

Paweł Nawrocki

ANALIZA STATECZNOŚCI
PASMA SKALNEGO

41/1984

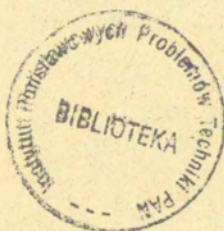
P. 269a



WARSZAWA 1984

Praca wpłynęła do redakcji dnia 27 listopada 1984 r.

56988



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark. wyd. 6. Ark. druk. 7,75.
Oddano do druku w grudniu 1984 r.
Nr zamówienia 743/84

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Paweł Nawrocki
Zakład Mechaniki
Ośrodków Ciągłych
IPPT PAN

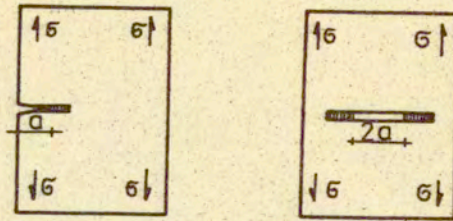
ANALIZA STATECZNOŚCI PASMA SKALNEGO^{1/}

1. WSTĘP

W pracy zajmiemy się analizą deformacji zagłębionego pasma skalnego (rys. 1), w którym w wyniku prowadzonej eksploatacji powstaje komera chednikowa, a także sformułowaniem warunków statecznego przebiegu procesu eksploatacji materiału pasma. Zagadnienie zostanie rozwiązane poprzez przebadanie trzech schematów układu: belka materiału nadlegającego - pasmo, stanowiących kolejne stopnie przybliżenia rozważanej sytuacji. Tak więc początkowo ograniczymy się do opisu materiału pasma modelem jednoosiowym, by następnie rozpatrywać zadanie w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. W rozwiązaniu określimy i przeanalizujemy kolejne fazy procesu deformacji oraz układy stref pojawiające się w tych fazach. Przedstawimy równania określające ewolucję procesu, to znaczy ewolucję rozkładów naprężeń i odkształceń w materiale pasma w czasie postępowania procesu eksploatacji oraz sformułujemy warunki stateczności dla rozważanego układu.

Wobec faktu, że skały są materiałami porowatymi, zawierającymi losowo rozłożone mikropęknięcia, które przy obciążeniu działają jak koncentratory naprężeń powodując dalszy wzrost pęknięć już istniejących oraz tworzenie się i otwieranie nowych pęknięć, można wskazać na pewne analogie rozważanej sytuacji

^{1/}Opracowanie niniejsze stanowi fragment pracy doktorskiej przygotowywanej pod kierunkiem prof. Zenona Mroza.

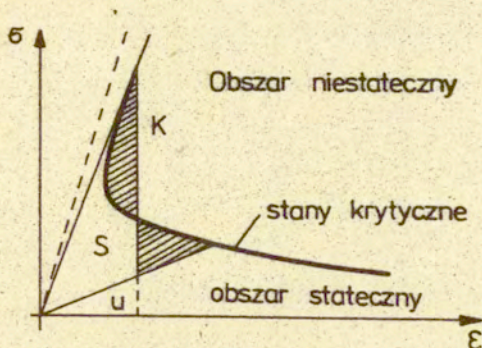


$$G_F = \sqrt{\frac{E\theta}{J\Gamma a}}$$

$$\begin{aligned} \theta &= 2\tau \text{ (Griffith)} \\ \theta &= 2\tau + \tau_p \text{ (Orowan)} \\ \theta &= G_c \text{ (Irwin)} \end{aligned}$$

Rys. 2

z problemami badanymi przez mechanikę pękania. Zatrzymajmy się na chwilę nad tym zagadnieniem. I tak w mechanice pękania bada się próbki zawierające szczeliny brzegowe lub centralne (rys.2), poddane działaniu sił rozciągających. Dla takich próbek określa się obciążenia powodujące spontaniczny rozrost zawartych w nich defektów [1,2,3,4], przy czym materiał można uważać za idealnie kruchy [1, 2], lub, jak to ma miejsce w rzeczywistości, uwzględniać odkształcenia plastyczne poprzedzające wzrost szczeliny [3,4,5,6,7], budując modele szczelin kohezyjnych, w których strefa przywierzchołkowa staje się fikcyjną szczeliną podlegającą odkształceniom plastycznym. Do takich modeli należą modele Dugdale'a [5], Barenblatta [6] czy Hillerborga [7]. Tak więc celem badań jest określenie naprężenia krytycznego σ_p odpowiadającego momentowi, gdy proces przestaje być sterowalny. Rozpatrując różne konfiguracje szczelin oraz ich różne długości początkowe, można wyznaczyć na płaszczyźnie σ - ξ linie zwane krzywymi równowagi (rys.3), obrazujące punkty inicjacji spontanicznego wzrostu pęknięć dla różnych konfiguracji obciążeń. Linia stanów krytycznych rozdziela płaszczyznę σ - ξ na obszar stateczny oraz niestateczny. Wejściu w obszar niestateczny odpowiada zapoczątkowanie propagacji szczeliny. Warunek stateczności dla poruszającej się szczeliny można podać w postaci energetycznej formułując równanie bilansu energetycznego w postaci:



Rys. 3

$$(1.1) \quad dW - dU - dS - dK = 0$$

które mówi, że praca sił zewnętrznych (dW) jest zużyta na przyrost: energii sprężystej (dU), energii powierzchniowej (dS) i zmianę energii kinetycznej (dK). Wprowadzając wielkość nazywaną prędkością uwalniania energii sprężystej zdefiniowaną równaniem:

$$(1.2) \quad G \equiv \frac{\partial}{\partial a}(W - U)$$

gdzie ∂a jest przyrostem długości szczeliny, oraz definiując zmianę energii powierzchniowej

$$(1.3) \quad dS \equiv 2\sigma da$$

poprzez tak zwaną energię powierzchniową właściwą σ , to znaczy energię potrzebną do utworzenia pęknięcia o jednostkowej powierzchni, można warunek (1.1) zapisać w postaci:

$$(1.4) \quad dK = (G - 2\sigma)da$$

Widać stąd, że inicjacja ruchu będzie odpowiadała chwili, gdy prędkość uwalniania energii sprężystej osiągnie swoją wartość krytyczną

$$(1.5) \quad G = G_c = 2\sigma$$

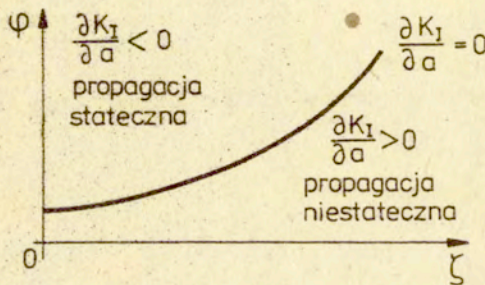
Przypadki dla których $G > 2\sigma$ odpowiadają niestatecznej propagacji defektu.

Ze względu na powiązanie prędkości uwalniania energii sprężystej ze współczynnikiem intensywności naprężenia

$$(1.6) \quad G_c = \frac{K_{Ic}^2}{E}$$

można formułować w przestrzeni pewnych parametrów β, γ opisujących zachowanie się układu, alternatywne kryteria stateczności w oparciu o współczynnik intensywności naprężenia (rys.4).

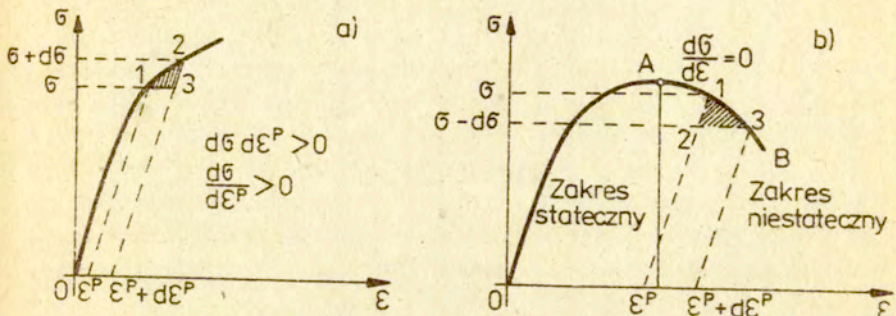
Koncepcja krzywych równowagi została podana przez Berry'ego w pracy [8].



Rys. 4

Jeśli możemy mówić o obszarach statecznego i niestatecznego zachowania się układu, to podobnie możemy operować pojęciem stateczności w odniesieniu do samego materiału. Pojęcie materiału statecznego zostało wprowadzone przez Druckera. Materiałem statecznym nazwiemy taki materiał, dla którego przy wzroście odkształcenia plastycznego $d\varepsilon^p$ występuje wzrost naprężenia $d\sigma$ (rys.5).

Rozważając zależność pomiędzy naprężeniem σ i odkształceniem ε przedstawioną na rys.5a, zauważymy, że jeżeli próbki obciążoną do punktu 1 (odkształcenie trwałe ε^p) obciążymy dodatko-



Rys. 5

wym naprężeniem $d\sigma$ do punktu 2 a następnie odciążymy do początkowej wartości naprężenia (punkt 3), to zauważymy, że przyrost naprężenia $d\sigma$ spowodował przyrost odkształcenia plastycznego $d\varepsilon^P$ dając dodatni przyrost pracy plastycznej $d\sigma d\varepsilon^P > 0$. Jeżeli przy obciążaniu i odciążaniu materiał wykona pracę plastyczną

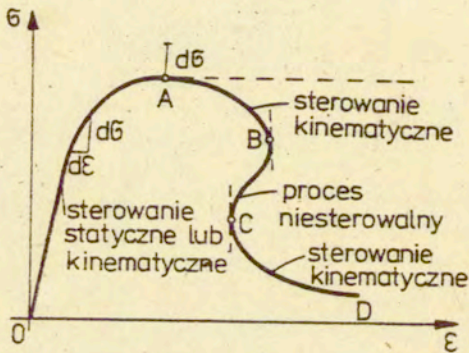
$$(1.7) \quad d\sigma d\varepsilon^P > 0$$

to taki materiał nazywamy statecznym. Nierówność (1.7) przedstawia graficznie pole obszaru 1,2,3 zakreskowane na rys.5a.

Przykładową zależność σ - ε dla materiału niestatecznego pokazano na rys.5b. Tutaj spadek naprężenia ($d\sigma < 0$) powoduje przyrost odkształcenia plastycznego $d\varepsilon^P > 0$, więc praca plastyczna $d\sigma d\varepsilon^P$ jest ujemna. Konsekwentnie odcinek OA krzywej na rys.5b nazywamy statecznym, natomiast odcinek AB niestatecznym.

Pewne dalsze uogólnienia pojęcia stateczności w odniesieniu do ośrodków rozdrobnionych podane zostały w pracy [9]. Jeśli więc mamy próbkę materiału, to zależnie od sposobu zadawania obciążenia, różne punkty możemy nazwać punktami utraty stateczności. Przy procesach sterowanych statycznie będą to punkty odpowiadające maksimum naprężenia (rys.6, punkt A), natomiast przy sterowaniu kinematycznym - punkty maksymalnego odkształcenia (rys.6, punkt B). Dla materiałów statecznych występuje przy tym

równoważność pomiędzy obydwojma sposobami sterowania, podczas gdy dla materiałów wykazujących niestateczną charakterystykę $\sigma - \epsilon$, poza punktami utraty stateczności możliwe jest tylko sterowanie kinematyczne. Prowadzenie badania poprzez przykładanie przez cały czas naprężenia doprowadziłoby w chwili osiągnięcia punktu A do nagłego zniszczenia próbki (krzywa przerywana), gdyż nie byłaby ona w stanie przenieść kolejnego przyrostu obciążenia, choć widać, że w materiale mogą rozwinąć się bez jego zniszczenia dalsze odkształcenia, pod warunkiem, że naprężenia zaczęłyby maleć poza punktem A, co możemy osiągnąć zwiększając odkształcenia zamiast dalszego przykładania kolejnych przyrostów naprężenia.



Rys. 6

Przedmiotem rozważań będzie w tej pracy pasmo skalne o wysokości h obciążone ciężarem nadkładu o miąższości H (rys.1), w którym została wydrążona komora o szerokości $2a$. Komorę można uważać za analog szczeliny badanej przez mechanikę pękania. W pobliżu komory powstaną w pewnych fazach procesu strefy odkształceń sprężysto-plastycznych (materiał zniszczony), które można utożsamiać ze strefami przywierzchołkowymi przedłużonych fikcyjnie szczelin kohezyjnych. Obciążenie działające na układ jest w tym przypadku obciążeniem ściskającym. Dla takiego układu jako parametr określający ewolucję procesu przyjmijemy połówkową

szerokość komory (a), a więc ze względu na stałość działającego obciążenia oraz ograniczoność ugięć (podłoże traktowane jest jak materiał nieodkształcalny), sterowanie będzie miało charakter konfiguracyjny. Drugim parametrem geometrycznym charakteryzującym model będzie aktualne położenie punktu, w którym naprężenia pionowe osiągną wartość maksymalną (punkt o odciętej b , rys.10). Punkt utraty stateczności będzie więc poszukiwany na płaszczyźnie $a - b$, a następnie podane zostaną krzywe odpowiadające stanom równowagi chwiejnej rozdzielające obszary zachowa^u statecznych i niestatecznych układu. Odpowiednikiem rozrastającej się szczeliny jest w tym modelu powiększająca się komora wraz z rosnącą strefą materiału zniszczonego. Utrata stateczności odpowiada chwili, gdy infinitezimalnemu przyrostowi szerokości komory towarzyszy nieograniczony wzrost długości strefy materiału zniszczonego, a więc, gdy przy quazistatycznym traktowaniu zjawiska, małemu przyrostowi szerokości komory, zamiast ustalenia się kolejnego położenia równowagi, odpowiada spontaniczne ekspandowanie strefy sprężysto-plastycznej.

Zagadnienia podobnej klasy, dotyczące ściskania między sztywnymi płytami pasma o skończonej szerokości przy kinematycznym programie obciążenia były już przedmiotem analiz i rozwiązań. Wymieńmy tu przykładowo podane w pracach W. Nowackiego [10] i I.N. Sneddona [11] rozwiązania oparte na modelu ciała liniowo-sprężystego Hooke'a, gdzie wyprowadzono wzory ogólne na rozkłady naprężeń w paśmie poddanym działaniu ciśnień normalnych do obu powierzchni brzegowych - górnej i dolnej. Rozpatrzono tam tylko stany naprężeń odpowiadające założonym w postaci ogólnej ciśnieniom brzegowym, a nie badano procesu ściskania pasma związanego z ewolucją warunków brzegowych.

Rozwiązanie zagadnienia ściskania pasma, przybliżone oraz dokładniejsze przy zastosowaniu metody charakterystyk, dla materiału sztywno - idealnie plastycznego Coulomba podają prace R. Izbickiego i Z. Mroza [9] oraz J. Zawady i J. Supla [12], a z ostatnio wydanych prac, praca Z. Mroza i B. Zadrogi [13] oraz praca Cz. Szymańskiego [14]. W pracy [13] problem rozwiązano w ramach płaskiego stanu odkształcenia, przy czym analizie poddano układ i rozwój stref powstających w paśmie w róż-

nych fazach procesu ściskania, począwszy od fazy początkowej ze sprężystymi deformacjami materiału, poprzez fazę zaawansowaną z układem sąsiadujących ze sobą stref deformacji sprężystej i sprężysto - plastycznej, aż do końcowego wyczerpania nośności pasma, gdy naprężenia spadają do zera. W strefach sprężystych przyjęto liniowe prawo Hooke'a, natomiast w strefach sprężysto - plastycznych zastosowano model ośrodka sprężysto - plastycznego z osłabieniem, przyjmując warunek plastyczności w postaci warunku Coulomba ze zmienną malejącą spójnością oraz potencjał plastyczny w postaci analogicznej do warunku Coulomba, lecz z innymi stałymi materiałowymi c i φ . Uzupełnienie tej pracy stanowi praca [14], w której za model materiału przyjęto materiał sprężysto - idealnie plastyczny Coulomba. W pracy [15] Rammerstorfer i Fisher korzystając z metody elementów skończonych rozwiązyali dynamiczny problem kontaktowy związany z tąpnięciem górotworu. Badali oni położony na dużej głębokości układ trzech pokładów węgla, rozwiązując w etapie wstępnym zadanie statyczne polegające na uwzględnieniu eksploatacji najwyższego pokładu. Uzyskane stąd rozkłady naprężeń i ugięć stanowiły warunki początkowe do rozważania tąpnięcia zachodzącego w pewnym momencie eksploatacji pokładu położonego poniżej. Numerycznie zjawisko tąpnięcia zostało zasymulowane poprzez nagłe pominięcie wkładu wnoszonego do macierzy sztywności przez materiał podlegający wyrzuceniu.

Modelami materiału jakie będziemy obecnie stosować będzie model ciała sprężysto - plastycznego z osłabieniem oraz model ciała kruchego z rezydualną wytrzymałością w stanach deformacji sprężysto - plastycznej.

2. ZAŁOŻENIA

2.1. Założenia wyjściowe.

Przedmiotem pracy jest analiza stateczności oraz mechanicznego zachowania się pasma skalnego obciążonego ciężarem nadkładu o grubości H (rys.1) przy zastosowaniu różnych sposobów modelowania układu pasmo - nadkład. Zakładamy, że materiał pasma

jest jednorodny i izotropowy. Założenia te są grubym przybliżeniem rzeczywistej budowy i rzeczywistych własności skał. Przypadek ciał niejednorodnych i anizotropowych jest jednak ogromnie złożony z punktu widzenia analizy matematycznej. Z podobnych względów zadanie będzie rozważane - tak jak się to robi w klasycznej mechanice skał - w ramach płaskiego stanu odkształcenia, choć, jak na to wskazują uzyskane wyniki, w pewnych warunkach zastosowanie modelu jednoosiowego może już doprowadzić do uzyskania zadowalających rezultatów ilościowych, a na pewno do łatwego rachunkowo oszacowania rozwiązania. Zakładamy, że pasmo skalne o wysokości h zbudowane z materiału kruchego posiadającego pewną wytrzymałość resztkową w stanach deformacji sprężysto - plastycznej (rys. 7) położone jest w sąsiedztwie nieobudowanej komory, tworzącej w górotworze pustkę o przekroju prostokątnym, przyjmując że wysokość komory jest równa wysokości pasma eksploatowanego pokładu kopaliny. Pasma obciążone jest ciężarem warstwy nadlegającej o wysokości H i ciężarze objętościowym $\bar{\sigma}$ oraz posadowione na nieodkształcalnym podłożu. Uwzględniamy jedynie czyste ścinanie w stropie, pomijając efekty zgięciowe oraz zakładamy quazistatyczny przebieg procesu, przyjmując szerokość komory za parametr sterowania konfiguracyjnego określający ewolucję procesu. Materiał charakteryzują takie stałe materiałowe jak moduł Younga E , moduł ścinania G , współczynnik Poissona ν , współczynnik tarcia μ oraz kąt tarcia wewnętrznego φ . Przy rozwiązaniu zadania posłużymy się trzema schematami modelującymi układ (rys. 8). W pierwszym przybliżeniu przyjmiemy, że materiał pasma stanowi podłoże sprężyste, na którym spoczywa belka nadkładu, to znaczy założymy jednoosiowy, sprężynkowy model materiału pasma. W kolejnym schemacie oprócz działających w podłożu naprężeń pionowych weźmiemy również pod uwagę występowanie w nim ciśnienia bocznego o założonej zmienności w głąb pokładu. Wreszcie dla schematu trzeciego przeprowadzona zostanie pełna analiza przemieszczeń i naprężeń w paśmie z uwzględnieniem działania sił stycznych na powierzchni kontaktu nadkład - pasmo. W schemacie tym, przy odpowiednim zaawansowaniu procesu, pojawia się na płaszczyźnie kontaktu strefa poślizgu, w której spełniony jest warunek tarcia gra-

nicznego Coulomba. Za warunek stanu granicznego przyjmujemy warunek Coulomba a przyjęte prawo płynięcia będzie prawem niestowarzyszonym, z tym że potencjał plastyczny ma postać analogiczną do coulombowskiego warunku stanu granicznego. Pierwotnie analizowanym schematem geometrycznym układu jest schemat, w którym pojedyncza komora towarzyszy pasmu półnieskończonemu. Następnie przebadamy przypadek pasma o skończonej szerokości, tzn. pasma sąsiadującego z dwiema symetrycznie położonymi komorami. Podejście to może być uważane za rozpatrywanie modularnej części układu powtarzalnego (rys. 9).

Wydrążenie w górotworze komór chodnikowych zaburza jego naturalny stan równowagi określony na głębokości H hipotetycznie jednorodnym rozkładem ciśnień pionowych $q = \gamma H$ i poziomych $\sigma_x = \sigma_y = \lambda q$; $\lambda = \text{const}$. Powiększaniu komory towarzyszy zmiana stanu naprężenia w paśmie. Wśród pojawiających się stanów naprężenia wyróżnimy umownie trzy charakterystyczne, nazwane fazą początkową, graniczną i zaawansowaną (rys. 10). Przedmiotem pracy będzie podanie relacji określających mechaniczne zachowanie się materiału pasma w poszczególnych fazach i strefach występujących dla tych faz, oraz zależności pozwalających określić poźpżenie stref. Ze względu na różnice występujące pomiędzy rozważanymi schematami oraz w celu zwiększenia czytelności pracy, szczegółowe własności mechaniczne materiału oraz warunki brzegowe i warunki zgodności zostaną systematycznie zaprezentowane przy okazji badania zachowania się danego układu, w dalszej części pracy. Podstawowym modelem materiału jaki zastosujemy, będzie model ciała kruchego z rezydualną wytrzymałością w strefach deformacji sprężysto - plastycznej (rys. 7), jakkolwiek analizowany będzie również bardziej ogólny model materiału sprężysto - plastycznego z osłabieniem (rys. 7a). Dysponując rozwiązaniem dla drugiego ze wspomnianych przypadków, rozwiązanie dla pierwszego z nich możemy skonstruować wykonując dla drugiego przypadku przejście graniczne przy $k_1 = \infty$ oraz $c \rightarrow b$. Istota procesu deformacji jest przy tym niezależnie od stosowanego modelu taka sama, natomiast posługując się modelem z rys. 7a prowadzimy do znacznego rozbudowania równań określających rozwiązanie. Z tego względu stosować będziemy głównie

model materiału wykazującego cechy kruchego pęknięcia.

2.2. Ugięcia belki przy uwzględnieniu czystego ścinania - przypomnienie.

Deformacja pasma wywołana drążeniem komór chodnikowych zostanie w dalszej części pracy powiązana ze względnym ruchem poślizgowym na powierzchni kontaktu pasma z warstwą nadlegającą górotworu oraz z samą deformacją warstwy nadległej. Deformację tej warstwy określimy odpowiednim równaniem różniczkowym powierzchni jej ugięcia, o której założymy równocześnie, że pokrywa się ona z górną powierzchnią osiadania pasma. Zgodnie z teorią opisującą ugięcia belek przy uwzględnieniu jedynie czystego ścinania materiału belki ("shear beam theory"), założymy, że krzywizna powierzchni ugięcia warstwy nadlegającej jest proporcjonalna do różnicy obciążenia $q = \gamma H$ (ciężar warstwy) i reakcji ciśnienia odporowego $\sigma_z = p(x)$ pasma. Mamy więc:

$$(2.1) \quad \mathcal{E} = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{p(x) - q}{Kh}$$

gdzie $Kh = \text{const.}$ jest współczynnikiem proporcjonalności; K - moduł o wymiarze naprężenia. Równanie (2.1) obowiązuje w obszarach pozakomorowych. Nad komorą należy zastosować równość:

$$(2.2) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{q}{Kh}$$

3. OGÓLNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DEFORMACJI PASMA PÓLNIESKONCZONEGO

3.1. Schemat I - rozwiązanie podstawowe.

Geometrię układu oraz zmienność siły w zależności od ugięcia jak i kolejne fazy procesu dla rozpatrywanego obecnie jednoosiowego schematu pasma pokazują rysunki 1, 7 i 10. Równanie różniczkowe (2.2) linii ugięcia belki materiału zapiszemy w postaci:

$$(3.1) \quad w'' = -\frac{q}{G}$$

gdzie G - moduł ścinania.

faza początkowa - rozwiązanie sprężyste

Równanie linii ugięcia dla strefy ponadkomorowej uzyskujemy całkując (3.1). Stąd:

$$(3.2) \quad w = -\frac{1}{2} \frac{q}{G} x^2 + C_1 x + C_2, \quad 0 \leq x \leq a$$

Ze względu na symetrię układu ograniczymy się do rozpatrywania jego części leżącej przy dodatniej półosi x-ów (rys. 1). Dla obszaru ponadkomorowego

$$(3.3) \quad w'' = -\frac{q - P}{G}$$

i ponieważ w obszarze sprężystym, zgodnie z przyjętym modelem materiału jest $p = kw$, gdzie k - moduł podatności podłoża, mamy:

$$(3.4) \quad w'' - \frac{k}{G} w = -\frac{q}{k}$$

$$(3.5) \quad w = C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{k}, \quad s = \sqrt{\frac{k}{G}}; \quad x \geq a$$

Równania (3.2) i (3.5) opisują zagadnienie deformacji pasma w fazie początkowej i obowiązują oczywiście zarówno dla materiału kruchego jak i ulegającego osłabieniu. C_1, C_2, C_3, C_4 są stałymi całkowania podlegającymi wyznaczeniu z warunków brzegowych i warunków zgodności.

faza graniczna

Powiększając szerokość komory powodujemy wzrost ugięć stropu a więc wzrost reakcji sprężystej podłoża. Przy szerokości "a" równej szerokości granicznej " a_{gr} " siła na krawędzi komory osiągnie wartość maksymalną p_m określoną wytrzymałością materiału pasma, a dalsze powiększanie szerokości komory może spo-

wodować rozpoczęcie fazy zaawansowanej lub utratę stateczności.

$$(3.6) \quad w = w_m = \frac{p_m}{k} \quad \text{dla} \quad a = a_{gr}$$

$$(3.7) \quad \frac{p_m - q}{k} = C_3 e^{sa_{gr}} + C_4 e^{-sa_{gr}}$$

Z równania (3.7) wyznaczamy graniczną szerokość komory odpowiadającą końcowi rozwiązania sprężystego.

faza zaawansowana

3.1.1. Materiał kruchy.

Jak zostanie to pokazane w paragrafie 8, przy spełnieniu zależności

$$(3.8) \quad p_r > q$$

możliwe jest dalsze powiększanie komory powyżej jej szerokości granicznej określonej równaniem (3.7) przy zachowaniu stateczności układu. Oznacza to, że po osiągnięciu przez reakcję na krawędzi komory wartości równej granicy plastyczności materiału, nastąpi zginięcie materiału pasma postępujące progresywnie w głąb pokładu. Za odciętą $x = b$, dla której $p = p_m$ będzie postępowała strefa materiału spękanego, gdzie naprężenia są równe swojej wartości rezydualnej p_r (rys. 10c). Dla tej strefy będzie:

$$(3.9) \quad w'' = - \frac{q - p_r}{G} x^2, \quad a \leq x \leq b$$

Rozwiązanie ogólne w poszczególnych strefach fazy zaawansowanej przedstawia więc komplet równań:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} w &= - \frac{1}{2} \frac{q}{G} x^2 + C_1 x + C_2, & 0 \leq x \leq a \\ w &= \frac{1}{2} \frac{p_r - q}{G} x^2 + B_1 x + B_2, & a \leq x \leq b \\ w &= C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{k}, & x \geq b \end{aligned}$$

3.1.2. Materiał z osłabieniem.

Uwzględnienie osłabienia materiału spowoduje pojawienie się dwu nowych w porównaniu z materiałem kruchym faz: fazy tzw. pośredniej oraz fazy granicznej II. Schematyczne rozkłady naprężeń w poszczególnych fazach deformacji pokazano na rys. 10a.

faza pośrednia

Powiększenie komory powyżej jej szerokości granicznej spowoduje powstanie w jej pobliżu strefy materiału pokruszonego w której zależność naprężenia od ugięcia ma postać:

$$(3.11) \quad p = p_m - k_1(w - w_m)$$

Wobec tego równaniem różniczkowym linii ugięcia jest dla tej strefy równanie:

$$(3.12) \quad Gw'' = -q + p_m - k_1(w - w_m)$$

lub równoważne mu:

$$(3.13) \quad w'' + \frac{k_1}{G} w = \frac{p_m - q}{G} + \frac{k_1 w_m}{G}$$

którego całka ogólna ma postać:

$$(3.14) \quad w = D_1 \cos rx + D_2 \sin rx + \frac{p_m - q}{k_1} + w_m$$

gdzie

$$(3.15) \quad r = \sqrt{\frac{k_1}{G}}$$

Tak więc rozwiązanie ogólne w poszczególnych strefach fazy pośredniej określone jest równaniami:

$$w = -\frac{1}{2} \frac{q}{G} x^2 + C_1 x + C_2, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$(3.16) \quad w = D_1 \cos rx + D_2 \sin rx + \frac{p_m - q}{k_1} + w_m, \quad a \leq x \leq b$$

$$w = C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{k}, \quad x \gg b$$

faza graniczna II

Dalsze powiększanie komory doprowadzi do chwili gdy naprężenia na jej krawędzi osiągną wartość równą wytrzymałości rezydualnej materiału p_r . Strefa materiału częściowo spękanego osiągnie wtedy swą pełną długość. Wartości parametrów geometrycznych odpowiadających temu momentowi oznaczymy indeksami a_0 i b_0 . Ich wartości możemy wyznaczyć rozwiązując układ równań złożony z równania

$$(3.17) \quad w(x) \Big|_{x=a_0} = w_r = \frac{p_m - p_r}{k_1} + \frac{p_m}{k}$$

oraz równania wiążącego parametry a i b . Układ ten ma postać:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \frac{s p_m - q}{r k} \sin(r b_0 - r a_0) - \frac{p_m - q}{k_1} \cos(r b_0 - r a_0) &= \frac{q - p_r}{k_1} \\ \frac{r (p_m - q)}{k_1} \sin(r b_0 - r a_0) + \frac{s (p_m - q)}{k} \cos(r b_0 - r a_0) &= \frac{q}{G} a_0 \end{aligned}$$

Mnożąc pierwsze z równań przez $(r)^{1/2}$ a drugie przez $(r)^{-1/2}$, podnosząc oba równania stronami do kwadratu oraz dodając tak otrzymane równania stronami otrzymamy:

$$(3.19) \quad a_0 = \frac{G}{q} \sqrt{\left(\frac{r}{k_1}\right)^2 [(p_m - q)^2 - (q - p_r)^2] + \left[\frac{s (p_m - q)}{k}\right]^2}$$

faza zaawansowana

W fazie zaawansowanej oprócz wszystkich stref występujących w paśmie w fazie pośredniej, wystąpi dodatkowo strefa materiału zniszczonego gdzie naprężenia są równe swojej wartości rezydualnej. Równanie linii ugięcia belki w tej strefie ma pos-

tać (3.9). Korzystając z poprzednio przedstawionych równań możemy rozwiązanie ogólne w poszczególnych strefach fazy zaawansowanej zapisać wzorami:

$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad w &= -\frac{1q}{2G}x^2 + C_1x + C_2, & 0 \leq x \leq a \\
 w &= -\frac{1q-p}{2G}x^2 + B_1x + B_2, & a \leq x \leq c \\
 w &= D_1 \cos rx + D_2 \sin rx + \frac{P_m^{-q}}{k_1} + w_m, & c \leq x \leq b \\
 w &= C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{k}, & x \gg b
 \end{aligned}$$

3.2. Schemat II

Obecnie założymy, że wytrzymałość materiału pasma określona jest warunkiem zniszczenia, który utożsamimy z warunkiem Coulomba. Przyjmujemy, że naprężenia po osiągnięciu wartości spełniających warunek stanu granicznego, obniżają się skokowa do stanu określonego rezydualnym warunkiem granicznym, odpowiadającym obniżeniu kohezji materiału (rys. 11). Początkowy i rezydualny warunek plastyczności przyjmą w naprężeniach głównych postać:

$$(3.21) \quad f_o(\varrho) = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi - c_o \cos \varphi = 0$$

$$(3.22) \quad f_r(\varrho) = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi - c_r \cos \varphi = 0$$

Wprowadzając w miejsce φ bezwymiarowy parametr

$$(3.23) \quad t = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

zapisujemy (3.21) i (3.22) w postaci:

$$(3.24) \quad f_o(\varrho) = \sigma_z - t\sigma_x - 2\sqrt{t}c_o = 0$$

$$(3.25) \quad f_r(\varrho) = \sigma_z - t\sigma_x - 2\sqrt{t}c_r = 0$$

gdzie c_0 i c_r są początkowym i rezydualnym współczynnikiem kohezji.

Wielkość ciśnienia bocznego σ_x przyjmujemy w postaci funkcji określającej jego zmienność w zależności od odległości od krawędzi komory. Zakładamy wykładniczą postać tej funkcji

$$(3.26) \quad \sigma_x(x) = \nu \sigma_z [1 - e^{-\beta(x-a)}]$$

Ponieważ dla dużych odległości od osi komory jest $\sigma_z = q$, wobec tego:

$$(3.27) \quad \sigma_x(x) = \nu q [1 - e^{-\beta(x-a)}]$$

gdzie β - stała o wymiarze $[1/m]$. Jeżeli założymy, że zniszczenie będzie miało charakter progresywny, wówczas trajektoria kreślona przez rzędną odpowiadającą maksymalnym naprężeniom pionowym przy wzrastającej szerokości komory, będzie krzywą wykładniczą. Przy pewnej szerokości komory punkt maksymalnych naprężeń oddali się od jej krawędzi na taką odległość, że naprężenie poziome σ_x będzie tam równe swojej wartości asymptotycznej $\sigma_x = \nu q$ z dokładnością do małych wyższego rzędu. Przy szerokości komory równej szerokości granicznej naprężenie pionowe osiągnie na jej krawędzi wartość:

$$(3.28) \quad \sigma_z^m = 2\sqrt{t}c_0$$

po czym obniży się skokowo do początkowej wartości rezydualnej

$$(3.29) \quad \sigma_z^r = 2\sqrt{t}c_r$$

Zmienność propagujących się naprężeń maksymalnego i rezydualnego podają wzory:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \sigma_z^m(x) &= t\sigma_x(x) + 2\sqrt{t}c_0 \\ \sigma_z^r(x) &= t\sigma_x(x) + 2\sqrt{t}c_r \end{aligned}$$

Maksymalne asymptotyczne wartości naprężeń uzyskujemy biorąc

pod uwagę (3.30) i (3.27)

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \sigma_z^m \max &= t\nu q + 2\sqrt{tc_o} \\ \sigma_z^r \max &= t\nu q + 2\sqrt{tc_r} \end{aligned}$$

Naprężenie pionowe odpowiadające początkowemu warunkowi granicznemu zmienia się więc od wartości (3.28) do wartości (3.31-1), a rezydualne naprężenie pionowe od wartości (3.29) do (3.31-2). Szkieletowy rozkład ciśnień pionowych na długości pasma dla komory o szerokości $a > a_{gr}$ pokazuje rys. 12.

Dla fazy początkowej schematu II-go pozostają w mocy wyprorowadzone poprzednio rozwiązania ogólne (3.2) i (3.5) a koniec rozwiązania sprężystego określa równanie (3.7).

faza zaawansowana

3.2.1. Materiał kruchy

Uwzględnienie ciśnienia bocznego prowadzi do zmiany drugiego z równań (3.10), bowiem:

$$(3.32) \quad w'' = - \frac{q - \sigma_z}{G}$$

gdzie σ_z jest zależnym od x naprężeniem rezydualnym

$$(3.33) \quad \sigma_z = \sigma_z^r(x) = t\nu q [1 - e^{-\beta(x-a)}] + 2\sqrt{tc_r}$$

co uwzględnione w (3.32) prowadzi do równania różniczkowego

$$(3.34) \quad w'' = - \frac{t\nu q}{G} e^{-\beta(x-a)} + \frac{P_r - q + t\nu q}{G}$$

które po scałkowaniu daje:

$$(3.35) \quad w = - \frac{t\nu q}{G\beta} e^{-\beta(x-a)} + \frac{1}{2} \frac{P_r - q + t\nu q}{G} x^2 + B_1 x + B_2$$

zagadnienie deformacji pasma jest więc dla fazy zaawansowanej schematu II-go określone równaniami:

$$\begin{aligned}
 w &= -\frac{1}{2} \frac{q}{G} x^2 + C_1 x + C_2, & 0 \leq x \leq a \\
 (3.36) \quad w &= -\frac{t \sqrt{q}}{G} e^{-\delta(x-a)} + \frac{1}{2} \frac{P_r^{-q+t \sqrt{q}}}{G} x^2 + B_1 x + B_2, & a \leq x \leq b \\
 w &= C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{k}, & x \gg b
 \end{aligned}$$

3.2.2. Materiał z osłabieniem.

Obecnie do opisanego zagadnienia deformacji pasma późniejszego przy uwzględnieniu działania ciśnienia bocznego zastosujemy model materiału sprężysto - plastycznego z osłabieniem (rys. 7a). Podobnie jak poprzednio, równania zapiszemy dla poszczególnych faz procesu deformacji. Dla $a > a_{gr}$ naprężenia na krawędzi komory będą stopniowo malały od wartości σ_z^m określonej równaniem (3.28) do wartości σ_z^r (równanie 3.29). Równocześnie wobec założenia o progresywnym przebiegu procesu niszczenia w głąb pokładu będzie się propagował front zniszczenia z maksymalnym naprężeniem pionowym $\sigma_z^m(x)|_{x=b}$ określonym równością (3.30-1) i postępująca za nim strefa materiału spękanego.

faza pośrednia

Aby opisać zmienność naprężenia pionowego w strefie osłabionej w zależności od odciętej x (tzn. dla $x \in (a, b)$), należy do wartości naprężenia zapisanej wzorem (3.11) dodać nadwyżkę naprężenia wynikającą z uwzględnienia ciśnienia bocznego, którego działanie powoduje swego rodzaju wzmocnienie materiału pasma. Wzmocnienie to przejawia się faktem, że naprężenie propagujące się wraz z frontem zniszczenia nie ma stałej wartości, lecz stopniowo wzrasta w funkcji wykładniczej odległości od komory. Tak więc zamiast (3.11) należy obecnie zapisać równanie:

$$(3.37) \quad p = p_m - k_1(w - w_m) + t \sqrt{q} [1 - e^{-\delta(x-a)}], \quad \text{dla } a \leq x \leq b$$

(rys. 12 a)

Równanie różniczkowe linii ugięcia będzie więc miało dla strefy osłabionej postać:

$$(3.38) \quad Gw'' = -q + p_m - k_1(w-w_m) + t\sqrt{q}[1-e^{-\delta(x-a)}]$$

skąd po przekształceniu:

$$(3.39) \quad w'' + \frac{k_1}{G}w = \frac{t\sqrt{q}}{G}[1-e^{-\delta(x-a)}] + \frac{p_m - q}{G} + \frac{k_1 w_m}{G}$$

Całka ogólna tego równania ma postać:

$$(3.40) \quad w(x) = D_1 \cos rx + D_2 \sin rx + \frac{2\sqrt{tc_0}(k+k_1) - kq(1-tv)}{kk_1} + - \frac{t\sqrt{q}e^{-\delta(x-a)}}{G+k_1}$$

Ugięcia w poszczególnych strefach fazy pośredniej określone są więc równaniami ogólnymi:

$$(3.41) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1q}{2G}x^2 + C_1x + C_2, & 0 \leq x \leq a \\ (3.40), & & a \leq x \leq b \\ w &= C_3e^{sx} + C_4e^{-sx} + \frac{q}{k}, & x \geq b \end{aligned}$$

faza graniczna II

Szerokość komory oraz położenie punktu maksymalnych naprężeń odpowiadające tej fazie oznaczymy symbolami a_0 i b_0 . Ugięcie dla $x = a_0$ przy $a = a_0$ będzie miało wartość w_r równą

$$(3.42) \quad w_r = \frac{\sigma_y^m - \sigma_y^r}{k_1} + \frac{\sigma_y^m}{k} = \frac{2\sqrt{t}(c_0 - c_r)}{k_1} + \frac{2\sqrt{tc_0}}{k}$$

Wartość a_0 określimy rozwiązując względem a_0 i b_0 układ równań złożony z równania (3.41-1) wziętego dla $w = w_r$ oraz równania wiążącego parametry a i b . Postać tych równań zostanie określo-

nia po uwzględnieniu warunków brzegowych i warunków zgodności ugięć w paragrafie 4.2.2.

faza zaawansowana

Dla szerokości komory $a > a_0$ w jej pobliżu pojawi się nowa strefa: materiału spękanego w rezydualnym stanie naprężenia granicznego, której zasięg oznaczymy symbolem c . Deformacje w poszczególnych strefach możemy określić następującymi równaniami ogólnymi:

$$\begin{aligned}
 (3.43) \quad w &= -\frac{1}{2G}qx^2 + C_1x + C_2, & 0 \leq x \leq a \\
 (3.40)_b \quad w &= -\frac{tvq}{G}e^{-\delta(x-a)} + \frac{1}{2} \frac{P_r^{-q+tvq}}{G} x^2 + B_1x + B_2, & a \leq x \leq c \\
 & & c \leq x \leq b \\
 w &= C_3e^{sx} + C_4e^{-sx} + \frac{q}{k}, & x \geq b
 \end{aligned}$$

3.3. Schemat III.^{1/}

Obecnie założymy, że w pobliżu komory powstają strefy deformacji sprężystej w płaskim stanie odkształcenia, natomiast w pewnej odległości od jej krawędzi utworzy się strefa deformacji edometrycznej (rys. 13).

3.3.1. Model mechaniczny materiału pasma.

Przyjmijmy związki konstytutywne w postaci:

- w obszarach płaskiej deformacji sprężystej zastosujemy związki liniowej sprężystości Hooke'a

$$\begin{aligned}
 (3.44) \quad \epsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij}) \\
 \epsilon_{ij} &= -\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})
 \end{aligned}$$

1/ Część matematyczna rozwiązania dotyczącego schematu III została opracowana przez dr Czesława Szymańskiego, któremu autor składa serdeczne podziękowania.

- w obszarach rezydualnego stanu naprężenia stosujemy aksjomat o addytywności całkowitej prędkości odkształcenia

$$(3.45) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

gdzie $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ - prędkość odkształcenia sprężystego, $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ - prędkość odkształcenia plastycznego, określone wzorami:

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^e &= \frac{1 + \nu}{E} (\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma_{kk} \delta_{ij}) \\ \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned}$$

$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$ jest tutaj pochodną Zaremy - Jaumana tensora naprężenia

$$(3.47) \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right) - \omega_{ik} \sigma_{lj} + \sigma_{ik} \omega_{lj}$$

natomiast współczynnik $\dot{\lambda}$ jest wielkością zależną od niezmienników tensora naprężenia i jest określony relacjami:

$$(3.48) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda} &> 0 \text{ dla } f(\sigma) = 0 \text{ i } \dot{f}(\sigma) = 0 \\ \dot{\lambda} &= 0 \text{ dla } f(\sigma) < 0 \text{ lub } f(\sigma) = 0 \text{ i } \dot{f}(\sigma) < 0 \end{aligned}$$

przy czym $f(\sigma)$ jest warunkiem plastyczności Coulomba

$$(3.49) \quad \begin{aligned} f(\sigma) &= \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \\ \sigma_z &\gg \sigma_y \gg \sigma_x, \quad \varphi = \text{const}, \quad c = \text{const} \end{aligned}$$

a $g(\sigma)$ - potencjałem plastycznym przyjętym w postaci analogicznej do warunku plastyczności (3.32), który w przestrzeni naprężeń głównych wyrażamy wzorem

$$(3.50) \quad \begin{aligned} g(\sigma) &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi' - c' \cos \varphi' = 0 \\ \sigma_1 &\gg \sigma_2 \gg \sigma_3, \quad \varphi' = \text{const}, \quad c' = \text{const} \end{aligned}$$

przy czym parametr φ' spełnia warunek:

$$(3.51) \quad 0 \leq \varphi' \leq \varphi$$

Współrzędne tensora prędkości odkształcenia, składowe tensora spinu i wektora prędkości przemieszczenia podają zależności

$$(3.52) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= -\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \\ \omega_{ij} &= -\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}) \\ \dot{u}_i &= \frac{d}{dt} u_i(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned}$$

3.3.2. Równania równowagi

Współrzędne $\sigma_{ij}(x_k, t)$ tensora naprężenia powinny spełniać różniczkowe równania równowagi dla naprężeń i ich pochodnych (ze względu na założony quazistatyczny przebieg procesu pomijamy człony inercyjne w równaniach ruchu; pomijamy również siły masowe) wyrażone w postaci:

$$(3.53) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right) = 0$$

oraz

$$(3.54) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right) = 0$$

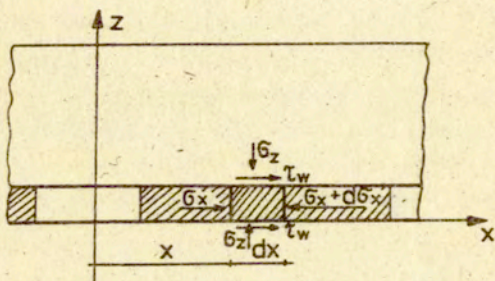
gdzie

$$(3.55) \quad \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \dot{u}_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}, \quad \dot{u}_k = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

Równania równowagi odniesione są do bieżącej konfiguracji ośrodka, tzn. są one słuszne przy Eulerowskim opisie deformacji materiału.

Przyjęcie w dalszej części pracy uproszczonej kinematyki cząstek pasma powoduje, że naprężenia działające w strefach deformacji edometrycznej spełniają tożsamościowo równania równowagi (3.53), natomiast dla naprężeń działających w strefach sprężysto - plastycznego stanu odkształcenia oraz w strefach

płaskiego, sprężystego stanu odkształcenia (rys. 15) przyjmujemy uproszczoną postać równania równowagi (3.53). Przyjęcie takie wynika z faktu, że zastosowanie wspomnianych założeń upraszczających jest w pewnym sensie równoważne wprowadzeniu uśrednionych wartości odkształceń i naprężeń po wysokości pasma. Przybliżoną postać równania równowagi uzyskujemy rozpatrując równowagę elementu pasma o szerokości dx (rys.14). W przekrojach $x = \text{const}$ i $(x+dx) = \text{const}$ działają siły $h\sigma_x(x)$ i $h[\sigma_x(x) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx]$, natomiast na powierzchniach kontaktu pasma z podłożem i warstwą



Rys. 14

nadlegającą działają reakcje tarcia:

- w strefie dwuosiowej deformacji sprężysto - plastycznej R lub w strefie dwuosiowej deformacji sprężystej E

$$(3.56) \quad \begin{aligned} \tau_w &= \mu \sigma_z \quad \text{przy } u_x > 0 \\ &\text{dla } z = 0 \text{ i } z = h(x, t) = \text{const} \end{aligned}$$

- w strefie edometrycznej E_d

$$(3.57) \quad \begin{aligned} \tau_w &< \mu \sigma_z \quad \text{przy } u_x = 0 \\ &\text{dla } z = 0 \text{ i } z = h(x, t) = \text{const} \end{aligned}$$

gdzie $\mu = \text{const}$, $\tau_w = |\tau_{zx}|$. Z równania równowagi sił dla kierunku poziomego uzyskujemy równanie równowagi

$$(3.58) \quad \frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{2\mu}{h} \sigma_z = 0 \quad \text{gd } \tau_w = \mu \sigma_z$$

$$(3.59) \quad \frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{2\tau_w}{h} = 0 \quad \text{gdy } \tau_w < \mu\sigma_z$$

Pozostałe dwa równania w kierunku osi y i z są spełnione tożsamościowo.

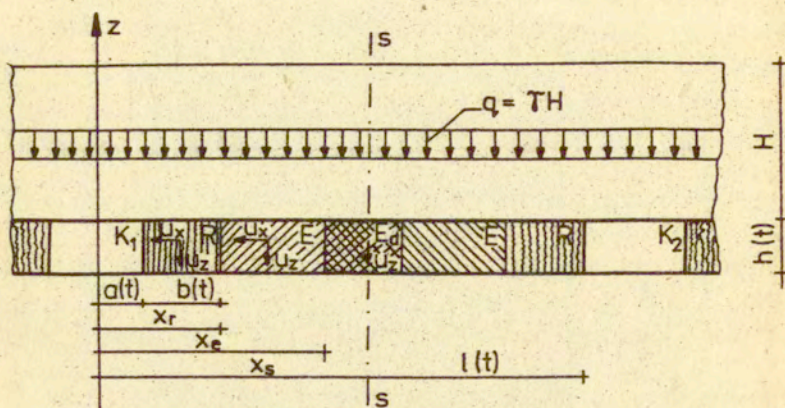
3.3.3. Mechanizm deformacji pasma, układy stref i-fazy procesu.

Dla rozpatrywanego obecnie schematu III, podobnie jak dla schematów I i II, przyjmujemy, że w procesie deformacji pasma będziemy mogli wyróżnić trzy charakterystyczne fazy:

- faza początkowa, dla której w otoczeniu komory pojawiają się dwie strefy E płaskiego, sprężystego stanu odkształcenia, za którymi występuje strefa edometrycznych odkształceń sprężystych E_d (rys. 13)
- faza graniczna odpowiadająca pierwszemu kruchemu załamaniu struktury pasma, to znaczy chwili, gdy na brzegu pasma zostaje osiągnięty stan graniczny zdeterminowany wytrzymałością materiału skalnego, po czym naprężenia maleją skokowo do wartości spełniających rezydualny warunek stanu granicznego.
- faza zaawansowana - powstająca przy dalszym powiększaniu szerokości komory, w której obok stref sprężystych stanów odkształcenia (płaskiego i edometrycznego) występuje dodatkowo strefa R rezydualnego, granicznego stanu naprężenia, a powierzchnia nieciągłości naprężeń propaguje się w paśmie w kierunku jego środka.

Układ stref występujących w paśmie w zaawansowanej fazie procesu pokazuje rys.15. Zakładając kinematykę cząstek materiału, przyjmujemy że deformacja materiału pasma może być traktowana jako superpozycja przemieszczeń jego cząsteczek w kierunku poziomym i pionowym. Przyjęty mechanizm deformacji pasma będzie miał charakter uproszczonego. Dokładne traktowanie zagadnienia prowadzi bowiem do uzyskania układu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych względem niewiadomych funkcji określających stan naprężenia i odkształcenia, których całki nie dają się wyrazić w postaci zamkniętych wyrażeń analitycznych będących funkcjami zmiennych niezależnych x , z i t .

Obierając układ odniesienia jak na rys. 15 oraz rozpatrując



Rys. 15

powtarzalną część układu określamy przemieszczenia cząstek oraz deformację układu następującymi wzorami:

- w strefie R rezydualnych stanów granicznych

$$\begin{aligned}
 (3.60) \quad & u_x = -u(x,t), \quad u_y = 0, \quad u_z = -\frac{w(x,t)}{h}z \\
 & \varepsilon_x = -\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{x}, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{w(x,t)}{h} \\
 & \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\
 & \text{dla } a(t) \leq x \leq b(t), \quad 0 \leq z \leq h
 \end{aligned}$$

- w strefie E płaskiego stanu odkształcenia

$$\begin{aligned}
 (3.61) \quad & u_x = -u(x,t), \quad u_y = 0, \quad u_z = -\frac{w(x,t)}{h}z \\
 & \varepsilon_x = -\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{x}, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{w(x,t)}{h} \\
 & \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\
 & \text{dla } x_r \leq x \leq x_e, \quad 0 \leq z \leq h
 \end{aligned}$$

- w strefie E_d edometrycznego stanu odkształcenia

$$\begin{aligned}
 (3.62) \quad & u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = -\frac{w(x,t)}{h}z \\
 & \varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = -\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{w(x,t)}{h} \\
 & \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\
 & \text{dla } x_e \leq x \leq 2x_s - x_e, \quad 0 \leq z \leq h
 \end{aligned}$$

w powyższych wzorach przyjęto umowę, że odkształcenia kurczące są dodatnie oraz uwzględniono przybliżoną równość

$$(3.63) \quad \tau_{zx} \approx 0$$

pomijając dodatkowo zmiany konfiguracji górnej powierzchni brzegowej pasma, tzn. przyjmując

$$(3.64) \quad h(x,t) = h - w(x,t) \approx h = \text{const.}$$

rozwiązanie dla pasma półnieskończonego wyprowadzimy z rozwiązania dla pasma o skończonej szerokości wykonując przejście graniczne dla odciętej x_s osi symetrii układu (rys. 15). Ze względu na skomplikowaną postać równań ograniczymy się jedynie do podania rozwiązania szczególnego. Zostało ono przedstawione w paragrafie 4.3.

4. PASMO PÓLNIESKOŃCZONE - ROZWIĄZANIE SPEŁNIAJĄCE WARUNKI BRZEGOWE I WARUNKI ZGODNOŚCI.

4.1. Schemat I

4.1.1. Materiał kruchy

Rozwiązanie ogólne zagadnienia deformacji pasma dla schematu I zostało przedstawione w punkcie 3.1. Obecnie wyznaczmy stałe całkowania występujące w równaniach rozwiązania ogólnego.

faza początkowa

Stałe występujące w równaniach (3.2) i (3.5) wyznaczmy

z warunków

$$(4.1) \quad \begin{aligned} w' &= 0 & \text{dla } x &= 0 \\ w^e &= 0 & \text{dla } x &= \infty \\ [w] &= [w'] = 0 & \text{dla } x &= a \end{aligned}$$

gdzie w^e jest ugięciem eksploatacyjnym określonym równaniem

$$(4.2) \quad w^e = C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx}$$

natomiast symbol $[x]$ oznacza nieciągłość (skok) wielkości x . Po wykorzystaniu warunków (4.1) rozwiązanie szczególne wyraża się wzorami:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1q}{2G}x^2 + \frac{qa}{Gs} + \frac{1q}{2G}a^2 + \frac{q}{k}, & 0 \leq x \leq a \\ w &= \frac{qa}{Gs}e^{s(a-x)} + \frac{q}{k}, & x \geq a \end{aligned}$$

faza graniczna

Rozwiązanie określone równaniami (4.3) obowiązuje do momentu spełnienia warunku (3.6). Uwzględniając (3.6) w (4.3-2) uzyskujemy zależność dla granicznej szerokości komory odpowiadającej końcowi rozwiązania sprężystego

$$(4.4) \quad a_{gr} = \frac{GsP_m - q}{k}$$

faza zaawansowana

Stałe występujące w rozwiązaniu ogólnym (3.10) wyznaczmy spełniając warunki:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} w' &= 0 & \text{dla } x &= 0 \\ w^e &= 0 & \text{dla } x &= \infty \\ [w] &= [w'] = 0 & \text{dla } x &= a \text{ i } x = b \end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad w &= -\frac{1}{2} \frac{q}{G} x^2 - \frac{1}{2} \frac{P_r}{G} a^2 + \xi, & 0 \leq x \leq a \\
 w &= -\frac{1}{2} \frac{q - P_r}{G} x^2 - \frac{P_r}{G} a x + \xi, & a \leq x \leq b \\
 w &= \frac{1}{S} \left(\frac{q - P_r}{G} b + \frac{P_r}{G} a \right) e^{s(b-x)} + \frac{q}{k}, & x \geq b \\
 \xi &= \frac{1}{S} \left(\frac{q - P_r}{G} b + \frac{P_r}{G} a \right) + \frac{q}{k} + \frac{P_r a b}{G} + \frac{1}{2} \frac{q - P_r}{G} b^2
 \end{aligned}$$

z dodatkowego warunku

$$(4.7) \quad w(x) \Big|_{x=b} = w_m = \frac{P_m}{k}$$

uzyskujemy równanie pozwalające wyznaczyć dla danej szerokości komory położenie punktu maksymalnych naprężeń:

$$(4.8) \quad b = \frac{G}{q - P_r} \left(\frac{P_m - q}{k} s - \frac{P_r}{G} a \right)$$

4.1.2. Materiał z osłabieniem.

Stałe całkowania występujące w równaniach (3.16) wyznaczamy z warunków:

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad w' &= 0 \quad \text{dla} \quad x = 0 \\
 w^e &= 0 \quad \text{dla} \quad x = \infty \\
 [w] &= [w'] = 0 \quad \text{dla} \quad x = a \\
 [w] &= [w'] = 0 \quad \text{dla} \quad x = b \\
 w &= w_m \quad \text{dla} \quad x = b
 \end{aligned}$$

po ich uwzględnieniu wyliczamy:

$$\begin{aligned}
 (4.10) \quad C_1 &= C_3 = 0 \\
 C_2 &= \frac{1}{2} \frac{q}{G} a^2 + (P_m - q) \left[\frac{s}{r} \frac{\sin(rb - ra)}{k} - \frac{\cos(rb - ra)}{k_1} \right] + \frac{P_m - q}{k_1} + \frac{P_m}{k} \\
 C_4 &= \frac{P_m - q}{k_1} e^{sb}
 \end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{5}{r} \frac{pm-q}{k} \sin rtb - \frac{pm-q}{k_1} \cos rtb$$

$$D_2 = \frac{q-pm}{k_1} \sin rtb + \frac{5}{r} \frac{q-pm}{k} \cos rtb$$

oraz uzyskujemy równanie wiążące parametry a i b

$$(4.11) \quad \frac{q}{6} a = \frac{r(pm-q)}{k_1} \sin(rt-b) + \frac{5(pm-q)}{k} \cos(rt-b)$$

rozwiązanie szczególne spełniające warunki brzegowe i warunki zgodności ma więc postać:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2g}(k^2 a^2) + (pm-q) \left[\frac{5}{r} \frac{\sin(rt-b)}{k} - \frac{\cos(rt-b)}{k_1} \right] + \xi, & 0 \leq x \leq a \\ w &= \frac{5}{r} \frac{pm-q}{k} \sin(rt-rx) - \frac{pm-q}{k_1} \cos(rt-rx) + \xi, & a \leq x \leq b \\ w &= \frac{pm-q}{k} e^{s(b-x)} + \frac{q}{k}, & x \geq b \end{aligned}$$

gdzie

$$\xi = \frac{pm-q}{k_1} + \frac{pm}{k}$$

Stałe całkowania dla fazy zaawansowanej wyliczymy korzystając z równań (4.9) oraz:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} [w] &= [w'] = 0 \quad \text{dla} \quad x = c \\ w &= w_x \quad \text{dla} \quad x = c \end{aligned}$$

Takich 10 warunków pozwala wyznaczyć osiem niewiadomych stałych oraz określić dwa równania do wyznaczenia parametrów b i c dla danego a. I tak mamy:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} C_1 &= C_3 = 0 \\ C_2 &= -\frac{1}{2} \frac{5r}{6} (a^2 + c^2) + \frac{1}{2g} c^2 + \frac{7}{6} ac + (pm-q) \left[\frac{5}{r} \sin(rt-b) - \frac{1}{k_1} \cos(rt-b) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{k_1} + \frac{pm}{k} \\ C_4 &= \frac{pm-q}{k} e^{st} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\frac{p-r}{\sigma} a \\
 (4.14) \quad B_2 &= \frac{1}{2} \frac{q-p-r}{\sigma} c^2 + \frac{p-r}{\sigma} ac + (p-m-q) \left[\frac{\sigma}{k} \sin(nb-rc) - \frac{1}{k_1} \cos(nb-rc) + \frac{1}{k_1} \right] + \frac{p-r}{\sigma} \\
 D_1 &= \frac{\sigma}{\pi} \frac{p-m-q}{k} \sin nb - \frac{p-m-q}{k_1} \cos nb \\
 D_2 &= \frac{q-p-m}{k_1} \sin nb + \frac{\sigma}{\pi} \frac{q-p-m}{k} \cos nb
 \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned}
 -\frac{q-p-r}{\sigma} c - \frac{p-r}{\sigma} a &= \frac{\pi(q-p-m)}{k_1} \sin(nb-rc) + \frac{\sigma(q-p-m)}{k} \cos(nb-rc) \\
 (4.15) \quad \frac{q-p-r}{k_1} &= \frac{\sigma}{\pi} \frac{p-m-q}{k} \sin(nb-rc) - \frac{p-m-q}{k_1} \cos(nb-rc)
 \end{aligned}$$

Wobec tego ugięcia w poszczególnych strefach wyrażają się równaniami:

$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad w &= -\frac{1}{2} \frac{q}{\sigma} x^2 - \frac{1}{2} \frac{p-r}{\sigma} (a^2 + c^2) + \frac{1}{2} \frac{q}{\sigma} c^2 + f(b, c), \quad 0 \leq x \leq a \\
 w &= -\frac{1}{2} \frac{q-p-r}{\sigma} x^2 - \frac{p-r}{\sigma} ax + \frac{1}{2} \frac{q-p-r}{\sigma} c^2 + f(b, c), \quad a \leq x \leq c \\
 w &= \frac{\sigma}{\pi} \frac{p-m-q}{k} \sin(nb-rc) - \frac{p-m-q}{k_1} \cos(nb-rc) + \frac{p-m-q}{k_1} + \frac{p-m}{k}, \quad c \leq x \leq b \\
 w &= \frac{p-m-q}{k} e^{\sigma(b-x)} + \frac{q}{k}, \quad x \geq b
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$(4.17) \quad f(b, c) = (p-m-q) \left[\frac{\sigma}{k} \sin(nb-rc) - \frac{1}{k_1} \cos(nb-rc) + \frac{1}{k_1} \right] + \frac{p-r}{\sigma} ac + \frac{p-m}{k}$$

Rozwikłanie równań określających zasięgi stref

Równania (4.11) i (4.15) są funkcjami uwikłanymi pozwalającymi wyznaczyć parametry b i c dla zadanej szerokości komory. Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem wielkości niewiadomych w postaci jawnej.

faza pośrednia

Bezpośrednią postać wzoru do wyznaczenia parametru b uzyskamy biorąc pod uwagę zależność (4.11) oraz jedynkę trygonometryczną dla argumentu $(rb-ra)$. Oznaczając symbolami literowymi wszystkie stałe współczynniki otrzymamy:

$$A = B\sin(rb-ra) + D\cos(rb-ra)$$

$$\sin^2(rb-ra) + \cos^2(rb-ra) = 1$$

wprowadzając nowe niewiadome

$$y = \sin(rb-ra)$$

$$z = \cos(rb-ra)$$

powyższy układ równań możemy zapisać w prostszej postaci

$$A = By + Dz$$

$$y^2 + z^2 = 1$$

Rozwiązując tak przekształcony układ równań otrzymujemy równanie kwadratowe względem niewiadomej funkcji z :

$$(B^2 + D^2)z^2 - 2ADz + (A^2 - B^2) = 0$$

$A, B, D = \text{const.}$

którego wyróżnik i pierwiastki mają postać:

$$(4.18) \quad \Delta = \frac{4n^2(pm-q)^2}{k_1^2} \left[\frac{n^2(pm-q)^2}{k_1^2} - \left(\frac{qa}{G}\right)^2 + \frac{s^2(pm-q)^2}{k^2} \right]$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\frac{2qs}{Gk} (pm-q)a \mp \sqrt{\Delta}}{2(pm-q)^2 \left[\frac{n^2}{k_1^2} + \frac{s^2}{k^2} \right]} + a$$

faza zaawansowana

Przekształcając równania układu (4.15) uzyskujemy rozprężone równanie względem niewiadomej c :

$$(4.19) \quad \frac{(q-p_r)^2}{rG^2} c^2 + \frac{2(q-p_r)p_r a}{rG^2} c + W_d = 0$$

gdzie

$$W_d = \frac{p_r^2 a^2}{rG^2} + \frac{(q-p_r)^2 r}{k_1^2} - \frac{(q-p_m)^2 (r^2 k^2 + S^2 k_1^2)}{r k^2 k_1^2}$$

Z (4.19) wyliczamy zasięg c strefy rezydualnej.

Biorąc następnie pod uwagę (4.15-2) oraz jedynekę trygonometryczną dla argumentu $rb-rc$ wyznaczmy wartość b jako:

$$(4.20) \quad b_{1,2} = \frac{1}{r} \arccos \frac{-2 \frac{q-p_r}{k_1} \frac{p_m-q}{k_1} \mp \sqrt{\Delta_1}}{2(k+k_1) \frac{(p_m-q)^2}{k k_1^2}} + c$$

przy czym

$$\Delta_1 = \frac{4(p_m-q)^2}{k k_1} \left[\frac{(p_m-q)^2}{k k_1} - \frac{(q-p_r)^2}{k_1^2} + \frac{(p_m-q)^2}{k_1^2} \right]$$

ograniczeność rozwiązań

Aby istniała szerokość komory a_0 dla której naprężenie na jej krawędzi osiąga po raz pierwszy wartość równą rezydualnej wytrzymałości materiału, wyrażenie podpierwiastkowe we wzorze na a_0 musi być nieujemne. Na tej podstawie stwierdzamy, że

$$p_r \in \langle p_r^1, p_r^2 \rangle \Rightarrow \exists a_0$$

gdzie

$$p_r^{1,2} = q \mp (p_m - q) \sqrt{1 + \frac{k_1}{k}}$$

4.2. Schemat II

4.2.1. materiał kruchy

Rozwiązanie ogólne dla schematu w którym oprócz działania naprężeń pionowych uwzględniamy również ciśnienie boczne, uzyskujemy stosując do równań (3.36) warunki (4.5). Stąd uzyskujemy:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_4 = 0 \\
 C_2 &= -\frac{1}{2} \frac{Pr}{G} a^2 - \frac{t \nu q}{G} (1 + a + \frac{1}{2} a^2) + B_2 \\
 (4.21) \quad C_3 &= \frac{e^{-sb}}{s} \left\{ \frac{t \nu q}{G} [1 + a - b - e^{\delta(a-b)}] + \frac{q - Pr}{G} b + \frac{Pr}{G} a \right\} \\
 B_1 &= -\frac{t \nu q}{G} (1 + a) - \frac{Pr}{G} a \\
 B_2 &= C_3 e^{-sb} + \frac{q}{k} + \frac{t \nu q}{G} [e^{\delta(a-b)} + b + ab - \frac{1}{2} b^2] + \frac{Pr}{G} ab + \frac{1}{2} \frac{q - Pr}{G} b^2
 \end{aligned}$$

Uwzględniając (4.9) w równaniach (3.36) dostajemy równania określające ugięcia w poszczególnych przedziałach. Położenie punktu maksymalnych naprężeń wyznaczamy z warunku:

$$(4.22) \quad W(x)|_{x=b} = w_m(x) = \frac{\sigma_z^m(x)|_{x=b}}{k}$$

Uwzględniając w nim (3.36-3) oraz (3.30-1) mamy:

$$(4.23) \quad C_4 e^{-sb} + \frac{q}{k} = \frac{t \nu q [1 - e^{-\delta(b-a)}] + p_m}{k}$$

skąd dostajemy równanie dla b:

$$(4.24) \quad t \nu q (s - \delta) [1 - e^{-\delta(a-b)}] = s [(t \nu q + p_m)(b-a) - qb] + p_m - q$$

4.2.2. Materiał ulegający osłabieniu.

faza pośrednia

Występujące w równaniach (3.41) stałe całkowania oraz położenie punktu maksymalnych naprężeń wyznaczmy z warunków (4.5) oraz zależności:

$$(4.25) \quad W(x)|_{x=b} = w_m(x)|_{x=b} = \frac{t \nu q [1 - e^{-\delta(b-a)}] + 2\sqrt{c_0}}{k}$$

otrzymując

$$C_1 = C_3 = 0$$

$$(4.26) \quad C_2 = \frac{1}{2} \frac{q}{G} a^2 + B \sin(\pi b - \pi a) + A \cos(\pi b - \pi a) + \frac{2\sqrt{k} C_0 (k + k_1) - k q (1 - \nu)}{k k_1} - \frac{t \nu q}{G + k_1}$$

$$C_4 = \frac{t \nu q [1 - e^{-\gamma(b-a)}] + 2\sqrt{k} C_0 - q}{k} e^{s b}$$

$$D_1 = A \cos \pi b + B \sin \pi b$$

$$D_2 = A \sin \pi b - B \cos \pi b$$

gdzie:

$$A = \frac{t \nu q [1 - e^{-\gamma(b-a)}] + 2\sqrt{k} C_0}{k k_1} - \frac{2\sqrt{k} C_0 (k + k_1) - k q (1 - \nu)}{k k_1} - \frac{t \nu q e^{-\gamma(b-a)}}{G + k_1}$$

$$(4.27) \quad B = \frac{t \nu q [1 - e^{-\gamma(b-a)}] + 2\sqrt{k} C_0 - q}{k \pi} s + \frac{t \nu q e^{-\gamma(b-a)}}{(G + k_1) \pi}$$

Równanie dla b ma postać:

$$(4.28) \quad \frac{q}{G} a = \pi [B \cos(\pi b - \pi a) - A \sin(\pi b - \pi a)] - \frac{t \nu q}{G + k_1}$$

Uwzględniając wartości tak policzonych stałych w równaniach (3.41) otrzymujemy równania:

$$w = -\frac{1}{2} \frac{q}{G} (x^2 - a^2) + B \sin(\pi b - \pi a) + A \cos(\pi b - \pi a) + \frac{2\sqrt{k} C_0 (k + k_1) - k q (1 - \nu)}{k k_1} - \frac{t \nu q}{G + k_1}, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$(4.29) \quad w = (A \cos \pi b + B \sin \pi b) \cos \pi x + (A \sin \pi b - B \cos \pi b) \sin \pi x + \frac{2\sqrt{k} C_0 (k + k_1) - k q (1 - \nu)}{k k_1} - \frac{t \nu q e^{-\gamma(x-a)}}{G + k_1}, \quad a \leq x \leq b$$

$$w = \frac{t \nu q [1 - e^{-\gamma(b-a)}] + 2\sqrt{k} C_0 - q}{k} e^{s(b-x)} + \frac{q}{k}, \quad x \geq b$$

które wraz z równaniem (4.16) opisują zagadnienie deformacji pasma dla fazy pośredniej.

faza graniczna II

Parametry geometryczne a_0 i b_0 odpowiadające końcowi fazy pośredniej możemy wyznaczyć rozwiązując układ równań nieliniowych złożony z równania (4.17-1) wziętego dla $w=w_r$ określonego zależnością (3.42) oraz równania (4.16), to znaczy układ równań w postaci:

$$(4.30) \quad \begin{aligned} A \cos(\tau b_0 - \tau a_0) + B \sin(\tau b_0 - \tau a_0) &= \frac{q(\tau v + 1) - 2\sqrt{k}c\tau}{k_1} + \frac{\tau v q}{G + k_1} \\ B \cos(\tau b_0 - \tau a_0) - A \sin(\tau b_0 - \tau a_0) &= \frac{q a_0}{\tau G} + \frac{\tau v q}{\tau(G + k_1)} \end{aligned}$$

gdzie $A, B = f(a_0, b_0)$ określone są zależnościami (4.15).

faza zaawansowana

Występujące w równaniach (3.43) niewiadome oraz równania wiążące parametry a , b i c wyznaczmy z pierwszych sześciu spośród warunków (4.9), z (4.13-1) oraz z zależności:

$$(4.31) \quad \begin{aligned} W|_{x=b} = W_m(x)|_{x=b} &= \frac{Gz^m(x)|_{x=b}}{k} = \frac{\tau v q [1 - e^{-\beta(b-a)}] + 2\sqrt{k}c_0}{k} \\ W|_{x=c} = W_r(x)|_{x=c} &= \frac{\tau v q [1 - e^{-\beta(c-a)}] + 2\sqrt{k}c_0}{k} + \frac{2\sqrt{k}c_0 - 2\sqrt{k}c_r}{k_1} \end{aligned}$$

Wyliczone stąd stałe mają wartości:

$$(4.32) \quad \begin{aligned} C_1 = C_3 &= 0 \\ C_2 &= \xi^4 \cos(\tau b - \tau c) + \xi^2 \sin(\tau b - \tau c) + \frac{1}{2} \frac{q}{G} a^2 + \frac{Pr}{G} (ac - a^2) + \\ &+ \frac{\tau v q}{G} [e^{-\beta(c-a)} a^2 - a + ac + c - 1] + \frac{Prm(k+k_1) - kq(1-\tau v)}{k k_1} + \\ &- \frac{\tau v q e^{-\beta(c-a)}}{G + k_1} + \frac{1}{2} \frac{Prq + \tau v q}{G} (a^2 - c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \frac{tvq[1 - e^{-\delta(b-a)}] + pm - q}{k} e^{sb} \\
 B_1 &= -\frac{tvq}{G} - \frac{(pr + tvq)}{G} a \\
 (4.32) \quad B_2 &= \xi^1 \cos(nb - nc) + \xi^2 \sin(nb - nc) + \frac{tvq}{G} e^{-\delta(c-a)} - \frac{1}{2} \frac{pr - q + tvq}{G} c^2 + \\
 &\quad + \frac{tvq}{G} c + \frac{pr + tvq}{G} ac + \frac{pm(k + k_1) - kq(1 - tv)}{kk_1} - \frac{tvq e^{-\delta(c-a)}}{G + k_1} \\
 D_1 &= \xi^1 \cos nb + \xi^2 \sin nb \\
 D_2 &= \xi^1 \sin nb - \xi^2 \cos nb
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (4.33) \quad \xi^1 &= \frac{tvq[1 - e^{-\delta(b-a)}] + pm}{k} - \frac{pm(k + k_1) - kq(1 - tv)}{kk_1} + \frac{tvq e^{-\delta(b-a)}}{G + k_1} \\
 \xi^2 &= \frac{tvq e^{-\delta(b-a)}}{r(G + k_1)} - \frac{r}{r} \frac{q - pm - tvq[1 - e^{-\delta(b-a)}]}{k}
 \end{aligned}$$

Niewiadome wartości b i c odpowiadające danemu a należy wyliczyć z układu równań:

$$\begin{aligned}
 (4.34) \quad &\frac{k_1 tvq e^{-\delta(c-a)}}{G(G + k_1)} + \frac{tvq}{G} (c - a - 1) + \frac{pr}{G} (c - a) - \frac{q}{G} c = \\
 &= \xi^1 r \sin(nb - nc) - \xi^2 r \cos(nb - nc) \\
 &\xi^1 \cos(nb - nc) + \xi^2 \sin(nb - nc) - \frac{tvq e^{-\delta(c-a)}}{G + k_1} = \\
 &= \frac{tvq[1 - e^{-\delta(c-a)}]}{k} - \frac{pr}{k_1} + \frac{kq(1 - tv)}{kk_1}
 \end{aligned}$$

4.3. Schemat III

Rozwiązanie szczególne dla pasma półnieskończonego otrzymujemy z rozwiązania wyprowadzonego dla pasma o skończonej szerokości wykonując przejście graniczne do nieskończoności z odcię tą x_g osi symetrii pasma skończonego.

faza początkowa

Ponieważ parametr x_s występuje tylko w równaniu (6.15) w funkcji $F_1(x_e)$ i rozwiązaniu (6.20) dla strefy edometrycznej E_d , przeto operację przejścia granicznego wykonamy tylko w odniesieniu do tego równania.

$$\lim_{x_s \rightarrow \infty} F_1(x_e) = \lim_{x_s \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\beta x_s - x_e}{h}} - e^{-\frac{\beta x_s - x_e}{h}}}{e^{\frac{\beta x_s - x_e}{h}} + e^{-\frac{\beta x_s - x_e}{h}}} = 1$$

$$(4.35) \quad \lim_{x_s \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\beta x_s - x}{h}} + e^{-\frac{\beta x_s - x}{h}}}{e^{\frac{\beta x_s - x_e}{h}} + e^{-\frac{\beta x_s - x_e}{h}}} = e^{-\frac{x - x_e}{h}}$$

$$\lim_{x_s \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\beta x_s - x}{h}} - e^{-\frac{\beta x_s - x}{h}}}{e^{\frac{\beta x_s - x}{h}} + e^{-\frac{\beta x_s - x}{h}}} = e^{-\frac{x - x_e}{h}}$$

Wobec (4.23) równanie (6.18) należy zastąpić równaniem

$$(4.36) \quad (1 - \nu'^2)\beta F_3(x_e) + \alpha_2 F_2(x_e) = 0$$

gdzie $F_2(x_e)$ i $F_3(x_e)$ określone są wzorami (6.19), zaś rozwiązanie dla strefy edometrycznej wyrażamy wzorami:

$$\sigma_z^{ed}(x) = q e^{-\frac{\beta x - x_e}{h}} \frac{1}{2\alpha_2} \left\{ k_1(x_e) \left[(d + \alpha_1) e^{(d + \alpha_1) \frac{x_e - a}{h}} + (d - \alpha_1) e^{-\frac{(d - \alpha_1) x_e - a}{h}} \right] - 4d\alpha_1 k_2(a) e^{2\alpha_1 \frac{x_e - a}{h}} \right\} + q$$

$$(4.37) \quad \sigma_x^{ed}(x) = \bar{\sigma}_y^{ed}(x) = \nu' \sigma_z^{ed}(x)$$

$$\tau_w^{ed}(x) = \frac{q \nu' \beta}{2\alpha_2} e^{-\frac{\beta x - x_e}{h}} \left\{ 4d\alpha_1 k_2(a) e^{2\alpha_1 \frac{x_e - a}{h}} - k_1(x_e) \left[(d + \alpha_1) e^{(d + \alpha_1) \frac{x_e - a}{h}} + (d - \alpha_1) e^{-\frac{(d - \alpha_1) x_e - a}{h}} \right] \right\}$$

$$u^{ed}(x) = 0, \quad w^{ed}(x) = \frac{h(1 - \nu'^2)}{E'} \sigma_z^{ed}(x)$$

gdzie D określone jest wzorem (6.17), zaś x_e równaniem (4.36). Rozwiązania (6.14) dla strefy E i (6.21) dla powierzchni ugięcia w obszarze ponadkomorowym zachowują tę samą postać. Zauważmy że w odległości $x = \infty$ od komory otrzymujemy ze wzorów (4.37)

$$(4.38) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_z^{ed}(x) &= q \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_x^{ed}(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_y^{ed}(x) = \sqrt{q} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \tau_w^{ed} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} w^{ed} &= \frac{h(1-v^2)}{E'} q \end{aligned}$$

a więc spełnione są warunki równowagi niezaburzonych ciśnień naturalnych w górotworze.

faza graniczna

Graniczną szerokość komory oraz odpowiadający jej zasięg strefy E wyznaczymy rozwiązując układ równań nieliniowych (4.35) i (6.25).

faza zaawansowana

Wykonując przejście graniczne dla wielkości zależnych od x_s w rozwiązaniu dla pasma skończonego wyrażenia ulegające transformacji są identyczne z wyrażeniami (4.35), uzyskujemy nową postać równania (6.36):

$$(4.39) \quad (1-v^2)\tilde{\beta}\tilde{F}_3(x_r, x_e) + \alpha_2\tilde{F}_2(x_r, x_e) = 0$$

gdzie $\tilde{F}_3(x_r, x_e)$ i $\tilde{F}_2(x_r, x_e)$ określone są wzorami (6.37). Równanie (4.39) służy wraz z równaniem (6.35) do określenia granic międzystrefowych x_r i x_e dla pasma półnieskończonego. Na podstawie wzorów (4.35) rozwiązania dla strefy edometrycznej przyjmą postać:

$$\sigma_z^{ed}(x) = \frac{1}{2\alpha_2} e^{-\beta \frac{x-x_0}{h}} \left\{ 4\alpha_1 \left[\frac{\sqrt{\alpha_2 c_r} \sqrt{t}}{\alpha_1} \left(e^{2\alpha_1 \frac{x_r-a}{h}} - 1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - q k_2(x_r) \right] e^{2\alpha_1 \frac{x_0-x_r}{h}} + q k_1(x_0) \left[(d+\alpha_1) e^{(d+\alpha_1) \frac{x_0-x_r}{h}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (d-\alpha_1) e^{-(d-\alpha_1) \frac{x_0-x_r}{h}} \right] \right\} + q$$

$$\sigma_x^{ed}(x) = \sigma_y^{ed}(x) = \nu' \sigma_z^{ed}(x)$$

$$\tau_w^{ed}(x) = \frac{\nu' \beta}{2\alpha_2} e^{-\beta \frac{x-x_0}{h}} \left\{ 4\alpha_1 \left[q k_2(x_r) - \frac{\sqrt{\alpha_2 c_r} \sqrt{t}}{\alpha_1} \left(e^{2\alpha_1 \frac{x_r-a}{h}} - 1 \right) \right] \cdot \right. \\ \cdot e^{2\alpha_1 \frac{x_0-x_r}{h}} - q k_1(x_0) \left[(d+\alpha_1) e^{(d+\alpha_1) \frac{x_0-x_r}{h}} + (d-\alpha_1) \cdot \right. \\ \left. \left. \cdot e^{-(d-\alpha_1) \frac{x_0-x_r}{h}} \right] \right\}$$

(4.40)

$$w^{ed}(x) = \frac{h(1-\nu'^2)}{E'} \sigma_z^{ed}(x)$$

$$\mu_z^{ed}(x) = \frac{z}{h} w^{ed}(x)$$

$$\mu_x^{ed}(x) = 0$$

Rozwiązania dla obszaru ponad komorą K, dla stref R i E pasma późnieskończoności określone są wzorami (6.40) ÷ (6.42).

4.4. Materiał ulegający osłabieniu a materiał kruchy - spójność rozwiązań.

Równania opisujące zagadnienie deformacji pasma z materiału kruchego możemy otrzymać wykonując przejście graniczne na odpowiednich równaniach dla materiału z osłabieniem. Symbolicznie zapisując mamy:

$$\frac{w(a, b, k)}{\text{materiał kruchy}} = \lim_{\substack{c \rightarrow b \\ k_1 \rightarrow \infty}} \frac{w(a, b, c, k, k_1)}{\text{materiał z osłabieniem}}$$

Biorąc przykładowo pod uwagę równania schematu I zauważymy, że wykonanie przejścia granicznego w odniesieniu do równań określających ugięcia daje natychmiast zależności analogiczne jak dla modelu uwzględniającego kruchość materiału. Natomiast w odniesieniu do równań wiążących parametry geometryczne a , b i c dostajemy:

$$\lim_{\substack{c \rightarrow b \\ \kappa \rightarrow \infty}} \left[-\frac{q-Pr}{G} c - \frac{Pr}{G} a \right] = \lim_{\substack{c \rightarrow b \\ \kappa \rightarrow \infty}} \left[\frac{r(q-Pr)}{\kappa} \sin(rb-r) + \frac{s(q-Pr)}{\kappa} \cos(rb-r) \right]$$

stąd

$$\frac{Pr}{\kappa} = \frac{1}{S} \left[\frac{q-Pr}{G} b + \frac{Pr}{G} a \right] + \frac{q}{R}$$

natomiast przejście graniczne w odniesieniu do (4.15-2) prowadzi do tożsamości $0 = 0$.

5. OGÓLNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DEFORMACJI PASMA O SKOŃCZONEJ SZEROKOŚCI

Konstruując rozwiązanie dla pasma o skończonej szerokości będziemy się często posługiwać równaniami stosowanymi przy okazji omawiania pasma półnieskończonego. Geometria układu oraz rozkłady naprężeń w poszczególnych fazach procesu zostały szkicowo pokazane na rysunkach 16 i 17.

5.1. Schemat I.

rozwiązanie sprężyste

Rozwiązanie ogólne dla fazy początkowej zapisujemy wzorami:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2} \frac{q}{G} x^2 + C_2, & 0 \leq x \leq a \\ w &= C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{R}, & a \leq x \leq a+l \end{aligned}$$

z których pierwszy jest równoważny (3.2) po wykorzystaniu warunku brzegowego (4.1-1), natomiast drugi odpowiada zależności (3.5):

koniec rozwiązania sprężystego

Zakres obowiązywania rozwiązania sprężystego (5.1) wyznacza graniczna szerokość komory przy której naprężenie na jej krawędzi osiąga wartość maksymalną. Równanie dla wyznaczenia a_{gr} ma postać analogiczną do (3.7), z tym że inne będą obecnie warunki brzegowe, więc również inne wartości stałych C_3 i C_4 .

faza zaawansowana

Korzystając z poprzednio wyprowadzonych równań, zagadnienie deformacji pasma w fazie zaawansowanej możemy opisać równaniami ogólnymi

$$(5.2) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2G} q x^2 + C_2, & 0 \leq x \leq a \\ w &= \frac{1}{2} \frac{Pr - q}{G} x^2 + B_1 x + B_2, & a \leq x \leq b \\ w &= C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{k}, & b \leq x \leq x_s \end{aligned}$$

5.2. Schemat II.

Uwzględniając założenia podane w paragrafie 3.2. możemy zapisać równania:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2G} q x^2 + C_2, & 0 \leq x \leq a \\ w &= \frac{1}{2} \frac{Pr - q}{G} e^{-\beta(x-a)} + \frac{1}{2} \frac{Pr - q + \frac{1}{2} \beta^2}{G} x^2 + B_1 x + B_2, & a \leq x \leq b \\ w &= C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{k}, & b \leq x \leq x_s \end{aligned}$$

5.3. Schemat III.

Geometrię rozpatrywanego obecnie układu pokazują rysunki 13 (dla fazy początkowej) i 15 (dla fazy zaawansowanej).

faza początkowa

Budując rozwiązanie ogólne dla fazy początkowej skorzystamy z równań podanych w punkcie 3.3. Uwzględniając równania (3.34-1) i (3.50) oraz (3.51) otrzymujemy:

- w strefie sprężystego dwuosiowego stanu odkształcenia E

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^e &= \frac{du}{dx} = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_z) \\
 \varepsilon_y^e &= 0 \Rightarrow \sigma_y = \nu' (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x + \sigma_z) \\
 \varepsilon_z^e &= \frac{w(x)}{h} = \frac{1}{E'} (\sigma_z - \nu' \sigma_x) \\
 \sigma_{xy}^e &= \sigma_{yz}^e = \sigma_{zx}^e = 0
 \end{aligned}
 \quad \begin{array}{l} \text{dla} \\ a \leq x \leq a+pe \\ 0 \leq z \leq h \end{array}$$

- w strefie sprężystej deformacji edometrycznej E_d

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^{ed} &= \varepsilon_y^{ed} = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \nu' \sigma_z \\
 \varepsilon_z^{ed} &= \frac{w(x)}{h} = \frac{1-\nu'^2}{E'} \sigma_z \\
 \sigma_{xy}^{ed} &= \sigma_{yz}^{ed} = \sigma_{zx}^{ed} = 0 \\
 \text{dla } a+pe &\leq x \leq x_s = a+l; \quad 0 \leq z \leq h
 \end{aligned}$$

w powyższych wzorach przyjęto oznaczenia:

$$(5.6) \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$$

gdzie E i ν są modułem Younga i współczynnikiem Poissona, oraz założono, podobnie jak w paragrafie 3.3.3.

$$(5.7) \quad \begin{array}{l} \sigma_{zx} \approx 0 \\ \tau_{zx} \approx 0 \end{array} \quad \text{dla } \begin{array}{l} a \leq x \leq x_s \\ 0 \leq x \leq h \end{array}$$

Z równań (5.7) oraz (5.4) i (5.5) wynika, że odkształcenia ε_x , ε_y , ε_z oraz naprężenia σ_x , σ_y , σ_z można uważać za wielkości głównie zależne tylko od jednej zmiennej przestrzennej x oraz parametrów określających geometrię układu a, h, l. Dołączając do równań (5.4) lub (5.5) równanie równowagi (3.41) lub (3.42) oraz równanie różniczkowe linii ugięcia belki (2.1) uzys-

kujemy komplet równań opisujących zagadnienie deformacji pasma, I tak w strefie E zagadnienie sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mu}{dx} &= \frac{1}{E'} (\bar{\sigma}_x - \nu' \bar{\sigma}_z) \\
 \frac{w(x)}{h} &= \frac{1}{E'} (\bar{\sigma}_z - \nu' \bar{\sigma}_x) \\
 (5.8) \quad \frac{d\bar{\sigma}_x}{dx} - \frac{2\mu}{h} \bar{\sigma}_z &= 0; \quad \bar{\tau}_w = \mu \bar{\sigma}_z \\
 \frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{\bar{\sigma}_z - q}{kh}
 \end{aligned}$$

dla
 $a \leq x \leq x_e = a + \rho_e$
 $0 \leq z \leq h$

zaś dla strefy E₂ podstawowy układ równań ma postać:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u(x) = 0 \\
 \bar{\sigma}_x &= \bar{\sigma}_y = \nu' \bar{\sigma}_z \\
 (5.9) \quad \frac{w(x)}{h} &= \frac{1}{E'} (1 - \nu'^2) \bar{\sigma}_z \\
 \frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{1}{kh} (\bar{\sigma}_z - q) \\
 \frac{d\bar{\sigma}_x}{dx} - \frac{2\bar{\tau}_w}{h} &= 0
 \end{aligned}$$

dla
 $x_e \leq x \leq x_s$
 $0 \leq z \leq h$

Zajmijmy się rozwiązaniem układu (5.5). Z równań (5.8-2,3) otrzymujemy:

$$(5.10) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{h}{E'} \left(\frac{d^2 \bar{\sigma}_z}{dx^2} - \nu' \frac{d^2 \bar{\sigma}_x}{dx^2} \right) = \frac{h}{E'} \left(\frac{d^2 \bar{\sigma}_z}{dx^2} - \frac{2\mu \nu'}{h} \frac{d\bar{\sigma}_z}{dx} \right)$$

skąd na podstawie (5.8-5)

$$(5.11) \quad \frac{\bar{\sigma}_z - q}{kh} = \frac{h}{E'} \left(\frac{d^2 \bar{\sigma}_z}{dx^2} - \frac{2\mu \nu'}{h} \frac{d\bar{\sigma}_z}{dx} \right)$$

lub po uporządkowaniu

$$(5.12) \quad \frac{d^2 \bar{\sigma}_z}{dx^2} - \frac{2\mu \nu'}{h} \frac{d\bar{\sigma}_z}{dx} - \frac{E'}{kh^2} (\bar{\sigma}_z - q) = 0$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(5.13) \quad a_1 = \mu v' \quad a_2 = \frac{E'}{K}$$

możemy (5.12) zapisać w postaci:

$$(5.14) \quad \frac{d^2 \bar{\sigma}_z}{dx^2} - \frac{2a_1}{h} \frac{d \bar{\sigma}_z}{dx} - \frac{a_2}{h^2} (\bar{\sigma}_z - q) = 0$$

Całka ogólna tego równania zapisuje się wzorem

$$(5.15) \quad \bar{\sigma}_z^e = C_1^e e^{\frac{(d+a_1)x}{h}} + C_2^e e^{-\frac{(d-a_1)x}{h}} + q$$

gdzie

$$(5.16) \quad d = \sqrt{a_1^2 + a_2}$$

Podstawiając (5.15) do równania (5.8-3) otrzymujemy:

$$(5.17) \quad \frac{d \bar{\sigma}_x}{dx} = \frac{2\mu}{h} \left[C_1^e e^{\frac{(d+a_1)x}{h}} + C_2^e e^{-\frac{(d-a_1)x}{h}} + q \right]$$

które po scałkowaniu daje:

$$(5.18) \quad \bar{\sigma}_x^e = \frac{2a_1}{v'} \left[\frac{C_1^e}{d+a_1} e^{\frac{(d+a_1)x}{h}} + \frac{C_2^e}{d-a_1} e^{-\frac{(d-a_1)x}{h}} + q \frac{x}{h} \right] + C_3^e$$

Podstawiając (5.15) i (5.18) do (5.8-1) dostajemy równanie różniczkowe dla przemieszczeń:

$$(5.19) \quad \frac{d u}{dx} = -\frac{1}{v' E'} \left[\frac{b_2}{d+a_1} C_1^e e^{\frac{(d+a_1)x}{h}} + \frac{b_1}{d-a_1} C_2^e e^{-\frac{(d-a_1)x}{h}} + q(2a_1 \frac{x}{h} - v'^2) - v' C_3^e \right]$$

w którym:

$$(5.20) \quad b_1 = v'^2(d-a_1) + 2a_1, \quad b_2 = v'^2(d+a_1) - 2a_1$$

Całkowanie (5.19) daje:

$$(5.21) \quad u^e = -\frac{h}{\sqrt{E'}} \left\{ \frac{b_2}{(d+a_1)^2} C_1^e e^{(d+a_1)\frac{x}{h}} - \frac{b_1}{(d-a_1)^2} C_2^e e^{-(d-a_1)\frac{x}{h}} - q [a_1 \left(\frac{x}{h}\right)^2 - v^2 \left(\frac{x}{h}\right)] - \sqrt{C_3 \frac{x}{h}} \right\} + C_4^e$$

Podstawiając (5.15) i (5.18) do (5.8-2) mamy:

$$(5.22) \quad w^e = \frac{h}{E'} \left[\frac{d-a_1}{d+a_1} C_1^e e^{(d+a_1)\frac{x}{h}} + \frac{d+a_1}{d-a_1} C_2^e e^{-(d-a_1)\frac{x}{h}} + q(1-2a_1\frac{x}{h}) - \sqrt{C_3} \right]$$

Równania (5.15), (5.18), (5.21) i (5.22) stanowią rozwiązanie ogólne zadania dla strefy E. Biorąc pod uwagę układ równań (5.9), uzyskamy z równań (5.9-3,4) następujące równanie różniczkowe dla funkcji $\sigma_z(x)$:

$$(5.23) \quad \frac{d^2 \sigma_z}{dx^2} - \frac{E'}{kh^2(1-v^2)} (\sigma_z - q) = 0$$

Całkowanie ostatniego równania daje:

$$(5.24) \quad \sigma_z^{ed} = A_1 e^{\beta \frac{x}{h}} + A_2 e^{-\beta \frac{x}{h}} + q$$

gdzie stała β zdefiniowana jest wzorem:

$$(5.25) \quad \beta^2 = \frac{E'}{k(1-v^2)} = \frac{a_2}{1-v^2}$$

Podstawiając (5.25) do (5.9-2) i (5.9-3) otrzymujemy:

$$(5.26) \quad \sigma_x^{ed} = \sqrt{\sigma_z^{ed}} = v'(A_1 e^{\beta \frac{x}{h}} + A_2 e^{-\beta \frac{x}{h}} + q)$$

$$(5.27) \quad w^{ed} = \frac{h}{E'} (1-v^2) \sigma_z^{ed} = \frac{h(1-v^2)}{E'} (A_1 e^{\beta \frac{x}{h}} + A_2 e^{-\beta \frac{x}{h}} + q)$$

Zaś z (5.9-5) i (5.26) otrzymujemy wielkość naprężenia stycznego τ_w^{ed} działającego na płaszczyźnie kontaktu strefy edometrycznej pasma z nadkładem

$$(5.28) \quad \tau_w^{ed} = \frac{h}{2} \frac{d\sigma_x^{ed}}{dx} = \frac{1}{2} v' \beta (A_1 e^{\beta \frac{x}{h}} - A_2 e^{-\beta \frac{x}{h}})$$

Dodatkowo zgodnie z (5.9-1) otrzymamy

$$(5.29) \quad u_x^{ed} \equiv 0 \quad \text{dla} \quad x_e \leq x \leq x_s$$

Równanie dla linii ugięcia w obszarze ponadkomorowym dostajemy z równania (2.1):

$$(5.30) \quad w^k = -\frac{q}{2kh} x^2 + B_1 x + B_2$$

faza graniczna

Pierwsze kruche załamanie struktury materiału pasma wystąpi w chwili, gdy naprężenia działające w paśmie znajdującym się początkowo w sprężystym stanie odkształcenia osiągną wartości spełniające początkowy warunek stanu granicznego (3.14), po czym nastąpi przejście w rezydualny stan graniczny (3.15). Ze względu na zerowanie się naprężeń poziomych na krawędzi komory, początkowy warunek stanu granicznego zapiszemy w postaci

$$(5.31) \quad \sigma_z^e(x) \Big|_{x=a_{gr}} = 2\sqrt{t}c_0$$

gdzie wartość naprężenia $\sigma_z^e(x)$ określona jest wzorem ogólnym (5.15). Aby określić graniczną szerokość komory do równania (5.31) należy dołączyć, jak to zostanie pokazane w paragrafie 6.3 pewne równanie dodatkowe. Wynika to z faktu, że stałe występujące w równaniu (5.15) będą zależne od dwóch (tutaj niezależnych) wielkości: szerokości komory oraz położenia granicy między strefami E i E_d.

faza zaawansowana

Układ stref występujących w paśmie w fazie zaawansowanej pokazuje rysunek 15. Równania konstytutywne i ich rozwiązania ogólne dla stref sprężystych E i E_d oraz obszaru ponadkomorowego, zostały podane w punktach 3.3.1. i 5.3. Obecnie korzystając z założeń podanych w punkcie 3.3 wyprowadzimy rozwiązanie ogólne dla stref R rezydualnego stanu równowagi granicznej. Uwzględniając (3.43) określamy składowe wektora prędkości i wektora prędkości odkształcenia:

$$(5.32) \quad \begin{aligned} v_x &= -\frac{d}{dt} u(x,t) = -\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \\ v_y &= 0 \\ v_z &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{z}{h} w(x,t) \right] = -\frac{z}{h} \left[\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

oraz:

$$(5.33) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= -\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \right] \\ \dot{\epsilon}_y &= 0 \\ \dot{\epsilon}_z &= -\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \dot{\gamma}_{xy} &= -\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \equiv 0 \\ \dot{\gamma}_{yz} &= -\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \equiv 0 \\ \dot{\gamma}_{zx} &= -\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{z}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

dla $a(t) \leq x \leq x_r(t)$

Ze wzorów (5.35) i (5.32) otrzymujemy wyrażenia na współrzędne tensora spinu:

$$(5.34) \quad \begin{aligned} \omega_{xy} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \equiv 0 \\ \omega_{yz} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \equiv 0 \\ \omega_{zx} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{z}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_x &= \omega_y = \omega_z = 0 \end{aligned}$$

Ponieważ współrzędne tensora odkształcenia $\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yz} = 0$ oraz współrzędne tensora prędkości odkształcenia $\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yz} = 0$, przeto możemy również założyć

$$(5.35) \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 0 \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = 0 \end{aligned}$$

Na podstawie (3.30), (5.34) i (5.35) wyliczamy współrzędne tensora naprężenia Zaremy-Jaumana

$$(5.36) \quad \begin{aligned} \overset{\nabla}{\sigma}_x &= \dot{\sigma}_x + 2\omega_{zx}\tau_{zx} \\ \overset{\nabla}{\sigma}_y &= \dot{\sigma}_y \\ \overset{\nabla}{\sigma}_z &= \dot{\sigma}_z - 2\omega_{zx}\tau_{zx} \\ \overset{\nabla}{\tau}_{xy} &= \overset{\nabla}{\tau}_{yx} = 0 \\ \overset{\nabla}{\tau}_{yz} &= \overset{\nabla}{\tau}_{zy} = 0 \\ \overset{\nabla}{\tau}_{xz} &= \overset{\nabla}{\tau}_{zx} = \dot{\tau}_{zx} - \omega_{zx}(\sigma_x - \sigma_z) \end{aligned}$$

gdzie $\dot{\sigma}_x$, $\dot{\sigma}_y$, $\dot{\sigma}_z$ i $\dot{\tau}_{zx}$ są pochodnymi materialnymi. Uwzględniając (5.35) wyliczamy wartości główne tensora naprężenia

$$(5.37) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2} \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2} \\ \sigma_2 &= \sigma_y \end{aligned}$$

oraz wyrażamy przez naprężenia σ_x , σ_z , τ_{zx} wzory na potencjał plastyczny i rezydualny warunek stanu granicznego

$$(5.38) \quad q(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \sin \varphi' - c' \cos \varphi' = 0$$

$$(5.39) \quad f_r(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \sin \varphi - cr \cos \varphi = 0$$

Na podstawie (5.35), (5.36) oraz ostatnich dwóch zależności, związki konstytutywne (3.29) redukują się do postaci:

$$(5.40) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{1+\nu}{E}(\dot{\sigma}_x + 2\omega_{zx}\tau_{zx}) - \frac{\nu}{E}(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z) + \lambda \left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{4R} - \frac{1}{2} \sin \varphi' \right) \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_y - \frac{\nu}{E}(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z) = 0 \end{aligned}$$

$$(5.40) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_z &= \frac{1+\nu}{E} (\dot{\sigma}_z - 2\omega_{zx} \tau_{zx}) - \frac{\nu}{E} (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z) + \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{4R} - \frac{1}{2} \sin \psi \right) \\ \dot{\tau}_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} [\dot{\tau}_{zx} - \omega_{zx} (\sigma_x - \sigma_z)] + \dot{\lambda} \frac{\tau_{zx}}{4R} \\ R &= \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2} \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.41) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda} &> 0 \quad \text{dla } f_{\tau}(\xi) = 0 \quad \text{i } \dot{f}_{\tau}(\xi) = 0 \\ \dot{\lambda} &= 0 \quad \text{dla } f_{\tau}(\xi) < 0 \quad \text{lub } f_{\tau}(\xi) = 0 \quad \text{i } \dot{f}_{\tau}(\xi) < 0 \end{aligned}$$

Wykorzystując (5.40-2), związki konstytutywne (5.40) zapisujemy w postaci:

$$(5.42) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_x &= \frac{1+\nu}{E} [\dot{\sigma}_x - \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_z) + 2\omega_{zx} \tau_{zx}] + \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{4R} - \frac{1}{2} \sin \psi \right) \\ \dot{\xi}_z &= \frac{1+\nu}{E} [\dot{\sigma}_z - \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_z) - 2\omega_{zx} \tau_{zx}] + \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{4R} - \frac{1}{2} \sin \psi \right) \\ \dot{\tau}_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} [\dot{\tau}_{zx} - \omega_{zx} (\sigma_x - \sigma_z)] + \dot{\lambda} \frac{\tau_{zx}}{R} \\ \dot{\sigma}_y &= \nu (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_z) \end{aligned}$$

Wielkości $\dot{\xi}_x$, $\dot{\xi}_z$, $\dot{\tau}_{zx}$ są z drugiej strony, na podstawie założonej kinematyki cząstek pasma, określone zależnościami (5.33). Równania (5.39) i (5.42) łącznie z zależnościami (5.33) i (5.34) oraz rozpisanymi równaniami równowagi (5.36) stanowią układ nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych i algebraicznych względem niewiadomych składowych stanu przemieszczenia i naprężenia oraz mnożnika λ . Ponieważ całki tych równań nie dają się wyrazić w postaci analitycznej, założymy, że przemieszczenia są wielkościami małymi, tzn.:

$$(5.43) \quad u(x, t) \ll 1, \quad w(x, t) \ll 1$$

a więc

$$(5.44) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \ll 1, \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \ll 1$$

oraz przyjmiemy przybliżoną równość

$$(5.45) \quad \tau_{zx} \approx 0$$

Założenie małych odkształceń pasma powoduje wyzerowanie jedynej niezerowej składowej tensora spinu oraz pozwala utożsamiać pochodne materialne składowych tensora naprężenia z pochodnymi lokalnymi względem czasu, tzn. przyjmując

$$(5.46) \quad \overset{\nabla}{\sigma}_x = \dot{\sigma}_x = \frac{\partial \sigma_x(x,t)}{\partial t}, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_z = \dot{\sigma}_z = \frac{\partial \sigma_z(x,t)}{\partial t}, \quad \overset{\nabla}{\chi}_{xz} = \dot{\chi}_{xz} = 0$$

Uwzględnienie powyższych przybliżonych relacji w podstawowych równaniach opisujących zachowanie się układu, prowadzi do zależności

$$(5.47) \quad \sigma_x = -\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = -\frac{\kappa}{h} \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$(5.48) \quad q(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_x) - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x) \sin \Psi - c' \cos \Psi'$$

$$(5.49) \quad f_{\pi}(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_x) - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x) \sin \Psi - c_{\pi} \cos \Psi = 0$$

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{E'} (\dot{\bar{\sigma}}_x - \nu' \dot{\bar{\sigma}}_z) - \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 + \sin \Psi')$$

$$(5.50) \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{1}{h} \dot{w} = \frac{1}{E'} (\dot{\bar{\sigma}}_z - \nu' \dot{\bar{\sigma}}_x) + \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 - \sin \Psi')$$

$$\dot{\sigma}_y = \nu (\dot{\bar{\sigma}}_x + \dot{\bar{\sigma}}_z)$$

$$\dot{\sigma}_{xz} \approx 0, \quad \dot{\chi}_{xz} \approx 0$$

w których E' i ν' określone są równaniami (5.6). Całkując względem czasu równania (5.50-1,2,3) przy przyjęciu w chwili początkowej $t=t_0$ warunków początkowych

$$(5.51) \quad \epsilon_x = \epsilon_x^0, \quad \epsilon_z = \epsilon_z^0, \quad \Lambda = \Lambda_0, \quad \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_y^0 = \nu (\bar{\sigma}_x^0 + \bar{\sigma}_z^0)$$

dla $t = t_0$

uzyskujemy:

$$(5.52) \quad \begin{aligned} \epsilon_x - \epsilon_x^0 &= \frac{1}{E'} [(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_x^0) - \nu' (\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_z^0)] - \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda_0) (1 + \sin \Psi') - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\ \epsilon_z - \epsilon_z^0 &= \frac{1}{E'} [(\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_z^0) - \nu' (\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_x^0)] + \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda_0) (1 - \sin \Psi') - \frac{\nu w(t)}{h} - \frac{w(t_0)}{h_0} \\ \bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_y^0 &= \frac{\nu'}{1 + \nu'} [(\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x) - (\bar{\sigma}_z^0 + \bar{\sigma}_x^0)] \end{aligned}$$

Utożsamiając chwilę początkową $t=t_0$ z chwilą przejścia pasma w stan graniczny określony równaniem (5.49) możemy wobec (5.4) przyjąć warunki początkowe w postaci:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \varepsilon_x^{e0} = \frac{1}{E'} (\sigma_x^0 - \nu' \sigma_z^0) \\
 (5.35) \quad \varepsilon_z^0 &= \varepsilon_z^{e0} = \frac{w(t_0)}{h} = \frac{1}{E'} (\sigma_z^0 - \nu' \sigma_x^0) \\
 \Lambda_0 &= 0 \\
 \sigma_y^0 &= \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x^0 + \sigma_z^0)
 \end{aligned}$$

oraz zapisać ostatecznie (5.52)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_z) - \frac{1}{2} \Lambda (1 + \sin \varphi') \\
 (5.54) \quad \varepsilon_z &= \frac{w}{h} = \frac{1}{E'} (\sigma_z - \nu' \sigma_x) + \frac{1}{2} \Lambda (1 - \sin \varphi') \\
 \sigma_y &= \nu (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x + \sigma_z)
 \end{aligned}$$

Wprowadzając w miejsce parametrów φ i φ' nowe parametry t i t' zdefiniowane wzorami:

$$t = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad t' = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

oraz dołączając do (5.54) przybliżone równanie równowagi (3.41), warunek stanu granicznego (5.49) i równanie linii ugięcia belki nakładku (2.1), uzyskamy układ równań:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_z) - \Lambda \frac{t'}{1+t'} \\
 \frac{w}{h} &= \frac{1}{E'} (\sigma_z - \nu' \sigma_x) + \Lambda \frac{1}{1+t'} \\
 (5.55) \quad \sigma_y &= \nu (\sigma_x + \sigma_z) \\
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{2\mu}{h} \sigma_z &= 0, \quad \tau_w = \mu \sigma_z \\
 \sigma_z &= t \sigma_x + 2\sqrt{t} C \tau, \quad \frac{\partial w}{\partial x^2} = \frac{\sigma_z - q}{kh}
 \end{aligned}$$

Ten układ równań składa się z siedmiu równań względem siedmiu niewiadomych funkcji σ_x , σ_y , σ_z , τ_w , u , w i Λ , określających deformację pasma dla sprężysto-plastycznej strefy stanów rezydualnych. Z dwóch przedostatnich równań wyznaczamy:

$$(5.56) \quad \bar{\sigma}_x^r = C_1^r e^{2\mu t \frac{x}{h}} - \frac{2C_0 r \sqrt{t}}{t}$$

$$\bar{\sigma}_z^r = C_1^r t e^{2\mu t \frac{x}{h}}$$

$\bar{\sigma}_z^r$ podstawione do (5.55-7) daje równanie różniczkowe drugiego rzędu względem w , którego całka ma postać:

$$(5.57) \quad w^r = C_1^r \frac{h}{4\mu^2 t^2 K} e^{2\mu t \frac{x}{h}} - \frac{q}{2kh} x^2 + C_2^r x + C_3^r$$

Z (5.55-2) otrzymujemy:

$$(5.58) \quad \Lambda = (t' + 1) \left[\frac{w^r}{h} - \frac{1}{E'} (\bar{\sigma}_z^r - \nu' \bar{\sigma}_x^r) \right]$$

skąd po uwzględnieniu zależności dla $\bar{\sigma}_x^r$, $\bar{\sigma}_z^r$, w^r :

$$(5.59) \quad \Lambda = (t' + 1) \left\{ \left[\frac{1}{4\mu^2 t^2 K} - \frac{1}{E'} (t - \nu') \right] C_1^r e^{2\mu t \frac{x}{h}} + C_2^r \frac{x}{h} + \frac{1}{h} C_3^r - \frac{q}{2k} \left(\frac{x}{h} \right)^2 - \frac{2\nu' C_0 r \sqrt{t}}{E' t} \right\}$$

Podstawiając (5.56) i (5.59) do (5.51-1) mamy:

$$(5.60) \quad \frac{dw}{dx} = \left\{ \frac{1}{E'} [(1 + t t') - \nu' (t + t')] - \frac{t'}{4\mu^2 t^2 K} \right\} C_1^r e^{2\mu t \frac{x}{h}} + - t' \left[C_2^r \frac{x}{h} + \frac{1}{h} C_3^r - \frac{q}{2k} \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right] - \frac{2C_0 r \sqrt{t}}{E' t} (1 - \nu' t')$$

z którego wynika równanie dla u^r . Stosując oznaczenia (5.13) możemy zapisać równania ogólne dla strefy R:

$$(5.61) \quad \bar{\sigma}_x^r = C_1^r e^{2\mu t \frac{x}{h}} - \frac{2C_0 r \sqrt{t}}{t}$$

$$\bar{\sigma}_z^r = C_1^r t e^{2\mu t \frac{x}{h}}$$

$$\sigma_y^r = \nu(\sigma_x^r + \sigma_z^r)$$

$$(5.51) \quad \begin{aligned} u^r = & \frac{h\nu'}{2E't\alpha_1} \left\{ [(1+t't') - \nu'(t+t')] - \frac{t'\nu'^2 a_2}{4\alpha_1^2 t^2} \right\} C_1^r e^{2\mu t \frac{x}{h}} + \\ & - \frac{1}{2} t' h C_2^r \left(\frac{x}{h}\right)^2 - t' C_3^r \frac{x}{h} + h \left[\frac{1}{6} t' \frac{q}{E't} a_2 \left(\frac{x}{h}\right)^3 - \frac{2C_1^r t'}{E't} (1-\nu't) \frac{x}{h} \right] \end{aligned}$$

$$w^r = h \left[\frac{\nu'^2 a_2}{4E't\alpha_1^2} C_1^r e^{2\mu t \frac{x}{h}} - \frac{1}{2} \frac{q}{E't} a_2 \left(\frac{x}{h}\right)^2 + C_2^r \frac{x}{h} \right] + C_3^r$$

$$\begin{aligned} \Lambda = & (t'+1) \left\{ \frac{1}{E'} \left[\frac{a_2 \nu'^2}{4\alpha_1^2} - (t-\nu') \right] C_1^r e^{2\mu t \frac{x}{h}} + C_2^r \frac{x}{h} + \frac{1}{h} C_3^r + \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} a_2 \frac{q}{E't} \left(\frac{x}{h}\right)^2 - \frac{2\nu' C_1^r \sqrt{t}}{E't} \right\} \end{aligned}$$

$$\chi_w^r = \mu C_3^r$$

6. PASMÓ O SKOŃCZONEJ SZEROKOŚCI - ROZWIĄZANIE SPEŁNIAJĄCE WARUNKI BRZEGOWE I WARUNKI ZGODNOŚCI

6.1. Schemat I

rozwiązanie sprężyste

Trzy stałe występujące w równaniach (5.1) wyznaczamy z warunków

$$(6.1) \quad \begin{aligned} w' &= 0 \quad \text{dla} \quad x = x_s \\ [w] &= [w'] = 0 \quad \text{dla} \quad x = a \end{aligned}$$

uzyskując:

$$(6.2) \quad w = -\frac{1}{2} \frac{q}{E'} (x^2 - a^2) + \frac{q a}{E' s} \frac{1 + e^{-2s(a-x_s)}}{1 - e^{-2s(a-x_s)}} + \frac{q}{k}, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$(6.2) \quad w = \frac{qa}{Gs} \frac{e^{-2sx_s} e^{sx} + e^{-sx}}{1 - e^{-2s(x_s-a)}} e^{sx} + \frac{q}{k}, \quad a \leq x \leq x_s$$

koniec rozwiązania sprężystego

Wymiar komory odpowiadający końcowi rozwiązania sprężystego otrzymujemy uwzględniając (3.6) w (6.2-2).

$$(6.3) \quad a_{qr} = \frac{Gs}{qk} \frac{1 - e^{-2s(x_s - a_{qr})}}{1 + e^{-2s(x_s - a_{qr})}} (p_{m-qr})$$

faza zaawansowana

Rozwiązanie szczególne odpowiadające rozwiązaniu ogólnemu

(5.2) uzyskujemy spełniając warunki:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} w' &= 0 & \text{dla} & \quad x = x_s \\ w &= w_m & \text{dla} & \quad x = b \\ [[w]] &= [[w']] = 0 & \text{dla} & \quad x = a, \quad x = b \end{aligned}$$

Ma ono postać

$$(6.5) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2G} [qx^2 + pr(a^2 + b^2)] + \frac{1}{2G} qb^2 + \frac{pr}{G} ab + \frac{p_m}{k}, \quad 0 \leq x \leq a \\ w &= \frac{1}{2} \frac{pr - q}{G} (x^2 - b^2) - \frac{pr}{G} a(x - b) + \frac{p_m}{k}, \quad a \leq x \leq b \\ w &= \frac{p_m - q}{k} \frac{e^{sx} + e^{2sx_s} e^{-sx}}{e^{2sb} + e^{2sx_s}} e^{sb} + \frac{q}{k}, \quad b \leq x \leq x_s \\ \frac{pr}{G} (b-a) - \frac{q}{G} b &= \frac{(p_m - q)s}{k} \frac{e^{2sb} - e^{2sx_s}}{e^{2sb} + e^{2sx_s}}, \end{aligned}$$

przy czym ostatecznie równanie jest równaniem wiążącym parametry a i b .

6.2. Schemat II

Stosując do równań (5.3) warunki

$$(6.6) \quad \begin{aligned} w' &= 0 & \text{dla } x &= x_B \\ w &= w_m & \text{dla } x &= b \\ [w] &= [w'] = 0 & \text{dla } x &= a, x = b \end{aligned}$$

wyliczamy niewiadome stałe B_1, B_2, C_2, C_3 i C_4

$$(6.7) \quad \begin{aligned} B_1 &= -\frac{tvq}{G} - \frac{Pr+tvq}{G}a \\ B_2 &= \frac{tvq}{k} \left[\left(\frac{k}{G\gamma^2} - 1 \right) e^{-\gamma(b-a)} + 1 \right] + \frac{tvq}{G} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2}b + a \right) + \frac{Pr}{G}ba + \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{Pr-q}{G} b^2 + \frac{Pm}{k} \\ C_2 &= -\frac{tvq}{G\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} + a \right) - \frac{1}{2} \frac{Pr+tvq}{G} a^2 + B_2 \\ C_3 &= \frac{tvq [1 - e^{-\gamma(b-a)}] + Pm - q}{k} \frac{e^{sb}}{e^{2sb} + e^{2sx_s}} \\ C_4 &= \frac{tvq [1 - e^{-\gamma(b-a)}] + Pm - q}{k} \frac{e^{sb} e^{2sx_s}}{e^{2sx_s} + e^{2sb}} \end{aligned}$$

oraz uzyskujemy zależność

$$(6.8) \quad \frac{tvq}{G\gamma} \left[e^{\gamma(a-b)} + \gamma(b-a) - 1 \right] + \frac{Pr}{G}(b-a) - \frac{q}{G}b = s \frac{tvq [1 - e^{-\gamma(b-a)}] + Pm - q}{k} \cdot \frac{e^{2sb} - e^{2sx_s}}{e^{2sb} + e^{2sx_s}}$$

pozwalającą określić b przy danym a .

6.3. Schemat III

Podane w paragrafie 5.3 rozwiązania ogólne dla stref R, E i E_d oraz równanie linii ugięcia w obszarze ponad komorą, wykorzystamy obecnie do rozwiązania zagadnienia brzegowego dla pasma o skończonej szerokości.

faza_początkowa

W rozwiązaniach ogólnych (paragraf 5.3) występuje dziewięć niewiadomych: osiem stałych oraz nieznanne położenie granicy $x_e = a + \rho_e$ między strefami E i E_d. Część spośród warunków brzegowych jakie można zapisać dla naszego zadania została już wykorzystana przy formułowaniu rozwiązania ogólnego. Były to warunki (3.39) i (3.40) dla reakcji tarcia, wyrażone w przemieszczeniach warunki styczności pasma do podłoża i warstwy nadległej (porównaj zależności (3.43-3) i (3.44-3) dla przemieszczeń pionowych u_z) oraz warunek znikania naprężeń pionowych σ_z na dolnej powierzchni warstwy nadległej w obszarze ponadkomorowym (porównaj (2.2)).

Podstawowym warunkiem jaki obecnie zastosujemy jest warunek symetrii zadania. Uwzględniając go w równaniu (5.30) dostajemy natychmiast $B_1 = 0$. Osiem pozostałych warunków brzegowych i warunków zgodności przyjmujemy w postaci:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \sigma_x^e(x) &= 0 & \text{dla } x = a \\ [w] &= [w'] = 0 \end{aligned}$$

$$(6.10) \quad \begin{aligned} u^e = u^{ed} &= 0 \\ \sigma_x^e &= \sigma_x^{ed} & \text{dla } x = x_e = a + \rho_e \\ [w] &= [w'] = 0 \end{aligned}$$

$$(6.11) \quad \tau_w^{ed} = 0 \quad \text{dla } x = x_s$$

gdzie indeksy k, e, ed odnoszą się odpowiednio do strefy ponadkomorowej, strefy płaskiego stanu odkształcenia i strefy edometrycznej. Podstawiając do warunków (6.9) ÷ (6.11) rozwiązania ogólne, uzyskujemy układ równań względem niewiadomych stałych, z którego wyliczamy:

$$C_1^e = \frac{q e^{-(d+a_1)\frac{a}{h}}}{(d-a_1)} \frac{k_1(xe) - k_2(a) k_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}}{b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} + b_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}}$$

$$C_2^e = \frac{q e^{(d-a_1)\frac{a}{h}}}{(d+a_1)} \frac{k_1(xe) + k_2(a) b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}}}{b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} + b_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}}$$

$$C_3^e = -\frac{4qa^2}{v^2 a_2}$$

$$A_1 = \frac{q}{a_2} \frac{e^{-\frac{\beta x_0}{h}}}{e^{\frac{\beta x_0 - xe}{h}} + e^{-\frac{\beta x_0 - xe}{h}}} \cdot \frac{k_1(xe) [(d+a_1) e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} + (d-a_1) e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}] +}{b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} + b_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}} - \frac{4a_1 d k_2(a) e^{2a_1 \frac{xe-a}{h}}}{4a_1 d k_2(a) e^{2a_1 \frac{xe-a}{h}}}$$

(6.12)

$$A_2 = \frac{q}{a_2} \frac{e^{\frac{\beta x_0}{h}}}{e^{\frac{\beta x_0 - xe}{h}} + e^{-\frac{\beta x_0 - xe}{h}}} \cdot \frac{k_1(xe) [(d+a_1) e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} + (d-a_1) e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}] +}{b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} + b_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}} - \frac{4a_1 d k_2(a) e^{2a_1 \frac{xe-a}{h}}}{4a_1 d k_2(a) e^{2a_1 \frac{xe-a}{h}}}$$

$$B_2 = \frac{qh}{E_1 a_2} \left\{ \frac{2dk_1(xe) + k_2(a) [(d+a_1) b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} - (d-a_1) b_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}]}{b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} + b_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}} + a_2 \left[\frac{1}{2} a_2 \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 2a_1 \frac{a}{h} + \frac{4a_2^2}{a_2} + 1 \right] \right\}$$

$$C_4^e = \frac{qh}{v^2 E_1} \left\{ \frac{k_1(xe) [(d-a_1) b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} - (d+a_1) b_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}]}{a_2^2 [b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} + b_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}]} + \frac{2db_1 b_2 k_2(a) e^{2a_1 \frac{xe-a}{h}}}{a_2^2 [b_2 e^{(d+a_1)\frac{xe-a}{h}} + b_1 e^{-(d-a_1)\frac{xe-a}{h}}]} - [a_1 \left(\frac{xe}{h} \right)^2 - \left(\frac{4a_2^2}{a_2} + v^2 \right) \frac{xe}{h}] \right\}$$

We wzorach (6.12) przyjęto oznaczenia:

$$(6.13) \quad \begin{aligned} b_1 &= v^2 (d-a_1) + 2a_1 \\ b_2 &= v^2 (d+a_1) - 2a_1 \end{aligned}$$

$$(6.13) \quad k_1(xe) = 2a_1 a_2 \frac{x^e}{h} - v^2 a_2 - 4a_1^2$$

$$k_2(a) = a_2 \frac{a}{h} - 2a_1$$

Podstawiając wyrażenia (6.12) do wzorów określających rozwiązanie ogólne w poszczególnych strefach, otrzymujemy następującą postać rozwiązań szczególnych spełniających warunki brzegowe, warunki zgodności i warunki symetrii :

1/ Dla strefy E płaskiego stanu odkształcenia.

$$\sigma_x^e(x) = \frac{2qa_1}{\sqrt{g}a_2} \left\{ [k_1(xe) - k_2(a)b_1 e^{-(d-a_1)\frac{x-a}{h}}] e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}} - [k_1(xe) + k_2(a)b_2 e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}}] e^{-(d-a_1)\frac{x-a}{h}} + \frac{2qa_1}{v^2 a_2} k_2(x) \right.$$

$$(6.14) \quad \sigma_z^e(x) = \frac{q}{D a_2} \left\{ (d+a_1)[k_1(xe) - k_2(a)b_1 e^{-(d-a_1)\frac{x-a}{h}}] e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}} + (d-a_1)[k_1(xe) + k_2(a)b_2 e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}}] e^{-(d-a_1)\frac{x-a}{h}} \right\} + q$$

$$\bar{\sigma}_y^e(x) = \nu [\bar{\sigma}_x^e(x) + \bar{\sigma}_z^e(x)] = \frac{\nu}{1+\nu} [\bar{\sigma}_x^e(x) + \bar{\sigma}_z^e(x)]$$

$$\bar{\tau}_{wz}^e(x) = \mu \bar{\sigma}_z^e(x)$$

$$u^e(x) = \frac{qh}{E' \sqrt{a_2^3 D}} \left\{ (d-a_1)b_2 [k_1(xe) - k_2(a)b_1 e^{-(d-a_1)\frac{x-a}{h}}] \cdot [e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}} - e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}}] + (d+a_1)b_1 [k_1(xe) + k_2(a)b_2 e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}}] \cdot [e^{-(d-a_1)\frac{x-a}{h}} - e^{-(d-a_1)\frac{x-a}{h}}] \right\} - \frac{qh}{\sqrt{E'}} \left\{ a_1 \left[\left(\frac{x^e}{h} \right)^2 - \left(\frac{x^p}{h} \right)^2 \right] - \left(v^2 + \frac{4a_1^2}{a_2} \right) \left(\frac{x^e}{h} - \frac{x}{h} \right) \right\}$$

$$w^e(x) = \frac{qh}{E' a_2 D} \left\{ (d-a_1)[k_1(xe) - k_2(a)b_1 e^{-(d-a_1)\frac{x-a}{h}}] e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}} + (d+a_1)[k_1(xe) + k_2(a)b_2 e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}}] e^{-(d-a_1)\frac{x-a}{h}} \right\} + \frac{qh}{E'} \left[1 - \frac{2a_1}{a_2} k_2(x) \right]$$

gdzie D - wielkość określona wzorem

$$(6.17) \quad D = b_2 e^{\frac{(d+a_1)x_e - a}{h}} + b_1 e^{-\frac{(d-a_1)x_e - a}{h}}$$

zaś x_e jest pierwiastkiem równania

$$(6.18) \quad \beta(1 - v^2) F_1(x_e) F_3(x_e) + \alpha_2 F_2(x_e) = 0$$

gdzie

$$F_1(x_e) = \frac{e^{\beta \frac{x_s - x_e}{h}} - e^{-\beta \frac{x_s - x_e}{h}}}{e^{\beta \frac{x_s - x_e}{h}} + e^{-\beta \frac{x_s - x_e}{h}}} = \operatorname{tgh} \left[\beta \frac{x_s - x_e}{h} \right]$$

$$(6.19) \quad F_2(x_e) = [k_1(x_e) - 2a_1 b_2] e^{\frac{(d+a_1)x_e - a}{h}} - [k_1(x_e) + 2a_1 b_1] e^{-\frac{(d-a_1)x_e - a}{h}} - 2d v^2 k_2(a) e^{2a_1 \frac{x_e - a}{h}}$$

$$F_3(x_e) = k_1(x_e) \left[(d+a_1) e^{\frac{(d+a_1)x_e - a}{h}} + (d-a_1) e^{-\frac{(d-a_1)x_e - a}{h}} \right] + 4a_1 d k_2(a) e^{2a_1 \frac{x_e - a}{h}}$$

2/ Dla edometrycznej strefy sprężystej B_d .

$$(6.20) \quad \sigma_z^{ed}(x) = \frac{q}{2a_2} \left\{ k_1(x_e) \left[(d+a_1) e^{\frac{(d+a_1)x_e - a}{h}} + (d-a_1) e^{-\frac{(d-a_1)x_e - a}{h}} \right] + 4a_1 d k_2(a) e^{2a_1 \frac{x_e - a}{h}} \right\} \frac{e^{\beta \frac{x_s - x}{h}} + e^{-\beta \frac{x_s - x}{h}}}{e^{\beta \frac{x_s - x_e}{h}} + e^{-\beta \frac{x_s - x_e}{h}}} + q$$

$$\sigma_x^{ed}(x) = \sigma_y^{ed}(x) = v' \sigma_z^{ed}(x)$$

$$\tau_w^{ed}(x) = \frac{q v' \beta}{2 \beta a_2} \left\{ 4a_1 d k_2(a) e^{2a_1 \frac{x_e - a}{h}} - k_1(x_e) \left[(d+a_1) e^{\frac{(d+a_1)x_e - a}{h}} + (d-a_1) e^{-\frac{(d-a_1)x_e - a}{h}} \right] \right\} \frac{e^{\beta \frac{x_s - x}{h}} - e^{-\beta \frac{x_s - x}{h}}}{e^{\beta \frac{x_s - x_e}{h}} + e^{-\beta \frac{x_s - x_e}{h}}}$$

$$(6.20) \quad u^{ed} = 0$$

$$w^{ed}(x) = \frac{h(1-\nu^2)}{E'} \bar{\sigma}_z^{ed}(x)$$

3/ Dla obszaru ponad komorą K.

$$(6.21) \quad W^K(x) = \frac{qh}{E'Da_2} \left\{ 2dk_1(xe) + k_2(a)[(d+a_1)b_2 e^{(d+a_1)\frac{x_e-a}{h}} + \right.$$

$$\left. - (d-a_1)b_2 e^{-(d-a_1)\frac{x_e-a}{h}} \right\} - \frac{hq}{E'h} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{h} \right)^2 - \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2a_1}{a_2} k_2(a) - 1 \right\}$$

$$(6.22) \quad \bar{\sigma}_z^K(x) = \bar{\tau}_w^K(x) = 0$$

Z podanych rozwiązań oraz przyjętych warunków brzegowych i warunków zgodności wynika, że linia ugięcia jest funkcją gładką, której krzywizna doznaje skoku w przekroju $x=a$. Naprężenia $\bar{\sigma}_z(x)$ i $\bar{\tau}_w(x)$ są nieciągłe w tym przekroju, a naprężenie $\bar{\tau}_w(x)$ jest dodatkowo nieciągłe w przekroju $x=x_e$. Dla $x=x_e$ skoku doznają pochodne naprężeń $\bar{\sigma}_z(x)$ i $\bar{\sigma}_x(x)$. Warunki te możemy zapisać formalnie przy pomocy zależności:

$$(6.23) \quad \bar{\sigma}_z^e(a) \neq \bar{\sigma}_x^k(a) = 0$$

$$\bar{\tau}_w^e(a) \neq \bar{\tau}_w^k(a) = 0$$

$$u^e(x_e) = u^{ed}(x_e) = 0$$

$$\frac{du^e(x_e)}{dx} = \frac{du^{ed}(x_e)}{dx} = 0$$

$$(6.24) \quad \bar{\tau}_w^e(x_e) = \mu \bar{\sigma}_z^e(x_e) \neq \bar{\tau}_w^{ed}(x_e)$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_x^e(x_e)}{dx} \neq \frac{d\bar{\sigma}_x^{ed}(x_e)}{dx}$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_z^e(x_e)}{dx} \neq \frac{d\bar{\sigma}_z^{ed}(x_e)}{dx}$$

koniec rozwiązania sprężystego

Rozwiązanie sprężyste przestaje obowiązywać, gdy konfiguracyjny parametr sterowania osiągnie wartość graniczną, którą możemy wyznaczyć rozwiązując układ równań złożony z równania (5.31) i równania (6.18). Uwzględniając zależności (6.14-2) oraz (6.17), (5.31) przedstawiamy w postaci:

$$(6.25) \quad \begin{aligned} & [a_2(q - 2c_0\sqrt{k}) - (d+a_1)qk_2(a_{gr})] b_1 e^{-(d-a_1)\frac{x_e - a_{gr}}{h}} + \\ & [a_2(q - 2c_0\sqrt{k}) + (d-a_1)qk_2(a_{gr})] b_2 e^{(d+a_1)\frac{x_e - a_{gr}}{h}} + \\ & + 2dqk_1(x_e) = 0 \end{aligned}$$

z której wraz z (6.18) wyznaczamy a_{gr} i odpowiadające mu x_e .

faza zaawansowana

Aby podać rozwiązanie szczególne dla fazy zaawansowanej, w której powstają układy stref pokazane na rys. 15, należy rozwiązać układ równań złożony z równań określających rozwiązania ogólne dla poszczególnych stref, przy przyjęciu warunków brzegowych i warunków zgodności. Nie powtarzając wszystkich zapisanych poprzednio równań, podamy tylko że będą to:

1/ Dla obszaru ponadkomorowego, równania:

$$(6.26) \quad \begin{aligned} w^k &= -\frac{qa_2}{2E'} \left(\frac{x}{h}\right)^2 + B_2 \\ \frac{dw^k}{dx} &= -\frac{qa_2}{E'} \frac{x}{h} \\ \sigma_z^k &= 0 \end{aligned}$$

2/ Dla strefy R rezydualnego sprężysto - plastycznego stanu odkształcenia, równania:

$$(6.27) \quad \begin{aligned} & (5.61) \text{ bez } (5.61-6), \text{ oraz} \\ \frac{dw^r}{dx} &= \frac{\sqrt{a_2}}{2E'a_1} C_1^r e^{2\mu t \frac{x}{h}} - \frac{qa_2}{E'} \frac{x}{h} + C_2^r \end{aligned}$$

3/ Dla strefy E sprężystego, płaskiego stanu odkształcenia, równania:

(5.15), (5.18), (5.22) oraz

$$(6.28) \quad \begin{aligned} \sigma_y^e &= \nu (\sigma_x^e + \sigma_z^e) \\ \tau_{xz}^e &= \mu \sigma_z^e \\ \frac{dw^e}{dx} &= \frac{1}{E'} [(d-a_1) C_1 e^{(d+a_1)\frac{x}{h}} - (d+a_1) C_2 e^{-(d-a_1)\frac{x}{h}} - 2a_1 q] \end{aligned}$$

4/ Dla edometrycznej strefy sprężystej E_d , równania:

(5.24), (5.26) ÷ (5.28) oraz

$$(6.29) \quad \frac{dw^{ed}}{dx} = \frac{1-\nu^2}{E'} \beta (A_1 e^{\beta \frac{x}{h}} - A_2 e^{-\beta \frac{x}{h}})$$

W równaniach tych występuje 11 niewiadomych stałych i dwie nieznanne współrzędne x_T i x_e granic pomiędzy strefami R i E oraz E_d , które wyznaczamy z warunków:

$$(6.30) \quad \begin{aligned} \sigma_x^r(x) &= 0 \\ [w] &= [w'] = 0 \end{aligned} \quad \text{dla } x = a$$

$$(6.31) \quad \begin{aligned} [\sigma_x] &= 0 \\ \sigma_z^e(x) &= \sigma_z^r(x) + 2(c_0 - c_n) \sqrt{t} \\ [w] &= [w'] = [\mu] = 0 \end{aligned} \quad \text{dla } x = x_n$$

$$(6.32) \quad \begin{aligned} [\sigma_x] &= [w] = [w'] = 0 \\ \mu^e(x) &= \mu^{ed}(x) = 0 \end{aligned} \quad \text{dla } x = x_e$$

$$(6.33) \quad \tau_{xz}^{ed}(x) = \frac{h}{2} \frac{d\sigma_x^{ed}(x)}{dx} = 0 \quad \text{dla } x = x_s$$

otrzymując

$$\begin{aligned} C_1^r &= \frac{2c_n \sqrt{t}}{t} e^{-2\mu t \frac{a}{h}} ; & C_2^r &= -\frac{\nu a_2 c_n \sqrt{t}}{E' t a_1} \\ C_3^r &= \frac{h}{E'} \left[\frac{2c_n \sqrt{t}}{t} [(t-\nu')] - \frac{\nu'^2 a_2}{4 t a_1^2} \right] (e^{2\mu t \frac{x_n - a}{h}} - 1) + \\ &+ \frac{1}{2} q a_2 \left(\frac{x_n}{h} \right)^2 + \frac{\nu' a_2 c_n \sqrt{t}}{t a_1} \left(\frac{x_n}{h} - \frac{\nu'}{2 t a_1} \right) + 2\sqrt{t} c_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_4^e &= \frac{h}{v' E'} \left\langle \frac{b_1 b_2}{\mathcal{D} a_2^2} \left[\frac{v' a_2 \sqrt{t} C_r}{a_1 t} \left(e^{2\mu t \frac{x_r - a}{h}} - 1 \right) - q k_2(x_r) \right] \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \left\{ 2d e^{2a_1 \frac{x_e - x_r}{h}} - \left[(d+a_1) e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + (d-a_1) e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} \right] \right\} + \\
 &\quad + \frac{q}{\mathcal{D} a_2^2} k_1(x_e) \left\{ (d-a_1) b_2 \left[e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + 1 \right] - (d+a_1) b_1 \left[e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} - 1 \right] \right\} + \\
 &\quad - \frac{q}{2a_2} \frac{x_e - x_r}{h} [k_1(x_e) + 2a_1 k_2(x_r) - v' a_2] \rangle + \\
 &\quad - \left\langle \frac{h \sqrt{t} C_r}{E' t} \left\{ \frac{v'}{a_1 t} [(1 + t t') - v'(t + t')] - \frac{t' v'^2 a_2}{4 t a_1^2} \right\} + \right. \\
 &\quad - 2t' \left[(t - v') - \frac{v'^2 a_2}{4 t a_1^2} \right] \left. \left(\frac{x_r}{h} \right) \right\} e^{2\mu t \frac{x_r - a}{h}} - \frac{1}{3} \frac{q h t' a_2}{E'} \left(\frac{x_r}{h} \right)^3 + \\
 &\quad - \frac{1}{2} t' h \frac{C_r \sqrt{t}}{E'} \frac{v' a_2}{a_1 t} \left(\frac{x_r}{h} \right)^2 - \frac{2h}{E'} \left[\frac{C_r \sqrt{t}}{t} + t'(c_0 - c_n) \sqrt{t'} \right] \frac{x_e}{h} \rangle
 \end{aligned}$$

(6.34)

$$C_1^e = \frac{e^{-(d+a_1) \frac{x_r}{h}}}{\mathcal{D} (d-a_1)} \left\{ \left[\frac{v' a_2 \sqrt{t} C_r}{t a_1} \left(e^{2\mu t \frac{x_r - a}{h}} - 1 \right) - q k_2(x_r) \right] b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + q k_1(x_e) \right\}$$

$$C_2^e = \frac{e^{(d+a_1) \frac{x_r}{h}}}{\mathcal{D} (d+a_1)} \left\{ \left[-\frac{v' a_2 \sqrt{t} C_r}{t a_1} \left(e^{2\mu t \frac{x_r - a}{h}} - 1 \right) + q k_2(x_r) \right] b_2 e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + q k_1(x_e) \right\}$$

$$C_3^e = -\frac{4a_1^2}{v' a_2} q$$

$$\begin{aligned}
 C_4^e &= \frac{h}{E' v' a_2} \left\langle \frac{1}{\mathcal{D} a_2} \left\{ 2d b_1 b_2 e^{2a_1 \frac{x_e - x_r}{h}} \left[\frac{v' a_2 \sqrt{t} C_r}{t a_1} \left(e^{2\mu t \frac{x_r - a}{h}} - 1 \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad - q k_2(x_r) \left. \right\} + q k_1(x_e) \left[(d-a_1) b_2 e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} - (d+a_1) b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} \right] \right\} + \\
 &\quad - q \left[a_1 a_2 \left(\frac{x_e}{h} \right)^2 - (v'^2 a_2 + 4a_1^2) \frac{x_e}{h} \right] \rangle
 \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{1}{2a_2} \frac{e^{-\beta \frac{x_s}{h}}}{e^{\beta \frac{x_s - x_e}{h}} + e^{-\beta \frac{x_s - x_e}{h}}} \left\{ 4da_1 \left[\frac{\sqrt{a_2} \sqrt{t} c_r}{ta_1} (e^{2\sqrt{t} \frac{x_r - a}{h}} - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. - qk_2(x_r) \right] e^{2a_1 \frac{x_e - x_r}{h}} + qk_1(x_e) [(d+a_1) e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + \right. \\ \left. + (d-a_1) e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} \right] \left. \right\}$$

(5.34)

$$A_2 = \frac{1}{2a_2} \frac{e^{\beta \frac{x_s}{h}}}{e^{\beta \frac{x_s - x_e}{h}} + e^{-\beta \frac{x_s - x_e}{h}}} \left\{ 4da_1 \left[\frac{\sqrt{a_2} \sqrt{t} c_r}{ta_1} (e^{2\sqrt{t} \frac{x_r - a}{h}} - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. - qk_2(x_r) \right] e^{2a_1 \frac{x_e - x_r}{h}} + qk_1(x_e) [(d+a_1) e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + \right. \\ \left. + (d-a_1) e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} \right] \left. \right\}$$

$$B_2 = \frac{h}{E} \left\{ \frac{2\sqrt{t} c_r}{t} [(t-v')] - \frac{v'^2 a_2}{4ta_1^2} \right\} (e^{2\sqrt{t} \frac{x_r - a}{h}} - 1) + \frac{1}{2} q a_2 \left(\frac{x_r}{h} \right)^2 + \\ + \frac{\sqrt{a_2} \sqrt{t} c_r}{ta_1} \frac{x_r - a}{h} + 2\sqrt{t} c_0$$

zaś równania do wyznaczenia granic międzystrefowych mają postać:

(5.35)

$$\frac{a_2 \sqrt{t} c_r}{ta_1} (e^{2\sqrt{t} \frac{x_r - a}{h}} - 1) \left\{ [2ta_1 + (d-a_1)v'] b_2 e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + \right. \\ \left. + [2ta_1 - (d+a_1)v'] b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} \right\} + \\ - qk_2(x_r) [(d-a_1) b_2 e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} - (d+a_1) b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}}] + \\ - (q - 2\sqrt{t} c_0) a_2 [b_2 e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}}] - 2d q k_1(x_e) = 0$$

oraz

(5.36)

$$(1 - v'^2) \beta F_1(x_e, x_s) + a_2 \frac{\tilde{F}_2(x_r, x_e)}{\tilde{F}_3(x_r, x_e)} = 0$$

gdzie

$$F_1(x_e, x_s) = \lambda g h \left[\beta \frac{x_s - x_e}{h} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_2(x_r, x_e) &= 2v^2 d \left[\frac{\sqrt{a_2} k_1 c r}{t a_1} (e^{2iut \frac{x_r - a}{h}} - 1) - q k_2(x_r) \right] e^{2a_1 \frac{x_e - x_r}{h}} + \\
 &+ q_1^2 [k_1(x_e) - 2a_1 b_2] e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} - [k_1(x_e) + 2a_1 b_1] \cdot \\
 &\cdot e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} \} \\
 \tilde{F}_3(x_r, x_e) &= 4d a_1 \left[\frac{\sqrt{a_2} k_1 c r}{t a_1} (e^{2iut \frac{x_r - a}{h}} - 1) - q k_2(x_r) \right] e^{2a_1 \frac{x_e - x_r}{h}} + \\
 &+ q k_1(x_e) [(d+a_1) e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + (d-a_1) e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}}]
 \end{aligned}
 \tag{6.37}$$

We wzorach (6.34) ÷ (6.37) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= v' \mu, \quad a_2 = \frac{E'}{K}, \quad E' = \frac{E}{1-v^2}, \quad v' = \frac{v}{1-v} \\
 d &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{E'}{K(1-v^2)}} \\
 b_1 &= v'^2(d-a_1) + 2a_1 \\
 b_2 &= v'^2(d+a_1) - 2a_1 \\
 k_1(x_e) &= 2a_1 a_2 \frac{x_e}{h} - v'^2 a_2^2 - 4a_1^2 \\
 k_2(x_r) &= a_2 \frac{x_r}{h} - 2a_1 \\
 t &= \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad t' = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}
 \end{aligned}
 \tag{6.38}$$

oraz oznaczono:

$$D = b_2 e^{(d+a_1) \frac{x_e - x_r}{h}} + b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x_e - x_r}{h}}
 \tag{6.39}$$

Podstawiając wyrażenia (6.34) do wzorów podających rozwiązania ogólne, uzyskujemy rozwiązania szczególne w postaci:

1/ Dla obszaru ponadkomorowego

$$(6.40) \quad \begin{aligned} W^k(x) &= \frac{h}{E'} \left\{ \frac{2\sqrt{t}c_r}{t} \left[(t-v) - \frac{v^2 a_2}{4ta_1^2} \right] (e^{2\mu t \frac{x-a}{h}} - 1) + \frac{v a_2 \sqrt{t} c_r}{t a_1} \frac{x-r-a}{h} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} q a_2 \left[\left(\frac{x}{h} \right)^2 - \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right] + 2\sqrt{t} c_0 \right\} \\ \sigma_z^k(x) &\equiv 0 \end{aligned}$$

2/ Dla strefy R rezydualnego, sprężysto-plastycznego stanu odkształcenia

$$(6.41) \quad \begin{aligned} \sigma_x^r(x) &= \frac{2\sqrt{t}c_r}{t} (e^{2\mu t \frac{x-a}{h}} - 1), \quad \sigma_z^r(x) = 2\sqrt{t}c_r e^{2\mu t \frac{x-a}{h}} \\ \sigma_x^r(x) &= v [\sigma_x^r(x) + \sigma_z^r(x)] \\ \tau_{xz}^r(x) &= \mu \sigma_z^r(x) \\ W^r(x) &= \frac{h}{E'} \left\{ \frac{2\sqrt{t}c_r}{t} \frac{v^2 a_2}{4ta_1^2} (e^{2\mu t \frac{x-a}{h}} - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sqrt{t}c_r}{t} \left[(t-v) - \frac{v^2 a_2}{4ta_1^2} \right] (e^{2\mu t \frac{x-r-a}{h}} - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} q a_2 \left[\left(\frac{x}{h} \right)^2 - \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right] + \frac{v a_2 \sqrt{t} c_r}{t a_1} \frac{x-r-x}{h} + 2\sqrt{t} c_0 \right\} \\ u^r(x) &= \frac{h}{E'} \left\{ \frac{v\sqrt{t}c_r}{t^2 a_1} \left[(1+t't) - v'(t+t') - \frac{x'v^2 a_2}{4ta_1^2} \right] e^{2\mu t \frac{x-a}{h}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} t' q a_2 \left(\frac{x}{h} \right)^3 + \frac{1}{2} \frac{t' v a_2 c_r \sqrt{t}}{t a_1} \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right\} + \\ &\quad - \left[t' C_3^r + \frac{2\sqrt{t}c_r}{E't} (1-v't') h \right] \left(\frac{x}{h} \right) + C_4^r \\ u_z^r(x) &= -w^r(x) \frac{z}{h} \end{aligned}$$

3/ dla strefy E sprężystego, płaskiego stanu odkształcenia:

$$\begin{aligned} \sigma_x^e(x) &= \frac{2a_1}{v^2 a_2} \left\langle \left[\frac{v a_2 c_r \sqrt{t}}{t a_1} (e^{2\mu t \frac{x-r-a}{h}} - 1) - q k_2(x_r) \right] b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x-r}{h}} + \right. \\ &\quad \left. + q k_1(x_e) \right\} e^{(d+a_1) \frac{x-r}{h}} + \left[\frac{v a_2 c_r \sqrt{t}}{t a_1} (e^{2\mu t \frac{x-r-a}{h}} - 1) - q k_2(x_r) \right] \cdot \\ &\quad \cdot b_2 e^{(d+a_1) \frac{x-r}{h}} - q k_1(x_e) \left\} e^{-(d-a_1) \frac{x-r}{h}} \right\rangle + \frac{2q a_1}{v^2 a_2} k_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^e(x) = & \frac{1}{D_{a2}} \left\langle (d+a_1) \left[\frac{\sqrt{a_2 c h T}}{a_1} (e^{2ut \frac{x_0-a}{h}} - 1) - qk_2(x_1) \right] b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} + \right. \\ & \left. + qk_1(x_0) \right\} e^{(d+a_1) \frac{x-x_1}{h}} - (d-a_1) \left[\frac{\sqrt{a_2 c h T}}{a_1} (e^{2ut \frac{x_0-a}{h}} - 1) + \right. \\ & \left. - qk_2(x_1) \right] b_2 e^{(d+a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} - qk_1(x_0) \left. \right\} e^{-(d-a_1) \frac{x-x_1}{h}} + q \end{aligned}$$

$$\sigma_y^e(x) = \nu [\sigma_x^e(x) + \sigma_z^e(x)]$$

$$\gamma_w^e(x) = \mu \sigma_z^e(x)$$

$$\begin{aligned} w^e(x) = & \frac{h}{E} \left\langle \frac{e^{(d+a_1) \frac{x-x_1}{h}}}{D(d+a_1)} \left[\frac{\sqrt{a_2 c h T}}{a_1} (e^{2ut \frac{x_0-a}{h}} - 1) - qk_2(x_1) \right] \cdot \right. \\ & \cdot b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} + qk_1(x_0) \left. \right\} - \frac{e^{-(d-a_1) \frac{x-x_1}{h}}}{D(d-a_1)} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{\sqrt{a_2 c h T}}{a_1} (e^{2ut \frac{x_0-a}{h}} - 1) - qk_2(x_1) \right\} b_2 e^{(d+a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} - qk_1(x_0) \left. \right\} + \\ & + q \left[1 - \frac{2a_1}{a_2} k_2(x) \right] \end{aligned}$$

(6.42)

$$\begin{aligned} u_x^e(x) = & -\frac{h}{\nu E' D_{a2}} \left\langle (d-a_1) b_2 \left[\frac{\sqrt{a_2 c h T}}{a_1} (e^{2ut \frac{x_0-a}{h}} - 1) - qk_2(x_1) \right] \cdot \right. \\ & \cdot b_1 e^{-(d-a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} + qk_1(x_0) \left. \right\} \left[e^{(d+a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} - e^{(d+a_1) \frac{x-x_1}{h}} \right] + \\ & + (d+a_1) b_1 \left[\frac{\sqrt{a_2 c h T}}{a_1} (e^{2ut \frac{x_0-a}{h}} - 1) - qk_2(x_1) \right] b_2 e^{(d+a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} + \\ & - qk_1(x_0) \left. \right\} \left[e^{-(d-a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} - e^{-(d-a_1) \frac{x-x_1}{h}} \right] \left. \right\} + \\ & + \frac{q h}{\nu E'} \left\{ a_1 \left[\frac{(x_0)^2}{h^2} - \left(\frac{\Delta}{h} \right)^2 \right] + \frac{1}{a_2} (\nu^2 a_2 + 4a_1^2) \left[\left(\frac{x_0}{h} \right) - \left(\frac{\Delta}{h} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$u_z^e(x) = -w^e(x) \frac{z}{h}$$

4/ Dla strefy E_2 , jednoosiowego sprężystego stanu odkształcenia

$$\begin{aligned} \sigma_z^{ed}(x) = & \frac{1}{D_{a2}} \left\{ 4d a_1 \left[\frac{\sqrt{a_2 c h T}}{a_1} (e^{2ut \frac{x_0-a}{h}} - 1) - qk_2(x_1) \right] e^{2a_1 \frac{x_0-x_1}{h}} + \right. \\ & \left. + qk_1(x_0) \left[(d+a_1) e^{(d+a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} + (d-a_1) e^{-(d-a_1) \frac{x_0-x_1}{h}} \right] \right\} \cdot \\ & \cdot \frac{e^{-\beta \frac{x_5-x}{h}} + e^{-\beta \frac{x_5-x}{h}}}{e^{-\beta \frac{x_5-x_0}{h}} + e^{-\beta \frac{x_5-x_0}{h}}} + q \end{aligned}$$

$$\sigma_x^{ed}(x) = \bar{\sigma}_y^{ed}(x) = v' \bar{\sigma}_z^{ed}(x)$$

$$\begin{aligned} \chi \omega(x) = & \frac{Bv'}{2D\alpha_2} \left\{ 4d\alpha_1 [qk_2(xv) - \frac{v\alpha_2 C \sqrt{t}}{\alpha_1} (e^{2\alpha_1 t \frac{x_1-a}{h}} - 1)] e^{2\alpha_1 \frac{x_1-xv}{h}} + \right. \\ & \left. - qk_1(xv) [(d+\alpha_1) e^{(d+\alpha_1) \frac{x_1-xv}{h}} + (d-\alpha_1) e^{-(d-\alpha_1) \frac{x_1-xv}{h}}] \right\} \cdot \\ (6.43) \quad & \cdot \operatorname{tgh} \left[\beta \frac{x_1-x}{h} \right] \end{aligned}$$

$$w^{ed}(x) = \frac{h}{E'} (1-v'^2) \bar{\sigma}_z^{ed}(x)$$

$$u_x^{ed}(x) \equiv 0$$

$$u_z^{ed}(x) = -\frac{z}{h} \omega^{ed}(x)$$

Z założeń i rozwiązań dla przyjętego układu stref deformacji pasma wynika, że linia ugięcia jest funkcją gładką, ale jej krzywizna doznaje skoku w przekrojach $x = a$ i $x = x_T$, co wynika z nieciągłości naprężenia $\sigma_z(x)$ w tych przekrojach. Również naprężenie $\chi_w(x) = \mu \bar{\sigma}_z(x)$ doznaje skoku dla $x=a$ i $x=x_T$.

7. GRAFICZNA INTERPRETACJA ROZWIĄZAŃ

- faza początkowa

Przedstawione rozwiązania można zinterpretować graficznie na płaszczyźnie naprężeń głównych σ_x, σ_z (rys. 18). Z równania (3.14) określającego początkowy warunek plastyczności otrzymujemy:

$$(7.1) \quad \sigma_z = t\sigma_x + 2\sqrt{t}c_0$$

Dodatkowo z (6.14) i (6.20)

$$(7.2) \quad \bar{\sigma}_z^{ed} = \frac{1}{v'} \bar{\sigma}_x^{ed}$$

$$(7.3) \quad \sigma_z^e = A\sigma_x^e + B e^{-(d+a_1)\frac{x-a}{h}} - Ck_2(x) + q$$

gdzie:

$$A = \frac{v'(d+a_1)}{2a_1}$$

$$(7.4) \quad B = \frac{2dq}{\Phi a_2} [k_1(xe) + k_2(a)b_2 e^{(d+a_1)\frac{x-a}{h}}]$$

$$C = \frac{q(d+a_1)}{a_2}$$

Na rysunku 18 początkową powierzchnię plastyczności przedstawia prosta CA określona równaniem (7.1), stany edometryczne sprężyste - prosta OB określona równaniem (7.2), a płaskie sprężyste stany odkształcenia - rodzina określonych równaniem (7.3) krzywych typu AB łączących proste CA i CB.

Dowolne stany **naprężenia** jakie mogą wystąpić w początkowej fazie eksploatacji pokładu zawarte są w obszarze domkniętym OAB. Odcinek CA reprezentuje tu stany naprężenia na krawędzi komory $x = a$, odpowiadające różnym jej szerokościom, przy czym punkt A odpowiada szerokości granicznej, tzn. przedstawia zarówno stan sprężysty jak i sprężysto-plastyczny. Krzywa AB odpowiada sprężystemu stanowi naprężeń występujących w strefie E w chwili osiągnięcia stanu granicznego na krawędzi pasma, tzn. przy granicznej wartości $a = a_{gr}$ parametru ewolucji. Punkty odcinka OB odpowiadają naprężeniom występującym na granicy stref E i E_d.

- faza zaawansowana

Rozwiązania dla fazy zaawansowanej można również przedstawić na płaszczyźnie naprężeń głównych σ_x, σ_z (rys. 19). Prócz (7.1) i (7.2) dodatkowo określamy równanie rezydualnej powierzchni plastyczności

$$(7.5) \quad \sigma_z = t\sigma_x + 2\sqrt{t}c_r$$

określające równocześnie naprężenia w strefie sprężysto-plastycznej. Stany sprężyste strefy E określone są równaniem typu (7.3).

Dla $a > a_{gr}$ naprężenia na krawędzi komory spełniają rezydualny warunek stanu granicznego. Punkt E odpowiada punktowi położonemu na granicy komora - pasmo. Odcinek EF wyraża naprężenia w strefie rezydualnej sprężysto - plastycznej, zaś punkty F i G leżą na granicy strefy R i strefy E. Stany naprężenia w sprężystej strefie płaskiego stanu odkształcenia przedstawiają dla różnych $a > a_{gr}$ różne odcinki GH obszaru ABGH, przy czym punkty H odpowiadają położeniu na granicy stref E i E_d .

8. WARUNKI STATECZNOŚCI

Dotąd zakładaliśmy, że powiększaniu szerokości komory ponad jej szerokość graniczną towarzyszy monotoniczny przyrost długości strefy materiału zniszczonego, a a_{gr} jest jedyną wielkością charakterystyczną dla układu. Okazuje się, że można określić (bezpośrednio lub w postaci zależności funkcyjnej) drugą charakterystyczną wartość konfiguracyjnego parametru sterowania, odpowiadającą chwili, gdy układ traci stateczność. Utrata stateczności jest tutaj rozumiana jako nieograniczony wzrost długości strefy materiału zniszczonego odpowiadający infinitezimalnemu przyrostowi szerokości komory. W momencie utraty stateczności zostaje naruszone założenie o quazistatycznym przebiegu procesu deformacji pasma, czyli rozpoczyna się proces dynamiczny polegający na gwałtownym propagowaniu się w głąb pasma frontu zniszczenia. Może być to uważane za czynnik inicjujący wyrzut materiału skalnego do sąsiedniego wyrobiska.

Na wstępie zajmiemy się przypadkiem pasma późnieskończoności, dla którego zastosowano schemat I. Aby proces deformacji postępował zgodnie z pokazaną na rys. 10 jego ilustracją graficzną, to znaczy aby mogły wystąpić wszystkie trzy jego fazy: początkowa, graniczna i zaawansowana, musi być spełniony warunek

$$(8.1) \quad \frac{d(b-a)}{da} > 0$$

Stosując ten warunek do równania (4.8) uzyskujemy:

$$(8.2) \quad \frac{dt}{da} = \frac{p_r}{p_r - q} > 1$$

czyli jako warunek monotonicznego wzrostu długości strefy zniszczonej dostajemy

$$(8.3) \quad p_r > q$$

W przypadku nie spełnienia tego warunku układ traci stateczność. Dla $p_r < q$ zachowanie równowagi oraz propagację frontu zniszczenia można wymusić, jeżeli w obszarze o długości Δa zastosujemy podpory o wytrzymałości p_r (rys. 21). Δa oznacza przyrost szerokości komory ponad jej szerokość graniczną, czyli

$$(8.4) \quad a = a_{gr} + \Delta a$$

przy czym zależność między długością strefy materiału spękanego a przyrostem szerokości komory wyraża się równością:

$$(8.5) \quad \eta = \frac{q \Delta a}{p_r - q}$$

które wynika z analizy zmienności długości strefy

$$(8.6) \quad \eta = b - a$$

Dla $p_r > q$ Δa jest dodatnie, natomiast p_r mniejszemu od q odpowiadają ujemne wartości Δa .

Kolejne dwa warunki stateczności będą się odnosiły do rozwiązania przedstawionego dla pasma o skończonej szerokości. Biorąc pod uwagę takie pasmo modelowane schematem I, warunek utraty stateczności zapiszemy w postaci:

$$(8.7) \quad \frac{da}{db} = 0$$

Różniczkując względem b zależność (8.5-4) uzyskujemy równanie kwadratowe dla b

$$(8.8) \quad (p_r - q)(e^{2sx_s})^2 + [2(p_r - q) - 4(p_r - q)]e^{2sx_s} e^{2st} + (p_r - q)(e^{2sx_s})^2 = 0$$

z którego wyliczamy krytyczną wartość $b=b_{kr}$. Szerokość komory dla której układ traci stateczność wyznaczmy z równania:

$$(8.9) \quad a_{kr} = \frac{Pr-q}{Pr} b_{kr} - \frac{Pm-q}{Spr} \frac{e^{2sb_{kr}} - e^{2sx_s}}{e^{2sb_{kr}} + e^{2sx_s}}$$

Z zależności (6.8) wiążącej parametry a i b dla schematu II-go nie da się wyznaczyć bezpośrednio jednej wielkości w funkcji drugiej. Dlatego kryterium stateczności dla tego przypadku ma postać warunku na ekstremum funkcji uwikłanej (6.8). Skróceniowo równanie (6.8) możemy zapisać w postaci:

$$(8.10) \quad F(a, b) = 0$$

Jeżeli spełniony jest warunek:

$$(8.11) \quad I(a_{kr}, b_{kr}) = - \frac{F''_{ab}(a_{kr}, b_{kr})}{F'_a(a_{kr}, b_{kr})} < 0$$

gdzie a_{kr} , b_{kr} są rozwiązaniem układu równań nieliniowych

$$(8.12) \quad \begin{cases} F(a, b) = 0 \\ F'_b(a, b) = 0 \end{cases}$$

przy czym:

$$(8.13) \quad \begin{aligned} F'_a(a_{kr}, b_{kr}) &- \text{obliczona dla } a_{kr} \text{ i } b_{kr} \text{ wartość pochodnej cząstkowej funkcji } F \text{ względem } a, \\ F'_b(a, b) &- \text{pochodna cząstkowa funkcji } F \text{ względem } b, \\ F''_{ab}(a_{kr}, b_{kr}) &- \text{obliczona dla } a_{kr} \text{ i } b_{kr} \text{ wartość pochodnej cząstkowej funkcji } F \text{ względem } b, \end{aligned}$$

to punkt (a_{kr}, b_{kr}) odpowiada utracie stateczności układu. Pochodne 8.13 zdefiniowane są zależnościami:

$$(8.14) \quad F'_a(a, b) = \frac{s}{k} \frac{e^{2sb} - e^{2sx_s}}{e^{2sb} + e^{2sx_s}} \operatorname{tanh} e^{\beta(a-b)} + \frac{Pr-q}{G} [\beta e^{\beta(a-b)} - \beta] - \frac{Pr}{G}$$

$$(8.15) \quad \begin{aligned} F'_b(a, b) &= \frac{Pr-q}{G} [1 - e^{\beta(a-b)}] + \frac{Pr-q}{G} - \frac{s}{k} \operatorname{tanh} e^{\beta(a-b)} \frac{e^{2sb} - e^{2sx_s}}{e^{2sb} + e^{2sx_s}} + \\ &- \frac{s}{k} \{ \operatorname{tanh} [1 - e^{\beta(a-b)}] + Pm-q \} \frac{4se^{2s(b+x_s)}}{(e^{2sb} + e^{2sx_s})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F''_{b^2}(a, b) = & \frac{tvq}{\delta} e^{\delta(a-b)} + \frac{tvq\gamma se^{\delta(a-b)}}{k(e^{2s_b} + e^{2s_x})} [j(e^{2s_b} - e^{2s_x}) + \\
 & - 2 \frac{4se^{2s(b+x_s)}}{e^{2s_b} + e^{2s_x}}] - \frac{s}{k} \{ tvq[1 - e^{-\delta(a-b)}] + p_m - q \} \cdot \\
 & \cdot \frac{8s^2 e^{2s(x_s+a)} (e^{2s_b} + e^{2s_x}) - 16s^2 e^{4s_b} e^{2s_x}}{(e^{2s_b} + e^{2s_x})^3}
 \end{aligned}
 \tag{8.16}$$

Dla schematu III-go ze względu na trzy parametry: a , x_r , x_e opisujące zachowanie się układu, powiązane równaniami (6.36), (6.35), nie jest możliwe podanie analitycznego kryterium stateczności. Punktów utraty stateczności można poszukiwać numerycznie.

Sytuacja będzie nieco bardziej złożona jeżeli zbadamy propagację zaburzenia wywołanego drążeniem komory w materiale ulegającym osłabieniu. Stateczność należy tutaj badać zarówno dla fazy pośredniej jak i zaawansowanej.

Zajmując się na wstępie schematem pierwszym oraz określając warunki monotonicznego wzrostu długości strefy materiału skruszonego w postaci (8.1) oraz

$$\frac{d(c-a)}{da} > 0 \Rightarrow \frac{dc}{da} > 1
 \tag{8.17}$$

otrzymamy warunek identyczny z (8.3). Zastanówmy się następnie czy układ może stracić stateczność w fazie pośredniej, to znaczy zastosujemy warunek (8.7) do równania (4.83). Uzyskamy stąd zależność między a i b , która musi być spełniona w chwili utraty stateczności:

$$\sin^2(\alpha b - \alpha a) = \frac{k}{k + k_1}
 \tag{8.18}$$

Wykorzystując tę zależność możemy wyznaczyć bezpośrednio krytyczną szerokość komory:

$$(8.19) \quad a_{kr} = \frac{p_m - q}{q_s} \sqrt{1 + \frac{k}{k_1}}$$

Pozostaje jeszcze rozstrzygnięcie kwestii, kiedy wartość a określona wzorem (8.19) jest mniejsza od a_0 . Z porównania tych wielkości otrzymamy związek:

$$(8.20) \quad k(q - p_r)^2 \leq 0$$

Oznacza to, że faza pośrednia jest zawsze stateczna. Utrata stateczności może jedynie wystąpić dla $p_r = q$ i wtedy $a_{kr} = a_0$, czyli faktycznie układ traci stateczność w fazie granicznej II. W pozostałych momentach fazy granicznej II układ jest stateczny.

Jeżeli $p_r \neq q$ i wartość a_{kr} wyliczona ze wzoru (8.19) okaże się większa od a_0 , wówczas należy jeszcze sprawdzić czy układ nie traci stateczności w fazie zaawansowanej. Biorąc pod uwagę (4.15-1) oraz pamiętając, że $(b-c) = \text{const.}$ wyliczymy:

$$(8.21) \quad \frac{da}{dc} = - \frac{q - p_r}{p_r}$$

I aby $(da/dc) = 0$, musi być:

$$(8.22) \quad q = p_r$$

Uwzględniając tę równość układ (4.15) możemy przedstawić w postaci

$$(8.23) \quad -\frac{q}{\sigma} a = \frac{r(q - p_m)}{k_1} \sin(\sigma t - \sigma \tau) + \frac{s(q - p_m)}{k} \cos(\sigma t - \sigma \tau)$$

$$\frac{p_m - q}{k_1} \cos(\sigma t - \sigma \tau) = \frac{s}{r} \frac{p_m - q}{k_1} \sin(\sigma t - \sigma \tau)$$

przechodząc na podstawie jedynki trygonometrycznej na funkcję sinus argumentu $(\sigma t - \sigma \tau)$ wyliczamy:

$$(8.24) \quad \sin(\sigma t - \sigma \tau) = \frac{k}{k + k_1}$$

oraz z pierwszego z równań (8.23) mamy:

$$(8.25) \quad a_{kr} = \frac{P_m q}{q_s} \sqrt{1 + \frac{k}{k_1}}$$

a więc równanie identyczne z (8.19).

Przechodząc do schematu II zauważymy, że aby była możliwa utrata stateczności układu w fazie pośredniej, musi być spełniony warunek (8.7). Różniczkując względem b równanie (4.28) otrzymujemy:

$$(8.26) \quad \frac{q}{G} \frac{da}{db} = r \frac{dB}{db} \cos(nb - ra) - Br \sin(nb - ra) \left(1 - \frac{da}{db}\right) + \\ - \frac{dA}{db} \sin(nb - ra) - A \cos(nb - ra) \left(1 - \frac{da}{db}\right)$$

Uwzględniając wartości pochodnych (dA/db) oraz (dB/db) zgodnie z (4.27) dochodzimy do relacji:

$$(8.27) \quad \frac{da}{db} = \frac{GrWN}{q + GrWN}$$

co wobec (8.7) daje

$$(8.28) \quad WN = 0$$

gdzie:

$$(8.29) \quad WN = \left[\frac{\beta \pm v \gamma [s(G+k_1) - k]}{r-k(G+k_1)} e^{-\beta(b-a)} - Ar \right] \cos(nb - ra) + \\ - \left[\frac{\beta \pm v \gamma (G+k_1 - k)}{k(G+k_1)} e^{-\beta(b-a)} + Br \right] \sin(nb - ra)$$

przekształcając (8.28) mamy:

$$(8.30) \quad b = a + \frac{1}{\pi} \arctg [\varphi(a, b)]$$

gdzie

$$(8.31) \quad \varphi(a, b) = \frac{\beta \pm v \gamma [s(G+k_1) - k] e^{-\beta(b-a)} - Ar^2 k (G+k_1)}{r [\beta \pm v \gamma (G+k_1 - k) e^{-\beta(b-a)} + Br k (G+k_1)}$$

Zależność funkcyjna (8.30) definiuje linię stanów krytycznych. Punkt utraty stateczności możemy wyznaczyć jako punkt przecięcia krzywej $a=f(b)$ wyznaczonej z równania (4.28) z linią stanów krytycznych.

9. ROZWIĄZANIE KROCZĄCE - RUCHOMY PUNKT PODPARCIA BELKI STROPOWEJ

Korzystając z wyprowadzonych w pracy równań można podjąć próbę prostego modelowania systemu eksploatacji pokładu z naturalnym zawałem stropu. W tym celu przyjmiemy niesymetryczne charakterystyki materiałowe. Założymy mianowicie, że ugięcia po lewej stronie komory wzrastają szybciej niż po prawej. Przy pewnej jej szerokości belka nadkładu oprze się z lewej strony na rumowisku skalnym. Nastąpi zgniatanie rumosza postępujące aż do ustabilizowania się końcowej wartości ugięcia. Dalsze prowadzenie eksploatacji nie spowoduje wzrostu ugięć, lecz przesunięcie się, kroczenie, ustalonego rozwiązania.

Schemat geometryczny układu pokazuje rys. 41. Przyjęto, że materiał pasma po prawej stronie komory jest materiałem kruchym. Charakterystykę rumowiska skalnego pokazuje rys. 42. W rzeczywistości zmienność siły w zależności od ugięcia ma postać krzywej pokazanej na rys. 42a. Rysunki 42b i 42c pokazują możliwe aproksymacje tego stanu. Do obliczeń przyjmiemy charakterystykę według rys. 42e jakkolwiek z równym powodzeniem można stosować charakterystyki pokazane na rys. rys. 42a i 42b. W zależności od szerokości komory odpowiadającej początkowi rozwiązania kroczącego możemy mieć do czynienia z dwoma przypadkami:

1. $a_c \leq a_{gr}$ - kroczenie rozpoczyna się gdy materiał pasma jest w stanie deformacji sprężystej.
2. $a_c > a_{gr}$ - występuje w paśmie strefa materiału zniszczonego w której naprężenia są równe rezydualnej wytrzymałości materiału.

Przypadek 1

Ugięcia w poszczególnych przedziałach opisane są równaniami:

$$(9.1) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2} \frac{q}{G} x^2 + C_1 x + C_2, & 0 < x < a \\ w &= C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{k}, & x > a \end{aligned}$$

Z warunków (4.1) wyliczamy:

$$(9.2) \quad \begin{aligned} C_1 &= C_3 = 0 \\ C_2 &= \frac{qa}{Gs} + \frac{1}{2} \frac{q}{G} a^2 + \frac{q}{k} \\ C_4 &= e^{sa} \frac{qa}{Gs} \end{aligned}$$

Szerokość komory odpowiadającą początkowi rozwiązania kroczącego wyznaczamy z równania:

$$(9.3) \quad w(x)|_{x=0} = w_0$$

uzyskując:

$$(9.4) \quad a_c = \frac{-\frac{q}{Gs} + \sqrt{d}}{\frac{q}{G}}$$

gdzie

$$(9.5) \quad d = \frac{q^2}{kG} \left(\frac{2kw_0}{q} - 1 \right)$$

a_c istnieje pod warunkiem, że

$$(9.6) \quad w_0 \geq \frac{q}{2k}, \quad w_0 < \frac{pm^2 + q^2}{2kq}$$

Przypadek 2

$$(9.7) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2} \frac{q}{G} x^2 + C_1 x + C_2, & 0 < x < a \\ w &= \frac{1}{2} \frac{px - q}{G} x^2 + B_1 x + B_2, & a < x < b \\ w &= C_3 e^{sx} + C_4 e^{-sx} + \frac{q}{k}, & x > b \end{aligned}$$

Z warunków (4.5) i (4.7):

$$C_1 = C_3 = 0$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \frac{Pr}{G} a^2 + \frac{1}{5} \left[\frac{Pr}{G} a - \frac{Pr-Q}{G} l \right] - \frac{1}{2} \frac{Pr-Q}{G} b^2 + \frac{Pr}{G} ab + \frac{Q}{R}$$

$$(9.8) \quad C_4 = \frac{1}{5} \left[\frac{Pr}{G} a - \frac{Pr-Q}{G} b \right] e^{2b}$$

$$B_1 = -\frac{Pr}{G} a$$

$$B_2 = \frac{1}{5} \left[\frac{Pr}{G} a - \frac{Pr-Q}{G} l \right] - \frac{1}{2} \frac{Pr-Q}{G} b^2 + \frac{Pr}{G} ab + \frac{Q}{R}$$

oraz

$$(9.9) \quad k = \frac{G}{q-Pr} \left[\frac{S(fm-Q)}{\kappa} - \frac{Pr}{G} a \right]$$

Początkowi rozwiązanie kroczącego odpowiada szerokość komory:

$$(9.10) \quad a_0 = \sqrt{\frac{2G(q-Pr)}{Pr-Q} \left[\frac{(Pr-Q)^2}{2k(q-Pr)} + \frac{Pr}{k} - w_0 \right]}$$

a_0 istnieje gdy wielkość podpierwiastkowa jest nieujemna. Prowadzi to do ograniczeń:

$$(9.11) \quad w_0 > \frac{Pr}{k} + \frac{(Pr-Q)^2}{2k(q-Pr)} \quad \text{gdzie } Pr > Q$$

$$(9.12) \quad w_0 < \frac{Pr}{k} - \frac{(Pr-Q)^2}{2k(q-Pr)} \quad \text{gdzie } Pr < Q$$

Dalsze ograniczenie dla w_0 wynika z warunku $a_0 \geq a_{gr}$. Otrzymujemy stąd:

$$(9.13) \quad w_0 \leq \frac{(Pr-Q)^2}{2k(q-Pr)} \left(1 - \frac{Pr}{Q} \right) + \frac{Pr}{k}$$

10. PRZYKŁADY LICZBOWE

- W celu zilustrowania oraz ilościowego sprawdzenia poprawności uzyskanych rozwiązań, wykonano obliczenia określając:
- wykresy naprężeń i ugięć spoczywającej na paśmie belki materiału dla różnych wartości parametru sterowania i przy wykorzystaniu różnych schematów opisujących materiał pasma,
 - progresję stref odkształcenia powstających w paśmie,
 - wykresy porównujące wielkości naprężeń i ugięć występujących w paśmie przy ustalonej szerokości komory, otrzymane dla różnych schematów,
 - zależność szerokości komory odpowiadającej końcowi rozwiązania sprężystego od zintegrowanego parametru geometrii H^*h , przy różnych proporcjach wytrzymałości maksymalnej do rezydualnej.

Powyższe zależności i wykresy przedstawiono zarówno dla pasma o skończonej szerokości jak i dla pasma półnieskończonego. Dla pasma skończonego określono dodatkowo zależność $a=f(b)$ w przestrzeni parametrów geometrycznych opisujących układ, oraz podano wykresy odpowiadające stanom równowagi chwiejnej rozdzielające płaszczyznę $a-p_r$ na obszar zachowań statecznych i niestatecznych. Przeanalizowano również wrażliwość rozwiązania na zmianę parametrów wytrzymałościowych. Obliczenia przeprowadzono przyjmując następujące wartości stałych materiałowych:

$$\begin{array}{lll}
 E = 1.5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2, & G = 4.31 \cdot 10^8 \text{ N/m}, & \nu = 0.333, \\
 \nu' = 0.5, & E = 1.687 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2, & \mu = 0.3, \\
 \varphi = 35^\circ, & c_o = 2.5 \text{ MPa}, & c_r = 1.7 \text{ MPa} \\
 k = 0.54 \cdot 10^8 \text{ N/m}^3, & K = 1.4 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2, &
 \end{array}$$

Parametry wytrzymałościowe przyjęto za równe:

$$q = 3.6 \text{ MPa}, \quad p_r = 6 \text{ MPa}, \quad p_m = 9.6 \text{ MPa}$$

Rozkłady ugięć oraz naprężeń w paśmie (rys. 22 ÷ 25) wykonano dla pięciu szerokości komory:

$$\begin{array}{l}
 a = 1/3 a_{gr}, \quad a = 2/3 a_{gr}, \quad a = a_{gr}, \quad a = a_{gr} + 0.5m \\
 a = a_{gr} + 1.5m
 \end{array}$$

wyliczając wymiar graniczny oddzielnie dla każdego schematu. Śródkowe diagramy na rysunkach 23 i 25 pokazują progresję poszczególnych stref odkształcenia. Rysunki 26 ÷ 29 porównują wartości ugięć i naprężeń otrzymane dla poszczególnych schematów.

tów. Wykresy porównawcze wykonano dla $a=1/2a_{gr}$, $a=a_{gr}$, $a=a_{gr}+1.5m$, przyjmując za a_{gr} wartość obliczoną według schematu I. Wykresy 31 i 32 pokazują wpływ zmiany wytrzymałości rezydualnej na zależność między szerokością komory a położeniem, w którym znajduje się aktualnie front zniszczenia. Na rysunku 33 porównano trzy przykładowe krzywe a-b uzyskane przy zastosowaniu poszczególnych schematów. Rysunki 34 i 35 pokazują wrażliwość rozwiązania na zmianę parametru s zdefiniowanego wzorem (3.5), natomiast rysunki 36 i 39 przedstawiają krzywe równowagi granicznej układu wraz z ich wrażliwością na zmianę parametru s. Wreszcie rysunek 40 przedstawia konsekwencje nie spełnienia warunku monotonicznego wzrostu długości strefy materiału zniszczonego (8.3). W takim wypadku punktem utraty stateczności jest od razu punkt odpowiadający granicznej szerokości komory.

11. WKIOSKI

Na podstawie przedstawionego uproszczonego rozwiązania dotyczącego progresji stref odkształcenia, rozkładu ugięć i naprężeń oraz warunków utraty stateczności układu, można stwierdzić ilościową zgodność wyników uzyskanych przy zastosowaniu wszystkich trzech schematów. Jest ona szczególnie dobra w przypadku naprężeń, natomiast nieco gorsza dla ugięć, choć i tutaj różnice nie przekraczają 20%. Uzyskane wykresy ugięć i naprężeń są zgodne z wynikami przedstawionymi przez innych autorów na przykład ([16], [17], [18], [19], gdzie pokazano rozkłady naprężeń w górotworze osłabionym istnieniem pustki). Uwzględnienie w rozważaniach ciśnienia bocznego działa wybitnie stabilizująco na przebieg procesu, powodując swego rodzaju umocnienie materiału. Na rys. 26 wyraźnie widać różnicę jaka zachodzi w szybkości propagowania się frontu zniszczenia przy uwzględnieniu oraz nie uwzględnieniu działania naprężeń poziomych. Warto również zwrócić uwagę na znaczny wzrost ugięć występujący w fazie zaawansowanej. Pewne rozbieżności występują jedynie przy określaniu krytycznej szerokości komory, przy czym im dokładniejszy sposób modelowania, tym mniejsza wrażliwość na zmianę parametrów. Warto również zauważyć (rys. 30), że przyjęcie wytrzymałości już o 40%

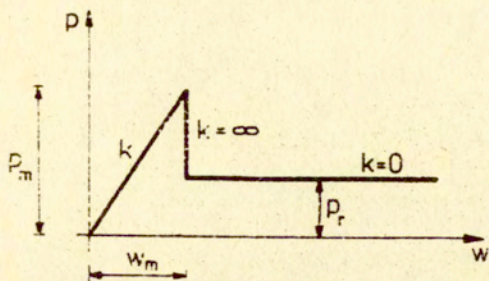
większej od działającego obciążenia powoduje, że układ praktycznie przez cały czas pozostaje w zakresie odkształceń czysto sprężystych.

Reasumując można stwierdzić, że udało się znaleźć wyrażające się zamkniętymi wzorami rozwiązanie zagadnienia. Przyjęte trzy schematy układu pasmo - nadkład umożliwiając dokonanie analizy stateczności układu oraz zbadanie progresji stref odkształcenia i określenie rozkładu ugięć i naprężeń. Schemat I zasługuje na uwagę ze względu na prostotę określających go zależności. Zastosowanie go pozwala uzyskać dane szacunkowe co do charakteru zjawiska.

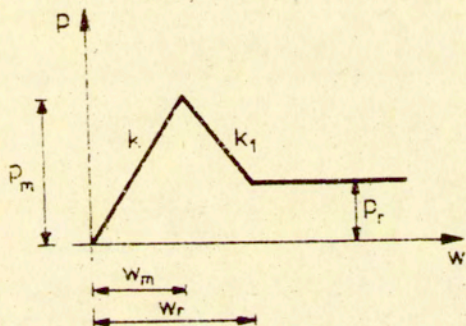
Przyjęcie założeń upraszczających dotyczących kinematyki układu, pominięcie zmian geometrii oraz założenie małych odkształceń, pozwoliły uzyskać dla schematu III-go skończone zależności analityczne pomiędzy odkształceniami i naprężeniami, czyli związki konstytutywne analogiczne do stosowanych w teoriach typu odkształceniowego. Wykorzystanie tych związków konstytutywnych, warunków plastyczności i uproszczonego równania równowagi, doprowadziło do wyznaczenia rozwiązania analitycznego zależnego od parametru ewolucji a i zmiennej przestrzennej x . Przedstawione rozwiązanie pokazuje, że utrata stateczności jest zależna od wytrzymałości resztkowej materiału oraz od parametru s wyrażającego stosunek modułu podatności do modułu ścinania.

Porównanie warunków utraty stateczności uzyskanych dla materiału kruchego i materiału z osłabieniem (rys. 43) wskazuje na ich zasadnicze podobieństwo. Różnica polega jedynie na tym, że pasmo z materiału kruchego może utracić stateczność zaraz po zakończeniu fazy początkowej, podczas gdy dla materiału z osłabieniem *dotychczas* wystąpi *zawsze* stateczna faza pośrednia. Dopiero później układ może utracić stateczność, przy czym formy utraty stateczności są podobne do obserwowanych dla materiału kruchego.

Uzyskane rezultaty wskazują na możliwość dalszych udoskonalień stosowanego modelu na przykład poprzez pominięcie założenia o quazistatycznym przebiegu procesu i uwzględnienie wpływu prędkości eksploatacji.

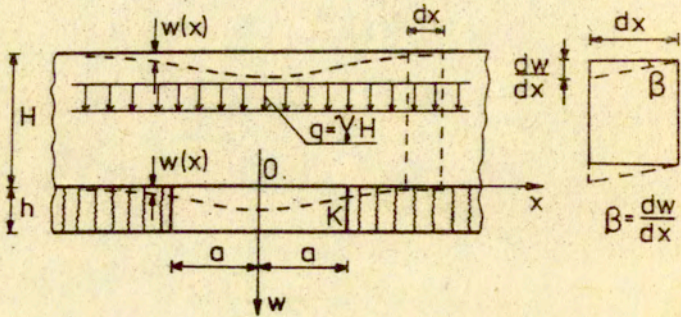


Rys. 7

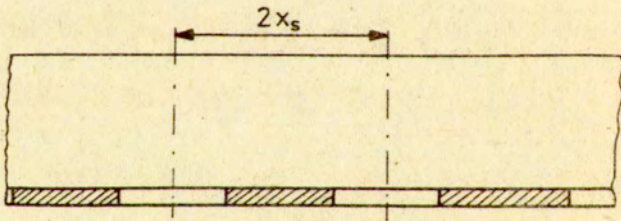


$$\begin{aligned} p &= kw & \text{dla } w < w_m \\ p &= P_m - k_1(w - w_m) & \text{dla } w_m < w < w_r \\ p &= P_r & \text{dla } w > w_r \end{aligned}$$

Rys. 7a



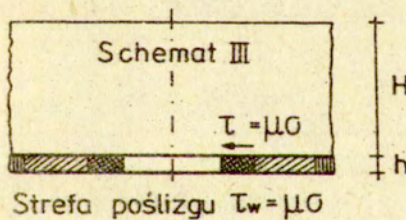
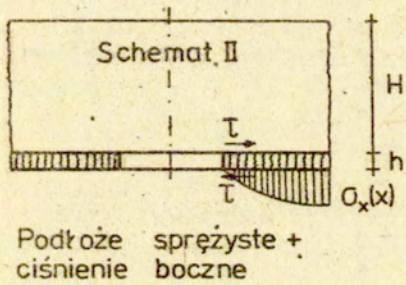
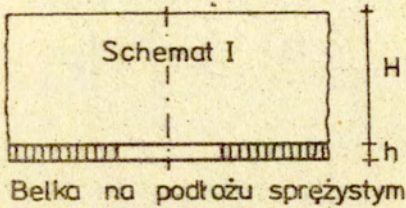
Rys. 1



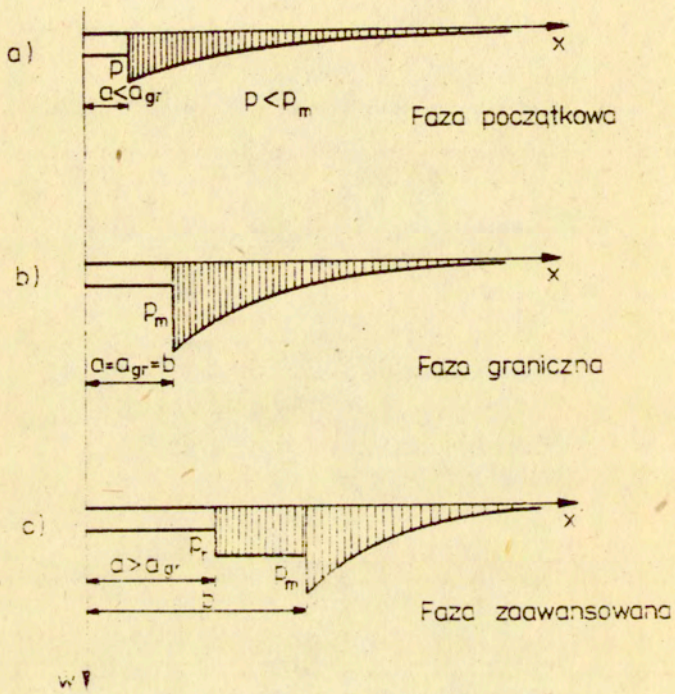
Pasma o skończonej szerokości

Rys. 9

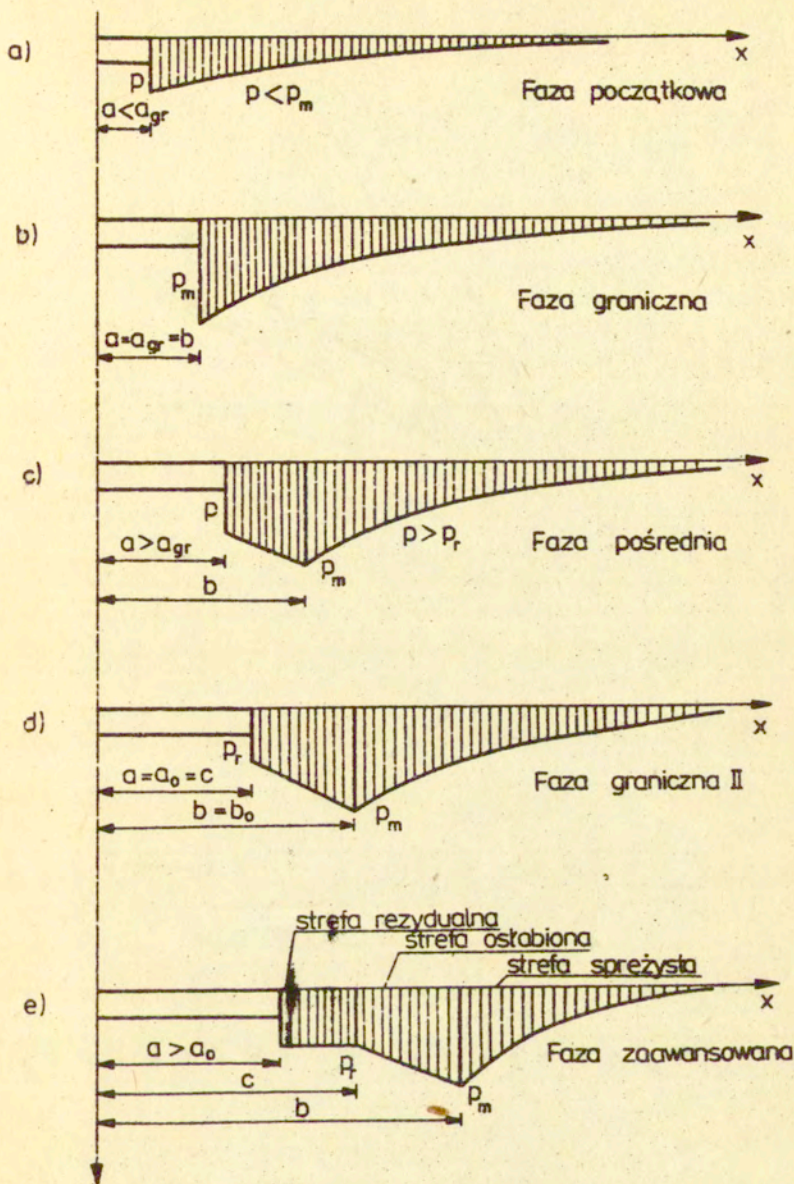
PASMO PÓLNIESKOŃCZONE



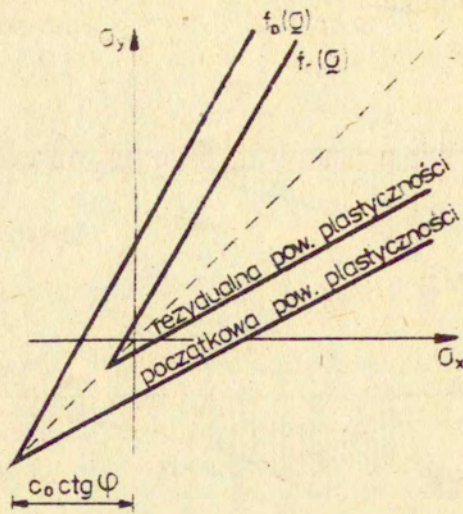
Rys. 8



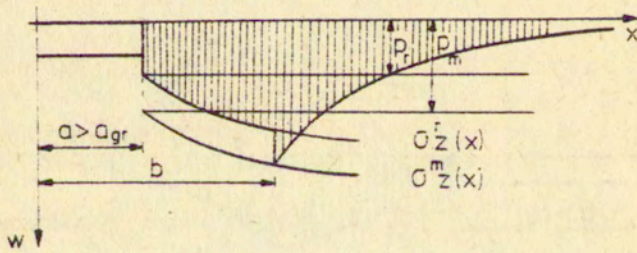
rys. 10



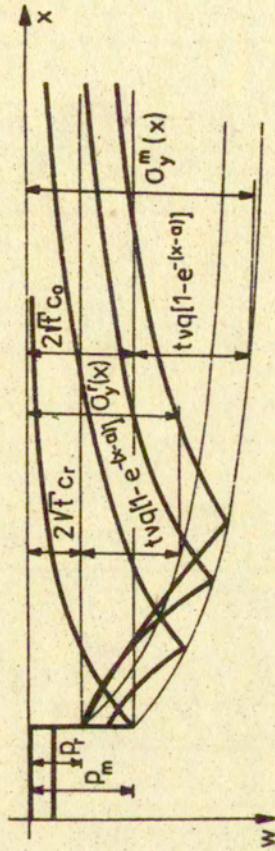
Rys. 10a



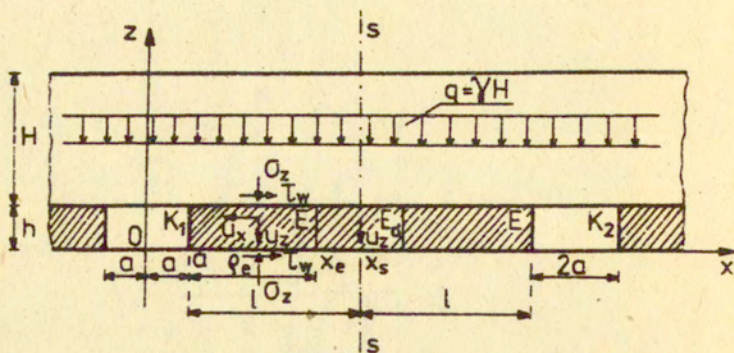
Rys. 11



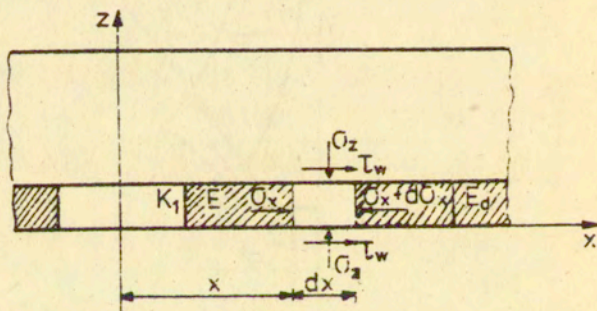
Rys. 12



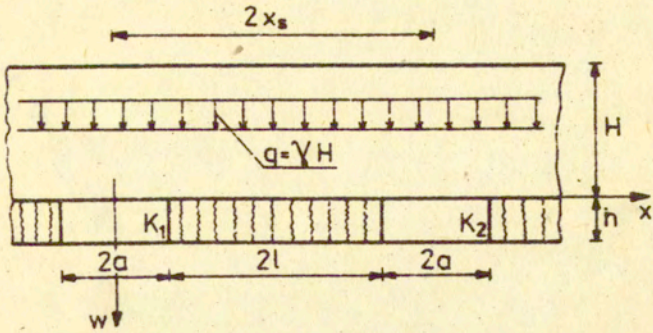
Rys. 12a



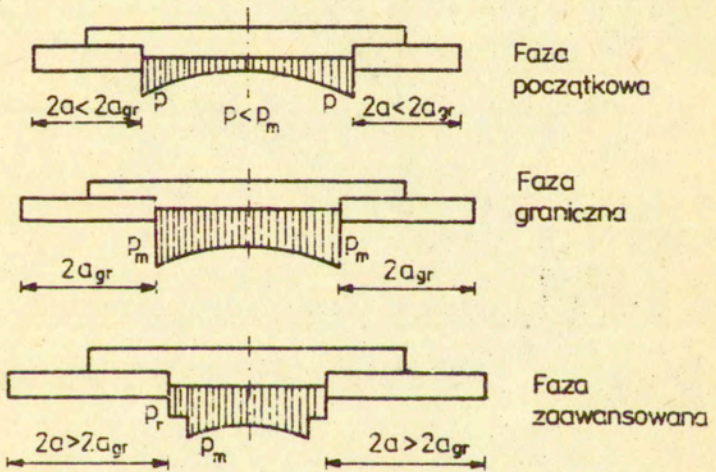
Rys. 13



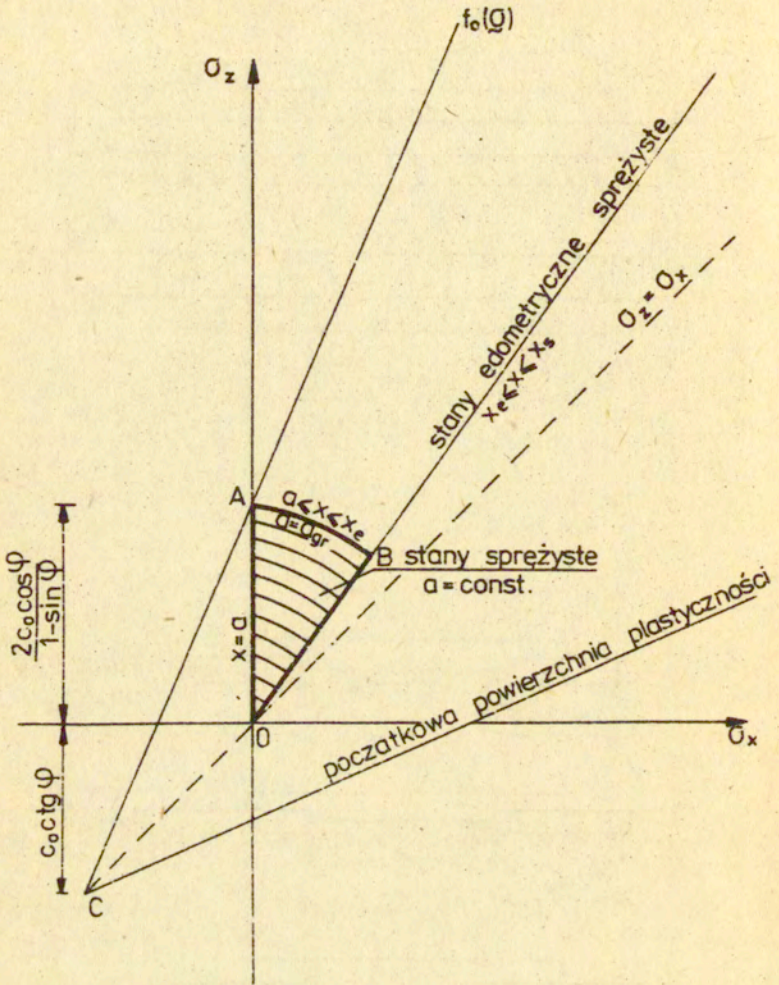
Rys. 14



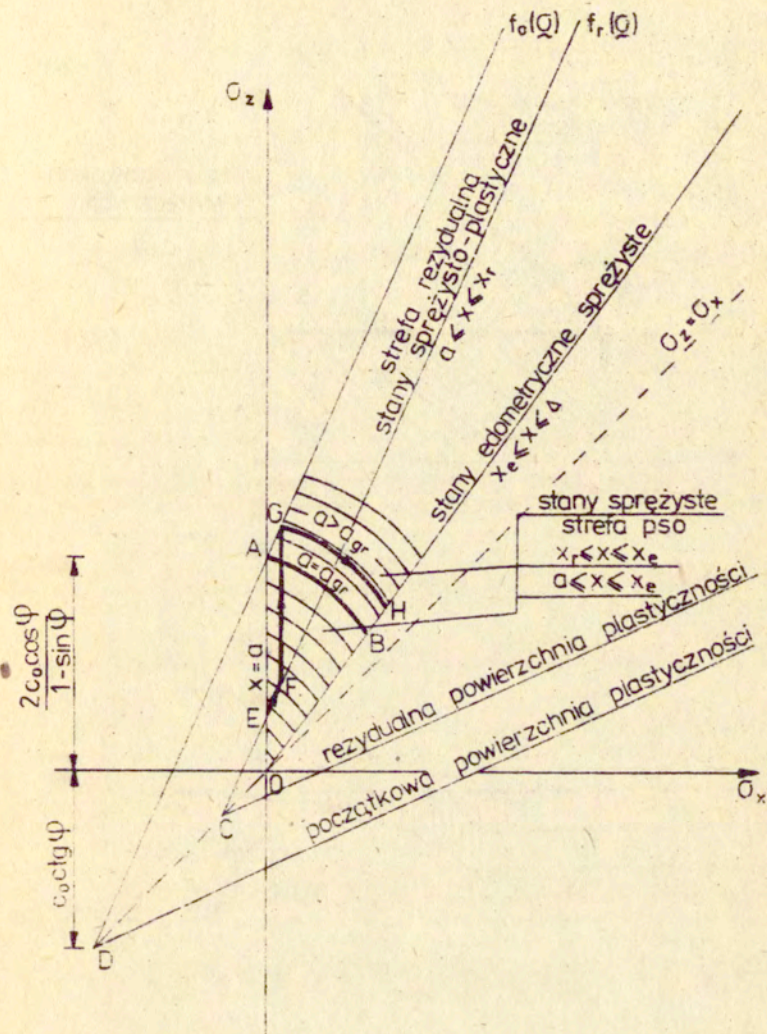
Rys. 16



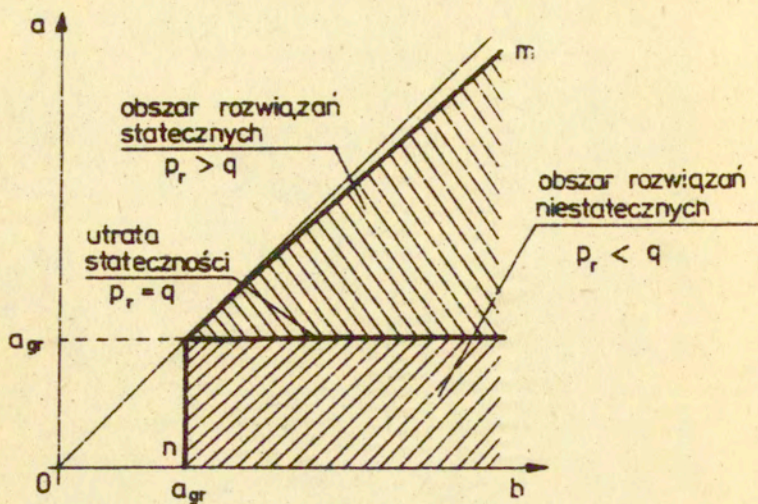
Rys. 17



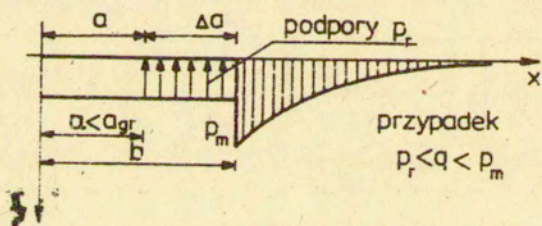
Rys. 18



Rys. 19

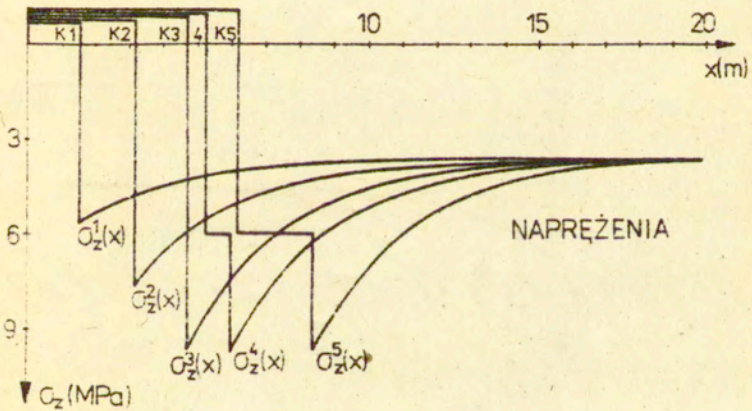
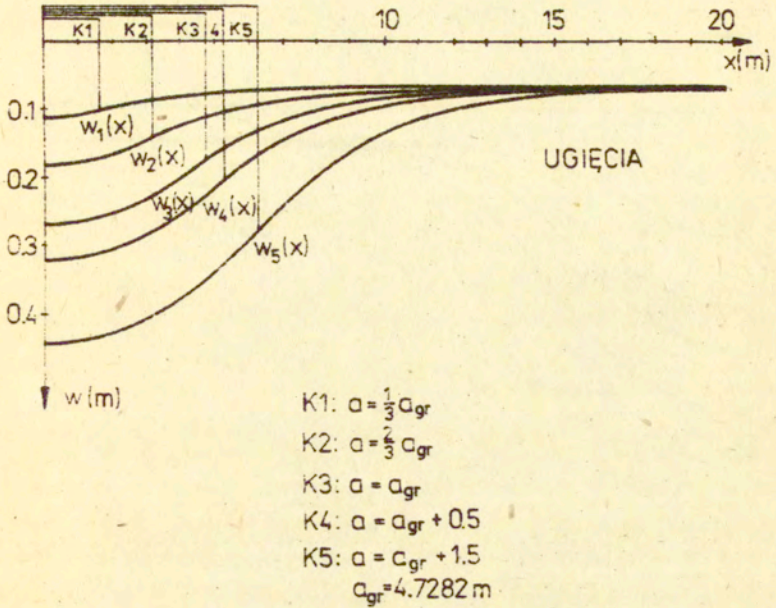


Rys. 20



Rys. 21

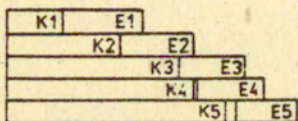
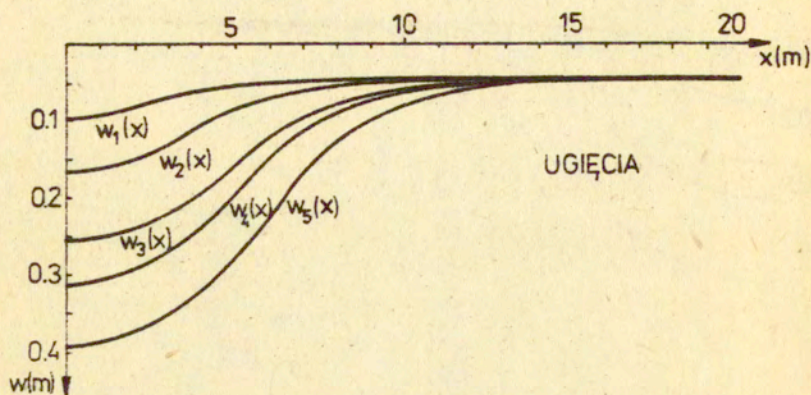
SCHEMAT I
PASMO NIESKOŃCZONE



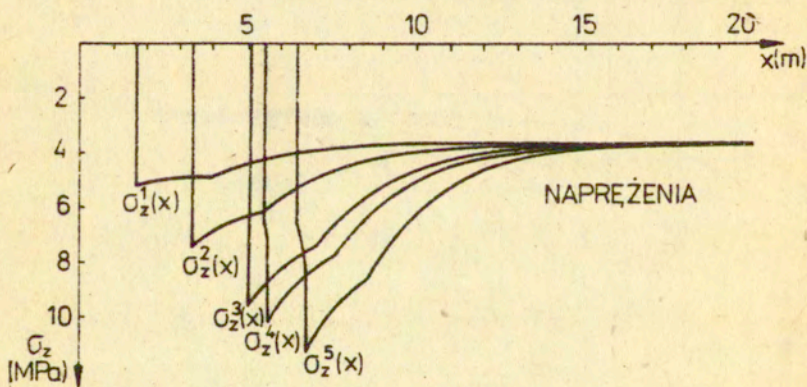
Rys. 22

SCHEMAT III

PASMO NIESKOŃCZONE

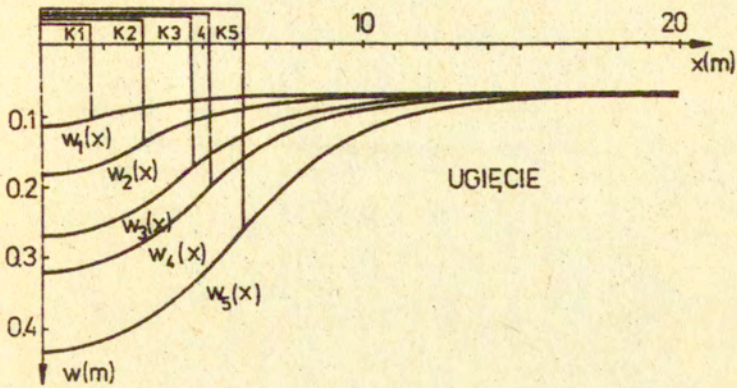


- $\alpha = \frac{1}{3} \alpha_{gr}$
- $\alpha = \frac{2}{3} \alpha_{gr}$
- $\alpha = \alpha_{gr} = 5.003 \text{ m}$
- $\alpha = \alpha_{gr} + 0.5$
- $\alpha = \alpha_{gr} + 1.5$

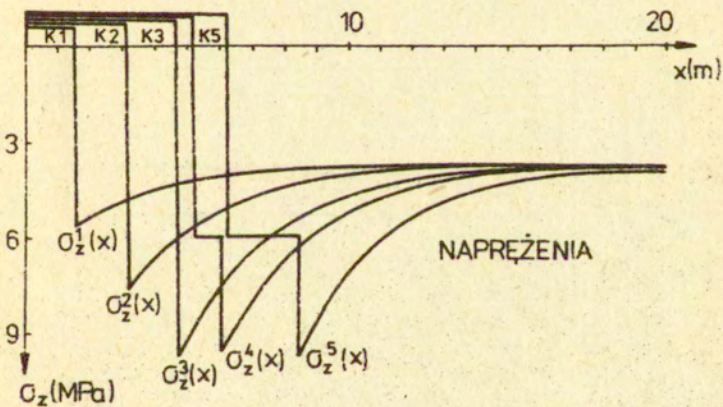


Rys. 23

SCHEMAT I
PASMO SKOŃCZONE

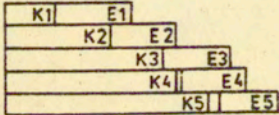
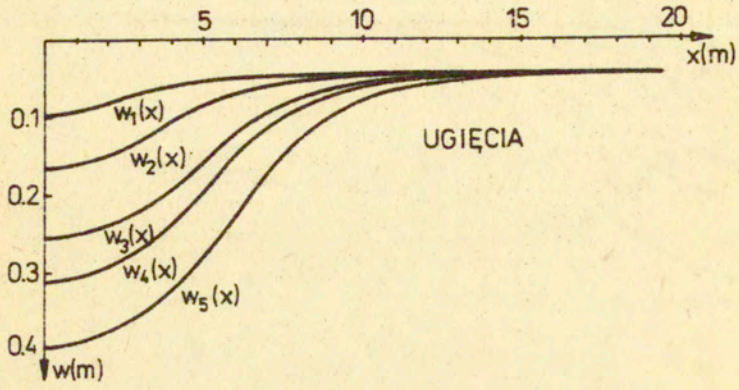


- K1: $a = \frac{1}{3} a_{gr}$
- K2: $a = \frac{2}{3} a_{gr}$
- K3: $a = a_{gr} = 4.73m$
- K4: $a = a_{gr} + 0.5$
- K5: $a = a_{gr} + 1.5$

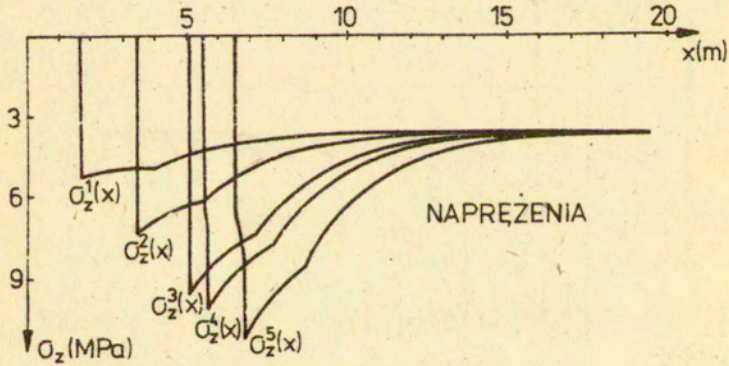


Rys. 24

SCHEMAT III
PASMO SKOŃCZONE

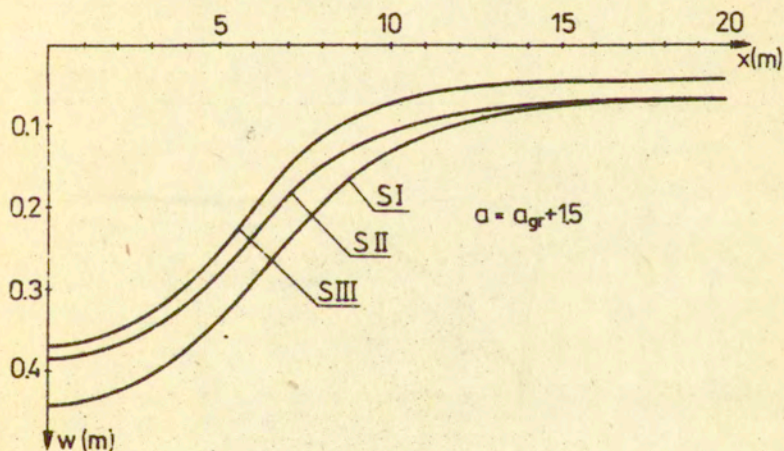
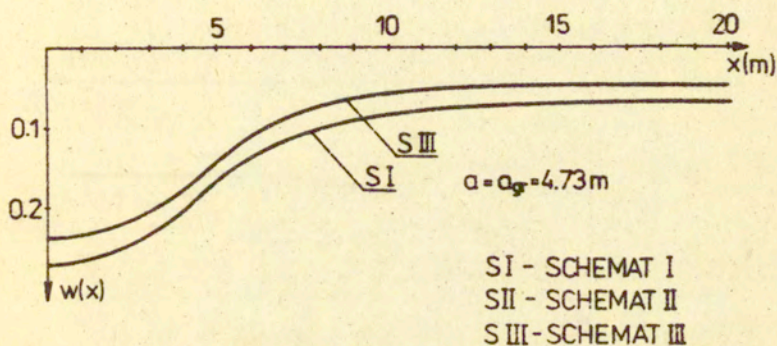
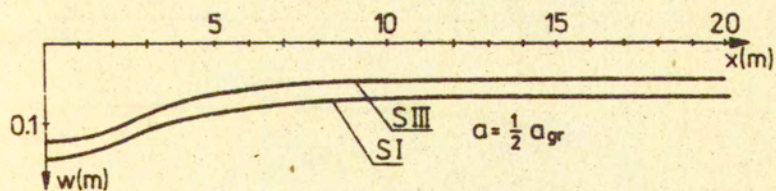


- $a = \frac{1}{3} a_{gr}$
- $a = \frac{2}{3} a_{gr}$
- $a = a_{gr} = 5.003 \text{ m}$
- $a = a_{gr} + 0.5 \text{ m}$
- $a = a_{gr} + 1.5 \text{ m}$



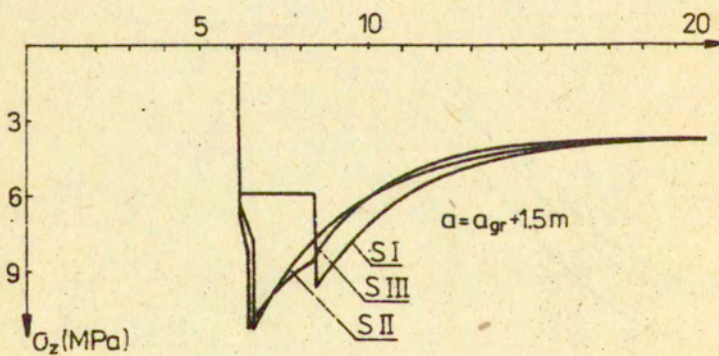
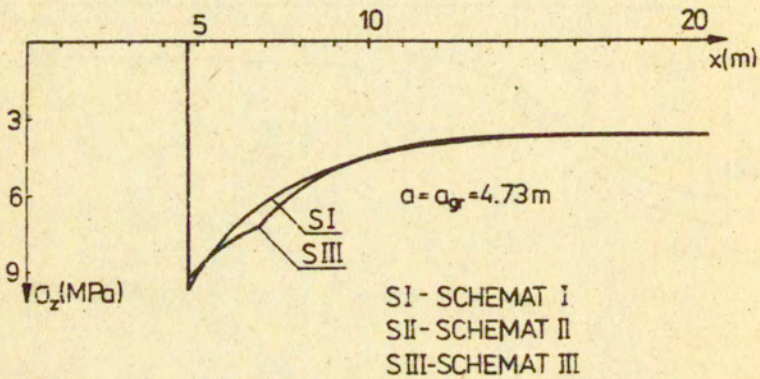
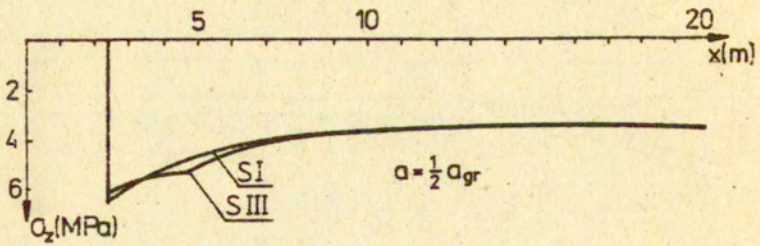
Rys. 25

- 101 -
 PASMO NIESKOŃCZONE
 PORÓWNANIE UGIĘĆ



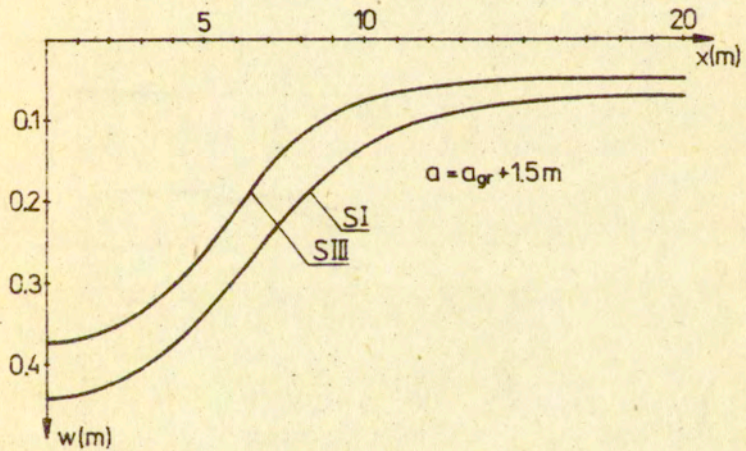
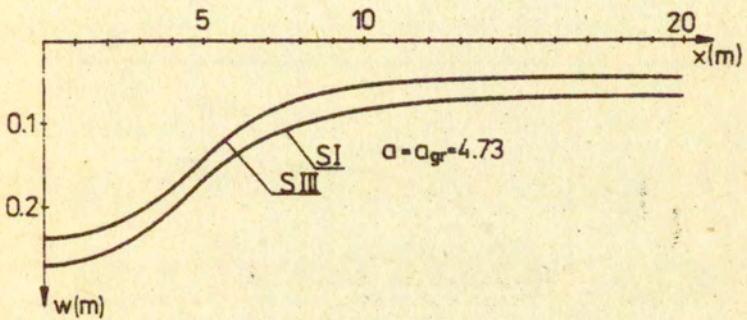
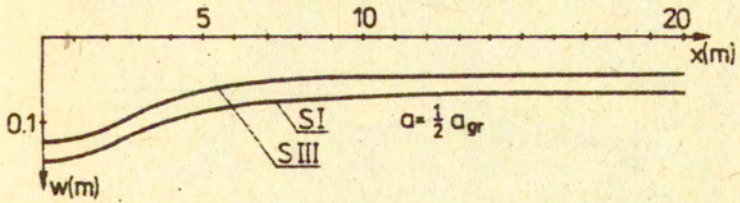
Rys. 26

PASMO NIESKOŃCZONE
PORÓWNIENIE NAPRĘŻEŃ



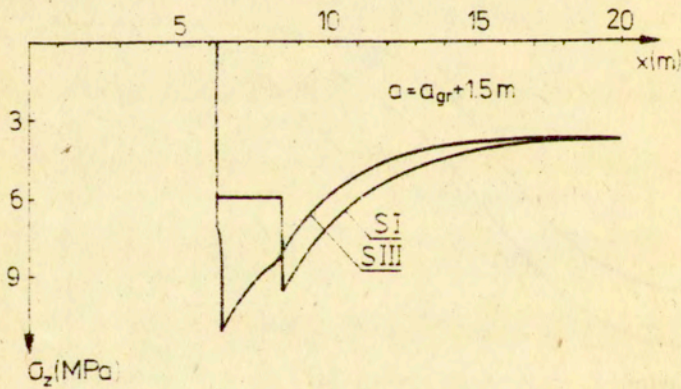
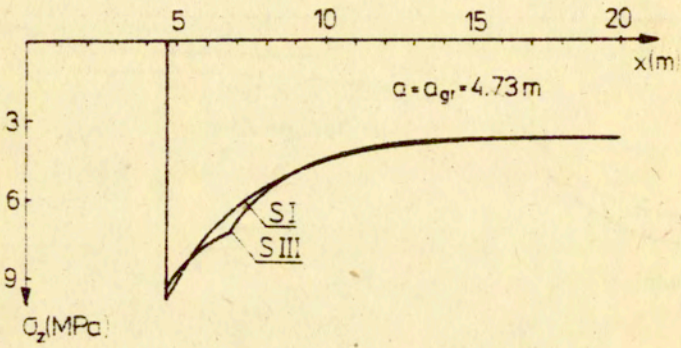
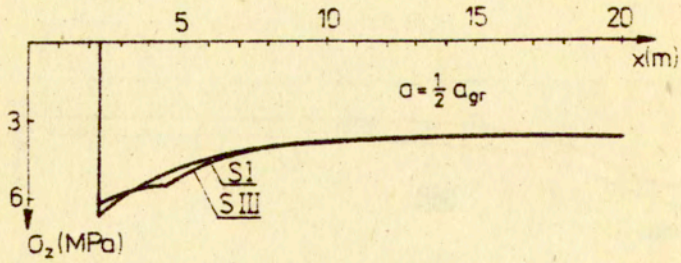
Ryż. 27

PASMO SKOŃCZONE
PORÓWNANIE UGIĘĆ

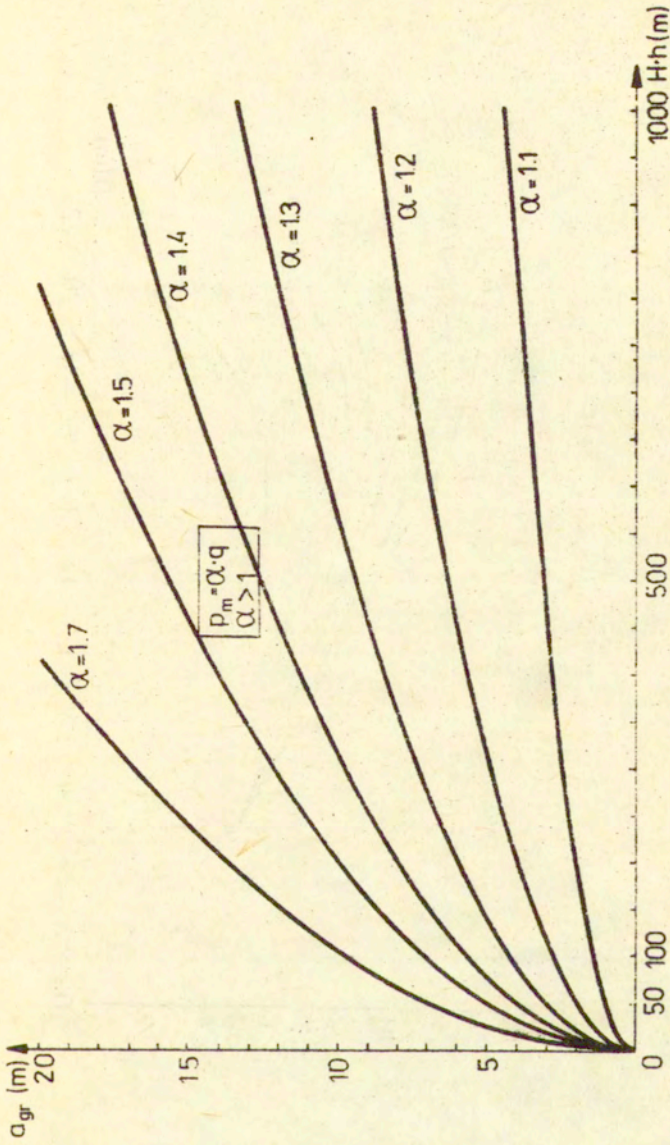


Rys. 28

PASMO SKOŃCZONE
PORÓWNANIE NAPREZEŃ

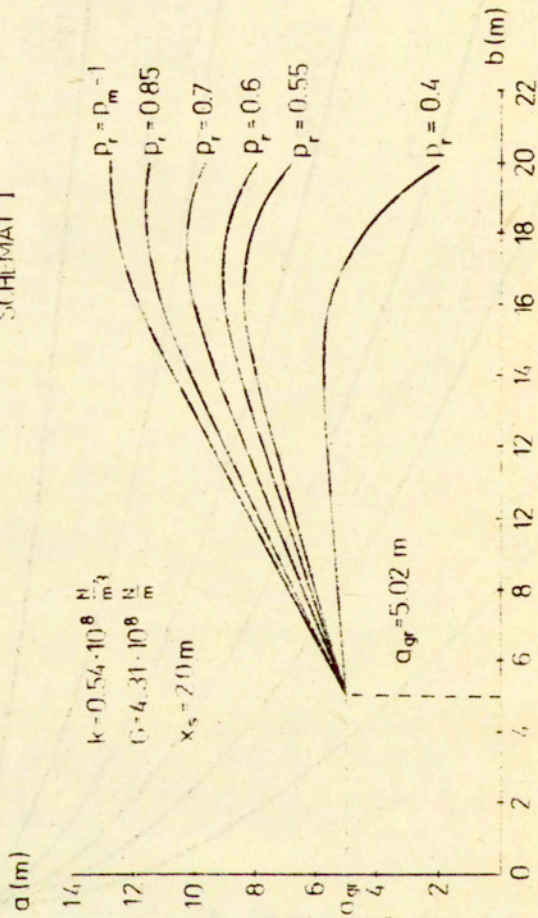


Rys. 29

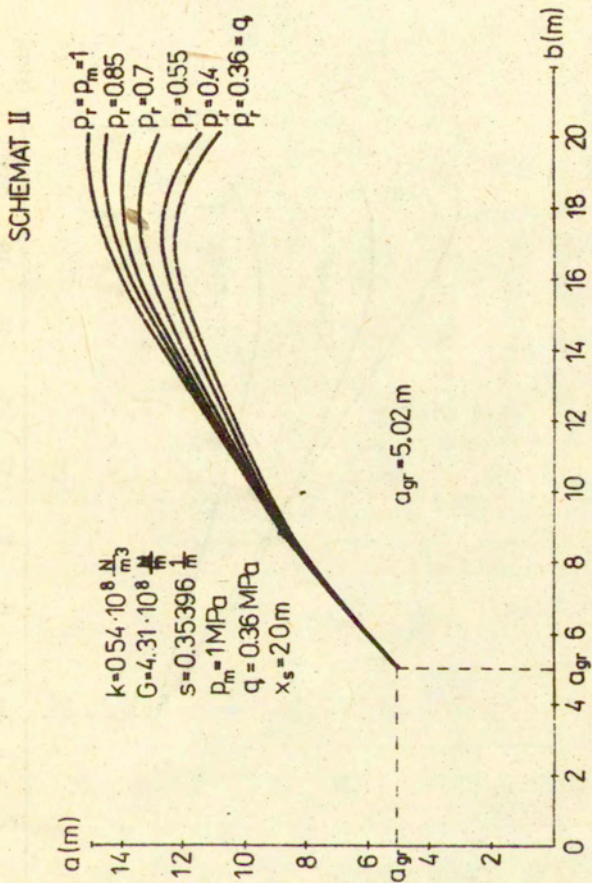


Rys. 30

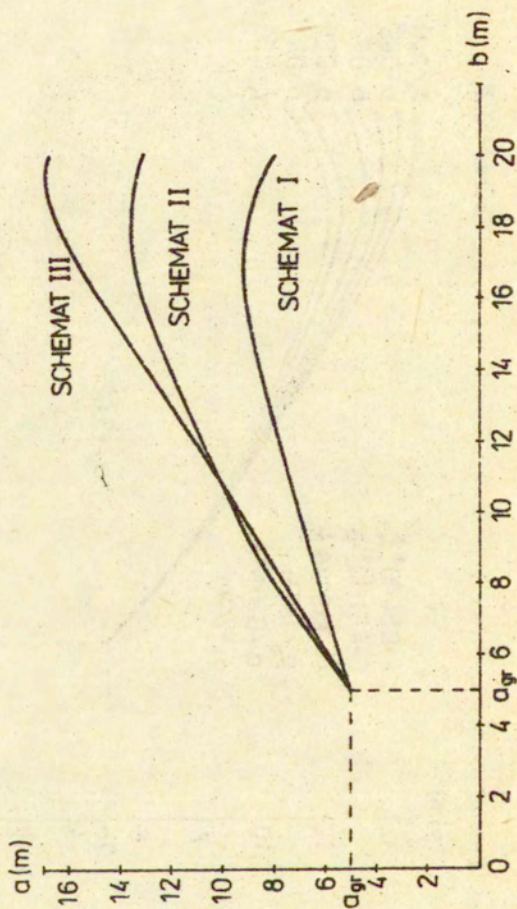
SCHEMAT I



Krysol

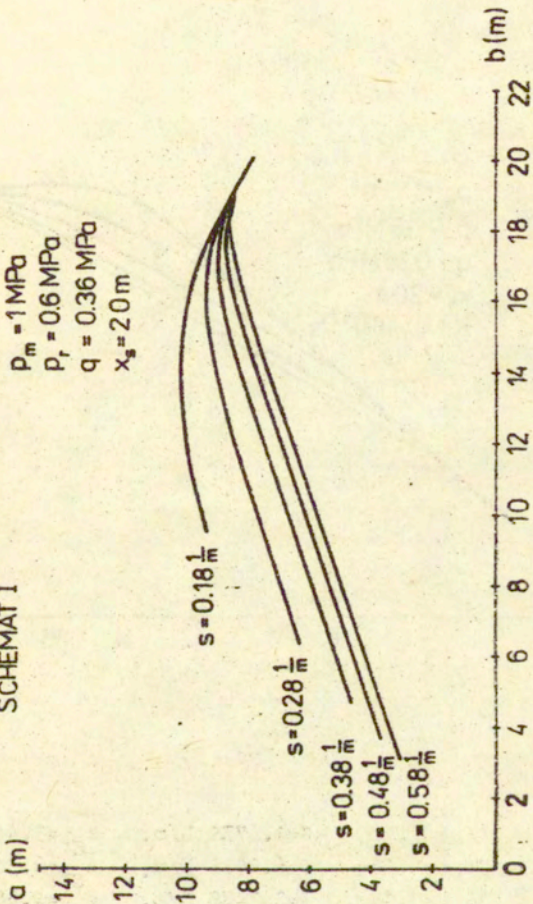


Rys. 32



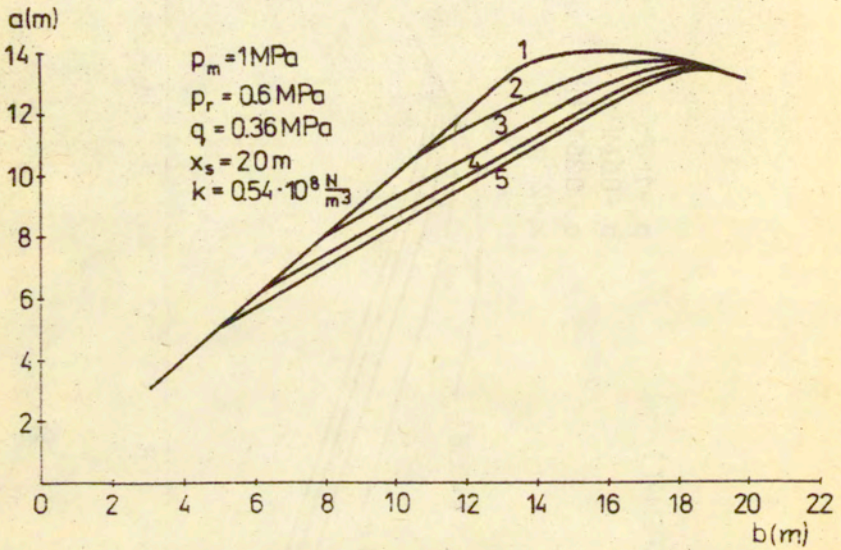
Rys. 33

SCHEMAT I



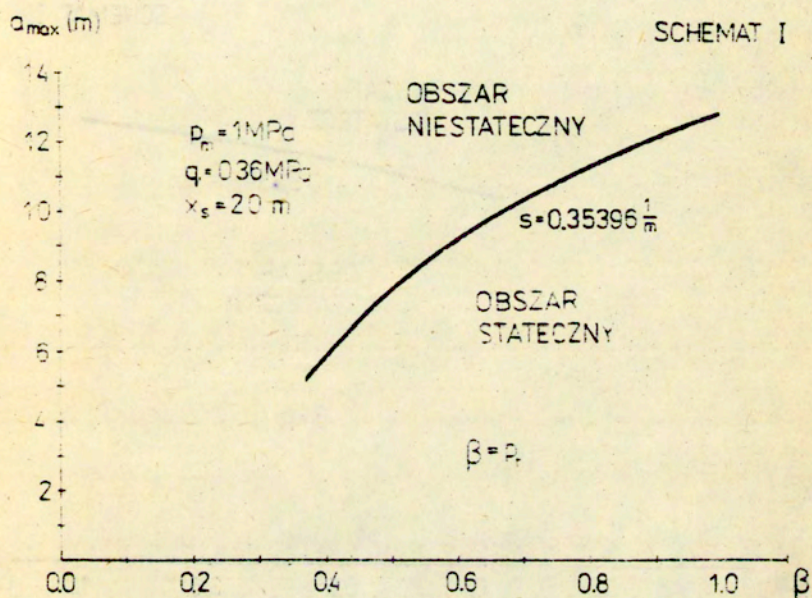
Rys. 31

SCHEMAT II

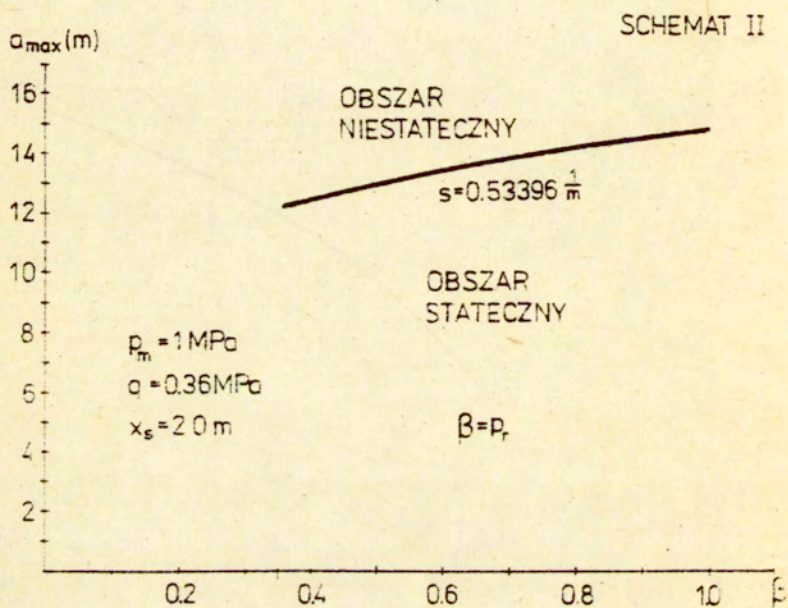


Rys. 35

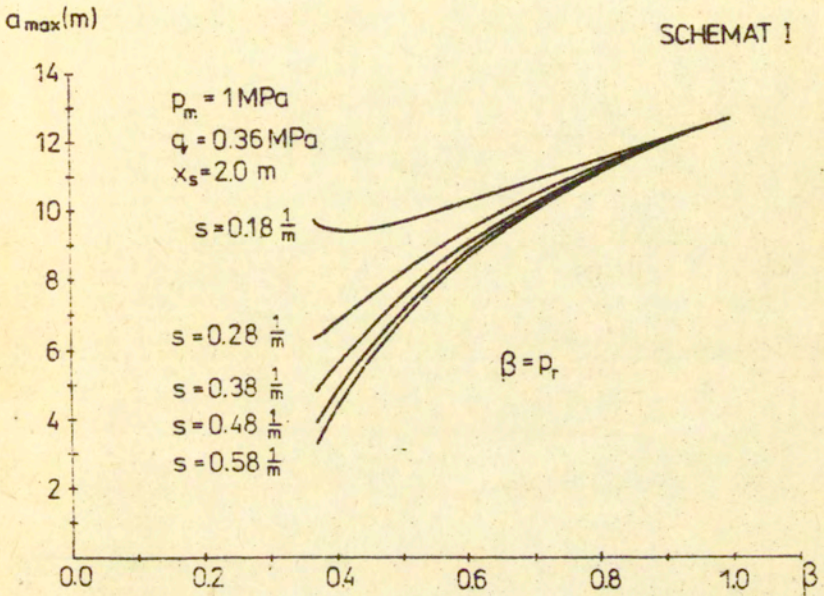
1: $s=0.18$,	$G=1.67E9 \text{ N/m}$,	$a_{gr}=9.44\text{m}$
2: $s=0.28$,	$G=6.89E8 \text{ N/m}$,	$a_{gr}=6.34\text{m}$
3: $s=0.38$,	$G=3.74E8 \text{ N/m}$,	$a_{gr}=4.68\text{m}$
4: $s=0.48$,	$G=2.34E8 \text{ N/m}$,	$a_{gr}=3.70\text{m}$
5: $s=0.58$,	$G=1.61E8 \text{ N/m}$,	$a_{gr}=3.07\text{m}$



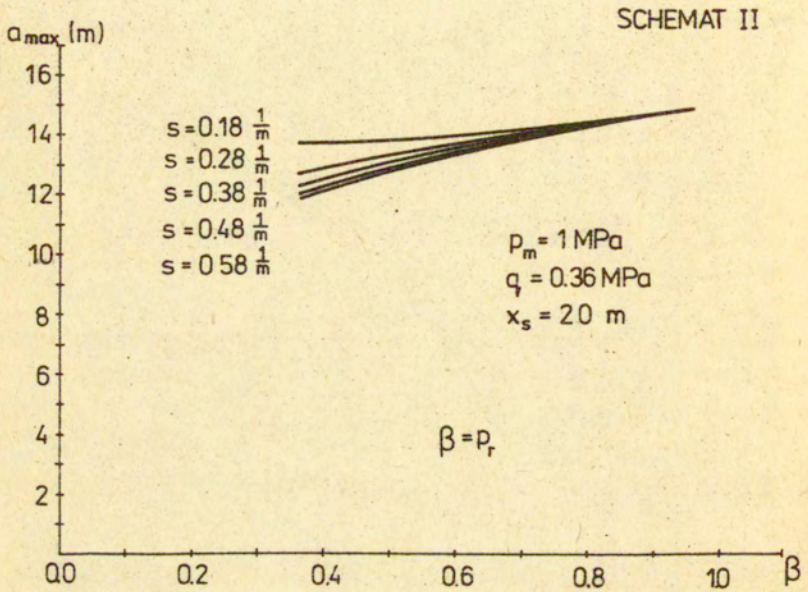
Rys. 36



Rys. 37

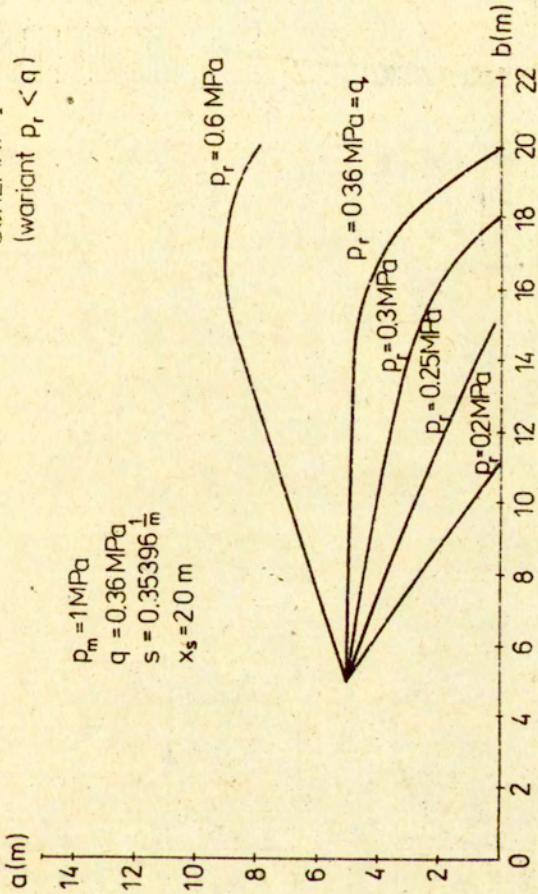


Rys. 38

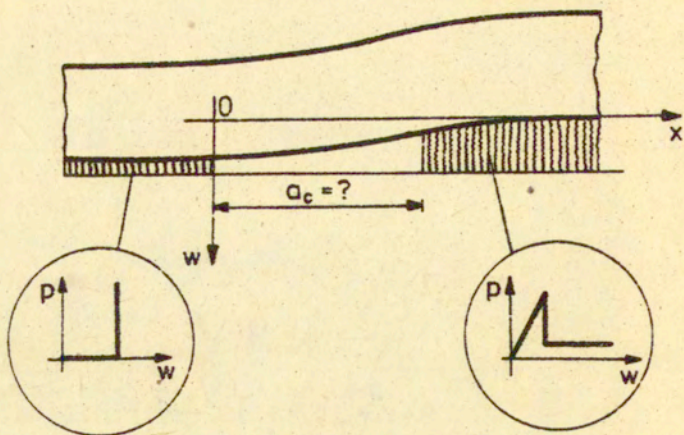


Rys. 39

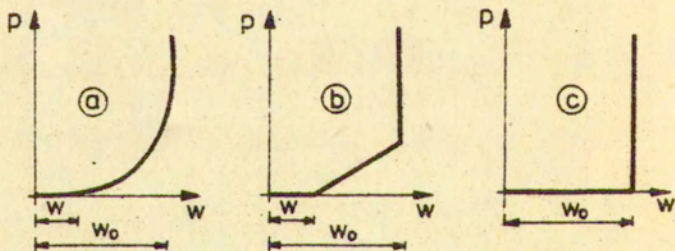
SCHEMAT I
(wariant $p_r < q$)



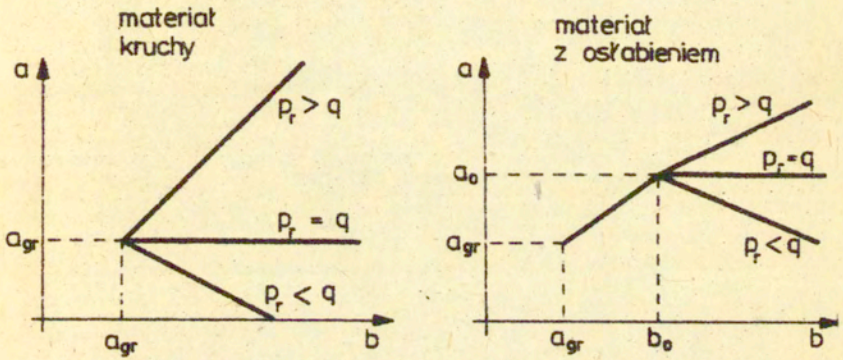
Rys. 40



Rys. 41



Rys. 42



Rys. 43

12. LITERATURA

- [1] A.A.GRIFFITH, The Phenomena of Rapture and Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc. A221, London, 1921
- [2] A.A.GRIFFITH, The Theory of Rupture, Proc. 1-st Int. Cong. Appl. Mech., Delft, 1924
- [3] E.OROWAN, Energy Criteria of Fracture, Welding Journal, 157-8, March 1955
- [4] G.R.IRWIN, Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, J. Appl. Mech., Vol.24, 1957
- [5] D.S.DUGDALE, Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol.8, 1960
- [6] G.I.BARENBLATT, Equilibrium Cracks in Brittle Solids, PMM 2,4,5 Vol. 23, 1956
- [7] A.HILLERBORG, A Model of Fracture Analysis, Publication of the Lund University of Technology, Lund, Sweden.
- [8] J.P.BERRY, Some Kinetic Considerations of the Griffith Criterion for Fracture, Part I and II, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, 1960
- [9] R.J.IZBICKI, Z.MRÓZ, Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, PWN, Warszawa 1976
- [10] W.NOWACKI, Teoria Sprężystości, PWN, Warszawa 1970
- [11] I.N.SNEDDON, Fourier Transforms, tłumaczenie rosyjskie: Preobrazowania Furje, Izd. Inostr. Lit., Moskwa, 1955
- [12] J.ZAWADA, J.SUPEL, Przybliżona metoda wyznaczania parametrów wytrzymałościowych skał, Rozpr. Inż. 22/1974
- [13] Z.MRÓZ, B.ZADROGA, Analiza nośności ściskanego pasma z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem, Prace IPPT, nr 8/1980
- [14] CZ.SZYMAŃSKI, Ściskanie pasma z materiału sprężysto-idealnie plastycznego Coulomba, Prace IPPT, nr 1/1984
- [15] P.G.RAMMERSTORFER, D.F.FISHER, Rock Bursting - A Nonlinear Dynamic Contact Problem. Proc. III-rd Int. Conf. on Num. Meth. in Geomech., Aachen 2-6 April 1979
- [16] SAŁUSTOWICZ, Tąpania w kopalniach, Wydawnictwo Śląskie, 1967
- [17] M.CHUDEK, Mechanika górotworu, Skrypty Uczelniane, Politechnika Śląska.

- [18] T.OZOG, Ugięcie stropu przy uwzględnieniu sił ścinających. Zeszyty Problemowe Górnictwa PAN, t.3, z.1, 1965
- [19] J.M.PIETUCHOW, Gornyje udary na ugołnych szachtach. Niedra. Moskwa, 1972
- [20] A.SALUSTOWICZ, Zarys mechaniki górotworu. Śląsk, Katowice, 1968.

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	3
2. Założenia	10
2.1. Założenia wyjściowe	10
2.2. Ugięcia belki przy uwzględnieniu czystego ścinania - - przypomnienie założeń	13
3. Ogólne rozwiązanie zagadnienia deformacji pasma późnie- kończącego	13
3.1. Schemat I - rozwiązanie podstawowe	13
3.1.1. Materiał kruchy	15
3.1.2. Materiał z osłabieniem	16
3.2. Schemat II	18
3.2.1. Materiał kruchy	20
3.2.2. Materiał z osłabieniem	21
3.3. Schemat III	23
3.3.1. Model mechaniczny materiału pasma	23
3.3.2. Równania równowagi	25
3.3.3. Mechanizm deformacji pasma, układy stref i fazy procesu	27
4. Pasma późniekończone - rozwiązanie spełniające warunki brzegowe i warunki zgodności	29
4.1. Schemat I	29
4.1.1. Materiał kruchy	29
4.1.2. Materiał z osłabieniem	31
4.2. Schemat II	35
4.2.1. Materiał kruchy	35
4.2.2. Materiał ulegający osłabieniu	36
4.3. Schemat III	39
4.4. Materiał z osłabieniem a materiał kruchy - spójność rozwiązań	42
5. Ogólne rozwiązanie zagadnienia deformacji pasma o skoń- czonej szerokości	43
5.1. Schemat I	43
5.2. Schemat II	44
5.3. Schemat III	44

6. Pasma o skończonej szerokości - rozwiązanie spełniające warunki brzegowe i warunki zgodności	56
6.1. Schemat I	56
6.2. Schemat II	58
6.3. Schemat III	58
7. Graficzna interpretacja rozwiązań	71
8. Warunki stateczności	73
9. Rozwiązanie kroczące - ruchomy punkt podparcia belki stropowej	79
10. Przykłady liczbowe	82
11. Wnioski	83
12. Literatura	118

STRESZCZENIE

W pracy przeprowadzono analizę deformacji zagłębionego pasma skalnego osłabionego istnieniem pustki o przekroju prostokątnym. Zastosowano trzy schematy modelowania układu pasmo - nadkład przyjmując kolejno: jednoosiowy model materiału pasma, model jednoosiowy z uwzględnieniem działania ciśnienia boczego oraz model dopuszczający powstanie strefy poślizgu na powierzchni kontaktu pasma z nadkładem. Zależności wyprowadzono uwzględniając jedynie czyste ścinanie w belce stropowej. Założono quazistatyczny przebieg procesu deformacji oraz nieodkształcalność podłoża. Szerokość występującej w paśmie pustki przyjęto za parametr sterowania określający ewolucję procesu. Na płaszczyźnie parametrów geometrycznych opisujących zachowanie się układu określono warunki statecznego przebiegu procesu eksploatacji materiału pasma. Wyznaczono krytyczną szerokość komory odpowiadającą chwili gdy układ traci stateczność. Dla trzeciego z przeanalizowanych schematów moment ten został uznany za moment inicjacji tąpnięcia. Przeprowadzono obliczenia numeryczne ilustrujące otrzymane rozwiązanie oraz badające jego wrażliwość na zmianę parametrów wytrzymałościowych modelu. Przedstawiono krzywe rozdzielające stateczne i niestateczne obszary zachowania się układu. Badano zarówno pasmo półnieskończone sąsiadujące z pojedynczą komorą chodnikową jak i pasmo o skończonej szerokości położone między dwiema komorami. Podstawowe zależności zostały wyprowadzone zarówno dla materiału kruchego jak i dla materiału z osłabieniem.