

33/1980

Wojciech Potkański

OBCIĄŻENIA AERODYNAMICZNE
ODKSZTAŁCALNEGO DWUPLĄTA
W PRZEPLYWIE POTENCJALNYM

P. 269a



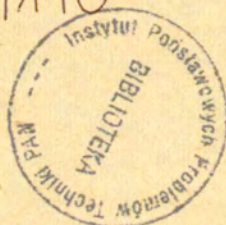
WARSZAWA 1980

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 lipca 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 33/1980

57140



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 4 . Ark. druk. 6 .

Odana do drukarni w sierpniu 1980 r.

Nr zamówienia 588/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Wojciech Potkański
Ośrodek Badawczo-Rozwojowy
Sprzętu Komunikacyjnego PZL Mielec

OBCIĄŻENIA AERODYNAMICZNE ODKSZTAŁCALNEGO DWUPŁATA
W PRZEPŁYWIE POTENCJALNYM^{x/}

1. Uwagi wstępne

Układ dwupłata był powszechnie stosowany w początkowym okresie rozwoju lotnictwa. Mimo swej złożoności pozwalał zapewnić odpowiednią wytrzymałość samolotów przy ograniczonej, ze względu na możliwości ówczesnych zespołów napędowych, masie konstrukcji. Z tego też powodu dwupłaty przez szereg lat przeważały ilościowo nad jednopłatami. Pojawiło się wtedy szereg prac teoretycznych dotyczących dwupłatów, w tym także z dziedziny aerodynamiki. Stosowane proste modele obliczeniowe były odzwierciedleniem stanu teorii aerodynamicznych i możliwości obliczeniowych istniejących w tym czasie.

Wzrost prędkości samolotów spowodował spadek zainteresowania dwupłatami. W latach trzydziestych rozpoczęła się dominacja jednopłatów, trwająca do chwili obecnej. Dwupłaty są jednak nadal stosowane w lotnictwie sportowym / samoloty akrobacyjne /, gospodarczym / samoloty rolnicze / i transportowym.

W ostatnich latach pojawiło się ponowne zainteresowanie dwupłatami. Przeprowadzone analizy wykazały możliwości uzyskania korzystnych efektów ekonomicznych przy zastosowaniu dwupłatów w ciężkim transporcie lotniczym. Powstały także modyfikacje produkowanych od szeregu lat dwupłatów.

Całkowicie nową konstrukcją jest PZL M-15 "Belfegor", dwupłat z napędem odrzutowym, przeznaczony do prac w rolnictwie. Przy projektowaniu tego samolotu pojawiło się szereg nowych zagadnień, między innymi, z dziedziny aerodynamiki, mechaniki lotu oraz aeroelastyczności. Problem wyznaczenia równowagi w locie swobodnym oraz obciążeń zewnętrznych dwupłata zapoczątkował ba-

x/
Praca doktorska wykonana i obroniona w ZMCiG IPPT

dania interferencji aerodynamicznej.

Niniejsza praca stanowi kontynuację tych badań i ujmuje pewne zagadnienia aerodynamiki elastycznego dwupłata. Przedmiotem pracy jest wpływ interferencji i odkształcalności dwupłata na siły aerodynamiczne a w konsekwencji na warunki równowagi. W odróżnieniu od podobnych zagadnień dla pojedynczych płatów, które naogół prowadzą do liniowych modeli obliczeniowych, dla dwupłata konieczne jest stosowanie modeli nieliniowych. Niemożliwe staje się w tym przypadku superponowanie rozwiązań szczególnych wykorzystywanych powszechnie przy badaniu opływu pojedynczych płatów.

Rozpatrywane zagadnienia można sformułować w postaci następujących pytań:

- a/. Jaki jest wpływ oddziaływania płatów na wielkości i rozkłady sił aerodynamicznych?
- b/. Jaki jest wpływ odkształcalności na siły aerodynamiczne działające na dwupłat?
- c/. Jak zmieniają się te siły przy zmianach prędkości przepływu?
- d/. Jaki wpływ ma interferencja aerodynamiczna i odkształcalność na warunki równowagi dwupłata?

Celem pracy jest uzyskanie odpowiedzi na te pytania.

Rozpatrywane będą obciążenia zewnętrzne swobodnego, odkształcalnego dwupłata w warunkach równowagi statycznej. Dominującą część tych obciążeń stanowią siły aerodynamiczne prostopadłe do kierunku przepływu niezaburzonego / siły nośne płatów /. Siły styczne / siły oporu płatów / są naogół znacznie mniejsze od sił nośnych a ponadto nie wpływają zasadniczo na wielkości odkształceń powierzchni nośnych. Na dwupłat działają także, małe w porównaniu z obciążeniami płatów siły przyłożone do usterzenia i kadłuba.

Omówiony w rozdziale trzecim, obliczeniowy model dwupłata, został zbudowany przy założeniu, że siły oporu oraz siły działające na kadłub i usterzenie nie wpływają na obciążenia / siły nośne / płatów.

Zakłada się ponadto, że wielkości tych sił są tak dobrane aby zachodziła równowaga dwupłata w symetrycznym locie ustalonym. Oznacza to, że równania równowagi / za wyjątkiem równania równowagi sił normalnych do kierunku przepływu niezaburzonego / są

zawsze spełnione niezależnie od wielkości obciążeń płatów.

Przyjęte założenia pozwalają ograniczyć analizy wyłącznie do badania współzależności między dominującymi w obciążeniach siłami nośnymi i deformacjami płatów.

Zbudowany w ten sposób model dwupłata, składający się z dwóch odkształcalnych powierzchni nośnych / płatów /, jest uproszczeniem rzeczywistej konstrukcji. Zawiera jednak wszystkie charakterystyczne cechy aerodynamiczne i sztywnościowe dwupłata. Wychodząc z założenia, że zadane są związki między zaburzeniami przepływu jednorodnego a siłami aerodynamicznymi na powierzchniach płatów / operator aerodynamiczny / oraz między siłami a odkształceniami / operator odkształceń /, wyprowadzony został układ równań opisujący badane zjawiska. Układ ten powstał przez sformułowanie warunków brzegowych dla równań opisujących opływ powierzchni nośnych oraz warunków równowagi sił działających na dwupłat. Mimo linearyzacji opływu w otoczeniu każdego z płatów uzyskane równania są nieliniowe. Wynika to z faktu, że zaburzenia prędkości wywołane drugim płatem mają nie tylko składowe prostopadłe do kierunku przepływu niezaburzonego lecz także nie pomijalnie małe składowe styczne.

W rozdziale czwartym określone są w jawnej postaci operatory aerodynamiczne i operatory odkształceń. Przy wykorzystaniu założeń o potencjalności przepływu oraz założenia liniowej sprężystości konstrukcji wyznaczone są jądra tych operatorów. Wykonana jest ponadto aproksymacja całkowych równań równowagi dwupłata, prowadząca do układu nieliniowych równań algebraicznych. Zastosowana w tym celu metoda, oparta na aerodynamicznym modelu wielu linii nośnych oraz belkowym modelu sztywnościowym, zapewnia uwzględnienie wszystkich istotnych efektów wzajemnego oddziaływania płatów / przestrzenna zmienność zaburzeń prędkości, rozkłady momentów skręcających, sztywnościowe powiązania płatów/.

W rozdziale piątym sformułowana jest iteracyjna metoda rozwiązywania nieliniowych równań równowagi. Dla układu odkształcalnego istnieją pewne zakresy prędkości lotu, przy których metoda przestaje być zbieżna. Odpowiadają one otoczeniom prędkości krytycznych rozbieżności skrętnej / dywergencji / układu zlinearyzowanego / opisanego równaniami liniowymi /. Dla przebadania

tych zakresów prędkości opracowana została przybliżona metoda obliczeń, pozwalająca na analizę nieliniowej dywergencji. Własności aerodynamiczne i aeroelastyczne dwupłata zilustrowane są przykładowymi wynikami obliczeń. W porównaniu z rezultatami analiz prowadzonych bez uwzględnienia interferencji, stwierdzono zmiany rozkładów sił aerodynamicznych na płatach pogarszające podstawowe / w zagadnieniach mechaniki lotu / charakterystyki dwupłata. Na skutek nieliniowości zagadnienia występuje także nieklasyczna "dywergencja dwupłata", przy której deformacje powierzchni nośnych są ograniczone. Możliwe są przy tym równocześnie dwie różne postacie deformacji, przy których energie odkształceń sprężystych są jednakowe.

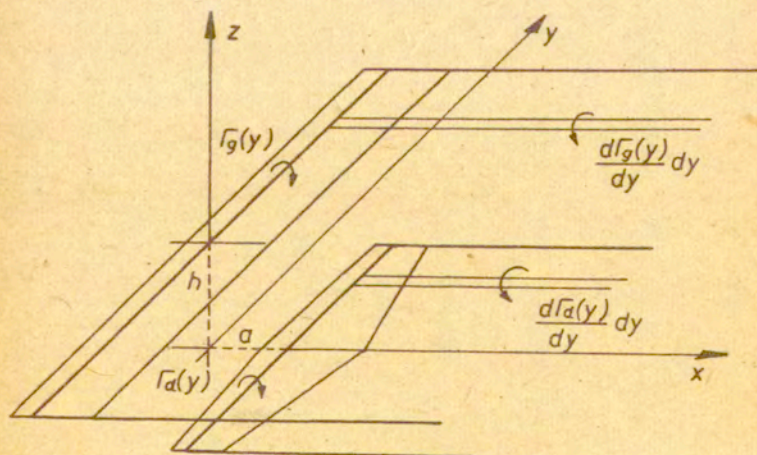
Taki stan równowagi może być przyjęty jako definicja "dywergencji dwupłata".

Końcowa część pracy / rozdział szósty / zawiera ogólne wnioski oraz podsumowanie uzyskanych wyników. Omówione są także możliwości rozbudowy modelu obliczeniowego dwupłata.

2. Przegląd literatury związanej z tematem

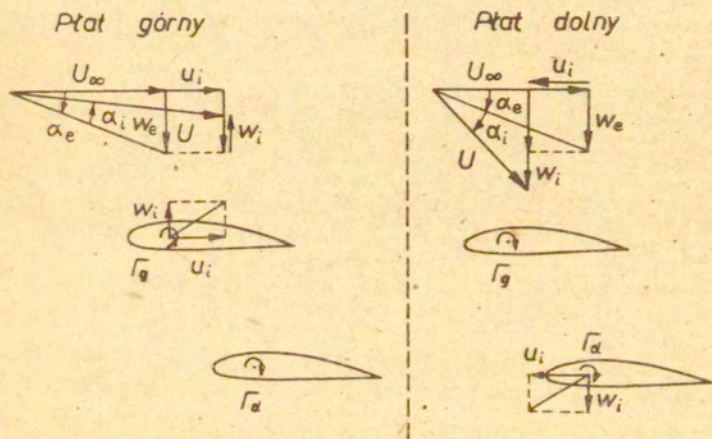
Aerodynamika dwupłata była przedmiotem badań teoretycznych i eksperymentalnych od początku istnienia lotnictwa. Rozwój teorii aerodynamicznych oraz metod obliczeniowych i doświadczalnych uwidacznia się w kolejnych chronologicznie pracach poprzez stosowanie w badaniach coraz bardziej złożonych modeli dwupłatów.

Jedną z najwcześniejszych jest praca A. Betz'a [1] z 1914 roku, w której podana jest metoda uwzględnienia interferencji przy określaniu współczynników aerodynamicznych dwupłatów. Zastosowany jest model obliczeniowy, w którym płaty zastąpione są pojedynczymi wirami podkowiatymi. Oddziaływanie płatów uwzględnione jest przez zmianę kąta natarcia na liniach wirowych, wywołaną indukowanymi wzajemnie przez te wiry prędkościami / uśrednionymi wzdłuż rozpiętości /: Daleko idące założenia upraszczające ograniczają zastosowanie metody Betz'a wyłącznie do przybliżonego określenia podstawowych współczynników aerodynamicznych dwupłata:



Rys. 2.1

Rozwój teorii powierzchni nośnych pozwolił na istotne udoskonalenie modelu obliczeniowego w pracy Kűchemanna [2] z 1937 roku. W oparciu o koncepcję linii nośnej Prandtla utworzony został obliczeniowy model dwupłata, w którym powierzchnie nośne zastąpione są prostymi liniami wirowymi umieszczonymi w $1/4$ cięciw płatów / rysunek 2.1 /. W warunku brzegowym, spełnionym na liniach wirowych, uwzględniono prędkości indukowane przez układ wirowy / wir związany i wiry swobodne / rozpatrywanego płata w_e oraz prędkości indukowane przez układ wirowy sąsiedniego płata u_i i w_i . Powoduje to zmiany efektywnych kątów natarcia płatów / kąty α_e oraz α_i na rysunku 2.2 /.



Rys. 2.2

W sposób przybliżony uwzględniono także zmienność wzdłuż cięciw indukowanej składowej normalnej prędkości w_i przez wprowadzenie uśrednionego "wygięcia linii prądu". W zaproponowanym przez Kűchemanna ujęciu jest to równoważne zmianie wysklepienia profilu a tym samym zmianie efektywnego kąta natarcia, wywołanej odchyleniem linii zerowej siły nośnej o kąt

$$\Delta\alpha = \frac{c}{2U_\infty} \left. \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \right|_{x=\frac{c}{2}}$$

gdzie:

$\Delta\alpha$ - zmiana kąta natarcia płata,

$2c$ - cięciwa płata,

U_∞ - prędkość przepływu niezaburzonego.

Model ten pozwala wyznaczyć dla określonego kąta natarcia dwupłata rozkłady cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płatów. W pracy Kùchemanna zaproponowane jest uogólnienie modelu, polegające na zastąpieniu każdego płata dwoma liniami wirowymi.

Zainteresowanie dwupłatami zmniejszyło się pod koniec lat trzydziestych i całkowicie ustało w następnych latach. Nie podejmowano w tym czasie także prac teoretycznych z dziedziny aerodynamiki tego typu układów.

Ponowne zainteresowanie dwupłatami w latach siedemdziesiątych oraz wykorzystanie maszyn cyfrowych, pozwoliło na dalsze udoskonalenia modeli obliczeniowych. W oparciu o koncepcję Kùchemanna w pracy Demczuka i Potkańskiego [3] z 1975 roku zastosowano do obliczeń charakterystyk aerodynamicznych dwupłata założenia metody uogólnionej linii nośnej [4]. Ze względu na aplikacyjny charakter pracy wprowadzone są poprawki uwzględniające eksperymentalne charakterystyki profilowe. Zaproponowany jest także, bez uzasadnienia teoretycznego, uproszczony sposób uwzględnienia oddziaływania kadłuba i gondol. Podobnie jak w [2] metoda pozwala określić rozkłady cyrkulacji wzdłuż rozpiętości płatów przy zadanej wartości kąta natarcia dwupłata.

Metody oparte na koncepcji pojedynczej linii nośnej pozwalają wyznaczyć wyłącznie rozkłady sił wypadkowych wzdłuż rozpiętości płatów. Dokładność tych metod, szczególnie dla płatów z profilami wysklepionymi jest trudna do oszacowania. Ponadto metody te nie pozwalają na wyznaczenie rozkładów momentów skręcających wzdłuż rozpiętości co jest niezbędne przy określaniu zmian kątów natarcia wynikających z odkształceń płatów.

Odrębną grupę stanowią prace teoretyczne, w których dwupłat traktowany jest dwuwymiarowo. W najnowszych pracach Prosnaka [5] oraz Prosnaka i Klonowskiej [6], metodami odwzorowania konforemnego, określone są rozkłady ciśnień na profilach oraz współczynniki aerodynamiczne. Metody te mogą być wykorzystane przy doborze profili płatów i wstępnym określeniu ich wzajemnego położenia.

Zagadnienia doboru profili dwupłata, minimalizujących opór przy spełnieniu wymaganych własności układu dla warunków przelotowych, rozpatrywane są w pracy Addomsa i Spaida [7]. Porównywano modelowy dwupłat i jednopłat o jednakowych ciężarach startowych, zespołach napędowych i oporach szkodliwych elementów nie-nośnych / kadłub, usterzenie, podwozie /. Stwierdzono, że dla dwupłata:

- ciężar płatów łącznie z usztywnieniami wynosi ok. 60 % ciężaru pojedynczego płata / jednopłata /,
- usztywnienia mogą być usytuowane wzdłuż przepływu i uproszczone tak, że ich opór szkodliwy jest mały.

Stwierdzono ponadto, że:

- dwupłat ma lepsze charakterystyki manewrowe przy małych prędkościach oraz krótsze starty i lądowania od jednopłata,
- dwupłat ma większy udźwig handlowy przy niewiele mniejszej od jednopłata prędkości przelotowej.

Wyniki te wskazują na przydatność odpowiednio / optymalnie / zaprojektowanych dwupłatów w transporcie lotniczym.

Systematyczne badania eksperymentalne dwupłatów [8],[9],[10] prowadzone były w latach dwudziestych i trzydziestych. Obejmowały pomiary współczynników aerodynamicznych oraz rozkładów ciśnień na płatach w szerokim zakresie zmienności parametrów geometrycznych dwupłatów.

Z nowszych prac eksperymentalnych interesująca jest praca Olsona i Selberga [11], której celem było uzyskanie odpowiedzi czy dwupłat może być bardziej efektywny aerodynamicznie od jednopłata o tej samej powierzchni i podobnym wydłużeniu. Badano trójwymiarowy model, w którym zmieniono wzajemne położenia płatów w celu określenia wpływu tych zmian na siłę nośną, opór aerodynamiczny i moment pochylający. Dla najkorzystniejszej konfiguracji dwupłata stwierdzono wzrost doskonałości aerodynamicznej o 16,3 % i spadek oporu przy $C_z = 0.175$ o 14,3 % a przy $C_{z_{max}}$ o 10,6 %. Stwierdzono także zauważalną, w porównaniu z jednopłatem, poprawę / ze względu na stateczność / przebiegu krzywej momentu pochylającego.

Wyniki badań dwupłata z klapami i slotem zawarte są w pracy Stasiaka [12]: Celem eksperymentów było wyznaczenie wpływu kłapy na współczynniki aerodynamiczne dwupłata oraz określenie

najkorzystniejszego umiejscowienia kłapy. Stwierdzono, że najlepsze efekty / najmniejsze spadki siły nośnej w porównaniu z jednopłatem / można uzyskać przy zastosowaniu kłap na obu płatach lub przy zmniejszeniu cięciwy płata dolnego, dla kłapy umieszczonej na płacie górnym.

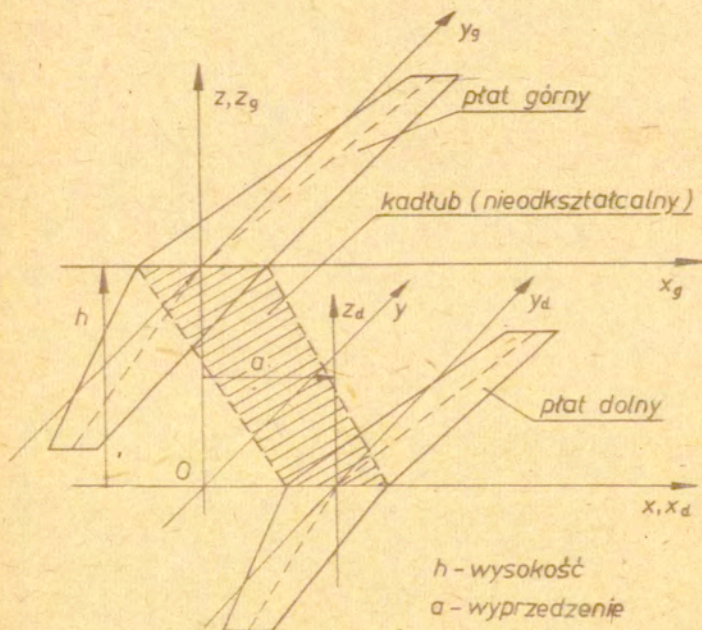
W dostępnej literaturze nie znaleziono pozycji dotyczących wpływu odkształcalności na charakterystyki aerodynamiczne dwupłata. Znane metody analizy aeroelastyczności statycznej [13+17] nie mogą być bezpośrednio wykorzystane w tym przypadku ze względu na nieliniowość zagadnienia.

Także dla jednopłatów problematyka aeroelastyczności statycznej nie jest jeszcze wyczerpana. Pojawiają się nowe zagadnienia stabilności statycznej / dywergencji / dla nieklasycznych układów takich jak latające skrzydło lub ukośny płat / Oblique Wing / o zmiennym położeniu względem kadłuba [18+22] .

3. Sformułowanie zagadnienia

3.1 Model obliczeniowy dwupłata

W prostokątnym, prawoskrętnym, globalnym układzie współrzędnych O, x, y, z / rysunek 3.1 / znajdują się dwie, nieskończenie cienkie, odkształcalne, powierzchnie nośne / płyty /, połączone w płaszczyźnie symetrii $y=0$ / nieodkształcalnym elementem /kadłubem dwupłata /.



Rys. 3.1

Z płytami związane są lokalne układy współrzędnych x_g, y_g, z_g i x_d, y_d, z_d , których początki znajdują się w połowie cięciw cen-

tralnych.

Układy wybrane są w ten sposób, że współrzędne punktów mierzone w układach lokalnych transformują się do układu globalnego według zależności:

$$x = x_g; \quad y = y_g; \quad z = z_g + h;$$

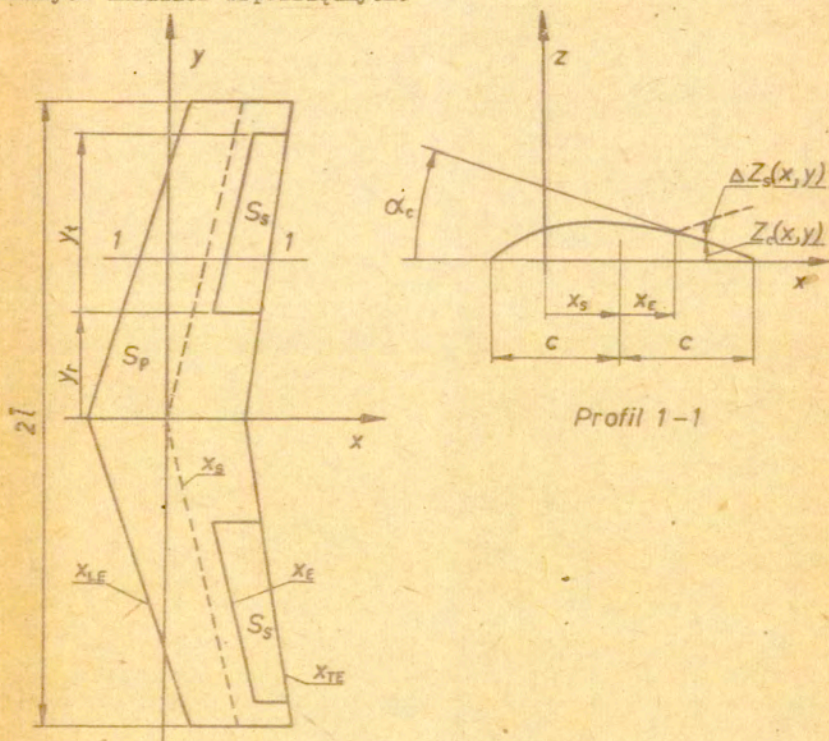
$$x = x_d + a; \quad y = y_d; \quad z = z_d;$$

w których:

a - stała definiująca wyprzedzenie dwupłata

h - stała definiująca wysokość dwupłata

Kształty geometryczne płatów / rysunek 3.2 / określone są w lokalnych układach współrzędnych.



Rys. 3.2

Obrys płata stanowią linie:

$$x_{TE} = x_s(y) - c(y) \quad \text{- krawędź natarcia płata}$$

$$x_{TE} = x_s(y) + c(y) \quad \text{- krawędź spływu płata}$$

$$y_r = \pm \hat{l} \quad \text{- końce płata}$$

określone przez funkcje:

$$x_s(y) \quad \text{- położenie środków cięciw}$$

$$2c(y) \quad \text{- długość cięciw}$$

Linie te ograniczają obszar

$$x_{LE} \leq x \leq x_{TE}; \quad -\hat{l} \leq y \leq \hat{l},$$

w którym powierzchnia płata opisana jest przez funkcję

$$/ 3.1 / \quad z = Z_p(x, y).$$

Płat posiada ruchome powierzchnie sterowe / stery /. Obrys sterów stanowią linie:

$$x_e = x_s(y) + e(y) c(y) \quad \text{- nosek steru,}$$

$$y_{TS} = \pm y_r; \quad y_{TS} = \pm y_t \quad \text{- końce steru,}$$

określone przez wprowadzone poprzednio funkcje $x_s(y)$ i $c(y)$ oraz:

$e(y)$ - bezwymiarowe położenie noska steru / odniesione do $c(y)$ /.

Linie te ograniczają obszar steru $S_s(x, y)$

$$x_e \leq x \leq x_{TE}; \quad |y_r| \leq |y| \leq |y_t|,$$

w którym funkcją $Z_p(x, y)$ może być zapisana w postaci sumy:

$$Z_p(x, y) = Z_c(x, y) + \Delta Z_s(x, y),$$

gdzie: $Z_c(x, y)$ - jest ciągła łącznie z pochodną $\frac{\partial Z_c}{\partial x}$ w obszarze $S_p(x, y)$ oraz $Z_c(x, y) = Z_p(x, y)$ poza obszarem $S_s(x, y)$,

$\Delta Z_s(x, y)$ - jest różna od zera i ciągła łącznie z pochodną $\frac{\partial \Delta Z_s}{\partial x}$ tylko w obszarze $S_s(x, y)$.

Wprowadzając oznaczenia:

$$\alpha(x, y) = -\frac{\partial Z_p}{\partial x};$$

$$\Delta \alpha(x, y) = -\frac{\partial \Delta Z_s}{\partial x}$$

można interpretować funkcję $\alpha(x, y)$ jako lokalny geometryczny kąt natarcia płata, natomiast funkcję $\Delta \alpha(x, y)$ jako lokalny kąt wychylenia steru.

Ze względu na identyczny opis geometrii obu płatów we wzorach pominięte zostały indeksy g identyfikujące płat górny i d identyfikujące płat dolny.

Zastosowany opis geometryczny płatów umożliwia zdefiniowanie kąta sklinowania dwupłata α_s / mierzonego w płaszczyźnie symetrii /

$$\alpha_s = \frac{Z_{cg}(x_{LE}) - Z_{cg}(x_{TE})}{2C_g} - \frac{Z_{cd}(x_{LE}) - Z_{cd}(x_{TE})}{2C_d},$$

gdzie: $Z_{cg}(x_{LE}), Z_{cd}(x_{LE})$ - współrzędne krawędzi natarcia płata górnego i płata dolnego dla $y=0$,
 $Z_{cg}(x_{TE}), Z_{cd}(x_{TE})$ - współrzędne krawędzi spływu płata górnego i płata dolnego dla $y=0$,
 $2C_g, 2C_d$ - długość cięciw centralnych / $y=0$ / płata górnego i dolnego.

Jest to dodatkowy parametr / obok a i h / opisujący wzajemne usytuowanie powierzchni nośnych dwupłata.

3.2 Warunki równowagi

Zdefiniowany w poprzednim rozdziale dwupłat umieszczony jest w przepływie gazu idealnego o gęstości ρ_∞ i prędkości U_∞ równoległej do osi X układu współrzędnych. Wzajemne oddziaływanie gazu i układu powierzchni nośnych/dwupłata / powoduje pojawienie się zaburzeń przepływu / znikających w nieskończoności / oraz powstanie sił aerodynamicznych na płatach.

Zakłada się, że zachodzi liniowy związek między zaburzeniami prędkości przepływu \vec{V} i siłami aerodynamicznymi \vec{p}_A , który można zapisać przy pomocy liniowego operatora całkowego: A / operator aerodynamiczny /.

$$/ 3.2 / \quad \vec{V} = A p_A.$$

Na powierzchniach płatów musi być spełniony kinematyczny warunek styczności przepływu, wymagający znikania składowej prędkości normalnej do powierzchni płatów. Wychodząc z ogólnego równania powierzchni dwupłata

$$Z(x, y, z, t) = z - Z_p(x, y, t) = 0$$

warunek ten sprowadza się do równości

$$/ 3.3 / \quad \frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \vec{U} \nabla Z = 0,$$

w której: $\frac{D}{Dt}$ - pochodna substancjalna,
 \vec{U} - prędkość wypadkowa na powierzchni dwupłata / prędkość przepływu zaburzonego /,
 ∇ - operator Nabla.

Zakładając, że rozpatrywane będą wyłącznie zagadnienia stacjonarne, warunek 3.3 upraszcza się do postaci:

$$/ 3.4 / \quad \vec{U} \nabla Z = 0.$$

Wykorzystując równanie powierzchni dwupłata 3.1

$$z - Z_p(x, y) = Z(x, y, z) = 0$$

oraz przedstawiając wektory ∇Z i \vec{U} w postaci składowych w kierunkach x, y, z

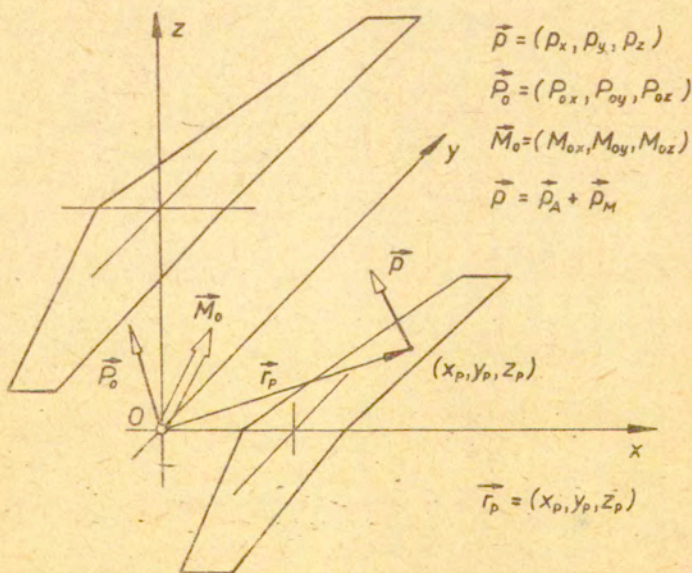
$$\nabla Z = \left(-\frac{\partial Z_p}{\partial x}, -\frac{\partial Z_p}{\partial y}, 1 \right);$$

$$\vec{U} = \vec{U}_\infty + \vec{V} = (U_\infty + u, v, w),$$

warunek styczności przepływu można zapisać w postaci zależności

$$/ 3.5 / \quad -(U_\infty + u) \frac{\partial Z_p}{\partial x} - v \frac{\partial Z_p}{\partial y} + w = 0.$$

Poza siłami aerodynamicznymi na dwupłatach mogą działać dodatkowo siły masowe $\vec{p}_M(x, y)$ / siły ciężkości / rozłożone w sposób ciągły na płatach. Na nieodkształcalny element dwupłata / kadłub / może działać ponadto układ sił, który można przedstawić w postaci wektora głównego \vec{P}_0 w punkcie O oraz momentu \vec{M}_0 / rys. 3.3 /.



Rys. 3.3

Zakłada się, że pod działaniem wszystkich sił zewnętrznych dwupłat ulega odkształceniom i pozostaje w tym stanie w równowadze statycznej. Warunki równowagi można zapisać w postaci równania sił

$$/ 3.6 / \quad \int_{S_p} \vec{p} dS + \vec{P}_0 = 0$$

oraz równania momentów względem punktu O

$$/ 3.7 / \quad \int_{S_p} (\vec{r}_p \times \vec{p}) dS + \vec{M}_0 = 0.$$

W zależnościach 3.6, 3.7 wprowadzono oznaczenia:

$$\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_M; \quad \vec{p} = (p_x, p_y, p_z).$$

Wektor \vec{r}_p , określający położenie punktów na powierzchniach płaskich, zaznaczony jest na rysunku 3.3.

Przemieszczenia $\Delta \vec{r}$ punktu x_p, y_p, z_p dwupłata $\Delta \vec{r}$ określone w globalnym układzie współrzędnych x, y, z / pod działaniem sił \vec{p} oraz \vec{P}_0 i \vec{M}_0 są superpozycją odkształceń sprężystych płatów $\Delta \vec{r}_p$ i przemieszczeń dwupłata w stanie nieodkształconym $\Delta \vec{r}_0$ / przemieszczenia " sztywne " /

$$/ 3.8 / \quad \Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_p + \Delta \vec{r}_0.$$

Odkształcenia sprężyste dwupłata można związać z siłami zewnętrznymi \vec{p} poprzez liniowy operator całkowy E .

$$/ 3.9 / \quad \Delta \vec{r}_p = E \vec{p}.$$

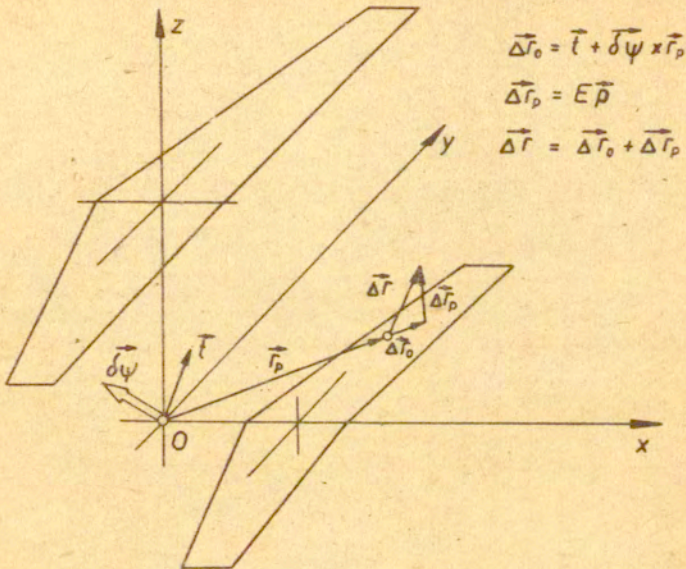
Zależność ta określa przemieszczenia dowolnego punktu x_p, y_p, z_p dwupłata, unieruchomionego w punkcie $x=0, y=0, z=0$, wywołane siłami zewnętrznymi \vec{p} działającymi na cały układ aerodynamiczny / rysunek 3.4 /.

Małe przemieszczenia sztywne $\Delta \vec{r}_0$ punktu x_p, y_p, z_p wynikają z przesunięcia \vec{t} i obrotu elementarnego $\delta \vec{\psi}$ wokół punktu O , mierzonych w globalnym układzie współrzędnych / rysunek 3.4 /

$$/ 3.10 / \quad \Delta \vec{r}_0 = \vec{t} + \delta \vec{\psi} \times \vec{r}_p.$$

Całkowite przemieszczenie dowolnego punktu x_p, y_p, z_p dwupłata określa zależność wektorowa:

$$/ 3.11 / \quad \Delta \vec{r} = \vec{t} + \delta \vec{\psi} \times \vec{r}_p + E \vec{p}.$$



Rys. 3.4

W rezultacie przyjętych założeń utworzone zostały:

- równania równowagi sił / 3.6, 3.7 /

$$\int_{S_p} \vec{p} dS + \vec{P}_0 = 0;$$

$$\int_{S_p} (\vec{r}_p \times \vec{p}) dS + \vec{M}_0 = 0,$$

- warunek / równanie / styczności przepływu na powierzchniach płatów / 3.5 /

$$-(U_\infty + u) \frac{\partial Z_p}{\partial x} - v \frac{\partial Z_p}{\partial y} + w = 0,$$

- związek między zaburzeniami prędkości przepływu i siłami aerodynamicznymi na płatach / 3.2 // równanie zaburzeń prędkości/

$$\vec{V} = A \vec{p}_A,$$

- zależność / 3.11 // równanie przemieszczeń /, określająca

przemieszczenia punktów dwupłata w postaci sumy przemieszczenia sztywnego / 3.10 /

$$\Delta \vec{r}_0 = \vec{t} + \delta \vec{\psi} \times \vec{r}_p$$

oraz odkształceń sprężystych / 3.9 /

$$\Delta \vec{r}_p = E \vec{p}.$$

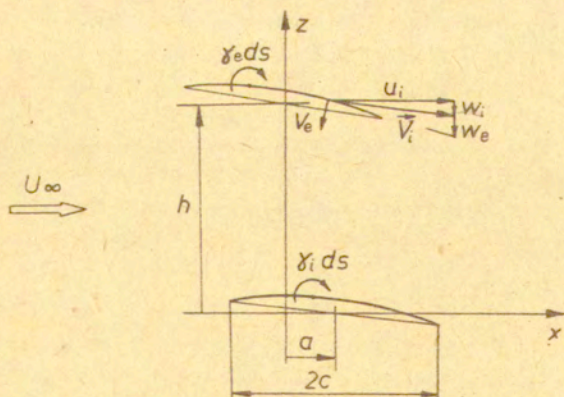
W dalszych rozważaniach czynione będą założenia prowadzące do uproszczenia powyższych zależności.

Stosując podejście podobne do Kűchemanna [2] można ocenić oddziaływanie aerodynamiczne płatów rozpatrując zaburzenia prędkości przepływu. Na powierzchni każdego płata występują zaburzenia prędkości \vec{V}_e wywołane przez rozpatrywany płat oraz zaburzenia prędkości \vec{V}_i wywołane przez płat sąsiedni / płat oddziałujący na rozpatrywany /.

Wypadkowe zaburzenia

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_i$$

można przedstawić w postaci składowych $u = u_e + u_i$, $w = w_e + w_i$.



Rys. 3.5

Opierając się na wirowym modelu płatów / rysunek 3.5 / oraz uproszczonej analizie dwuwymiarowej, można przyjąć, że zaburzenia prędkości spełniają warunki:

$$|u_e| \ll |u_i|, |w_i|, |w_e|$$

oraz

$$|w| \sim |u|$$

Pozwala to pominąć w równaniu styczności przepływu 3.5 składową u_e zaburzeń prędkości.

Zakładając ponadto, że lokalny kąt wzniosu płata $\frac{\partial Z_p}{\partial y}$ jest mały w porównaniu z lokalnym kątem natarcia $\frac{\partial Z_p}{\partial x}$

$$/3.12/ \quad \left| \frac{\partial Z_p}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{\partial Z_p}{\partial x} \right|,$$

można w 3.5 pominąć także człon $(v_i + v_e) \frac{\partial Z_p}{\partial y}$.

W wyniku uczynionych uproszczeń uzyskuje się zależność

$$/3.13/ \quad -(U_\infty + u_i) \frac{\partial Z_p}{\partial x} + w_i + w_e = 0.$$

Dalsze uproszczenia są nieuzasadnione. Pominięcie w 3.13 członu $u_i \frac{\partial Z_p}{\partial x}$ byłoby, co prawda, równoznaczne z linearyzacją równań równowagi swobodnego dwupłata, jednak uzyskany w ten sposób model oddziaływań aerodynamicznych płatów byłby zbyt prymitywnym przybliżeniem rzeczywistości.

Warunki styczności przepływu zapisane oddzielnie dla płata górnego i dolnego mają postać:

$$(U_\infty + u_{g\alpha}) \frac{\partial Z_{pg}}{\partial x} = w_g + w_{gd} ;$$

/3.14/

$$(U_\infty + u_{d\alpha}) \frac{\partial Z_{pd}}{\partial x} = w_d + w_{dg} .$$

Wprowadzone / zgodnie z uwagą w rozdziale 3.2 / indeksy g i d oznaczają wielkości odnoszące się do płata górnego i dolnego, natomiast indeksy gd i dg oznaczają wielkości, będące wynikiem oddziaływania płata dolnego na górny i odwrotnie.

Kolejne uproszczenia dotyczyć będą równań równowagi sił 3.6, 3.7.

Po zastąpieniu sił masowych \vec{p}_M / rozłożonych w sposób ciągły na płatach / wypadkową \vec{P}_M w punkcie $O(x=0, y=0, z=0)$ oraz parą sił o momencie \vec{M}_M , w równaniach równowagi pozostaną pod znakiem całki wyłącznie siły aerodynamiczne

$$\vec{p} = \vec{p}_A$$

natomiast wektor główny \vec{P}_0 i moment \vec{M}_0 zastąpione zostaną wypadkowymi

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{P}_M;$$

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_M.$$

Pozwala to na pominięcie w dalszych analizach indeksu A .

Odształcenia / skręcenia / płatów wywołane siłami masowymi \vec{p}_M są niezależne od prędkości lotu U_∞ i mogą być uwzględnione, przy uczynionych założeniach, poprzez wstępne zwichrzenie geometryczne płatów.

Wprowadzając składowe siły działających na dwupłat:

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z);$$

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z);$$

$$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z),$$

równania równowagi 3.6, 3.7 można zapisać w postaci skalarnej:

$$\int_{S_p} p_x dS + P_x = 0;$$

$$\int_{S_p} p_y dS + P_y = 0;$$

$$\int_{S_p} p_z dS + P_z = 0;$$

$$\int_{S_p} (y_p p_z - z_p p_y) dS + M_x = 0;$$

$$\int_{S_p} (z_p p_x - x_p p_z) dS + M_y = 0;$$

$$\int_{S_p} (x_p \rho_y - y_p \rho_x) dS + M_z = 0.$$

Przyjmuje się, że składowe sił aerodynamicznych spełniają warunek:

$$|\rho_y| \ll |\rho_z|,$$

wynikający z symetrii geometrycznej dwupłata / założenia rozdz. 3.2 /, małego wzniosu płatów / założenie 3.12 / oraz symetrii opływu / prędkość U_∞ równoległa do kierunku osi X /.

Zakłada się ponadto, że równania równowagi składowych sił

$$\int_{S_p} \rho_x dS + P_x = 0;$$

/ 3.15a /

$$\int_{S_p} \rho_y dS + P_y = 0$$

oraz składowych momentów

$$\int_{S_p} (z_p \rho_x - x_p \rho_z) dS + M_y = 0;$$

/ 3.15b /

$$\int_{S_p} (x_p \rho_y - y_p \rho_x) dS + M_z = 0,$$

są zawsze spełnione, co oznacza, że na nieodkształcalny element dwupłata / kadłub / muszą działać siły zewnętrzne

$$P_x = - \int_{S_p} \rho_x dS;$$

$$P_y = - \int_{S_p} \rho_y dS,$$

przyłożone w punkcie $O(x=0, y=0, z=0)$ oraz momenty zewnętrzne

$$M_y = - \int_{S_p} (z_p \rho_x - x_p \rho_z) dS;$$

$$M_z = - \int_{S_p} (x_p \rho_y - y_p \rho_x) dS.$$

Dla rzeczywistego dwupłata / dla samolotu / warunki te mogą być spełnione przez odpowiedni dobór ciągu silnika i wychyleń sterów.

Pozostałe równania określają równowagę sił działających równoległe do osi z układu współrzędnych

$$/ 3.16 / \int_{S_p} \rho_z dS + P_z = 0$$

oraz równowagę momentów działających równoległe do osi x układu współrzędnych

$$/ 3.17 / \int_{S_p} y_p \rho_z + M_x = 0.$$

Przy symetrycznych rozkładach sił aerodynamicznych na płatach, / symetrycznie wychylone stery / równanie momentów jest spełnione przy

$$M_x = 0.$$

Dla rozkładów niesymetrycznych / niesymetrycznie wychylone stery / z równania 3.17 można wyznaczyć dodatkowy moment / reakcję / konieczny do zapewnienia równowagi statycznej dwupłata.

$$M_x = - \int_{S_p} y_p \rho_z dS.$$

Jest to równoważne założeniu, że równanie momentów 3.17 podobnie jak równania 3.15a i 3.15b jest także spełnione tożsamościowo.

Przyjęte założenia pozwoliły wydzielić do dalszych rozważań równanie równowagi składowych sił działających równoległe do osi z układu współrzędnych / 3.16 /. W praktycznych zagadnieniach mechaniki lotu równanie to jest zawsze sprzężone z pozostałymi / 3.15a, 3.15b, 3.17 /. Zastosowane uproszczenia modelu obliczeniowego nie eliminują jednak charakterystycznych cech dwupłata. Umożliwia to realizację celu pracy jakim jest ogólna analiza oddziaływania płatów.

Końcowe założenia dotyczą równania przemieszczeń 3.11, które po wprowadzeniu składowych wektorów

$$\vec{\Delta r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z);$$

$$\vec{t} = (t_x, t_y, t_z);$$

$$\vec{\delta\psi} = (\delta\psi_x, \delta\psi_y, \delta\psi_z),$$

można zapisać skalarnie:

$$\Delta x = t_x + \delta\psi_y z_p - \delta\psi_z y_p + E_x^x \rho_x + E_y^x \rho_y + E_z^x \rho_z;$$

$$\Delta y = t_y + \delta\psi_z x_p - \delta\psi_x z_p + E_x^y \rho_x + E_y^y \rho_y + E_z^y \rho_z;$$

$$\Delta z = t_z + \delta\psi_x y_p - \delta\psi_y x_p + E_x^z \rho_x + E_y^z \rho_y + E_z^z \rho_z.$$

Biorąc pod uwagę fakt / wynikający z równania styczności 3.14 /, że istotny wpływ na siły aerodynamiczne mają wyłącznie przemieszczenia ΔZ / poprzez pochodną $\frac{\partial \Delta Z}{\partial x}$ /, w dalszych rozważaniach pominięte będą równania określające przemieszczenia Δx i Δy . Przy dodatkowym założeniu, że wpływ składowych sił ρ_x i ρ_y na odkształcenia w kierunku osi Z jest pomijalnie mały

$$|E_x^z \rho_x| \ll |E_z^z \rho_z|; \quad |E_y^z \rho_y| \ll |E_z^z \rho_z|,$$

przemieszczenia ΔZ określa zależność

$$/ 3.18 / \quad \Delta Z = t_z + \delta\psi_x y_p - \delta\psi_y x_p + E_z^z \rho_z.$$

Funkcja Z_p opisująca powierzchnię płatów 3.1 jest sumą:

$$Z_p = Z_p^f + \Delta Z$$

gdzie: $Z_p^f(x, y)$ - funkcja określająca wyjściowy kształt dwupłata / wstępne zwichrzenie /.

Po podstawieniu ΔZ określonego zależnością 3.18 uzyskuje się równanie powierzchni płatów odkształconych pod działaniem sił ρ_z

$$Z_p = Z_p^f + t_z + \delta\psi_x y_p - \delta\psi_y x_p + E_z^z \rho_z.$$

Po zróżniczkowaniu i podstawieniu do 3.14 otrzymuje się równanie styczności przepływu, w którym w jawnej postaci występują od-

kształcenia sprężyste oraz przemieszczenia sztywne / obrót elementarny $\delta\psi_y$ / dwupłata:

$$/ 3.19 / (U_\infty + u) \left(\frac{\partial Z^r}{\partial x} - \delta\psi_y - C\rho_z \right) = w.$$

W równaniu tym wprowadzono operator odkształceń C zdefiniowany zależnością:

$$/ 3.19a / C\rho_z = - \frac{\partial}{\partial x} (E_z^z \rho_z) = \Theta,$$

wiązący kąty skręceń elastycznych płatów z siłami aerodynamicznymi ρ_z . Dla uproszczenia zapisu pominięto indeksy g , d , gd i dg .

Zakłada się ponadto, że w równaniach zaburzeń prędkości 3.2 / zapisanych skalarnie / dominują człony zawierające siły ρ_z

$$u = A_x^u \rho_x + A_y^u \rho_y + A_z^u \rho_z \approx A_z^u \rho_z;$$

/ 3.20 /

$$w = A_x^w \rho_x + A_y^w \rho_y + A_z^w \rho_z \approx A_z^w \rho_z,$$

Po podstawieniu składowych zaburzeń prędkości u i w , w postaci 3.20, do równania styczności przepływu 3.19 i wprowadzeniu oznaczeń:

$$\alpha^r = - \frac{\partial Z^r}{\partial x};$$

$$/ 3.21 / \alpha_o = \delta\psi_y;$$

$$\alpha = - \frac{\partial Z^p}{\partial x} = \alpha^r + \alpha_o + C\rho_z$$

oraz pominięciu indeksu Z uzyskuje się nieliniową zależność

$$/ 3.22 / \frac{1}{U_\infty} (\alpha A^u \rho + A^w \rho) = - \alpha.$$

Jest to równanie wiążące siły aerodynamiczne $/\rho/$ działające na odkształcalny dwupłat $/Cp/$ z jego wyjściowym kształtem geometrycznym w stanie nieobciążonym $/\alpha^r/$ oraz przemieszczeniem sztywnym / zmianą kąta natarcia $/\alpha_o/$ i prędkością przepływu niezaburzonego $/U_\infty/$. Łącznie z równaniem 3.16, które dla upro-

szczenia można zapisać w postaci:

$$A^p \rho + P = 0,$$

gdzie:

$$A^p \rho = \int_{S_p} \rho dS,$$

uzyskuje się układ opisujący równowagę statyczną odkształcalnego dwupłata w ustalonym locie swobodnym. Układ ten można zapisać macierzowo:

$$/ 3.23 / \left[\begin{array}{c|c} -\frac{1}{U_\infty} (\alpha A^u + A^w) - C & -1 \\ \hline A^p & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \rho \\ \alpha_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha^r \\ P \end{Bmatrix},$$

gdzie:

$$\alpha A^u \rho = (\alpha^r + \alpha_0 + C \rho) A^u \rho.$$

Rozwiązanie równania pozwala wyznaczyć rozkłady sił aerodynamicznych na płatach $\rho(x, y)$ oraz przemieszczenia sztywne α_0 .

Podsumowując powyższe rozważania można wydzielić cztery zasadnicze etapy prowadzące do równań równowagi w postaci 3.23. Wychodząc z modelu dwupłata omówionego w rozdziale 3.1 przeprowadzona jest:

1. Linearyzacja przepływu w otoczeniu płatów pozwalająca na ogólne sformułowanie równań:

- zaburzeń prędkości / 3.2 /

$$\vec{V} = A \vec{\beta}_A,$$

- styczności przepływu / 3.4 /

$$\vec{U} \nabla Z = 0,$$

- przemieszczeń / odkształceń / / 3.8 /

$$\vec{\Delta r} = \vec{\Delta r}_\rho + \vec{\Delta r}_\theta,$$

- równowagi sił / 3.6 /

$$\int_{S_p} \vec{p} dS + \vec{P} = 0.$$

2. Ograniczenie problemu do analizy równowagi statycznej w symetrycznym locie ustalonym / założenie tożsamościowego spełnienia równania momentów 3.7 /.
3. Przyjęcie dodatkowych założeń pozwalających na uproszczenie równań:

- styczności przepływu do postaci 3.13

$$-(U_\infty + u) \frac{\partial Z}{\partial x} \rho + w = 0,$$

- równowagi sił do postaci 3.16

$$\int_{S_p} \rho_z dS + P_z = 0,$$

- przemieszczeń / odkształceń / do postaci 3.18

$$\Delta z = t_z + \delta \psi_x y_p - \delta \psi_y x_p + E_z^z \rho_z,$$

- zaburzeń prędkości do postaci 3.20

$$u = A_z^u \rho_z;$$

$$w = A_z^w \rho_z.$$

4. Wyeliminowanie z równania styczności przepływu 3.13 odkształceń sprężystych i zaburzeń prędkości przy pomocy równań 3.18 i 3.20.

Uzyskany układ równań równowagi dwupłata 3.23 jest nieliniowy mimo linearyzacji przepływu w otoczeniu każdego z płatów. Nieliniowość wynika z oddziaływania aerodynamicznego i jest skutkiem zachowania w równaniu styczności 3.13 członu $u_i \frac{\partial Z}{\partial x} \rho$.

W dalszej części pracy omówiona będzie budowa operatorów A^u, A^w oraz C występujących w równaniu 3.23.

4. Całkowe równania równowagi

4.1 Operatory aerodynamiczne

Budowa operatorów aerodynamicznych występujących w równaniach równowagi dwupłata 3.23, uzależniona jest od przyjętej teorii opływu powierzchni nośnych.

W dalszych rozważaniach zakłada się, że przepływ jest potencjalny i nieściśliwy. Potencjał zaburzeń prędkości $\varphi(x,y,z)$ zdefiniowany jest związkami:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ / 4.1 / \quad v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

i spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2 \varphi(x,y,z) = 0.$$

Na krawędziach spływu płatów spełniony jest warunek Kutty - Żukowskiego

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=x_{TE}} = \text{wartość skończona}.$$

Ślady wirowe, stanowiące powierzchnie nieciągłości składowych v prędkości, są płaskie, równoległe do kierunku prędkości przepływu niezaburzonego U_∞ i rozciągają się od krawędzi spływu płatów do nieskończoności. Płaty są nieskończenie cienkie / założenia rozdziału 3.1 / a ich kształt określony jest przez funkcję 3.1.

W rezultacie uczynionych założeń potencjał zaburzeń prędkości w dowolnym punkcie przestrzeni związany jest z siłami aerodynamicznymi na płatach zależnością:

$$/ 4.2 / \quad \varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \frac{\gamma(\xi, \eta, Z_p)(z - Z_p)}{(y - \eta)^2 + (z - Z_p)^2} \left(1 + \frac{x - \xi}{r} \right) dS,$$

w której wprowadzono oznaczenia:

$$\gamma(\xi, \eta, Z_p) = \frac{1}{g_w U_w} \rho(\xi, \eta, Z_p);$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-Z_p)^2}.$$

Całkowanie rozciąga się na powierzchniach S_p płatów.

Potencjał zaburzeń prędkości w postaci 4.2 jest zwykle punktem wyjścia przy obliczaniu sił aerodynamicznych na powierzchniach nośnych [23].

Korzystając z definicji 4.1 można wyznaczyć składowe zaburzeń prędkości w dowolnym punkcie przestrzeni, wywołane siłami aerodynamicznymi na płatach:

$$w(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \frac{\gamma(\xi, \eta, Z_p)}{(y-\eta)^2 + (z-Z_p)^2} \left[\frac{(y-\eta)^2 - (z-Z_p)^2}{(y-\eta)^2 + (z-Z_p)^2} \left(1 + \frac{x-\xi}{r} \right) + \frac{(z-Z_p)^2 (x-\xi)}{r^3} \right] dS;$$

/ 4.3 /

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \frac{\gamma(\xi, \eta, Z_p) (z-Z_p)}{r^3} dS.$$

Zależności te pozwalają określić jawną postać operatorów aerodynamicznych 3.20, wiążących zaburzenia prędkości przepływu na powierzchniach płatów z działającymi na nich siłami.

Poprzejście granicznym z punktem (x, y, z) w 4.3 kolejno na powierzchnie obu płatów i zapisaniu definicji operatorów aerodynamicznych 3.20 oddzielnie dla płata górnego

$$u = u_g + u_{gd} = A_g^u \rho_g + A_{gd}^u \rho_d;$$

/ 4.4 /

$$w = w_g + w_{gd} = A_g^w \rho_g + A_{gd}^w \rho_d$$

i dla płata dolnego

$$u = u_d + u_{dg} = A_d^u p_d + A_{dg}^u p_g ;$$

/ 4.5 /

$$w = w_d + w_{dg} = A_d^w p_d + A_{dg}^w p_g ,$$

można w 4.3 określić jawną postać tych operatorów:

$$A_{dg}^u p_g = u_g(x_g, y_g) = 0 ;$$

$$A_{gd}^u p_d = u_{gd}(x_g, y_g) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \gamma_d(\xi_d, \eta_d) G(x_g, y_g; a, h; \xi_d, \eta_d) dS ;$$

$$A_{gd}^w p_g = w_g(x_g, y_g) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \frac{\gamma_g(\xi_g, \eta_g)}{(y_g - \eta_g)^2} K(x_g, y_g; \xi_g, \eta_g) dS ;$$

$$A_{gd}^w p_d = w_{gd}(x_g, y_g) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \gamma_d(\xi_d, \eta_d) F(x_g, y_g; a, h; \xi_d, \eta_d) dS ;$$

/ 4.6 /

$$A_d^u p_d = u_d(x_d, y_d) = 0 ;$$

$$A_{dg}^u p_g = u_{dg}(x_d, y_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \gamma_g(\xi_g, \eta_g) G(x_d, y_d; -a, -h; \xi_g, \eta_g) dS ;$$

$$A_d^w p_d = w_d(x_d, y_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \frac{\gamma_d(\xi_d, \eta_d)}{(y_d - \eta_d)^2} K(x_d, y_d; \xi_d, \eta_d) dS ;$$

$$A_{dg}^w p_g = w_{dg}(x_d, y_d) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \gamma_g(\xi_g, \eta_g) F(x_d, y_d; -a, -h; \xi_g, \eta_g) dS .$$

W zależnościach 4.4 + 4.6 wydzielono zaburzenia prędkości na powierzchniach płyt zwiazane z działającymi na nich siłami

$/u_g, w_g, u_d, w_d$, oznaczane ogólnie w rozdziale 3.3 przez u_e i w_e /

oraz zaburzenia prędkości związane z siłami działającymi na płatach interferujących / $U_{gd}, W_{gd}, U_{ag}, W_{ag}$, oznaczane ogólnie w rozdziale 3.3 przez U_i i W_i /. Wprowadzono ponadto oznaczenia:

$$G(x, y; \pm a, \pm h; \xi, \eta) = \frac{\pm h}{r_i^3};$$

$$K(x, y; \xi, \eta) = 1 + \frac{x - \xi}{r_e};$$

/ 4.7 /

$$F(x, y; \pm a, \pm h; \xi, \eta) = \frac{1}{(y - \eta)^2 + h^2} \left[\frac{(y - \eta)^2 - h^2}{(y - \eta)^2 + h^2} \left(1 + \frac{\mp a + x - \xi}{r_i} \right) + \frac{h^2(\mp a + x - \xi)}{r_i^3} \right],$$

gdzie:

$$r_i = \sqrt{(\mp a + x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + h^2};$$

$$r_e = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

oraz założono, że zachodzi warunek

$$|\Delta z| \ll |h|.$$

Operatory A_g^w i A_a^w są mocno osobliwe. Ich jądra

$$\frac{1}{(y - \eta)^2} K(x, y; \xi, \eta)$$

posiadają osobliwość kwadratową na linii $\eta = y; \xi > x$. Operatory te występują dla dowolnych układów powierzchni nośnych / także dla pojedynczych płatów /. Pozostałe operatory są regularne i występują wyłącznie dla oddziałujących wzajemnie układów powierzchni nośnych. Określają interferencję aerodynamiczną, wiążąc zaburzenia prędkości na każdym z płatów z siłami aerodynamicznymi na innych płatach.

4.2 Operatory odkształceń

Dla konstrukcji liniowo sprężystej, podpartej w sposób statycznie-wyznaczalny, kąty skręceń elastycznych związane są z siłami działającymi na płyty liniową zależnością:

$$/ 4.8 / \quad \Theta(x,y) = C\rho = \int_{S_p} C^\theta(x,y; \xi, \eta) \rho(\xi, \eta) dS,$$

która definiuje jawną postać operatora odkształceń C / 3.19a /, wprowadzonego w rozdziale 3.3.

Funkcja wpływowa podatności, określająca kąt skręcenia płyta $\Theta(x,y)$ w punkcie x,y pod działaniem jednostkowej siły przyłożonej w punkcie ξ, η , może być wyznaczona z ogólnych równań teorii sprężystości [33].

Dla typowych konstrukcji lotniczych możliwe jest zwykle przyjęcie uproszczonego modelu sztywnościowego. Zakładając, że płyty mają duże wydłużenia a ich profile są nieodkształcalne, można zbudować obliczeniowy model odkształcalnego samolotu w postaci układu sprężystych belek. W ogólnym przypadku, belki połączone są ze sobą w sposób statycznie niewyznaczalny. Do określenia funkcji wpływowej podatności dla układów statycznie niewyznaczalnych może być zastosowana metoda sił [24] / omówiona m.in. w [28] /:

Po unieruchomieniu / nieodkształcalnego / kadłuba i odrzuceniu statycznie niewyznaczalnych połączeń elementów modelu sztywnościowego, określa się rozkłady momentów zginających $m(x,y; s)$ oraz momentów skręcających $m_s(x,y; s)$ wzdłuż osi belek / współrzędna bieżąca s /, wywołanych jednostkową siłą uogólnioną działającą na układ w punkcie x,y . Jest to siła jednostkowa działająca w kierunku osi Z lub para sił o momencie jednostkowym / skierowanym wzdłuż osi y / umieszczona w przekroju o współrzędnej y / x może być dowolne ze względu na nieodkształcalność profili płyt / Oznaczając symbolicznie zbiór rozkładów $m(x,y; s)$ i $m_s(x,y; s)$ przez

$$q(x,y) = \{m(x,y; s), m_s(x,y; s)\},$$

można zdefiniować " iloczyn skalarny "

$$\langle q(x,y), q(\xi, \eta) \rangle = \sum \int \frac{m(x,y;s) m(\xi, \eta; s)}{EJ(s)} dS +$$

/ 4.9 /

$$+ \sum \int \frac{m_s(x,y;s) m_s(\xi, \eta; s)}{GJ_0(s)} dS,$$

w którym:

- EJ - określa rozkłady sztywności giętych wzdłuż długości belek,
- GJ_0 - określa rozkłady sztywności skrętych wzdłuż długości belek,
- całkowanie odbywa się wzdłuż długości belek,
- sumowanie dotyczy wszystkich belek.

Dla modelu statycznie wyznaczalnego funkcja wpływa podatności jest określona bezpośrednio przez iloczyn skalarny 4.9.

$$C^0(x,y;\xi, \eta) = \langle q(x,y), q(\xi, \eta) \rangle.$$

W przypadku układu pierwotnie n -krotnie statycznie niewyznaczalnego, określa się dodatkowo zbiory f_1, f_2, \dots, f_n rozkładów momentów zginających i skręcających, odpowiadające jednostkowym reakcjom odrzuconych więzów. Macierz $[B]$ układu równań kanonicznych metody sił składa się z elementów

$$b_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle.$$

Po utworzeniu macierzy kolumnowej $\{\langle q(x,y), f \rangle\}$ z elementami $\langle q(x,y), f_1 \rangle, \langle q(x,y), f_2 \rangle, \dots, \langle q(x,y), f_n \rangle$ można określić funkcję wpływa podatności, dla układu statycznie niewyznaczalnego;

$$C^0(x,y;\xi, \eta) = \langle q(x,y), q(\xi, \eta) \rangle +$$

/ 4.10 /

$$- \{\langle q(x,y), f \rangle\}^T [B]^{-1} \{\langle q(\xi, \eta), f \rangle\}$$

Opisana metoda jest łatwa do zaprogramowania na maszynę cyfrową. Jedynym jej elementem zależnym od postaci modelu sztywnościowego jest budowa zbiorów q i f .

4.3 Aproksymacja całkowych równań równowagi

Rozwiązanie układu równań równowagi swobodnego dwupłata 3.25 jest praktycznie możliwe wyłącznie na drodze numerycznej. Wymaga to aproksymacji równań całkowych przy pomocy układu równań algebraicznych. Wyznaczone z tych równań wartości sił aerodynamicznych $\rho(x_i, y_m)$ / określone na dyskretnym zbiorze punktów x_i, y_m leżących na powierzchni płatów S_p / stanowią przybliżenie niewiadomej funkcji $\rho(x, y)$ w całkowych równaniach równowagi dwupłata.

Najprostszy typ takiej aproksymacji związany jest z modelem aerodynamicznym płata w postaci pojedynczej linii nośnej [4]. Jest on jednak nieprzydatny w rozpatrywanych zagadnieniach gdyż:

1. nie pozwala na uwzględnienie zmienności wzdłuż cięciw płatów zaburzeń prędkości $u(x)$ i $w(y)$, które mogą być znaczne i wyraźnie wpływać na wyniki obliczeń,
2. nie pozwala na prawidłowe określenie rozkładu momentów decydujących o odkształceniach sprężystych / skręceniach / płatów.

Pozbawione tych wad są modele aerodynamiczne oparte na koncepcji powierzchni nośnych.

W niniejszej pracy aproksymacja równań równowagi realizowana będzie w dwóch etapach:

1. Równania całkowe dwuwymiarowe zostaną przybliżone układem równań całkowych jednowymiarowych / poprzez rozprężnięcie poszukiwanych funkcji względem zmiennych x i y /.
2. Równania całkowe jednowymiarowe, uzyskane w pierwszym etapie, zostaną przybliżone układem równań algebraicznych.

Etap pierwszy.

Dla potrzeb rozważanego zagadnienia przystosowana została metoda całkowania wzdłuż cięciwy równania pojedynczej powierzchni nośnej. Metoda ta / opisana w [26] / prowadzi do modelu aerodynamicznego płata w postaci układu linii nośnych. Punktem wyjścia jest aproksymacja funkcji $\gamma(x, y)$ szeregiem względem wie-

lomianów Jacobiego, a następnie wyznaczenie współczynników tego szeregu. Do obliczenia elementów macierzy układu równań wykorzystywane są kwadratury numeryczne.

W omawianym etapie wykonane zostaną kolejno:

- a/. aproksymacja funkcji $\gamma(\xi, \eta)$ względem zmiennej ξ / wzdłuż cięciwy /,
- b/. obliczenie numeryczne całek względem zmiennej ξ / całkowanie wzdłuż cięciwy /,
- c/. przybliżenie równania całkowego dwuwymiarowego układem równań całkowych jednowymiarowych / zastosowanie schematu Galerkina /,
- d/. analiza dokładności całkowań numerycznych / wzdłuż cięciwy /,
- e/. całkowanie wzdłuż cięciwy nieciągłych funkcji $\alpha(x, y)$ / zastępczy warunek styczności przepływu przy wychylonych sterach /.

Uzyskany układ równań całkowych jednowymiarowych będzie zawierał wyłącznie funkcje zmiennych y i η .

- a/. Aproksymacja funkcji $\gamma(\xi, \eta)$ względem zmiennej ξ .

Po wprowadzeniu w lokalnych układach współrzędnych bezwymiarowych zmiennych $\bar{y}, \bar{\eta}, \bar{x}, \bar{\xi}$, związanych ze zmiennymi wymiarowymi przy pomocy przekształceń:

$$y = \bar{y} \bar{l};$$

$$x = x_s(y) + c(y) \bar{x};$$

$$\eta = \bar{\eta} \bar{l};$$

$$\xi = x_s(\eta) + c(\eta) \bar{\xi},$$

powierzchnie płatów / obszary całkowania S_p / ulegają transformacji na kwadraty:

$$-1 \leq \bar{x} \leq 1; \quad -1 \leq \bar{y} \leq 1.$$

Przekształceniom ulegają także jądra aerodynamiczne operatorów całkowych:

$$\bar{G}(\bar{x}, \bar{y}; \pm a, \pm h; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{\pm h}{R^3};$$

$$/ 4.11 / \quad \frac{1}{\bar{y}_0^2 \bar{\eta}^2} \bar{K}(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{1}{\bar{y}_0^2 \bar{\eta}^2} \left(1 + \frac{\bar{x}_0}{\bar{r}} \right);$$

$$\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}; \pm a, \pm h; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{1}{\bar{y}_0^2 + h^2} \left[\frac{\bar{y}_0^2 - h^2}{\bar{y}_0^2 + h^2} \left(1 + \frac{\bar{x}_0}{R} \right) - \frac{h^2 \bar{x}_0}{R^3} \right]$$

oraz funkcja wpływowa podatności

$$\bar{C}^0(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \langle q(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \rangle + \\ - \{ \langle q(\bar{x}, \bar{y}), f \rangle \}^T [B]^{-1} \{ \langle q(\bar{\xi}, \bar{\eta}), f \rangle \}.$$

Wprowadzone funkcje $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{r}, x_0, y_0, R$ zdefiniowane są zależnościami:

$$\bar{y}_0 = \bar{y} - \bar{\eta};$$

$$/ 4.12 / \quad \bar{x}_0 = \frac{1}{\bar{\eta}} (x_s(\bar{l}\bar{y}) - x_s(\bar{l}\bar{\eta}) + c(\bar{l}\bar{y})\bar{x} - c(\bar{l}\bar{\eta})\bar{\xi});$$

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2},$$

w których $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{r}$, po oznaczeniu indeksami g lub d , odnoszą się do płyta górnego lub dolnego oraz zależnościami:

$$y_0(\bar{y}_g, \bar{\eta}_d) = \bar{l}_g \bar{y}_g - \bar{l}_d \bar{\eta}_d;$$

$$x_0(\bar{x}_g, \bar{\xi}_d) = -a + x_{sg}(\bar{l}_g \bar{y}_g) - x_{sd}(\bar{l}_d \bar{\eta}_d) + \\ + c_g(\bar{l}_g \bar{y}_g) \bar{x}_g - c_d(\bar{l}_g \bar{\eta}_d) \bar{\xi}_d;$$

$$y_0(\bar{y}_d, \bar{\eta}_g) = \bar{l}_d \bar{y}_d - \bar{l}_g \bar{\eta}_g;$$

$$x_0(\bar{x}_d, \bar{\xi}_g) = a + x_{sd}(\bar{l}_d \bar{y}_d) - x_{sg}(\bar{l}_g \bar{\eta}_g) + \\ + c_d(\bar{l}_d \bar{y}_d) \bar{x}_d - c_g(\bar{l}_g \bar{\eta}_g) \bar{\xi}_g;$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + h^2}.$$

Bezwymiarową funkcję opisującą rozkłady ciśnień na płytach

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{U_\infty} = \frac{P}{\rho_\infty U_\infty^2}$$

aproxymuje się rozwinięciem

$$/ 4.13 / \quad \delta(\xi, \bar{\eta}) \approx \frac{\bar{l}}{c(\bar{\eta})} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \sum_{i=1}^L a_i(\bar{\eta}) P_{i-1}(\xi),$$

w którym $a_i(\bar{\eta})$ są poszukiwanymi współczynnikami a $P_i(\xi)$ są wielomianami Jacobi'ego spełniającymi warunki ortogonalności:

$$/ 4.14 / \quad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} P_i(\xi) P_j(\xi) d\xi = \begin{cases} \pi & \text{gdy } i=j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

Aproxymacja taka stosowana jest zwykle przy rozwiązywaniu równania pojedynczej powierzchni nośnej.

b/. Obliczenia numeryczne całek względem zmiennej ξ .

Po wstawieniu funkcji $\delta(\xi, \bar{\eta})$ w postaci rozwinięcia 4.13 do wyrażeń 4.6 definiujących jawną postać operatorów aerodynamicznych, wykonuje się całkowania wzdłuż cięciw kwadraturami Gaussa - Jacobi'ego

$$/ 4.15 / \quad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^L W_i f(\xi_i);$$

$$\xi_i = \cos \frac{2\pi i}{2L+1}; \quad W_i = \frac{2\pi}{2L+1} (1-\xi_i)$$

z liczbą węzłów równą ilości wyrazów rozwinięcia funkcji $\delta(\xi, \bar{\eta})$ (26). W rezultacie uzyskuje się przybliżenie całek 4.6 definiujących operatory aerodynamiczne:

$$/ 4.16 / \quad A^u_p = \frac{\bar{l}^2 U_\infty}{4\pi} \int_{-1}^1 \{ \bar{G}(\bar{x}, \bar{y}; \pm a, \pm h; \bar{\eta}) \}^T \{ \Gamma(\bar{\eta}) \} d\bar{\eta};$$

$$A^{we}_p = \frac{\bar{l}^2 U_\infty}{4\pi} \int_{-1}^1 \{ \bar{K}(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\eta}) \}^T \{ \Gamma(\bar{\eta}) \} \frac{d\bar{\eta}}{(\bar{y}-\bar{\eta})^2};$$

$$A^{wi}_p = \frac{\bar{l}^2 U_\infty}{4\pi} \int_{-1}^1 \{ \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}; \pm a, \pm h; \bar{\eta}) \}^T \{ \Gamma(\bar{\eta}) \} d\bar{\eta}$$

oraz całki 4.8 definiującej operator odkształceń:

$$C\rho = 2q_{\infty} \bar{l}^2 \int \{ \bar{C}^{\theta}(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\eta}) \}^T \{ \Gamma(\bar{\eta}) \} d\bar{\eta};$$

/ 4.17 /

$$q_{\infty} = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty}^2}{2}.$$

W wyrażeniach 4.16 wektory $\{\bar{G}\}$, $\{\bar{K}\}$, $\{\bar{F}\}$, $\{\bar{C}^{\theta}\}$ zawierają wartości jąder 4.11 określone w kolejnych węzłach kwadratur $\bar{\xi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, L$). Wektor $\{\Gamma\}$ zdefiniowany jest zależnością:

$$/ 4.18 / \quad \{ \Gamma(\bar{\eta}) \} = [W][P]^T \{ a(\bar{\eta}) \};$$

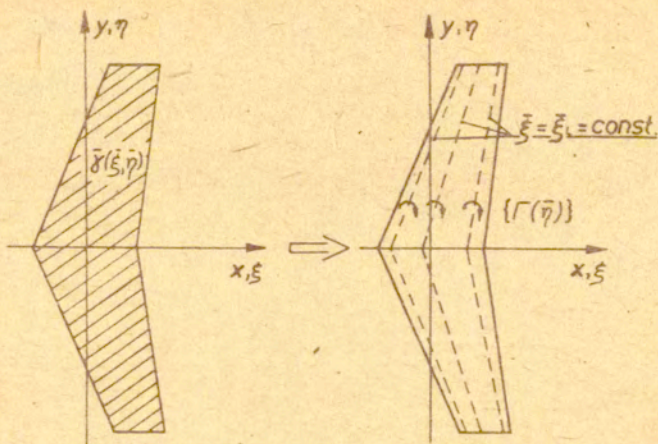
w której:

- $[W]$ - jest macierzą diagonalną utworzoną ze współczynników wagowych kwadratury 4.15,
- $[P]$ - jest macierzą kwadratową utworzoną z wartości kolejnych wielomianów Jacobi ego P_{l-1} w węzłach kwadratury 4.15 / $[P_{i,j}] = P_{i-1}(\bar{\xi}_j)$, ($i, j = 1, 2, \dots, L$) /,
- $\{a\}$ - jest wektorem utworzonym z kolejnych współczynników rozwinięcia 4.13.

Indeks T oznacza operację transponowania macierzy.

Funkcje $\Gamma(\bar{\eta})$ stanowiące elementy wektora $\{\Gamma(\bar{\eta})\}$ posiadają prostą interpretację fizyczną [26]. Określają mianowicie natężenie L linii nośnych umieszczonych w $\bar{\xi} = \bar{\xi}_i$; ($i = 1, 2, \dots, L$), zastępując ciągły rozkład $\bar{y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ / rysunek 4.1 /.

W [26] wykazano, że tak zdefiniowany układ linii nośnych jest statycznie równoważny L -członowemu rozwinięciu funkcji $\bar{y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ w tym sensie, że zapewnia równość L momentów rozkładów sił aerodynamicznych wzdłuż cięciw. Przy rozpatrywaniu równowagi odkształcalnych płatów interesujące są naogół tylko dwa pierwsze momenty / siła nośna i moment skręcający /. Można je uzyskać stosując model zbudowany z dwóch linii nośnych / dwa człony w rozwinięciu $\bar{y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ /. Otrzymane wyniki są naogół wystarczająco dokładne. Jak wykazały obliczenia numeryczne wpływ kolejnych wyrazów rozwinięcia na współczynniki poprzednich nie jest duży.



Rys. 4:1

Opisana aproksymacja zastosowana jest dla obu płyt przy czym liczba linii nośnych może być inna dla płyta górnego L_g i dolnego L_d .

c/. Przybliżenie równania całkowego dwuwymiarowego układem równań całkowych jednowymiarowych.

Współczynniki $\alpha(\bar{\eta})$ rozwinięcia / względem $\bar{\xi}$ / funkcji $\bar{\delta}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ 4.13 można wyrazić poprzez natężenie linii nośnych $\Gamma(\bar{\eta})$.

$$\{\alpha(\bar{\eta})\} = ([W][P]^T)^{-1} \{\Gamma(\bar{\eta})\}.$$

W celu wyznaczenia funkcji $\Gamma(\bar{\eta})$ całkuje się równanie 3.22 / z operatorami A i C w postaci 4.3.5 / względem zmiennej \bar{x} / całkowanie wzdłuż cięciwy / stosując schemat Galerkinia [26]. Po przemnożeniu 3.22 / zapisanego we współrzędnych bezwymiarowych / kolejno przez funkcje

$$/ 4.19 / \quad \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} Q_{l-1}(\bar{x}); \quad (l=1, 2, \dots, L),$$

wykonuje się całkowanie w granicach $-1 \leq \bar{x} \leq 1$. Postępowanie to jest równoważne żądaniu ortogonalności residuum równania 3.22 do każdej z funkcji układu 4.19 w sensie iloczynu skalarnego

$$(\phi, \psi) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} \phi(\bar{x}) \psi(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Uzyskany w ten sposób układ L równań całkowych jednowymiarowych

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} Q_{i-1}(\bar{x}) \left(\frac{-1}{U_{\infty}} \alpha A^u p - \frac{1}{U_{\infty}} A^w p - Cp - \alpha_0 \right) d\bar{x} =$$

/ 4.20 /

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} Q_{i-1}(\bar{x}) \alpha' d\bar{x},$$

zawiera L nieznanymi funkcjami $\Gamma(\bar{\gamma})$. Wielomiany $Q_i(\bar{x})$ spełniają warunki ortogonalności

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} Q_i(\bar{x}) Q_j(\bar{x}) d\bar{x} = \begin{cases} \pi & \text{gdy } i=j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}; \quad (i, j = 0, 1, \dots)$$

i związane są z wielomianami Jacobi'ego zależnością

$$Q_i(\bar{x}) = (-1)^i P_i(-\bar{x}) \quad \text{lub} \quad Q_i(\bar{x}) = (-1)^i P_i(\bar{x}).$$

Po wykorzystaniu tej zależności oraz ponownym zastosowaniu kwadratury Gaussa - Jacobi'ego o L węzłach do obliczenia całek w 4.20 / współczynników przy niewiadomych funkcjach $\Gamma(\bar{\gamma})$ / uzyskuje się układ równań

$$[S][P][W] \left\{ \frac{1}{U_{\infty}} \alpha A^u p - \frac{1}{U_{\infty}} A^w p - Cp - \alpha_0 \right\} =$$

/ 4.21 /

$$= [S][P][W] \{ \alpha' \},$$

w których wszystkie funkcje zmiennej \bar{x} określone są / w wyniku całkowania numerycznego / na dyskretnym zbiorze $\bar{x} = \bar{x}_l (l=1, \dots, L)$.

W macierzowym równaniu 4.21 wprowadzone zostały oznaczenia:

[S] - macierz diagonalna o elementach $S_{ii} = (-1)^i$,

[P] - macierz kwadratowa o elementach utworzonych z

wartości kolejnych wielomianów Jacobi'go P_i w węzłach kwadratury \bar{x}_i ;

$$[P_{i,j}] = P_{i-1}(\bar{x}_j); (i, j = 1, 2, \dots, L).$$

[W] - macierz diagonalna zawierająca współczynniki wagowe kwadratury Gaussa - Jacobi'ego.

Macierze kolumnowe utworzone w wyniku całkowania 4.20 można zapisać w postaci zależności:

$$\left\{ \frac{1}{U_\infty} \alpha A^u \rho \right\} = [\alpha(\bar{y})] \frac{\bar{l}^2}{4\pi} \int_{-1}^1 [\bar{G}(\bar{y}; \pm a, \pm h; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} d\bar{\eta};$$

$$\left\{ \frac{1}{U_\infty} A^{w_e} \rho \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [\bar{K}(\bar{y}; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} \frac{d\bar{\eta}}{(\bar{y}-\bar{\eta})^2};$$

$$\left\{ \frac{1}{U_\infty} A^{w_i} \rho \right\} = \frac{\bar{l}^2}{4\pi} \int_{-1}^1 [\bar{F}(\bar{y}; \pm a, \pm h; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} d\bar{\eta};$$

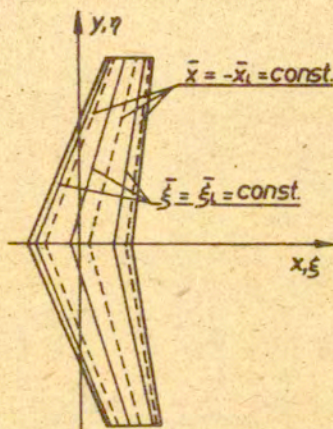
$$\{C\rho\} = 2q_\infty \bar{l}^2 \int_{-1}^1 [\bar{C}^\theta(\bar{y}; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} d\bar{\eta},$$

w których wykorzystane zostały przybliżenia operatorów całkowych 4.16, 4.17. Macierze kwadratowe $[\bar{G}]$, $[\bar{K}]$, $[\bar{F}]$, $[\bar{C}^\theta]$ utworzone są z funkcji 4.7 / stanowiących jądra operatorów / określonych w punktach $\bar{x} = -\bar{x}_i$ oraz $\bar{\xi} = \bar{\xi}_j, (i, j = 1, 2, \dots, L)$. Macierze $[\alpha]$ i $\{\alpha'\}$ utworzone są z wartości funkcji $\alpha(-\bar{x}_i, \bar{y})$ i $\alpha'(-\bar{x}_i, \bar{y}), (i = 1, 2, \dots, L)$.

Zastosowany sposób postępowania prowadzi do zastąpienia dwuwymiarowego równania 3.22 przez układ jednowymiarowych równań całkowych 4.21, określonych na liniach $\bar{x} = -\bar{x}_i = \text{const.}$. Uzyskuje się model aerodynamiczny, w którym każdy z płatów zastąpiony jest przez L linii nośnych umieszczonych w $\bar{\xi} = \bar{\xi}_i = \text{const.}$ / zera wielomianu $P_{L-1}(\bar{\xi})$ /, których natężenie $\Gamma(\bar{\eta})$ można określić z warunku styczności przepływu na liniach $\bar{x} = -\bar{x}_i = \text{const.}$ / rysunek 4.2 / / zera wielomianu $Q_{L-1}(\bar{x})$ /

W szczególnym przypadku $L=1$ otrzymuje się model uogólnionej linii nośnej umieszczonej w $\bar{x} = -0.5 / 1/4$ ciężki płata /,

w którym warunek styczności przepływu spełniony jest w $\bar{\xi} = 0.5$ /3/4 cięciwy płata /.



Rys. 4:2

d/. Analiza dokładności całkowań numerycznych

Dodatkowych wyjaśnień wymaga dokładność całkowań numerycznych w równaniu 4:20:

Zastosowane kwadratury Gaussa - Jacobi'ego o L węzłach są dokładne dla wielomianów o stopniu nie wyższym niż $2L-1$. Ponieważ wielomian $Q_{L-1}(\bar{x})$ jest stopnia $L-1$ pozostałe funkcje podcałkowe w 4:20 / w iloczynach skalarnych / mogą być co najwyżej równoważne wielomianowi stopnia L / to znaczy niewiele różnić się od otrzymanego na ich podstawie wielomianu interpolacyjnego stopnia L rozpiętego na węzłach kwadratury /.

e/. Całkowanie wzdłuż cięciwy nieciągłych funkcji $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$.

W przypadku dwupłata z wychylonymi sterami / $\Delta\alpha \neq 0$ / w równaniu 4.20 funkcja $\alpha'(\bar{x}, \bar{y})$ / a na mocy 3.21 także funkcja $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ / jest nieciągła wzdłuż linii $\bar{x} = e(\bar{y})$ / krawędź natarcia steru /. Całkując te funkcje bezpośrednio /kwadraturą/ otrzymuje się wyniki obarczone dużymi błędami.

Niezbędną dokładność można uzyskać po wydzieleniu i analitycznym scałkowaniu nieciągłej części funkcji oraz zastosowaniu kwadratury numerycznej / Gaussa - Jacobi ego / do obliczenia pozostałej / ciągłej / części.

Funkcje $\alpha^r(\bar{x}, \bar{y})$ i $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ można zapisać w postaci kombinacji liniowych

$$\alpha^r(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_c^r(\bar{x}, \bar{y}) + \Delta\alpha(e)H(\bar{x}-e);$$

/ 4.22 /

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_c(\bar{x}, \bar{y}) + \Delta\alpha(e)H(\bar{x}-e),$$

funkcji ciągłych $\alpha_c^r(\bar{x}, \bar{y})$ lub $\alpha_c(\bar{x}, \bar{y})$ i iloczynu skoku jednostkowego

$$H(\bar{x}-e) = \begin{cases} 0 & \bar{x} < e \\ 1 & \bar{x} \geq e \end{cases}$$

oraz kąta wychylenia steru $\Delta\alpha(e)$.

Po podstawieniu 4.22 do równania 4.20 można policzyć analitycznie całki, zawierające wydzieloną nieciągłość

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} Q_{l-1}(\bar{x}) H(\bar{x}-e) d\bar{x} = F_{Sl}(e),$$

gdzie:

$$/ 4.23 / \quad F_{Sl}(e) = \begin{cases} \arccos e + \sqrt{1-e^2} & l=1 \\ \sqrt{1-e^2} \left(\frac{U_{l-1}(e)}{l} + \frac{U_{l-2}(e)}{l-1} \right) & l \neq 1 \end{cases}$$

W zależności tej $U_l(e)$ są wartościami wielomianów Czebyszewa drugiego rodzaju w punktach $\bar{x}=e(\bar{y})$. Pozostałe całkowania wykonuje się numerycznie.

W rezultacie całkowania nieciągłych członów równania 4.20, uzyskuje się zależności zawierające funkcję $F_{Sl}(e)$ / 4.23 / / stanowiącą elementy wektora $\{F_S\}$ /.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{U_\infty} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} \{Q(\bar{x})\} \alpha A^u \rho d\bar{x} = \\
 / 4.24 / & = \frac{\bar{l}^2}{4\pi} [S][P][W] \{\alpha_c(\bar{y})\} \int_{-1}^1 [\bar{G}(\bar{y}; \pm a; \pm h; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} d\bar{\eta} + \\
 & + \frac{\Delta\alpha(e)\bar{l}^2}{4\pi} \{F_s(e)\} \int_{-1}^1 [\bar{G}(e, \bar{y}; \pm a, \pm h; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} d\bar{\eta}; \\
 & \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} \{Q(\bar{x})\} \alpha^r d\bar{x} = [S][P][W] \{\alpha_c^r(\bar{y})\} + \{F_s(e)\} \Delta\alpha(e);
 \end{aligned}$$

Macierz $\{\bar{G}(e, \bar{y}; \pm a, \pm h; \bar{\eta})\}$ utworzona jest z wartości funkcji 4.11 / ciągłej względem \bar{x} / w punktach $\bar{x} = e; \bar{\xi} = \bar{\xi}_l; (l=1, 2, \dots, L)$.

Układ równań całkowych 4.21 można zapisać w nieco innej postaci. Po przemnożeniu lewostronnym obu stron układu przez macierz $[S]^{-1} = [S]$ a następnie przez macierz $([P][W])^{-1}$ uzyskuje się przekształcony układ równań

$$\begin{aligned}
 & \{\alpha_c^r(\bar{y})\} + \frac{1}{\pi} [P]^T [S] \{F_s(e)\} \Delta\alpha(e) = \\
 & = \frac{\bar{l}^2}{4\pi} \{\alpha_c(\bar{y})\} \int_{-1}^1 [\bar{G}(\bar{y}, \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} d\bar{\eta} + \\
 / 4.25 / & - \frac{\Delta\alpha(e)\bar{l}^2}{4\pi^2} [P]^T [S] \{F_s(e)\} \int_{-1}^1 [\bar{G}(e, \bar{y}; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} d\bar{\eta} + \\
 & - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [\bar{K}(\bar{y}; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} \frac{d\bar{\eta}}{(\bar{y}-\bar{\eta})^2} + \\
 & - \frac{\bar{l}^2}{4\pi} \int_{-1}^1 [\bar{F}(\bar{y}; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} d\bar{\eta} + \\
 & - 2q_\infty \bar{l}^2 \int_{-1}^1 [\bar{C}^\theta(\bar{y}; \bar{\eta})] \{\Gamma(\bar{\eta})\} d\bar{\eta} - \{1\} \alpha_0;
 \end{aligned}$$

Przy przekształceniach wykorzystano wyniki całkowań 4.24 oraz warunki ortogonalności wielomianów Jacobi ego 4.14, które w zapisie macierzowym mają postać:

$$[P][W][P]^T = \pi[I].$$

Ponieważ macierz $[P]$ jest nieosobliwa można zapisać równoważne zależności:

$$([P][W])^{-1} = \frac{1}{\pi} [P]^T;$$

$$([W][P]^T)^{-1} = \frac{1}{\pi} [P].$$

Lewa strona układu równań 4.25 określa / dla $\Delta\alpha \neq 0$ / zastępczy warunek styczności przepływu na liniach $\bar{x} = -\bar{x}_l$, ($l=1, 2, \dots, L$).

Warunek ten zapewnia w dalszym ciągu równoważność układu linii nośnych L - członowemu rozwinięciu funkcji $\bar{y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ w sensie równości L momentów rozkładów sił aerodynamicznych wzdłuż cięciw. Nie można natomiast traktować $\bar{y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ / 4.13 /, wyrażonego poprzez natężenie linii nośnych określonych z tych warunków, jako lokalnych rozkładów ciśnień na cięciwach płatów. W rozwinięciu funkcji $\bar{y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ nie ma bowiem członów posiadających osobliwość logarytmiczną na krawędzi natarcia steru.

Etap drugi

Uzyskany w poprzednim etapie układ równań całkowych 4.25, zawiera funkcje zmiennych \bar{y} i $\bar{\eta}$. Otrzymanie rozwiązań na drodze numerycznej wymaga zastosowania skończenie wymiarowych przybliżeń tych funkcji.

W omawianym etapie wykonane zostaną kolejno:

- a/. aproksymacja funkcji $\Gamma(\bar{\eta})$,
- b/. obliczenie całek względem zmiennej $\bar{\eta}$ / całkowanie wzdłuż rozpiętości /,
- c/. analiza dokładności całkowań numerycznych,
- d/. wprowadzenie dodatkowych członów uzupełniających rozwinięcie $\Gamma(\bar{\eta})$ dla nieciągłych funkcji $\alpha^r(\bar{y})$,
- e/. obliczenie całek zawierających funkcje $\Lambda(\bar{\eta})$ / w członach uzupełniających rozwinięcie $\Gamma(\bar{\eta})$ /,

- f/. dyskretyzacja równań metodą kollokacji,
 g/. uzupełnienie układu dodatkowymi równaniami w punktach nieciągłości funkcji $\alpha'(\bar{y})$,
 h/. dyskretyzacja równania równowagi sił.

W efekcie zastosowanego postępowania, układ równań całkowych jednowymiarowych, zostanie przybliżony układem równań algebraicznych.

- a/. Aproksymacja funkcji $\Gamma(\bar{\eta})$.

Niewiadome funkcje $\Gamma_l(\bar{\eta})$ / 4.18 /, określające natężenie linii nośnych, poszukiwane będą dla każdego płyta w postaci rozwinięcia:

$$/ 4.26 / \quad \Gamma_l(\bar{\eta}) \approx \sqrt{1-\bar{\eta}^2} \sum_{m=1}^M b_{lm} U_{m-l}(\bar{\eta}); \quad \begin{matrix} (l=1,2,\dots,L) \\ (m=1,2,\dots,M) \end{matrix}$$

w którym b_{lm} są poszukiwanymi stałymi współczynnikami a $U_m(\eta)$ są wielomianami Czebyszewa drugiego rodzaju, spełniającymi warunki ortogonalności

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-\bar{\eta}^2} U_i(\bar{\eta}) U_j(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{gdy } i=j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

Podobnie jak w rozwinięciu funkcji $\bar{y}(\xi, \bar{\eta})$ względem ξ liczby członów w 4.26 mogą być różne dla płyta górnego M_g i płyta dolnego M_d . Rozwinięcie 4.26 w postaci trygonometrycznej, stosowane jest dla pojedynczej linii nośnej w klasycznej metodzie Glauerta [31] .

- b/. Obliczenie całek względem zmiennej $\bar{\eta}$.

Po podstawieniu przybliżenia funkcji $\Gamma_l(\bar{\eta})$ do układu równań 4.25, oblicza się występujące tam całki przy pomocy kwadratur Gaussa - Czebyszewa [29] - o węzłach $\bar{\eta}_j$ i współczynnikach wagowych A_j

$$\bar{\eta}_j = \cos \frac{j\pi}{J+1}; \quad A_j = \frac{\pi}{J+1} (1-\bar{\eta}_j^2); \quad (j=1,2,\dots,J).$$

Numeryczne obliczenie całek zawierających gładkie funkcje $\bar{F}(\bar{y}, \bar{\eta})$ i $\bar{G}(\bar{y}, \bar{\eta})$ nie przedstawia większych trudności. Nieco dokładniejszego omówienia wymaga jedynie określenie całki

$$\int_{-1}^1 [\bar{K}(\bar{y}, \bar{\eta})] \{r(\bar{\eta})\} \frac{d\bar{\eta}}{(\bar{y}-\bar{\eta})^2}$$

w której funkcja

$$/ 4.27 / \quad \frac{1}{(\bar{y}-\bar{\eta})^2} \bar{K}(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{1}{\bar{y}_0^2} \left(1 + \frac{\bar{x}_0}{\sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2}} \right)$$

staje się osobliwa przy $\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}$.

Dla $\bar{\eta} = \bar{y}$ ($\bar{y}_0 = 0$), $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\xi}, \bar{\eta})$ przyjmuje wartości

$$\bar{K}(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \bar{x}_0 \leq 0 \\ 2 & \text{dla } \bar{x}_0 > 0 \end{cases}$$

Tak więc tylko te funkcje podcałkowe 4.27 są osobliwe, dla których spełniony jest warunek $\bar{x}_0 > 0$.

W wyniku dyskretyzacji, wykonanych w poprzednim etapie, wartości $\bar{x}_0(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ / 4.12 / określone są dla $\bar{x} = -\bar{x}_i$; $\bar{\xi} = \bar{\xi}_j$; ($i, j = 1, 2, \dots, L$). Po wydzieleniu osobliwości w funkcji podcałkowej 4.27 uzyskuje się zależność

$$/ 4.28 / \quad \frac{1}{(\bar{y}-\bar{\eta})^2} \bar{K}(-\bar{x}_i, \bar{y}; \bar{\xi}_j, \bar{\eta}) = \begin{cases} \frac{2}{(\bar{y}-\bar{\eta})^2} \bar{K}_1(-\bar{x}_i, \bar{y}; \bar{\xi}_j, \bar{\eta}) & i+j > L \\ & \text{gdy} \\ \bar{K}_2(-\bar{x}_i, \bar{y}; \bar{\xi}_j, \bar{\eta}) & i+j \leq L \end{cases}$$

w której funkcje

$$/ 4.29 / \quad \bar{K}_1(-\bar{x}_i, \bar{y}; \bar{\xi}_j, \bar{\eta}) = \frac{1}{(\sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2} + \bar{x}_0) \sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2}}$$

$$/ 4.30 / \quad \bar{K}_2(-\bar{x}_i, \bar{y}; \bar{\xi}_j, \bar{\eta}) = \frac{1}{(\sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2} - \bar{x}_0) \sqrt{\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2}}$$

są gładkie i można je całkować numerycznie przy pomocy kwadratury Gaussa - Czebyszewa. Wynik całkowania członów równania 4.25 zawierających tego typu funkcje można przedstawić w posta-

ci ogólnej zależności

$$/ 4.31 / \int_{-1}^1 f(\bar{y}, \bar{\eta}) \Gamma_i(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \{b_i\}^T [U] [A] \{f(\bar{y})\},$$

w której:

$\{b_i\}$ - macierz kolumnowa, utworzona z kolejnych współczynników b_{im} ($m=1,2,\dots,M$) rozwinięcia funkcji $\Gamma_i(\bar{\eta})$ 4.26,

$[U]$ - macierz prostokątna, utworzona z wartości kolejnych wielomianów Czebyszewa U_{m-1} w węzłach kwadratury $\bar{\eta}_j$, $[U_{m-1,j}] = U_{m-1}(\bar{\eta}_j)$, ($m=1,2,\dots,M$; $j=1,2,\dots,J$),

$[A]$ - macierz diagonalna, utworzona z kolejnych współczynników wagowych A_j ($j=1,2,\dots,J$) kwadratury Gaussa-Czebyszewa,

$\{f\}$ - macierz kolumnowa, utworzona z wartości jednej z funkcji podcałkowych $\bar{G}(\bar{y}; \bar{\eta}_j)$, $\bar{F}(\bar{y}; \bar{\eta}_j)$, $\bar{K}_1(\bar{y}; \bar{\eta}_j)$, $\bar{K}_2(\bar{y}; \bar{\eta}_j)$ w węzłach kwadratury Gaussa - Czebyszewa $\bar{\eta}_j$; ($j=1,2,\dots,J$);

Całkę zawierającą wydzieloną z funkcji $\bar{K}(\bar{y}; \bar{\eta})$ osobliwość, można policzyć analitycznie

$$/ 4.32 / \{b_i\}^T \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\bar{\eta}^2}}{(\bar{y}-\bar{\eta})^2} \{U(\bar{\eta})\} d\bar{\eta} = -\pi \sum_{m=1}^M m b_{im} U_{m-1}(\bar{y}).$$

W rezultacie wykonanych aproksymacji / 4.26 / i całkowań / 4.31, 4.32 /, układ równań 4.25 uległ przekształceniu / dyskretyzacji / do postaci:

$$(-[\alpha_c(\bar{y})][A^u(\bar{y})] - [\Delta\alpha][A^A(\bar{y})] - [A^W(\bar{y})] - q_\infty [C(\bar{y})]) \{b\} +$$

/ 4.33 /

$$-\{1\} \alpha_0 = \{\alpha'(\bar{y})\},$$

w której:

$[A^u(\bar{y})]$, $[A^W(\bar{y})]$, $[A^A(\bar{y})]$, $[C(\bar{y})]$ - macierze prostokątne o wymiarach $L \times (L \times M)$ mające budowę blokową zilustrowaną przykładowo dla $[A^u(\bar{y})]$.

$$[A^u(\bar{y})] = [G_0(\bar{y})] \{ [G_1(\bar{y})] \{ \dots \dots \dots \} [G_{M-1}(\bar{y})] \},$$

gdzie:

$$[G_m(\bar{y})] = \frac{\bar{l}^2}{4\bar{R}} \sum_{j=1}^J [\bar{G}(-\bar{x}_k, \bar{y}; \bar{\xi}_l, \bar{\eta}_j)] U_m(\bar{\eta}_j) A_j; \quad (k, l=1, 2, \dots, L),$$

$\{b\}$ - macierz kolumnowa o długości $L \times M$ utworzona z M bloków o wymiarze L zawierających poszukiwane współczynniki rozwinięcia b_{lm} funkcji $\Gamma(\bar{\eta})$ / 4.26 /,

$\{\alpha^r\}$ - macierz kolumnowa, która jest lewą stroną równania 4.25 / dla $\Delta\alpha(e) = 0, \{\alpha^r(\bar{y})\} = \{\alpha_c^r(\bar{y})\}$ /.

Pozostałe macierze są takie same jak 4.25 .

c/. Analiza dokładności całkowań numerycznych.

Zastosowane kwadratury Gaussa - Czebyszewa zapewniają dokładne wyniki całkowania dla wielomianów stopnia nie wyższego od $2J-1$. Stosując M członowe rozwinięcie $\Gamma(\bar{\eta})$ / 4.26 / / zawierające wielomiany $U_{M-1}(\bar{\eta})$ stopnia $M-1$ / można uzyskać prawidłowe wyniki dla funkcji podcałkowych, równoważnych co najwyżej wielomianom stopnia $2J-M$ / to znaczy niewiele różniących się od otrzymanego na ich podstawie wielomianu interpolacyjnego stopnia $2J-M$ rozpiętego na węzłach kwadratury /.

W rozpatrywanym zagadnieniu tylko funkcje $\bar{K}_1(\bar{y}, \bar{\eta})$ / 4.29 / i $\bar{K}_2(\bar{y}, \bar{\eta})$ / 4.30 / posiadają bardzo wyraźne ekstremum w punkcie $\bar{y} = \bar{\eta}$. Wartość pochodnych $|\frac{\partial \bar{K}_1}{\partial \bar{y}}|$ i $|\frac{\partial \bar{K}_2}{\partial \bar{y}}|$ w otoczeniu tego punktu są zależne od wielkości \bar{x}_0 i przy wzroście liczby linii nośnych L / \bar{x}_0 maleje / mogą być bardzo duże. Utrudnia to w znacznym stopniu całkowania numeryczne i powoduje konieczność stosowania kwadratur o liczbach węzłów znacznie przewyższających długości rozwinięć funkcji $\Gamma(\bar{\eta}) / J > M$ /. Dla przykładowych obliczeń, w których $M=13$ i $L=2$ zadowalające wyniki dla całek zawierających funkcje \bar{K}_1 i \bar{K}_2 oraz wielomiany $U_{12}(\eta)$ uzyskano przy $J=27$. Przy ograniczonej liczbie węzłów kwadratur zwiększanie długości rozwinięć funkcji $\bar{y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ nie prowadzi, jak zwykle, do zwiększenia dokładności wyniku bowiem pociąga za sobą wzrost błędu całkowania.

d/. Wprowadzenie dodatkowych członów uzupełniających rozwinięcie $\Gamma(\bar{\eta})$ dla nieciągłych funkcji $\alpha^r(\bar{y})$.

Rozwinięcie funkcji $\Gamma(\bar{\eta})$ w postaci 4.26 jest szybko zbieżne dla ciągłych funkcji $\alpha^r(\bar{y}) = \alpha_c^r(\bar{y})$ w równaniu 4.25 / 4.33 /. Przy wychylonych powierzchniach sterowych ($\Delta\alpha \neq 0$), w rozkładach $\alpha^r(\bar{y})$ pojawiają się nieciągłości w punktach \bar{y}_r i \bar{y}_t / brzegi steru / / rysunek 3.2 /, którym odpowiadają osobliwości w pochodnych $\frac{\partial \Gamma(\bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}}$. Zbieżność przybliżenia 4.26 ulega znacznemu pogorszeniu.

W [26] opisana jest metoda pozwalająca na wyeliminowanie nieciągłości w funkcjach $\alpha^r(\bar{y})$ dla pojedynczych powierzchni nośnych. W rozpatrywanym zagadnieniu zastosowane będzie zbliżone postępowanie. Funkcje $\Gamma_l(\bar{\eta})$ poszukiwane będą w postaci sumy

$$/ 4.34 / \quad \Gamma_l(\bar{\eta}) = \Gamma_{cl}(\bar{\eta}) + \sum_{t=1}^T d_{lt} \Lambda_t(\bar{\eta}); \quad (l=1,2,\dots,L),$$

w której d_{lt} są nieznanymi stałymi współczynnikami natomiast

$$\Gamma_{cl}(\bar{\eta}) = \sqrt{1-\bar{\eta}^2} \sum_{m=1}^M b_{lm} U_{m-1}(\bar{\eta})$$

jest identyczne z rozwinięciem 4.26 a funkcja

$$\Lambda_t(\bar{\eta}) = \frac{1}{\pi} \left[(\bar{\eta} - \bar{y}_t) \ln \left| \frac{1 - \bar{y}_t \bar{\eta} + \sqrt{1 - \bar{y}_t^2} \sqrt{1 - \bar{\eta}^2}}{1 - \bar{y}_t \bar{\eta} - \sqrt{1 - \bar{y}_t^2} \sqrt{1 - \bar{\eta}^2}} \right| + 2 \sqrt{1 - \bar{\eta}^2} \arccos \bar{y}_t \right],$$

jest rozwiązaniem równania

$$/ 4.35 / \quad H(\bar{y} - \bar{y}_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Lambda_t(\bar{\eta})}{(\bar{y} - \bar{\eta})^2} d\bar{\eta}; \quad H(\bar{y} - \bar{y}_t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \bar{y} < \bar{y}_t \\ 1 & \text{gdy } \bar{y} \geq \bar{y}_t \end{cases}$$

Współrzędne \bar{y}_t ($t=1,2,\dots,T$) określają punkty nieciągłości rozkładów $\alpha^r(\bar{y})$. Wskaźnik T sumy w 4.34 wynika wyłącznie z geometrii płatów i jest równy podwojonej liczbie sterów. Przykładowo, dla dwóch sterów $T=4$:

Nieliniowość równań opisujących równowagę dwupłata uniemożliwia niezależne określenie współczynników b_{lm} i d_{lt} w rozwinięciu 4.34. Nie można w tym wypadku stosować zasady superponowania rozwiązań, wykorzystywanej dla pojedynczej powierzchni nośnej.

e/. Obliczenie całek zawierających funkcje $\Lambda(\bar{y})$.

Postępując podobnie jak w przypadku ciągłych funkcji $\alpha_c(\bar{y})$, podstawia się rozwinięcie 4.34 do równania styczności przepływu 4.25 i oblicza numerycznie / lub analitycznie / występujące tam całki. Specjalnego podejścia wymaga całkowanie wyrażeń zawierających funkcje $\Lambda_t(\bar{\eta})$. Funkcja ta posiada osobliwość pochodnej w punkcie $\bar{\eta}=\bar{y}_t$. Zastosowanie uniwersalnych kwadratur / na przykład kwadratury Gaussa / nie gwarantuje uzyskania dobrych dokładności przy niewielkiej liczbie węzłów.

Opracowano kwadraturę interpolacyjną opartą na węzłach kwadratury Gaussa - Czebyszewa

$$\bar{\eta}_j = \cos \frac{j\pi}{J+1}; \quad (j=1,2,\dots,J),$$

w której $\Lambda_t(\bar{\eta})$ jest funkcją wagową

$$/ 4.36 / \quad \int_{-1}^1 \Lambda_t(\bar{\eta}) f(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \sum_{j=1}^J B_j(\bar{y}_t) f(\bar{\eta}_j).$$

Sposób tworzenia tej kwadratury opisany jest w Dodatku I.

Wyniki całkowania nieosobliwych członów równania, zawierających funkcję $\Lambda_t(\bar{\eta})$ można zapisać ogólnie

$$/ 4.37 / \quad \sum_{t=1}^I d_{lt} \int_{-1}^1 \Lambda_t(\bar{\eta}) f(\bar{y}, \bar{\eta}) d\bar{\eta} = \{d_l\}^T [B(\bar{y}_t)]^T \{f(\bar{y})\},$$

gdzie:

$\{d_l\}$ - macierz kolumnowa, utworzona z kolejnych współczynników $d_{lt}, (t=1,2,\dots,I)$ rozwinięcia funkcji $\Gamma_l(\bar{\eta})$

/ 4.34 /.

$[B]$ - macierz prostokątna, utworzona ze współczynników wagowych kwadratury 4.36 $[B_{jt}] = B_j(\bar{y}_t); (j=1,2,\dots,J)$,

$\{f\}$ - macierz kolumnowa, utworzona w ten sam sposób jak w zależności 4.31.

Zastosowana kwadratura interpolacyjna 4.36 jest dokładna dla wielomianów stopnia nie wyższego od $J-1$. Ponieważ całkowane tą kwadraturą funkcje nie są mnożone dodatkowo przez wielomiany $U_{m-1}(\bar{\eta}), (m=1,2,\dots,M)$, uzyskana dokładność w 4.37 niewiele różni się od dokładności w 4.31.

Wartości całek zawierających osobliwość wydzieloną z funkcji $\bar{K}(\bar{y}, \bar{\eta})$ / 4.28 /, wynikają z równania 4.35

$$\int_{-1}^1 \frac{\Lambda_+(\bar{\eta})}{(\bar{y} - \bar{\eta})^2} d\bar{\eta} = 2\pi H(\bar{y} - \bar{y}_t).$$

W rezultacie zastosowania funkcji $\Gamma(\bar{\eta})$ w postaci 4.34 uzyskuje się układ równań

$$\begin{aligned} & (-[\alpha(\bar{y})][A^u(\bar{y})] - [\Delta\alpha][A^A(\bar{y})] - [A^W(\bar{y})] - q_\infty[C(\bar{y})])\{b\} + \\ / 4.38 / & + (-[\alpha(\bar{y})][\bar{A}^u(\bar{y})] - [\Delta\alpha][\bar{A}^A(\bar{y})] - [\bar{A}^W(\bar{y})] - q_\infty[\bar{C}(\bar{y})])\{d\} + \\ & - \{1\}\alpha_0 = \{\alpha^r(\bar{y})\}, \end{aligned}$$

uzupełniony, w porównaniu z 4.33, o człony będące wynikiem opisanych powyżej całkowań. Macierze prostokątne $[\bar{A}^u(\bar{y})]$, $[\bar{A}^A(\bar{y})]$, $[\bar{A}^W(\bar{y})]$, $[\bar{C}(\bar{y})]$ o wymiarach $L \times (L \times T)$ mają budowę blokową zilustrowaną na przykładzie $[\bar{A}^u(\bar{y})]$.

$$[\bar{A}^u(\bar{y})] = [[G_1(\bar{y})] ; [G_2(\bar{y})] ; \dots ; [G_T(\bar{y})]],$$

gdzie:

$$[G_k(\bar{y})] = \frac{\bar{l}^2}{4\pi} \sum_{j=1}^L [\bar{G}(-\bar{x}_k, \bar{y}; \bar{\xi}_l, \bar{\eta}_j)] B_j(\bar{y}_t); \quad (k, l = 1, 2, \dots, L).$$

Macierz kolumnowa $\{d\}$ utworzona jest z T bloków o długości L zawierających poszukiwane współczynniki d_{lt} przybliżenia 4.34. Pozostałe macierze są takie same jak w równaniu 4.33.

f/. Dyskretyzacja równań metodą kollokacji.

Równanie styczności przepływu w postaci 4.38 lub 4.33 będzie zdyskretyzowane przez zastosowanie metody kollokacji. Po określeniu wartości funkcji tworzących macierze równań 4.38 / 4.33 / w punktach

$$\bar{y}_m = \cos \frac{m\pi}{M+1}; \quad (m = 1, 2, \dots, M),$$

uzyskuje się układ $\bar{L} \times \bar{M}$ równań algebraicznych z $\bar{L} \times \bar{M}$ nieznanymi współczynnikami b_{lm} i $\bar{L} \times \bar{T}$ współczynnikami d_{lt} / 4.26, 4.34 / dla płatów górnego i dolnego. Nieznany jest także kąt natarcia dwupłata α_0 . Wprowadzone oznaczenia $\bar{L}, \bar{M}, \bar{T}$ są sumami długości rozwinięć 4.13 i 4.34 na płacie górnym (L_g, M_g, T_g) oraz na płacie dolnym (L_d, M_d, T_d);

$$\bar{L} = L_g + L_d;$$

$$\bar{M} = M_g + M_d;$$

$$\bar{T} = T_g + T_d.$$

g/. Uzupełnienie układu dodatkowymi równaniami w punktach nieciągłości funkcji $\alpha'(\bar{y})$.

Dodatkowe $\bar{L} \times \bar{T}$ równań można uzyskać przez odjęcie stronami równania 4.38 w punktach $\bar{y} = \bar{y}_t + 0$ i $\bar{y} = \bar{y}_t - 0$. Po przejściu do granicy, człony zawierające ciągłe funkcje zmiennej \bar{y} znikną. Pozostałe tworzą układ

$$[\delta\alpha(\bar{y}_t)] [A^A(\bar{y}_t)] \{b\} + [\delta\alpha(\bar{y}_t)] [\bar{A}^A(\bar{y}_t)] \{d\} = r \{ \delta\alpha'(\bar{y}_t) \},$$

w którym macierz diagonalna $[\delta\alpha(\bar{y}_t)]$ i wektor $\{ \delta\alpha'(\bar{y}_t) \}$ zawierają elementy

$$\delta\alpha_l(\bar{y}_t) = \Delta\alpha_l(\bar{y}_t + 0) - \Delta\alpha_l(\bar{y}_t - 0); (t=1, 2, \dots, T); (l=1, 2, \dots, L),$$

stanowiące przyrosty funkcji $\Delta\alpha(\bar{y})$ w punktach nieciągłości \bar{y}_t .

h/. Dyskretyzacja równania równowagi sił.

Uzyskane w wyniku powyższych dyskretyzacji równania algebraiczne nie stanowią układu zupełnego. Zamyka go równanie równowagi sił 3.16, które można przybliżyć / zdyskretyzować / , korzystając z aproksymacji funkcji $\bar{\gamma}(\bar{x}, \bar{y})$ / 4.13 / oraz $\Gamma(\bar{y})$ / 4.34 /. Siły aerodynamiczne związane są z bezwymiarową funkcją $\bar{\gamma}(\bar{x}, \bar{y})$

$$p(\bar{x}, \bar{y}) = \rho_\infty U_\infty^2 \bar{\gamma}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Po podstawieniu rozwinięcia $\bar{y}(\bar{x}, \bar{y})$ w postaci 4.13 oraz wykorzystaniu rozwinięcia funkcji $\Gamma(\bar{y})$ / 4.34 / uzyskuje się zależność

$$/ 4.39 / \quad \rho(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{g_{\infty} U_{\infty}^2 \bar{l}}{\pi c(\bar{y})} \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} \sum_{l=1}^L P_{l-1}(\bar{x}) \sum_{k=1}^L P_{l-1}(\bar{x}_k) x \\ \times \left(\sqrt{1-\bar{y}^2} \sum_{m=1}^M b_{km} U_{m-1}(\bar{y}) + \sum_{t=1}^T d_{lt} \Lambda_t(\bar{y}) \right),$$

która pozwala zapisać równanie równowagi sił 3.16 w postaci

$$/ 4.40 / \quad -P = \frac{g_{\infty} U_{\infty}^2 \bar{l}^2}{\pi} \sum_{l=1}^L \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} P_{l-1}(\bar{x}) d\bar{x} \sum_{k=1}^L P_{l-1}(\bar{x}_k) x \\ \times \left(\sum_{m=1}^M b_{km} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\bar{y}^2} U_{m-1}(\bar{y}) d\bar{y} + \sum_{t=1}^T d_{kt} \int_{-1}^1 \Lambda_t(\bar{y}) d\bar{y} \right).$$

Całki występujące w tej zależności można policzyć analitycznie wykorzystując własności wielomianów $P_{l-1}(\bar{x})$ i $U_{m-1}(\bar{y})$. W wyniku całkowań otrzymuje się przybliżone / zdyskretyzowane / równanie równowagi sił w postaci zależności

$$/ 4.41 / \quad q_{\infty} \{A^P\}^T \{b\} + q_{\infty} \{\bar{A}^P\}^T \{d\} = -P.$$

Zastosowanie dwustopniowej aproksymacji przekształciło całkowe równania równowagi dwupłata 3.23 w układ równań algebraicznych

$$/ 4.42 / \quad \begin{bmatrix} [A(b, d, \alpha_0)] - q_{\infty} [C] & [\bar{A}(b, d, \alpha_0)] - q_{\infty} [\bar{C}] & -\{1\} \\ -[\delta \alpha] [A^{\Delta}] & -[\delta \alpha] [\bar{A}^{\Delta}] & 0 \\ q_{\infty} \{A^P\}^T & q_{\infty} \{\bar{A}^P\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{b\} \\ \{d\} \\ \alpha_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\alpha^r\} \\ \{\delta \alpha\} \\ -P \end{Bmatrix},$$

$$\text{w których: } [A(b, d, \alpha_0)] = -[\alpha] [A^u] - [\Delta \alpha] [A^{\Delta}] - [A^w];$$

$$[\bar{A}(b, d, \alpha_0)] = -[\alpha] [\bar{A}^u] - [\Delta \alpha] [\bar{A}^{\Delta}] - [\bar{A}^w];$$

$$/ 4.43 / \quad \{\alpha\} = \{\alpha^r\} + \{1\} \alpha_0 + q_{\infty} (\{C\} \{b\} + \{\bar{C}\} \{d\}).$$

W celu podsumowania powyższych rozważań, wyszczególnione zostaną istotne punkty zastosowanej metody.

W pierwszym etapie aproksymacji:

1. Przybliżono funkcję $\bar{\gamma}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ rozwinięciem 4.13

$$\bar{\gamma}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \approx \frac{\bar{l}}{c(\bar{\eta})} \sqrt{\frac{1-\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}}} \sum_{l=1}^L a_l(\bar{\eta}) P_{l-1}(\bar{\xi}).$$

2. Obliczono numerycznie całki względem $\bar{\xi}$ stosując kwadraturę Gaussa - Jacobi'ego 4.15

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}}} f(\bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi} \approx \sum_{l=1}^L W_l f(\bar{x}, \bar{\xi}_l),$$

z liczbą węzłów równą długości rozwinięcia funkcji $\bar{\gamma}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$.

3. Wprowadzono funkcję $\Gamma_l(\bar{\eta})$ 4.18

$$\Gamma_l(\bar{\eta}) = \sum_{k=1}^L W_k P_{k-1}(\bar{\xi}_k) a_k(\bar{\eta}),$$

która określa natężenie linii nośnej umieszczonej wzdłuż $\bar{\xi} = \bar{\xi}_l = \text{const.}$

$$\bar{\xi}_l = \cos \frac{2\pi l}{2L+1}; \quad (l=1, 2, \dots, L).$$

4. Przybliżono równanie całkowe dwuwymiarowe układem równań jednowymiarowych stosując schemat Galerkina 4.20

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} Q_{l-1}(\bar{x}) \left(-\frac{1}{U_\infty} \alpha A^u \rho - \frac{1}{U_\infty} A^w \rho - C\rho - \alpha_0 \right) d\bar{x} = \\ = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} Q_{l-1}(\bar{x}) \alpha^r d\bar{x}; \quad (l=1, 2, \dots, L). \end{aligned}$$

5. Wykorzystując związki między wielomianami Jacobi'ego $P_l(\bar{x})$ i $Q_l(\bar{x})$

$$Q_l(\bar{x}) = (-1)^l P_l(-\bar{x}),$$

obliczono numerycznie całki względem \bar{x} stosując ponownie kwadraturę Gaussa - Jacobi'ego z L węzłami

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}}} Q_l(\bar{x}) f(\bar{x}) d\bar{x} = (-1)^l \sum_{k=1}^L W_k P_l(\bar{x}_k) f(-\bar{x}_k).$$

Uzyskany układ równań całkowych jednowymiarowych 4.21 opisuje model aerodynamiczny, w którym płaty zastąpione są układem linii nośnych umieszczonych w $\xi = \xi_i = \text{const.}$ a ich natężenie $\Gamma_i(\bar{\eta})$ określone jest z warunku styczności przepływu w $\bar{x} = -\bar{x}_i = \text{const.}$

W drugim etapie aproksymacji:

1. Przybliżono funkcję $\Gamma_i(\bar{\eta})$ sumą 4.34

$$\Gamma_i(\bar{\eta}) \approx \sqrt{1-\bar{\eta}^2} \sum_{m=1}^M b_{lm} U_{m-1}(\bar{\eta}) + \sum_{t=1}^T d_{lt} \Lambda_t(\bar{\eta}).$$

2. Obliczono całki względem $\bar{\eta}$ stosując kwadraturę Gaussa-Czebyszewa

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-\bar{\eta}^2} U_m(\bar{\eta}) f(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \sum_{j=1}^J A_j U_m(\bar{\eta}_j) f(\bar{\eta}_j)$$

oraz kwadraturę interpolacyjną

$$\int_{-1}^1 \Lambda_t(\bar{\eta}) f(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \sum_{j=1}^J B_j(\bar{y}_t) f(\bar{\eta}_j).$$

3. Utworzono układ równań algebraicznych stosując metodę kolokacji opartą na węzłach

$$\bar{y}_m = \cos \frac{m\pi}{M+1}; \quad (m=1, 2, \dots, M).$$

4. Uzupełniono ten układ dodatkowymi równaniami w punktach nieciągłości funkcji $\alpha(\bar{y})$.
5. Przybliżono równanie równowagi sił wykorzystując rozwinięcia funkcji $\bar{y}(\xi, \bar{\eta})$ i $\Gamma(\bar{\eta})$.

Uzyskano zamknięty nieliniowy układ $\bar{L}x(\bar{M}+\bar{T})+1$ - równań algebraicznych z niewiadomymi współczynnikami rozwinięcia 4.34 b_{lm} i d_{lt} / dla każdego z płatów / oraz nieznanym kątem natarcia α_0 .

W przypadku odkształcalnego dwupłata pozbawionego sztywnego stopnia swobody / np. przy badaniach odkształcalnego modelu zamocowanego nieruchomo w tunelu aerodynamicznym /, układ równań 4.42 ulega redukcji, ponieważ znana jest wartość kąta natarcia dwupłata α_0 . Tym niemniej zredukowany układ równań jest w dalszym ciągu nieliniowy. Elementy macierzy $[A(b,d)]$ oraz $[\bar{A}(b,d)]$ / 4.43 / są bowiem nadal zależne od poszukiwanych współczynników b i d .

Układ równań 4.42 ulega redukcji i linearyzacji w przypadku nieodkształcalnego dwupłata pozbawionego sztywnego stopnia swo-

body / np. przy badaniu nieodkształcalnego modelu zamocowanego nieruchomo w tunelu aerodynamicznym /. Operatory / macierze / odkształceń $[C]$ i $[\bar{C}]$ są wtedy tożsamościowo równe zeru a kątnatarcia w zależnościach 4.43 definiujących macierze $[A]$ i $[\bar{A}]$ jest sumą

$$\{\alpha\} = \{\alpha'\} + \{1\}\alpha_0,$$

w której oba składniki są znane.

5. Rozwiązanie równań równowagi dwupłata

5.1. Własności aerodynamiczne dwupłata

Uzyskany w poprzednim rozdziale układ nieliniowych równań algebraicznych / 4.42 / można przekształcić do postaci wygodnej do rozwiązania iteracyjnego.

$$\begin{Bmatrix} \{b^{(i+1)}\} \\ \{d^{(i+1)}\} \\ \alpha_0^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[A^w] - [\Delta\alpha][A^A] - q_\infty[C] & -[\bar{A}^w] - [\Delta\alpha][\bar{A}^A] - q_\infty[\bar{C}] & -\{1\} \\ -[\delta\alpha][A^A] & -[\delta\alpha][\bar{A}^A] & 0 \\ q_\infty\{A^P\}^T & q_\infty\{\bar{A}^P\}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

/ 5.1 /

$$\times \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha^r\} \\ \{\delta\alpha\} \\ -P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\alpha^{(i)}][A^u] & [\alpha^{(i)}][\bar{A}^u] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{b^{(i)}\} \\ \{d^{(i)}\} \\ \alpha_0^{(i)} \end{Bmatrix} \end{pmatrix}$$

Macierz diagonalna $[\alpha^{(i)}]$ utworzona jest z kolejnych elementów wektora

$$\{\alpha^{(i)}\} = \{\alpha^r\} + \{1\}\alpha_0^{(i)} + q_\infty [C]\{b^{(i)}\} + q_\infty [\bar{C}]\{d^{(i)}\}.$$

Iteracje rozpoczyna się dla $\{b^{(0)}\}=0$, $\{d^{(0)}\}=0$, $\alpha_0^{(0)}=0$ i kończy po spełnieniu kryterium zbieżności

$$\|\{b^{(i+1)}\} - \{b^{(i)}\}\| \leq \varepsilon$$

w którym $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową wektora $\{b\}$.

Uwarunkowanie macierzy odwracanej w 5.1 jest zależne od q_∞ . Ze wzrostem prędkości lotu pogarsza się. Przy pewnych wartościach $q_\infty = q_{kr}$, odpowiadających krytycznym prędkościom dywergencji zagadnienia zlinearyzowanego, macierz ta staje się osobliwa. W pobliżu q_{kr} iteracje są rozbieżne z powodu dużych błędów w wartościach elementów macierzy odwrotnej.

Metoda rozwiązania równania 4.42 w otoczeniu q_{kr} będzie omawiana w dalszej części pracy.

Zakładając, że macierz odwracana w 5.1 jest dobrze uwarunkowana, postępowanie iteracyjne pozwala określić / z wymaganą dokładnością ϵ / wektory $\{b\}, \{d\}$ oraz kąt natarcia α_p . Umożliwia to wyznaczenie z rozwinięć 4.34 sił aerodynamicznych działających na dwupłat w warunkach równowagi statycznej.

W celu porównywania różniących się geometrycznie układów aerodynamicznych wygodne jest stosowanie bezwymiarowych współczynników. Lokalne wartości współczynników siły nośnej / normalnej / C_n i momentu pochylającego C_m na płatach zdefiniowane są zależnościami:

$$C_n(y) = \frac{1}{2q_\infty c(y)} \int_{X_{LE}}^{X_{TE}} p(x,y) dx;$$

$$C_m(y) = \frac{1}{4q_\infty c^2(y)} \int_{X_{LE}}^{X_{LE} X_{TE}} (x-x_m) p(x,y) dx;$$

$x_m(y)$ - lokalne położenie punktu odniesienia dla momentów.

Uśrednione wartości współczynników siły normalnej C_n i momentu przechylającego C_{mx} na każdym płacie zdefiniowane są w następujący sposób:

$$C_n = \frac{1}{q_\infty S_p} \int_{S_p} p(x,y) dS;$$

$$C_{mx} = \frac{1}{q_\infty l S_p} \int_{S_p} y p(x,y) dS.$$

Po podstawieniu do powyższych wzorów $p(\bar{x}, \bar{y})$ określonego rozwinięciem 4.39 i wykonaniu całkowań uzyskuje się zależności wiążące C_n, C_m, C_{mx} z rozwiązaniem układu równań 5.1.

$$/ 5.2 / \quad C_n(\bar{y}) = \frac{\bar{l}}{c} \sum_{i=1}^L \left(\sqrt{1-\bar{y}^2} \sum_{j=1}^M b_{ij} U_j(\bar{y}) + \sum_{t=1}^T d_{it} \Lambda(\bar{y}_t, \bar{y}) \right);$$

$$/ 5.3 / \quad C_m(\bar{y}) = \frac{\bar{l}}{2c} \sum_{i=1}^L (\bar{x} - \bar{x}_m) \left(\sqrt{1 - \bar{y}^2} \sum_{j=1}^M b_{ij} U_j(\bar{y}) + \sum_{t=1}^T d_{it} \Lambda(\bar{y}_t, \bar{y}) \right);$$

$$/ 5.4 / \quad C_n = \frac{\bar{l}\bar{\eta}}{4c} \sum_{i=1}^L \left(b_{i1} + \sum_{t=1}^T d_{it} (\arccos \bar{y}_t - \bar{y}_t \sqrt{1 - \bar{y}_t^2}) \right);$$

$$/ 5.5 / \quad C_{mx} = \frac{\bar{l}\bar{\eta}}{8c} \sum_{i=1}^L \left(b_{i2} + \sum_{t=1}^T d_{it} \frac{(1 - \bar{y}_t^2)^{3/2}}{3} \right).$$

Dla dwupłata, w którym powierzchnie sterowe nie są wychylone / $\Delta\alpha^r = 0$ / zachodzi warunek:

$$\{d\} = 0.$$

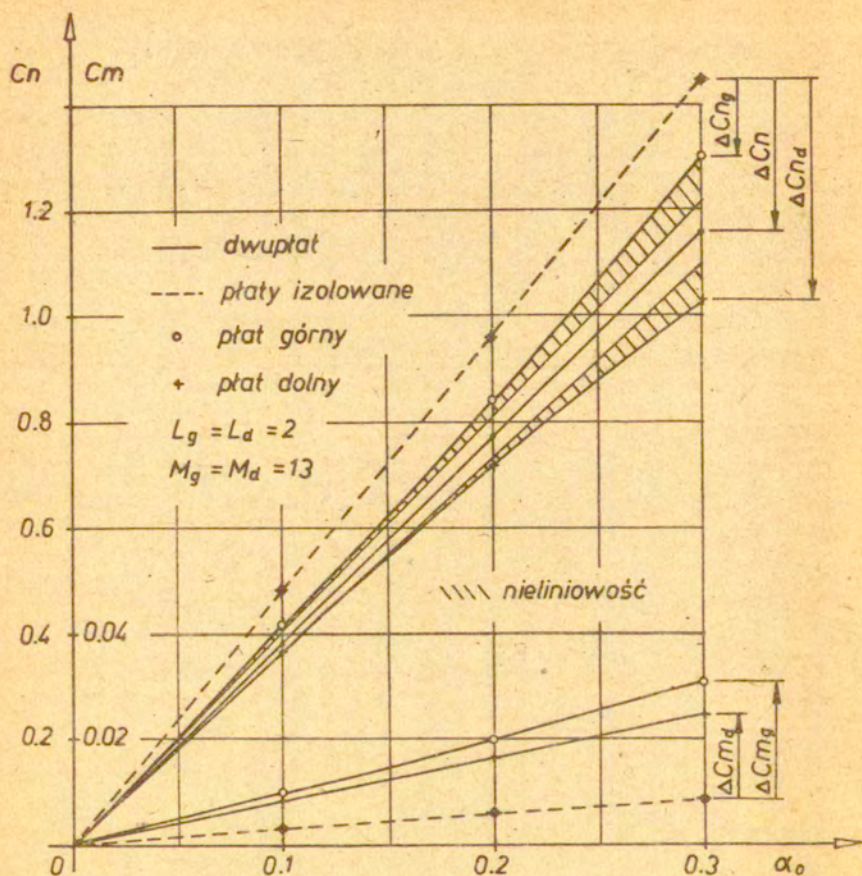
Uproszczeniu ulega iterowane równanie 5.1 oraz zależności 5.2 + 5.5.

Opracowany został program realizujący obliczenia na EMC Riad 32. Niektóre wyniki przytoczone zostaną w dalszej części, ilustrując charakterystyczne dla dwupłata własności aerodynamiczne. Obliczenia wykonano przy założeniu, że efekty elastyczne są niewielkie / $q_\infty \ll q_{kr}$ /. Własności aeroelastyczne dwupłata będą analizowane w następnym rozdziale pracy.

Podstawową charakterystyką układów aerodynamicznych, pozbawionych sztywnego stopnia swobody / utwierdzonych w płaszczyźnie symetrii /, jest zmienność współczynników C_n i C_m w funkcji kąta natarcia α_0 . Przykładowe zależności $C_n(\alpha_0)$, $C_m(\alpha_0)$ dla dwupłata o identycznych geometrycznie, prostokątnych, płaskich powierzchniach nośnych, których kształt i wzajemne usytuowanie określone jest przez:

- wydłużenie $\bar{l}/c = 10$;
- kąt składowania $\alpha_s = 0$;
- wysokość $h = 2c$;
- wyprzedzenie $a = 0$;

pokazane są na rysunku 5.1. Dla zilustrowania skutków interferencji aerodynamicznej na wykresie naniesione są charakterystyki dwupłata obliczone z pominięciem wzajemnego oddziaływania powierzchni nośnych / linie przerywane /. Dla układu, w którym uwzględniono to oddziaływanie / linie ciągłe / widoczny jest



Rys. 5.1

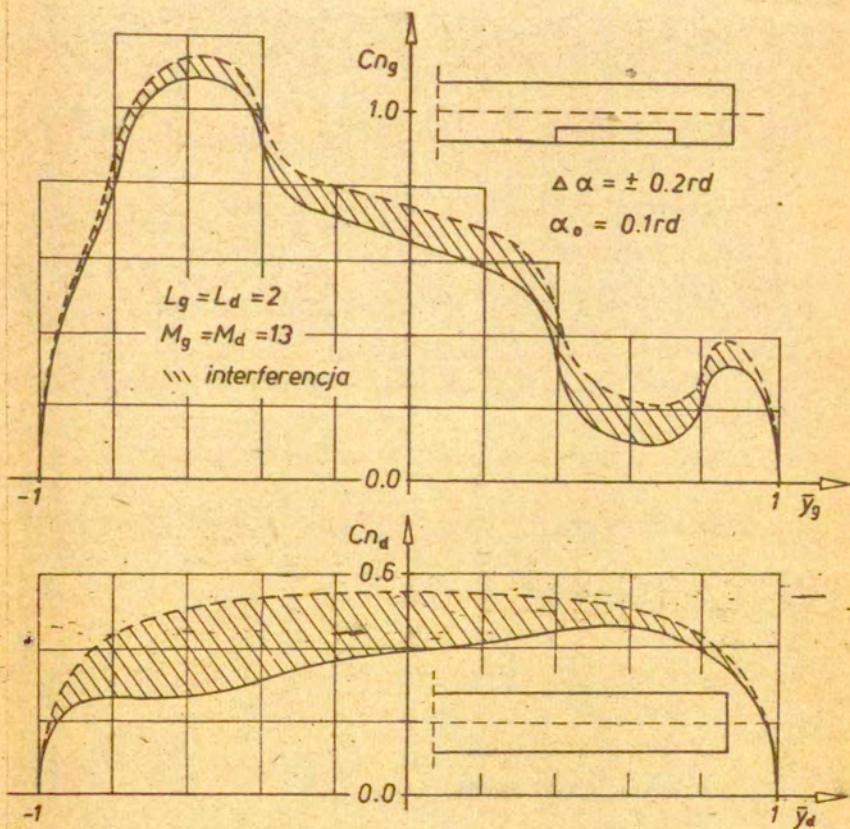
spadek siły nośnej na obu płatach / ΔC_{n_g} , ΔC_{n_d} / w całym rozpatrywanym zakresie α_0 . Ponadto charakterystyki $C_{n_g}(\alpha_0)$ i $C_{n_d}(\alpha_0)$ odbiegają od liniowych / zakreskowane pola ograniczone stycznymi w punkcie $\alpha_0=0$ /.

Dla rozpatrywanego układu nieliniowe efekty interferencyjne są niewielkie. Ich wpływ na charakterystyki aerodynamiczne dwupłata uzależniony jest od geometrii układu / wyprzedzenie, wysokość / oraz lokalnych kątów natarcia. Wpływ ten może być znaczny

ny w warunkach lotu z dużymi kątami natarcia / małe prędkości / oraz dla dwupłata silnie odkształconego / duże prędkości lotu /.

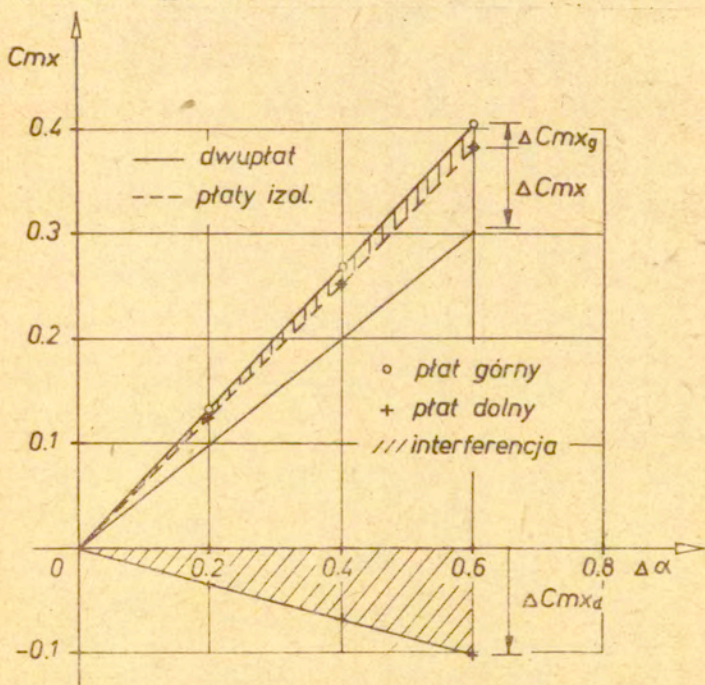
Na wykresie widoczny jest także przyrost współczynników C_m / liczonych względem punktów położonych w $1/4$ cięciwy /, występujący na skutek interferencji aerodynamicznej. Przy występującym jednocześnie spadku współczynników C_n jest to równoznaczne z przesunięciem środków parcia na każdym z płatów w kierunku krawędzi natarcia. Własność ta wynika ze zmienności wzdłuż cięciw zaburzeń prędkości indukowanych wzajemnie przez płaty.

Współczynnik $C_n(\alpha_0)$ dwupłata jest liniową funkcją kąta natarcia α_0 mimo nieliniowości charakterystyk $C_{n_g}(\alpha_0)$ i $C_{n_d}(\alpha_0)$.



Rys. 5.2

Silne efekty interferencyjne występują dla dwupłata z wychylenymi powierzchniami sterowymi. Na rysunku 5.2 pokazane są przykładowo rozkłady współczynników $C_n(y)$ przy antysymetrycznym wychyleniu lotek na górnym płacie. $|\bar{y}_r = \pm 0.4$; $\bar{y}_t = \pm 0.8$ / Dla porównania naniesione są rozkłady $C_n(y)$ / linie przerywane /, wyznaczone z pominięciem interferencji aerodynamicznej. Widoczne są zmiany jakościowe wywołane wzajemnym oddziaływaniem powierzchni nośnych. Na płacie dolnym pojawia się niesymetria w rozkładzie $C_n(y)$. Efektem zmian jest spadek efektywności lotek rozpatrywanego układu. Na rysunku 5.3 pokazana jest zależność współczynnika momentu przechylającego C_{mx} od kąta wychylenia lotek / linie ciągłe /.



Rys. 5.3

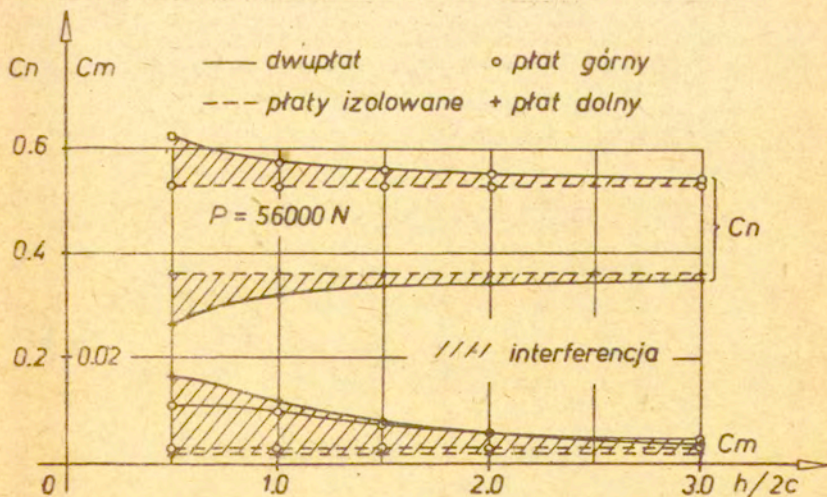
Dla porównania naniesione są wyniki obliczeń wykonanych z pominięciem oddziaływania aerodynamicznego / linie przerywane /. Zmiany w rozkładach siły nośnej, wywołane interferencją, powo-

dują wzrost momentu przechylającego na płacie górnym / ΔCmx_g , oraz powstanie momentu o przeciwnym znaku na płacie dolnym / ΔCmx_d /.

Wartości liczbowe na rysunkach 5.2 i 5.3 dotyczą dwupłata, w którym kąt sklinowania $\alpha_s = 0.035 \text{ rd}$ a pozostałe parametry nie różnią się od poprzednio rozpatrywanego układu.

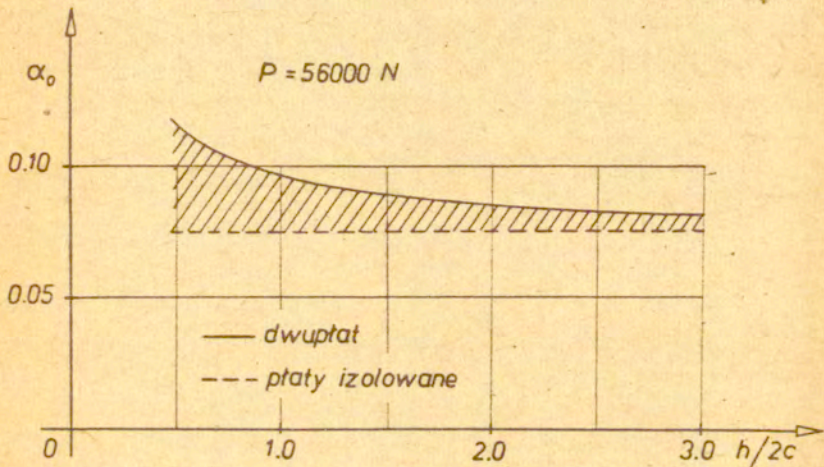
Powyższe przykłady ilustrują wpływ wzajemnego oddziaływania płatów na podstawowe charakterystyki aerodynamiczne dwupłata. W obu przypadkach zmiany w rozkładach sił, spowodowane interferencją, powodują pogorszenie tych charakterystyk. Podstawowe, w zagadnieniach mechaniki lotu, pochodne $dCn/d\alpha$ oraz $dCmx/d\Delta\alpha$ maleją. Oznacza to w praktyce, że warunki równowagi podłużnej dwupłata uzyskiwane są przy większych wartościach kątów natarcia α_0 , a sterowanie poprzeczne wymaga większych wychyleń lotek w porównaniu z układami, w których pominięto oddziaływanie płatów.

Efekty interferencji aerodynamicznej zależne są od kształtu geometrycznego oraz wzajemnego usytuowania płatów. Rysunek 5.4 przedstawia zależność współczynników Cn i Cm od wysokości h dwupłata w warunkach lotu swobodnego przy sile P równej / założonemu / ciężarowi układu.



Rys. 5.4

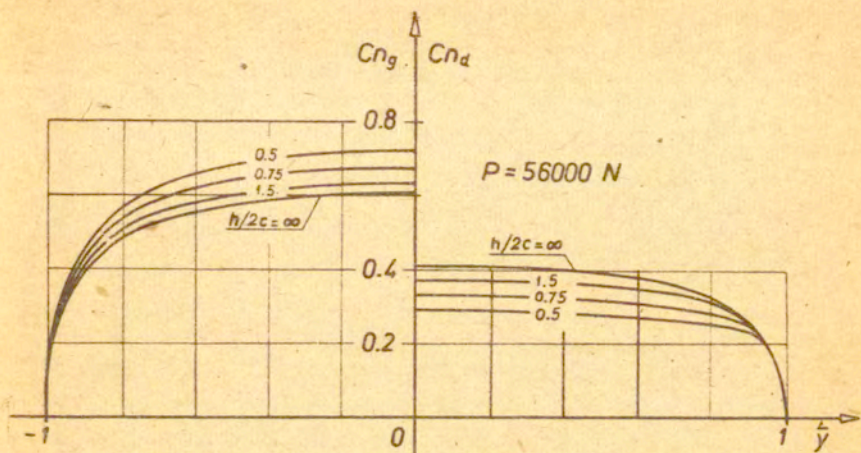
Dla praktycznie występujących wysokości względnych $h/2c = 1 \div 1.5$ efekty interferencyjne są znaczne. Oddziaływanie płatów / zakreskowane pola na wykresie / maleje przy wzroście wysokości dwupłata. Na rysunku 5.5 pokazana jest zmiana kąta natarcia rozpatrywanego dwupłata w funkcji h .



Rys. 5.5

Przebieg krzywych na obu wykresach / 5.4, 5.5 / jest charakterystyczny dla układów swobodnych. Wzrost oddziaływania płatów / zmniejszenie h / pociąga za sobą spadek wartości pochodnej $dC_n / d\alpha$ układu. Warunki równowagi spełnione są przy większych kątach natarcia dwupłata / rysunek 5.5 /. Rośnie obciążenie płata górnego i maleje obciążenie dolnego. Występują ponadto silne zmiany momentów pochylających / przesunięcia środków parcia w kierunku krawędzi natarcia płatów / / rysunek 5.4 /. Na rysunku 5.6 pokazane są rozkłady $C_n(\bar{y})$ na obu płatach wyznaczone dla kilku wysokości h dwupłata. Dla porównania naniesiono jest krzywa uzyskana bez uwzględnienia interferencji aerodynamicznej / $h/2c = \infty$ /.

Wartości liczbowe na rysunkach 5.4 + 5.6 dotyczą dwupłata identycznego z rozpatrywanym w poprzednim przykładzie / lotki niewychylone $\Delta\alpha=0$ /.



Rys. 5.6

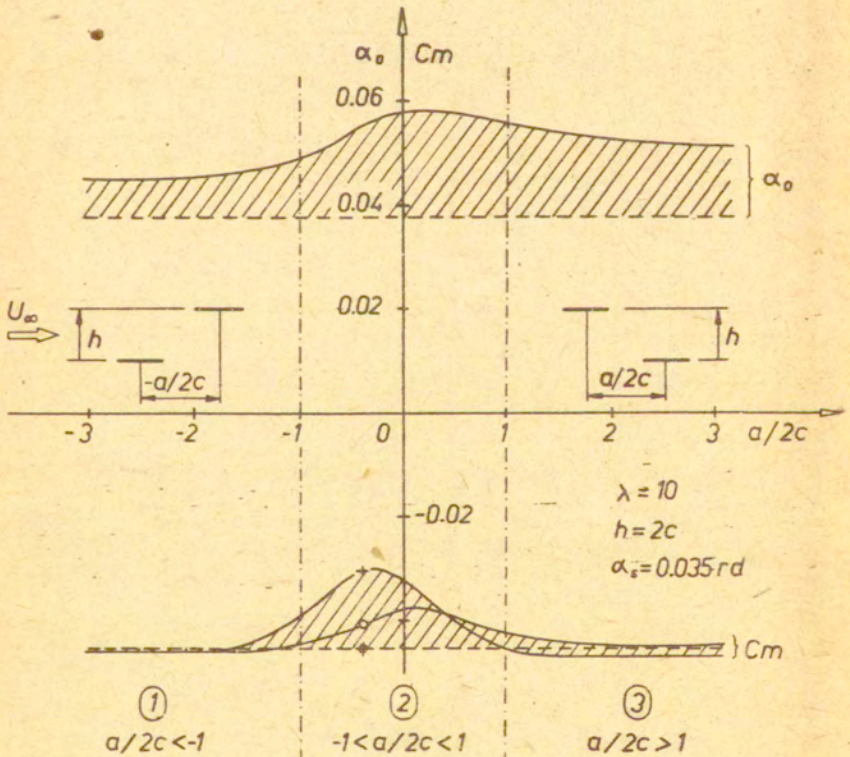
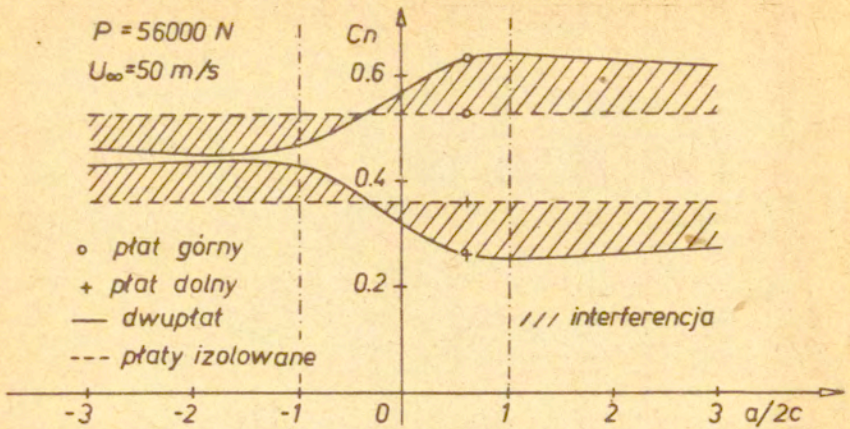
Bardziej złożony przebieg ma, przedstawiona na rysunku 5.7, zależność współczynników C_n , C_m oraz kąta natarcia α_0 od wyprzedzenia a dwupłata. Dla porównania naniesione są wyniki obliczeń uzyskane bez uwzględnienia oddziaływania / linie przerywane /. Występują trzy zakresy parametru a o różniących się efektach interferencyjnych:

W zakresie (1) $|a/2c| < 1$ / występuje zmniejszenie się współczynnika C_n na płacie górnym i zwiększenie C_n na płacie dolnym. Równowaga dwupłata zachodzi przy większych kątach natarcia α_0 dla zbliżonych wartości C_n na obu płytach. Współczynniki momentów pochylających C_m nie ulegają zmianie.

W zakresie (3) $|a/2c| > 1$ / występuje / odwrotnie niż poprzednio / wzrost współczynnika C_n na płacie górnym i spadek C_n na płacie dolnym. Współczynniki momentów C_m ulegają niewielkim zmianom a równowaga dwupłata zachowana jest przy znacznie większych kątach natarcia α_0 .

W obu omówionych zakresach zmienności parametru a zarówno współczynniki C_n i C_m jak i kąt natarcia α_0 zachowują w przybliżeniu stałą wartość:

W zakresie (2) $-1 < a/2c < 1$ / występują silne zmiany C_n , C_m oraz α_0 w funkcji wyprzedzenia a / obszar przejściowy /. Istnieje wartość a / $a/2c = -0.35$ dla rozpatrywanej konfiguracji

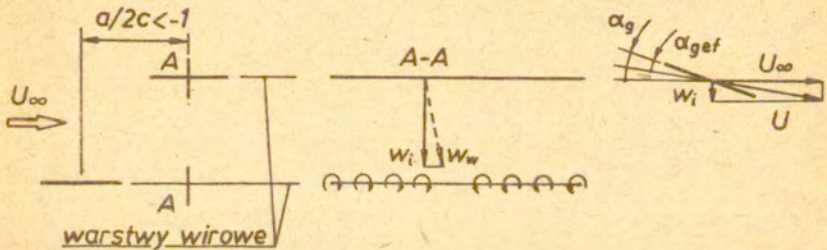


Rys. 5.7

racji /, przy której interferencja aerodynamiczna nie wpływa na współczynniki siły nośnej C_n na płatach, powodując jednak silny przyrost współczynników momentów pochylających C_m / szczególnie na płacie dolnym /. W całym zakresie (2) występuje duży przyrost kąta natarcia α_0 , niezbędny do zachowania równowagi dwupłata w locie ustalonym.

Efekty interferencyjne w obszarach (1) i (3) spowodowane są głównie oddziaływaniem na płaty warstw wirowych. Budując uproszczony model układu aerodynamicznego można wyjaśnić jakościowo efekty oddziaływania płatów.

Dla wyprzedzenia $a/2c < -1$ / zakres (1) / płatek górny znajduje się nad warstwą wirową rozciągającą się za płatem dolnym. W przekroju A-A / rysunek 5.8 / indukowane są na płacie górnym prędkości $w_w(y)$ / zmieniające efektywny kąt natarcia tego płata.

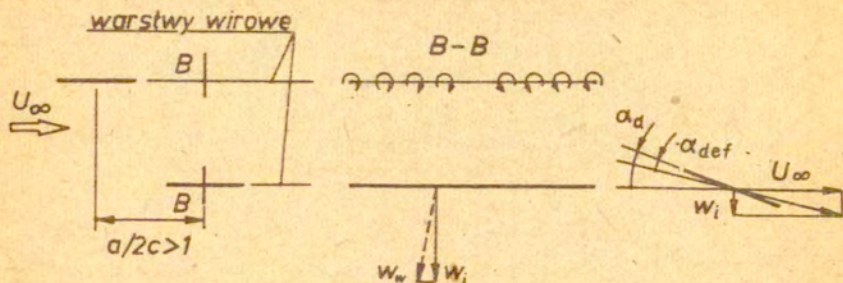


Rys. 5:8

Ponieważ natężenie wirowości jest zwykle największe w pobliżu brzegów warstwy $y = \pm \hat{l}$ / należy oczekiwać, że na całej rozpiętości płata górnego zmaleje efektywny kąt natarcia. Przy niezmiennym kącie natarcia płata dolnego, spowoduje to zmniejszenie efektywnego kąta składowania płatów α_s , decydującego o proporcji rozdziału między płatek górny i dolny, wypadkowej siły aerodynamicznej działającej na dwupłatek. W warunkach zrównoważonego lotu swobodnego powoduje to efekty pokazane na rysunku 5.7.

Dla wyprzedzenia $a/2c > 1$ / zakres (3) / efekty interferencyjne powoduje warstwa wirowa rozciągająca się za płatem górnym. Wykorzystując ponownie uproszczony model aerodynamiczny dwupłata można zilustrować jakościowo efekty oddziaływania

aerodynamicznego / rysunek 5.9 /.



Rys. 5.9.

Interferencja powoduje zmniejszenie efektywnego kąta natarcia na płacie dolnym. W rezultacie zwiększa się efektywny kąt składowania płatów α_s , powodując omówione poprzednio efekty charakterystyczne dla zakresu ③ / rysunek 5.7 /.

W obszarze przejściowym / zakres ② - $1 < a/2c < 1$ / efekty interferencyjne wywołane są przez cały układ wirowy dwupłata. Przesunięcia środków parcia na płatach / zmiany C_m / spowodowane są głównie wzajemnym oddziaływaniem wirowości związanej. Zmienność, wzdłuż cięciw, prędkości indukowanych przez tę wirowość jest równoważna zmianie krzywizny profili płatów. W rezultacie występują duże zmiany współczynników $C_m(a)$ / rysunek 5.7 / W obszarze tym występują także najsilniej nieliniowe skutki interferencji aerodynamicznej.

Wartości liczbowe na rysunku 5.7 odnoszą się do dwupłata z poprzednio rozpatrywanego przykładu, w którym zmieniono profile płatów z płaskich na wygięte tak jak linie środkowe profilu NACA 2410.

W oparciu o przytoczone dotychczas wyniki można stwierdzić, że interferencja istotnie zmienia własności aerodynamiczne dwupłata a wielkości tych zmian są uzależnione od wzajemnego usytuowania powierzchni nośnych. Zmieniają się zarówno średnie wartości współczynników aerodynamicznych jak i ich rozkłady na płatach.

5.2. Własności aeroelastyczne dwupłata

Dla prędkości, przy których nie można wyznaczyć macierzy odwrotnej w równaniu 5.1 nieprzydatna staje się metoda iteracyjna opisana w poprzednim rozdziale. Konieczne jest takie przekształcenie równań, które umożliwi otrzymanie przybliżonego rozwiązania w tym zakresie prędkości.

Ograniczając / ze względu na większą przejrzystość / dalsze rozważania do dwupłata, w którym stery nie są wychylone / $\Delta\alpha=0$ / można zapisać warunek styczności przepływu w postaci układu równań:

$$/ 5.6 / \quad (-[A^w] - [\alpha][A^u] - q_\infty[C])\{b\} - \{R\}\alpha_0 = \{\alpha^r\}.$$

Wprowadzono przy tym nowe oznaczenie wektora / macierzy kolumnowej / " przemieszczeń sztywnych ".

$$\{R\} = \{1\}$$

w członie zawierającym sztywny stopień swobody α_0 .

Część liniowa macierzy układu 5.6 staje się osobliwa dla q_∞ odpowiadającego prędkości dywergencji / liniowej /. Wynikają stąd omawiane poprzednio trudności numeryczne w metodzie iteracyjnej. Można je ominąć, posługując się reprezentacją spektralną operatora odwrotnego / resolwenty / do części liniowej operatora / macierzy / równania 5.6. W celu określenia poszukiwanej reprezentacji spektralnej, należy rozwiązać odpowiednie zagadnienie na wartości własne. Ze względu na budowę macierzy równania 5.6 nie jest możliwe bezpośrednio wykorzystanie znanych metod numerycznych. Dostosowanie układu 5.6 do tych obliczeń wymaga wyeliminowania niewiadomej α_0 na podstawie równania równowagi sił.

$$q_\infty \{A^p\}^T \{b\} = -P;$$

Wykorzystana zostanie w tym celu metoda rzutowania / omówiona szczegółowo w [27] / stosowana przy eliminacji sztywnych stopni swobody układów dynamicznych.

Poszukiwany wektor $\{b\}$ należy do N - wymiarowej przestrze-

$$\text{ni } E / N = \bar{L} \times \bar{M} /$$

$$\{b\} \in E,$$

która może być przedstawiona w postaci sumy wzajemnie ortogonalnych podprzestrzeni E_E i E_R

$$E = E_E + E_R.$$

Wektor $\{b\}$ można zapisać w postaci sumy

$$/ 5.7 / \quad \{b\} = \{X_E\} + \{X_R\}; \quad \{X_E\} \in E_E; \quad \{X_R\} \in E_R; \quad \{X_R\} \perp \{X_E\}.$$

Wykorzystując postać równania równowagi sił uzyskaną w rezultacie zastosowania kwadratur do obliczenia całek w 4.39/Dodatek II/

$$/ 5.8 / \quad q_{\infty} \{R\}^T [K]^T \{b\} = -P; \quad \{R\}^T [K]^T = \{A^P\}^T$$

i zakładając, że bazę podprzestrzeni E_R stanowi wektor $[K]\{R\}$, można określić macierz $[H]$, której kolumny stanowią bazę podprzestrzeni E_E [27]. Macierz ta / o wymiarach $N \times (N-1)$ / spełnia warunki ortogonalności

$$[H]^T [K] \{R\} = 0;$$

$$/ 5.9 / \quad \{R\}^T [K]^T [H] = 0;$$

$$[H]^T [H] = 0.$$

Poszukiwane rozwiązanie określone jest przy tych założeniach w postaci sumy:

$$/ 5.10 / \quad \{b\} = \{X_E\} + \{X_R\} = [H]\{z_E\} + [K]\{R\}z_R.$$

Z równania równowagi sił 5.8 można wyznaczyć współczynnik

$$z_R = -\frac{P}{q_{\infty}} (\{R\}^T [K]^T [K] \{R\})^{-1},$$

co pozwala określić wektor

$$\{X_R\} = [K]\{R\}z_R.$$

Wykorzystuje się przy tym własności macierzy $[H]$ / 5.9 /, na mocy których

$$\{R\}^T [K]^T [H] \{z_E\} = 0.$$

Własności te pozwalają także na wyeliminowanie niewiadomej α_0 z równania 5.6.

Po lewostronnym pomnożeniu równania 5.6 przez macierz $[K]$ a następnie zrzutowaniu na podprzestrzeń E_E / lewostronnym pomnożeniu przez macierz $[H]^T$ / oraz podstawieniu wektora $\{b\}$ w postaci sumy 5.10, otrzymuje się równanie:

$$([C'] - \frac{1}{q_\infty} [A^{w'}]) \{z_E\} = \frac{1}{q_\infty} [H]^T [K] \{r\},$$

w którym wprowadzone zostały oznaczenia

$$[C'] = [H]^T [K] [C] [H];$$

$$/ 5.11 / \quad [A^{w'}] = -[H]^T [K] [A^w] [H];$$

$$\{r\} = -[\alpha] [A^u] \{b\} - \{\alpha^r\} - ([A^w] + q_\infty [C]) \{x_R\}$$

oraz wyeliminowana niewiadoma α_0 / kąt natarcia dwupłata /. Poszukiwany wektor $\{z_E\}$ określa się z zależności

$$/ 5.12 / \quad \{z_E\} = \frac{1}{q_\infty} ([A^{w'}]^{-1} [C'] - \frac{1}{q_\infty} [I])^{-1} [A^{w'}]^{-1} [H] [K] \{r\}.$$

Pozostaje w dalszym ciągu problem określenia macierzy odwrotnej

$$[A]^{-1} = ([A^{w'}]^{-1} [C'] - \frac{1}{q_\infty} [I])^{-1},$$

bowiem macierz $[A]$ jest nadal osobiwa przy pewnych wartościach prędkości U_∞ .

Poszukiwane będą przybliżone wartości jej elementów. W tym celu wyznacza się wartości własne λ oraz odpowiadające im prawe u i lewe v wektory własne macierzy $[A^{w'}]^{-1} [C']$. Wektory normuje się tak aby utworzone z nich macierze spełniały warunek

$$[U]^T [V] = [I].$$

Pozwala to na określenie reprezentacji spektralnej macierzy $[A]^{-1}$

$$/ 5.13 / \quad [A]^{-1} = [U] ([\lambda] - \frac{1}{q_\infty} [I])^{-1} [V]^T = \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\{u\}_i \{v\}_i^T}{\lambda_i - 1/q_\infty},$$

w której $[\Lambda]$ zawiera na diagonalu wartości własne λ_i .

Dla $1/q_{\infty}$ bliskich kolejnym λ_i człony i - te w sumie 5.13 kolejno dominują. Fizycznie interesujące jest otoczenie największej wartości własnej, odpowiadającej prędkości dywergencji układu zlinearyzowanego. Oznaczając tę wartość przez λ_{max} używa się przybliżenie macierzy $[A]^{-1}$ dla $1/q_{\infty}$ bliskich λ_{max} .

$$/ 5.14 / \quad [A]^{-1} = ([A^{w'}]^{-1}[C] - \frac{1}{q_{\infty}}[I])^{-1} \approx \frac{\{u\}\{v\}^T}{\lambda_{max} - 1/q_{\infty}}.$$

Przybliżenie to określone jest przez maksymalną wartość własną λ_{max} macierzy $[A^{w'}]^{-1}[C]$ oraz odpowiadające jej wektory własne $\{u\}$ i $\{v\}$.

Po podstawieniu 5.14 do równania 5.12 uzyskuje się wektor

$$\{z_E\} = \{u\} s,$$

gdzie:

$$/ 5.15 / \quad s = \frac{1}{q_{\infty} \lambda_{max} - 1} \{v\}^T [A^{w'}]^{-1} [H][K]\{r\},$$

co umożliwia określenie wektora $\{X_E\}$

$$/ 5.16 / \quad \{X_E\} = [H]\{z_E\} = [H]\{u\} s$$

i uzyskanie poszukiwanego rozwiązania równań równowagi dwupłata

$$\{b\} = \{X_E\} + \{X_R\}.$$

Współczynnik s wyznacza się z równania uzyskanego po podstawieniu do 5.15 wektora $\{r\}$, określonego zależnością / 5.11 /

$$/ 5.17 / \quad (1 - q_{\infty} \lambda_{max}) s = \{v\}^T [A^{w'}]^{-1} [H][K] \times \\ \times (\{\alpha^r\} + ([A^{w'}] + q_{\infty}[C])\{X_R\} + [\alpha][A^u] ([H]\{u\} s + \{X_R\})).$$

Jest to równanie kwadratowe względem s i zawiera ponadto niewiadomą α_0 /" przemieszczenie sztywnie " dwupłata /. Diagonalna macierz $[\alpha]$ utworzona jest z kolejnych elementów wektora

$$\{\alpha\} = \{\alpha^r\} + \{R\} \alpha_0 + q_{\infty}[C] ([H]\{u\} s + \{X_R\}).$$

Wykorzystując równanie 5.6 przekształcone do postaci

$$/ 5.18 / \quad ([K][R])^T [K] (-[A^W] - q_\infty [C]) \{X_E\} = ([K][R])^T [K] ([R] \alpha_0 - \{r\}),$$

można wyznaczyć S i α_0 iterując na przemian równanie 5.17 i 5.18.

W pierwszej iteracji zakłada się $\alpha_0^{(0)} = 0$ a następnie rozwiązuje równanie 5.17, uzyskując dwa pierwiastki $S_{i,2}^{(1)}$. Po wyznaczeniu z 5.16 i 5.7 wektorów $\{b\}_{i,2}^{(1)}$ i podstawieniu do 5.18 rozwiązuje się otrzymane równania, uzyskując dwie wartości $\alpha_{0,i,2}^{(1)}$. Powtarzając ten cykl otrzymuje się w kolejnych iteracjach podwojoną liczbę rozwiązań. Ponieważ fizycznie interesujące są wyłącznie ekstremalne wartości sił aerodynamicznych na płatach, w kolejnych iteracjach zachowuje się dwie ekstremalne wartości $S^{(i)}$ z czterech pierwiastków uzyskanych w wyniku rozwiązania równania 5.17 dla $\alpha_{0,i,2}^{(i-1)}$.

Zastosowana metoda prowadzi w rezultacie do przybliżonego rozwiązania równań równowagi dwupłata w postaci sumy

$$\{b\} = \{X_E\} + \{X_R\},$$

w której $\{X_R\}$ wyznaczone jest bezpośrednio z równania równowagi sił, natomiast $\{X_E\}$ jest jednoczłonowym rozwinięciem opartym na rozwiązaniu zagadnienia na wartości własne macierzy $[A^W]^{-1}[C]$. Współczynnik rozwinięcia S wyznaczony jest z równania kwadratowego co jest konsekwencją nieliniowości układu 5.1.

Uogólnienie opisanej metody dla dwupłata z wychylonymi sterami / $\Delta\alpha \neq 0$ / prowadzi do bardziej złożonych zależności końcowych. Nie przedstawia jednak nowych problemów merytorycznych.

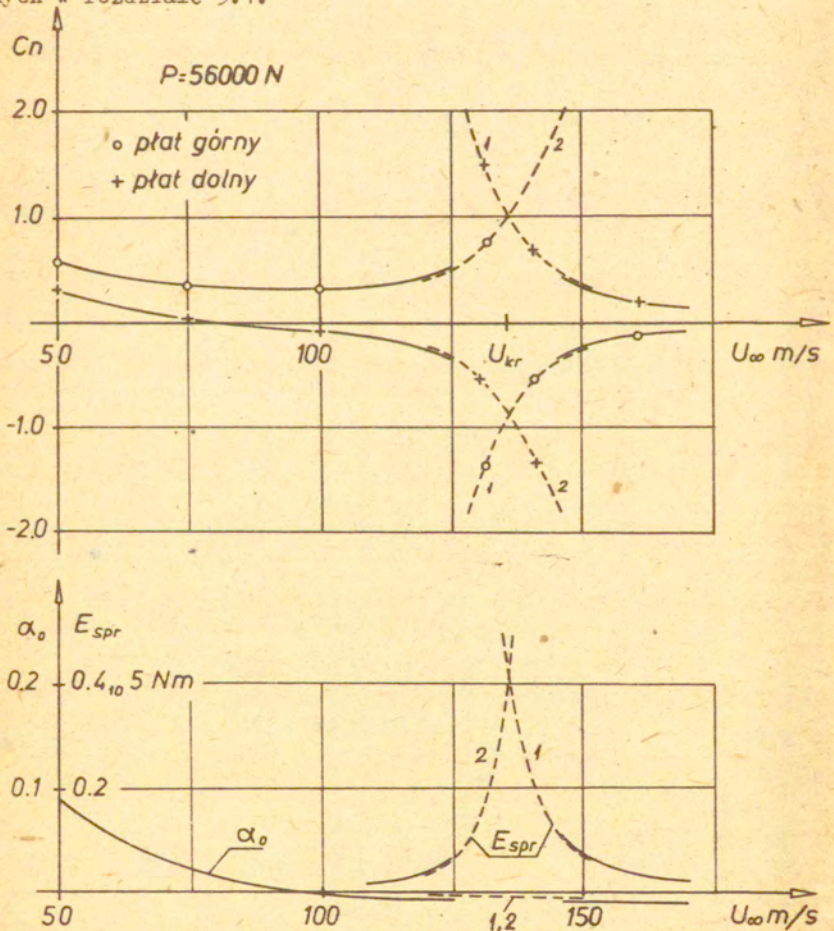
Opracowany został program umożliwiający obliczenie charakterystyk aeroelastycznych dwupłata. Przykładowe wyniki obliczeń będą przytoczone w dalszej części, ilustrując własności nieliniowego, odkształcalnego układu oddziałujących powierzchni nośnych.

Na rysunku 5.10 pokazana jest zależność współczynników siły normalnej C_n na płatach, kąta natarcia α_0 dwupłata oraz energii odkształceń sprężystych E_{Spr} od prędkości lotu U_∞ . Wartość E_{Spr} określona jest zależnością

$$E_{spr} = 0.5 \left(\int_{-l_g}^{l_g} \theta_g(y) m_{sg}(y) dy + \int_{-l_d}^{l_d} \theta_d(y) m_{sd}(y) dy \right),$$

w której $\theta_g(y)$ i $\theta_d(y)$ są kątami skręceń płatów a $m_{sg}(y)$ i $m_{sd}(y)$ momentami sił aerodynamicznych zredukowanych do osi skręceń.

Linie ciągłe na rysunku odpowiadają zakresom prędkości, dla których rozwiązania uzyskane zostały na drodze iteracji opisanych w rozdziale 5.1.

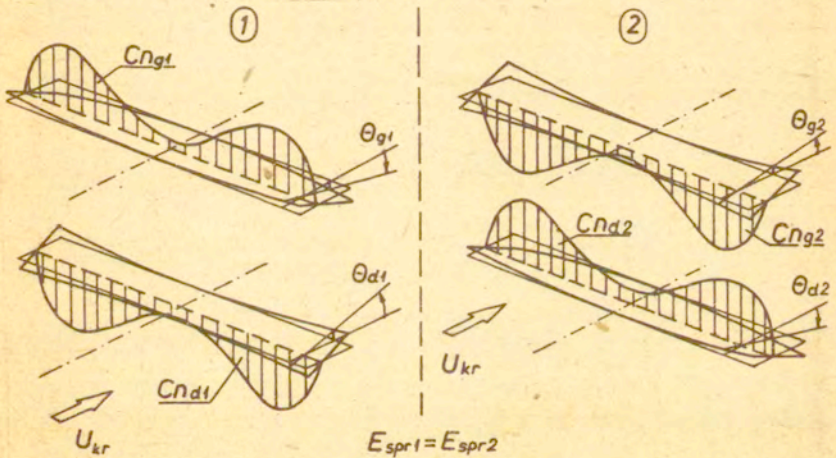


Rys. 5.10

Linie przerywane są rozwiązaniami w otoczeniu prędkości krytycznej. Cyfry 1,2 odnoszą się do krzywych odpowiadających różnym pierwiastkom równania 5.17.

W całym zakresie prędkości równowaga dwupłata zachodzi przy skończonych odkształceniach powierzchni nośnych. W otoczeniu prędkości krytycznej U_{kr} istnieją dwa rozwiązania nieliniowych równań równowagi o różnych energiach odkształceń sprężystych płatów. Sens fizyczny ma tylko to rozwiązanie, któremu odpowiadają mniejsze deformacje dwupłata / mniejsza wartość E_{spr} /.

Przy prędkości krytycznej U_{kr} możliwe są jednocześnie dwie, równoważne energetycznie, postacie deformacji powierzchni nośnych / rysunek 5.11 /.



Rys. 5.11

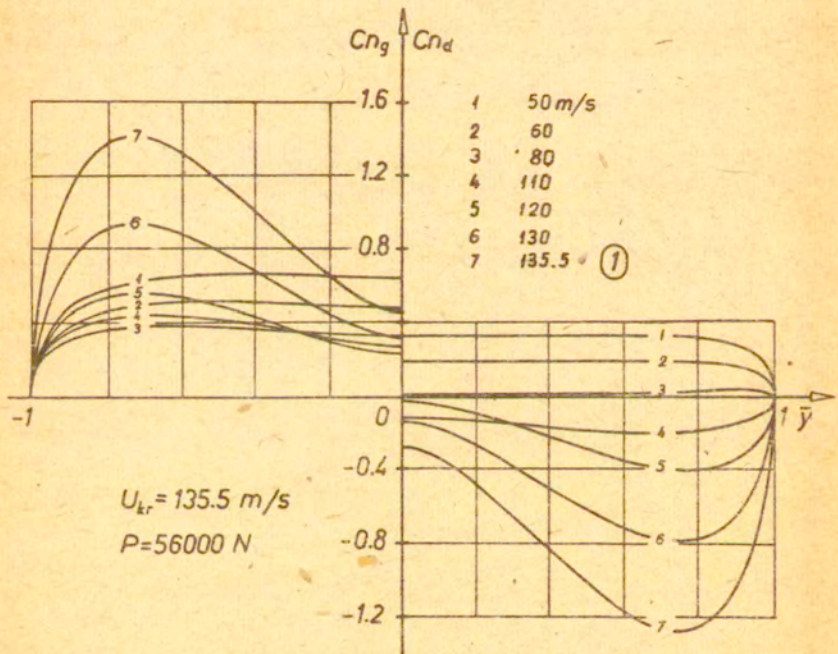
Taki stan może być traktowany jako definicja "rozbieżności skrętnej dwupłata" / dywergencja dwupłata /.

Omówiony, nieliniowy układ aerodynamiczny różni się jakościowo od układu liniowego. Zakładając w 5.17 $[A^u]=0$ / $u=0$ / uzyskuje się zlinearyzowane równanie

$$(1 - q_{\infty} \lambda_{max}) S = \{v\}^T [A^w]^{-1} [H][K] (\{\alpha\} + [A^w] \{X_R\} + q_{\infty} [C] \{X_R\}),$$

określające współczynnik S : Dla $U_{\infty} \rightarrow U_{kr}$; ($q_{\infty} \rightarrow 1/\lambda_{max}$), wartości S dążą do nieskończoności ($|S| \rightarrow \infty$) przy czym granica prawostronna różni się znakiem od lewostronnej. Tak więc odkształcenia układu liniowego określone są jednoznacznie dla $U_{\infty} \neq U_{kr}$ i wzrastają nieograniczenie przy $U_{\infty} \rightarrow U_{kr}$ co stanowi istotną różnicę w porównaniu z układem nieliniowym.

Deformacje płatów powodują zmiany w rozkładach współczynników aerodynamicznych. Na rysunku 5.12 pokazane są funkcje $C_n(y)$ dla kilku prędkości lotu U_{∞} .



Rys. 5.12

Poszczególne krzywe odpowiadają punktom z wykresu $C_n(U_{\infty})$ na rysunku 5.10 / (1) - odpowiada krzywej 1 z rysunku 5.10 /.

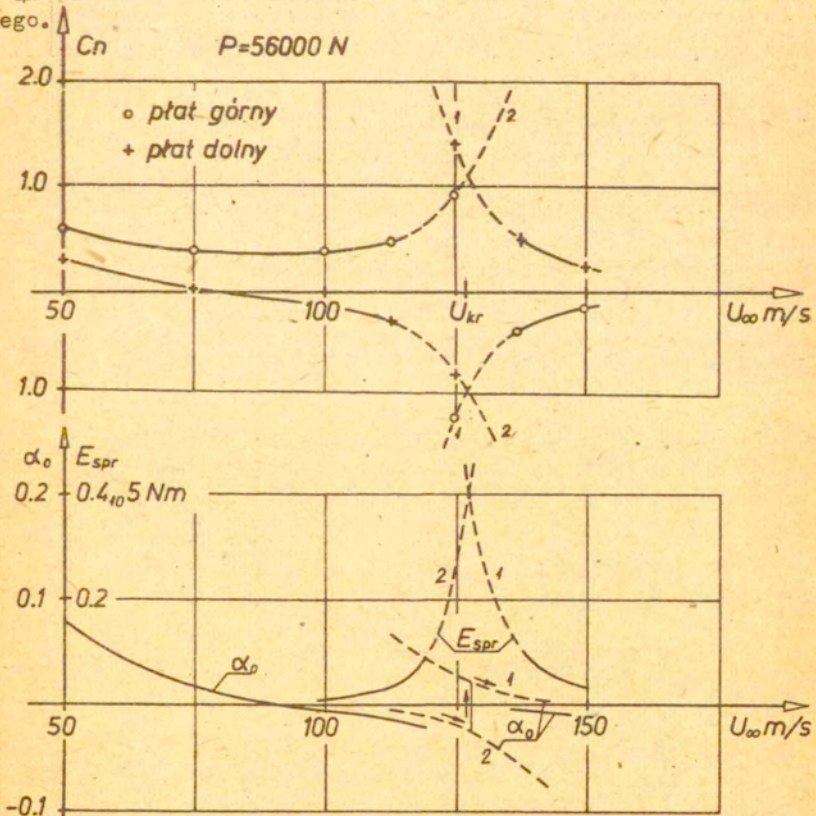
Wartości liczbowe na wykresach / rysunki 5.10, 5.12 / dotyczą dwupłata o identycznych geometrycznie i sztywnościowo, płaskich, prostokątnych powierzchniach nośnych, dla których:

- wydłużenie $\bar{l}/c=10$;
- kąt sklinowania $\alpha_s=0.035$;
- położenie osi skręceń $x_s/2c = 0.35$ / od krawędzi natarcia /;
- wysokość $h=2c$;
- wyprzedzenie $a=0$.

Rozkłady podatności skrętnej płatów określone są funkcją:

$$1/GJ(|y|) = 2_{10}4 + 800y^2; \quad 0 \leq |y| \leq \bar{l}.$$

Dla układów, w których płaty nie są identyczne geometrycznie lub sztywnościowo zmianie jakościowej ulega przebieg funkcji $\alpha_o(U_\infty)$. Na rysunku 5.13 pokazane są krzywe $C_n(U_\infty)$, $\alpha_o(U_\infty)$ i $E_{spr}(U_\infty)$ dla dwupłata o zwiększonej o 25% podatności płata dolnego.



Rys. 5.13

W otoczeniu prędkości krytycznej istnieją dwie wartości, niezbędne do równowagi, kąta natarcia dwupłata α_0 . Sens fizyczny ma rozwiązanie, któremu odpowiadają mniejsze deformacje powierzchni nośnych / mniejsza energia deformacji sprężystych /. Przy prędkości krytycznej (U_{kr}) możliwe są dwie, równoważne, postacie odkształceń płatów, przy różniących się wartościach kątów natarcia dwupłata.

W odróżnieniu od modelu liniowego, pozwalającego wyznaczyć wyłącznie prędkość dywergencji, model nieliniowy umożliwia także określenie wielkości sił aerodynamicznych na płatach,

6. Uwagi końcowe

Celem pracy było określenie wpływu interferencji aerodynamicznej oraz odkształcalności powierzchni nośnych na obciążenia zewnętrzne dwupłata w warunkach ustalonego lotu swobodnego.

W oparciu o założenia potencjalności przepływu oraz liniowej sprężystości konstrukcji, zbudowany został model obliczeniowy dwupłata, który mimo swej prostoty, zachował wszystkie charakterystyczne cechy układu oddziałujących powierzchni nośnych. Układ równań całkowych, stanowiący opis tego modelu, utworzony był w oparciu o równania równowagi sił działających na dwupłat oraz związki między siłami aerodynamicznymi a zaburzeniami przepływu i odkształceniami płatów. Uzyskane równania są nieliniowe mimo linearyzacji przepływu w otoczeniu każdego z płatów. Jest to wynik wzajemnego oddziaływania aerodynamicznego powierzchni nośnych, wymagającego uwzględnienia w warunku brzegowym zarówno składowych zaburzeń prędkości prostopadłych jak i stycznych na powierzchniach płatów.

Rozwiązanie całkowych równań równowagi było możliwe wyłącznie na drodze numerycznej. Wymagało to przybliżenia tych równań układem nieliniowych równań algebraicznych. Zastosowana została w tym celu metoda prowadząca do zastąpienia każdego płata układem linii nośnych, równoważnych ciąglemu rozkładowi sił aerodynamicznych. Ze względu na nieliniowość równań rozwiązanie poszukiwane było na drodze iteracyjnej. Zbieżność ulegała jednak znacznemu pogorszeniu przy złym uwarunkowaniu iterowanego układu, zależnym bezpośrednio od wartości ciśnienia dynamicznego przepływu. Dla prędkości odpowiadających ciśnieniom stanowiącym wartości własne tej macierzy / prędkości dywergencji modelu zlinearyzowanego / oraz w ich otoczeniu, konieczne było zastosowanie innego sposobu rozwiązania równań. Wykorzystana została przybliżona metoda wyznaczania macierzy odwrotnej układu równań, oparta na jej reprezentacji spektralnej.

Mimo prostoty zastosowanego modelu obliczeniowego, przytoczone wyniki potwierdzają znane / między innymi z badań eksperymentalnych / oraz pozwalają zbadać nowe jakościowo, własności dwupłata.

W porównaniu z wynikami analiz przeprowadzonych bez uwzględnienia interferencji aerodynamicznej, stwierdzono zmiany rozkładów sił aerodynamicznych na płatach, pogarszające podstawowe / z punktu widzenia mechaniki lotu / charakterystyki aerodynamiczne dwupłata / rysunki 5.1 + 5.3 /. Obliczenia potwierdzają także zależność efektów interferencyjnych od wzajemnego usytuowania płatów. Szczególnie złożony jest wpływ wyprzedzenia / odległości płatów mierzonej w kierunku przepływu / na rozdział sił aerodynamicznych między płacami w warunkach lotu swobodnego / rysunek 5.7 /. Istotną rolę odgrywa w tym przypadku oddziaływanie powierzchni nośnych i warstw wirowych.

Analizowane były także nowe jakościowo zjawiska związane z uwzględnieniem wpływu odkształceń powierzchni nośnych na siły aerodynamiczne oraz warunki równowagi dwupłata.

W odróżnieniu od jednopłata, stwierdzono, że dla dwupłata siły aerodynamiczne, odkształcenia oraz kąty natarcia mają wartości skończone przy dowolnych prędkościach lotu. Jest to rezultat nieliniowości aerodynamicznej, wynikającej ze wzajemnego oddziaływania powierzchni nośnych. W otoczeniu prędkości krytycznej dywergencji układu zlinearyzowanego możliwe są dwa stany równowagi dwupłata, różniące się odkształceniami. Przy pewnej prędkości / różnej naogół od prędkości dywergencji układu zlinearyzowanego / istnieją dwie różne postacie / ograniczonych / odkształceń, przy których energie deformacji sprężystych płatów są równe. Ten stan układu przyjęto jako definicję " dywergencji dwupłata ".

Wyniki obliczeń / rysunki 5.10, 5.12, 5.13 / potwierdzają przeprowadzone analizy. Wykazana jest także dobra zgodność rozwiązań przybliżonych / uzyskanych w otoczeniu prędkości krytycznej dywergencji / z rozwiązaniami iteracyjnymi dla prędkości, przy których zbieżność iteracji jest dobra.

Przedstawione wyniki nie obejmują pełnej analizy obciążeń odkształcalnego dwupłata. Obliczeniowe badania wpływu wszystkich parametrów geometrycznych i sztywnościowych układu są praktycznie niemożliwe. Niedogodność ta występuje prawie zawsze w zagadnieniach, które nie posiadają rozwiązań zamkniętych.

Zaproponowany model pozwala łatwo obliczyć opór indukowany

dwupłata. Biorąc bowiem pod uwagę fakt, że siły aerodynamiczne / ciśnienia / mają kierunek prostopadły do powierzchni płatów, wystarczy w tym celu obliczyć składowe styczne do kierunku przepływu niezaburzonego, korzystając ze znanych / jako rozwiązanie równań równowagi / składowych normalnych.

W ramach dalszej rozbudowy modelu można, w pierwszej kolejności, uwzględnić w warunkach równowagi opór indukowany oraz włączyć do rozważań usterzenie wysokości. Wymagałoby to rezygnacji z szeregu założeń uproszczających / dotyczących na przykład tożsamościowego spełnienia równania składowych sił równoległych do osi x / 3.15a / oraz momentów względem osi y / 3.15b// i prowadziłyby do rozbudowy układu równań opisujących równowagę.

W dalszej kolejności można obliczyć w przybliżeniu opór profilowy, nakładając na przepływ potencjalny na powierzchniach nośnych, warstwy przyścienne.

Celowa byłaby także doświadczalna weryfikacja uzyskanych wyników / szczególnie w otoczeniu prędkości krytycznej dywergencji /:

7. Literatura

1. A. BETZ - Die gegenseitige Beeinflussung zweier Tragflächen, Z. Flugt. Bd. 5 / 1914 /
2. D. KÜCHEMANN - Berechnung der Auftriebsverteilung über die einzelnen Flügel eines Doppeldeckers, Luftfahrtforsch. / 1937 /
3. S. DEMCZUK, W. POTKAŃSKI - Potencjalny opływ dwupłata, Prace Instytutu Lotnictwa nr 62 / 1975 /
4. J. WEISSINGER - Über eine Erweiterung der Prandtl'schen Theorie der tragenden Linie, Math. Nachricht. Bd. 2 / 1949 /
5. W. J. PROSNAK - On the Flow around an Arbitrary Multiplane. Biull. PAN Vol XXIV nr 7-8 / 1976 /
6. W. J. PROSNAK, M. KLONOWSKA - Algorytmy obliczenia współczynników aerodynamicznych dwupłata, Prace IPPT PAN / 1974 /
7. R. B. ADDOMS - Aerodynamic Design of High - Performance Biplane Wings, Journal of Aircraft Vol. 12. No. 8. / 1975 /
8. M. M. MUNK - The air forces on a systematic series of biplane and triplane cellule models, NACA Rep. 256 / 1927 /
9. M. KNIGHT, R. NOYES - Wind tunnel pressure distribution tests on a series of biplane wing models, NACA TN 310, 325, 330 / 1929 /
10. R. NOYES - Pressure distribution tests on a series of Clark biplane cellule with special reference to stability, NACA Rep. 417 / 1932 /
11. E. C. OLSON, B. P. SELBERG - Experimental Determination of Improved Aerodynamic Characteristics Utilizing Biplane Wing Configuration, Journal of Aircraft, Vol. 13, No. 4, / 1976 /
12. J. STASIAK - Wpływ wychylenia kłapy na współczynniki siły nośnej płatów pracujących w układzie dwupłata, Prace Instytutu Lotnictwa nr 64 / 1976 /
13. W. FISZDON - Wstęp do aerospężystości, PWN / 1951 /
14. Y. C. FUNG - An introduction to the theory of aeroelasticity, John Wiley and Sons / 1955 /
15. R. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY - Principles of aeroelasticity, John Wiley and Sons / 1962 /

16. R.BISPLINGHOFF, H.ASHLEY, R.HALFMAN - Aeroelasticity, Addison - Wesley Publishing Company /1955/
17. H.W.FÖRSCHING - Grundlagen der Aeroelastik, Springer Verlag / 1974 /
18. T.WEISSHAAR, H.ASHLEY - Static Aeroelasticity and the Flying Wing, Journal of Aircraft, Vol.10 No.10 /1973/
19. T.WEISSHAAR - Influence of Static Aeroelasticity on Oblique Winged Aircraft, Journal of Aircraft, Vol.11, No 4 /1974/
20. T.WEISSHAAR, H.ASHLEY - Static Aeroelasticity and the Flying Wing, Revisited, Journal of Aircraft, Vol.11, No.11 /1974/
21. L.GWIN - Optimal Aeroelastic Design of an Oblique Wing Structure, Journal of Aircraft, Vol.13, No.5 /1976/
22. R.JONES, J.NISBET - Aeroelastic stability and of an oblique wing, Aeronautical Journal, August /1976/
23. H.ASHLEY, M.LANDAHL - Aerodynamics of Wings and Bodies, tłum.ros. /1969/
24. Z.BRZOSKA - Statyka i stateczność konstrukcji cienkościennych i prętowych, PWN /1965/
25. M.KRZYŻAŃSKI - Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, PWN /1957/
26. M.NOWAK - A Simplified Method of Integrating the Equation of the Lifting Surface and Its Connection with a Certain System of Lifting Lines, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences Serie des sciences techniques, Vol.XXVII, No.1 /1979/
27. M.NOWAK - Equation of Motion of Free Material Systems Composed of Elastic Bodies, Archiwum Budowy Maszyn, Tom XVII, Zeszyt 1, /1970/
28. M.NOWAK, W.POTKAŃSKI - Metoda analizy flatteru samolotów lekkich, Prace Instytutu Lotnictwa nr.65 /1976/
29. A.RALSTON - Wstęp do analizy numerycznej, PWN /1971/
30. W.J.PROSNAK - Mechanika płynów, PWN /1970/
31. H.SCHLICHTING, E.TRUCKENBRODT - Aerodynamik des Flugzeuges, Springer-Verlag /1960/

32. R.SCANLAN, R.ROSENBAUM - Drgania i flatter samolotu, PWN /1964/
33. Y.C.FUNG - Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN /1969/
34. S.PASZKOWSKI - Zastosowanie numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa, PWN /1975/
35. I.RYŻYK, I.GRADSZTEJN - Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów, PWN /1964/

Dodatek I

Kwadratura interpolacyjna z funkcją wagową $\Lambda_t(\bar{\eta})$.

Poszukiwane są współczynniki wagowe kwadratury

$$/ \text{I.1} / \quad \int_{-1}^1 \Lambda_t(\bar{\eta}) f(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \approx \sum_{j=1}^J B_j(\bar{y}_t) f(\bar{\eta}_j)$$

opartej na węzłach

$$\bar{\eta}_j = \cos \frac{j\pi}{J+1},$$

w której

$$\Lambda_t(\bar{\eta}) = \frac{1}{\pi} \left((\bar{\eta} - \bar{y}_t) \ln \left| \frac{1 - \bar{y}_t \bar{\eta} + \sqrt{1 - \bar{y}_t^2} \sqrt{1 - \bar{\eta}^2}}{1 - \bar{y}_t \bar{\eta} - \sqrt{1 - \bar{y}_t^2} \sqrt{1 - \bar{\eta}^2}} \right| + 2\sqrt{1 - \bar{\eta}^2} \arccos \bar{y}_t \right)$$

jest funkcją wagową.

Po wprowadzeniu pomocniczej funkcji

$$\bar{\Lambda}(\bar{y}, \bar{\eta}) = \ln \left| \frac{1 - \bar{y} \bar{\eta} + \sqrt{1 - \bar{y}^2} \sqrt{1 - \bar{\eta}^2}}{1 - \bar{y} \bar{\eta} - \sqrt{1 - \bar{y}^2} \sqrt{1 - \bar{\eta}^2}} \right|,$$

związanej z $\Lambda_t(\bar{\eta})$ zależnością

$$/ \text{I.2} / \quad \Lambda_t(\bar{\eta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\bar{y}_t}^1 \bar{\Lambda}(\bar{y}, \bar{\eta}) d\bar{y},$$

buduje się kwadraturę pomocniczą

$$/ \text{I.3} / \quad \int_{-1}^1 \bar{\Lambda}(\bar{y}, \bar{\eta}) F(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \sum_{j=1}^J F(\bar{\eta}_j) A_j(\bar{y}).$$

W tym celu oblicza się całkę I.3 / przez części /

$$/ \text{I.4} / \quad \int_{-1}^1 \bar{\Lambda}(\bar{y}, \bar{\eta}) F(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = - \int \sqrt{\frac{1 - \bar{y}^2}{1 + \bar{y}^2}} \frac{2}{(\bar{y} - \bar{\eta})} \left(\int F(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \right) d\bar{\eta}.$$

Po wprowadzeniu zmiennych

$$\bar{\eta} = \cos \varphi; \quad \bar{y} = \cos \nu$$

można zapisać

$$/ \text{I.5} / \quad \int F(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = - \int f(\varphi) \sin \varphi d\varphi,$$

przy czym

$$f(\varphi) = F(\cos \varphi) = F(\bar{\eta}).$$

Funkcję $f(\varphi) \sin \varphi$ aproksymuje się szeregiem trygonometrycznym / Fouriera /

$$/ 1.6 / \quad f(\varphi) \sin \varphi \approx 2 \sum_{i=1}^J a_i \sin i \varphi,$$

w którym współczynniki

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi) \sin \varphi \sin i \varphi d\varphi$$

określa się przez przybliżone obliczenie całek

$$a_i = \frac{1}{J+1} \sum_{j=1}^J f(\varphi_j) \sin \varphi_j \sin i \varphi_j; \quad \varphi_j = \frac{j\pi}{J+1}.$$

Po podstawieniu a_i do rozwinięcia 1.6 uzyskuje się

$$f(\varphi) \sin \varphi = \frac{2}{J+1} \sum_{j=1}^J f(\varphi_j) \sin \varphi_j \sum_{i=1}^J \sin i \varphi_j \sin i \varphi,$$

co pozwala wyznaczyć całkę 1.5

$$/ 1.7 / \quad \int f(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{-2}{J+1} \sum_{j=1}^J f(\varphi_j) \sin \varphi_j \sum_{i=1}^J \frac{1}{i} \sin i \varphi_j \cos i \varphi.$$

Wykorzystując 1.4 oraz 1.7 można określić współczynniki kwadratury pomocniczej 1.3 wykonując przekształcenia

$$\int_{-1}^1 \bar{\Lambda}(\bar{y}, \bar{\eta}) F(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \approx \sum_{j=1}^J F(\bar{\eta}_j) A_j(\bar{y}) =$$

$$/ 1.8 / \quad = -\frac{4 \sin \nu}{J+1} \sum_{j=1}^J f(\varphi_j) \sin \varphi_j \sum_{i=1}^J \frac{1}{i} \sin i \varphi_j \int_0^{\pi} \frac{\cos j \varphi d\varphi}{\cos \nu - \cos \varphi} =$$

$$= \sum_{j=1}^J f(\varphi_j) \left(\frac{4\pi}{J+1} \sin \varphi_j \sum_{i=1}^J \frac{1}{i} \sin i \varphi_j \sin i \nu \right).$$

Po powrocie do zmiennych $\bar{y}, \bar{\eta}$ współczynniki te można wyrazić przez wielomiany Czebyszewa

$$U_{j-1}(\bar{\eta}) = \frac{\sin j \varphi}{\sin \varphi}; \quad \varphi = \arccos \bar{\eta},$$

uzyskując zależność

$$A_j(\bar{y}) = \sum_{j=0}^J \left(\frac{4\pi \sqrt{1-\bar{y}^2}}{(j+1)(j+1)} U_j(\bar{y}) \right) (1-\bar{\eta}_j^2) U_j(\bar{\eta}_j).$$

Współczynniki wagowe poszukiwanej kwadratury można wyznaczyć korzystając z zależności I:2 wiążącej funkcje $\Lambda(\bar{\eta})$ oraz $\bar{\Lambda}(\bar{y}, \bar{\eta})$

$$\begin{aligned} \text{/I.9 /} \quad \int_{-1}^1 \Lambda_t(\bar{\eta}) F(\bar{\eta}) d\bar{\eta} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\int_{\bar{y}_t}^1 \bar{\Lambda}(\bar{y}, \bar{\eta}) d\bar{y} \right) F(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \\ &= \sum_{j=1}^J F(\bar{\eta}_j) \left(\frac{1}{\pi} \int_{\bar{y}_t}^1 A_j(\bar{y}) d\bar{y} \right) = \sum_{j=1}^J F(\bar{\eta}_j) B_j(\bar{y}_t). \end{aligned}$$

Całkę w I:9 można policzyć analitycznie

$$\int_{\bar{y}_t}^1 \sqrt{1-\bar{y}^2} U_j(\bar{y}) d\bar{y} = \begin{cases} \frac{1}{2} (\bar{y}_t \sqrt{1-\bar{y}_t^2} - \arccos \bar{y}_t) & \text{gd } j=0 \\ \frac{1}{2} \sqrt{1-\bar{y}_t^2} \left(\frac{U_{j+1}(\bar{y}_t)}{j+2} - \frac{U_{j-1}(\bar{y}_t)}{j} \right) & \text{gd } j>0 \end{cases}$$

Uzyskuje się w ten sposób wyrażenie rekurencyjne pozwalające określić wagi $B_j(\bar{y}_t)$ poszukiwanej kwadratury

$$\begin{aligned} B_j(\bar{y}_t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\bar{y}_t}^1 A_j(\bar{y}) d\bar{y} = \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{j+1} (b_{i+2}(\bar{y}_t) - b_i(\bar{y}_t)) U_i(\bar{\eta}_j), \end{aligned}$$

gdzie:

$$b_0 = \frac{2}{j+1} \arccos \bar{y}_t;$$

$$b_i = \frac{2}{j+1} \sqrt{1-\bar{y}_t^2} \frac{U_{i-1}(\bar{y}_t)}{i}; \quad (i=1, 2, \dots, j-1).$$

Wykorzystując własności wielomianów Czebyszewa wyrażenie to można zapisać w formie bardziej przystosowanej do obliczeń.

$$B_j(\bar{y}_t) = (1 - \bar{\eta}_j^2) z_0,$$

gdzie:

$$z_i = 2 \eta_j z_{i+1} - z_{i+2} + \frac{1}{j-1} (b_i(\bar{y}_t) - b_{i+2}(\bar{y}_t));$$
$$(i = J-1, J-2, \dots, 1, 0);$$

$$z_{J+1} = z_J = 0.$$

Kwadratura interpolacyjna I.1 daje dokładne wyniki dla wielomianów stopnia nie wyższego niż $J-1$.

Istotną zaletą opracowanej kwadratury przy realizacji obliczeń jest fakt, że oparta jest na węzłach kwadratury Gaussa - Czebyszewa. Tak więc przy liczeniu całek oboma kwadratarami wystarczy jednorazowe określenie wartości funkcji podcałkowych $F(\bar{\eta}_j)$.

Dodatek II

Całkowanie równania równowagi sił.

W równaniu równowagi sił 4.40 występują całki

$$/ \text{ II.1 } / \quad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} P_{l-1}(\bar{x}) d\bar{x}; \quad (l=1, 2, \dots, L),$$

$$/ \text{ II.2 } / \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-\bar{y}^2} U_{m-1}(\bar{y}) d\bar{y}; \quad (m=1, 2, \dots, M),$$

$$/ \text{ II.3 } / \quad \int_{-1}^1 \Lambda_t(\bar{y}) d\bar{y}; \quad (t=1, 2, \dots, T),$$

Całkę II.1 można policzyć korzystając z kwadratury Gaussa-Jacobi'ego

$$/ \text{ II.4 } / \quad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\bar{x}}{1+\bar{x}}} P_{l-1}(\bar{x}) d\bar{x} = \sum_{i=1}^L W_i P_{l-1}(\bar{x}_i) = \{1\}^T [W] \{P_{l-1}\}.$$

Całkę II.2 można policzyć korzystając z kwadratury Gaussa-Czebyszewa

$$/ \text{ II.5 } / \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-\bar{y}^2} U_{m-1}(\bar{y}) d\bar{y} = \sum_{j=1}^M A_j U_{m-1}(\bar{y}_j) = \{1\}^T [A] \{U_{m-1}\}.$$

gdzie:

$$\bar{y}_j = \cos \frac{j\pi}{M+1}; \quad A_j = \frac{\pi}{M+1} (1-\bar{y}_j^2); \quad (j=1, 2, \dots, M).$$

Całkę II.3 można policzyć przy pomocy kwadratury interpolacyjnej / Dodatek I /

$$/ \text{ II.6 } / \quad \int_{-1}^1 \Lambda_t(\bar{y}) d\bar{y} = \sum_{j=1}^M B_j(\bar{y}_t) = \{1\}^T \{B(\bar{y}_t)\}.$$

Po podstawieniu zależności II.4 + II.6 do równania 4.40 i wykorzystaniu warunku ortogonalności wielomianów Jacobi'ego

$$[P]^T [W] [P] = \pi [I],$$

uzyskuje się równanie równowagi sił w postaci

$$q_{\infty} \{1\}^T [K]^T \{b\} + q_{\infty} \{1\}^T [\bar{K}]^T \{d\} = -P,$$

w którym:

- macierz $[K]^T$ zbudowana jest z $M \times M$ diagonalnych bloków $[k]$ o wymiarach $L \times L$ zawierających elementy:

$$[k]_{i,j} = \hat{l}^2 [U_i(\bar{x}_j) A_j]; \quad (i, j = 1, 2, \dots, M), \text{ - wskaźniki bloku}$$

- macierz $[\bar{K}]^T$ zbudowana jest z $M \times T$ diagonalnych bloków $[\bar{k}]$ o wymiarach $L \times L$ zawierających elementy:

$$[\bar{k}]_{m,t} = \hat{l}^2 [B_m(\bar{y}_t)]; \quad (m = 1, 2, \dots, M); \quad (t = 1, 2, \dots, T);$$

m, t - wskaźniki bloku.

Równanie to można przekształcić do postaci 4.41

$$\{1\}^T [K]^T = \pi l^2 \left\{ \frac{\{1\}}{0} \right\}^T = \{A^p\}^T$$

ponieważ

$$\{1\}^T = \left\{ \begin{array}{c} \{U_0(\bar{x}_1)\} \\ \vdots \\ \{U_0(\bar{x}_M)\} \end{array} \right\}.$$

Podobnie można przekształcić drugi człon równania

$$\{1\}^T [\bar{K}]^T = \{\bar{A}^p\}^T$$

wykorzystując rozważania zawarte w Dodatku I.

Spis treści

	Strona
1. Uwagi wstępne	3
2. Przegląd literatury związanej z tematem	7
3. Sformułowanie zagadnienia	12
3.1. Model obliczeniowy dwupłata	12
3.2. Warunki równowagi	16
4. Całkowe równania równowagi	29
4.1. Operatory aerodynamiczne	29
4.2. Operatory odkształceń	33
4.3. Aproksymacja całkowych równań równowagi	35
5. Rozwiązanie równań równowagi dwupłata	59
5.1. Własności aerodynamiczne dwupłata	59
5.2. Własności aeroelastyczne dwupłata	71
6. Uwagi końcowe	81
7. Literatura	84
Dodatek I	87
Dodatek II	91