

Cao van Phuong

OPTYMALNE STEROWANIE RUCHU
W NIELINIOWEJ
DYNAMICE KONSTRUKCJI

1/1986

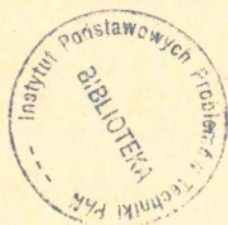
P. 269



WARSZAWA 1986

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 21 maja 1985 r.

56868



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 3,97 Ark.druk. 6,75
Oddano do drukarni w styczniu 1986 r.
Nr zamówienia 72/86.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

OPTYMALNE STEROWANIE RUCHU W NIELINIOWEJ
DYNAMICIE KONSTRUKCJI

Streszczenie

W pracy są przedstawione metody optymalnego sterowania ruchu w konstrukcji obciążonej dynamicznie. Zamierzamy również przeprowadzić analizę wpływu zmiany geometrii konstrukcji na parametr sterowania oraz na czas trwania procesu. Przedstawione również będą odpowiednie praktyczne metody wyznaczania parametru sterowania. Jednym z zadań obecnej pracy jest także przeprowadzenie dyskusji oraz dokonanie oceny wpływu wybranych modeli fizycznych na funkcję sterowania i na czas trwania procesu sterowania.

1. Wprowadzenie i cel pracy

W ostatnich latach nastąpił szybki rozwój technik obliczeniowych stosowanych do rozwiązywania zagadnień dynamiki ośrodków sprężystych i niesprężystych. [10], [12 + 13], [28 + 29], [41], [42 + 45], [53 + 56].

Wyniki badań wykazały, że w konstrukcjach plastycznych ruch spowodowany ciśnieniem dynamicznym ma istotny wpływ na warunki pracy tych konstrukcji.

Wskutek oddziaływań dynamicznych elementy konstrukcji wprawiane są w ruch, który może wywołać ich zmiany geometryczne i fizyczne przy długotrwałym ruchu w konstrukcji zmiany te mogą być tak duże, że konstrukcja przestaje spełniać swoje funkcje.

Wraz z rozwojem nauki i techniki nabierają znaczenia problemy zwiększenia jakości, niezawodności i ekonomiczności oraz problemy zmniejszenia hałasu drgań elementów maszyn i konstrukcji. Z tego względu niezwykle potrzebnym i ważnym z teoretycznego i praktycznego punktu widzenia, stał się problem optymalnego sterowania ruchu w konstrukcji obciążonej dynamicznie. Rozwiązanie tego problemu pozwala nam znaleźć odpowiednią potrzebną technologię zachowania się ruchu w konstrukcjach pracujących w trudnych warunkach, na przykład narażonych na oddziaływanie sejsmiczne, falowe i impulsowe.

Zadania, w których poszukiwano metod sterowania w pewnym sensie najlepszego przy pewnych ustalonych warunkach, już zawierały optymalizacyjny punkt widzenia. Liczba prac poświęconych temu problemowi jest obecnie dość duża [19], [22], [23], [24], [26], [30], [38]. Wśród nich należy wymienić pracę D.E.Ochocimskiego "O teorii ruchu rakiety" z 1946 r. Praca ta zawierała pierwsze sformułowanie założeń teorii optymalnego sterowania.

Wybitny wkład do teorii optymalnego sterowania wniósł L.S.Pontriagin. Jego zasada maksimum za pomocą mnożników Lagrange'a pozwala sprawdzić zadanie optymalnego sterowania do pewnego szczególnego zadania brzegowego dla rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

Obecnie teoria optymalnego sterowania oraz sama idea optymalizacji głęboko przeniknęły do różnych badań o charakterze szczegółowym oraz do opracowań konstrukcyjnych. Badaniom tym w mniejszym stopniu towarzyszyły studia nad opracowaniem odpowiednich metod, które pozwoliłyby stosunkowo prosto wyznaczyć podstawowe parametry procesu sterowania.

Analizując dotychczasowe osiągnięcia w tej dziedzinie należy stwierdzić, że brak jest w literaturze efektywnej, a jednocześnie prostej teorii opisującej nieliniowe zagadnienia ruchu konstrukcji obciążanych dynamicznie.

Celem niniejszej pracy jest zbudowanie ogólnej teorii sterowania, uogólnienie metody optymalnego sterowania ruchu ciał deformowalnych, przedyskutowanie wpływu zmiany geometrii

konstrukcji na parametr sterowania oraz rozwiązanie kilku reprezentatywnych problemów optymalnego sterowania ruchu belki, powłoki i płyty obciążonych ciśnieniem dynamicznym. Przedstawione również będą odpowiednie, praktyczne metody wyznaczania parametru sterowania. Jednym z zadań obecnej pracy jest także przeprowadzenie dyskusji oraz dokonanie oceny wpływu wybranych modeli fizycznych na parametry sterowania i na czas trwania procesu sterowania.

W rozdziale 2 podana zostanie klasyfikacja zadań i metod analizy problemów sterowania ruchu ciała deformowalnego, w rozdziale 3 podane będzie ogólne matematyczne sformułowanie problemu, zaś w rozdziale 4 omówione będą przybliżone rozwiązania nieliniowego równania ruchu.

W rozdziale 5 przedstawiona zostanie metoda 1 momentów, zaś w rozdziale 6 jej zastosowanie do rozwiązania kilku reprezentatywnych zagadnień.

W rozdziale 7 rozważane będą zagadnienia optymalnego sterowania ruchu w konstrukcjach niesprężystych.

W rozdziale 8 będzie przedstawione zagadnienie optymalnego sterowania ruchu w konstrukcji obciążanych dynamicznie, jako zagadnienie matematycznego programowania.

W pracy rozpatrywane będą także typy cienkościennych konstrukcji, w których stan naprężeń realizowany pod wpływem sterowania może być aproksymowany przez płaski stan naprężeń.

W każdym zagadnieniu optymalnego sterowania występują następujące elementy:

- 1/ Matematyczny model obiektu,
- 2/ Kryteria optymalizacji,
- 3/ Oddziaływanie sterujące oraz układ ograniczenia dopuszczalnego.

Należy zauważyć, że problem optymalnego sterowania ruchu w konstrukcji obciążanej dynamicznie jest problemem niezwykle skomplikowanym. Spowodowane to jest następującymi przyczynami:

- 1/ Stan obiektu opisywany jest przez wieloparametrowe funkcje wielu zmiennych;
- 2/ Ruch obiektów opisywany jest równaniem różniczkowym

cząstkowym lub całkowo-różniczkowym, przy czym równania te mogą być liniowe bądź nieliniowe, a na ich rozwiązania mogą być nałożone pewne, również złożone ograniczenia;

3 Oddziaływania sterujące mogą być skupione lub rozdzielone, mogą być funkcjami czasu i współrzędnych przestrzennych;

4 Techniczna realizacja układów sterujących, jest związana z wielkimi trudnościami w rozwiązaniu problemów technologicznych i ekonomicznych.

2. Klasyfikacja zagadnień i metod analizy problemów optymalnego sterowania ruchu w ciałach deformowalnych

Kryteria klasyfikacji problemów omawianych w pracy mogą być różne. Ograniczymy się do takich podziałów, które umożliwią wyjaśnienie zagadnień będących przedmiotem rozważań.

Problemy optymalnego sterowania ruchu w konstrukcji obciążanych dynamicznie można rozdzielić na trzy grupy zagadnień patrz na tablicy 1.

- 1/ Teoretycznie;
- 2/ Modelowo-technicznie;
- 3/ Praktycznie.

Analizy teoretyczne mają przede wszystkim charakter prognozy a ich wyniki umożliwiają wykonanie modelowych badań problemu sterowania, te zaś pozwalają zastosować opracowanie rozwiązania techniczne do optymalnego sterowania ruchu w konstrukcjach obciążanych dynamicznie. W teoretycznych analizach występują również metody opisowe, które są dzielone na dwa typy, jeden z nich zajmuje się analizą zmiany fizycznej wpływającej na matematyczne opisywanie problemu, a drugi charakteryzuje się matematycznymi modelowaniami i przestrzennymi przez które są wyrażone równania problemu, również on zajmuje się właściwościami tych równań liniowe czy nieliniowe one są. Drugi typ zagadnień występujących w teoretycznych problemach to są opracowania analitycznych i przybli-

zonych metod dla rozwiązań równań problemów.

Druga grupa zagadnień optymalnego sterowania ruchu w dynamice konstrukcji dotyczy do technicznego problemu, która jest zainteresowana technicznym modelowaniem, typami dynamicznych ciśnień działających na konstrukcje. Wybranie odpowiednich funkcji sterowania polegające pewnemu kryterium, tworzeniem technicznego wyposażenia dla odpowiedniego sterującego zadania, budowaniem odpowiednich programów dla maszyny cyfrowej.

Trzecia grupa zagadnień optymalnego sterowania ruchu w dynamice konstrukcji dotyczy do zastosowania metod optymalnego sterowania w praktyce.

Grupa tych zagadnień zajmuje się wyborem kryteriów najefektywniejszych nie tylko z punktu widzenia technicznego, a również z punktu widzenia ekonomicznego dla projektowania sterującej konstrukcji pracującej w trudnych warunkach i obciążonej dynamicznie.

Warto zauważyć, że w obecnej pracy zajmujemy się problemami dotyczącymi do pierwszej grupy zagadnień.

3. Sformułowanie problemu

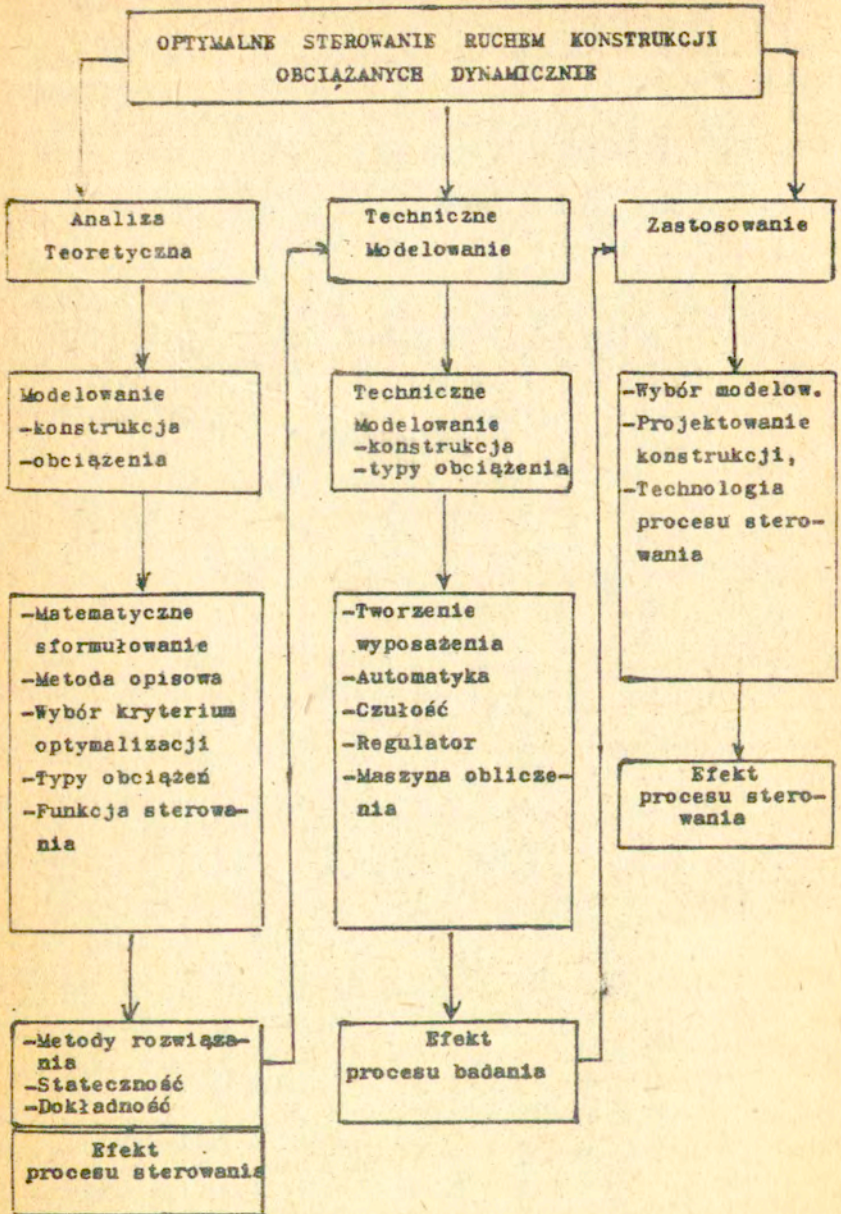
3.1. Techniczny sens problemu optymalnego sterowania ruchu w dynamice konstrukcji

Rozważamy układ mechaniczny, którego ruch opisany jest równaniem różniczkowym

$$3.1 \quad A\ddot{W} + \alpha\dot{W} + CW = Q(P, V, t)$$

przy czym równanie to będzie rozwiązywane w przedziale czasu

W równaniu (3.1) poszczególne wielkości oznaczają
W(t) - funkcja stanu, lub funkcja fazowa
V(t) - funkcja sterowania,
A, α , c - znane współczynniki



P - wymuszona siła

Przyjmujemy, że funkcje $W(t)$ i $V(t)$ mogą zmieniać się tylko w pewnym obszarze dopuszczalnym, tzn.

$$3.2 \quad W(t) \in G_W$$

$$3.3 \quad V(t) \in G_V$$

Warunek (3.2) nosi nazwę ograniczenia fazowego, zaś warunek (3.3) jest ograniczeniem sterowania, przy czym G_W i G_V są zbiorami znanymi.

Ruch układu mechanicznego określony równaniem (3.1) ograniczony jest pewnymi warunkami początkowymi

$$3.4 \quad W(t_0) = W_0 \quad , \quad \dot{W}(t_0) = \dot{W}_0$$

i warunkami końcowymi

$$3.5 \quad W(t_f) = \dot{W}(t_f) = 0$$

Ruch układu opisany równaniem (3.1) z warunkami (3.4), (3.5) wymuszony funkcją $f(W, t)$, odbywający się bez udziału funkcji sterowania $V(t)$ nosi nazwę ruchu naturalnego, natomiast ruchem sterowanym lub inaczej programowanym nazywamy ruch realizowany z udziałem funkcji sterowania $V(t)$.

Sterowanie ruchu układu mechanicznego może odbywać się poprzez odpowiedni dobór funkcjonału

$$3.6 \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \Lambda(w, Q, V, t) dt$$

Sterowanie określone funkcją $V(t)$ nazywamy optymalnym, jeżeli zapewnia sprawdzenie układu mechanicznego od stanu początkowego (3.4) do stanu końcowego (3.5) w najkrótszym czasie przy jednoczesnym zapewnieniu minimum funkcjonału (3.6).

W szczególności, przy $\Lambda(w, Q, P, V, t) \equiv 1$ otrzymujemy

$$3.7 \quad J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

Jeżeli funkcja sterowania zapewnia spełnienie równania (3.7), wówczas mamy do czynienia ze sterowaniem najszybszym. Zagadnienie to wyjaśnimy posługując się wykresem fazowym $W(t)$, $W(t)$ /rys.1/, na którym początkowy stan układu charakteryzowany parametrami W_0 , W_0 oznaczono punktem K. Jeżeli rozważymy ruch układu odbywający się bez udziału funkcji sterowania $V(t)$, wówczas jego stan zmieni się w sposób naturalny przyjmując parametry określone na wykresie fazowym punktem T. Krzywa KT jest nazywana trajektorią naturalnego ruchu układu. Jeżeli ruch układu odbywa się z udziałem funkcji sterowania $V(t)$, wówczas końcowy stan może być scharakteryzowany parametrami W^* , W^* , które na wykresie fazowym wyznaczają punkt H. Ruch odpowiadający trajektorii KH nosi nazwę ruchu programowanego.

Jeżeli funkcjonał (3.6) odpowiadający ruchowi naturalnemu oznaczymy przez J_1 , zaś ruchowi programowanemu przez J_2 wówczas słuszna jest zależność

3t8

$$J_2 < J_1$$

Sterowanie odbywające się za pomocą optymalnego doboru funkcji sterowania, $V(t)$ nazywamy sterowaniem optymalnym, zaś wybór postaci funkcji sterowania spełniającej założone kryteria zapewnia warunek

3t9

$$J = \min(\max) \int_{t_0}^{t_f} [V(t)]^p dt$$

w którym indeks p określa wielkość fizyczną podlegającą procesowi sterowania. Jeżeli $p=1$, wówczas optymalizacji podlega ilość ciepła potrzebna do przeprowadzenia ciała od stanu początkowego do założonego stanu końcowego. Przyjmując $p=2$ optymalizujemy energię ciała sterowanego, które zmienia swój stan od fazy początkowej, do założonej fazy końcowej /patrz rys.1/.

3.2. Matematyczne sformułowanie problemu

Rozważmy ciało deformowalne mające w początkowej konfiguracji objętość V_0 , gęstość ρ_0 oraz regularną powierzchnię S_0 składającą się z dwóch części. Na część S_{0a} działają siły powierzchniowe $T_\alpha(x,t)$, zaś na części S_{0b} zadane są prędkości $\dot{u} = 0$, lub przemieszczenia $u^B = 0$.

Na ciało działa ponadto siła objętościowa $F_\alpha(x)$.

Ruch rozważanego ciała opisuje jednoznacznie następujący układ równań:

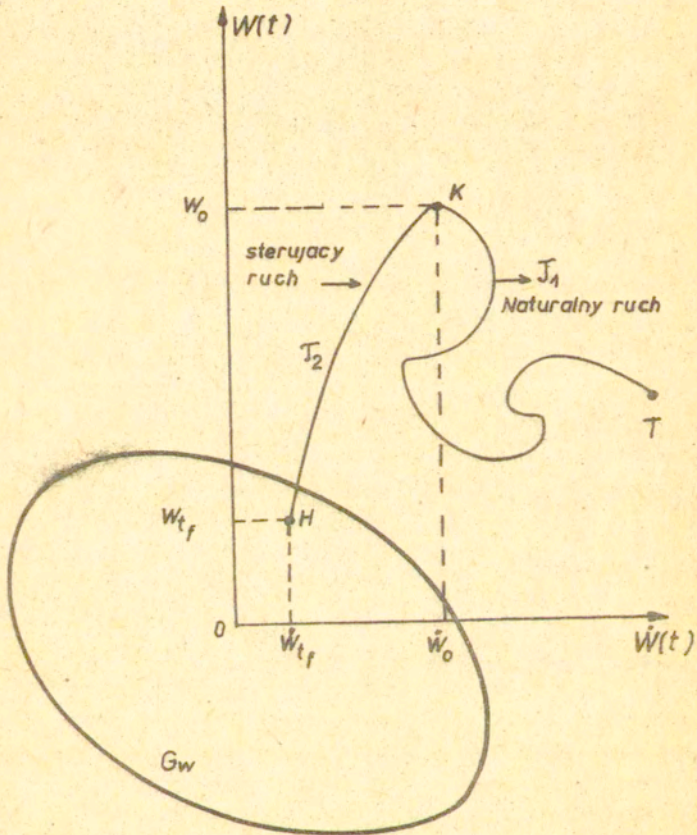
1/ Równanie ruchu

3t10

$$[(\delta_{\alpha\beta} - u_{\alpha,\beta}) \sigma_{\gamma,\beta}]_{,\gamma} - \rho_0 F_\alpha = -\rho_0 \ddot{u}_\alpha + T_\alpha + V_\alpha$$

w którym odpowiednie wielkości oznaczają:

- $\delta_{\alpha\beta}$ - delta Kronechera,
- u_{α} - przemieszczenie w kierunkach głównych,
- $\sigma_{\alpha\beta}$ - tensor naprężenia



Rys. 1.

2/ Związki odkształceniowo-przemieszczeniowe

$$3.11, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha} + \dot{u}_{\alpha,\gamma} u_{\gamma,\beta} + u_{\alpha,\gamma} \dot{u}_{\gamma,\beta}]$$

3/ Warunek plastyczności

$$3\&12 \quad \Phi(\sigma_{\alpha\beta}) = 0$$

4/ Stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego

$$3\&13 \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \lambda \langle \Phi(\sigma_{\alpha\beta}) \rangle \frac{\partial \Phi(\sigma_{\alpha\beta})}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}$$

gdzie

$$\langle \Phi(\sigma_{\alpha\beta}) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \Phi(\sigma_{\alpha\beta}) = 0 \\ 0 & \text{jeśli } \Phi(\sigma_{\alpha\beta}) < 0 \end{cases}$$

Przystępując do dalszych rozważań przyjmujemy założenie o rozdzieleniu zmiennych niezależnych x, t w funkcji przemieszczenia U_α i w funkcji obciążenia T_α, V_α

$$3\&14 \quad \begin{aligned} U_\alpha(x, t) &= W(t) U_c(x) \\ \dot{U}_\alpha(x, t) &= \dot{W}(t) U_c(x) \\ \ddot{U}_\alpha(x, t) &= \ddot{W}(t) U_c(x) \\ V_\alpha(x, t) &= V(t) T_c(x) \\ T_\alpha(x, t) &= P(t) T_c(x) \end{aligned}$$

Podstawiając (3&14) do równania ruchu (3&10) i wykorzystując zasadę mocy wirtualnych otrzymujemy następującą postać równania problemu

$$\int_V \rho \ddot{u}_\alpha \dot{u}_\alpha dv + \int_V \sigma_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} dv - \int_V F_\alpha \dot{u}_\alpha dv +$$

$$\int_S (T_\alpha + V_\alpha) \dot{u}_\alpha ds = 0$$

3.15 lub

$$\ddot{W}(t) = A_0 \left\{ P(t) + V(t) - \int_V \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dv - \int_V F_\alpha \dot{u}_\alpha dv \right\} \times \left[\int_S T_c \dot{u}_\alpha ds \right]^{-1}$$

gdzie:

$$3.16 \quad A_0 = \left[\int_S T_c \dot{u}_\alpha ds \right] \times \left[\int_V \epsilon_0 u_c \dot{u}_\alpha dv \right]^{-1}$$

Jeśli nieliniową funkcję, która jest określona trzecim wyrażeniem w prawej stronie równania (3.15) oznaczymy jako $K[\cdot]$ wówczas równanie problemu przyjmie następującą ogólną postać

3.17

$$\ddot{W}(t) + K[\cdot] = A_0 \left\{ P(t) + V(t) \right\}$$

gdzie:

$$K[\cdot] = A_0 \left\{ \left[\int_V \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dv - \int_V F_\alpha \dot{u}_\alpha dv \right] \times \left[\int_S T_c \dot{u}_\alpha ds \right]^{-1} \right\}$$

Optymalne sterowanie ruchu w dynamice deformowalnego ciała będzie się odbywało poprzez:

a/ optymalizację funkcjonału

$$3.18 \quad J = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(W, V, P, t) dt \rightarrow \min(\max)$$

b/ spełnienie warunków ograniczających na trajektorii

3%19

$$W_{max} - [W]_0 < 0$$

$$V_{max} - [V]_0 < 0$$

c/ spełnienie warunków początkowych i końcowych

$$a) \quad W(t_0) = W_0 \quad ; \quad \dot{W}(t_0) = \dot{W}_0$$

3%20

$$b) \quad W(t_f) = \dot{W}(t_f) = 0$$

Ta więc, problem optymalnego sterowania w dynamice konstrukcji polega na poszukiwaniu funkcji wektorowych $W \in L_p$, $V \in L_p$ określonych w przedziale czasu $[t_0, t_f]$ minimalizujących funkcjonal (3%18) i spełniających równanie różniczkowe (3%17) z warunkami ograniczającymi (3%19) oraz początkowymi i końcowymi (3%20).

Z konkretyzacji wyrażenia (3%18) wynikają różne typy zadań optymalnego sterowania. Jeśli sformułujemy problem jako zagadnienie czasoptymalne wówczas należy wyznaczyć funkcję sterowania $V(t)$ w ten sposób aby zapewniała przeprowadzenie układu mechanicznego ze stanu początkowego o parametrach W_0, \dot{W}_0 do zadanego stanu końcowego o parametrach W_{t_f}, \dot{W}_{t_f} w najkrótszym czasie.

Powyższemu sformułowaniu można nadać następującą postać matematyczną

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Lambda(\dots) dt \quad \implies \min(\max).$$

$$\mathcal{L}[\ddot{W}, \dot{W}, W, P, V, t] = 0$$

3.21

$$W_{max} < [W]_0$$

$$V_{max} < [V]_0$$

$$W(t_0) = W_0$$

$$\dot{W}(t_0) = \dot{W}_0$$

$$W(t_f) = 0 \quad \text{lub} \quad W(t_f) = W_{t_f}^*$$

gdzie:

$$\dot{W}(t_f) = 0 \quad \text{lub} \quad \dot{W}(t_f) = \dot{W}_{t_f}^*$$

$$\Phi(\sigma_{\alpha\beta}) = 0 \quad - \text{warunek plastyczności}$$

oraz

$$\epsilon'_{\alpha\beta} = \lambda' \langle \Phi(\sigma_{\alpha\beta}) \rangle \frac{\partial \Phi(\sigma_{\alpha\beta})}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} - \text{prawo płynięcia}$$

i związki geometryczne

$$\epsilon'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha} + \dot{u}_{\alpha,\gamma} u_{\gamma,\beta} + u_{\alpha,\gamma} \dot{u}_{\gamma,\beta}]$$

4. Metody przybliżone rozwiązywania nieliniowych równań ruchu

4.1. Metoda zmiany współczynników

Przybliżonymi metodami rozwiązywania równań różniczkowych formułowanych w dynamice konstrukcji zajmuje się wielu badaczy.

Omówimy jedną z metod przybliżonych, która zapewnia efektywne rozwiązanie rozważanych przez nas zagadnień.

Zagadnienie dynamiki konstrukcji opisywanymi są równaniami ruchu o następującej strukturze

$$4.1 \quad q(t) \ddot{\varphi}(t) + \dot{q}(t) \dot{\varphi}(t) + \\ \mathcal{H}(t, \ddot{q}(t), \alpha, \beta) \varphi(t) = f(t)$$

W równaniu 4.1 $\dot{q}(t)$, $q(t)$, $f(t)$ są funkcjami ciągłymi, wyznaczamy z zależności

$$4.2 \quad \mathcal{H}(t, \ddot{q}(t), \alpha, \beta) = \frac{1}{4} \ddot{q}(t) + \\ \gamma^2 (1 - \alpha^2 \beta)$$

zaś α , β , γ są znanymi współczynnikami.

Rozwiązanie równania (4.1) ścisłą metodą analityczną nie jest możliwe, dlatego też proponujemy jego rozwiązanie metodą przybliżoną.

Rozważymy najpierw jednorodne równanie różniczkowe o postaci

$$4.3 \quad q(t) \ddot{\varphi}(t) + \dot{q}(t) \dot{\varphi}(t) + \gamma^2 \varphi(t) = 0$$

Dokonując zamiany zmiennych

$$4.4 \quad \tau = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}} \quad ; \quad \varphi(t) = R(\tau)$$

możemy równanie (4.3) zapisać w nowej formie

$$4.5 \quad \ddot{R}(\tau) + \nu^2 R(\tau) = 0$$

Rozwiązaniem równania (4.5) jest znana funkcja

$$4.6 \quad \varphi(t) = R(\tau) = a_0 \sin\left(\nu \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}} + \alpha_0\right)$$

w której a_0 , α_0 są współczynnikami wyznaczonymi z warunków początkowych zadania.

Rozwiązaniem jednorodnego równania (4.1) jest analogiczna funkcja mająca postać

$$4.7 \quad \varphi_1(t) = q^{-\frac{1}{4}}(t) \sin \nu \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}}$$

Dokonując operacji różniczkowania wzoru (4.7) i mnożąc otrzymane wyniki przez $q(t)$ lub $\dot{q}(t)$ otrzymujemy następujące równanie

$$4.8 \quad q(t)\ddot{\varphi}(t) + \dot{q}(t)\dot{\varphi}(t) + \nu^2 \left[1 + \frac{\ddot{q}(t)}{4\nu^2} - \frac{\dot{q}^2(t)}{16\nu^2}\right] \varphi(t) = 0$$

W podobny sposób można wykazać, że

$$4.9 \quad \varphi_2(t) = \bar{q}(t)^{-\frac{1}{4}} \cos \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}}$$

jest także rozwiązaniem równania (4.1).

Możemy zatem napisać ogólną postać rozwiązania równania (4.1) lub (4.8)

$$4.10 \quad \varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = \bar{q}(t)^{-\frac{1}{4}} \left\{ a_0 \sin \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}} + b_0 \cos \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}} \right\}$$

Zauważymy, że jednorodne równania (4.1) i (4.8) różnią się jedynie współczynnikami przy członie $\varphi(t)$. Różnica ta będzie wystarczająco mała, jeśli w miejsce współczynnika podstawimy nowy współczynnik μ^2 , przy czym $\mu \leq 1$. Przyrównując wyrażenia określające oba współczynniki znajdujemy

$$4.11 \quad \mu = 1 - \alpha^2 \beta$$

W celu wyjaśnienia stopnia małości współczynnika zapiszemy

$$4.12 \quad q(t) = 1 + 2\beta \sin^2 \pi t$$

Oznaczając przez w_1 i w_2 współczynniki występujące przed członami φ_1 i φ_2 otrzymujemy

4.13

$$\omega_1 = 1 + \alpha^2 \beta (\cos^2 \pi \tau - 1)$$

$$\omega_2 = 1 + \alpha^2 \beta (\cos^2 \pi \tau - 1) + \frac{\alpha^2 \beta^2 \sin^2 \pi \tau}{4(1 + 2\beta \sin^2 \pi \tau)}$$

Ponieważ różnice między wartościami ω_1 i ω_2 są niewielkie /tabela 2/, zatem równanie (4.1) można w przybliżeniu uważać jako ekwiwalentne z równaniem (4.8).

Rozważymy teraz niejednorodne równanie

$$4.14 \quad q(t)\ddot{\varphi}(t) + \dot{q}(t)\dot{\varphi}(t) + \mu^2 \left[1 + \frac{\ddot{q}(t)}{4\mu^2} - \frac{\dot{q}(t)\dot{q}(t)}{16\mu^2} \right] \varphi(t) = f(t)$$

Jeśli funkcję wymuszenia $f(t)$ przedstawimy w postaci szeregu -

$$4.15 \quad f(t) = \sum_{i=1}^n q^{-1/4}(t) b_i \sin \omega_i \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}}$$

wówczas ogólnym rozwiązaniem równania (4.18) jest funkcja

$$4.16 \quad \varphi(t) = q^{-1/4}(t) \left\{ A_0 \sin(\sqrt{\mu} t) \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}} + \alpha_0 \right\} + \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{st} b_i}{1 - \omega_i^2 (\mu^2)^{-1}} \sin \omega_i \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(\tau)}} \left. \right\}$$

Stałe A_0 , α_0 , φ_{st} , b_i wyznaczamy z warunków początkowych zadania

Tabela 2

α	0,15	0,15
β	1	5
ω_1	0,974	0,864
ω_2	0,977	0,881
%	0,29	2,06

4.2. Metoda linearyzacji

Rozważmy równanie typu (3.15) lub (3.17), które opisuje ruch konstrukcji odbywający się pod obciążeniem

$$4.17 \quad \ddot{W}(t) + K[W(t)] = Q(p, v, t)$$

Nieliniową funkcję $K[W(t)]$ zastąpimy funkcją liniową stosując podstawienie

$$4.18 \quad K[W(t)] = \lambda^2 W(t)$$

w który współczynnik linearyzacji λ^2 wyznaczmy przy pomocy metody najmniejszych kwadratów minimalizując funkcjonal

$$4.19 \quad I = \int_{-L}^L \{ K[W(t)] - \lambda^2 W(t) \}^2 dW(t)$$

Różnice $[K - \lambda^2 W]$ mają jednakowy wpływ na ruch obiektu niezależnie od wartości $W(t)$. Aby ta różnica miała większy a zarazem ogólny wpływ na ruch, należy wprowadzić linearyzację z różnicą proporcjonalną do wartości funkcji $W^3(t)$. Tak więc zamiast (4.19) rozważać będziemy funkcjonal

$$4.20 \quad I = \int_{-L}^L \{ K[W(t)] - \lambda^2 W(t) \} W^3(t) dW(t)$$

Minimalizując funkcjonal 4.20 ze względu na parametr zadamy spełnienia warunku

$$4.21 \quad \frac{\partial I}{\partial (\lambda^2)} = 0$$

z którego otrzymujemy

$$4.22 \quad \lambda^2 = \frac{5}{2L^5} \int_{-L}^L K[W(t)] W^3(t) dW(t)$$

5. Metoda L momentów

5.1. Sens problemu 1 momentów

Jeśli funkcje $g_k(s)$, $v_k(s)$ są określone w wielowymiarowej przestrzeni E, wówczas odpowiednie równości momentowe mogą być zapisane zależnościami

$$5.1 \quad \int_S g_k(s) v_k(s) ds = a_k$$

Całkę (5.1) można rozpatrywać jako funkcjonal L określony funkcją $V(s)$, natomiast zbiór $g_k(s)$ traktujemy jako zbiór elementów, na których funkcjonal L jest wyznaczony.

Mozemy zatem zapisać wzór (5.1) w postaci

$$5.2 \quad L(g_k(s)) = (g_k, v) = a_k \quad k=1,2,\dots,n$$

5.2. Sformułowanie metody

Metoda L momentów polega na wyznaczeniu funkcjonału L (5.2), który na założonym zbiorze $g_k(s) \in E$ przyjmuje wartość a_k , tzn.

$$5.3 \quad L(g_k(s)) = a_k$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

przy czym

$$5.4 \quad \|L\| < \ell, \quad \ell > 0$$

zaś ℓ jest zadaną liczbą dodatnią.

Warto zauważyć, że często spotykamy przypadek, w którym sformułowanie problemu l momentów nie posiada jednego rozwiązania, tzn. istnieje wiele funkcjonałów, które rozwiązują problem momentów (5.3). W związku z tym spełniony musi być warunek ograniczający (5.4.)

Problem l momentów sprowadza się do poszukiwania koniecznych i dostatecznych warunków istnienia funkcjonału (5.3), który posiada normę $\|L\|$ nie większą od liczby $\ell > 0$.

Aby rozważyć ten problem rozważamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1

Koniecznym i dostatecznym warunkiem istnienia funkcjonału $L(g_k)$ określonego z elementów $g_k \in E$ przy czym

$$k = 1, 2, \dots, n$$

5.5

$$L(g_k) = a_k$$

oraz

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 > 0$$

5.6

$$\|L\| < \epsilon$$

jest

$$\epsilon > 0$$

5.7

$$\lambda_n = \max_{\xi_i} \sum_{i=1}^n a_i \xi_i < \epsilon$$

przy czym

5.8

$$\sum_{i=1}^n g_i \xi_i = 1$$

lub

5.9

$$\frac{1}{\lambda_n} = \min_{\xi_i} \left\| \sum_{i=1}^n g_i \xi_i \right\|$$

przy czym

5.10

$$\sum_{i=1}^n a_i \xi_i = 1$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [38].

Twierdzenie 2

Warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby element $g = \sum_{k=1}^n g_k \xi_k$, gdzie $\sum_{k=1}^n a_k \xi_k = 1$ był minimalizującym elementem zadania (5.7), 5.8 lub (5.9), (5.10) jest, aby był on jednocześnie ekstremalnym elementem dowolnego, minimalnego względem normy funkcjonału L , który daje rozwiązanie zadania znalezienia funkcjonału L w ten sposób aby

$$5.11 \quad L(g_k) = a_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

oraz
$$\sum_{k=1}^n a_k^2 > 0$$

$$5.12 \quad \|L\| = \lambda_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Jeśli element g pewnego liniowego funkcjonału L spełnia zależność

$$5.13 \quad \|L(g)\| = \|L\| \|g\|$$

to mówimy, że jest on ekstremalnym elementem tego funkcjonału. Z zależności (5.13) wynika następująca nierówność

$$5.14 \quad L(g) \leq L(g_0) \text{ jeśli } \|g\| \leq \|g_0\|$$

Dowód twierdzenia 2

a/ Warunek konieczny

Niech funkcjonał L_0 będzie rozwiązaniem równania (5.11), zaś $g = \sum_{k=1}^n \xi_k g_k$ jest minimalizującym elementem zadania

(5.9), (5.10), tzn. $\|g\| = \left\| \sum_{k=1}^n g_k \xi_k \right\| = 1/\lambda_n$, $\sum_{k=1}^n a_k \xi_k = 1$
 Z warunku 5.12 $\|L_0\| = \lambda_n(a)$ otrzymamy

$$5.15 \quad \sum_{k=1}^n a_k \xi_k = 1 = L_0(g) = \|L_0\| \|g\|$$

zatem według (5.13) g jest ekstremalnym elementem funkcjonału L_0 ;

b/ Warunek dostateczny

Jeśli $g = \sum \xi_k g_k$, gdzie $\sum a_k \xi_k = 1$ jest ekstremalnym elementem funkcjonału L_0 , wtedy spełniona jest równość

$$(5.15) \quad \text{stąd zaś wynika} \quad \|g\| = 1/\lambda_n(a)$$

Twierdzenie 2 zostało zatem udowodnione.

Twierdzenie 3

Jeżeli spełnione są warunki twierdzenia 2 oraz element jest unormowanym elementem funkcjonału L , wtedy układ 5.15 posiada jedyne rozwiązanie.

Możemy sformułować problem 1 momentów dla funkcjonałów należących do przestrzeni $L_{p'}$ i M_p .

Niech dany będzie dowolny skończony lub nieskończony zbiór funkcji wektorowych $g_i \in L_{p'}$, $i=1,2, \dots, n$. Dane są również liczby a_i , $i=1,2, \dots, n$ oraz liczba $f > 0$.

Należy znaleźć taką wektorową funkcję $v \in M_p$, gdzie $1/p' + 1/p = 1$, która spełnia warunki

$$5.16 \quad \int_D g_k(t) v_k(t) dt = a_k, \quad k=1,2, \dots, n$$

$$5.17 \quad \|v\|_{M_p} = \left(\int_D \sum \|v_k\|^p dt \right)^{1/p} \leq l \quad 1 \leq p < \infty$$

$$5.18 \quad \|V\|_M = \text{Vrai max } \|V_k(t)\| < \ell$$

Całka (5.16) nosi nazwę momentu funkcji $V_i(t)$ odpowiadającej elementowi g_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Z twierdzenia pierwszego sformułowanego w przestrzeni E wynika następujące

Twierdzenie 4

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby, w przestrzeni $M_{p'}(D)$, $1 < p' < \infty$ istniała wektorowa funkcja $V(t) = [V_1, V_2, \dots, V_n]$ z normą, która nie przewyższa liczby 1 przy zadanym zbiorze momentów a_1, \dots, a_n odpowiadających wektorowej funkcji $[g_1, g_2, \dots, g_n] \in L_{p'}(D)$ jest spełnienie nierówności

$$5.19 \quad \lambda_n < \ell$$

Rozwiązanie λ_n określamy w ten sposób, aby

$$5.20 \quad \lambda_n = \max \sum_{k=1}^n a_k \xi_k$$

przy czym

$$5.21 \quad \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k \right\| = \left(\int_D \sum_{k=1}^n \left| \sum_{i=1}^n g_i^k \xi_i \right|^p dt \right)^{1/p} = 1$$

lub

$$5.22 \quad \frac{1}{\lambda_u} = \min_{\xi_k} \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k \right\| =$$

przy czym

$$\min \left(\int_D \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |g_i^k \xi_i|^p dt \right)^{1/p}$$

$$5.23 \quad \sum_{k=1}^n a_k \xi_k = 1$$

Twierdzenie 5

Jeśli istnieje rozwiązanie $V(t)$ w skończonej n wymiarowej przestrzeni $L_p(D)$, gdzie $1 \leq p < \infty$, $p' > 1$, $p' < \infty$ zadania (5.15) z warunkiem (5.17), to można je napisać w następujący sposób

$$5.24 \quad V_k(t) = \lambda_n p' \left| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i^k \right|^{p'-1} \text{sign} \sum_{i=1}^n \xi_i g_i^k(t)$$

6. Zastosowanie metody L momentów w zagadnieniach optymalnego sterowania ruchu konstrukcji obciążonych dynamicznie

Zastosujemy metodę 1 momentów do rozwiązania kilku reprezentatywnych zagadnień optymalnego sterowania formułowanych w ramach dynamiki konstrukcji.

6.1. Powłoka walcowa obciążona falą sejsmiczną

Zjawisko trzęsienia ziemi wyraźnie wpływa na warunki

pracy konstrukcji. Jest ono bardzo niebezpieczne, szczególnie dla konstrukcji leżących pod ziemią. W wyniku drgań spowodowanych falą sejsmiczną ulegają one zniszczeniu.

Istnieje zatem potrzeba opracowania metod sterowania umożliwiających skrócenie czasu drgań konstrukcji obciążanych falą sejsmiczną.

Rozważamy walcową powłokę leżącą pod ziemią, przedstawioną na rys. 2.

Oznaczmy przez $u(x, t)$ przemieszczenie elementu powłoki otoczonej gruntem.

Założmy, że kierunek oddziaływania fal sejsmicznych pokrywa się także z kierunkiem osi powłoki. Ponadto przyjmiemy założenie o istnieniu zasady płaskich przekrojów.

Założmy również, że styczne obciążenie wzdłużne powłoki falą sejsmiczną jest liniową funkcją przemieszczenia $u(x, t)$

$$6\&1 \quad T_x = \kappa_x u(x, t)$$

We wzorze (6&1) κ_x jest współczynnikiem proporcjonalności. Siła działająca na element d_x wzdłuż osi powłoki mającej promień R_R określona jest zależnością

$$6\&2 \quad Q = \pi R_R d_x \kappa_x u(x, t) dx$$

natomiast siła rozciągająca powłokę wzdłuż osi x określona jest wzorem

$$6\&3 \quad \Delta N = A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx$$

w którym $A = E \cdot F$ jest sztywnością materiału powłoki, zaś F jest polem powierzchni jej przekroju poprzecznego.

Siłę bezwładności B obliczymy ze wzoru

$$6.4 \quad B = -m \frac{\partial^2 (u + u_0)}{\partial t^2}$$

w którym u_0 oznacza przemieszczenie gruntu wywołane falą sejsmiczną.

Wykorzystując zasadę d'Alemberta otrzymujemy równanie ruchu elementu powłoki /rys.3/ podlegającej sterowaniu funkcją $V(t)$

$$6.5 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + w_z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 u = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + V(t)$$

gdzie: $w_z = \frac{EF}{m} \quad ; \quad m = \rho F$

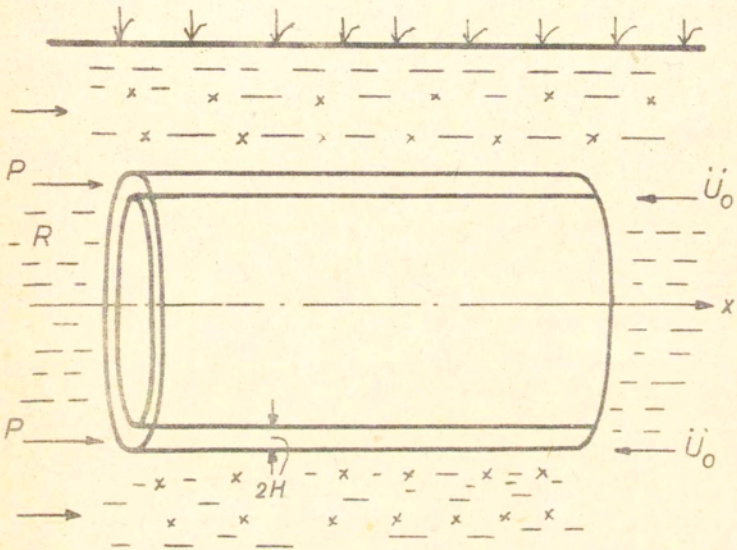
$$\alpha^2 = \frac{R + \pi r_c x}{m}$$

zaś ρ jest gęstością materiału powłoki.

Załóżmy, że przyspieszenie sejsmiczne u_0 oraz funkcja sterowania $V(t)$ zależą tylko od czasu, tzn. mogą być zapisane w następujący sposób

$$6.6 \quad V(t) + \ddot{u}_0(t) = f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

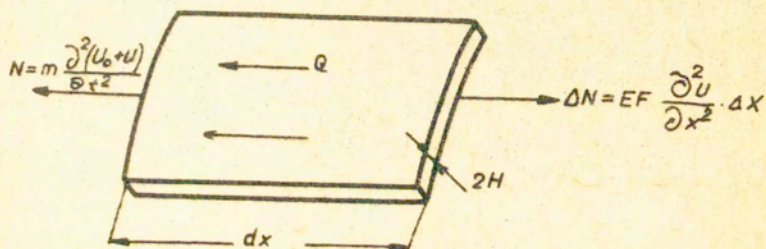
$n=1$



Rys. 2.

przy czym

$$6.7 \quad f_n(t) = f(t) \frac{\int_0^L x_n(x) dx}{\int_0^L x_n^2(x) dx}$$



Rys. 3.

Funkcję przemieszczenia również rozłożymy w szereg według funkcji własnych $X_n(x)$ i $\varphi_n(t)$

$$6.8 \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) X_n(x)$$

Funkcje $X_n(x)$ spełniają warunki brzegowe konkretnego zadania, natomiast funkcja $\varphi_n(t)$ spełnia warunki początkowe.

Podstawiając (6.6), (6.8) do równania (6.5) otrzymujemy następujące różniczkowe równanie ruchu sterowanego powłoki obciążonej falą sejsmiczną

$$6.9 \quad \ddot{\varphi}_n(t) + \alpha_n^2 \varphi_n(t) = f_n(t)$$

w którym stała α_n^2 dana jest zależnością

$$6.10 \quad \alpha_n = (\omega_z^2 P_n + \alpha_n^2)^{1/2}$$

zaś P_n zależy od warunków brzegowych.

Rozwiązaniem równania (6.9) jest funkcja

$$6.11 \quad \varphi_n(t) = \varphi_0 \cos \alpha_n t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\alpha_n} \sin \alpha_n t + \frac{1}{\alpha_n} \int_0^t f_n(t) \sin \alpha_n (t-\tau) dt$$

Przyjmując początkowy stan za spoczynkowy tzn. $\varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$ wyrazimy przemieszczenie $u(x,t)$ w następujący sposób

$$6.12 \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\alpha_n} \int_0^t f_n(t) \sin \alpha_n (t-\tau) d\tau$$

lub

$$6.13 \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta \frac{x_n(x)}{\alpha_n} \int_0^t [\ddot{u}_0(t) + V(t)] \times$$

gdzie

$$\theta = \frac{\int_0^L x_n(x) dx \int_0^L \sin \alpha_n (t-\tau) d\tau}{\int_0^L x_n^2 dx}$$

Naprężenie w dowolnym przekroju powłoki wyznaczmy ze wzoru

$$6.14 \quad \sigma(x,t) = E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = E \sum \frac{\theta x_n'(x)}{\alpha_n} \int_0^t [\ddot{u}_0(t) + V(t)] \sin \alpha_n (t-\tau) d\tau$$

Wykorzystując warunki stanu końcowego (3.5) określone dla $t = t_f$ otrzymujemy układ równań

$$6.15 \quad \begin{aligned} AX + BY &= \alpha_n \left[A\varphi_0 + \frac{\dot{\varphi}_0}{\alpha_n} B_1 \right] \\ AX - BY &= -\alpha_n \left[B_1\varphi_0 + \frac{\dot{\varphi}_0}{\alpha_n} A \right] \end{aligned}$$

przy czym

$$A = \cos \alpha_n t_f ; \quad B_1 = \sin \alpha_n t_f$$

$$6.16 \quad X = \int_0^{t_f} [\ddot{u}_0(\tau) + V(\tau)] \sin \alpha_n \tau d\tau$$

$$Y = \int_0^{t_f} [\ddot{u}_0(\tau) + V(\tau)] \cos \alpha_n \tau d\tau$$

Rozwiązując układ równań (6.15) otrzymujemy

$$6.17 \quad \int_0^{t_f} [\ddot{u}_0(t) + V(\tau)] \sin \alpha_n \tau d\tau = -\alpha_n \varphi_0$$

$$\int_0^{t_f} [\ddot{u}_0(t) + V(\tau)] \cos \alpha_n \tau d\tau = \dot{\varphi}_0$$

W przypadku, gdy $\ddot{u}_0(t) = P_0 = \text{const}$, układ równań (6.17) można zapisać w następujący sposób

$$6.18 \quad \int_0^{t_f} V(\tau) \sin \alpha_n \tau d\tau = -\alpha_n \varphi_0 + \frac{P_0}{\alpha_n} (1 - \cos \alpha_n t_f)$$

$$\int_0^{t_f} V(\tau) \cos \alpha_n \tau d\tau = \dot{\varphi}_0 + \frac{P_0}{\alpha_n} \sin \alpha_n t_f$$

W ten sposób sprowadziliśmy problem optymalnego sterowania ruchu powłoki do zadania, którego rozwiązanie można otrzymać metodą 1 momentów przedstawioną w rozdziale 5.

Wykorzystując twierdzenie 5 sformułowane w rozdziale 5 zbudujemy zadanie pomocnicze określone zależnościami

$$6.19 \quad \min \left(\int_0^{t_n} \sum_{k=1}^n [\xi_k q_k]^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\lambda_n}; \quad \sum_{k=1}^n a_k \xi_k = 1$$

W konkretnym, rozważanym przez nas przypadku mamy

$$a_1 = -\alpha_n \psi_0 + \frac{P_0}{\alpha_n} (1 - A)$$

$$6.20 \quad a_2 = \dot{\psi}_0 + \frac{P_0}{\alpha_n} B$$

$$\xi_1 = \sin \alpha_n t, \quad \xi_2 = \cos \alpha_n t$$

Podstawiając (6.20) do (6.19) otrzymujemy następujące zależności, z których możemy wyznaczyć współczynniki ξ_1 , $i = 1, 2$.

$$6.21 \quad \frac{1}{\lambda_n} = \min \left(\int_0^{t_f} [\xi_1^2 \sin^2 \alpha_n t + 2 \xi_1 \xi_2 \sin \alpha_n t + \xi_2^2 \cos^2 \alpha_n t] dt \right)$$

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 = 1$$

Rozwiązując równania (6.21) otrzymujemy

$$\xi_1 = (1 - 2A_2)(2GA_1 - 2A_2)$$

$$F_2 = 2(\alpha_n GA_1 - 2A_2)$$

$$G = 1 - \sin 2\alpha_n t_f$$

6.22

$$G_2 = 1 + \sin \alpha_n t_f$$

$$\lambda_n = \left\{ [a_1(2a_2^2 \alpha_n t_f - 2a_2)] [\alpha_n(1-t_f)t_f^2 + 2a_2 \alpha_n t_f^2 - 2a_1 t_f] + \alpha_n^2(1-t_f)t_f(2a_2 \alpha_n t_f^2 - t_f - a_1) + a_1(2a_2 \alpha_n t_f^2 - t_f - a_1) \right\}^{-1/2}$$

Funkcję sterowania $V(t)$ określa zatem następująca zależność

6.23

$$V(t) = \lambda_n (1 - 2A_2) (\sin 2\alpha_n t + 2 \cos \alpha_n t) \cdot (2GA_1 - 2A_2)^{-1}$$

Jeżeli wykorzystamy warunek minimum funkcjonału (3.9) zamieszczony w rozdziale 3, przy czym przyjmiemy $p = 2$, tzn. założymy, że rozważana konstrukcja straci w czasie sterowanego ruchu l^2 energii, to po rozłożeniu funkcji $\cos \alpha t$ oraz \sin w szereg Taylora i wykonaniu kilku przekształceń otrzymamy następujące równanie, które pozwala określić czas t_f , przy którym funkcjonał (3.9) przyjmuje wartość minimalną

6.24

$$Q t_f^2 + 2K t_f - C = 0$$

Rozwiązując równanie 6.24 otrzymujemy

$$6.25 \quad t_{f_{1,2}} = \frac{K \pm (K^2 + 4QC)^{1/2}}{2Q}$$

gdzie

$$Q = 2\alpha_n A_3 A_5 A_6 - 4\alpha_n A_5 P_0 + 8\alpha_n A_3 \psi_0 P_0 + 4P_0$$

$$C = 24\alpha_n A_4 \dot{\psi}_0 + \alpha_n A_6 + 12\alpha_n \dot{\psi}_0$$

$$K = 2\alpha_n A_6 P_0 + 6\alpha_n A_4 A_5 + 3\alpha_n A_5 - 2\alpha_n A_3 A_4 - \psi_0$$

$$A_3 = (4\dot{\psi}_0)^2 - \alpha_n^2 \dot{\psi}_0 - 2\alpha_n \dot{\psi}_0 \psi_0$$

6.26

$$A_4 = 2(\alpha_n^3 \psi_0 + P_0)$$

$$A_5 = 2P_0 - \alpha_n \psi_0$$

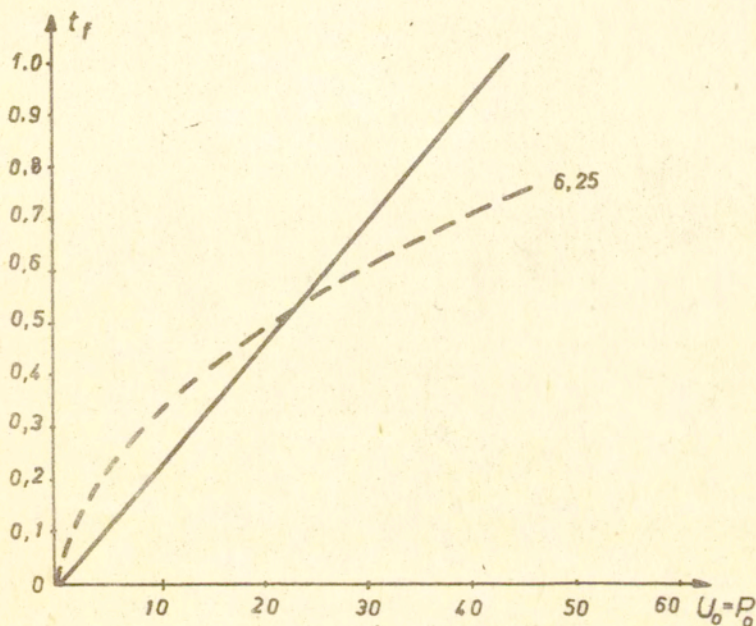
$$A_6 = 1 - 2\psi_0$$

ponieważ $t_{f_1} < t_{f_2}$, dlatego przyjmujemy wartość t_{f_1} , która daje krótszy czas procesu sterowania. Wyznaczony czas t_{f_1} jest funkcją przyspieszenia sejsmicznego $\ddot{u}_0 = P_0$.

Na rys. 4 przedstawiono funkcję $t_{f_1} = t_{f_1}(\ddot{u}_0)$, zaś na rys. 5 funkcje $V(t)$ oraz $\frac{u}{X} = f(t)$ określone w rozważonym wyżej zadaniu.

Rozważmy zadanie, w którym przyspieszenie sejsmiczne \ddot{u}_0 jest funkcją czasu, której wykres jest przedstawiony na rys. 6.

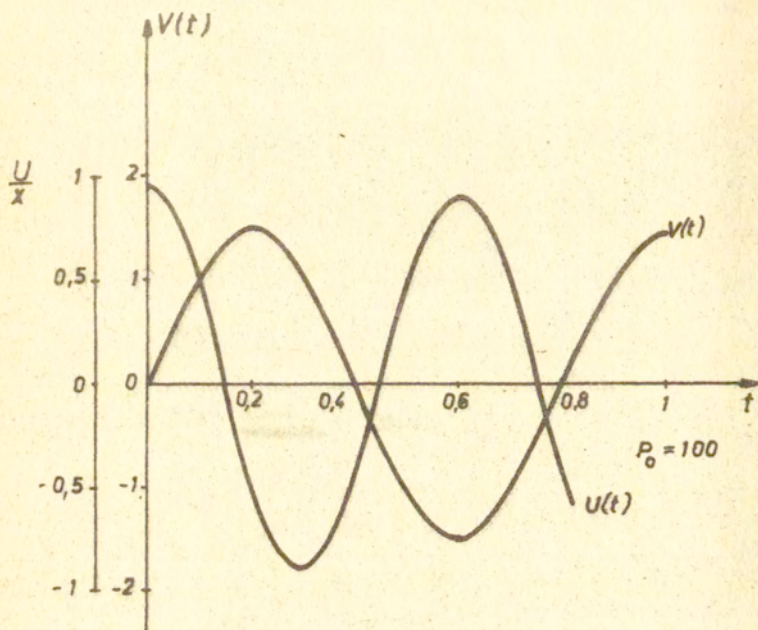
$$6.27 \quad \ddot{u}_0 = P_0 \sin \omega t$$



Rys. 4.

Przyjmując pierwszy wyraz w rozwinięciu funkcji $\cos(\omega_z - \alpha_n) t_f$; $\sin(\omega_z - \alpha_n) t_f$ w szereg Taylora otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned}
 6.28 \quad & \int_0^{t_f} v(t) \sin \alpha_n t \, dt = 0 \\
 & \int_0^{t_f} v(t) \cos \alpha_n t \, dt = \dot{\varphi}_0 + 2P_0(\omega_z^2 - \alpha_n^2)
 \end{aligned}$$

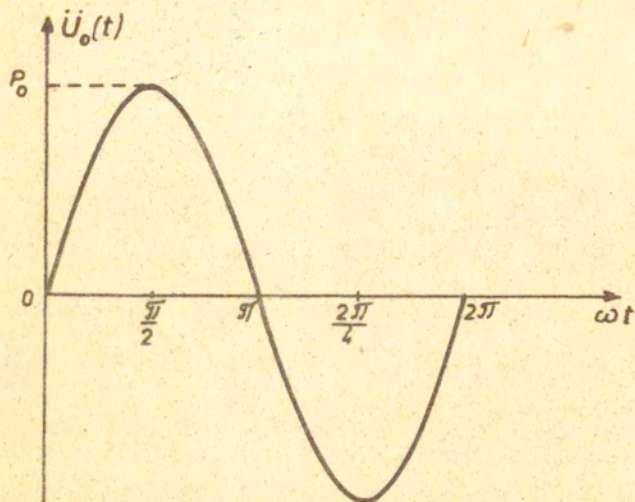


Rys. 5.

Analogicznie jak poprzednio rozwiązując pomocnicze zadanie metodą 1 momentów , przy czym obecnie

$$6.29 \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = \dot{\psi}_0 + 2P_0 (\omega_2^2 - \alpha_n^2)$$

$$g_1 = \sin \alpha_n t \quad ; \quad g_2 = \cos \alpha_n t \quad .$$



Rys. 6.

otrzymujemy

$$\xi_1 = \frac{(1 + \cos 2\alpha_n t_f)}{2a_2 \alpha_n (\alpha_n t_f - \sin 2\alpha_n t_f)}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{a_2}$$

6.30

W tym przypadku funkcja sterowania dana jest zależnością

$$6.31 \quad V(t) = \frac{\lambda}{a_2} \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \left(\frac{\cos 2\alpha_n t_f + 1}{\alpha_n t_f - \sin 2\alpha_n t_f} \right) \sin \alpha_n t + \cos \alpha_n t \right\}$$

Wykorzystując warunek minimalizacji funkcjonału znajdujemy czas trwania procesu sterowania t_f

$$6.32 \quad t_f = \frac{(-2\omega_z^2 + \alpha_n^2)(1 + \varphi_0) + P_0}{4\alpha_n [\varphi_0(-2\omega_z^2 + \alpha_n^2) + 1]}$$

W równaniu (6.32) oznaczono

ω_z - częstotliwość obciążenia sejsmicznego,

α_n - częstotliwość drgań powłoki.

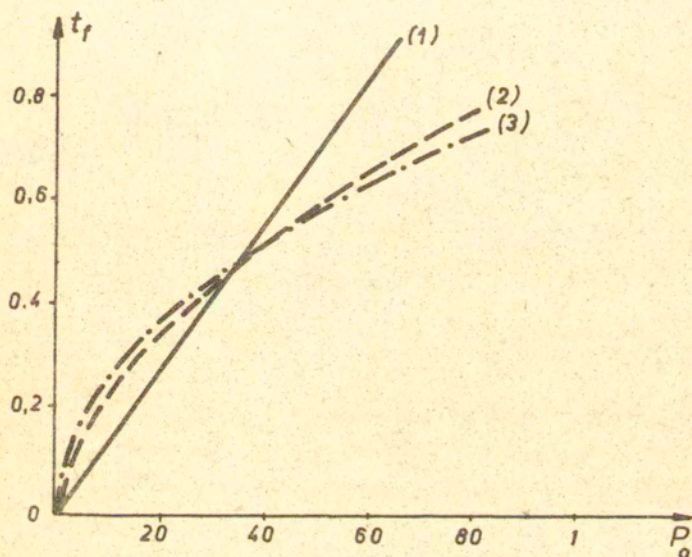
Jeżeli $2\omega_z^2 = \alpha_n^2$ wtedy czas trwania procesu określony jest zależnością

$$6.33 \quad t_f = \frac{P_0}{4\alpha_n}$$

Wykazaliśmy, że w zagadnieniach optymalnego sterowania, podobnie jak w zagadnieniach dynamiki konstrukcji, kształt funkcji obciążenia ma niewielki wpływ na ugięcia i czas trwania ruchu, natomiast istotny wpływ na wymienione parametry ruchu konstrukcji ma amplituda obciążenia.

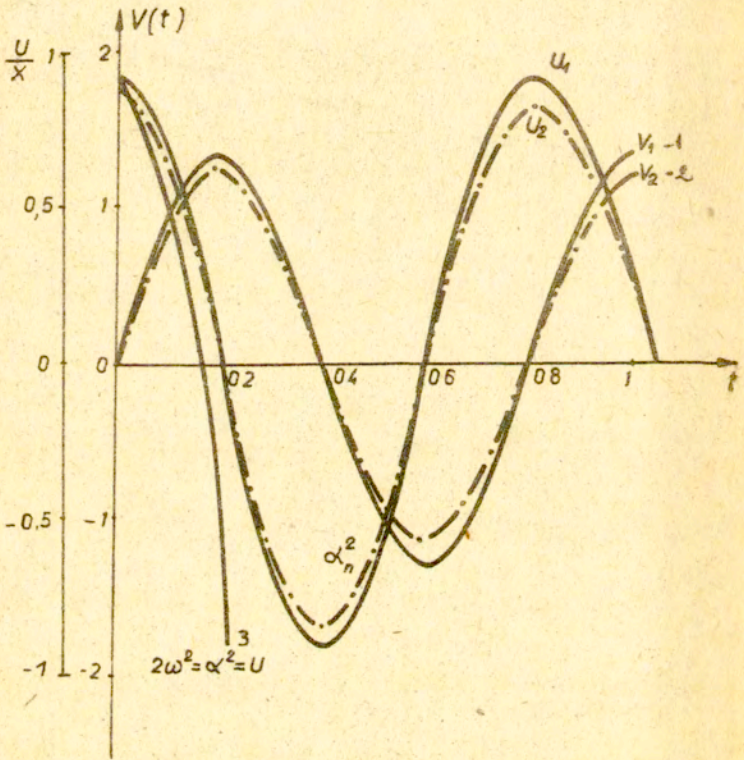
Na rys. 7 przedstawiono zależność czasu trwania ruchu t powłoki w funkcji amplitudy przyspieszenia sejsmicznego P_0 .

Poszczególne krzywe oznaczają: 1- rozwiązanie (5.33) , 2 -
rozwiązanie (6.25) , 3- rozwiązanie (6.32) .



Rys. 7.

Na rys. 8 przedstawiono zależność funkcji sterowania
oraz względnego przemieszczenia od czasu. Poszczególne krzywe
oznaczają: 1 - rozwiązanie (6.23) , 2 - (6.31) , 3 - (6.3) ,



Rys. 8.

6.2. Plastyczna powłoka obciążona impulsem ciśnienia

Rozwiążemy zagadnienie optymalnego sterowania ruchem ciał niesprężystych. Przeprowadzimy analizę wpływu zmian parametrów geometrycznych i fizycznych na postać funkcji sterowania $V(t)$ oraz na czas trwania procesu sterowania t_f . Ograniczymy się do badania ruchu konstrukcji cienkościennych, które doznają ugięć rzędu grubości. W przypadku symetrycznej, cylindrycznej powłoki cienkościennej siły normalne do powierzchni środkowej są małe, dlatego też będziemy je pomijać. Przyjmijemy ponadto założenie $m_\psi = 0$.

Równania równowagi określone są w omawianym przypadku zależnościami

6.34

$$n'_x = 0$$

$$m''_x - 2R n_x w'' + 2\beta (n_\psi - V) + a^2 \ddot{w} = 0$$

Bezwymiarowe wielkości występujące w równaniu (6.34) dane zależnościami

$$x = \frac{x}{L}, \quad w = \frac{W}{A}, \quad m_x = \frac{M_x}{M_0}$$

$$6.35 \quad n_x = \frac{N_x}{N_0}, \quad n_\psi = \frac{N_\psi}{N_0}, \quad R = \frac{A}{H}$$

$$\tau = \frac{t}{t_0}, \quad V = \frac{V_r}{2\sigma_0 H}$$

oznaczają:

- A - promień powłoki,
- L - długość powłoki,
- H - grubość powłoki,
- ρ - gęstość materiału powłoki,
- U, W - składowe przemieszczenia,
- M_x - składowa momentu gnącego,
- N_x, N_φ - składowe siły podłużnej,
- σ_0, N_0, M_0 - składowe siły przekrojowych określone na granicy plastyczności

Współczynniki występujące w równaniach równowagi dane są zależnościami:

$$6.36 \quad \alpha^2 = \frac{\rho A H}{2\sigma_0 t_0} \quad \beta = \frac{l^2}{A H}$$

zaś

Wykorzystamy warunek plastyczności dany zależnościami:

$$6.37 \quad \begin{aligned} f_1 &= m_x - 1 + n_x^2 = 0 \\ f_2 &= -m_x - 1 + n_x^2 = 0 \end{aligned}$$

Zauważymy, że w przypadku umiarkowanie dużych ugięć warunek plastyczności w płaszczyźnie n_x, m_x ma tę samą postać jak w przypadku małych ugięć /rys.9/.

Wykorzystując prawo plastycznego płynięcia 3.13 otrzymujemy w rozpatrywanym przypadku następujące zależności:

$$6.38 \quad \begin{aligned} \lambda'_x &= 2 \mu' n_x \cdot \\ k'_x &= \mu' \cdot \mu > 0 \end{aligned}$$

Wykorzystamy związki geometryczne dane zależnościami

$$6.39 \quad \begin{aligned} \lambda_x &= \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{W}' W' \\ \lambda_\varphi &= \dot{W} \\ K_x &= \frac{\dot{W}''}{2\beta}, \quad K_{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Przyjmujemy następujące warunki początkowe i końcowe

$$6.40 \quad \begin{aligned} W(x, \tau_0) &= W_0; \quad \dot{W}(x, \tau_0) = \dot{W}_0 \\ W(t_f) &= \dot{W}(t_f) = 0 \end{aligned}$$

Sformułowane zagadnienie (6.34) - (6.40) rozwiążemy metodą L momentów przyjmując kolejno błonowy stan naprężeń oraz błonowo-momentowy stan naprężeń powłoki /rys. 9/.

6.2.1. Warunek plastyczności Drucker'a - błonowy stan naprężenia

Rozważając równania problemu dla błonowego stanu naprężeń powłoki, określonego punktem B na powierzchni granicznej przedstawionej na rys. 9 otrzymujemy

$$6.41 \quad \begin{aligned} m_x = m_\varphi &= 0, \quad n_x = n_\varphi = 1 \\ \ddot{W} - \frac{2R}{a^2} W'' &= \frac{2\beta}{a^2} (V-1) \end{aligned}$$

Równanie ruchu rozwiązujemy przy następujących warunkach początkowych i końcowych

$$6.42 \quad \begin{aligned} W(x, 0) &= W_0 & ; & \quad \dot{W}(x, 0) = \dot{W}_0 \\ W(x, t_f) &= 0 & ; & \quad \dot{W}(x, t_f) = 0 \end{aligned}$$

oraz spełniając warunek ograniczający (3.9)

Poszukujemy rozwiązania równania (6.41) w postaci funkcji $W(x, t)$ z rozdzielonymi zmiennymi

$$6.43 \quad W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n^*(t) X_n(x)$$

przy czym $X_n(x)$ jest układem funkcji ortogonalnych spełniających warunki brzegowe zadania, zaś $W_n^*(t)$ spełniają warunki początkowe.

Podstawiając funkcję (6.43) do równań ruchu (6.41) otrzymujemy po kilku przekształceniach

$$6.44 \quad \ddot{W}_n^*(t) + \lambda^2 W_n^*(t) = f_n(t)$$

gdzie

$$X_n''(x) + \frac{a^2 \lambda^2}{2R} X_n(x) = 0$$

$$f_n(t) = \int_0^L \frac{2\beta}{a^2} (V-1) X_n(x) dx$$

$$a^2 = \frac{P H A}{2 \sigma_0 t_0} \quad , \quad \beta = \frac{L^2}{A K}$$

Rozwiązaniem równania (6.44) jest funkcja

$$6.45 \quad W_n^*(t) = W_0^* \cos \lambda_n t + \frac{\dot{W}_0^*}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \lambda_n (t-\tau) d\tau$$

Wykorzystując warunki końcowe (6.42b), sprowadzamy równanie (6.45) do następującego układu równań algebraicznych

$$6.46 \quad \begin{aligned} bx + ay &= \lambda_n (W_0^* a + \frac{\dot{W}_0^*}{\lambda_n} b) \\ bx - ay &= -\lambda_n (W_0^* b + \frac{\dot{W}_0^*}{\lambda_n} a) \end{aligned}$$

$$a = \cos \lambda_n t_f$$

gdzie: $b = \sin \lambda_n t_f$

$$x = \int_0^{t_f} f_n(\tau) \sin \lambda_n \tau d\tau$$

6.47

$$y = \int_0^{t_f} f_n(\tau) \cos \lambda_n \tau d\tau$$

Rozwiązując układ równań (6.46) otrzymujemy

$$6.48 \quad \int_0^{t_f} \left[\int_0^L \frac{2\beta}{a^2} (V(\tau) - 1) X_n dx \right] \sin \lambda_n \tau d\tau = -\dot{W}_0^*$$

$$\int_0^{t_f} \left[\int_0^L \frac{2\beta}{a^2} (V(\tau) - 1) X_n dx \right] \cos \lambda_n \tau d\tau = \lambda_n W_0^*$$

przy czym funkcja $X_n(x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia brzegowego (6.44 b).

W ten sposób sprowadziliśmy problem optymalnego sterowania ruchem powłoki plastycznej znajdującej się w błonowym stanie naprężeń do zadania, które można rozwiązać metodą I momentów.

Zadanie polega na wyznaczeniu funkcji sterowania $V(t)$ z układu równań (6.48), które spełniają warunki końcowe (6.42 b) zaś funkcja sterowania zapewnia minimum funkcjonału (3.9).

W przypadku, gdy rozważana powłoka ma dwa końce swobodnie podparte, wówczas funkcja własna

$$6.49 \quad X_n(x) = \frac{\sin \frac{n\pi x}{2L}}{2L} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

zaś układ równań (6.48) możemy przedstawić w następujący sposób

$$6.50 \quad \int_0^{t_f} (V(\tau) - 1) \sin \lambda_n \tau d\tau = \frac{\pi a^2 \dot{W}_0^*}{4L\beta}$$

$$\int_0^{t_f} (V(\tau) - 1) \cos \lambda_n \tau d\tau = -\frac{\pi a^2 \lambda_n W_0^*}{4L\beta}$$

Wykorzystując zadanie pomocnicze (6.21, a, b) znajdujemy

$$\xi_1 = \frac{1}{2a_2} \left[2 - \frac{a_1 (4a_2 \lambda_n t_f - 1)}{(16a_2 \lambda_n^2 t_f - 1)} \right]$$

6.51

$$\xi_2 = \frac{a_1}{2a_2} \left(\frac{4a_2 \lambda_n t_f - 1}{16a_2 \lambda_n^2 t_f - 1} \right)$$

gdzie: $a_1 = \frac{\pi a^2 \dot{W}_0^*}{4L\beta} + \frac{2}{\lambda_n}$; $g_1 = \sin \lambda_n t$

$$a_2 = \lambda_n t_f - \frac{\pi a^2 \lambda_n W_0^*}{4L\beta} \cdot g_2 = \cos \lambda_n t$$

Funkcja sterowania określona jest zatem zależnością

$$V(t) = \frac{1}{2a_2 (16a_2 \lambda_n^2 t_f - 1)} \left\{ [2 (16a_2 \lambda_n^2 t_f - 1) - a_1 (4a_2 \lambda_n t_f - 1)] \sin \lambda_n t + a_1 (4a_2 \lambda_n t_f - 1) \cos \lambda_n t \right\}$$

Wykorzystując warunek (3.9) otrzymujemy równanie

6.52
$$t_f^2 + \frac{M}{(M - \lambda_n)} t_f + \frac{B}{4(M - \lambda_n)} = 0$$

gdzie: $M = \frac{1}{2} \frac{a^2}{\beta} \lambda_n W_0^*$; $B = 2 - a_1$

z którego możemy wyznaczyć czas trwania ruchu sterowanego powłoki.

6.2.2. Warunek plastyczności Drucker'a - błonowo-momentowy stan naprężenia

Rozważając równanie problemu dla błonowo-momentowego stanu naprężenia powłoki, określonego punktem A_1 na powierzchni granicznej przedstawionej na rys. 9 otrzymujemy następujące równanie ruchu powłoki

$$6.53 \quad \ddot{W}(x,t) - \frac{2R}{a^2} \frac{\dot{W}'(x,t)W'(x,t)W''(x,t)}{\dot{W}''(x,t)} = \frac{2\beta}{a^2}(V-1)$$

Poszukując rozwiązania równania (6.53) w postaci funkcji z rozdzielonymi zmiennymi otrzymujemy po kilku przekształceniach

$$6.54 \quad \ddot{W}_n(t) + \alpha_n^2 W_n^2(t) = f_n(t)$$

gdzie:

$$\alpha_n^2 = \frac{2R}{a^2} \frac{(X_n'(x))^2}{X_n(x)}; \quad f_n(t) = \int_0^L \frac{2\beta}{a^2}(V-1)X_n dx$$

Równanie (6.54) można rozwiązać metodą analityczną oznaczając

$$6.55 \quad \frac{d\dot{W}_n^2}{dt} = 2\dot{W}_n \frac{dW_n}{dt} = 2[f_n - \alpha_n^2 W_n^2(t)]$$

Czas trwania ruchu powłoki określony jest całką eliptyczną

$$6.56 \quad t = \int_{W_n(t_0)}^{W_0(t_f)} \frac{dW_n(t)}{\sqrt{\int_{\dot{W}_n(t_0)}^{\dot{W}(t_f)} [f_n(t) - \alpha_n^2 W_n^2(t)] dW_n(t)}}$$

Poszukiwana postać funkcji sterowania $V(t)$ powinna zapewnić minimum czasu trwania procesu deformacji powłoki.

W celu wykorzystania metody 1 momentów zlinearyzujemy równanie ruchu (6.54) metodą opisaną w rozdziale 4.2.

Zlinearyzowane równanie ruchu

$$6.57 \quad \ddot{W}_n(t) + \alpha_{*n}^2 W_n(t) = f_n(t)$$

gdzie:

$$\alpha_{*n}^2 = \frac{10}{6a^2} \cdot \frac{R(X_n'(x))^2}{X_n(x)}$$

posiada rozwiązanie

$$6.58 \quad W_n(t) = W_0 \cos \alpha_{*n} t + \frac{\dot{W}_0}{\alpha_{*n}} \sin \alpha_{*n} t +$$

$$\frac{1}{\alpha_{*n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin \alpha_{*n} (t-\tau) d\tau$$

w którym W_0 i \dot{W}_0 są warunkami początkowymi.

Wykorzystując warunki końcowe 6.42 b przekształcimy równanie 6.58 do następującego układu równań algebraicznych

$$6.59 \quad \begin{aligned} ax - by &= -b\alpha_{*n}\dot{W}_0 - aW_0 \\ bx - ay &= -a\alpha_{*n}\dot{W}_0 + bW_0 \end{aligned}$$

gdzie: $a = \cos \alpha_{*n} t_f$, $b = \sin \alpha_{*n} t_f$

Rozwiązując układ równań (6.59) otrzymujemy

$$6.60 \quad \begin{aligned} \int_0^{t_f} f_n(t) \cos \alpha_{*n} t \, dt &= -\dot{W}_0 \\ \int_0^{t_f} f_n(t) \sin \alpha_{*n} t \, dt &= \alpha_{*n} W_0 \end{aligned}$$

gdzie: $f_n(t) = \int_0^L \frac{2\beta}{a^2} (V-1) X_n(x) \, dx$

W ten sposób sprowadziliśmy problem optymalnego sterowania ruchem powłoki plastycznej znajdującej się w błonowo-momentowym stanie naprężeń do zadania, które można rozwiązać metodą momentów.

Dla przykładu rozwiążemy zagadnienie przyjmując funkcję własną $X_n = (x^2 - 1)^2$. Równania (6.60) przekształcą się w tym przypadku do postaci:

$$6.61 \quad \begin{aligned} \int_0^{t_f} V(t) \cos \alpha_{*n} t \, dt &= \frac{15a^2}{16\beta} \dot{W}_0 + \frac{1}{\alpha_{*n}} \sin \alpha_{*n} t_f \\ \int_0^{t_f} V(t) \sin \alpha_{*n} t \, dt &= \frac{15a^2}{16\beta} W_0 \alpha_{*n} + \frac{1}{\alpha_{*n}} (1 - \cos \alpha_{*n} t_f) \end{aligned}$$

Zadanie pomocnicze formułowane w metodzie 1 momentów określone jest układem zależności

$$6.62 \quad \min \left(\int_0^{t_f} (\xi_1 \cos \alpha_{*n} t + \xi_2 \sin \alpha_{*n} t)^2 dt \right) = \frac{1}{\lambda}$$

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 = 1$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{15}{16} \frac{\alpha^2}{\beta} \dot{W}_0 + \frac{1}{\alpha_{*n}} \sin \alpha_{*n} t_f$$

$$a_2 = \frac{15}{16} \frac{\alpha^2}{\beta} \alpha_{*n} W_0 + \frac{1}{\alpha_{*n}} (1 - \cos \alpha_{*n} t_f)$$

Rozwiązując zadanie (6.61), (6.62) znajdujemy funkcję sterowania

$$6.63 \quad V(t) = \xi_1 \cos \alpha_* t + \xi_2 \sin \alpha_* t$$

gdzie:

$$\xi_1 = \frac{(1 - \frac{15}{16} \frac{\alpha^2}{\beta} \alpha_{*n} W_0)}{(\frac{15}{16} \frac{\alpha^2}{\beta} \dot{W}_0 + t_f)} \xi_2 ; \quad \xi_2 = \frac{16\beta - (\alpha^2 \dot{W}_0 + 16\beta t_f)}{\alpha^2 \alpha_{*n} W_0}$$

oraz funkcję ugięcia powłoki

$$6.65 \quad W(x, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(W_0 \cos \alpha_{*n} t + \frac{\dot{W}_0}{\alpha_{*n}} \sin \alpha_* t + \frac{1}{\alpha_{*n}} \int_0^t t_n(\tau) \sin \alpha_{*n} (t-\tau) d\tau \right) X_n(x) \right\}$$

Na rys. 10 przedstawiono zależności funkcji sterowania $V(t)$ oraz funkcji ugięcia $W(x,t)$ od czasu otrzymane w ramach teorii liniowej i teorii nieliniowej, które omówiono wyżej. Otrzymane wyniki wskazują, iż parametry geometryczne oraz parametry fizyczne wpływają w istotny sposób na postać funkcji sterowania oraz na chwilowe wartości ugięcia powłoki.

Wykorzystując warunek minimum funkcji ugięcia (6.65) znajdujemy czas trwania ruchu powłoki podlegającej sterowaniu

$$6.66 \quad t_f = \frac{1}{\alpha_{wn}} \operatorname{arctg} \frac{\alpha_{wn} \dot{W}_0 + f_n \operatorname{Sin} \alpha_{wn} t_0}{\alpha_{wn}^2 W_0 + f_n \operatorname{Cos} \alpha_{wn} t_0}$$

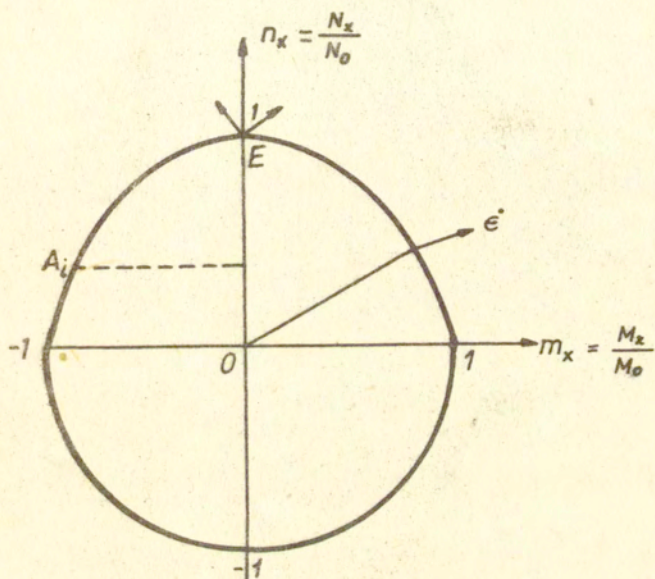
6.2.3. Warunek plastyczności Hubera-Misesa

W celu określenia wpływu parametrów fizycznych materiału powłoki na postać funkcji sterowania oraz przemieszczenia rozważymy ruch powłoki walcowej znajdującej się w stanie naprężeń opisanym warunkiem plastyczności Hubera-Misesa

$$6.67 \quad f(m_x, n_x, n_\varphi) = n_x^2 - n_x n_\varphi + n_\varphi^2 + \frac{3}{4} m_x - 1 = 0$$

Podstawiając warunek plastyczności (6.67) do prawa plastycznego płynięcia 3.13 otrzymujemy zależności

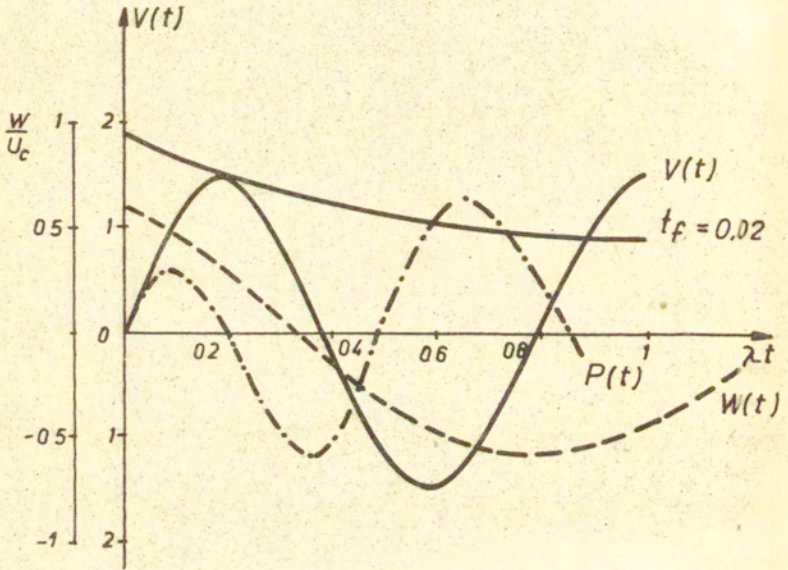
$$6.68 \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= \mu' (2n_x - n_\varphi) \\ \dot{\lambda}_\varphi &= \mu' (2n_\varphi - n_x) \\ \dot{k}_x &= \frac{3}{2} \mu' m_x \end{aligned}$$



Rysunek 9

Porównując wyrażenia (6.68) ze związkami geometrycznymi (6.39) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 n_x &= 2 \left[\left(\frac{A}{L} \right)^2 \dot{w}' w' + \dot{w} \right] \mu^{-1} \\
 n_\varphi &= \left[\left(\frac{A}{L} \right)^2 \dot{w}' w' + 2 \dot{w} \right] \mu^{-1} \\
 m_x &= \dot{w}'' \cdot (3 \mu' \beta)^{-1}
 \end{aligned}$$



Rys. 10.

Podstawiając otrzymane wyrażenia do warunku 6.67 otrzymujemy

$$6.70 \quad M' = (Z)^{1/2}$$

$$Z = (A_1^2 - A_1 B + B^2 + \frac{1}{4} C^2)$$

gdzie:

$$A_1 = 2 \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{W}' W' + \dot{W}$$

$$B = \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{W}' W' + 2\dot{W}$$

$$C = \dot{W}'' \cdot \beta^{-4}$$

Podstawiając otrzymane zależności do (6.34) i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy następujące równanie

$$6.71 \quad 4 C'' Z^{5/2} - 4 C' Z' Z^{3/2} - 2 C Z''' Z^{3/2} - 3 C Z' Z^{1/2} + 4 R A_1 Z^{5/2} W'' + 2 \beta B Z^{5/2} + 2 \beta V Z^3 + a^2 Z^3 \ddot{W} = 0$$

Bezwymiarowe równanie (6.71) jest nieliniowe względem $w(x, t)$

W celu określenia wpływu warunku plastyczności na parametr sterowania, ugięcie i czas trwania procesu sterowania będziemy poszukiwali rozwiązania równania (6.71) w postaci iloczynu funkcji z rozdzielonymi zmiennymi

$$6.72 \quad W(x, t) = W_0(t) (1-x^2)^2$$

Podstawiając (6.72) do (6.71) otrzymujemy następującą postać równania problemu

$$6.73 \quad \ddot{W}_0(t) + \alpha^2 W_0(t) = \frac{2\beta}{a^2} \left[V - 2 \left(1 - \frac{24}{\beta} \right) \times \right. \\ \left. \left(3 + \frac{4}{\beta} \right) + \frac{48}{\beta^2} \left(1 + \frac{2}{\beta^2} \right) \right] \times \left(3 + \frac{4}{\beta^2} \right)^{-3/2}$$

gdzie:

$$\alpha = \left[8 \left(\frac{1}{H} \right)^2 \left(3 + \frac{4}{\beta^2} \right) + 24 \left(\frac{A}{L} \right)^2 \right] \times \\ \left[\beta a^2 \left(3 + \frac{4}{\beta^2} \right) \right]^{-3/2}$$

Zauważmy, że rozważamy powłokę swobodnie podpartą na końcach, zaś równanie (6.73) spełnione jest w środku powłoki.

Wykorzystując warunki początkowe (3.4) oraz warunki końcowe (3.5) otrzymujemy następujący układ równań

$$6.74 \quad \int_0^{t_f} V(t) \cos \alpha t \, dt = -\alpha W_0 + \left[2 \left(1 + \frac{24}{\beta} \right) \left(3 + \frac{4}{\beta} \right) + \right. \\ \left. \frac{48}{\beta^2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right] \left[3 + \frac{48}{\beta^2} \right]^{-3/2} \times \\ \left[\cos \alpha t_f - 1 \right]$$

$$\int_0^{t_f} V(t) \cdot \sin \alpha t \, dt = \dot{W}_0 + \left[2 \left(1 + \frac{24}{\beta} \right) \times \right. \\ \left. \left(3 + \frac{4}{\beta} \right) + \frac{48}{\beta^2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right] \left[3 + \frac{48}{\beta^2} \right]^{-3/2} \times \\ \sin \alpha t_f.$$

W ten sposób sprowadziliśmy problem optymalnego sterowania ruchem powłoki plastycznej do zadania, którego rozwiązanie można poszukiwać metodą 1 momentów formułując zadanie pomocnicze określone zależnościami

$$\min. \left(\int_0^t \sum_{k=1}^n |g_k \xi_k|^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\lambda_n}$$

6.75

$$\sum_{k=1}^n a_k \xi_k = 1$$

Współczynniki a_k, g_k występujące w (6.75) dane są wzorami

$$a_1 = -\alpha W_0 + \left(2 \left(1 + \frac{24}{\beta} \right) \left(3 + \frac{4}{\beta} \right) + \frac{48}{\beta^2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \left(3 + \frac{48}{\beta^2} \right)^{-3/2} (\cos \alpha t_f - 1)$$

6.76

$$a_2 = \dot{W}_0 + \left(2 \left(1 + \frac{24}{\beta} \right) \left(3 + \frac{4}{\beta} \right) + \frac{48}{\beta^2} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right) \left(3 + \frac{48}{\beta^2} \right)^{-3/2} \sin \alpha t_f$$

$$g_1 = \sin \alpha t \quad ; \quad g_2 = \cos \alpha t$$

Rozwiązując zadanie (6.75) otrzymujemy następujące wyrażenia

$$\xi_1 = (1 - a_2 \xi_2) a_1^{-1}$$

6.77

$$\xi_2 = a_2 (2\alpha + \cos \alpha t_f) [4\alpha^2 a_1 (2a_1 a_2^{-1} (\alpha t_f - (2\alpha)^{-1} \sin \alpha t_f - a_2 (\alpha a_2)^{-1} \cos \alpha t_f + 2\alpha t_f + (2\alpha)^{-1} \sin \alpha t_f$$

Funkcja sterowania określona jest zatem zależnością

$$V_r(\tau) = \left\{ A \alpha a_2 \left[\frac{2a_1(\alpha \tau_f - \text{Sin} \alpha \tau_f)}{a_2} - \frac{a_2 \cos 2\alpha \tau_f}{2\alpha a_1} + \right. \right. \\ \left. \left. - 2\alpha \tau_f + \frac{\text{Sin} \alpha \tau_f}{2\alpha} + a_2^2 (2\alpha \tau_f + \cos 2\alpha \tau_f) \right] \times \right. \\ \left. \cos \alpha \tau + [a_2 (2\alpha \tau_f + \cos 2\alpha \tau_f) \text{Sin} \alpha \tau_f] \right. \\ \left. \left\{ 2 \frac{a_1}{a_2} (\alpha \tau_f - \frac{\text{Sin} 2\alpha \tau_f}{2\alpha}) - \frac{a_2 \cos 2\alpha \tau_f}{\alpha a_1} + \right. \right. \\ \left. \left. \tau_f + \frac{1}{2\alpha} \text{Sin} \alpha \tau_f \right\}^{-1} \right.$$

6.78

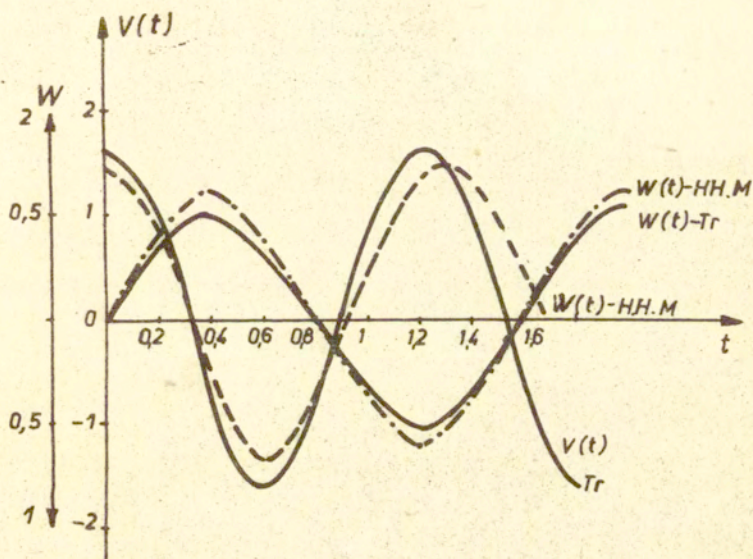
zaś ugięcie powłoki wzorem

$$W(x,t) = W_0(t) (1-x^2)^2 = \left\{ W_0^0 \cos \alpha t + \frac{W_0^0}{\alpha} \text{Sin} \alpha t + \right. \\ \left. \frac{1}{\alpha} \int_0^t \frac{2\beta}{a^2} \left[V_r - 2\left(1 - \frac{24}{\beta}\right) + \frac{48}{\beta^2} \left(1 + \frac{2}{\beta^2}\right) \right] \cdot \right. \\ \left. \left(3 + \frac{3}{\beta^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \text{Sin} \alpha (t-\tau) d\tau \right.$$

6.79

Na rys. 11 pokazano funkcje sterowania $V_r(t)$ oraz ugięcia w (x, t) charakteryzujące sterowany ruch powłoki walcowej wykonanej z materiału podlegającego warunkowi plastyczności Hubera-Misesa oraz warunkowi Treski.

Zauważmy, że metoda 1 momentów zastosowana w zadaniach poszukiwania optymalnego sterowania posiada kilka niedogodności. Po pierwsze wymaga sformułowania oraz minimalizacji pomocniczego funkcjonału, co w pewnym sensie nie jest ścisłe.



Rys. 11a

Po drugie otrzymanie rozwiązania w analitycznej postaci jest tu możliwe tylko w przypadku, gdy stan końcowy układu jest stanem zerowym.

Z tego względu będziemy poszukiwali optymalnego sterowania metodą praktyczną wyznaczając współczynniki w funkcji sterowania o zadanej strukturze.

7. Praktyczna metoda określania funkcji optymalnego sterowania

7.1. Opis metody

W celu wyjaśnienia idei metody praktycznej rozważmy zadanie (6.1) sformułowane w rozdziale 6.

Przepiszemy ponownie układ równań (6.18)

$$7.1 \quad \int_0^{t_f} V_r(\tau) \sin \alpha_n \tau d\tau = -\alpha_n \varphi_0 + \frac{P_0}{\alpha_n} (1 - \cos \alpha_n t_f)$$

$$\int_0^{t_f} V_r(\tau) \cos \alpha_n \tau d\tau = \dot{\varphi}_0 + \frac{P_0}{\alpha_n} \sin \alpha_n t_f$$

Proponowana metoda praktyczna polega na poszukiwaniu funkcji sterowania $V(t)$ w postaci

$$7.2 \quad V_r(t) = V_1 \cos \alpha_n t + V_2 \sin \alpha_n t$$

Podstawiając (7.2) do (7.1) otrzymujemy następujący układ równań

$$7.3 \quad -\left(1 + \frac{\cos \alpha_n t_f}{2\alpha_n}\right) V_1 + \left(\frac{\alpha_n t_f}{2} + \frac{\sin 2\alpha_n t_f}{2\alpha_n}\right) V_2 = A$$

$$\left(\frac{\alpha_n t_f}{2} - \frac{\sin 2\alpha_n t_f}{2\alpha_n}\right) V_1 + \left(1 + \frac{\cos \alpha_n t_f}{2\alpha_n}\right) V_2 = B$$

gdzie:

$$A = -\alpha_n \varphi_0 + \frac{P_0}{\alpha_n} (1 - \cos \alpha_n t_f)$$

$$B = \dot{\varphi}_0 + \frac{P_0}{\alpha_n} \sin \alpha_n t_f$$

Rozwiązując układ równań (7.3) znajdujemy

$$7.4 \quad V_1 = \Delta_1 \Delta^{-1} \quad ; \quad V_2 = \Delta_2 \Delta^{-1}$$

gdzie:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\alpha_n} \sin^2 \alpha_n t_f & ; & \left(\frac{\alpha_n t_f}{2} + \frac{\sin 2\alpha_n t_f}{2\alpha_n} \right) \\ \frac{\alpha_n t_f}{2} - \frac{\sin 2\alpha_n t_f}{2\alpha_n} & ; & \frac{1}{2\alpha_n} \sin^2 \alpha_n t_f \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & ; & \frac{\alpha_n t_f}{2} + \frac{\sin 2\alpha_n t_f}{2\alpha_n} \\ B & ; & \frac{1}{2\alpha_n} \sin^2 \alpha_n t_f \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\alpha_n} \sin^2 \alpha_n t_f & ; & A \\ \frac{\alpha_n t_f}{2} - \frac{\sin 2\alpha_n t_f}{2\alpha_n} & ; & B \end{vmatrix}$$

Funkcja sterowania dana jest więc zależnością

$$7.5 \quad V_1(t) = \frac{1}{\Delta} (\Delta_1 \cos \alpha_n t + \Delta_2 \sin \alpha_n t)$$

Czas trwania procesu wyznaczamy minimalizując funkcjonal
2.10 otrzymując

$$7.6 \quad t_f = \frac{k\bar{V}}{2} (\omega_n^2 P_n + \alpha_n^2)^{1/2}$$

gdzie: $\omega_n = \frac{EJ}{m}$; $\alpha_n^2 = \frac{\bar{V} R_H \delta x}{n}$; $P_n = \left(\frac{n\bar{V}}{L}\right)^{1/2}$

7.2. Zastosowanie metody w przykładzie belki sprężystej
obciążonej ruchomą siłą dynamiczną

Rozważamy ruch belki obciążanej ruchomą siłą P /rys.12/
Równanie ruchu ma w tym przypadku postać

$$7.7 \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ \frac{\partial^2 y_d}{\partial x^2}) + EF \frac{\partial^2 y_d}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^n \left(P_{0k} - \frac{P_{0k}}{g} \frac{d^2 y_d}{dt^2} + Q \sin \omega_c t \right) \delta(x - \eta_k) + V_k \delta(x - \eta_k)$$

przy czym

$$7.8 \quad \frac{d^2 y_d}{dt^2} = \frac{\partial^2 y_d}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 y_d}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 y_d}{\partial x^2}$$

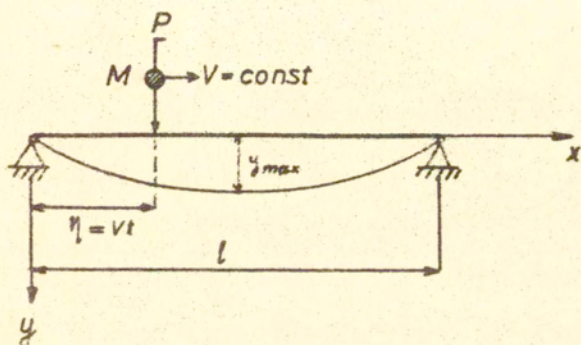
$y_d(x,t)$ - dynamiczne ugięcie belki

$EJ(x)$ - sztywność belki

P_{0k} - masa ruchomego ciężaru

$Q \sin \omega_c t$ - pionowa składowa siły dośrodkowej

W przypadku gdy warunki początkowe odpowiadają belce
nieruchomej co jest spełnione w momencie "wchodzenia" ruchomej
siły, zaś warunki brzegowe odpowiadają belce zamocowanej na
końcach, przemieszczenie może być wyrażone zależnością:



Rys. 12.

$$7.9 \quad y(x, t) = y_{st} \cdot \sum_{L=1}^n \varphi_L(t) X_L(x) = y_{st} \cdot y_d$$

W równaniu (7.9) y_{st} oznacza maksymalne ugięcie belki przy statycznym działaniu siły P_0 .

Dla belki przegubowej mamy

$$7.10 \quad y_{st} = \frac{2 P_0 L^3}{\pi^4 \cdot EJ}$$

Równanie problemu dla pierwszej uogólnionej współrzędnej może być zapisane w następujący sposób

$$7.11 \quad \ddot{\varphi}_i + \alpha_i^2 \varphi_i = f_i(\eta)$$

Dla belki swobodnie podpartej

$$\alpha_i = \frac{\pi^2 i^4}{\alpha^2 L^2} \quad ; \quad \alpha = \frac{vL}{\pi} \left(\frac{F \cdot g}{EJ} \right)^{1/2}$$

$$7.12 \quad f_i(\eta) = \frac{\pi^2}{(\alpha L)^2} \sum P_{0k} \left[1 - \frac{2\alpha^2 \beta}{\pi^2} \frac{d^2 y_d}{d\eta^2} + \frac{Q}{P_{0\alpha}} \frac{\sin \frac{\nu \pi \eta}{L}}{L} + V_r \right] \sin \frac{i \pi \eta}{L}$$

$$\beta = \frac{P_i}{\rho F_1 g}$$

$$\nu = \frac{\omega_i L}{\pi v}$$

Dla przypadku ruchu jednego ciężaru /rys.11/ mamy

$$7.13 \quad f_i(\eta) = \left(\frac{\pi}{\alpha L} \right)^2 \left[1 - \frac{2\alpha^2 \beta}{\pi^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{Q}{P_0} \sin \frac{\nu \pi \eta}{L} + V_r \right]$$

Rozwiązaniem równania (7.11) jest funkcja

$$7.14 \quad \varphi_i(\eta) = A_i(b) \cos \alpha_i \eta + B_i(b) \sin \alpha_i \eta + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^{\eta} f_i(\lambda) \sin \alpha_i (\eta - \lambda) d\lambda$$

Stałe $A_i(b)$, $B_i(b)$ wyznaczamy z warunków granicznych określających $\varphi(\eta)$ oraz $\dot{\varphi}(\eta)$ przy $\eta = b$.

Ogólną postać funkcji sterowania można wyznaczyć z równania (7.14) metodą momentów.

Tutaj, w celu praktycznego wyznaczenia funkcji sterowania, wykorzystamy metodę przybliżoną przedstawioną w rozdziale 4.

Równanie problemu dynamiki belki obciążonej siłą ruchomą przekształcone metodą przybliżoną z wykorzystaniem zależności

$$7.15 \quad \varphi(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \cdot \sin \frac{i\pi x}{L}$$

przyjmie dla pierwszej uogólnionej współrzędnej, następującą postać

$$7.16 \quad \ddot{\varphi}(t) + 2\psi(t)\dot{\varphi}(t) + \phi(t)\varphi(t) = \frac{2P}{mL} f(t) + V_r(t)f(t)$$

gdzie:

$$f(t) = (1 + 2\beta \sin^2 \pi \xi)^{-1}, \quad \xi = vt$$

$$7.17 \quad \psi(t) = \beta \left(\frac{\pi a}{L} \right) \cdot \sin \pi \xi \cdot f(t)$$

$$\phi(t) = (1 - 2\beta \alpha^2 \sin^2 \pi \xi) \cdot f(t)$$

Ponadto

$$\beta = \frac{M}{m \cdot L}$$

7.18

$$\alpha = \frac{a}{a_{kr}}; \quad a_{kr} = \frac{LV}{\pi}$$

a_{kr} - najniższa prędkość stałej siły

Poszukamy funkcji sterowania w ten sposób, aby

7.19

$$V_{imax} \leq |V_0|$$

gdzie: v_0 - stała

zaś równanie (7.16) spełniało warunki początkowe

$$7.20 \quad \varphi(0) = \varphi_0 \quad ; \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$

i warunki końcowe

$$7.21 \quad \varphi(t_f) = \dot{\varphi}(t_f) = 0$$

Ponadto funkcja sterowania $V(t)$ musi spełniać warunki 2.10 .

Rozwiązaniem równania (7.16) jest funkcja

$$7.22 \quad \varphi(t) = q^{-\frac{1}{4}} \left\{ a_0 \sin(\sqrt{\mu}) \int_0^t \frac{d\tau}{q^{1/2}} + \alpha_c \right\} + \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{B_i} B_i}{1 - \omega_i^2 (\mu)^{-1}} \cdot \left. \sin \omega_i \int_0^t \frac{d\tau}{q^{1/2}} \right\}$$

w której

$$\sqrt{2} = \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{EJ}{m} \right)$$

$$\omega_i = (2i - 1)\pi$$

Wykorzystując warunki końcowe (7.21) otrzymujemy na podstawie równania (7.2)

$$V_i = \left[\left(\frac{2P\omega_i}{mL} \sin \frac{\pi a t_f}{L} - 1 \right) \sin \sqrt{\mu} \int_0^t \frac{d\tau}{q^{1/2}} \right] \times \left[1 - \omega_i \sin \sqrt{\mu} \int_0^t \frac{d\tau}{q^{1/2}} \right]^{-1}$$

7.23

$$\begin{aligned}
 V_2 = & 2P \left\{ \frac{2a \cos \frac{\pi a}{L} t_f}{L} \cdot \left[q^{-\frac{1}{4}} \sin \omega_i \int_0^{t_f} \frac{d\tau}{q^{1/2}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \sin(\sqrt{\mu}) \int_0^{t_f} \frac{d\tau}{q^{1/2}} \right] \cdot \left[\omega_i \sqrt{\mu} (1 - \omega_i^2 (\mu \nu^2)^{-1})^{-1} \right]^{-1} + \right. \\
 & \left. \sin \frac{\pi a}{L} t_f \left[1 - \omega_i^2 (\mu \nu^2)^{-1} \right]^{-1} \cdot \sin \omega_i \int_0^{t_f} \frac{d\tau}{q^{1/2}} + \right. \\
 & \left. \sin \sqrt{\mu} \nu \int_0^{t_f} \frac{d\tau}{q^{1/2}} \cdot \left[\omega_i \sqrt{\mu} (1 - \omega_i^2 (\nu^2 \mu)^{-1})^{-1} \right]^{-1} \times \right. \\
 & \left. \frac{4\beta \pi a}{L} \cos \frac{\pi a}{L} t_f - \omega_i (1 - \omega_i^2 (\nu^2 \mu)^{-1})^{-1} \cdot q^{-1/2} \right. \\
 & \left. \cos \omega_i \int_0^{t_f} \frac{d\tau}{q^{1/2}} - \sqrt{\mu} \nu q^{-1/2} \cos \sqrt{\mu} \nu \int_0^{t_f} \frac{d\tau}{q^{1/2}} \times \right. \\
 & \left. \left[\omega_i \sqrt{\mu} (1 - \omega_i^2 (\mu \nu^2)^{-1})^{-1} \right]^{-1} \right\} \left\{ 1 - \omega_i \sin \sqrt{\mu} \nu \int_0^{t_f} \frac{d\tau}{q^{1/2}} \right\}^{-1}
 \end{aligned}$$

Tak więc funkcja sterowania $V(t)$ może być wyrażona zależnością

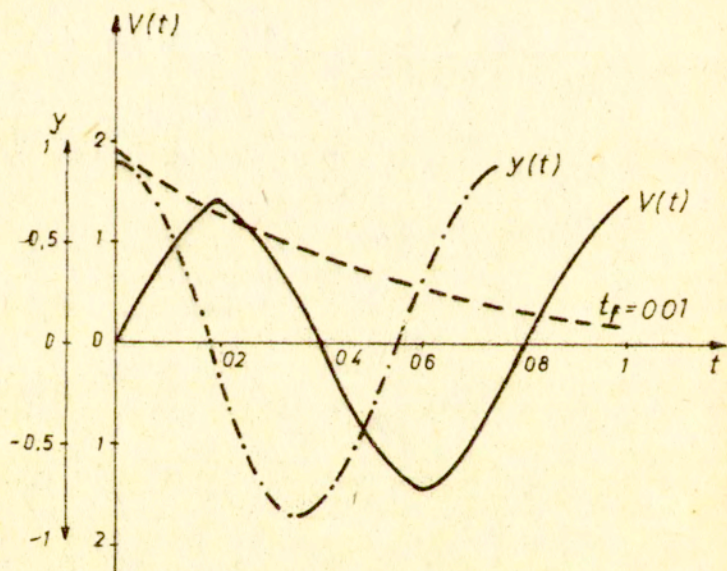
$$7.24 \quad V(t) = V_1 \cos(\sqrt{\mu} t) \int_0^t \frac{d\tau}{[q(\tau)]^{1/2}} + V_2 \sin(\sqrt{\mu} t) \int_0^t \frac{d\tau}{[q(\tau)]^{1/2}}$$

Wykorzystując warunek (2.10) możemy wyznaczyć czas trwania procesu sterowania z zależności

7.25

$$t_f = \frac{2L}{a_{II}} \operatorname{arctg} \frac{\exp \left\{ \frac{K\pi}{2\sqrt{\mu V}} (4\beta - 1)^{\frac{1}{4}} - (2\beta - (4\beta^2 - 1)^{\frac{1}{4}}) \right\}}{1 - \exp \left[\frac{K\pi}{2\sqrt{\mu V}} (4\beta^2 - 1)^{\frac{1}{4}} \right]}$$

Na rys. 13 przedstawiono zależności $V(t)$ oraz $y(x,t)$ otrzymane przy $\omega = 260 \text{ s}^{-1}$, $m = 98,3 \text{ kg}$, $P = 1,980 \text{ N}$, $L = 2^{\text{m}}$, $F = 0,10^{\text{m}}$, $E = 2 \cdot 10^{-3}$



Rys. 13.

7.3. Zastosowanie metody w przykładzie belki plastycznej obciążonej impulsem ciśnienia

Rozważmy ruch belki plastycznej o długości $2l$ i gęstości materiału ρ . Bezwymiarowe równanie równowagi belki ma postać

$$7.26 \quad m_x'' + n_x W'' - a^2 \ddot{W} = A_0 V$$

gdzie: $m_x = \frac{M_x}{M_0}$; $n_x = \frac{N_x}{N_0}$; $W = \frac{w}{L}$; $A_0 = \frac{V_0}{\sigma_0 H^2}$

zaś $M_0 = \frac{\sigma_0 H^2}{4}$; $N_0 = \sigma_0 H$; $a^2 = \frac{E \cdot L}{\sigma_0 H^2 \rho}$

σ_0 - granica plastyczności.

Równanie (7.26) rozwiązujemy przy następujących warunkach początkowych

$$7.27 \quad W(0) = W_0 ; \quad \dot{W}(0) = \dot{W}_0$$

oraz warunkach końcowych

$$7.28 \quad W(t_f) = \dot{W}(t_f) = 0$$

warunek plastyczności wyrazimy zależnością

$$7.29 \quad \bar{\Phi}(m_x, n_x) = \pm m_x - 1 + n_x^2$$

Związki odkształceniowo-przemieszczeniowe mają postać

$$7.30 \quad \begin{aligned} \epsilon_x' &= \dot{u} + \dot{w}' w' \\ K_x^* &= \dot{w}'' \end{aligned}$$

Wykorzystując stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego oraz warunek plastyczności (7.29) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 7.31 \quad \epsilon'_x &= 2\mu' \eta_x \\ K'_x &= \mu' \quad ; \quad \mu' > 0 \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwali rozwiązania równania ruchu w postaci funkcji z rozdzielonymi zmiennymi

$$7.32 \quad W(x, t) = W^*(t) U_c(x)$$

7.3.1. Błonowy stan naprężenia

Podstawiając funkcje (7.32) do równania (7.26) w którym wykorzystano związki odkształceniowo-przemieszczeniowe oraz materiałowe dla błonowego stanu naprężenia, przy którym $m_x = 0$ otrzymujemy następującą postać równania problemu

$$7.33 \quad \ddot{W}^*(t) + \frac{1}{S} \frac{U_c'}{U_c} W^*(t) = V^*(t)$$

gdzie:

$$V^* = \int_0^l A_0 V(t) \cdot U_c d\xi$$

Rozwiązaniem równania (7.33) jest funkcja

$$7.34 \quad W^*(t) = W_0^* \cos \alpha t + \frac{\dot{W}_0^*}{\alpha} \sin \alpha t + \frac{1}{\alpha} \int_0^t V^* \sin \alpha (t-\tau) d\tau$$

Podstawiając (7.34) do warunków końcowych (7.28) otrzymujemy

$$ax - by = \alpha b w_0^* - a \dot{w}_0^*$$

$$bx + ay = \alpha a w_0^* - b \dot{w}_0^*$$

Rozwiązując układ równań (7.35) otrzymujemy

$$7.36 \quad \int_0^t V^*(t) \cos \alpha t dt = \dot{w}_0^*$$

$$\int_0^t V^*(t) \sin \alpha t dt = -\alpha w_0^*$$

Przyjmując funkcję sterowania $V(t)$ w postaci (7.2) można przekształcić układ równań (7.36) otrzymując

$$7.37 \quad \left(\frac{\alpha t_f}{2} + \frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right) V_1 + \frac{\sin^2 \alpha t_f}{2\alpha} V_2 = \dot{w}_0^*$$

$$-\frac{1}{2\alpha} \sin^2 \alpha t_f V_1 + \left(\frac{\alpha t_f}{2} - \frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right) V_2 = -\alpha w_0^*$$

Rozwiązując układ równań (7.37) znajdujemy

$$7.38 \quad V_1 = \dot{w}_0^* \left[\frac{\alpha t_f}{2} - \frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} - \frac{\alpha w_0^* \sin^2 \alpha t_f}{2} \right] \times$$

$$\left[\left(\frac{\alpha t_f}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{2\alpha} \sin^2 \alpha t_f \right)^2 \right]^{-1}$$

$$V_2 = \left[\alpha W_0^* \left[\left(\frac{\alpha t_f}{2} + \frac{\sin \alpha t_f}{4\alpha} \right) - \frac{\alpha W_0^* \sin^2 \alpha t_f}{2} \right] \times \right. \\ \left. \left(\frac{\alpha t_f}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{2\alpha} \sin^2 \alpha t_f \right)^2 \right]^{-1}$$

Ostatecznie

$$7.39 \quad V = V_1 \cos \alpha t - V_2 \sin \alpha t$$

Wykorzystując warunek (2.10) znajdujemy

$$7.40 \quad t_f = \frac{-7W_0^* \alpha + (7\alpha (W_0^{*2} + 8W_0^{*2})^{1/2}}{2\dot{W}_0^*}$$

Przemieszczenie $w(x,t)$ określone jest zatem funkcją

$$7.41 \quad W(x,t) = \left[W_0^* \cos \alpha t + \frac{\dot{W}_0^*}{\alpha} \sin \alpha t + \frac{1}{\alpha} \int_0^t v^* \sin \alpha (t-\tau) d\tau \right]$$

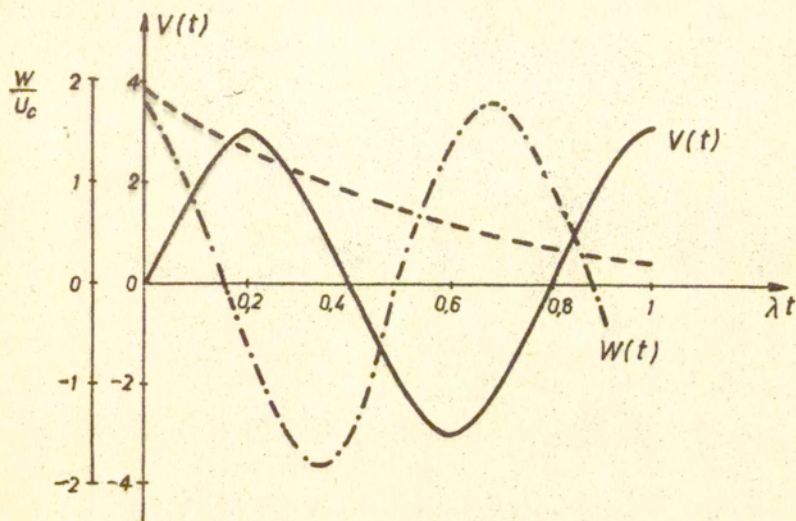
Na rys. 14 przedstawiono zależności $V(t)$ oraz $\frac{w(x,t)}{U_0}$ jako funkcje czasu .

7.3.2. Błonowo-momentowy stan naprężenia

Jeśli belka znajduje się w błonowo-momentowym stanie naprężenia wówczas z równania równowagi po odpowiednich podstawieniach otrzymujemy następujące równanie problemu

$$7.42 \quad \ddot{W}^*(t) + \frac{1 \cdot (U_c')^2}{25 \cdot U_c} W^*(t) = V(t)$$

Rozwiązanie równania (7.42) znajdujemy metodą linearyzacji otrzymując



Rys. 14.

$$7.43 \quad W^*(t) = W_0^* \cos \alpha t + \dot{W}_0^* \frac{\sin \alpha t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_0^t V^* \sin \alpha (t-\tau) d\tau$$

gdzie:
$$\alpha = \frac{5(U_c')^2}{6\mu c}$$

Wykorzystując warunki końcowe otrzymujemy następujący układ równań

$$7.44 \quad \int_0^{t_f} V^*(t) \cos \alpha t dt = -\dot{W}_0^*$$

$$\int_0^{t_f} V^*(t) \sin \alpha t dt = \alpha W_0^*$$

Podstawiając (7.2) do układu równań (7.44) otrzymujemy

$$7.45 \quad V_1 = \left[\dot{W}_0^* \left(\frac{\alpha t_f}{2} - \frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right) - \frac{\alpha W_0^* \sin \alpha t_f}{2} \right] \times$$

$$\left[\left(\frac{\alpha t_f}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$V_2 = \left[\alpha W_0^* \left(\frac{\alpha t_f}{2} + \frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right) - \frac{1}{2} \dot{W}_0^* \sin^2 \alpha t_f \right]$$

$$\left[\left(\frac{\alpha t_f}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right)^2 \right]^{-1}$$

Funkcja sterowania jest zatem określona zależnością

$$7.46 \quad V = \left\{ \left[\dot{W}_0^* \left(\frac{\alpha t_f}{2} - \frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right) - \frac{\alpha W_0^* \sin \alpha t_f}{2} \right] \cos \alpha t + \right.$$

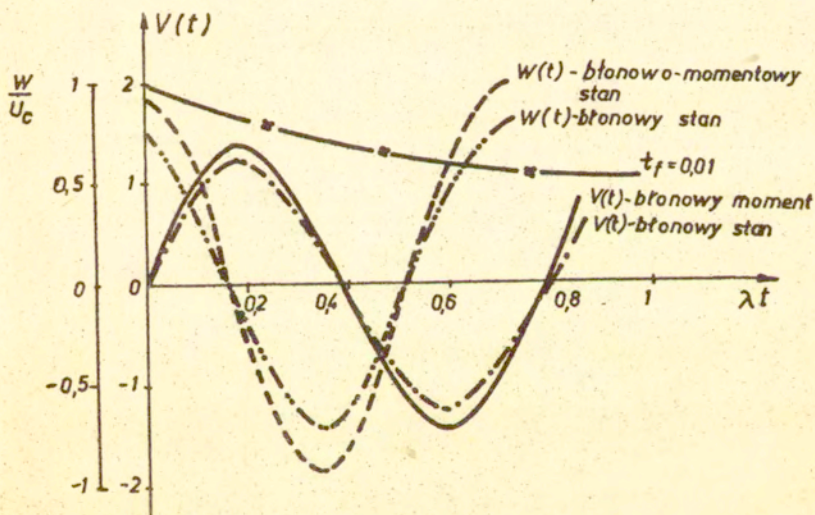
$$\left. \left[\alpha W_0^* \left(\frac{\alpha t_f}{2} + \frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right) - \dot{W}_0^* \frac{\sin^2 \alpha t_f}{2} \right] \sin \alpha t \right\}$$

$$\left\{ \left(\frac{\alpha t_f}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sin 2\alpha t_f}{4\alpha} \right)^2 \right\}^{-1}$$

Minimalizując funkcjonal określony wzorem 2.10 wyznaczamy czas trwania ruchu sterowanego

$$7.47 \quad t_f = \frac{7W_0^* \left(\frac{5(U_c')^2}{65U_c} \right)^{1/2} + \left[7 \left(\frac{5U_c'^2}{65U_c} \right)^{1/2} \cdot (W_0^{*2} + 8W_0'^2) \right]^{1/2}}{2\dot{W}_0^*}$$

Na rys. 15 przedstawiono zależności funkcji ugięcia oraz funkcji sterowania od czasu, wyznaczone dla błonowego oraz błonowo-momentowego stanu naprężenia realizowanego w deformowanej belce.



Rys. 15

7.4. Zastosowanie metody w przykładzie plastycznej płyty kołowej obciążonej impulsem ciśnienia.

Rozważmy ruch płyty kołowej o promieniu R , grubości H , gęstości ρ i momencie uplastyczniającym M_0 .

Założymy, że dla płyty zamocowanej przemieszczenie $W(r, t)$ dane jest zależnością

$$7.48 \quad W(r, t) = W_0(t) \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2$$

Zagadnienie optymalnego sterowania może być w tym przypadku zapisane układem równań

$$7.49 \quad \min J = \min \int_0^{t_f} |V|^2 dt$$

$$7.50 \quad W(r, 0) = W_0 \quad ; \quad \dot{W}(r, 0) = \dot{W}_0$$

$$7.51 \quad W(r, t_f) = \dot{W}(r, t_f) = 0$$

$$7.52 \quad \|V\| < \epsilon$$

$$7.53 \quad \ddot{W}_0(t) + \frac{12}{\lambda} \gamma_0 W_0^2(t) - \frac{12}{\lambda} \gamma_0 - V(t) = 0$$

gdzie: $\gamma_0 = \frac{\gamma}{H} \quad ; \quad \gamma = \frac{J_0}{\rho}$

$$\lambda = \frac{J_0^2 R}{5 M_0 H} \quad ;$$

Stosując metodę linearyzacji do równania (7.53) z warunkami początkowymi (7.50) znajdujemy

$$7.54 \quad W(t) = W_0 \cos \lambda_* t + \frac{W_0 \sin \lambda_* t}{\lambda_*} + \frac{1}{\lambda_*} \int_0^t \left[V - \frac{12\gamma_0}{\lambda} \right] \sin \lambda_* (t-\tau) d\tau$$

Wykorzystując warunki końcowe (7.51) oraz zależności otrzymujemy następujący układ równań

$$7.55 \quad \frac{1}{2} \sin^2 \lambda_* t_f V_1 + \left(\frac{\lambda_* t_f}{2} - \frac{\sin 2\lambda_* t_f}{4\lambda_*} \right) V_2 = A$$

$$\left(\frac{\lambda_* t_f}{2} + \frac{\sin 2\lambda_* t_f}{4\lambda_*} \right) V_1 + \frac{1}{2} \sin^2 \lambda_* t_f V_2 = B$$

Rozwiązując równania (7.55) znajdujemy

$$7.56 \quad v_1 = \Delta_1 \Delta^{-1}, \quad v_2 = \Delta_2 \Delta^{-1}$$

gdzie:

$$A = W_0 - \frac{12\gamma_0}{\lambda} \sin \lambda_* t_f$$

$$B = \lambda_* W_0 + \frac{12\gamma_0}{\lambda} \cos \lambda_* t_f$$

7.57

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \sin^2 \lambda_* t_f & ; & \frac{\lambda_* t_f}{2} - \frac{\sin 2\lambda_* t_f}{4\lambda_*} \\ A & ; & \frac{\lambda_* t_f}{2} - \frac{\sin 2\lambda_* t_f}{4\lambda_*} \\ B & ; & \frac{1}{2} \sin^2 \lambda_* t_f \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \sin^2 \lambda_* t_f & , & A \\ \frac{\lambda_* t_f}{2} + \frac{\sin 2\lambda_* t_f}{4\lambda_*} & ; & B \end{vmatrix}$$

Funkcja sterowania określona jest zatem zależnością

$$7.58 \quad V(t) = \frac{1}{\Delta} (\Delta_1 \cos \lambda_* t + \Delta_2 \sin \lambda_* t)$$

Wykorzystując warunek (7.49) znajdujemy czas trwania ruchu sterowanego płyty

$$7.59 \quad t_f = \frac{\lambda_* (W_0 + 2W_0')}{12\gamma_0 (1 - \lambda_*) + \lambda_*^3 W_0}$$

gdzie:

$$\lambda_*^2 = \frac{10 \gamma_0 U_c'^2}{3 \lambda U_c}$$

Na rys. 16 przedstawiono zależności funkcji ugięcia $w(t)$ od czasu.

Formułując zagadnienie optymalnego sterowania ruchem konstrukcji obciążonej dynamicznie i rozwiązując je metodą 1 momentów należy postępować w następujący sposób:

1. Sformułować równania problemu dla ustalonego modelu konstrukcji;
2. Ustalić wymagany czas trwania procesu sterowania

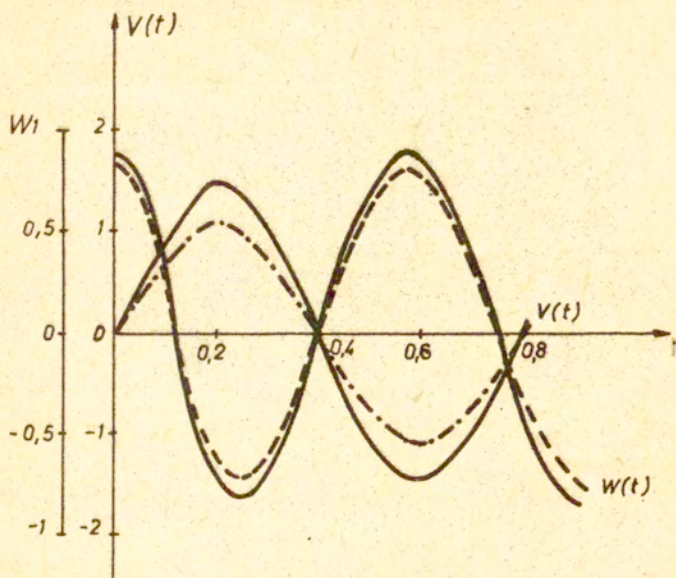
3. Przyjąć warunki początkowe i końcowe;
4. Sformułować zadanie optymalnego sterowania, ustalając funkcje celu;
5. Rozwiązać równania problemu i przekształcić je do postaci ekwiwalentnej zagadnieniu I momentów i wyznaczyć funkcje q_i i a_i ;
6. Sformułować zadanie pomocnicze;
7. Rozwiązać pomocnicze zadanie znajdując funkcję sterowania $V(t)$ oraz ugięcie W .

Należy zauważyć, że rozwiązując zagadnienie metodą praktyczną nie musimy formułować zadania pomocniczego ponieważ postać funkcji sterowania jest zadana wielomianem, w którym wyznaczeniu podlegają współczynniki.

Warto zauważyć, że metoda I momentów jest bardzo dobrym narzędziem do rozwiązywania zagadnień optymalnego sterowania z zerowymi warunkami końcowymi, bowiem w tym przypadku istnieje możliwość otrzymania rozwiązania problemu w analitycznej, zamkniętej postaci. W przypadku gdy warunki końcowe nie są zerowe wówczas metoda I momentów nie zapewnia otrzymania rozwiązania analitycznego, dlatego też należy rozwiązać problem metodą praktyczną. Ponadto należy zauważyć, że metoda praktyczna znajduje zastosowanie w tych przypadkach, gdy znana jest postać funkcji ugięcia rozważanej konstrukcji. W tym przypadku postać funkcji sterowania może być podobna do postaci funkcji ugięcia.

8. Zagadnienie optymalnego sterowania ruchu w dynamicie konstrukcji, jako zagadnienie matematycznego programowania.

Rozważona będzie metoda matematycznego programowania i jej zastosowanie do rozwiązywania zagadnień optymalnego sterowania ruchem konstrukcji obciążanych dynamicznie. Metoda ta pozbawiona jest wad, które związane są z omówionymi uprzednio: metodą I momentów i metodą praktyczną.



Rys. 16.

8.1. Ogólne sformułowanie metody

Sterowany ruch dowolnej konstrukcji obciążonej dynamicznie możemy opisać następującym równaniem

$$8.1 \quad \underline{\dot{W}}(t) = f(\underline{W}, \underline{V}, P, t)$$

W równaniu (8.1) poszczególne wielkości oznaczają

$\dot{W} = \frac{dW}{dt}$ - pochodna względem czasu t ,

V - n wymiarowa wektorowa funkcja sterowania,

W - n wymiarowa wektorowa funkcja stanu,

f - n wymiarowa wektorowa funkcja P, V, t, W

$[t_0; t_f]$ - czas trwania procesu sterowania

Założmy, że w chwili początkowej t_0 obiekt znajduje się w stanie scharakteryzowanym zależnościami

$$8.2 \quad \underline{W}(t_0) = \underline{W}_0 \quad ; \quad \dot{\underline{W}}(t_0) = \dot{\underline{W}}_0$$

Celem jest sprawdzenie obiektu w czasie $[t_f - t_0]$ od stanu początkowego (8.2) do stanu końcowego o parametrach znajdujących się w pewnym, dopuszczalnym obszarze opisanym nierównością

$$8.3 \quad D(\underline{W}(t_f)) \geq 0$$

gdzie D jest funkcją określoną na wektorze stanu, zaś $\underline{W}(t_f)$ - funkcja stanu leżąca wewnątrz lub na granicy obszaru D .

Warunki końcowe możemy określić następującymi zależnościami

$$8.4 \quad \underline{W}(t_f) = \underline{W}^* \quad ; \quad \dot{\underline{W}}(t_f) = \dot{\underline{W}}^*$$

Sterując ruchem obiektu obciążonego dynamicznie, od stanu początkowego (8.2) do stanu końcowego (8.4) należy zapewnić minimalizację funkcjonału

$$8.5 \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \Lambda(\underline{W}, \underline{V}, P, t) dt$$

Jednocześnie, funkcja ugięcia $W(t)$ oraz funkcja sterowania $V(t)$ muszą spełniać następujące warunki ograniczające

$$8.6 \quad W_{\max} - [W_0] \leq 0$$

$$8.7 \quad V_{\max} - [V_0] \leq 0$$

Zagadnienie optymalnego sterowania można sformułować w następujący sposób:

Należy poszukiwać funkcji sterowania V oraz funkcji stanu W spełniających warunki ograniczające (8.6) i (8.7) oraz sprowadzające konstrukcję od stanu początkowego 8.2 do stanu końcowego (8.4) w czasie $[t_0; t_f]$ i zapewniające minimalizację funkcjonału (8.5).

Powyższe sformułowanie może być zapisane następującym układem równań

$$a) \quad J = \min \left(\max \int_{t_0}^{t_f} \Lambda(\underline{W}, \underline{V}, P, t) dt. \right)$$

$$8.8 \quad \dot{\underline{W}} = f(\underline{W}, \underline{V}, P, t)$$

$$c) \quad W_{\max} - [W_0] \leq 0$$

$$d) \quad V_{\max} - [V_0] \leq 0$$

Aby wyjaśnić związek między zagadnieniem optymalnego sterowania ruchem konstrukcji, a problemem matematycznego programowania przekształćmy zależności (8.8).

Czas ruchu sterowanego $[t_0, t_f]$ podzielimy na te części

$$8.9 \quad (t_1 - t_0); (t_2 - t_1) \dots (t_k - t_{k-1})$$

zaś w granicach każdego podprzedziału $[t_k - t_{k-1}]$ określimy

dowolny czas

Funkcjonał (8.8a) zapiszemy w postaci

$$8.10 \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \Lambda(\dots) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^N \Lambda_k(\underline{W}, \underline{V}, P, t) (t_k - t_{k-1}) \right\}$$

Równanie ruchu (8.8b) przekształcimy do postaci

$$8.11 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\underline{W}(t_k) - \underline{W}(t_{k-1})] = f(\underline{W}(t_{k-1}), \underline{V}(t_{k-1}), P; t_{k-1})$$

gdzie: $h = t_k - t_{k-1}$; $K = 1, 2, \dots, N$; $N \rightarrow \infty$

Warunki ograniczające określimy zależnościami

$$8.12 \quad \underline{W}_{\max}(t_k) - [\underline{W}_0] \leq 0$$

$$8.13 \quad \underline{V}_{\max}(t_k) - [\underline{V}_0] \leq 0$$

W ten sposób, zagadnienie optymalnego sterowania ruchem konstrukcji obciążonej dynamicznie sprowadzone zostało do zagadnienia matematycznego programowania wyrażonego następującym układem zależności

$$8.14 \quad J = \min(\max \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \Lambda(\underline{W}(t_{k-1}), \underline{V}(t_{k-1}), P, t_{k-1}) (t_k - t_{k-1}) \right\})$$

$$8.15 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\underline{W}(t_k) - \underline{W}(t_{k-1})] = f[\underline{W}, \underline{V}, P, t_{k-1}]$$

$$8.16 \quad h = t_k - t_{k-1} ; \quad K = 1, 2, \dots, N, \quad N \rightarrow \infty$$

$$8.17 \quad \underline{W}(t_0) = \underline{W}_0, \quad \dot{\underline{W}}(t_0) = \dot{\underline{W}}_0$$

$$8.18 \quad \underline{W}(t_f) = \underline{W}_N^* ; \quad \dot{\underline{W}}(t_f) = \dot{\underline{W}}_N^*$$

$$8.19 \quad \underline{W}(t_{k-1}) - [W_{0i}] \leq 0$$

$$8.20 \quad \underline{V}(t_{k-1}) - [V_{0i}] \leq 0$$

8.2. Zastosowanie metody matematycznego programowania do rozwiązania zagadnień optymalnego sterowania ruchem konstrukcji obciążonych dynamicznie.

8.2.1. Belka obciążona ruchomym ciężarem

Rozważmy zagadnienie optymalnego sterowania ruchem belki obciążonej ruchomym ciężarem P. Ruch belki opiszemy równaniem

$$8.21 \quad \ddot{\varphi} + 2\psi\dot{\varphi} + \gamma^2\varphi = \frac{2P_0}{mL} f(t) \sin \frac{\pi a t}{L} + V(t) \delta(x-\eta)$$

Współczynniki występujące w równaniu (8.21) dane są zależnościami

$$f(t) = (1 + 2\beta \sin \frac{\pi a t}{L})^{-1}$$

$$\psi(t) = \beta \frac{\pi a}{L} \sin \frac{\pi a t}{L} \cdot f(t)$$

$$8.22 \quad \phi(t) = (1 - 2\beta\alpha^2 \sin \frac{\pi a t}{L}) \cdot f'(t)$$

$$\beta = \frac{M}{mL} \quad ; \quad \alpha = \frac{a}{a_{kr}}$$

$$a_{kr} = \frac{l\gamma}{\pi}$$

$$\gamma = \frac{i^2 \pi}{a l^2} \left(\frac{EJ}{m} \right)^{1/2}$$

gdzie:

m - masa ciała ruchomego,

M - masa belki,

EI - sztywność belki,

η - położenie ruchomego ciężaru na belce,

v - prędkość przemieszczenia,

a - prędkość ruchomego ciężaru,

$V(t)$ - funkcja sterowania.

Równanie (8.21) rozwiązujemy spełniając następujące warunki początkowe

$$8.23 \quad \varphi(t_0) = \varphi_0 ; \quad \dot{\varphi}(t_0) = 0.$$

oraz warunki końcowe

$$8.24 \quad \varphi(t_f) = \varphi_N^* ; \quad \dot{\varphi}(t_f) = \dot{\varphi}_N^*$$

Funkcja ugięcia oraz funkcja sterowania spełniają następujące warunki ograniczające

$$8.25 \quad W_{\max} - [W_0] \leq 0$$

$$8.26 \quad V_{\max} - [V_0] \leq 0$$

Ponadto funkcja sterowania musi zapewniać minimum funkcjonalu

$$8.27 \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n |V_i(t)|^2 dt$$

Aby sprowadzić zagadnienie określone układem zależności (8.21 - 8.27) do zagadnienia matematycznego programowania wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\Delta t = \tau ; t_j = j\tau ; j = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$N = t_f \tau^{-1} ; p_k^j, v_k^j$$

8.28

$$\{(t_0 - t_k)\} = \{(t_1 - t_0); (t_2 - t_1) \dots (t_k - t_{k-1})\}$$

$$\underline{v} = \{v_1; v_2; \dots v_n\}$$

Ponadto, dokonamy następującej aproksymacji różnicowej pochodnych czasowych

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j-1}}{2\tau}$$

8.29

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\varphi^{j+1} - 2\varphi^j + \varphi^{j-1}}{\tau^2}$$

Wykorzystując warunek początkowy (8.23) zapiszemy równanie ruchu w następującej postaci różnicowej

$$8.30 \quad \varphi_0^{j+1} - 2\varphi_0^j + \varphi_0^{j-1} - 2\tau [P(t_{j-1})(\varphi_0^{j+1} - \varphi_0^{j-1})] + 2\tau^2 V\phi(t_{j-1})\varphi_0^j =$$

$$2\left[P(t_{j-1})f(t_{j-1})\sin\frac{\pi a t_{j-1}}{l} + V(t_{j-1})\right]\tau^2$$

Różnicowe równanie ruchu dla dowolnego punktu k oraz $j=1$ określone jest zależnością

$$8.31 \quad \varphi_k^2 - 2\varphi_k^1 + \varphi_k^0 - 2\tau[\psi(t_0)(\varphi_k^2 - \varphi_k^0)] + 2\tau^2\dot{\psi}(t_0)\varphi_k^1 = \\ 2\left[P_k^0(t_0)f(t_0)\sin\frac{\pi a t_0}{\ell} + v_k^0\right]$$

Możemy teraz sformułować zagadnienie optymalnego sterowania ruchem belki obciążonej ruchomym ciężarem zapisując następujący układ zależności

$$8.32 \quad J = \min \left[N \cdot e \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m |v_k^j|^2 (t_k - t_{k-1}) \right]$$

$$8.33 \quad A \varphi_k^{j+1} = B^j$$

$$8.34 \quad \varphi_k^N - \varphi_k^* \leq 0$$

$$8.35 \quad \frac{\varphi_k^N - \varphi_k^{N-1}}{2\tau} \leq 0$$

$$8.36 \quad \varphi_{kmax} - [\tilde{\varphi}_0] \leq 0$$

$$8.37 \quad \ddot{\varphi}_0 = 0 ; \quad \varphi(0) = \varphi_0$$

$$8.38 \quad v_{max}^j - [v_0] \leq 0$$

W powyższym układzie równań oznaczono

A - stała

φ_k^{j+1} - wektorowa funkcja φ określona w punkcie k i w chwili $(j+1)$

$B = b_k^j$, zaś dla $j=0$

$$8.39 \quad b_k^0 = \varphi_k^2 = A_1 \varphi_k^1 - \varphi_k^0 + A_2$$

$$A_1 = 2 [\tau^2 \dot{\varphi}^2(t_0) - 1] [1 - 2\psi(t_0) \tau]^{-1}$$

$$A_2 = 2\tau^2 [P_k^0(t_0) + (t_0) \sin \frac{\pi a t_0}{2} + V_k^0]$$

Funkcję sterowania określoną w chwili początkowej $j=0$ oraz w punkcie k wyznaczymy z zależności

$$8.40 \quad V_k^0(t_0) = \left\{ - [2P_k^0(t_0) + (t_0) \sin \frac{\pi a t_0}{2}] + [1 - 2\psi(t_0) \tau] (\varphi_k^2 - \varphi_k^0) + 2 [\tau^2 \dot{\varphi}^2(t_0) - 1] \varphi_k^1 \right\} \cdot \tau^{-2}$$

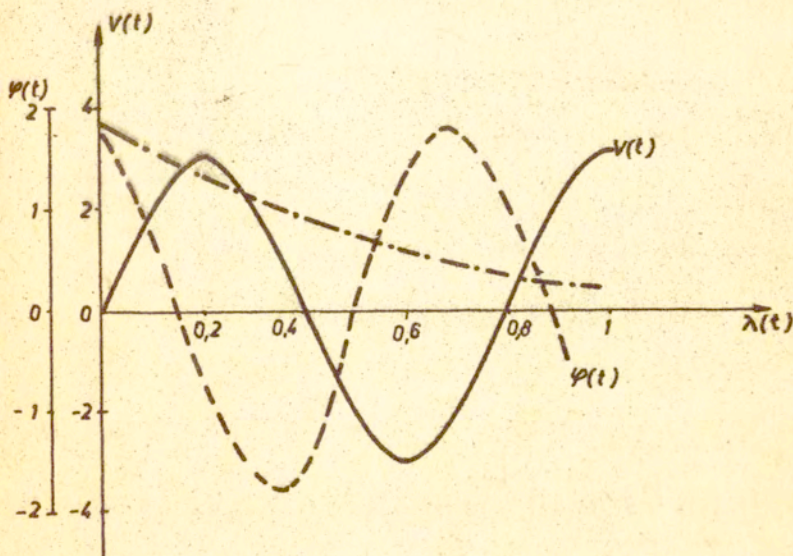
Na rys. 17 przedstawiono wykres funkcji $\varphi(t)$ oraz funkcji sterowania otrzymane dla następujących danych:
 $m=78 \text{ kg}$, $M = 160 \text{ kg}$, $l = 2 \text{ m}$, $t_r = t_f = 0,026 \text{ s}$, $P = P_0 \sin \omega t$
 $P_0 = 10$, $\omega = 1,75$, $t_0 = 0$.

8.2.2. Płyta prostokątna obciążona dynamicznie

Rozwiążemy zagadnienie optymalnego sterowania ruchem płyty obciążonej dynamicznie metodą matematycznego programowania /rys.18/.

Równanie problemu ma w tym przypadku postać

$$8.41 \quad D\Delta W - Sh\ddot{W} + K\dot{W} = \sum_{i=1}^n P_i \delta(x-\xi_i) \delta(y-\eta_i) + \sum_{j=1}^m V_j \delta(x-\xi_j) \delta(y-\eta_j)$$



Rys. 17.

W równaniu 8.41 poszczególne wielkości oznaczają

$W(x, y, t)$ - ugięcie płyty,

ρ - gęstość materiału płyty,

h - grubość płyty,

$P_i(x, y, t)$ - powierzchniowa siła wymuszająca,

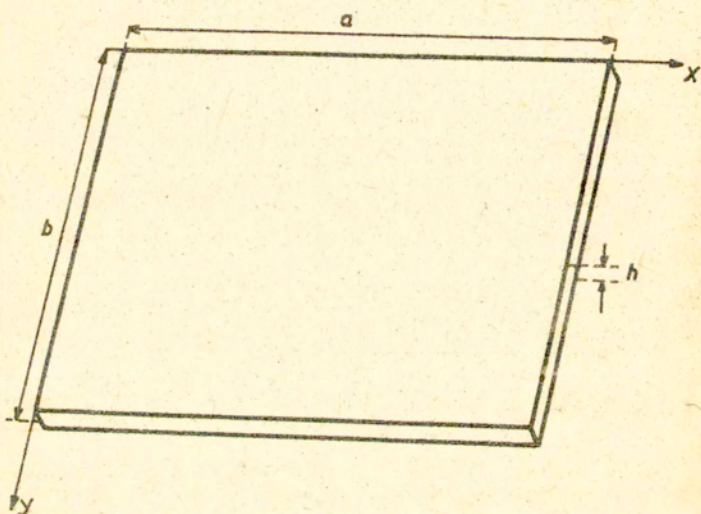
V_1 - funkcja sterowania,

D - sztywność płyty,

E - moduł sprężystości,

ν - liczba Poissona,

k - współczynnik tłumienia.



Rys. 18.

Momenty gnące oraz siły poprzeczne w przekrojach $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ określimy zależnościami

$$\begin{aligned} M_x &= D(W_{,xx} - \nu W_{,yy}) \\ 8.42 \quad M_y &= D(W_{,yy} - \nu W_{,xx}) \\ Q_x &= D(W_{,xxx} + \nu W_{,yyx}) \\ Q_y &= D(W_{,yyy} + \nu W_{,xxy}) \end{aligned}$$

Dla płyty prostokątnej określimy następujące warunki brzegowe

$$\begin{aligned} 8.43 \quad & M_x(0, y, t) = M_x(a, y, t) = 0 \\ & M_y(x, 0, t) = M_y(x, b, t) = 0 \\ & Q_x(0, y, t) = Q_x(a, y, t) = 0 \\ & Q_y(x, 0, t) = Q_y(x, b, t) = 0 \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} 8.44 \quad & W_{,xx}(0, y, t) = W_{,xx}(a, y, t) = 0 \\ & W_{,yy}(x, 0, t) = W_{,yy}(x, b, t) = 0 \\ & W(0, y, t) = W(a, y, t) = 0 \\ & W(x, 0, t) = W(x, b, t) = 0 \end{aligned}$$

Równanie (8.41) z warunkami brzegowymi (8.43) lub (8.44) rozwiążemy przy następujących warunkach początkowych

$$8.45 \quad W(x, y, 0) = \varphi_1(x, y) ; \quad \dot{W}(x, y, 0) = \varphi_2(x, y)$$

oraz przy warunkach końcowych danych zależnościami

$$8.46 \quad W(x, y, t_f) = \tilde{W} ; \quad \dot{W}(x, y, t_f) = \tilde{W}'$$

Zagadnienie optymalnego sterowania ruchem płyty obciążonej dynamicznie można sformułować w następujący sposób:

Należy poszukiwać funkcji sterowania $V(t)$ zapewniającej zmianę stanu ruchu płyty od parametrów określonych zależnościami (8.45) do parametrów określonych zależnościami (8.46) w najkrótszym czasie $t_f = t_{\min}$ oraz spełnienie warunków

$$8.47 \quad J = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^n |V_l(x, y, t)|^2 (t_k - t_{k-1}) \Rightarrow \min$$

$$8.48 \quad \varphi_2 = 0 \quad , \quad \tilde{W} = \tilde{W} = 0$$

$$8.49 \quad W_{\max} \leq [W_0] \quad ; \quad V_{\max} \leq [V_0]$$

Sprowadzając zagadnienie (8.41) - (8.49) do zadania matematycznego programowania wprowadzamy następujące zależności

$$\Delta t = \tau$$

$$a = \lambda(n+1) \quad ; \quad b = \lambda(m+1)$$

$$x \in [0, a] \quad ; \quad y \in [0, b] \quad . \Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$x_k = \lambda n_k \quad ; \quad y_k = \lambda m_k \quad ; \quad t_j = j\tau$$

$$8.50 \quad m_k = 1, 2, \dots, m \quad ; \quad n_k = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 0, 1, \dots, N \quad ; \quad M = m \cdot n \quad ; \quad N = t_f \cdot \tau^{-1}$$

$$k = 1, 2, \dots, M \quad ; \quad \bar{p}_k^j = \alpha p_k^j$$

$$\bar{v}_k^j = \alpha v_k^j \quad ; \quad \alpha = \lambda \cdot D^{-1}$$

gdzie oznaczono:

a, b - rozmiary płyty,

x_k, y_k - współrzędne k -tego węzła siatki przestrzennej,

\bar{p}_k^j, \bar{v}_k^j - siła wymuszająca i sterująca

Rozwiązaniem równania (8.41) dla płyty wolno podpartej jest funkcja

$$8.51 \quad W(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_{0j} \sin \frac{j\pi x}{a} \cdot \sin \frac{j\pi y}{b}$$

Wprowadzimy następujące aproksymacje różnicowe pochodnych czasowych funkcji ugięcia

$$8.52 \quad \dot{W}_{OK} = \frac{\partial W_{OK}}{\partial t} = \frac{W_{OK}^{j+1} - W_{OK}^{j-1}}{2\tau}$$

$$\ddot{W}_{OK} = \frac{\partial^2 W_{OK}}{\partial t^2} = \frac{W_{OK}^{i+1} - 2W_{OK}^i + W_{OK}^{j-1}}{2\tau}$$

Wykorzystując zależności (8.50), (8.51), (8.52) przekształcimy równanie problemu do następującej postaci różnicowej

$$8.53 \quad AW_{OK}^{i+1} = CW_{OK}^0 + BW_{OK}^{-1} + P_K^0(t_0) + V_K^0(t_0)$$

$$8.54 \quad V_K^0(t_0) = AW_{OK}^{i+1} - CW_{OK}^0 - BW_{OK}^{-1} - P_K^0(t_0)$$

Współczynniki występujące w równaniach (8.53), (8.54) dane są zależnościami:

$$8.55 \quad A = Dgh\tau + 2k$$

$$B = 2k - Dgh\tau$$

$$C = 2\tau \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - 2Dgh\tau$$

Zagadnienie optymalnego sterowania ruchem płyty może być sformułowane w języku matematycznego programowania następującym układem zależności

$$8.56 \quad J = [ML \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n |V_k^j|^2 (t_k - t_{k-1})] \Rightarrow \min$$

$$8.57 \quad AW_{OK}^{j+1} = CW_{OK}^0 + BW_{OK}^{-1} + P_k^j(t_0) + V_k^j(t_0)$$

$$8.58 \quad V_k^j(t_0) = AW_{OK}^{j+1} - CW_{OK}^0 - BW_{OK}^{-1} - P_k^j(t_0)$$

$$8.59 \quad W_{k \max} \leq [W_0]$$

$$8.60 \quad V_{k \max} \leq [V_0]$$

$$8.61 \quad W(x, y, 0) = \varphi_1(x, y) \quad ; \quad \dot{\varphi}_2 = 0$$

$$8.62 \quad \tilde{W} = \tilde{W} = 0$$

Na rys. 19 przedstawiono wykresy funkcji W_j oraz V_j otrzymane dla następujących danych:

$$P_k^h = P_0 \sin \theta t \quad , \quad P_0 = 200 \text{ N} \quad , \quad \theta = 1,55 \text{ s}^{-1} \quad , \quad t_f = 0,026$$

$$f = 7,8 \text{ kg/cm}^3 \quad , \quad a = 2 \text{ m} \quad , \quad b = 1 \quad , \quad h = 0,02 \text{ m}$$

$$k = 0 \quad , \quad \nu = 0,3 \quad , \quad E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$m = 3 \quad , \quad n = 5 \quad , \quad M = 12 \quad , \quad N = 10$$

$$[W_0] = 0,27 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad , \quad L = 145,8 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1/2} \quad , \quad P = 2$$

Rozwiązanie zagadnienia metodą matematycznego programowania odbywa się zgodnie z następującym algorytmem:

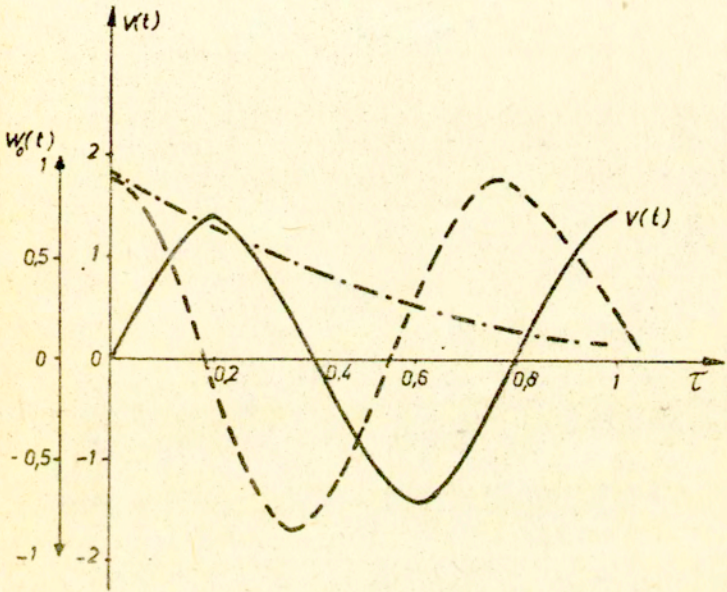
1. Utworzenie współczynników $a_0 = \frac{1}{L^2}$, $a_1 = \frac{1}{2L}$,

2. Wczytanie wektorów początkowych \dot{W}_{OK} , \ddot{W}_{OK} ,

3. Obliczanie współczynników A, B, C,

4. Obliczanie W_{OK}^{j+1} ,

5. Obliczanie wektora sterowania V_k^j ,



Rys. 19.

6. Minimalizowanie funkcjonału J ,
7. Sprawdzanie warunków (8.59) , (8.60)
9. Uwagi końcowe

Na podstawie analizy ruchu sterowanego konstrukcji obciążonych dynamicznie przedstawionej w rozdziałach 1-8 możemy sformułować następujące uwagi natury ogólnej:

1. Problem optymalnego sterowania ruchem konstrukcji obciążonej dynamicznie jest jednym z działów mechaniki ciała deformowanego, którego zadaniem jest poszukiwanie możliwości zabezpieczenia konstrukcji pracujących w trudnych warunkach obciążeń zmiennych w czasie. W badaniach problemu możemy wyróżnić trzy podstawowe etapy:
 - 1/ modelowanie teoretyczne;
 - 2/ modelowanie techniczne;
 - 3/ zastosowania.

W każdym z wymienionych etapów badań kompleksowych należy realizować odmienne zadania, które jednak prowadzą do wspólnego celu jakim jest opracowanie praktycznych metod zabezpieczenia rzeczywistych konstrukcji obciążanych dynamicznie, głównie falą sejsmiczną lub siłami stochastycznymi.

W pracy przedstawiono analizę problemu obejmującą modelowanie teoretyczne badanych zjawisk. Metody analizy teoretycznej obejmują:

- 1/ matematyczne modelowanie obiektu,
 - 2/ matematyczne sformułowanie procesu ruchu obiektu,
 - 3/ wybór kryteriów optymalizacji,
 - 4/ wybór lub opracowanie odpowiednich metod rozwiązania formułowanych zadań,
 - 5/ rozwiązanie problemu.
2. Obiekty rzeczywiste są przestrzennymi tworami materialnymi zbudowanymi z tworzyw odkształcalnych. Są więc układami ciągłymi o nieskończonej liczbie stopni swobody. W prak-

tyce, w większości przypadków można uzyskać dostatecznie dokładne rozwiązanie aproksymując obiekt ciągły układem dyskretnym o ograniczonej liczbie stopni swobody. Najprostszym sposobem dyskretyzacji układu rzeczywistego jest przekształcenie ciągłego pola masowego rozpiętego na strukturze odkształcalnej do postaci dyskretnego pola masowego /granulacja masy/, dyskretyzacja fizyczna/. Inny sposób polega na przekształceniu cząstkowych równań różniczkowych problemu do równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu przy jednoczesnym zachowaniu rzeczywistej, ciągłej struktury pola masowego /dyskretyzacja matematyczna/. W prezentowanej pracy zastosowano drugi z wymienionych sposobów, co pozwoliło na otrzymanie rozwiązań w zamkniętej postaci analitycznej.

3. W problemie optymalnego sterowania ruchem konstrukcji obciążonej dynamicznie, pojęcie "ruch" rozumiemy w sposób uogólniony zawierający przemieszczenie W , deformację lub zmiany naprężeń. Funkcja sterowania $V(x, y, t)$ może być siłą, momentem zewnętrznym, impulsem obciążenia, siłą sprężystą, siłą tłumienia, temperaturą. Odpowiednia postać funkcji sterowania oddziałującej na konstrukcję może spowodować zamierzone zmiany stanu geometrycznego lub fizycznego.
4. Istotnym elementem rozważanego problemu jest ustalenie celu lub celów sterowania co pozwala następnie sformułować kryteria optymalizacji i warunki ograniczające. Jeśli celem sterowania są jednocześnie ugięcia W i naprężenia σ , wówczas należy sformułować warunki ograniczające na obie wielkości. Rozwiązanie takiego zagadnienia jest łatwe w przypadku materiałów sprężystych, natomiast przy odkształceniach plastycznych pojawiają się dodatkowe trudności.

Ogólne sformułowanie zagadnienia przedstawiają następujące zależności:

1/. minimalizacja funkcjonału

$$9.1 \quad J = \int_{t_0}^{t_f} A(W, v, \sigma, P, T, t) dt$$

2/ równanie problemu

$$9.2 \quad \mathcal{L}(W; \sigma; V; P, I; t) = 0$$

3/ warunki początkowe i końcowe

$$9.3 \quad \begin{aligned} W(t_0) = W_0 \quad ; \quad \dot{W}(t_0) = \dot{W}_0 \\ W(t_f) = \dot{W}(t_f) = 0 \quad ; \quad \text{lub} \quad W(t_f) = \tilde{W} \quad ; \quad \dot{W}(t_f) = \tilde{\dot{W}} \end{aligned}$$

4/ warunek plastyczności

$$9.4 \quad \Phi(\sigma_{\alpha\beta}) = 0$$

5/ stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego

$$9.5 \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \lambda \langle \Phi(\sigma_{\alpha\beta}) \rangle \frac{\partial \Phi(\sigma_{\alpha\beta})}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}$$

6/ związki geometryczne

$$9.6 \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{U}_{\alpha,\beta} + \dot{U}_{\beta,\alpha} + \dot{U}_{\alpha,\gamma} U_{\gamma,\beta} + U_{\alpha,\beta} \dot{U}_{\gamma,\beta})$$

7/ warunki ograniczające

$$9.7 \quad W_{max} \leq [W_0]$$

lub

$$9.8 \quad \sigma_{max} \leq [\sigma_0]$$

9.8

oraz

$$9.9 \quad V_{max} \leq [V_0]$$

5. W zadaniach optymalnego sterowania ruchem konstrukcji obciążonej dynamicznie, podobnie jak w zadaniach dynamiki konstrukcji, takie parametry jak obciążenie, warunki brzegowe oraz warunki początkowe mają istotny wpływ na ugięcie, na postać funkcji sterowania i na czas trwania procesu sterowania t_f ;.
6. Wykazano, że zmiany geometryczne oraz zmiany fizyczne /warunki plastyczności/ mają istotny wpływ nie tylko na postać matematycznego sformułowania zagadnienia, ale również na postać funkcji sterowania V , na ugięcie W i czas trwania procesu sterowania $t \in [t_0, t_f]$;.
7. Przedstawiono dwie metody rozwiązania omawianych zagadnień. Metoda 1 momentów jest bardzo dobrym narzędziem do rozwiązywania problemu optymalnego sterowania ruchem konstrukcji. Jednak metoda ta wymaga rozwiązania szeregu dodatkowych zadań, głównie zaś dostosowania również ruchu sterowanego do równań istotnych dla metody 1 momentów. Ponadto, w przypadku gdy warunki końcowe nie są warunkami zerowymi metoda ta jest trudna w sterowaniu. W tym przypadku należy zastosować metodą praktyczną, w której postać funkcji ugięcia jest znana, a wyznaczeniu podlegają jedynie nieznanne współczynniki występujące w tej funkcji.
8. Jak wspomniano w p. 1 badanie problemu optymalnego sterowania ruchem konstrukcji obciążonej dynamicznie może być realizowane w trzech płaszczyznach: modelowania matematycznego, modelowania technicznego i zastosowań. W zagadnieniach drugiej i trzeciej grupy należy formułować kryteria dotyczące możliwości technicznych, technologicznych, efektywności oraz ekonomiczności.
9. Problem optymalnego sterowania ruchem konstrukcji rozwiązywany kompleksowo od prognoz teoretycznych poprzez badania laboratoryjne do badań wdrożeniowych ma istotne znaczenie praktyczne bowiem może umożliwić zabezpieczenie konstrukcji np. obiektów podziemnych i naziemnych narażonych na obciążenia sejsmiczne lub stochastyczne /ruch pojazdów/

przed ich zniszczeniem.

SPIS TREŚCI

	str
1. Wprowadzenie i cel pracy	3
2. Klasyfikacja zagadnień i metod analizy problemów sterowania ruchem ciała deformowal- nego.	6
3. Sformułowanie problemu	8
3.1. Techniczny sens problemu optymalnego sterowania	8
3.2. Matematyczne sformułowanie zagadnienia optymalnego sterowania ruchu w nieliniowej dynamice konstrukcji	11
4. Metody przybliżone rozwiązywania nieliniowych równań ruchu.	17
4.1. Metoda zmiany współczynników	17
4.2. Metoda linearyzacji	21
5. Metoda 1 momentów	22
5.1. Sens metody	22
5.2. Sformułowanie metody	23
6. Zastosowania metody 1 momentów w zagadnieniach optymalnego sterowania ruchu konstrukcji obciążonych dynamicznie.	28
6.1. Powłoka walcowa obciążona falą sejsmiczną	28
6.2. Plastikzna powłoka obciążona impulsem ciśnienia.	45
6.2.1. Warunek plastyczności Dracker'a - błonowy stan naprężeń	47
6.2.2. Warunek plastyczności Dracker'a - błonowo-momentowy stan naprężenia	52
6.2.3. Warunek plastyczności Hubera-Misesa	56
7. Praktyczna metoda określania funkcji optymalnego sterowania.	62
7.1. Opis metody	62

7.2.	Zastosowanie metody w przykładzie belki sprężystej obciążonej ruchomą siłą dynamiczną.	65
7.3.	Zastosowanie metody w przykładzie belki plastycznej obciążonej impulsem ciśnienia	72
7.3.1.	Błonowy stan naprężenia.	73
7.3.2.	Błonowo-momentowy stan naprężenia	75
7.4.	Zastosowanie metody w przykładzie plastycznej płyty kołowej obciążonej impulsem ciśnienia.	79
8.	Zagadnienie optymalnego sterowania ruchu w dynamice konstrukcji, jako zagadnienia matematycznego programowania.	82
8.1.	Ogólne sformułowanie problemu.	83
8.2.	Zastosowanie metody matematycznego programowania do rozwiązywania zagadnień optymalnego sterowania ruchem konstrukcji obciążanych dynamicznie.	87
8.2.1.	Belka obciążona siłą ruchomą	87
8.2.2.	Płyta prostokątna obciążona dynamicznie.	91
9.	Uwagi końcowe.	98
10.	Spis treści.	101
11.	Literatura.	104

Literatura

- 1 A.Sawczuk.: Large deflection of rigid-plastic plates
proc 11-th Congress of App.Mech.Munich 1964.
- 2 A.Sawczuk.: On formulation of large deflection theory
for perfectly plastic shell App.Mech.Varna 1969.
- 3 A.Sawczuk., P.G.Hogde.: Comparison of yield Conditions
for circular Cylindrical Shell I, Franklin Ins. 1960.
- 4 A.Sawczuk., M.Duszek.: O związkach podstawowych teorii
powłok plastycznych, Rozpr.Inż. 18.4. 1970.
- 5 A.Sawczuk and Jaeger.: Th.Grenztragfähigkeits-theorie
der platten Springer, Berlin 1963.
- 6 J.Lellep., A.Sawczuk.: Optimal project of a Cylindrical
Shell for moderately large deflections IUTAM 1980.
- 7 M.Duszek.: Plastic analysis of Cylindrical Shell
Subjected to large deflection Arch.Mech. 5.18. 1966.
- 8 M.Duszek.: Equation of the theory of large deflections
of rigid - plastic shell in polish IFTR 13/1971.
- 9 M.Duszek.: Plastic analysis of shallow spherical shell
at moderately large deflections, Proc. IUTAM Symp.
Copenhagen 1967.
- 10 N.Jones.: A theoretical study of dynamic plastic
behaviour of beam and plates with finite deflection
Inter.I.Sol.Struct. vol.7 1971.
- 11 T.Wierzbicki.: Bound on large deformation of structure
in Eng Mech. div v.96. 1970.
- 12 T.Wierzbicki.: Liniowa teoria lepkoplastycznych
konstrukcji 29/1971. Praca IPPT.
- 13 T.Wierzbicki.: Wariacyjna metoda oszacowa ugięć
dynamicznie obciążonych konstrukcji. Praca IPPT 2/1971.
- 14 W.Wojewódzki.: Dynamic buckling of a visco-plastic
Cylindrical Shell Subjected to axial Impact Arch.Mech.
1.23. 1971.

- 15 P.Perzyna.:The Constitutive equations for work-hardening and rate Sensitive plastic materials, Proc.Vibr.prob. 4.1963.
- 16 Z.Mróz.: On optimal porce action and reaction on Structures, IUTAM. 1980.
- 17 Z.Mróz and Rozwany, G.I.N.: "Optimal design of structures with variable Support Graditions".I.opt.theory and Appl. vol. 15. 1975.
- 18 D.Szelag and Z.Mróz.: "Optimal design of Elastic-beams with Unspecified Support Conditions". ZAMM vol.56, 1978.
- 19 E.F.Masur and Z.Mróz.: "On Non-Stationary optimality conditions in structural Design". Int.J.Solids Struct. 1979.
- 20 M.Abdel-Rohman and H.H.E.Leipholz.: A General approach to active structural Control" IUTAM 1980.
- 21 M.Abdel-Rohman and H.H.E.Leipholz.: "Automatic active control of structures".IUTAM 1980.
- 22 W.Olszak and A.Sawczuk.:Inelastic behaviour in shells Noordhoff International Publishers, Groningen the Netherlands, 1967.
- 23 A.E.Bryson.: Jr and Ho Y-C; Applied optimal Control, Elaisdell, Waltham 1969.
- 24 U.Lepik and J.Lellep.: "Foudations of the optimal Control theory" /in Russian/ Tartu University Press, Tartu Estonia USSR 1978.
- 25 D.J.Bell and Jacobson D.H.: Singular optimal Control problems, Academic Press. New York 1975.
- 26 U.Lepik.: Application of the Control theory for optimal design of nonelastic beams Under dynamic loading IUTAM, 1980.

- 27 U.Lepik.: "Optimal design of beams with minimum Compliance" Int.J.Non linear Mechanics, 13. 1978.
- 28 W.Prager and G.I.N.Rozvany.: "Plastic design of beams i optimal locations of supports and steps in yield moment," Int.J.Mech.Sci. 17, 1975.
- 29 J.B.Martin.: A displacement bound technique for elastic Continua Subjected to a certain class of dynamic loading. I Mech.Phys.Solid. 12, 1964.
- 30 J.B.Martin.: Impulsive loading theorems for rigid plastic continua. J.Eng.Mech.Div.proc.ASCE 90 1964.
- 31 P.G.Hodge.: The Mises yield condition for rotationally Symmetric Shells. Appl.Math. 18-1961.
- 32 P.G.Hodge.: Impact pressur loading of rigid-plastic Cylindrical Shell". J of the Mech-phys of Solids. 3. 176, 1955.
- 33 L.S.Pontragin.: "Matematyczna teoria optymalnych procesów" /in Russian/ Nauka 1969.
- 34 B.P.Tamusz.: "O jednej minimalnej zasadzie dynamiki sztywno-plastycznego ciała". /in Russian/ Zastosowanie Mat.-Mech. 26-1962.
- 35 A.A.Agragew., P.B.Gamkreligze.: "Zasada optymalizacji drugiego stopnia dla zadania szybko oddziaływania" /in Russian/ Matem.zbior. 1976.
- 36 L.T.Aszekow.: "Zasada maximum A.S.Pontragina i nieliniowe programowanie" /in Russian/ Mińsk Nauka-Technika 1981.
- 37 M.Agans., M-Fal.: "Optymalne sterowanie" /in Russian/ Maszyno-budowa 1968.
- 38 A.G.Butkowski.: "Metody sterowania układu rozdzielonych parametrów" /in Russian/ M.Nauka 1975.
- 39 B.A.Berezowski., A.B.Gnedin.: "Zadanie najlepszego wyboru" /in Russian/ M.Nauka - 1984.

- 40 C.T.Chon., P.S.Symonds.: Large dynamic deflection of plates by mode method. I of Eng.Mech div proc.ASCE 103 MI 1977.
- 41 P.S.Symonds., T.Wierzbicki.: On an extremum principle for mode from solution in plastic Structural dynamics. I Appl.Mech. 42.3. 1975.
- 42 S.Kaliszky.: Large deformations of rigid-viscoplastic Structures under Impulsive and pressure loading. I Struct Mech. 1.3. 1973.
- 43 Cao van Phuong.: Duże ugięcia sztywno-plastycznych walcowych powłok poddanych impulsowemu ciśnieniu. Praca IPPT 43/1984.
- 44 Cao van Phuong.: "Metoda linearyzacji w nieliniowej dynamice plastycznych ciałach". Praca IPPT 38/1985.
- 45 Cao van Phuong.: "Sztywno-plastyczna powłoka poddana złożonym dynamicznym ciśnieniom przy dużych ugięciach". Praca IPPT 38/1985.
- 46 Cao van Phuong.: "Drganie mostów obciążonych dynamicznymi oddziaływaniami" /in Russian/ Praca TASZGU 6/1967.
- 47 Cao van Phuong.: "Belka obciążona ruchomym ciężarem". In Vietnam Hanoi czasopismo Mech. no.1 1969.
- 48 I.A.Karnowski.: Stabilization of the motion of a cylindrical panel. Mech.New York 1974.
- 49 J.A.König .: Design of elastic plastic structures at variable loading IFTP 13/71.
- 50 C.R.Martin and T.T.Soong.: "Model Control of multistory Structures". ASCE J.of the Eng.Mech.Division vol. 104 No EM 4 Proc.Paper 12321. August 1976.
- 51 V.H.Quintana.: "Some Numerical method for Solving optimal Control problems" ph D.Thesis University of Toronto, Qotaria, Canada 1970.

- 52 E.A.Ovung.: Dynamic of farmawork by continuous mass Method" J.of Computer and Structures vol.4 1974.
- 53 W.Nowacki.: Dynamika Budowli. Warszawa 1961.
54. W.Nowacki.: Dynamic problems of thermoelasticity. Warszawa 1975.
- 55 W.K.Nowacki.: Analysis methods for nonlinear-behavior of Solids. 1982.
- 56 W.K.Nowacki.: Program propagacji odbicia płaskich i kulistych fal termo-sprężysto-lepko-plastycznych. Praca doktorska 1965.
- 57 W.K.Nowacki.: Zagadnienia falowe w teorii plastyczności. 1974.
- 58 W.Gutkowski.,W.Nowacki.,Cz.Woźniak.: Dźwigary powierzchniowe. 1975.
- 59 M.Kleiber.: Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice continuum. Warszawa, 1985.
- 60 M.Kleiber.: Variational formulation in finite-deformation elastoplasticity with large increments and discontinuous fields. Konf.IUTAM. "Variational methods in nonlinear mechanics"; Chicago 1978.
- 61 O.C.Zienkiewicz.,S.Valliapan.,I.P.King.:Elasto-plastic Solutions of engineering problems Initial-stress finite element approach Int.J.Num.Meths Eng. 1.75-100. 1969.

Summary

Methods of optimum control of motion in nonlinear dynamics of structures are presented in the paper. Effects of geometric changes upon the control parameter and duration of the process are also considered, together with the practical methods of evaluation of the control parameter. Another problem which is dealt with in the paper concerns the evaluation of certain selected physical models on the control function and on the time of duration of the process.