

- [82] Kounadis, A.N., Stability of elastically restrained Timoshenko cantilevers with attached masses subjected to a follower. *J.Appl.Mech.* 44, 731-736, 1977.
- [83] Kounadis, A.N., On the static stability analysis of elastically restrained structures under follower forces. *AIAAJ.* 18, 4, 473-476, 1980.
- [84] Kounadis, A.N., Divergence and flutter instability of elastically structures under follower forces. *Int.J. Engng.Sci.* 19, 4, 553-562, 1981.
- [85] Kounadis, A.N., The existence of regions of divergence instability for nonconservative systems under follower forces. *Int.J.Solids Struct.* 19, 8, 725-733, 1983.
- [86] Kounadis, A.N., Katsikadelis, J.T., Shear and rotatory inertia effect on Beck's column. *J.Sound Vib.* 49, 2, 171-178, 1976.
- [87] Kounadis, A.N., Katsikadelis, J.T., Coupling effects on a cantilever subjected to a follower force. *J.Sound Vib.* 62, 131-139, 1979.
- [88] Kounadis, A.N., Katsikadelis, J.T., On the discontinuity of the flutter load for various types of cantilevers. *Int.J.Solids Struct.* 16, 4, 375-383, 1980.
- [89] Kowalski, A., Stateczność prętów o skokowo-zmiennym przekroju ściskanych siłą śledzącą. *Rozpr.Inż.* 15, 2, 197-209, 1967.
- [90] Kowalski, A., Życzkowski, M., Naprężeniowy warunek bezpieczeństwa w przypadku niekonserwatywnych zagadnień stateczności sprężystej. *Mech.Teor.Stos.* 2, 4, 411-423, 1967.
- [91] Krzys, W., Życzkowski, M., Klasyfikacja zagadnień optymalnego projektowania konstrukcji. *Czas.Techn.* 68, 2, 1-3, 1963.
- [92] Leipholz, H., Anwendung des Galerkinschen Verfahrens auf nichtkonservative Stabilitätsprobleme des elastischen Stabes. *ZAMP* 13, 359-372, 1962.
- [93] Leipholz, H., Die Knicklast des einseitig eingespannter Stabes mit gleichmäßig verteilter, tangentialer Längsbelastung. *ZAMP* 13, 581-589, 1962.
- [94] Leipholz, H.H.B., Über die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens bei nichtselbstadjungierten und nichtkonservativen Eigenwertproblemen. *ZAMP* 14, 70-79, 1963.

- [95] Leipholz, H.H.E., Über die Zulässigkeit des Verfahren von Galerkin bei linearen, nichtselbstadjungierten Eigenwertproblemen. ZAMP 16, 837-843, 1965.
- [96] Leipholz, H., Über den Einfluss eines Parameters auf die Stabilitätskriterien von nichtkonservativen Problemen der Elastomechanik. Ing.Arch. 34, 256-263, 1965.
- [97] Leipholz, H., Application of Liapunov's direct method to the stability problem of rods subject to follower forces. Proc. IUTAM Symp. Herrenalb/Karlsruhe 1969, 1-10, Springer-Verlag 1971.
- [98] Leipholz, H., Über die Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf lineare nichtkonservative Probleme. Ing. Arch. 40, 55-67, 1971.
- [99] Leipholz, H.H.E., On the analysis situs of eigenvalue curves of rods subjected to conservative and nonconservative loads. Acta Mechanica 17, 69-80, 1973.
- [100] Leipholz, H.H.E., On certain nonconservative elastic systems having divergence buckling loads, Mech.Res.Comm. 1, 245-249, 1974.
- [101] Leipholz, H.H.E., On a generalization of the concept of selfadjointness and of Rayleigh's quotient. Mech.Res. Comm. 2, 67-72, 1974.
- [102] Leipholz, H.H.E., On conservative elastic systems of the first and second kind. Ing.Arch. 43, 255-271, 1974.
- [103] Leipholz, H.H.E., Some remarks on Liapunov stability of elastic dynamical systems. Proc. of the IUTAM Symp. on Buckling of Structures, Cambridge, USA, 208-216, Springer-Verlag 1976.
- [104] Leipholz, H., Direct variational methods and eigenvalue problems in engineering. Noordhoff, Leyden 1977.
- [105] Leipholz, H.H.E., On a variational principle for Beck's rod. Mech.Res.Comm. 5, 45-49, 1978.
- [106] Leipholz, H., Stability of elastic systems. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1980.
- [107] Leipholz, H.H.E., Bhalla, K., On the solution of the stability problems of elastic rods subjected to triangularly distributed tangential follower forces. Ing.Arch. 46, 115-124, 1977.
- [108] Leipholz, H.H.E., Huseyin, K., On the stability of one-dimensional continuous systems with polygenic forces. Meccanica 6, 253-257, 1971.

- [109] Leipholz, H., Lindner, G., Über den Einfluss der Massenverteilung auf das nichtkonservative Knicken von Stäben. Ing.Arch. 39, 187-194, 1970.
- [110] Leipholz, H., Madan, O., On the solution of the stability problem of elastic rods subjected to uniformly distributed, tangential follower forces. Ing.Arch. 44, 347-357, 1975.
- [111] Leipholz, H., Piché, R., Stability of follower-force rods with weight. J.Eng.Mech.Div., ASCE, 110, 3, 367-379, 1984.
- [112] Leipholz, H., Polzin, T., On a lower bound theorem for the buckling load of elastic beams subjected to nonconservative, compressive follower loads. Acta Mechanica 25, 171-186, 1977.
- [113] Levinson, M., Application of Galerkin and Ritz methods to nonconservative problems of elastic stability. ZAMP 17, 3, 431-442, 1966.
- [114] Mahrenholtz, O., Bogacz, R., On the shape of characteristic curves for optimal structures under non-conservative loads. Ing.Arch. 50, 2, 141-148, 1981.
- [115] McGill, D.J., Column instability under weight and follower loads. J.Eng.Mech.Div., ASCE 97, 3, 629-635, 1971.
- [116] Morgan, M.R., Sinha, S.C., Influence of a viscoelastic foundation on the stability of Beck's column. An exact analysis. J.Sound Vib. 91, 1, 85-101, 1983.
- [117] Nemat-Nasser, S., On the stability of the equilibrium of nonconservative continuous systems with slight damping. J.Appl.Mech. 34, 344-348, 1967.
- [118] Nemat-Nasser, S., Instability of a cantilever under a follower force according to Timoshenko beam theory. J.Appl.Mech. 34, 484-485, 1967.
- [119] Nemat-Nasser, S., Herrmann, G., Adjoint systems in non-conservative problems of elastic stability. AIAAJ. 4, 2221-2222, 1966.
- [120] Nemat-Nasser, S., Herrmann, G., Some general considerations concerning the destabilizing effect in nonconservative systems, ZAMP 17, 305-312, 1966.
- [121] Nemat-Nasser, S., Prasad, S., Herrmann, G., Destabilizing effect of velocity-dependent forces in nonconservative continuous systems. AIAAJ. 4, 1276-1280, 1966.

- [122] Niordson, F.I., The optimal design of vibrating beam. *Quart.Appl.Math.* 23, 47-53, 1965.
- [123] Odeh, F., Tadjbakhsh, I., The shape of the strongest column with a follower load. *JOTA* 15, 1, 103-118, 1975.
- [124] Olhoff, N., Optimal design against structural vibration and instability. D.Thesis, Techn.Univ.of Denmark, Lyby 1978.
- [125] Olhoff, N., Rasmussen, H., On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns. *Int.J.Solids Struct.* 13, 605-614, 1977.
- [126] Oran, C., Some observations on nonconservative problems of elastic stability. *J.Appl.Mech.* 37, 3, 671-676, 1970
- [127] Oran, C., On the significance of a type of divergence. *J.Appl.Mech.* 39, 1, 263-265, 1972.
- [128] Pedersen, P., Seyranian, A.P., Sensitivity analysis for problems of dynamic stability. DCAMM Report N^o 229, The Technical Univ.of Denmark 1982 .
- [129] Pedersen, P., Seyranian, A.P., Sensitivity analysis for problems of dynamic stability. *Int.J.Solids Struct.* 19, 4, 315-335, 1983.
- [130] Pfüger, A., Zur Stabilität des tangential gedrückten Stabes. *ZAMM* 35, 5, 191, 1955.
- [131] Plaut, R.H., On the optimal structural design of nonconservative elastic stability problem. *JOTA* 7, 1, 52-60, 1971.
- [132] Plaut, R.H., A new destabilization phenomenon in non-conservative damping . *ZAMM* 51, 319-321, 1971.
- [133] Plaut, R.H., Determining the nature of instability in nonconservative problems. *AIAAJ*, 10, 967-968, 1972.
- [134] Plaut, R.H., Elastic minimum-weight design for specified critical load. *SIAM J.Appl.Math.* 25, 361-371, 1973.
- [135] Plaut, R.H., Optimal design for stability under dissipative, gyroscopic of circulatory loads. *Optimization in Structural Design*, Warsaw 1973, 168-180, Springer-Verlag 1975.
- [136] Plaut, R.H., Infante, E.F., The effect of external damping on the stability of Beck's column. *Int.J.Solids Struct.* 6, 491-496, 1970.
- [137] Prager, W., Taylor, J.E., Problems of optimum structural design. *J.Appl.Mech.* 35, 102-106, 1968.

- [138] Prasad, S.N., Herrmann, G., Some theorems stability of discrete circulatory systems. *Acta Mechanica* 6, 208-216, 1968.
- [139] Prasad, S.N., Herrmann, G., Stability of a cantilevered bar subjected to a transverse follower force of fluid jet. *Ing.Arch.* 39, 341-356, 1970.
- [140] Prasad, S.N., Herrmann, G., Adjoint variational methods in nonconservative stability problems. *Int.J.Solids Struct.* 8, 29-40, 1972.
- [141] Saw, S.S., Wood, W.G., The stability of a damped elastic system with a follower force. *J.Mech.Engng.Sci.* 17, 3, 163-176, 1975.
- [142] Scheidl, R. Uber die Divergenzverzweigung bei Doppelpendel mit tangentialer Folgelast und elastischer Endlagerung. *ZAMM* 63, 4, 90-93, 1983.
- [143] Scheidl, R., Troger, H., Zeman, K., Coupled flutter and divergence bifurcation of a double pendulum. *Int.J.Non-Linear Mech.* 19, 2, 163-176, 1983.
- [144] Sinha, S.C., Pawłowski, D.R., Stability analysis of a tangentially loaded column with a Maxwell type viscoelastic foundation. *Acta Mechanica* 52, 41-50, 1984.
- [145] Smith, T.E., Herrmann, G., Stability of circulatory elastic systems in the presence of magnetic damping. *Acta Mechanica* 12, 175-188, 1971.
- [146] Smith, T.E., Herrmann, G., Stability of a beam on an elastic foundation subjected to a follower force. *J.Appl. Mech.* 39, 628-629, 1972.
- [147] Sugiyama, Y., Buckling of a generalized Reut rod. *SM Archives* 7, 433-465, 1982.
- [148] Sugiyama, Y., Kawagoe, H., Vibration and stability of elastic columns under the combined action of uniformly distributed vertical and tangential forces. *J.Sound Vib.* 38, 3, 341-355, 1975.
- [149] Sugiyama, Y., Mladenov, K.A., Vibrations and stability of elastic columns subjected to triangularly distributed sub-tangential forces, *J.Sound Vib.* 88, 4, 447-457, 1983.
- [150] Sundararajan, C., Vibration and stability of non-divergent elastic systems. *AIAAJ.* 11, 1418-1420, 1973.
- [151] Sundararajan, C., Stability of columns on elastic foundations subjected to conservative and non-conservative forces. *J.Sound Vib.* 37, 79-85, 1974.

- [152] Sundararajan, C., The vibration and stability of elastic systems subjected to follower forces. *The Shock and Vibration Digest* 7, 89-105, 1975.
- [153] Sundararajan, C., Bound for the critical load of certain elastic systems under follower forces. *AIAAJ.* 14, 5, 690-692, 1976.
- [154] Sundararajan, C., Influence of an elastic end support on the vibration and stability of Beck's column. *Int.J.Mech. Sci.* 18, 239-241, 1976.
- [155] Sundararamaiah, V., Venkateswara Rao, G., Effect of shear deformation and rotatory inertia on the stability of Beck's and Leipholz's columns. *AIAAJ.* 18, 1, 124-125, 1980.
- [156] Sundararamaiah, V., Venkateswara Rao, G., Stability of short Beck and Leipholz columns on elastic foundation. *AIAAJ.* 21, 7, 1053-1054, 1983.
- [157] Tadjbaksh, J., Keller, J.B., Strongest column and isoperimetric inequalities for eigenvalues. *J.Appl.Mech.* 29, 1, 159-164, 1962.
- [158] Taylor, J.E., The strongest column: an energy approach. *J.Appl.Mech.* 34, 486-487, 1967.
- [159] Thomas, C.R., Mass optimization of non-conservative cantilever beams with internal and external damping. *J.Sound Vib.* 43, 483-498, 1975.
- [160] Thomas, C.R., Stability and mass optimization of non-conservative Euler beams with damping. *J.Sound Vib.* 47, 3, 395-401, 1976.
- [161] Timoshenko, S., On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine, Series 6*, 41, 744-746, 1921.
- [162] Timoshenko, S.P., Gere, J.M., *Teoria stateczności sprężystej.* Arkady, Warszawa 1963.
- [163] Tosaka, N., Kakuda, K., An integral equation method for non-self-adjoint eigenvalue problems and its applications to non-conservative stability problems. *J.Num.Meth. Eng.* 20, 131-141, 1984.
- [164] Troger, H., Zeman, K., Zur korrekten Modellbildung in der Dynamik diskreter Systeme. *Ing.Arch.* 51, 1/2, 31-43, 1981.
- [165] Urbano, C., The effect of damping on the dynamic stability of nonconservative systems. *Meccanica* 3, 1, 131-139, 1968.

- [166] Venkateswara Rao, G., Narasimha Rao, R.V., Galerkin finite element solution for the stability of cantilever columns subjected to follower forces. *AIAAJ*, 12, 5, 690-691, 1975.
- [167] Vepa, K., Generalization of an energetic optimality condition for non-conservative systems. *J.Struct.Mech.* 2, 3, 229-257, 1973.
- [168] Wahed, I.F.A., The instability of cantilever on elastic foundation under influence of a follower force. *J.Mech. Engng.Sci.* 17, 219-222, 1975.
- [169] Walker, J.A., A note on stabilizing damping configurations for linear nonconservative systems. *Int.J.Solids Struct.* 9, 1543-1545, 1973.
- [170] Willems, N., Experimental verification of the dynamic stability of a tangentially loaded cantilever column. *J.Appl.Mech.* 33, 460, 1966.
- [171] Wood, W.G., Saw, S.S., Saunders, P.M., The kinetic stability of tangentially loaded struct., *Proc.Roy.Soc.Lond.*, A. 313, 239-248, 1969.
- [172] Wu, J.J., On the numerical convergence of matrix eigenvalue problems due to constraint conditions. *J.Sound Vib.* 32, 3, 349-358, 1974.
- [173] Ziegler, H., Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen. *ZAMP* 2, 4, 265-289, 1951.
- [174] Ziegler, H., Knickung gerader Stäbe unter Torsion. *ZAMP* 3, 2, 96-119, 1952.
- [175] Ziegler, H., Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. *Ing.Arch.* 20, 1, 49-56, 1952.
- [176] Ziegler, H., Linear elastic stability. *ZAMP* 4, 89-121, 168-185, 1953.
- [177] Ziegler, H., On the concept of elastic stability. *Adv. in Appl.Mech.* 4, 351-403, 1956.
- [178] Ziegler, H., Principles of structural stability. Blaisdell P.C., Waltham, Mass. 1968.
- [179] Ziegler, H., Trace effects in stability. *Proc.IUTAM Symp. Herrenalb/Karlsruhe 1969*, Springer-Verlag, 96-111, 1971.
- [180] Łyczkowski, M., Zagadnienie najodpowiedniejszego kształtu osiowo ściskanych belek. *Rozpr.Inż.* 4, 4, 441-456, 1956.

- [181] Życzkowski, M., Podstawy analizy stateczności prętów sprężystych. Konferencja nt. Współczesne Metody Analizy Stateczności Konstrukcji, Janowice 1980, red. Z. Waszczy szyn, Ossolineum, 7-8, Wrocław 1981.
- [182] Богач, Р., Янишевский, Р., Анализ и синтез колонн, нагруженных следящими силами с точки зрения устойчивости. Успехи механики, 3, 1985.
- [183] Болотин, В.В., Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Госиздат. Физ.-Мат. Лит., Москва 1961.
- [184] Братусь, А.С., Сейранян, А.П., Бимодальные решения в задачах оптимизации собственных значений, ПММ, 47, 4, 546-554, 1983.
- [185] Волошин, И.И., Громов, В.Г., Устойчивость консольного вязкоупругого стержня, нагруженного следящей силой, МТТ, 4, 179-182, 1976.
- [186] Волошин, И.И., Громов, В.Г., О критерии устойчивости стержня на упругом основании при действии следящей силы, МТТ, 4, 169-171, 1977.
- [187] Гринев, В.Б., Филиппов, А. П., Об оптимальных очертаниях стержней в задачах устойчивости, Стр. Мех. и Расч. Соор., 2, 21-27, 1975.
- [188] Гринев, В.Б., Филиппов, А. П., Об оптимальных стержнях в задачах устойчивости под действием распределенных нагрузок, Стр. Мех. и Расч. Соор., 6, 1975.
- [189] Дейнеко, К.С., Леонов, М.Я., Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня. ПММ, 19, 6, 738-744, 1955.
- [190] Денисов, Г.Г., Новиков, В.В., Об устойчивости стержня, нагруженного следящей силой. МТТ, 1, 150-154, 1975.
- [191] Жинжер, Н.И., О дестабилизирующем влиянии трения на устойчивость неконсервативных упругих систем. МТТ, 3, 1968.
- [192] Зорий, Л.М., Об устойчивости стержня при неконсервативной нагрузке. Научные записки Ин-та машиноведения и автоматики, т. 10, 1964.
- [193] Лейтес, С.Д., Собственные движения и критические параметры упругих стержней при неконсервативной нагрузке. Прикладная механика, т. 1У, вып. 2, 1968.

- [194] Лейтес, С.Д., Об устойчивости упругого стержня под воздействием нагрузки, ориентация которой зависит от деформаций стержня. Исследования по теории сооружений. Вып. XVIII. Изд. Лит. по Строительству, 3-12, Москва 1970.
- [195] Незальзов, О.Р., Статические формы потери устойчивости стержневых конструкций под действием следящих сил и определение их критических значений прямым матричным методом. Изв. вузов Стр. и Архит., 5, 1970.
- [196] Незальзов, О.Р., Влияние парного взаимодействия упругих связей на области неустойчивости стержневых систем, сжатых следящими силами. Сб. Сопр. Мат. и теор. Соор., XU, Будівельник, Киев 1972.
- [197] Незальзов, О.Р., Постолян, Ю.А., Критические параметры неконсервативных систем при варьировании жесткостно-упругой связи. Сб. Сопр. Мат. и теор. Соор., XIX, 111-116, Будівельник, Киев 1973.
- [198] Николай, Е.Л., Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня. Изв. Ленингр. политехн. ин-та 31, 1928.
- [199] Николай, Е.Л., К вопросу об устойчивости скрученного стержня. Вестн. прикл. мат. мех., 1, 1929.
- [200] Николай, Е.Л., О критерии устойчивости упругих систем. Тр. Одесского ин-та инж. гражд. и коммунальн. стр-ва, 1, 1939.
- [201] Николай, Е.Л., Тр. по механике. Гостехиздат., Москва 1955.
- [202] Пановко, Я.Г., Губанова, И.И., Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. Наука, Москва 1979.
- [203] Сейранян, А.П., Об одном решении задачи Лагранжа, Докл. АН СССР, 271, 2, 337-340, 1983.
- [204] Сейранян, А.П., Об одной задаче Лагранжа. МТТ, 2, 101-111 1984.
- [205] Сейранян, А.П., Шаранюк, А.В., Чувствительность и оптимизация критических параметров в задачах динамической устойчивости. МТТ, 5, 174-183, 1983.
- [206] Сейранян, А.П., Шаранюк, А.В., Оптимизация флаттерных характеристик. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 37, 5, 38-51, 1984.
- [207] Харинн, А.Н., Определение рациональных параметров сечений сжатых стержней. Изв. вузов Стр-во и архит., 7, 137-139, 1982.
- [208] Ченцов, Н.Г., Стойки наименьшего веса, Тр. ЦАГИ, 265, 1936.