

4.4Z — ramy plastyczne,
nośność graniczna

18 / 1982

Włodzimierz Sosnowski

STATYCZNA ANALIZA
PŁASKICH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH
RAM DWUTEOWYCH
Z UWZGLĘDNIENIEM MOŻLIWOŚCI
LOKALNEGO WYBOCZENIA ŚRODNIKÓW

Praca doktorska

P. 269



WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Praca doktorska

Promotor doc.dr hab. Michał Kleiber

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 maja 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 18/1982



57056



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark. druk. 12. Ark. wyd. 7,7.

Oddano do drukarni w maju 1982 r.

Nr zamówienia 210/0/82 Z-108.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Sniadeckich 8

Włodzimierz SOSNOWSKI

Zakład Teorii Konstrukcji

IPPT - PAN

STATYCZNA ANALIZA PŁASKICH SPRĘŻYSTO - PLASTYCZNYCH
RAM DWUTEOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM MOŻLIWOŚCI LOKALNE-
GO WYBOCZENIA ŚRODNIKÓW

1. Wprowadzenie

1.1. Cel pracy

Konieczność oszczędzania materiałów konstrukcyjnych zmu-
sza do pełniejszego wykorzystania ich własności wytrzymałoś-
ciowych. Cel ten można osiągnąć z jednej strony poprzez coraz
lepsze poznawanie własności reologicznych materiałów, z dru-
giej zaś poprzez stosowanie coraz dokładniejszych metod obli-
czania konstrukcji.

Współczesne normy określające zasady projektowania skom-
plikowanych konstrukcji np. budowlanych, lotniczych lub okrę-
towych zawierają wiele wzorów o charakterze empirycznym, po-
nieważ inżynierowie są bezradni wobec potrzeby uwzględniania
ogromnej ilości nieznanych oddziaływań i stosują przy oblicze-
niach uproszczenia tak daleko idące, że ich sens fizyczny sta-
je się wątpliwy.

Do takich skomplikowanych układów konstrukcyjnych należą

statycznie niewyznaczalne, płaskie ramy dwuteowe będące przedmiotem niniejszej analizy. Stanowią one główny element nośny wielu budowli, statków i stąd realna ocena ich nośności stanowi problem o ogromnym znaczeniu praktycznym.

Pod wpływem obciążenia zewnętrzne elementy dwuteowe ram ulęgają różnym deformacjom. Obserwujemy lokalne wybożenia środków lub pólek, miejscowe uplastycznienia przekrojów lub części przekrojów itp. Wywołane tymi zjawiskami zmniejszenie się sztywności zdeformowanych elementów pociąga za sobą redystrybucję sił wewnętrznych w całej konstrukcji. Duży stopień statycznej niewyznaczalności sprawia, że zniszczenie następuje przy współczynniku obciążenia znacznie wyższym od obliczonego z rozwiązania sprężystego. Dlatego ważnym z punktu widzenia projektowania problemu jest badanie kolejnych etapów procesu deformacji po przekroczeniu fazy czysto sprężystej poprzez fazy sprężysto-plastyczne aż do zniszczenia ramy łącznie.

Dotychczasowy stan wiedzy pozwala określać z dużą dokładnością stan nośności granicznej, w którym konstrukcja traci zdolność do przenoszenia obciążeń i staje się układem geometrycznie zmiennym. Jeszcze do niedawna celowi temu służyła niemal wyłącznie teoria nośności granicznej w połączeniu z metodami programowania matematycznego, liniowego lub nieliniowego. Zarówno jednak rozwiązania zupełne, spełniające warunek statycznej i kinematycznej dopuszczalności, jak i rozwiązania przybliżone uzyskiwane na gruncie tej teorii pozwalają jedynie obliczyć współczynnik obciążenia niszczonego. Metoda rozwiązań sprężystych, polegająca na kolejnym zmniejszeniu statycznej

niewyznaczalności układu poprzez umieszczanie w konstrukcji coraz większej liczby przegubów plastycznych w najbardziej naprężonych przekrojach, umożliwia wprawdzie śledzenie mechanizmu zniszczenia spowodowanego narastającym obciążeniem, ale z uwagi na trudności rachunkowe może być stosowana jedynie dla bardzo prostych ram.

Na podobne ograniczenia napotykamy usiłując rozwiązać zagadnienie lokalnego wyboczenia środników. Możemy znaleźć rozwiązanie dzięki teorii stateczności sprężystej oraz teorii wyboczenia sprężysto-plastycznego w przypadku uproszczonych warunków brzegowych i dla stosunkowo prostych ram. Analiza wymagająca znajomości sił wewnętrznych i deformacji we wszystkich przekrojach jest jednak tradycyjnymi metodami w przypadku skomplikowanych ram praktycznie niemożliwa.

Szybki rozwój maszyn cyfrowych spowodował zmiany metod syntezy i analizy konstrukcji polegające na rozwijaniu dwu pokrewnych dziedzin : metod numerycznych oraz programowania komputerowego. W ciągu ostatnich 20 lat powstała bogata literatura i bardzo wiele programów obliczeniowych pozwalających rozwiązywać coraz trudniejsze zagadnienia mechaniki i teorii konstrukcji. Najbardziej popularnym podejściem stała się w ostatnich latach metoda elementów skończonych. Jej zastosowania obejmują szeroki zakres dziedzin od analizy naprężeń w konstrukcjach inżynierskich do akustyki, fizyki neutronowej czy dynamiki przepływów. W szczególności metoda umożliwia skuteczne rozwiązywanie takich zagadnień, jak całkowanie numeryczne, problem własności własnych, rozwiązywanie dużych

układów równań liniowych przy jednoczesnym racjonalnym wykorzystaniu hierarchicznego układu pamięci maszyny cyfrowej i minimalizacji potrzebnej ilości obliczeń.

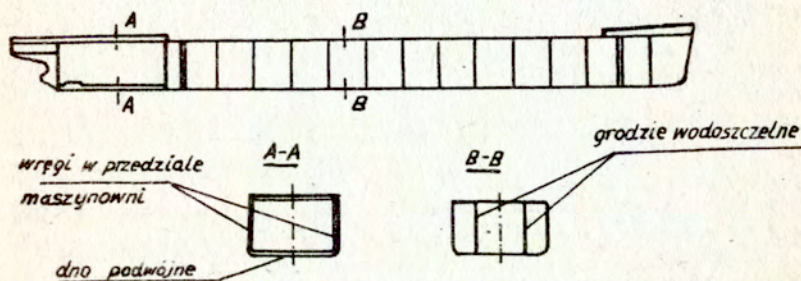
Jeśli do zalet tych dodamy prostotę fizycznej interpretacji metody elementów skończonych jako procesu aproksymacji kontinuum o nieskończonej liczbie stopni swobody poprzez zbiór podobszarów z wyróżnioną skończoną liczbą stopni swobody, to zrozumiała stała się popularność tego podejścia wśród inżynierów traktujących dyskretyzację badanego układu konstrukcyjnego jako modyfikację znanych od dawna, tradycyjnych sposobów analizy polegających również na podziale skomplikowanych konstrukcji na prostsze a następnie łączeniu ich poprzez równania równowagi i warunki ciągłości. Podstawowy cel pracy zrealizujemy wykorzystując tę metodę.

Wspomnieć trzeba też o innych metodach numerycznych służących do macierzowej analizy konstrukcji, omówionych np. we wstępie do pracy [87]. Podlegają one również procesowi udoskonalenia, ale jak na razie ustępują wyraźnie metodzie elementów skończonych uniemożliwiając w szczególności zastosowanie opracowywanych przy ich pomocy programów do szerszej klasy konstrukcji i zagadnień.

1.2. Zakres pracy

W pracy analizuje się dowolne układy belek dwuteowych tworzących ramy płaskie. Podstawowe założenia wynikają z zainteresowań przemysłu okrętowego, którego potrzeby stanowiły inspirację do podjęcia niniejszego tematu. Dlatego główny

nacisk położono na zjawiska charakterystyczne dla zachowania się dwuteowych ram, stanowiących usztywnienia kadłuba okrętu.



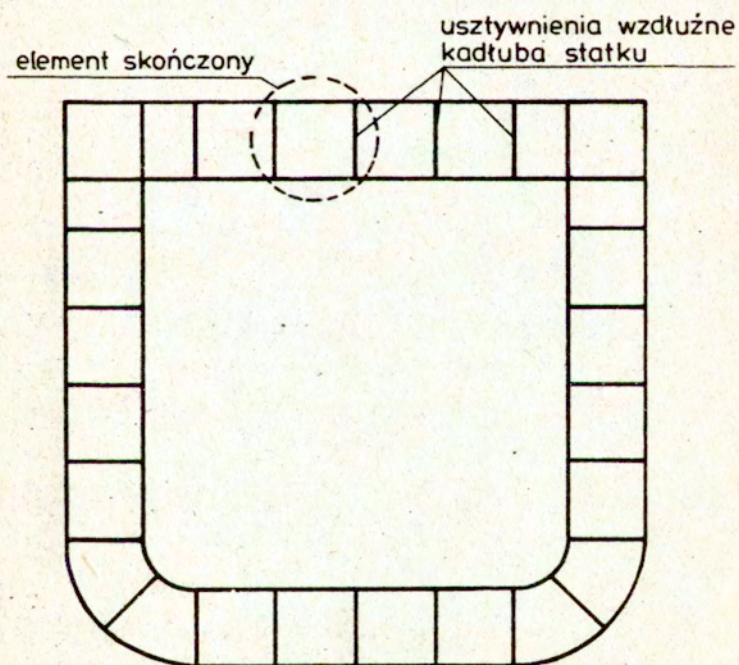
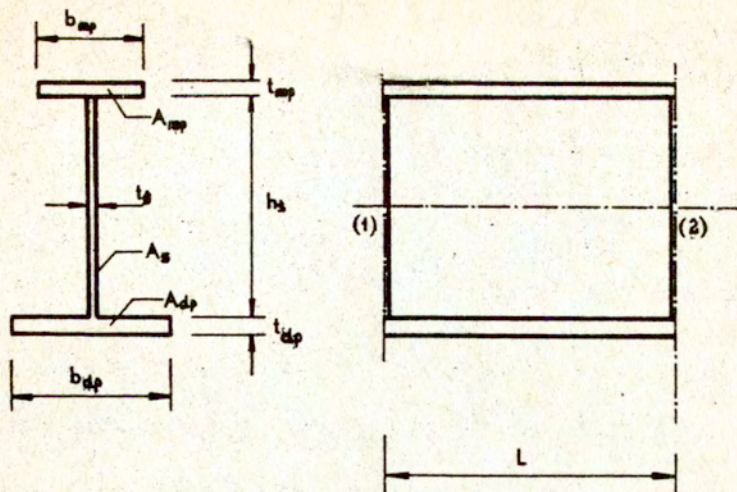
Rys. 1.1. Schemat wewnętrznego podziału kadłuba tankowca długości $L = 215$ m

Ramy takie - a szczególnie wręgi poprzeczne w ładowniach i w przedziałach maszynowni tankowców pokazane na przekroju A-A, rys. 1.1., charakteryzują się wysokim i wiotkim średnikiem, który stosunkowo łatwo traci stateczność. Z drugiej strony pozostałe usztywnienia kadłuba statku zapewniają wręgom poprzecznym globalną stateczność i utrzymują je w płaszczyźnie zładu poprzecznego. Stąd towarzystwa klasyfikacyjne skłonne są dopuszczać pewne niewielkie wyboczenia i uplastycznienia, lecz decyzje o modyfikacji odpowiednich przepisów muszą być poprze-

dzzone głębszą analizą wytrzymałości wręgów. Wymieniony powyżej warunek zachowania globalnej stateczności oznacza przy tym z założenia, że rozpatrywana rama płaska nie może wyboczyć się, gdyż zapobiegają temu inne usztywnienia. Możliwa jest jedynie utrata stateczności części środniaka ramy zawartej pomiędzy dwoma usztywnieniami wzdłużnymi kadłuba statku (rys.1.2.).

W pracy rozpatruje się zagadnienie quasistatyczne, tzn. zakłada się, że obciążenia narastają powoli i efekty dynamiczne można pominąć. Uwzględnia się sprężysto-idealnieplastyczne własności materiału. Siłami wewnętrznymi występującymi jako argumenty w warunkach wytrzymałościowych są: moment zginający, siła poprzeczna oraz siła podłużna. Rama niszczy się w wyniku wyczerpania jej nośności, dochodząc do tego stanu na drodze kolejnych lokalnych uplastycznień i wyboczeń. Zakładamy, że nie dochodzi do zniszczenia kruchego ani do globalnej utraty stateczności. Sprężysto-plastyczną analizę uwzględniającą możliwość lokalnego wyboczenia środniaka przeprowadza się wykorzystując nieliniowe sformułowanie metody elementów skończonych w wersji tzw. zmiennej sztywności, teorię stateczności sprężystej, teorię wyboczenia sprężysto-plastycznego oraz teorię nośności granicznej. Krótkie omówienie najważniejszych prac w tych dziedzinach w ujęciu historycznym oraz bardziej szczegółowe przedstawienie prac wykorzystanych w niniejszej analizie zawiera podpunkt 1.3.

W rozdziale 2 omawiamy dokładnie założenia oraz wynikającą z uwag zawartych w rozdziale 1 koncepcję analizy. Definiujemy określone stany zachowania się elementu skończonego ramy i



Rys. 1.2

przedstawiamy algorytm postępowania, na podstawie którego dokonywać będziemy numerycznej analizy rozpatrywanej klasy ram sprężysto-plastycznych.

Następne trzy rozdziały dotyczą podstaw teoretycznych i niektórych szczegółów wybranego algorytmu obliczeń. Rozdział 3 zawiera informacje o wybranym wariantcie metody elementów skończonych i o systemie liniowej analizy statyki konstrukcji WAT-KM opracowanym przez zespół autorów z Wojskowej Akademii Technicznej. System ten został wzbogacony o część nieliniową na podstawie algorytmu przedstawionego w niniejszej pracy.

W rozdziale 4 koncentrujemy uwagę na macierzowym sformułowaniu teorii plastycznego płynięcia dla konstrukcji ramowych. Omawiamy warunki stanu granicznego dla monosymetrycznego przekroju dwuteowego poddanego zginaniu, ścinaniu oraz rozciąganiu lub ściskaniu, a następnie wyprowadzamy macierze sztywności sprężysto-plastycznej dla elementu skończonego.

W rozdziale 5 zajmujemy się określeniem warunków sprężystego lokalnego wyboczenia środników, macierzowym opisem zachowania się elementu skończonego po utracie stateczności i kryteriami utraty nośności powyboczeniowej.

Dwie wersje programu numerycznego, jedna przeznaczona wyłącznie do analizy sprężysto-plastycznej i druga - uwzględniająca zagadnienie lokalnego wyboczenia środnika oparte zostały na systemie liniowej analizy statyki konstrukcji WAT-KM.

Takie podejście umożliwiło uzyskanie lepszych efektów końcowych i pozwoliło skoncentrować się wyłącznie na teoretycz-

nych podstawach nieliniowej analizy ram oraz implementacji równań macierzowych do systemu WAT-KM.

Opis obydwu wersji programu numerycznego znajduje się w rozdziale 6. Modyfikacje istniejącego systemu analizy liniowej polegały zasadniczo na:

- umożliwieniu tzw. analizy przyrostowej,
- uwzględnieniu zjawisk związanych z lokalnym wyboczeniem środka poprzez wprowadzenie odpowiednich warunków wytrzymałościowych i powyboczeniowych macierzy sztywności elementów,
- wprowadzeniu odpowiednich elementowych macierzy sztywności, uwzględniających niesprężyste własności materiału belek,
- dokonywaniu dodatkowych obliczeń właściwych zastosowanej teorii /sprawdzenie stanu granicznego, akumulacje wielkości przyrostowych/.

W rozdziale 7 zamieszczono przykłady obliczeń dokonanych za pomocą obydwu wersji programu oraz porównano uzyskane wyniki z rozwiązaniami analitycznymi, a także z wynikami uzyskanymi w kilku ośrodkach badawczych za granicą na drodze eksperymentów lub przy pomocy podobnych programów numerycznych.

1.3. Przegląd literatury

Trudności matematyczne związane ze śledzeniem całego procesu zachowania się konstrukcji pod działaniem narastających oddziaływań zewnętrznych, poczynwszy od stanu idealnie sprężystego poprzez stany sprężysto-plastyczne aż do stanu wyczerpania nośności sprawiły, że jeszcze w 1965 r., por [82], panowała opinia, że możliwości uzyskiwania na tej drodze rozwiązań

konkretnych problemów inżynierskich są bardzo ograniczone. Sytuacja ta zmieniła się radykalnie i od tego czasu, szczególnie w ciągu ostatnich piętnastu lat, opublikowano wiele prac, a nawet monografie omawiających zarówno podstawy teoretyczne jak i aspekty numeryczne problematyki analizy przyrostowej konstrukcji. Ponieważ zagadnienie stanowiące temat niniejszej pracy dotyczy kilku dynamicznie rozwijających się w ostatnich latach dziedzin nieliniowej mechaniki konstrukcji, poniższy przegląd prac podzielimy na dwie grupy:

- a/ prace dotyczące teorii plastyczności oraz teorii nośności granicznej szczególnie w aspekcie analizy konstrukcji prętowych i badania warunku stanu granicznego dla przekrojów cienkościennych,
- b/ prace na temat wyboczenia sprężystego, sprężysto-plastycznego oraz analizy powyboczeniowej wiotkich płyt pracujących w warunkach zbliżonych do warunków pracy środnika rozpatrywanych ram dwuteowych.

Uwagę skoncentrujemy na pracach, w których wykorzystano podejście numeryczne do rozwiązywania zbliżonych zagadnień. Ponieważ nie wydzielamy w oddzielnej grupie literatury poświęconej metodom numerycznym, podamy na końcu kilku podręczników i prac posiadających fundamentalne znaczenie dla rozwoju metody elementów skończonych.

Ad a/ Teoria plastyczności, zapoczątkowana w 1870 roku pracami B.de Saint-Venanta i M.Levy, a następnie rozwinięta przez M.T.Hubera, R.v Misesa, H.Hencky'ego, Th.v Karmana i innych zaliczana jest już obecnie do klasycznych dyscyplin

lin naukowych. Poświęcono jej szereg podstawowych monografii i kilkanaście podręczników, z których można wymienić np. [49], [82], [136].

W związku z szybkim rozwojem innych dziedzin mechaniki nieliniowej, jak teoria stateczności sprężystej, metody numeryczne czy programowanie komputerowe, można znaleźć także podręczniki z pogranicza wyżej wymienionych dyscyplin, jak [28], [80], [84], [87], [97].

Stanowią one dowód postępu, jaki dokonał się w sposobie projektowania najróżniejszych konstrukcji inżynierskich dzięki połączeniu teorii plastyczności z metodami komputerowymi.

Przegląd prac dotyczących podstaw teorii plastyczności oraz wiele rozwiązań różnych zagadnień związanych z wykorzystaniem tej teorii można znaleźć w [24]. Podobny charakter posiada obszerna monografia [136], w której autor systematyzuje podstawowe pojęcia teorii obciążeń złożonych oraz daje przegląd metod rozwiązywania problemów sprężysto-plastycznych i nośności granicznej.

Zarówno sprężysto-plastyczna analiza belek stanowiących w myśl naszych założeń elementy skończone rozpatrywanych ram płaskich, jak i problem wyboczenia środnika wiążą się ściśle z teorią belek. Dwie główne teorie belek, które stanowić mogą podstawę naszych rozważań nad zachowaniem się elementu skończonego ramy, teorię Eulera-Bernoulliego oraz teorię Timoshenki można znaleźć np. w [34], [84], [114].

Wysokie środniki belek o przekrojach dwuteowych narażone

są na duże deformacje wywołane siłami tnącymi. Teoria Timoshenki uwzględnia te deformacje bezpośrednio, zaś teoria Bernoulli'ego pozwala określić je pośrednio za pomocą odpowiedniego współczynnika $\bar{\nu}$. Ze względu na prostotę w pracy wykorzystamy teorię Bernoulli'ego.

Dwa główne algorytmy pozwalające rozwiązać problem sprężysto-plastycznego zachowania się belki metodą elementów skończonych podaje wymieniona już uprzednio praca /84/.

1. Podejście uwzględniające stopniowe uplastycznienie się kolejnych włókien /pasm/ belki dwuteowej traktowanych jako oddzielne elementy skończone. Metodę tę przedstawiono bardziej szczegółowo w pracach /35/, /84/, /36/, /70/. Ostatnia z wymienionych jest uzupełniona efektywnym programem numerycznym i była wykonywana w IPPT - PAN. Podejście to nie zostało wykorzystane w niniejszej pracy ze względów praktycznych, podyktowanych między innymi rozmiarami rzeczywistych konstrukcji ramowych i wynikającymi stąd ograniczeniami odnośnie złożoności elementów skończonych.
2. Podejście zakładające, że cały przekrój belki uplastycznia się jednocześnie. Było już ono wielokrotnie stosowane w nieliniowej analizie konstrukcji prętowych /12/, /18/, /53/, /96/ i opiera się na metodach wywodzących się z metody przemieszczeń i metody sił, a wykorzystujących teorię nośności granicznej i prawa konstytutywne teorii plastycznego płynięcia. Podejście to stanowi niestety uproszczenie w stosunku do kryjącego w sobie większe możliwości podejścia pierwszego.

Ogólne, formalne przedstawienie teorii nośności granicznej można znaleźć w /49/, /82/, /84/. Grupa prac /1, 2, 41, 48/ poświęcona jest badaniu warunków plastyczności za pomocą metod programowania matematycznego. Uproszczone ujęcie, uwzględniające wyłącznie "nośność na zginanie" ram płaskich z pominięciem wpływu sił podłużnych i poprzecznych, zawierają prace /96/, /97/. Wyniki obliczeń nośności ram uzyskane w /96/, /117/ posłużyły do weryfikacji opracowanego programu numerycznego.

Najważniejszy problem stanowi w teorii nośności granicznej znalezienie warunku stanu granicznego przekroju poprzecznego, odpowiadającego utworzeniu się tzw. uogólnionego przegubu plastycznego. Zgodnie z opinią wyrażoną w literaturze /76/, /82/, /50/, rozwiązania zamknięte dla rozważanego przez nas przypadku obciążeń nie są nawet dla stosunkowo prostych, np. okrągłych lub kwadratowych profili, możliwe. Przybliżone metody znajdowania warunku stanu granicznego przedstawiono dla nieskomplikowanych przekrojów pełnościennych i dwuteowników bisymetrycznych w pracach /9/, /21/, /49/, /65/, /136/. Odnoszą się one jednak wyłącznie do przypadków zginania, zginanie z rozciąganiem i zginanie ze ścinaniem i oparte są na podstawowych twierdzeniach teorii nośności granicznej o obciążeniach statycznie dopuszczalnych /bezpiecznych/ oraz kinematycznie dopuszczalnych /niebezpiecznych/.

Problem uplastycznienia przekroju dwuteowego próbowano także rozpatrywać w ramach teorii prętów cienkościennych /106/, /111/, /131/, /128/. Rozważania wynikające z tej teorii prowadzą jednak do bardzo skomplikowanych wyrażeń, kłopotliwych z punktu

widzenia zastosowań numerycznych.

W bardzo wielu pracach proponowane są różne inne podejścia przybliżone, oparte bądź na założeniach polegających na przyjmowaniu uproszczonego rozkładu naprężeń pochodzących od różnych sił wewnętrznych, bądź też na wynikach badań eksperymentalnych. W pierwszym przypadku brane są najczęściej pod uwagę jedynie dwie siły przekrojowe i rozważa się nieomal wyłącznie przekroje bisymetryczne /15/, /21/, /22/, /103 - 106/. Wyjątek stanowią w tej grupie prace /19/, /120/. Obydwie dotyczą analizy nośności granicznej monosymetrycznych przekrojów dwuteowych ram okrętowych obciążonych momentem zginającym, siłą podłużną i siłą poprzeczną. Wyniki tych prac, zbliżone pomimo zasadniczych różnic w podejściu, zostały wykorzystane w niniejszej analizie i dlatego prace te zostaną dokładniej omówione w rozdziałach 4 i 5.

W drugim przypadku autorzy ograniczają rozważania do dwu sił przekrojowych proponując różne wzory empiryczne, np./27/

$$\left(\frac{M}{M_{gr}}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_{gr}}\right)^2 - \left(\frac{M}{M_{gr}}\right)^2 \propto \left(\frac{V}{V_{gr}}\right)^2 = 1$$

w którym \propto jest współczynnikiem przyjmowanym w zależności od wymiarów dwuteownika.

W większości tych prac /21/, /22/, /79/, /81/, /104/, /117// zakładane jest wystąpienie naprężeń ścinających jedynie w środku, ponieważ uwzględnienie ścinania w półkach prowadzi do znacznych błędów zawiązując nośność badanych przekrojów. Warunek graniczny jest przy tym wyprowadzany na ogół, por. /50/, /90/, z hipotezy Biezuchowa o granicznym momencie zgi-

nającym dla przekroju prostokątnego przy parabolicznym rozkładzie naprężeń stycznych.

Ad.b/ Literatura dotycząca stateczności łożysk dwuteowych traktowanych zgodnie z przyjętymi w rozdziale 5 założeniami jako cienkie płyty, jest bardzo obszerna. Zagadnienie to badało wielu uczonych otrzymując już pod koniec XIX wieku ścisłe rozwiązania równania różniczkowego powierzchni wybożenia płyty oraz przybliżone wartości sił krytycznych za pomocą podejścia energetycznego dla wielu prostych przypadków obciążeń płyt, np. dla prostego ściskania, prostego ścinania, dla przypadku brzegów swobodnie podpartych. Pierwsze prace z tej dziedziny, wykorzystujące spostrzeżenie L. Eulera, opublikowali między innymi Saint Venant, G.R. Kirchhoff, G.H. Bryan, A.E.H. Love, J.H. Michell, S. Timoshenko, a także M.T. Huber, por. /28/, /51/, /94/, /114/. Zapoczątkowali oni rozwój liniowej teorii wybożeniowej, która leży u podstaw obowiązujących obecnie w Polsce norm /91/. Teoria ta umożliwia obliczenia obciążenia, przy którym początkowo idealnie płaska płyta nagle wybacza się, przy założeniu bardzo małych ugięć, pozwalających pominąć odkształcenia powstające po wybożeniu płyty w jej płaszczyźnie środkowej. Rozwiązano także przy jej pomocy problem stateczności płyt wzmocnionych żebrami /62/, /63/, /15/, /30/, /114/. Okazało się jednak, że dla bardziej złożonych warunków brzegowych zbliżonych do warunków pracy łożysk dwuteowych i ram dwuteowych rzeczywistych konstrukcji nie tylko

ściśle podejście wzorowane na pierwszym rozwiązaniu Eulera, ale i przybliżone metody energetyczne prowadzą do bardzo skomplikowanych wyrażeń /32/ , /114/. Dlatego w praktyce wielu autorów zaleca stosowanie warunków sprężystego wybożenia środka w postaci uproszczonych równań opisujących pewną powierzchnię stanów krytycznych w przestrzeni sił uogólnionych działających w środku rozpiętości belki dwuteowej, lub na jej końcach /120/, /113/. Podejście takie jest szczególnie zalecane w przypadku analizy numerycznej, kiedy to stosunkowo łatwo można śledzić zmiany sił uogólnionych w dowolnie wybranych przekrojach całej konstrukcji. Metody numeryczne wykorzystywane są również przy obliczeniu warunków wyboczeniowych wg. podejścia energetycznego /66/ , /56/, /28/. Nieliczne prace podejmujące ten temat ograniczają się jednak do przypadków płyt swobodnie podpartych na wszystkich krawędziach i zakładają stałość naprężeń wzdłuż wysokości przekroju. Założenie takie nie jest oczywiście nigdy spełnione, szczególnie w przypadku krótkich dwuteowników o silnie zmiennym polu naprężeń. Ze względu na bardzo istotne ograniczenie związane z w/w założeniem o pomijalności deformacji występujących w płaszczyźnie środkowej, liniowa teoria wyboczeniowa nie daje żadnych informacji o zachowaniu się płyt po utracie stateczności. Tymczasem liczne doświadczenia wykazały, że wybożona cienka płyta w przeciwieństwie do pręta ściskanego może przejąć znacznie większe obciążenie niż to, przy którym rozpoczyna się wyboczenie. Bardzo obszernie opracował

to zagadnienie Timoshenko /113/ rozważając szczegółowo różne przypadki płyt wycięzonych powyżej granicy proporcjonalności. W w/w pracy, a także w pracach /15/, /61/ można znaleźć zestawienie nieliniowych teorii wybojeniowych, opisujących nieliniowe geometrycznie i materiałowo zachowanie się płyt. Szczególną rolę odgrywają w obszernej literaturze na ten temat prace poświęcone badaniom eksperymentalnym, np. /29/, /47/, /62/, /89/, /90/, /100/. Wyniki tych badań pozwoliły uwzględnić zjawiska nieliniowe w normach szeregu krajów, które dopuszczają wykorzystanie wytrzymałości wybojonych płyt wszędzie tam, gdzie ciężar ma pierwszorzędne znaczenie. Należy zaznaczyć, że ponieważ dokładne obliczenia uwzględniające wpływ możliwie wielu czynników są bardzo trudne, autorzy prac poświęconych nieliniowym teoriom wybojeniowym wprowadzają różne modele uproszczone /47/, /61/, /51/, /67/, /85/, /93/ /pominięcie pewnych sił, wprowadzenie współczynników o charakterze empirycznym, przyjęcie założeń o uproszczonych sposobach podparcia itp ./.. Bliskie ścisłego podejścia są badania opisane w pracy /114/, w których ugięcia wyliczone są z warunku minimum energii sprężystej płyty i definiowana jest efektywna szerokość płyty ściskanej po wybojeniu. Uproszczenia polegające na założeniu, że odkształcenia postaciowe znikają na brzegu płyty wprowadzono w pracy /72/. Istotę podejścia wg teorii dużych ugięć, której dotyczy ta praca, a także prace /26/, /65/ jest przyjmowanie pewnych funkcji ugięć spełniających

brzegowe warunki podparcia. Nawet dla najprostszych warunków brzegowych trzeba jednak w tym przypadku dokonywać bardzo złożonych obliczeń. Dlatego dalsze uproszczenia polegają na ogół na przyjmowaniu równomiernego rozkładu naprężeń w powyboczeniowym przekroju efektywnym, obliczanym również w zależności od tego, czy siła poprzeczna jest większa, czy mniejsza od siły poprzecznej wywołującej wyboczenie przy czystym ścinaniu. Takie podejście, oparte na doświadczeniach opisanych w pracy /114/ stosują między innymi autorzy w /112/, /120/, /122/. Prace te wykorzystujemy w naszej analizie i dlatego szczegółowo omówimy je w rozdziale 5.

Chcąc głębiej wniknąć w problem zniszczenia elementu skończonego rozpatrywanych ram szczególnie dokładnie należałoby zbadać zagadnienie wyboczenia sprężysto-plastycznego. W istocie ze zjawiskiem tym mamy zawsze do czynienia, w przypadku jakichkolwiek zniszczeń.

Analizując problem już na szczeblu punktu wg klasyfikacji obciążeń złożonych wprowadzonej w /136/ musimy skoncentrować uwagę na funkcji $E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, gdzie E_t oznacza moduł styczny. Niewielki błąd przy aproksymacji funkcji $\sigma = f(\varepsilon)$ może powodować znaczną różnicę modułów stycznych, a co za tym idzie znaczny błąd przy określaniu obciążeń krytycznych. Ponieważ zaś zawsze mamy do czynienia z niewielkimi odkształceniami plastycznymi, powyższe zagadnienie może być źródłem zasadniczych błędów całej analizy wyboczeniowej. Zagadnieniem tym zajmowano się między innymi w pracy /133/. Wykorzystując zjawisko wyboczenia sprężysto-

-plastycznego można również podważyć zasadę zeszywnienia, czyli pominięcia wpływu zmian geometrii układu na nośność graniczną /85/. Jeśli przejdziemy do porządku dziennego nad powyższymi uwagami, to wyłania się problem analizy zjawiska na szczelbu ciała. Teoria powierzchni granicznych w przestrzeni czynników wyłączenia na szczelbu ciała /elementu skończonego/ jest bardzo mało zbadana /136/ i założenia upraszczające przyjęte w przypadku określenia powierzchni krytycznej dla wyboczenia sprężystego mogą być zupełnie nieuzasadnione przy badaniu wyboczenia sprężysto-plastycznego. Tym niemniej w pracach /50/, /106/, /120/ podjęto rozważania nad sprężysto-plastycznym wyboczeniem łożyska belek o przekroju dwuteowym, opierając je głównie na doświadczeniach. Ostatnia z wymienionych stanowi próbę uwzględnienia wszystkich trzech sił przekrojowych: siły wzdłużnej, siły poprzecznej oraz momentu zginającego. Jej wyniki wykorzystamy w naszej analizie.

Szybki rozwój metody elementów skończonych zapoczątkowały prace Turnera /71/, /115/, Argyrisa /7/, /4/, Zienkiewicza /135/, a w Polsce - Szmeltera /110/. Zastosowania metody rozszerzano na coraz trudniejsze zagadnienia mechaniki liniowej, a następnie - nieliniowej. Nieliniowości materiałowe zaczęto badać tą metodą w pracach /6/, /7/, /71/, zaś nieliniowości geometryczne w pracy /6/. Przegląd literatury z tej dziedziny można znaleźć w /57/, /42/.

Podręcznikiem uwzględniającym podejście numeryczne w analizie problemów stateczności jest między innymi /28/.

Można w nim znaleźć wiele innych, nie wymienionych w grupie b prac na temat lokalnego i globalnego wyboczenia płyt, prętów i konstrukcji wytężonych powyżej granicy proporcjonalności.

2. Podstawowe założenia oraz koncepcja analizy

2.1. Podstawowe założenia

W pracy analizuje się dowolne układy belek dwuteowych, tworzących ramy płaskie. Obliczeń dokonuje się za pomocą metody elementów skończonych. Metoda ta wymaga dokonania podziału ramy na elementy. Za element skończony ramy przyjmować będziemy zasadniczo odcinek prostej belki dwuteowej, odpowiadający odległości między kolejnymi usztywnieniami wzdłużnymi kadłuba statku i stanowiącymi jednocześnie poprzeczne usztywnienia środnika, rys. 1.2. W szczególnych przypadkach długość elementu dobierać można inaczej kierując się:

- wymaganiami dokładności obliczeń,
- innymi geometrycznymi i mechanicznymi cechami układu oraz sposobem i miejscem przyłożenia obciążeń.

Przyjmujemy, że modelowe zachowanie układu elementów zgodne jest z pewnymi założeniami idealizującymi zachowanie ramy rzeczywistej. Założenie to wymienimy kolejno poniżej:

1. Wydzielone elementy są jednorodne i przyzmatyczne - wprowadza to konieczność gęstszej podziału w przypadku belek nie spełniających tych założeń,
2. Obciążenia przyłożone są wyłącznie w węzłach - w przypadku

obciążeń rozłożonych w sposób ciągły należy zastąpić je obciążeniami skupionymi w odpowiednio gęsto wprowadzonych węzłach,

3. Materiał konstrukcji wykazuje cechy sprężysto - idealnie plastyczne,
4. Rozpatrywane zagadnienie ma charakter płaski tj. wykluczamy deformacje typu "z płaszczyzny" konstrukcji - w warunku tym ukryte jest założenie o pokrywaniu się jednej z płaszczyzn głównych przekrojów poprzecznych belek z płaszczyzną układu,
5. Półki belek dwuteowych nie doznają wybočenja w trakcie całego procesu,
6. Możliwość lokalnego wybočenja środka belki charakteryzowana jest warunkiem

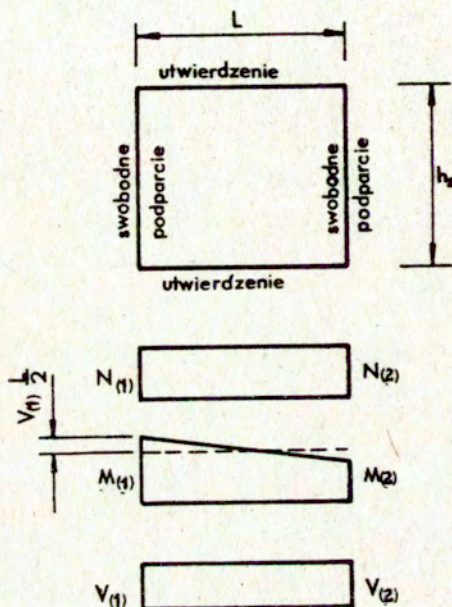
$$12.1./ \quad F_{kr}(\underline{Q}^s(\bar{\alpha})) = 0, \quad \bar{\alpha} = 1, \dots, L_e$$

w którym $\underline{Q}^s(\bar{\alpha})_{3 \times 1}$ jest wektorem uogólnionych sił wewnętrznych w środkowym przekroju $\bar{\alpha}$ -tej belki /elementu/ zaś L_e oznacza liczbę elementów. W zagadnieniach wybočenja zakładamy dodatkowo uproszczony opis stanu naprężenia, panującego w elemencie oraz odpowiednio uproszczone kinematyczne warunki brzegowe, por. rys.2.1.

7. Utworzenie się uogólnionego przegubu plastycznego, w α -tym przekroju przywęzłowym belki warunkowane jest spełnieniem równania typu

$$12.2./ \quad F_{pl}(\underline{Q}(\alpha, k)) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, L_p$$

$k = 1, 2$
 $L_p = 2L_e$



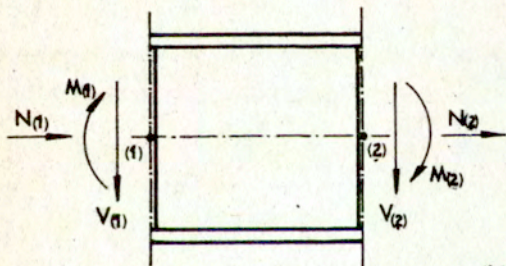
Rys. 2.1.

gdzie $\bar{Q}(\alpha, k)$ 3×1 jest wektorem uogólnionych sił wewnętrznych w α - tym przekroju na lewym $/k=1/$ lub prawym $/k=2/$ końcu elementu $\bar{\alpha}$, zaś L_p oznacza liczbę przekrojów przywęzłowych. Warunek ten odpowiada uplastycznieniu całego rozpatrywanego przekroju, tj. spełnieniu warunku jego nośności granicznej.

8. Siłami wewnętrznymi występującymi jako argumenty w warunkach wyboczeniowych /2.1/ oraz nośności granicznej /2.2/ są: moment zginający M , siła poprzeczna V oraz siła podłużna N tj: w przekroju k -tym, por. rys. 2.2.

$$/ 2.3 / \quad \underline{Q}(k) = \{ N(k), V(k), M(k) \} \quad k = 1, 2$$

Symbol $\{ \}$ oznacza wektor kolumnowy. Dla przejrzystości we wzorze 2.3 oraz we wszystkich innych wzorach w dalszej części pracy pomijamy indeksy oznaczające kolejny numer rozpatrywanego przekroju belki w całej ramie wszędzie tam, gdzie nie spowoduje to nieporozumień.



$$\underline{Q}^{(1-2)} = \{ \underline{Q}(1) \quad \underline{Q}(2) \}_{6 \times 1}$$

$$\underline{Q}(1) = \{ N(1) \quad V(1) \quad M(1) \}_{3 \times 1}$$

$$\underline{Q}(2) = \{ N(2) \quad V(2) \quad M(2) \}_{3 \times 1}$$

Rys. 2.2

9. Konstrukcja niszczy się w wyniku wyczerpania się jej nośności, dochodząc do tego stanu na drodze kolejnych lokalnych uplastycznień i wyboczeń - wykluczamy możliwość zniszczenia kruchego lub globalnej utraty stateczności.
10. Poszczególne belki mogą być nachylone pod dowolnym kątem do belek z nimi sąsiadujących. Zagadnienie wyboczenia nie prostokątnych elementów narażonych, por. rys. 1.2, nie jest jednakże rozpatrywane.
11. Pomijamy efekty zmian geometrii układu tj. zakładamy, że przemieszczenia są małe.
12. Rozpatrujemy dowolne obciążenia quasistatyczne niekoniecznie proporcjonalne - uproszczenia przy wprowadzaniu danych wynikające z założenia proporcjonalności wykorzystywane będą tylko wtedy, gdy odpowiadać to będzie realnej, analizowanej sytuacji mechanicznej.
13. Pomijamy wpływ imperfekcji, naprężeń wstępnych, spawalniczych niejednorodności materiału i innych błędów wykonania.

2.2. Koncepcja analizy

2.2.1. Stany zachowania się elementu skończonego

Wyróżniać będziemy cztery zasadnicze stany zachowania się elementu skończonego, każdy charakteryzowany odpowiednim przyrostowym równaniem kanonicznym.

A/ Stan sprężysty

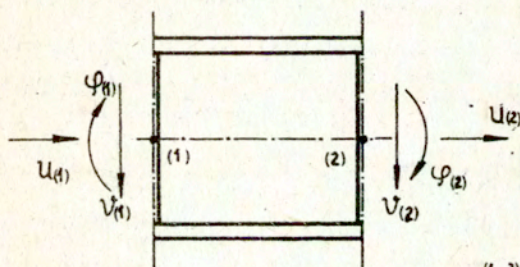
Przyrostowe równanie równowagi wyrażone w przemieszczeniach

dla elementu w stanie sprężystym ma postać :

$$/2.4./ \quad \Delta \underline{Q}_{6 \times 1} = \underline{k}_{6 \times 6}^{(s)} \Delta \underline{r}_{6 \times 1}$$

gdzie wektory uogólnionych sił wewnętrznych \underline{Q} oraz uogólnionych przemieszczeń \underline{r} zdefiniowano na rys. 2.2, oraz 2.3.

Macierz sztywności elementu $\underline{k}^{(s)}$ podajemy w p. 3.1.



$$\begin{aligned} \underline{r}^{(1-2)} &= \left\{ \underline{I}_{(1)} \quad \underline{I}_{(2)} \right\}_{6 \times 1} \\ \underline{I}_{(1)} &= \left\{ \underline{u}_{(1)} \quad \underline{v}_{(1)} \quad \underline{\varphi}_{(1)} \right\}_{3 \times 1} \\ \underline{I}_{(2)} &= \left\{ \underline{u}_{(2)} \quad \underline{v}_{(2)} \quad \underline{\varphi}_{(2)} \right\}_{3 \times 1} \end{aligned}$$

Rys. 2.3.

B/ Stan sprężysto - plastyczny

W stanie tym zachowanie elementu charakteryzowane jest

równaniem:

$$/2.5/ \quad \Delta \underline{Q}_{6 \times 1} = \underline{k}_{6 \times 6}^{(s-p)} \Delta \underline{r}_{6 \times 1}$$

gdzie $k^{(s-p)}$ jest jedną z trzech różnych macierzy sztywności sprężysto-plastycznej elementu, por. p.4.3, przyjmowanych zależnie od miejsc pojawienia się odpowiednich stref plastycznych. Inicjacja strefy plastycznej w przekroju belki następuje w wyniku osiągnięcia tzw. warunku stanu granicznego w tym przekroju. Dalsza analiza belki w stanie sprężysto-plastycznym zapewnia poruszanie się końca wektora $Q(k) = \{N(k), V(k), M(k)\}$ w przestrzeni uogólnionych sił wzdłuż powierzchni granicznej. Sytuacja ta trwa do chwili wyczerpania się nośności granicznej całego układu lub też do chwili lokalnego wyboczenia się środka elementu zawierającego rozpatrywany przekrój uplastyczniony. W algorytmie uwzględnia się możliwość odciążenia przekrojów uprzednio uplastycznionych.

C/ Powyboczeniowy stan sprężysty

Zachowanie elementu charakteryzowane jest równaniem

$$12.6/ \quad \Delta \underline{Q}_{6 \times 1} = \underset{\sim}{k}_{6 \times 6}^{(w)} \Delta \underline{r}$$

w którym $\underset{\sim}{k}^{(w)}$ jest macierzą sztywności obowiązującą po wyboczeniu środka ale przed osiągnięciem przez rozpatrywany element stanu wytrzymałości krańcowej.

D/ Powyboczeniowy stan sprężysto-plastyczny

Jest to ostatnia faza pracy belki, którą opisywać będziemy równaniem

$$12.7/ \quad \Delta \underline{Q}_{6 \times 1} = \underset{\sim}{k}_{6 \times 6}^{(kn)} \Delta \underline{r}_{6 \times 1}$$

w którym $\tilde{k}^{(kn)}$ jest macierzą tzw. wytrzymałości krańcowej. W macierzy tej uwzględnia się zarówno efekty uplastycznień, jak i efekty redukcji efektywnego przekroju belki pochodzące od lokalnego wyboczenia środnika.

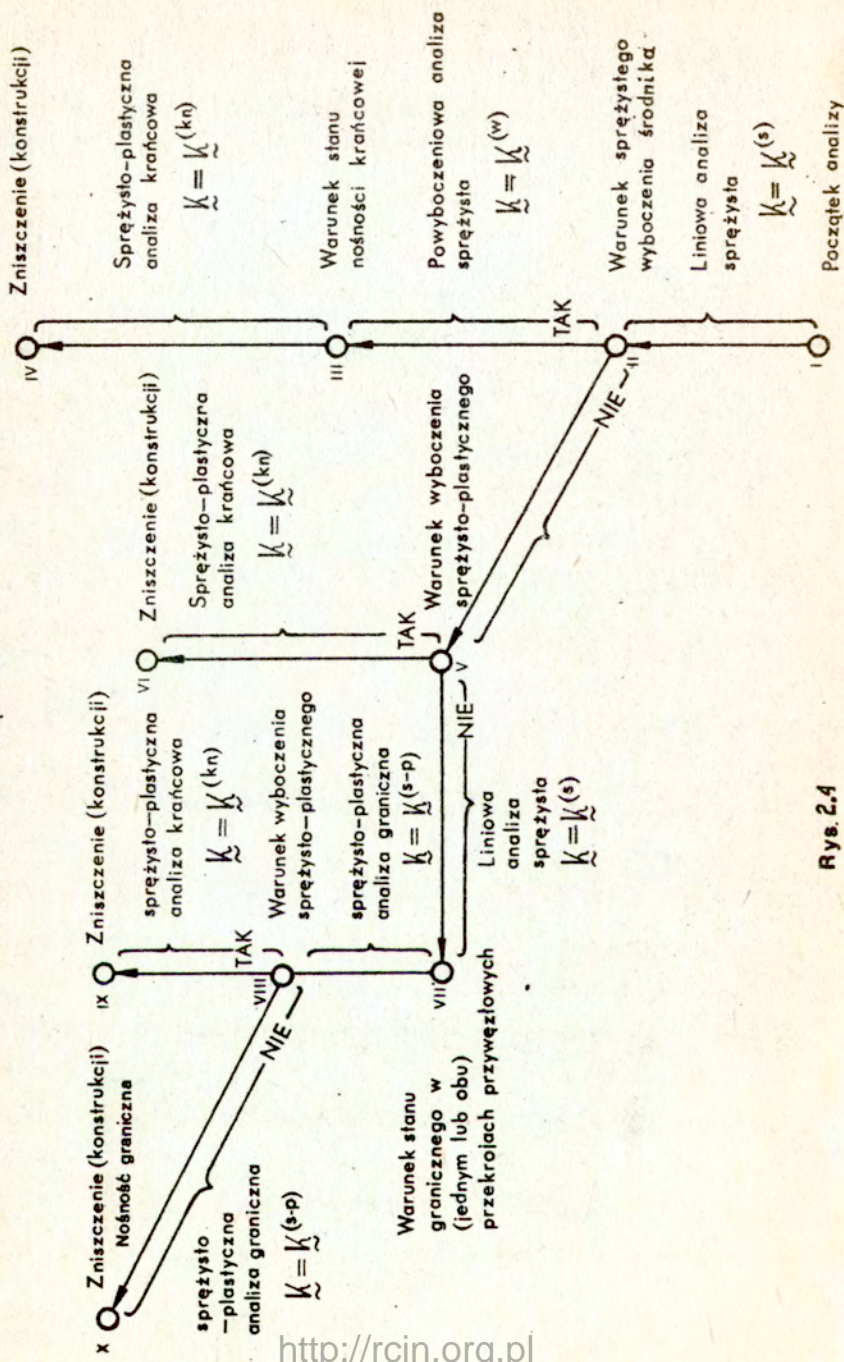
Zakładając analogicznie jak w przypadku analizy niesprężystej, że funkcje charakteryzujące te warunki są potencjałem do obliczenia przyrostów dodatkowych przemieszczeń wynikających z osłabienia przekroju wyboczonego, macierz $\tilde{k}^{(kn)}$ obliczamy w podobny sposób co macierz sztywności sprężysto-plastycznej. Gwarantuje to pozostawanie końca wektora \underline{Q} na powierzchni krańcowej w trakcie tej fazy procesu. Powierzchnię krańcową wyznaczamy zakładając określone kryteria zniszczenia, a następnie analizując typowe rozkłady naprężeń dla wyróżnionych charakterystycznych przypadków zniszczenia.

2.2.2 Algorytm postępowania

W punkcie niniejszym omówimy krótko przedstawiony na rys. 2.4 algorytm postępowania, na podstawie którego dokonywać będziemy numerycznej analizy rozpatrywanej klasy ram sprężysto-plastycznych.

Analizę rozpoczynamy kładąc dla wszystkich elementów $\tilde{k} = \tilde{k}^{(s)}$ tj. zakładając liniowo-sprężyste zachowanie się układu. Skoncentrujemy uwagę na jednym, wybranym elemencie ramy. Jeśli, po pewnej liczbie kroków narastania obciążenia, spełniony będzie w tym elemencie warunek sprężystego wyboczenia środnika /II, rys.2.4/, to analizę kontynuujemy kładąc w tym elemencie $\tilde{k} = \tilde{k}^{(w)}$ aż do chwili, w której spełniony zostanie

ALGORYTM POSTĘPOWANIA



Rys. 2.4

warunek stanu nośności krańcowej /III, rys.2.4/ kiedy to $\tilde{k} = \tilde{k}^{(kr)}$.

W przypadku, gdy środek belki nie jest podatny na wyboczenie w obszarze sprężystym, prowadzenie dalszej analizy liniowej wymaga sprawdzenia warunku wyboczenia sprężysto-plastycznego /V, rys.2.4/. Konieczność tego kroku analizy wynika z faktu uwzględniania wpływu plastyczności dopiero w chwili spełnienia warunku stanu granicznego przekroju. Innymi słowy, pomijane na etapie analizy, liniowo-sprężystej efekty częściowych uplastycznień przekrojów belki mogą okazać się istotne z punktu widzenia oceny jej wytrzymałości wyboczeniowej. Jeśli tak jest istotnie w rozpatrywanym elemencie, to dalszą analizę /aż do punktu IV, rys.2.4/ prowadzić będziemy kładąc $\tilde{k} = \tilde{k}^{(kn)}$.

Jeśli zaś środek belki nie ulegnie wyboczeniu do pełnego uplastycznienia jednego lub obu z jej przekrojów węzłowych, to pierwsza modyfikacja elementowej macierzy sztywności będzie typu $\tilde{k} = \tilde{k}^{(s-p)}$, VII, rys.2.4. Dalszą analizę prowadzimy z tą macierzą uwzględniając ewentualne wyboczenie środka belki w warunkach narastania zaawansowanych odkształceń plastycznych VIII, rys.2.4.

3. Metoda elementów skończonych w liniowej statyce układów ramowych.

Metody macierzowe w liniowej statyce układów ramowych wywodzą się z dwu znanych metod obliczeniowych, metody sił i metody przemieszczeń. Z punktu widzenia zastosowań numerycznych efektywniejsza okazała się metoda przemieszczeń, gdyż umożliwia proste sformalizowanie algorytmu obliczeń.

Przemieszczeniowa wersja metody elementów skończonych, podobnie jak macierzowo sformułowana metoda przemieszczeń, polega w uproszczeniu na podziale obliczanej konstrukcji na prostsze elementy i zbudowaniu rozwiązania całego układu z rozwiązań uzyskanych dla poszczególnych elementów, przy zachowaniu warunków równowagi i ciągłości. Warunki te formułowane są dla skończonej liczby punktów i w przypadku elementu jednowymiarowego odpowiadają rzeczywistym warunkom modelu fizycznego.

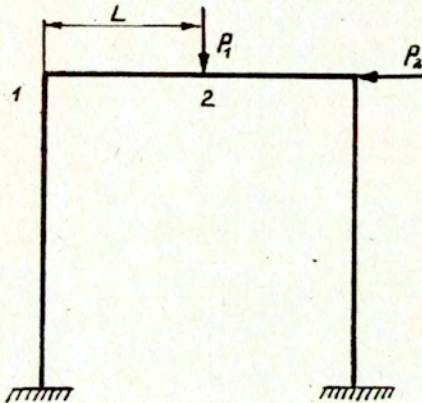
Całą analizę można podzielić na trzy etapy. Pierwszy etap dotyczy idealizacji układu /podziału na elementy skończone/ i został dokładnie określony poprzez przyjęcie założeń wymienionych w rozdziale 2.

Celem drugiego etapu jest analiza poszczególnych elementów, prowadząca do uzyskania związku /2.4/. Odpowiednie przyrostowe równanie równowagi elementu wyrażone w przemieszczeniach podamy w jawnej postaci w punkcie 3.1. W punkcie 3.2. omówimy pewne problemy związane z trzecim etapem—analizą konstrukcji, polegającą na połączeniu poszczególnych elementów w całość, z której zostały uprzednio wydzielone oraz podamy kilka uwag na temat programu numerycznego służącego do analizy liniowej i wykorzystanego w pracy.

3.1. Przemieszczeniowe równanie równowagi elementu skończonego sprężystej ramy płaskiej.

Rozpatrzmy element nr $\bar{\alpha}$ o końcach 1 i 2, rys.3.1., wycięty z płaskiej ramy, obciążonej siłami P_1 i P_2 , przyłożo-

nymi w węzłach układu. Siły wewnętrzne, działające na element $\bar{\alpha}$ w przekrojach przywęzłowych 1 i 2 oznaczmy symbolami $Q_1^T = \{ N_1, V_1, M_1 \}$ i $Q_2^T = \{ N_2, V_2, M_2 \}$, a przemieszczenia końców elementu przez $r_1^T = \{ u_1, v_1, \psi_1 \}$ i $r_2^T = \{ u_2, v_2, \psi_2 \}$

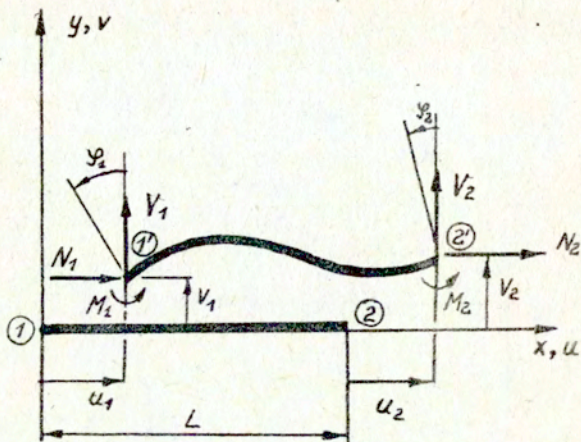


Rys. 3.1.

Siły i przemieszczenia o zwrotach podanych na rys. 3.2 przyjmijmy jako dodatnie. Oznaczmy ponadto przez γ współczynnik deformacji pochodzących od ścinania. Współczynnik ten wyraża się wzorem :

$$\gamma = \frac{12 E J}{G A_{ef} L^2}$$

w którym G oznacza moduł Kirchoffa, zaś A_{ef} - przekrój efektywny /równy w obszarze sprężystym przekrojowi poprzecznemu elementu/



Rys. 3.2.

Między siłami Q i przemieszczeniami r zachodzą zależności znane z wytrzymałości materiałów

$$/3.1./ \quad \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{12EJ}{L^3/1+\delta'} & \frac{6EJ}{L^2/1+\delta'} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3/1+\delta'} & \frac{6EJ}{L^2/1+\delta'} & \\ & \frac{4\delta'/EJ}{L/1+\delta'} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2/1+\delta'} & \frac{2-\delta'/EJ}{L/1+\delta'} & \\ & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \\ \text{sym.} & & & \frac{12EJ}{L^3/1+\delta'} & -\frac{6EJ}{L^2/1+\delta'} & \\ & & & & \frac{4\delta'/EJ}{L/1+\delta'} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ y_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

lub krócej

$$/3.2/ \quad \underline{Q} \bar{\alpha}_{6 \times 1} = \underline{k}_{\bar{\alpha}}^{(s)} \underline{r}_{\bar{\alpha}}_{6 \times 1}$$

gdzie $\underline{k}_{\bar{\alpha}}^{(s)}$ jest macierzą sztywności pręta $\bar{\alpha}$ ramy płaskiej. Jest to ten sam związek, który wypisaliśmy dla odpowiednich przyrostów wektorów $\underline{\Delta Q}$ i $\underline{\Delta r}$ w równaniu 2.4.

Macierz sztywności elementu skończonego jest symetryczna /prawo MAXWELLA-BETTI/ oraz osobliwa, ponieważ ze względu na brak podparcia równanie /3.2./ dopuszcza możliwość wystąpienia ruchów sztywnych elementu, nie wywołujących żadnych dodatkowych sił węzłowych. Składnik k_{ij} tej macierzy przedstawia siłę w węźle i od przemieszczenia $r_j = 1$.

3.2. Liniowa analiza ram płaskich

Macierz sztywności wyprowadzona w p.3.1. przedstawia związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami odniesionymi do układu współrzędnych związanego z rozpatrywanym elementem, zwanym układem lokalnym.

Przy analizie konstrukcji jako całości musimy dysponować macierzami sztywności poszczególnych elementów odniesionymi do jednego wspólnego układu współrzędnych. Operację transformacji macierzy pomiędzy układami współrzędnych opisujemy w rozdziale 6.

Globalny algebraiczny układ równań opisujący dyskretyzowany model ramy budujemy wykorzystując warunek zgodności przemieszczenia i warunki równowagi węzłów. Wykorzystujemy przy tym

warunki brzegowe, pozwalające zerować wszystkie wiersze i kolumny globalnej macierzy układu, odpowiadające zerowemu przemieszczeniu z wyjątkiem elementu na przekątnej głównej, który przyjmujemy równy 1. W programie numerycznym wykorzystano algorytm pozwalający łączyć procedurę składania macierzy sztywności konstrukcji z rozwiązywaniem układu równań metodą Gaussa, Lecz nie będziemy go tutaj dokładnie omawiać, ograniczając się do stwierdzenia, że w wyniku obliczeń uzyskujemy rozwiązanie

$$/3.3/ \quad \underline{r} = \underline{K}^{(s)-1} \underline{P}$$

przy czym składowe wektora obciążeń \underline{P} oraz wektora poszukiwanych przemieszczeń węzłowych \underline{r} odnoszą się do całej konstrukcji.

Po znalezieniu wektora przemieszczeń możemy obliczyć uogólnione siły wewnętrzne w dowolnym przekroju przywęzłowym, wykorzystując równanie

$$/3.4/ \quad Q_{wi}^{(\bar{\alpha})} = \sum_{m=1}^6 K_{im}^{(\bar{\alpha})} r_m^{(\bar{\alpha})}$$

w którym k_{im} oznacza wyraz i -tej kolumny i m -tego wiersza macierzy sztywności elementu $\bar{\alpha}$, zaś $r_m^{(\bar{\alpha})}$ oznacza m -te przemieszczenie uogólnione.

Szczegółowe informacje o systemie służącym do liniowej analizy konstrukcji metodą elementów skończonych WAT-KM, opracowanym w Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie, można znaleźć w pracach /108/ i /109/. System WAT-KM, na podstawie którego napisano, w ramach niniejszego opracowania, programy ASGRAM i ASGRAMW, przeznaczone do analizy nieliniowej, umożliwia prosty opis danych rozwiązywanego zadania i przejrzyste

wyprowadzenie wyników obliczeń, dzięki czemu może być szczególnie przydatny w praktycznych zastosowaniach.

4. Sprężysto - plastyczna analiza ram

Prosta adaptacja podejścia liniowego do analizy nieliniowej wiąże się z dwoma aspektami. Po pierwsze ze względu na dużą liczbę operacji numerycznych, związaną z problemami nieliniowymi, wymagana jest duża moc obliczeniowa wykorzystywanych komputerów. Postęp w konstruowaniu coraz szybszych i wyposażonych w coraz większą pamięć maszyn cyfrowych, przy malejącej ich cenie sprawia, że liczba działań odgrywa jednak coraz mniejszą rolę. Po drugie zastosowanie metody elementów skończonych w projektowaniu wymaga sprawdzenia dokładności zastosowanych algorytmów. Doświadczenia zebrane przez wiele ośrodków, które pracowały nad algorytmizacją rozwiązań zagadnień nieliniowych, pozwalają już obecnie stosunkowo dokładnie szacować błąd rozwiązania numerycznego dla większości typowych procedur.

Ponieważ, zgodnie z przyjętymi założeniami, zrezygnowaliśmy z dokładnej analizy stref aktywnych w przekroju belki dwuteowej, rozważania nad uplastycznieniem tego przekroju oprzemy na przybliżonym podejściu statycznym, wykorzystując twierdzenia teorii nośności granicznej.

4.1. Warunek stanu granicznego dla przekroju dwuteowego poddanego działaniu momentu zginającego, siły podłużnej i siły poprzecznej.

Zgodnie z powszechną opinią wyrażaną w literaturze światowej plastyczne płynięcie materiałów jest procesem bardzo skomplikowanym. Analizując nośność graniczną za pomocą sprężysto - plastycznego modelu konstrukcji należałoby uwzględnić takie rzeczywiste cechy materiałów plastycznych, jak nieliniowa i anizotropowa pamięć, wpływ zjawisk występujących przy obciążeniach cyklicznych, efekty termiczne analizowane na podstawie termodynamiki procesów nieodwracalnych, wpływ prędkości deformacji. Te same zjawiska oddziałują na przebieg wyboczenia sprężysto-plastycznego i decydują o nośności krańcowej. Dla naszych celów praktycznych przyjmujemy założenia uwzględniające tylko pewne aspekty tak zakreślonej problematyki.

W ogólnym przypadku warunek stanu granicznego, określający przejście przekroju lub części konstrukcji ze stanu sprężystego w stan plastyczny, zależy od przyjętego warunku plastyczności, typu konstrukcji, charakteru obciążeń i wymaganej dokładności obliczeń.

Dla rozpatrywanej belki, znajdującej się w złożonym stanie naprężenia, procedura wyznaczania powierzchni plastyczności zależy od warunku plastyczności, który zarówno dla hipotezy Hubera - Misesa, jak i dla wzoru Treski można zapisać podobną zależnością

$$/4.1/ \quad \sigma_{xx}^2 + \alpha^2 (\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2) = \sigma_0^2$$

w której σ_0 oznacza granicę plastyczności przy rozciąganiu, zaś α jest współczynnikiem liczbowym, wynoszącym:

$\alpha = 3$ dla warunku Hubera - Misesa,

$\alpha = 4$ dla hipotezy Treski.

Problem wyznaczenia powierzchni plastyczności polega na transformacji warunku /4.1/ do przestrzeni wewnętrznych sił uogólnionych, będących wypadkowymi odpowiednich naprężeń, a mianowicie do przestrzeni momentu zginającego M siły podłużnej N i siły poprzecznej V . Wskutek nieliniowości związku /4.1/ transformacja taka nie jest możliwa w zamkniętej postaci. Można jednak oszacować wielkości graniczne sił wewnętrznych wykorzystując podstawowe twierdzenia nośności granicznej.

Oszacowanie dolne F_{st} związane jest z wyborem statycznie dopuszczalnego pola naprężeń, tzn. pola naprężeń spełniającego równania równowagi wewnętrznej, warunki brzegowe oraz nie przekraczającego warunku stanu granicznego.

W celu skonstruowania oszacowania górnego F_k powierzchni plastyczności należy założyć takie pole prędkości przemieszczeń, aby spełnione były kinematyczne warunki brzegowe i aby można było stowarzyszyć z przyłożonym obciążeniem taki mechanizm zniszczenia, dla którego praca obciążenia zewnętrznego Z przewyższa energię W rozpraszaną w przegubach plastycznych. Z twierdzeń o oszacowaniach przedziału nośności granicznej wynika, że rzeczywista powierzchnia graniczna F zawarta jest w granicach

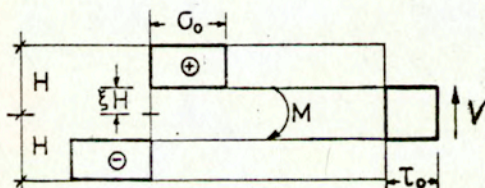
$$/4.2/ \quad F_{st} \leq F \leq F_k$$

W przeglądzie literatury podaliśmy prace, w których wykorzystano takie oszacowanie do określenia powierzchni plastyczności dla nieskomplikowanych przekrojów pełnościennych i dwuteowników dla dwu sił wewnętrznych występujących jako argumenty w równaniu /2.2/ $F/Q = \theta$.

W przypadku uwzględnienia trzech sił wewnętrznych: ścinającej, podłużnej i momentu zginającego celowe jest wprowadzenie dalszych racjonalnych uproszczeń, które umożliwiają dodatkowo uogólnienie podejścia na przekroje monosymetryczne.

Takie podejście przybliżone, stosowane przy rozpatrywaniu równoczesnego zginania i ścinania i polegające na założeniu, że część przekroju przenosi wyłącznie naprężenie wywołane zginaniem, część zaś naprężenia spowodowane ścinaniem, jak przedstawia rys.4.1 zaproponowano w pracy /76/.

W pracy /19/ uogólniono to podejście uwzględniając dodatkowo siłę podłużną i przyjmując rozkład naprężeń jak na rys.4.4. W obydwu pracach założono więc, że w odległości $\pm \xi H$ nie są spełnione warunki równowagi wewnętrznej.



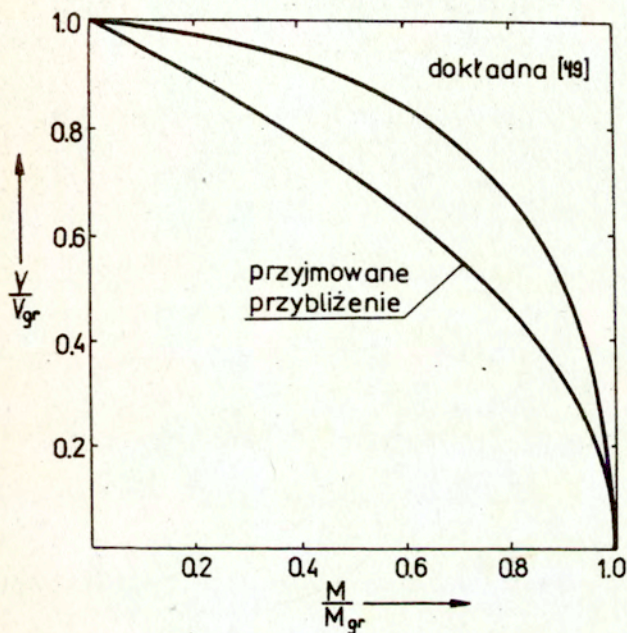
Rys. 4.1

Na rys. 4.2 porównano krzywą uzyskaną na podstawie podejścia przybliżonego o równaniu

$$/4.3/ \quad \frac{M}{M_{gr}} + \left(\frac{V}{V_{gr}} \right)^2 = 1$$

z rozwiązaniem zupełnym podanym w /49/. Widać, że podejście

uproszczone dobrze przybliża inne rozwiązania, od strony bezpiecznej. Wykorzystamy je więc w naszej analizie, a na końcu



Rys. 4.2.

porównamy wyniki z krzywymi granicznymi otrzymanymi w pracy /120/, w której autorzy skorzystali z tzw. naprężenia efektywnego /zastępczego/, uwzględniającego wpływ naprężeń stycznych.

Istotnym założeniem dotyczącym rozkładu naprężeń w całkowicie uplastycznionym monosymetrycznym przekroju dwuteowym jest przyjęcie, że siła poprzeczna jest przenoszona wyłącznie przez środek profilu, zaś siła podłużna i moment zginający przez cały przekrój. Odpowiednie wielkości graniczne, przy założeniu

niezależnego ich działania, oznaczymy przez V_{gr} , N_{gr} , M_{gr} .
Wielkości te można wyrazić w funkcji naprężeń granicznych oraz parametrów określających kształt geometryczny przekroju w postaci

$$/4.4/ \quad V_{gr} = h_s \cdot t_s \cdot \tau_0 = A_s \tau_0$$

$$N_{gr} = (A_s + A_{mp} + A_{dp}) \sigma_0$$

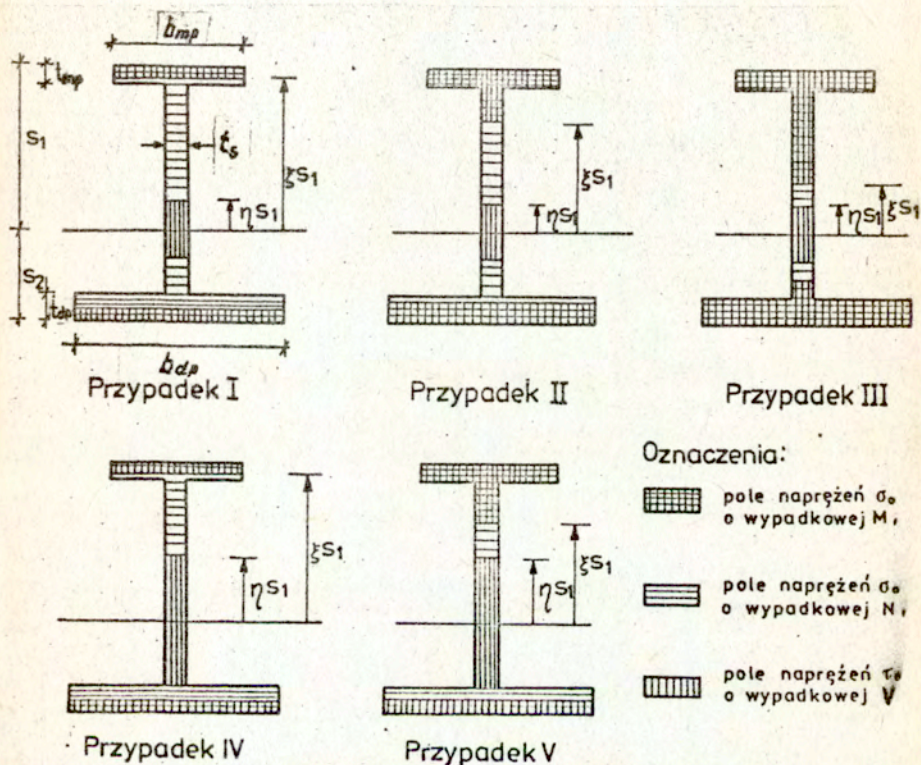
$$M_{gr} = (A_{mp} + A_{dp}) \sigma_0 h_s + \frac{h_s^2 t_s \sigma_0}{4} + \frac{q^2}{4 t_s \sigma_0}$$

gdzie $q = (A_{dp} - A_{mp}) \sigma_0$

Warunek statycznej dopuszczalności założonego rozkładu naprężeń wymaga prawidłowego przyjęcia osi, względem której liczone będą momenty od odpowiednich naprężeń. Gdy przekrój jest sprężysty, osią tą jest jak wiadomo oś obojętna. W miarę uplastycznienia się kolejnych włókien przekroju oś ta przesuwa się i w przypadku czystego zginania dzieli przekrój całkowicie uplastyczniony na dwie równe powierzchnie. Największa wartość momentu granicznego odpowiada takiemu właśnie położeniu osi plastycznej przekroju. Dlatego takie położenie osi, przyjęto ze względu na sprężysto-plastyczny model pracy przekroju przy wyprowadzeniu powierzchni granicznej.

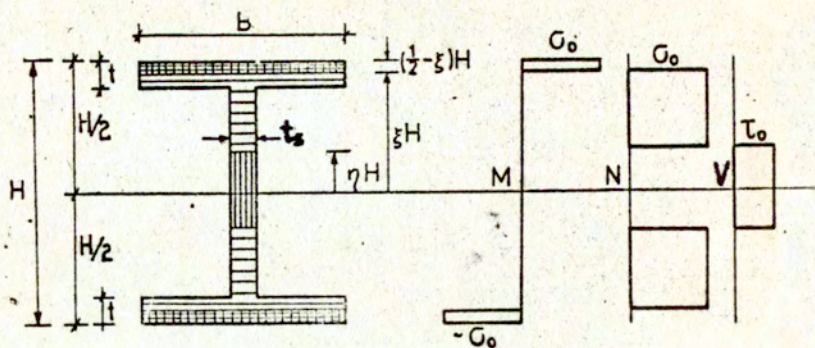
Podstawowe wielkości wchodzące do wzorów opisujących procedurę transformacji warunku plastyczności wyrażonego w naprężeniach w przestrzeni wewnętrznych sił uogólnionych zaznaczono na rys. 4.3 i 4.4. Rys. 4.3 pokazuje wszystkie możliwe ze względu na kombinację powierzchni przekrojów środka i obydwu półek

typowe stany chwilowego rozkładu naprężeń dla przekroju o jednej osi symetrii. Oś pełnego zgięcia plastycznego przekroju stanowi na tym rysunku oś odniesienia.



Rys. 4.3

Dla przypadku 1 wyrażenia na siły wewnętrzne w przekroju poprzecznym belki w funkcji parametrów ξ i η przyjmą następującą postać:



Rys. 4.4

/4.5/

$$v = a_1 \eta$$

$$n = a_2 + a_3 \xi + a_4 \eta$$

$$m = a_5 + a_6 \xi + a_7 \eta$$

przy czym

$$v = \frac{V}{V_{gr}}, \quad n = \frac{N}{N_{gr}}, \quad m = \frac{M}{M_{gr}},$$

zaś współczynniki przy parametrach obliczone na podstawie założonego dla tego przypadku rozkładu naprężeń wynoszą

$$a_1 = \frac{2 t_s s_1 \zeta_0}{V_{gr}}$$

$$a_2 = \frac{(AR - 2 b_{mp} s_1) G_0}{N_{gr}}$$

$$a_3 = \frac{2 b_{mp} s_1 \sigma_0}{N_{gr}}$$

$$a_4 = \frac{-2 t_s s_1 \sigma_0}{N_{gr}}$$

$$a_5 = \frac{\sigma_0}{M_{gr}} \left\{ 2 b_{mp} s_1 s_2 - \frac{b_{mp}^2 s_1^2}{b_{dp}} + A_{mp} \left(s_1 - \frac{t_{mp}}{2} \right) - A_{dp} \left(s_2 - \frac{t_{dp}}{2} \right) + \frac{1}{2} t_s (s_1 - t_{mp})^2 - \frac{1}{2} t_s (s_2 - t_{dp})^2 \right\}$$

$$a_6 = \frac{\sigma_0}{M_{gr}} \left(\frac{2 b_{mp}^2 s_1^2}{b_{dp}} - 2 b_{mp} s_1 s_2 \right)$$

$$a_7 = - \frac{b_{mp}^2 s_1^2 \sigma_0}{b_{dp} M_{gr}}$$

AR oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego dwuteownika, tzn

$$AR = A_s + A_{mp} + A_{dp}$$

Eliminując z równań /4.5/ parametry geometryczne η i ξ otrzymamy dla przypadku 1 równanie powierzchni stanu granicznego w postaci

$$\begin{aligned} /4.6/ \quad F(\xi, \eta) = & a_5 + a_6 \left(\frac{\eta}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_4 v}{a_1 a_3} \right) + \\ & + a_7 \left(\frac{\eta}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_4 v}{a_1 a_3} \right)^2 - m = 0 \end{aligned}$$

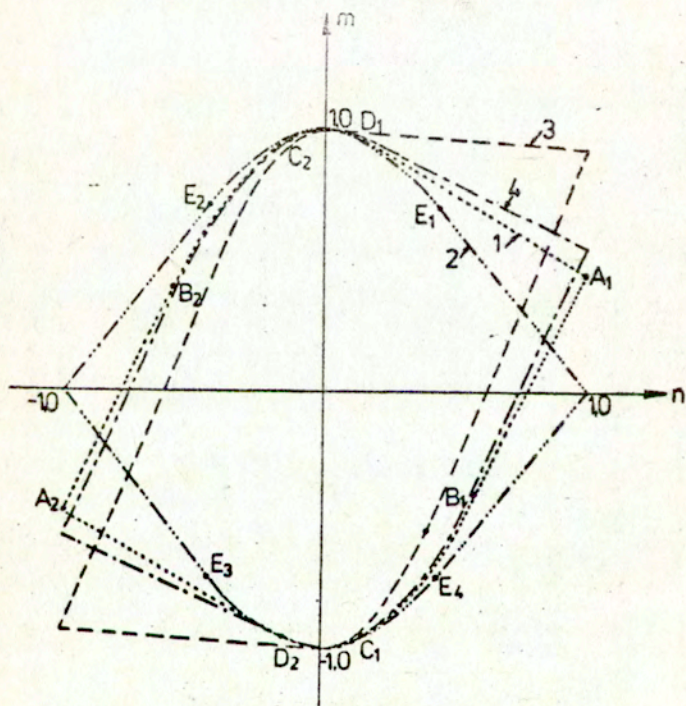
w którym parametry ξ i η zawarte są w przedziałach

$$1 - \frac{t_{mp}}{s_1} \leq \xi \leq 1$$

oraz

$$0 \leq \eta \leq \frac{s_2}{s_1} - \frac{t_{dp}}{s_1}$$

Analogicznie można otrzymać równanie powierzchni granicznej dla pozostałych 4 przypadków założonego rozkładu naprężeń pokazanych na rys.4.3 i dla wszystkich kombinacji znaków naprężeń. Na podstawie programu INSECT, /19/ uzupełnionego w ramach niniejszego opracowania o graficzne wyprowadzanie wyników, można łatwo sporządzić warstwicę powierzchni granicznej, zbudowane z wycinków odpowiadających poszczególnym przedziałom wartości bezwymiarowych sił wewnętrznych.



Rys.4.5

Na rys. 4.5 pokazano powierzchnie graniczne odpowiadające sile tnącej $V = 0$ dla czterech różnych profili dwuteowych. Dane geometryczne dotyczące tych profili zestawiono w poniższej tabelce

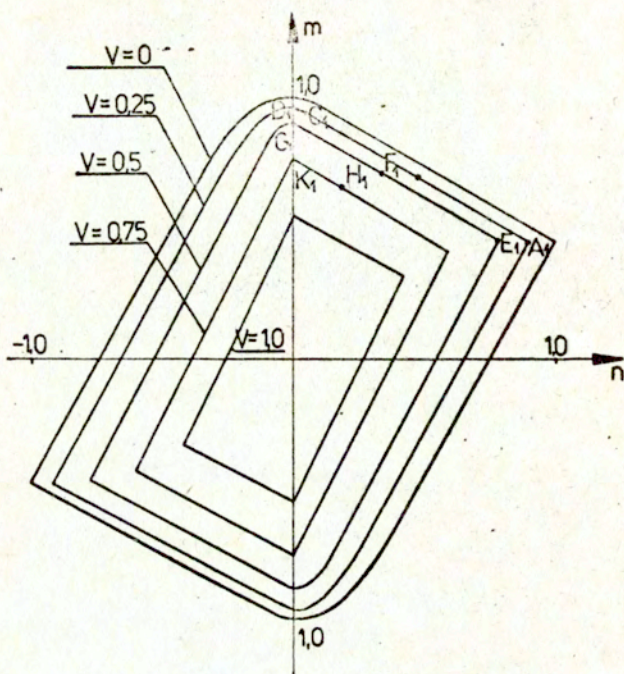
Nr. profilu pręta	b_{mp} [cm]	b_{dp} [cm]	H [cm]	t_s [cm]	t_{mp} [cm]	t_{dp} [cm]
1	25,0	50,0	45,0	1,0	1,0	1,0
2	25,0	25,0	40,0	1,0	1,0	1,0
3	30,0	50,0	44,0	1,0	2,0	2,0
4	25,0	65,0	60,0	1,0	1,0	1,0

Na rys. 4.6 naniesiono warstwicę powierzchni granicznej /dla profilu nr.1/ odcięte płaszczyznami $V=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$. Bardzo szczegółową analizę niesymetrycznych przekrojów dwuteowych przeprowadzono w pracy /120/. Autorzy korzystali z tzw. efektywnego naprężenia normalnego /zastępczego/, które uwzględnia wpływ naprężeń stycznych w następujący sposób

$$/4.7/ \quad \sigma_{oef} = 2 \sqrt{(\sigma_0/2)^2 - (V/A_s)^2}$$

Pomimo różnic w podejściu prezentowanym w niniejszej pracy i w pracy /120/ charakter powierzchni granicznych otrzymanych w obydwu przypadkach jest zbliżony.

Na rys. 4.7 naniesiono warstwicę $V=0$ powierzchni granicznych dla dwuteownika o wymiarach /cm/



Rys. 4.6

$$t_s = 0.3$$

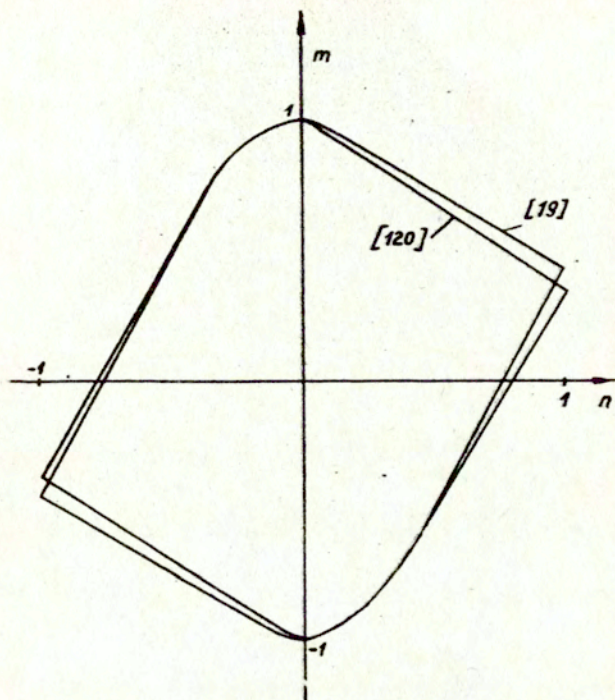
$$t_{mp} = t_{dp} = 1$$

$$h_s = 118$$

$$b_{mp} = 20$$

$$b_{dp} = 40$$

sporządzone na podstawie wzorów podanych w obydwu pracach.



Rys. 4.7

Obie powierzchnie mają jednak krawędzie i naroża, nie są więc powierzchniami gładkimi. Aby uprościć analizę, zlinearyzowano wyprowadzone związki, zastępując wycinki powierzchni płaszczyznami. Wykorzystano przy tym program INSECT, obliczając przy jego pomocy współrzędne charakterystycznych punktów powierzchni granicznej. Przez punkty te poprowadzono cztery płaszczyzny w każdej ćwiartce układu współrzędnych m , v , n . W ten sposób całą powierzchnię plastyczności odwzorowano na zbiór 32 płaszczyzn. Założono przy tym, że w przypadku, gdy punkt w przestrze-

ni uogólnionych sił wewnętrznych znajdzie się na krawędzi lub w narożu, odpowiednie składowe wektora gradientów funkcji uplastycznienia względem sił wewnętrznych $\phi_k = \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\right)_k$ i obliczane są jako średnie arytmetyczne odpowiednich składowych gradientów dla przyległych płaszczyzn.

4.2. Algorytm postępowania

W przypadku obciążenia proporcjonalnego realizacja pierwszego przyrostu obciążenia $\Delta_{(i)} \underline{P}$ ($i=1$) składa się z dwu etapów. Na pierwszym rozwiązujemy liniowy układ równań postaci

/4.8/

$$\underset{\sim}{K}_{(1)}^{(s)} \Delta_{(1)} \underline{\gamma}^* = \Delta_{(1)} \underline{P}^*$$

gdzie $\Delta_{(1)} \underline{P}^*$ jest obciążeniem testowym, na drugim zaś dokonujemy przeskalowania otrzymanego rozwiązania tak, aby uzyskać spełnienie warunku stanu granicznego w najbardziej wyciężonym przekroju. Otrzymujemy w rezultacie rozwiązanie.

/4.8a/

$$\Delta_{(1)} \underline{\gamma} = \underset{\sim}{K}_{(1)}^{(s)-1} \Delta_{(1)} \underline{P}$$

zapewniające znalezienie się punktu z przestrzeni uogólnionych sił wewnętrznych na powierzchni granicznej w co najmniej jednym przekroju poprzecznym belek ramy.

Przechodzimy następnie do sprężysto-plastycznej analizy na drugim kroku przyrostowym $i=2$. Zadajemy w tym celu niewielki przyrost obciążenia $\Delta_{(2)} \underline{P}$ ($n.p. \Delta_{(2)} \underline{P} = 0.05 \Delta_{(1)} \underline{P}$) i rozwiązujemy układ równań

/4.9/

$$\underset{\sim}{K}_{(2)}^{(s-p)} \Delta_{(2)} \underline{\gamma} = \Delta_{(2)} \underline{P}$$

Otrzymujemy rozwiązanie sprężysto - plastyczne

$$/4.9a/ \quad \Delta_{(2)} \underline{r} = \underset{\sim}{K}_{(2)}^{(s-p)-1} \cdot \Delta_{(2)} \underline{P}$$

Procedurę tę powtarzamy otrzymując dla i-tego przyrostu obciążenia rozwiązanie

$$/4.9.b/ \quad \Delta_{(i)} \underline{r} = \underset{\sim}{K}_{(i)}^{(s-p)-1} \cdot \Delta_{(i)} \underline{P}$$

przy czym globalna macierz sprężysto-plastyczna ramy modyfikowana jest na każdym przyroście poprzez zastąpienie macierzy sprężystych uplastycznionych elementów odpowiednimi macierzami sprężysto-plastycznymi.

W ten sposób przyrostowe prawo konstytutywne problemu sprężystego zastępowane jest związkem odcinkowo-liniowym ze stałą macierzą sztywności na danym przyroście obciążenia. Rys. 4.8 pokazuje interpretację geometryczną algorytmu przyrostowego dla różnych możliwych przypadków położenia wektora sił uogólnionych względem powierzchni plastyczności. Dla i-tego kroku obciążenia koniec wektora sił uogólnionych w przekroju przywęzłowym k elementu $\bar{\alpha}$, obliczanego jako suma

$$/4.10/ \quad \underline{Q}_{(\bar{\alpha}k)}^{(i)} = \underline{Q}_{(\bar{\alpha}k)}^{(i-1)} + \Delta \underline{Q}_{(\bar{\alpha}k)}^{(i)}$$

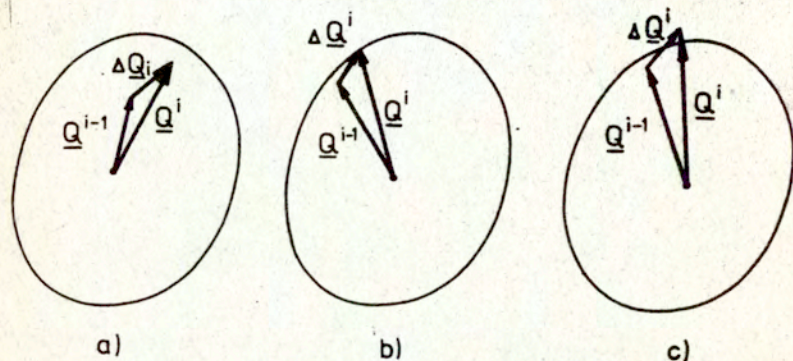
może w najogólniejszym przypadku przyjąć jedno z trzech położeń:

Rys.4.8a wewnątrz powierzchni plastyczności dla przekroju przywęzłowego sprężystego

Rys.4.8b na powierzchni plastyczności dla elementu uplastycznionego w poprzednich krokach obciążenia

Rys.4.8c na zewnątrz powierzchni plastyczności - dla elementów, w których warunek stanu granicznego został osiągnięty lub przekroczony w aktualnym kroku.

W przypadkach (a) oraz (b) podstawiamy macierz sprężystą lub macierz sprężysto-plastyczną elementu /biorąc pod uwagę obydwa przekroje przywęzłowe elementu/. W przypadku (c) stosujemy opisaną w dalszej części pracy modyfikację algorytmu, polegającą na wykorzystaniu wzorów 4.12 oraz 4.13.



Rys. 4.8

Rysunki dla uproszczenia wykonano dla dwuwymiarowej przestrzeni sił uogólnionych, lecz analiza jest, jak opisano w rozdz.2, prowadzona w trójwymiarowej przestrzeni sił uogólnionych.

Równanie:

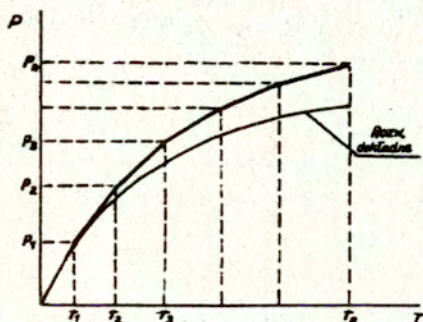
$$/4.11/ \quad \underline{K}^{(s-p)} \Delta \underline{r} = \Delta \underline{P}$$

opisujące sprężysto-plastyczne zachowanie się konstrukcji w zakresie małych przemieszczeń rozwiązuje się najczęściej dwoma podstawowymi sposobami:

- 1/ metodą całkowania "w przód", przedstawiono krótko powyżej,
- 2/ metodą iteracyjną

Ponieważ w pracy zastosowano pierwszy sposób o tradycyjnej nazwie metody zmiennej sztywności, popularniejszej ze względu na prostotę, mamy do czynienia ze zjawiskiem "odchodzenia"

od rozwiązania dokładnego /rys.4.9/, a także ze wspomnianym już wychodzeniem poza powierzchnię plastyczności /rys.4.8.c/ w przestrzeni uogólnionych sił wewnętrznych.



Rys. 4.9

Błąd ten można wyeliminować stosując drugi z wymienionych, nieco bardziej skomplikowany sposób o tradycyjnej nazwie metody początkowych obciążeń, pozwalający sprowadzać wektor uogólnionych sił wewnętrznych iteracjami na powierzchnię plastyczności po każdym przyroście obciążenia. Przewiduje się wykorzystanie tego sposobu w toku dalszej pracy nad udoskonalaniem opracowanych programów numerycznych.

Obecna wersja algorytmu umożliwia zwiększanie dokładności obliczeń dwiema metodami. Pierwsza z nich sprowadza się do stosowania dostatecznie małych przyrostów obciążenia. Druga metoda, efektywniejsza z uwagi na czas obliczeń, polega na wykorzystaniu faktu, że przyrosty sił wewnętrznych obliczane są na szczęblu elementu, a nie zaś na szczęblu konstrukcji,

ze wzoru /3.4/, jedynie na podstawie macierzy sztywności elementu i wektora jego przemieszczeń. Istnieje więc możliwość łatwej modyfikacji algorytmu polegająca na podzieleniu przyrostów składowych wektora przemieszczeń Δr_m na pewną liczbę n równych części /na przykład $n=4$ /, uzależnioną od określonego kryterium dokładności, a następnie obliczeniu całkowitego przyrostu składowych wektora uogólnionych sił wewnętrznych $\Delta Q_i^{(\bar{\alpha})}$ jako sumy częściowych przyrostów odpowiednich składowych tych sił. Możemy to zapisać następująco:

$$/4.12/ \quad \Delta Q_i^{(\bar{\alpha})} = \sum_{j=1}^n \Delta Q_{ij}^{(\bar{\alpha})}$$

przy czym j -ta część przyrostu i -tej składowej wektora uogólnionych sił wewnętrznych elementu $\bar{\alpha}$ obliczana jest podobnie, jak we wzorze /3.4/, a mianowicie za pomocą wyrażenia

$$/4.13/ \quad \Delta Q_{ij}^{(\bar{\alpha})} = k_{ijm}^{(\bar{\alpha})} \frac{\Delta r_m}{n}$$

W ten sposób na końcu każdego kroku j mamy inny wektor gradientów $\left(\frac{\partial F}{\partial Q_{ij}^{(\bar{\alpha})}}\right)_k$ funkcji plastyczności F w rozpatrywanym przekroju przywęzłowym k elementu $\bar{\alpha}$, dzięki czemu koniec wektora przyrostu całkowitego $\Delta Q_i^{(\bar{\alpha})}$ jest położony znacznie bliżej powierzchni plastyczności.

4.3. Macierze sprężysto-plastyczne elementu skończonego ramy

Uplastycznienie elementu skończonego związane ze spełnieniem warunku /2.2/w k -tym przekroju przywęzłowym tego elementu powoduje określone deformacje plastyczne, których wielkość

definiujemy za pośrednictwem parametru skalarnego M_k /wzór 4.16/, $k=1,2$. Gdy element znajduje się w stanie sprężystym, możemy napisać związek

$$/4.14/ \quad \underline{Q} = \begin{Bmatrix} \underline{Q}_1 \\ \underline{Q}_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{T}_1 \\ \underline{T}_2 \end{Bmatrix}$$

w którym \tilde{k}_{pq} oznaczają podmacierze o wymiarze 3 x 3 macierzy $\tilde{k}_{\bar{\alpha}}^{(s)}$, zdefiniowanej wzorami /3.1/ i /3.2/. Indeks $\bar{\alpha}$ oznaczający nr elementu będziemy, zgodnie z umową przyjętą w rozdz. 2, pomijać.

Całkowity przyrost uogólnionych deformacji $\Delta \underline{T}$ składa się z dwu części, przyrostu sprężystego $\Delta \underline{T}^S$ oraz przyrostu plastycznego $\Delta \underline{T}^P$ tj.

$$/4.15/ \quad \Delta \underline{T} = \Delta \underline{T}^S + \Delta \underline{T}^P$$

Plastyczny przyrost uogólnionych deformacji można zgodnie z założonym stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia wyrazić wzorem

$$/4.16/ \quad \Delta \underline{T}^P = \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1^P \\ \Delta \underline{T}_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\frac{\partial F}{\partial Q})_1 \\ (\frac{\partial F}{\partial Q})_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\phi}_1 \\ \underline{\phi}_2 \end{Bmatrix}$$

Gdy przekrój przywęzłowy 1 lub 2 elementu jest sprężysty, zachodzi odpowiednio $M_1 = 0$ lub $M_2 = 0$. Zależność pomiędzy przyrostem sił wewnętrznych i przyrostami deformacji można wyrazić następująco

/4.17/

$$\Delta \underline{Q} = \begin{Bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1^S \\ \Delta \underline{T}_2^S \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 - \Delta \underline{T}_1^P \\ \Delta \underline{T}_2 - \Delta \underline{T}_2^P \end{Bmatrix}$$

Podstawiając równanie /4.15/ do równania /4.17/ otrzymamy wyrażenie

/4.18/

$$\Delta \underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 - M_1 \underline{\phi}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 - M_2 \underline{\phi}_2 \end{Bmatrix}$$

Dowolna zmiana kombinacji sił i momentów w przekroju nie może naruszyć warunku plastyczności. Możemy więc napisać związek.

/4.19/

$$\underline{Q} = \Delta \underline{F} = \begin{Bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)_1 \Delta Q_1 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)_2 \Delta Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1^T & 0 \\ 0 & \underline{\phi}_2^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{Bmatrix}$$

Równania /4.18/ i /4.19/ określają zależność pomiędzy M_k i

$\Delta \underline{T}$. Rozpatrzmy trzy przypadki. Gdy przekrój 1 jest uplastyczniony, zaś przekrój 2 jest sprężysty, otrzymamy

$$M_1 \neq 0, \text{ zaś } M_2 = 0$$

Wstawmy powyższe wartości do równania /4.18/. Przybierze ono wówczas postać

/4.20/

$$\Delta \underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 - M_1 \underline{\phi}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix}$$

Otrzymaną zależność możemy podstawić do równania /4.19/

$$/4.21/ \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\phi}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_1 - M_1 \underline{\phi}_1 \\ \Delta \underline{r}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix}$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu składników otrzymamy układ dwu równań

$$/4.22/ \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} & \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12} \\ \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21} & \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_1 \\ \Delta \underline{r}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} M_1 \underline{\phi}_1 \\ \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21} M_2 \underline{\phi}_2 \end{Bmatrix}$$

Pierwsze z nich wygląda następująco

$$/4.22a/ \underline{\phi}_1^T \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_1 \\ \Delta \underline{r}_2 \end{Bmatrix} = \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} M_1 \underline{\phi}_1$$

stąd

$$/4.23/ M_1 = \frac{\underline{\phi}_1^T \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_1 \\ \Delta \underline{r}_2 \end{Bmatrix}}{\underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} \underline{\phi}_1}$$

Podobnie gdy przekrój 1 jest sprężysty, zaś przekrój 2 jest uplastyczniony, mamy $M_1 = 0$, $M_2 \neq 0$

wtedy

$$/4.24/ M_2 = \frac{\underline{\phi}_2^T \begin{bmatrix} \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_1 \\ \Delta \underline{r}_2 \end{Bmatrix}}{\underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22} \underline{\phi}_2}$$

Gdy obydwa przekroje przywęzłowe są uplastycznione, mamy

$$M_1 \neq 0, M_2 \neq 0$$

Zachodzi wtedy

$$/4.25/ \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} & \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12} \\ \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21} & \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} M_1 \underline{\phi}_1 + \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12} M_2 \underline{\phi}_2 \\ \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21} M_1 \underline{\phi}_1 + \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22} M_2 \underline{\phi}_2 \end{Bmatrix}$$

Ten układ równań rozwiązać można względem M_1 i M_2 za pomocą wyznaczników Cramera.

Wyznacznik główny układu przedstawić można w postaci

$$W = \begin{vmatrix} \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12} \underline{\phi}_2 \\ \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22} \underline{\phi}_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} \underline{\phi}_1)(\underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22} \underline{\phi}_2) - (\underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12} \underline{\phi}_2)^2$$

wykorzystujemy zmianę wskaźników sumowania

$$\underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12} \underline{\phi}_2 = \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21} \underline{\phi}_1$$

$$W_{M_1} = \begin{vmatrix} \underline{\phi}_1^T [\underline{k}_{11} & \underline{k}_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix} & \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12} \underline{\phi}_2 \\ \underline{\phi}_2^T [\underline{k}_{21} & \underline{k}_{22}] \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix} & \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22} \underline{\phi}_2 \end{vmatrix}$$

$$W_{M_2} = \begin{vmatrix} \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_1^T [\underline{k}_{11} & \underline{k}_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix} \\ \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2^T [\underline{k}_{21} & \underline{k}_{22}] \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix} \end{vmatrix}$$

stąd

czyli

$$M_1 = W_{M_1} / W, \quad M_2 = W_{M_2} / W$$

$$/4.26/ M_1 = \frac{(\underline{\phi}_1^T [\underline{k}_{11} \quad \underline{k}_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix})(\underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22} \underline{\phi}_2) - (\underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12} \underline{\phi}_2)(\underline{\phi}_2^T [\underline{k}_{21} \quad \underline{k}_{22}] \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix})}{W}$$

$$M_2 = \frac{(\underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} \underline{\phi}_1)(\underline{\phi}_2^T [\underline{k}_{21} \quad \underline{k}_{22}] \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix}) - (\underline{\phi}_1^T [\underline{k}_{11} \quad \underline{k}_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta \underline{T}_1 \\ \Delta \underline{T}_2 \end{Bmatrix})(\underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21} \underline{\phi}_1)}{W}$$

Wstawiając kolejno wartości M_k do równania /4.19/ otrzymujemy sprężysto-plastyczne macierze sztywności elementu prętowego dla wyróżnionych trzech sposobów jego uplastycznienia

$$1^\circ M_1 \neq 0, \quad M_2 = 0$$

$$/4.27/ \quad \Delta \underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix} - \frac{\underline{\phi}_1^T [\underline{k}_{11} \quad \underline{k}_{12}]}{C_A} \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix} \underline{\phi}_1 \Bigg\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} - \frac{\underline{k}_{11} \underline{\phi}_1 \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11}}{C_A} & \underline{k}_{12} - \frac{\underline{k}_{11} \underline{\phi}_1 \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12}}{C_A} \\ \underline{k}_{21} - \frac{\underline{k}_{21} \underline{\phi}_1 \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11}}{C_A} & \underline{k}_{22} - \frac{\underline{k}_{21} \underline{\phi}_1 \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{12}}{C_A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \underline{k}^P \Delta \underline{T}$$

gdzie

$$C_A = \underline{\phi}_1^T \underline{k}_{11} \underline{\phi}_1$$

$$2^\circ M_1 = 0, \quad M_2 \neq 0$$

/4.28/

$$\Delta \underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix} - \frac{\underline{\phi}_2^T [\underline{k}_{21} \quad \underline{k}_{22}]}{C_B} \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix} \underline{\phi}_2 \Bigg\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} - \frac{\underline{k}_{12} \underline{\phi}_2 \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21}}{C_B} & \underline{k}_{12} - \frac{\underline{k}_{12} \underline{\phi}_2 \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22}}{C_B} \\ \underline{k}_{21} - \frac{\underline{k}_{12} \underline{\phi}_2 \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{21}}{C_B} & \underline{k}_{22} - \frac{\underline{k}_{22} \underline{\phi}_2 \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22}}{C_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \underline{k}^P \Delta \underline{T}$$

gdzie

$$C_B = \underline{\phi}_2^T \underline{k}_{22} \underline{\phi}_2$$

$$3^{\circ} \quad M_1 \neq 0 \quad , \quad M_2 \neq 0$$

$$/4.29/ \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \phi_1 \\ M_2 \phi_2 \end{Bmatrix} = \\ = \underset{\sim}{k}^{P_{12}} \Delta T$$

gdzie

$$\underset{\sim}{k}^{P_{12}} = \begin{bmatrix} k_{11}^P & k_{12}^P \\ k_{21}^P & k_{22}^P \end{bmatrix}$$

$$k_{11}^P = k_{11} - \frac{1}{C_{AB}} \left\{ k_{11} \phi_1 (\phi_2^T k_{22} \phi_2 \phi_1^T k_{11} - \phi_1^T k_{12} \phi_2 \phi_2^T k_{21}) + \right. \\ \left. + k_{12} \phi_2 (\phi_1^T k_{11} \phi_1 \phi_2^T k_{21} - \phi_2^T k_{21} \phi_1 \phi_1^T k_{11}) \right\}$$

$$k_{12}^P = k_{12} - \frac{1}{C_{AB}} \left\{ k_{11} \phi_1 (\phi_2^T k_{22} \phi_2 \phi_1^T k_{12} - \phi_1^T k_{12} \phi_2 \phi_2^T k_{22}) + \right. \\ \left. + k_{12} \phi_2 (\phi_1^T k_{11} \phi_1 \phi_2^T k_{22} - \phi_2^T k_{21} \phi_1 \phi_1^T k_{12}) \right\}$$

$$k_{21}^P = k_{21} - \frac{1}{C_{AB}} \left\{ k_{21} \phi_1 (\phi_2^T k_{22} \phi_2 \phi_1^T k_{11} - \phi_1^T k_{12} \phi_2 \phi_2^T k_{21}) + \right. \\ \left. + k_{22} \phi_2 (\phi_1^T k_{11} \phi_1 \phi_2^T k_{21} - \phi_2^T k_{21} \phi_1 \phi_1^T k_{11}) \right\}$$

$$k_{22}^P = k_{22} - \frac{1}{C_{AB}} \left\{ k_{21} \phi_1 (\phi_2^T k_{22} \phi_2 \phi_1^T k_{12} - \phi_1^T k_{12} \phi_2 \phi_2^T k_{22}) + \right. \\ \left. + k_{22} \phi_2 (\phi_1^T k_{11} \phi_1 \phi_2^T k_{22} - \phi_2^T k_{21} \phi_1 \phi_1^T k_{12}) \right\}$$

gdzie

$$C_{AB} = C_A \cdot C_B - (\phi_1^T k_{12} \phi_2)^2$$

Powyższe wyprowadzenie wyrażeń na macierze sprężysto-plastyczne pozwala bezpośrednio obliczyć odpowiednie współczynniki tych macierzy.

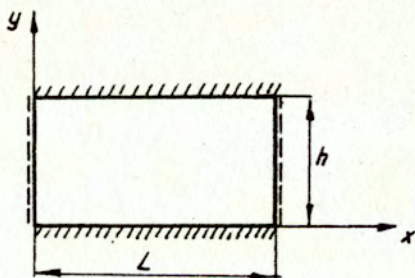
5. Lokalne wyboczenie środka.

Rozważania tego rozdziału oparto na różnych wynikach częściowych otrzymanych między innymi w pracach /86/, /89/, /93/, /114/, /119/, /120/, /130/. Zjawiska towarzyszące lokalnemu wyboczeniu środka oraz determinujące zachowanie się elementu skończonego po utracie stateczności są niezwykle skomplikowane i jak dotychczas wszystkie stosowane w praktyce sposoby ich opisu wymagają wykorzystania wzorów uproszczonych, a częściowo nawet empirycznych.

Obok głównych założeń sformułowanych w rozdziale 2 przyjmujemy, że siła tnąca działająca na element przejmowana jest wyłącznie przez środek, natomiast siła podłużna i moment zginający przenoszone są przez cały przekrój poprzeczny. Określając krytyczne siły wywołujące wyboczenie środka zakładamy ponadto, że siły wewnętrzne działające w środku rozpiętości elementu skończonego, równe jak wynika z rys.2.1, średnim wartościom przyjmowanym przez nie w obydwu przekrojach przywęzłowych, obciążają element równomiernie wzdłuż całej jego długości. Jak się bowiem okazuje, dokładniejsze uwzględnienie rozkładu sił wewnętrznych skomplikowałoby i tak niełatwe zadanie określenia redystrybucji tych sił, wywołanej zmianą przekroju efektywnego środka po jego wyboczeniu, oraz utrudniłoby właściwe zdefiniowanie powierzchni wytrzymałości krańcowej,

decydującej o zniszczeniu elementu. Powierzchnia wytrzymałości krańcowej odgrywa w proponowanym podejściu podobną rolę, co powierzchnia plastyczności w teorii nośności granicznej, ponieważ zakładamy, że stanowi ona potencjał dla uogólnionych deformacji towarzyszących zniszczeniu powyboczeniowemu.

Warunki brzegowe dla środka, który traktujemy jak cienką płytę, są następujące: brzegi równoległe, kontaktujące się z półkami, są utwierdzone, natomiast pozostałe dwa brzegi, traktujemy jako swobodnie podparte /rys.5.1/.



Rys. 5.1.

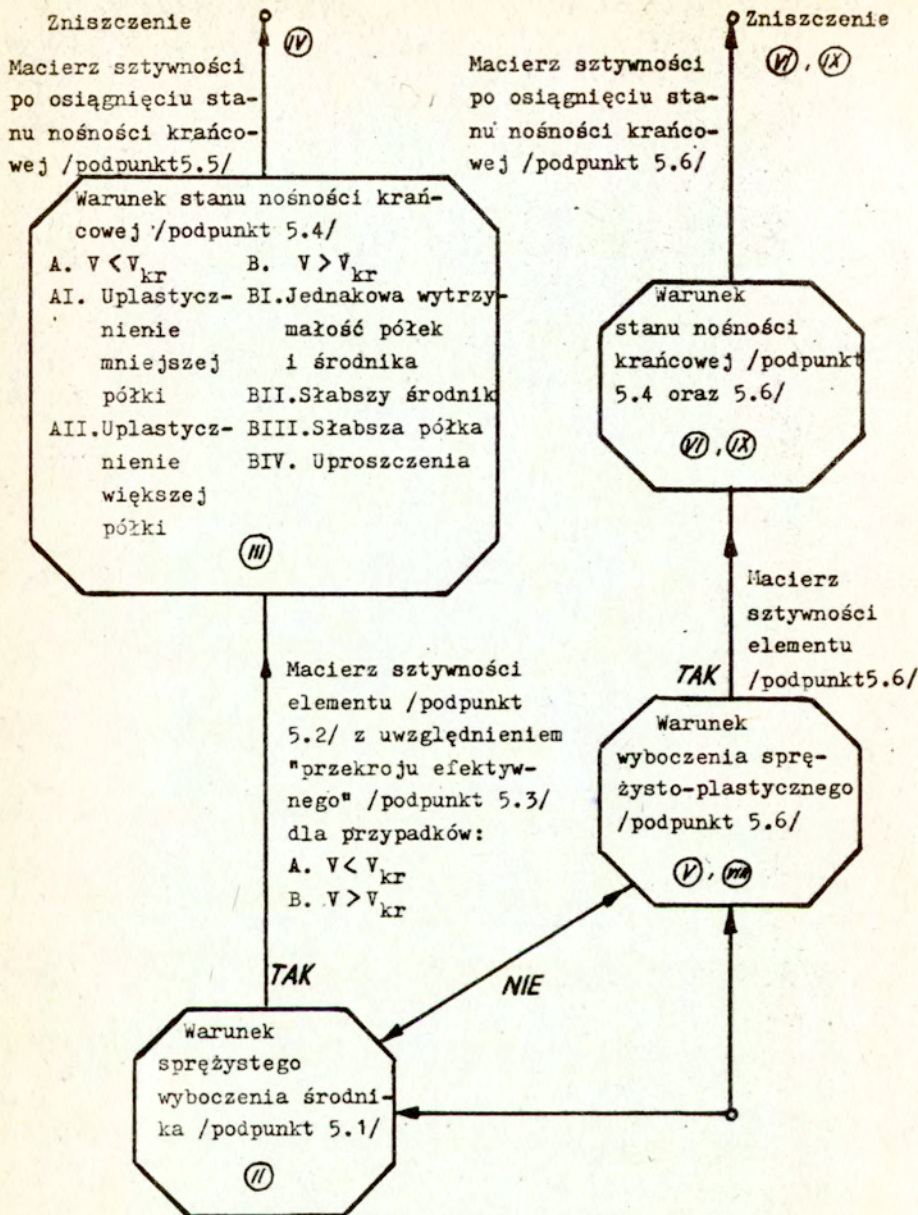
Takie przyjęcie warunków brzegowych wiąże się ściśle z charakterem pracy rozpatrywanej ramy płaskiej w układzie wiązań kadłuba okrętu. Praktyka wykazuje, że usztywnienie dzielące ramę na elementy o długości L są na tyle elastyczne, że dopuszczają możliwość pewnych obrotów środka wokół brzegów o wysokości h , podobnych do obrotów które wystąpiłyby przy swobodnym podparciu. Założenie o utwierdzeniu środka w półkach jest natomiast

tradycyjnie przyjmowane w analizie stateczności dwuteowników i jest uzasadnione wymiarami przekrojów.

Poniżej omawiamy warunki wyboczenia sprężystego, warunki wyboczenia sprężysto-plastycznego, wyprowadzamy macierze sztywności elementu skończonego i definiujemy kryteria zniszczenia, decydujące o postaci powierzchni wytrzymałości krańcowej. Kolejność poszczególnych etapów analizy związanej z wyboczeniem odpowiada ogólnemu schematowi zaprezentowanemu w rozdziale 2 oraz na rys. 2.4. Ponieważ w tym rozdziale musimy rozważyć bardziej szczegółowo zagadnienie wyboczenia środka, przedstawiamy na następnej stronie uproszczony diagram I, który ułatwi prześledzenie zaproponowanego algorytmu obliczeń. Diagram należy, podobnie jak rys. 2.4, czytać w porządku od dołu do góry. Cyfry rzymskie w kółkach na diagramie oznaczają etapy analizy odpowiadające algorytmowi wg rys. 2.4/.

5.1. Warunek sprężystego lokalnego wyboczenia środka

Sposób podparcia, wymiary środka, uogólnione siły wewnętrzne działające w przekrojach przywęzłowych elementu skończonego, a także odpowiadające im przemieszczenia uogólnione pokazane są na rys. rys. 2.1, 2.2, i 2.3. Poszukiwany warunek sprężystego wyboczenia środka możemy określić wykorzystując znaną metodę Timoszenki /114/ badania stateczności płyt izotropowych prostokątnych, pierwotnie płaskich i bardzo cienkich ($L / t_3 > 60$). Opiera się ona na twierdzeniu, że jeśli zaistnieje nowa możliwa postać równowagi układu pod działaniem obciążenia krytycznego, to dla tej postaci zachodzi zawsze minimum całkowitej



V - siła tnąca

V_{kr} - krytyczna siła tnąca

· DIAGRAM I

/nie uwzględnia warunku stanu granicznego/

energii potencjalnej układu.

Można przy tym stosować metodę klasyczną, polegającą na całkowaniu równania różniczkowego, opisującego ugięcie płyty lub też wykorzystać podejście uproszczone, wprowadzając przybliżoną postać funkcji ugięcia założoną w ten sposób, aby posiadała dostateczną liczbę parametrów nieoznaczonych, pozwalających na dopasowanie tej funkcji do ścisłego rozwiązania z dokładnością wystarczającą do celów technicznych. Dla płyt prostokątnych o utwierdzonych brzegach $y = 0$ i $y = h$ oraz swobodnie podpartych brzegach $x = 0$ i $x = L$ /rys.5.1./ rozwiązania takie można znaleźć np. w pracach /86/, /114/, /130/. Zakładana jest przy tym następująca postać powierzchni ugięcia pod obciążeniem krytycznym

$$/5.1/ \quad W = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{L} \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{h} \right)$$

która spełnia warunki brzegowe zadania, a mianowicie:

$$\text{dla } y = 0 \quad \text{i} \quad y = h \quad W=0, \quad \frac{\partial W}{\partial y}=0 \quad \text{/utwierdzenie/}$$

$$\text{dla } x = 0 \quad \text{i} \quad x = L \quad W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0 \quad \text{/swobodne podparcie/}$$

W przypadku obciążeń wywołujących wyboczenie według powierzchni symetrycznej względem osi elementu $x = L/2$ oraz $y = h/2$, /rys. 5.1/, przyjmuje się zwykle dwa wyrazy z powyższego szeregu. Można wtedy otrzymać wyrażenia na siły krytyczne dla omówionych poniżej przypadków obciążeń.

Przypadek 1

Czyste ściskanie w kierunku osi x /114/, str. 349.

Naprężenia krytyczne określa wzór

$$\text{/5.2/} \quad \sigma_{kr} = k \frac{\pi^2 D}{h^2 t_f^3}$$

w którym

$$D = \frac{E t_f^3}{2 / 1 - \nu^2 /}$$

oznacza sztywność zginania walcowego płyty, t_f jest grubością środka, zaś k jest współczynnikiem liczbowym, zależnym od stosunku boków płyty L/h .

W tabelicy 9.14, str. 349 w pracy /114/ podano wartości k dla $L/h \in /0.6 - 3.0/$, otrzymane metodą całkowania równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty.

L/h	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.7	1.73	1.8	2.0	2.5	2.83	3.0
k	13.38	9.73	6.74	5.84	5.45	5.34	5.33	5.33	5.18	4.85	4.52	4.5	4.41

Podłużną siłę krytyczną obliczamy ze wzoru

$$\text{/5.3/} \quad N_{kr} = h t_f \sigma_{kr}$$

Przypadek 2

Czyste ścinanie siłami rozłożonymi równomiernie wzdłuż wszystkich krawędzi, /86/, str.94.

W tym przypadku naprężenia krytyczne można również wyzna-

czyć za pomocą wzoru /5.2/, podstawiając wartość współczynnika k określoną równaniem

$$k = 5.34 + 4 (h/L)^2$$

Równanie to przybliży wartości k wyliczone metodą całkowania równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty z dokładnością do 1 % i zachowuje słuszność dla

$$h/L \in /0,33 + 3,0 /$$

Krytyczną siłą tnącą można obliczyć ze wzoru

$$/5.5/ \quad V_{kr} = h \cdot t_s \cdot \sigma_{kr}$$

Przypadek 3

Czyste zginanie, /114/

Naprężenia krytyczne możemy obliczyć wykorzystując ponownie wzór /5.2/. W tablicy 9.7, str.342 w /114/ podano wartości współczynnika k , obliczonego podobnie, jak w poprzednich dwu przypadkach, który tym razem wynosi

L/h	0.3	0.35	0.4	0.45	0.47	0.48	0.50	0.60	0.90	
k	47.3	43.0	40.7	39.7	39.6	39.6	39.7	41.8	45.3	

Krytyczny moment zginający obliczamy następująco:

$$/5.6/ \quad M_{kr} = \frac{h^2 t_s}{6} \sigma_{kr}$$

Jeżeli siły wewnętrzne działają na środek parami, obciążenie krytyczne można w przybliżeniu określić wzorami opartymi na wynikach badań eksperymentalnych, zaproponowanymi w pracy

/120/

$$\begin{aligned} /5.7/ \quad m^2 + n &= 1 \\ m^2 + v^2 &= 1 \\ v^2 + n &= 1 \end{aligned}$$

w których

$$n = N/N_{kr} \quad , \quad m = M/M_{kr} \quad ; \quad v = V/V_{kr}.$$

N, M i V - siły wewnętrzne stanowiące obciążenie samego środka
W tej samej pracy przyjęto, że wzajemne oddziaływanie trzech
sił wewnętrznych wywołuje sprężyste wyboczenie środka jeśli
spełnione jest równanie

$$/5.8/ \quad F_{kr} / Q / = m^2 + v^2 + n - 1 = 0$$

Stosownie do przyjętych założeń wykorzystujemy uproszczony
opis stanu naprężenia panującego w elemencie, zakładając, że
równanie /5.8/ musi być spełnione jedynie w środku rozpiętości
środnika.

Jeśli oznaczymy odległość między środkiem wysokości środka
orka oraz osią obojętną przekroju poprzecznego przez e i
uwzględnimy wzajemny stosunek pola przekroju środka A_s oraz
przekroju całego elementu A a także odpowiedni stosunek momen-
tów bezwładności środka oraz całego przekroju I_s/I , to
możemy zapisać równanie /5.8/ w postaci funkcji sił wewnętrz-
obciążających cały element (łącznie z półkami i)
nych N_s , V_s i M_s , działających w środku rozpiętości środka

$$\begin{aligned} /5.9/ \quad F_{kr}(Q) &= \frac{N_s}{N_{kr}} \frac{A_s}{A} + \left(\frac{M_s + N_s \cdot e}{M_{kr}} \right)^2 \left(\frac{I_s}{I} \right)^2 \\ &+ \frac{M_s + N_s \cdot e}{N_{kr}} \frac{A_s \cdot e}{I} + \left(\frac{V_s}{V_{kr}} \right)^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami oraz znakami sił wewnętrznych w elemencie jak na rys. 2.2 i 2.3, przyrosty sił wewnętrznych w odległości x od przekroju przywęzłowego "1" są następujące:

$$/5.10/ \quad \Delta \underline{Q}_x = \{ \Delta N_x, \Delta V_x, \Delta M_x \}$$

gdzie:

$$\Delta N_x = \Delta N_1, \quad \Delta M_x = \Delta M_1 - \Delta V_1 x$$
$$\Delta V_x = \Delta V_1$$

Przyrosty przemieszczeń węzłowych oznaczone na rys.2.4 jako

$\Delta \underline{T}_1$ oraz $\Delta \underline{T}_2$ możemy zapisać w postaci wektorów :

/5.11/

$$\Delta \underline{T}_1 = \{ \Delta u_1, \Delta v_1, \Delta \varphi_1 \}_{3 \times 1}$$

$$\Delta \underline{T}_2 = \{ \Delta u_2, \Delta v_2, \Delta \varphi_2 \}_{3 \times 1}$$

Wyrażamy warunek wyboczenia sprężystego poprzez siły wewnętrzne

w przekroju przywęzłowym "1". Podstawiając do /5.9/ związki

/5.10/ wypisane dla $x = \frac{L}{2}$, tj.

$$N_3 = N_1$$

$$M_3 = M_1 - V_1 \cdot L/2$$

$$V_3 = V_1$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 /5.12/ \quad & \left(\frac{I_s \cdot e}{I \cdot M_{kr}} \right)^2 N_1^2 + \left(\frac{I_s}{I \cdot M_{kr}} \right)^2 M_1^2 \\
 & + \left[\left(\frac{L \cdot I_s}{2 M_{kr} I} \right)^2 + \frac{1}{V_{kr}^2} \right] V_1^2 + 2e \left(\frac{I_s}{M_{kr} I} \right)^2 N_1 M_1 \\
 & - L \cdot e \left(\frac{I_s}{M_{kr} I} \right)^2 N_1 V_1 - L \left(\frac{I_s}{M_{kr} I} \right)^2 M_1 V_1 + \\
 & + \left[\frac{A_s}{N_{kr} A} + \frac{A_s \cdot e^2}{N_{kr} I} \right] N_1 - \frac{A_s L e}{2 N_{kr} I} V_1 \\
 & + \frac{A_s e}{N_{kr} I} M_1 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

5.2. Zachowanie się elementu skończonego po sprężystym wyboczeniu środka.

Szywność środka po wyboczeniu sprężystym maleje i dalsze przyrosty sił ściskających i momentów zginających przenoszone są przez zmniejszony w stosunku do przekroju całkowitego przekrój efektywny. Ponieważ, zgodnie z przyjętym założeniem, siła tnąca jest przenoszona wyłącznie przez środek, efektywna szywność środka może być różna w zależności od tego, czy siła ta jest mniejsza, czy większa od siły krytycznej, wywołującej

wyboczenie przy czystym ścinaniu.

A. $V < V_{kr}$ /siła tnąca jest mniejsza od siły krytycznej wywołującej wyboczenie przy czystym ścinaniu /.

Przyrost sił wewnętrznych $\Delta \underline{Q}_1$ w przekroju przywęzłowym 1 możemy podzielić następująco

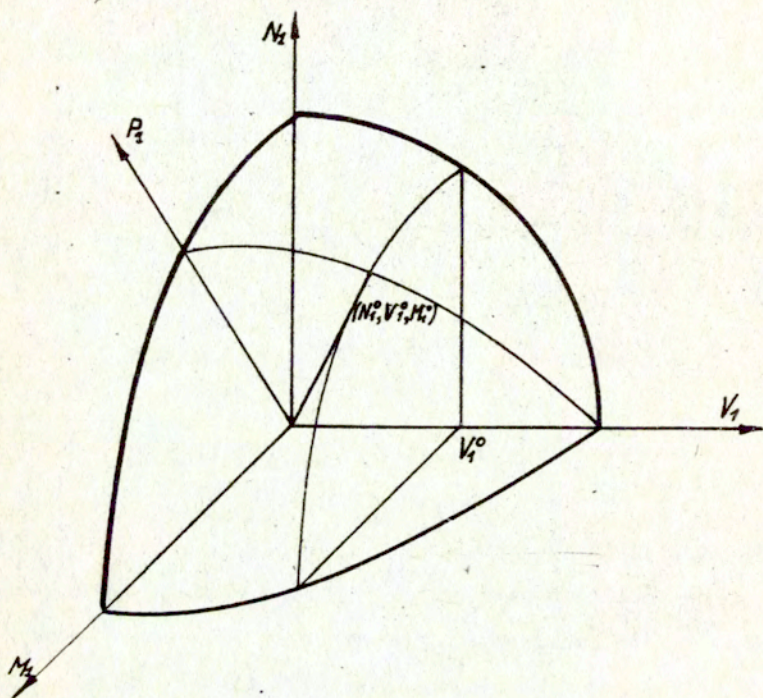
$$\begin{aligned} /5.13/ \quad \Delta \underline{Q}_1 &= \{ \Delta N_1, \Delta V_1, \Delta M_1 \} = \\ &= \{ 0, \Delta V_1, \Delta V_1 \cdot L/2 \} + \\ &+ \{ \Delta N_1, 0, \Delta M_1 - \Delta V_1 \cdot L/2 \} \end{aligned}$$

Podział taki pozwala analizować zmianę sił wewnętrznych w węźle 1 na podstawie składowych tych sił działających w dwu wyróżnionych płaszczyznach, pokazanych na rys. 5.2: w płaszczyźnie $V_1 = V_1^0$ oraz w płaszczyźnie którą wyznaczają osie OP_1 oraz OV_1 .

Koniec wektora uogólnionych sił wewnętrznych

$$\underline{Q}_1^0 = \{ N_1^0, V_1^0, M_1^0 \},$$

działających w przekroju przywęzłowym 1 elementu, wyznacza punkt przecięcia obydwu wyróżnionych płaszczyzn z powierzchnią $F_{kr} / Q = 0$, charakteryzującą warunek wyboczenia sprężystego. Indeks 0 oznacza stan początkowy wektora \underline{Q}_1 po utracie stateczności środka odpowiadający w tym przypadku osiągnięciu przezeń powierzchni wyboczeniowej.



Rys. 5.2.

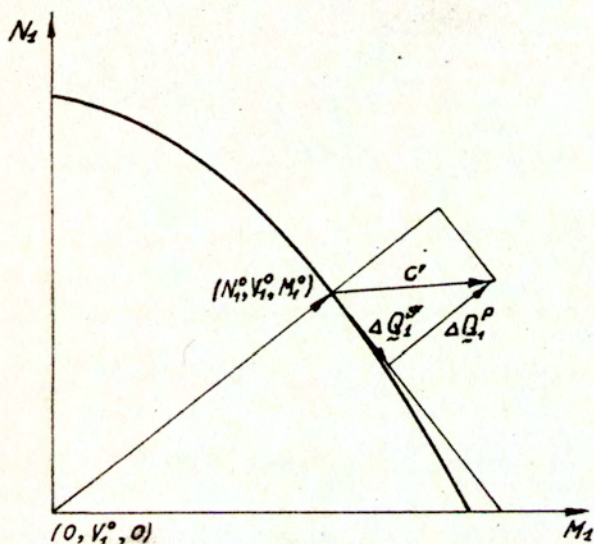
Miarą pierwszej z dwu wydzielonych części przyrostu sił wewnętrznych jest wektor

$$/5.14/ \quad \Delta \underline{Q}_1^{(S)} = \{ 0, \Delta V_1, \Delta V_1 \cdot L/2 \}$$

Składowe tego wektora zależą jedynie od przyrostu siły tnącej. Drugą część przyrostu wektora sił wewnętrznych w przekroju przywęzłowym 1 elementu skończonego oznaczmy \underline{o}' :

$$/5.15/ \quad \underline{c}' = \{ \Delta N_1, 0, \Delta M_1 - \Delta V_1 \cdot L/2 \}$$

Rysunek 5.3 pokazuje interpretację geometryczną wektora \underline{c}' na płaszczyźnie $V_1 = V_1^0$



Rys. 5.3.

Przecięcie $V_1^0 \cap F_{kr} / Q_1 /$ wyznacza krzywą wzajemnego oddziaływania siły podłużnej i momentu zginającego. Podzielmy wektor \underline{c}' na dwie składowe: styczną do krzywej, oznaczoną ΔQ_1^S , oraz równoległą do wektora łączącego punkty $/0, V_1^0, 0/$ i $/N_1^0, V_1^0, M_1^0/$ - oznaczoną ΔQ_1^P .

Całkowity przyrost sił wewnętrznych w przekroju przywęzłowym elementu 1 możemy zapisać w postaci wektora

$$\Delta \underline{Q}_1 = \{ \Delta \underline{Q}_1^S, \Delta \underline{Q}_1^{S'}, \Delta \underline{Q}_1^P \},$$

którego składowe są następujące:

$$\Delta \underline{Q}_1^S = \{ 0, \Delta V_1, \Delta V_1 \cdot L/2 \},$$

$$\Delta \underline{Q}_1^{S'} = \{ \Delta N_1^{S'}, 0, (\Delta M_1 - \Delta V_1 \cdot L/2)^{S'} \},$$

/5.16/

$$\Delta \underline{Q}_1^P = \{ \Delta N_1^P, 0, (\Delta M_1 - \Delta V_1 \cdot L/2)^P \}.$$

Taki podział wektora \underline{Q}_1 pozwoli nam w dalszych rozważaniach wydzielić z niego części sił wewnętrznych związanych z redystrybucją tych sił spowodowaną zmniejszeniem się efektywnej nośności środnika po wyboczeniu. Poszczególne składowe możemy wyrazić w postaci funkcji całkowitego przyrostu sił wewnętrznych

$$\Delta \underline{Q}_1^S = \underline{B}^S \Delta \underline{Q}_1$$

/5.17/

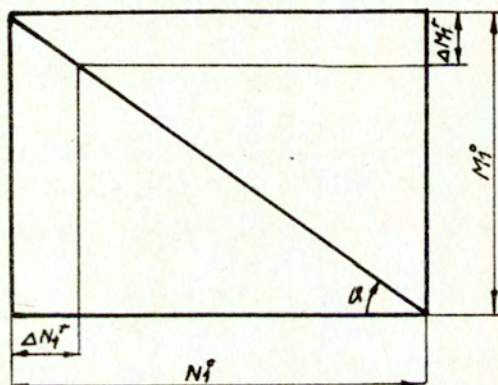
$$\Delta \underline{Q}_1^{S'} = \underline{C}^{S'} \Delta \underline{Q}_1$$

$$\Delta \underline{Q}_1^P = \underline{C}^P \Delta \underline{Q}_1$$

Jawne postaci macierzy \underline{B}^S , $\underline{C}^{S'}$, \underline{C}^P wyprowadzamy z odpowiednich związków geometrycznych w dodatku 2.

Przyrost siły tnącej jest przenoszony wyłącznie przez środnik. Zakładamy, że cały przekrój środnika może przenosić siłę tnącą tak długo, dopóki nie osiągnie ona wartości siły

wyboczeniowej krytycznej przy czystym ścinaniu. Przyrosty siły tnącej, decydująco o wielkości wektora ΔQ_1^s , zdefiniowanego wzorem /5.14/, pociągają za sobą redystrybucję siły podłużnej i momentu zginającego określoną wektorem ΔQ_1^r /rys.5.4/.



Rys. 5.4

Wektor ΔQ_1^r o składowych

$$\Delta Q_1^r = \{ \Delta N_1^r, 0, \Delta M_1^r \}$$

jest prostopadły do osi V, jego składowe ΔN_1^r oraz

ΔM_1^r działały początkowo w przekroju całkowitym, zaś po

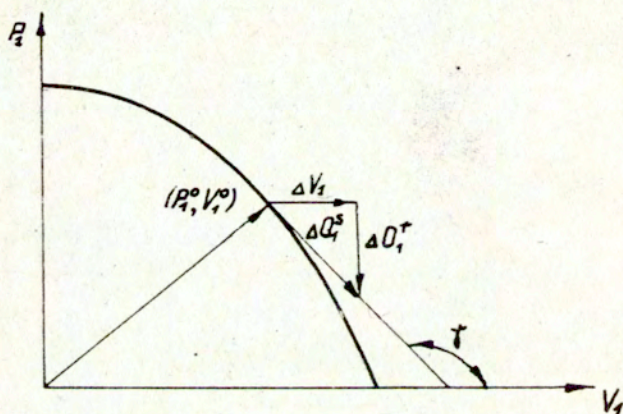
utracie stateczności środka obciążają wyłącznie przekrój

efektywny, określeniem którego zajmiemy się w następnym pod-

punkcie. Zachodzi przy tym równość

$$\frac{\Delta N_1^r}{N_1^o} = \frac{\Delta M_1^r}{M_1^o}$$

wynikająca z faktu, że redystrybucja sił może być zinterpretowana graficznie, jak na rys. 5.4 oraz rys. 5.5.



Rys. 5.5

Składową podlegającą redystrybucji możemy wyrazić w postaci funkcji całkowitego przyrostu sił wewnętrznych

$$/5.18/ \quad \Delta \underline{Q}_1^r = \underline{C}^r \Delta \underline{Q}_1$$

Macierz \underline{C}^r definiujemy na podstawie związków geometrycznych

w dodatku 2

Składowa $\Delta \underline{Q}_1^r$ jak wspomnieliśmy uprzednio, odciąża przekrój całkowity, w którym działa styczna do powierzchni wybożeniowej składowa $\Delta \underline{Q}_1^{s'}$ i obciąża przekrój efektywny. W przekroju efektywnym działa ponadto składowa $\Delta \underline{Q}_1^p$. Fakt ten możemy zapisać następująco:

$$/5.19/ \quad \Delta \underline{Q}_1^{s'} = \Delta \underline{Q}_1^{s'} - \Delta \underline{Q}_1^r = (\underline{\underline{C}}^{s'} - \underline{\underline{C}}^r) \Delta \underline{Q}_1 = \underline{\underline{B}}^{s'} \Delta \underline{Q}_1$$

przy czym składowa $\Delta \underline{Q}_1^{s'}$ działa w całym przekroju oraz

$$/5.20/ \quad \Delta \underline{Q}_1^{p_r} = \Delta \underline{Q}_1^p + \Delta \underline{Q}_1^r = (\underline{\underline{C}}^p + \underline{\underline{C}}^r) \Delta \underline{Q}_1 = \underline{\underline{B}}^{p_r} \Delta \underline{Q}_1$$

przy czym składowa $\Delta \underline{Q}_1^{p_r}$ działa w przekroju efektywnym.

Równania /5.17/, /5.19/ i /5.20/ możemy sformułować łącznie

$$/5.21/ \quad \{\Delta \underline{Q}_1^s, \Delta \underline{Q}_1^{s'}, \Delta \underline{Q}_1^{p_r}\} = [\underline{\underline{B}}^s \quad \underline{\underline{B}}^{s'} \quad \underline{\underline{B}}^{p_r}]^T \Delta \underline{Q}_1$$

Deformacje towarzyszące tym składowym wyniosą

$$/5.22/ \quad \Delta \underline{T}_1^s = \{\Delta u_1^s, \Delta v_1^s, \Delta \varphi_1^s\} = \underline{\underline{k}}^s \Delta \underline{Q}_1^s$$

$$\Delta \underline{T}_1^{s'} = \underline{\underline{k}}^{s'} \Delta \underline{Q}_1^{s'}$$

$$\Delta \underline{T}_1^{p_r} = \underline{\underline{k}}^{p_r} \Delta \underline{Q}_1^{p_r}$$

Podstawiając równanie /5.22/ do wzoru /5.21/ otrzymamy

/5.23/

$$\begin{Bmatrix} \Delta \underline{\tau}_1^S \\ \Delta \underline{\tau}_1^{S'} \\ \Delta \underline{\tau}_1^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}^S & 0 & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{k}^{S'} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\sim}{k}^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{Q}_1^S \\ \Delta \underline{Q}_1^{S'} \\ \Delta \underline{Q}_1^P \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}^S \underset{\sim}{B}^S \\ \underset{\sim}{k}^{S'} \underset{\sim}{B}^{S'} \\ \underset{\sim}{k}^P \underset{\sim}{B}^P \end{bmatrix} \Delta \underline{Q}_1$$

Całkowity przyrost deformacji równy jest sumie składowych $\Delta \underline{\tau}_1^S$, $\Delta \underline{\tau}_1^{S'}$ oraz $\Delta \underline{\tau}_1^P$

/5.24/

$$\Delta \underline{\tau}_1 = \Delta \underline{\tau}_1^S + \Delta \underline{\tau}_1^{S'} + \Delta \underline{\tau}_1^P =$$

$$= [\underset{\sim}{k}^S \underset{\sim}{B}^S + \underset{\sim}{k}^{S'} \underset{\sim}{B}^{S'} + \underset{\sim}{k}^P \underset{\sim}{B}^P] \Delta \underline{Q}_1 = \underset{\sim}{s}_{11} \Delta \underline{Q}_1$$

/5.25/

$$\Delta \underline{Q}_1 = \underset{\sim}{s}_{11}^{-1} \Delta \underline{\tau}_1 = \underset{\sim}{k}_{11}^{(W)} \Delta \underline{\tau}_1$$

$\underset{\sim}{k}_{11}^{(W)}$ 3×3 jest podmacierzą powyoboczeniowej macierzy sztywności $\underset{\sim}{k}^{(W)}$ 6×6 .

W identyczny sposób wyprowadzamy podmacierz $\underset{\sim}{k}_{22}^{(W)}$. Podmacierze $\underset{\sim}{k}_{12}^{(W)}$ oraz $\underset{\sim}{k}_{21}^{(W)}$ wyznaczamy z warunków równowagi elementu

skończonego /wzór 5.10/. Powyboczeniowe zachowanie elementu wyraża związek

$$/5.26/ \quad \Delta \underline{Q} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} k_{11}^{(W)} & k_{12}^{(W)} \\ k_{21}^{(W)} & k_{22}^{(W)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{array} \right\}$$

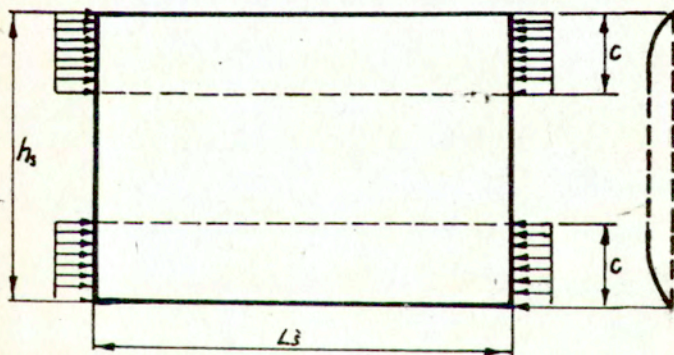
Jawne postaci macierzy $\underline{B}^{Sr'}$ i \underline{B}^{Pr} wyprowadzamy w DODATKU 2.

- B. $V > V_{kr}$ /siła tnąca jest większa od siły krytycznej, wywołującej wyboczenie przy czystym ścinaniu/.

Przyjmujemy, że jeżeli siła tnąca przekracza wartość krytyczną przy czystym ścinaniu, to środnik nie jest w stanie przetransmitować po wyboczeniu sprężystym naprężeń normalnych. Przyrosty siły podłużnej i momentu zginającego mogą być przeniesione jedynie przez półki, zaś dalsze przyrosty siły tnącej rekompensują naprężenia powstające w strefie rozciąganej środnika, którego sztywność jednocześnie maleje. W tym wypadku zakładamy więc, że macierz sztywności powyboczeniowej elementu skończonego $\underline{k}^{W/}$ jest podobna do macierzy sztywności sprężystej, w której wielkości pola przekroju A i momentu bezwładności I zastąpione zostaną przez odpowiadające im wartości dla przekroju efektywnego A_{ef} , I_{ef} .

5.3. Przekrój efektywny po sprężystym wyboczeniu łożadka.

W pracy /114/ zaproponowano, aby przy obliczeniach nośności krańcowej ściskanych płyt prostokątnych zastosować spostrzeżenie T.v Karmana, który zauważył, że obciążenie przekazywane na płytę przez sztywny blok /rys.5.6/ po jej sprężystym wyboczeniu przejmowane jest ostatecznie przez dwa pasma o szerokości "c" po obydwu stronach płyty i że na tych pasmach rozkład obciążenia jest równomierny. Wówczas można nie uwzględniać środkowej partii płyty i traktować oba pasma jak płytę prostokątną o szerokości 2c. Przyjmując, że obciążenie krańcowe równe jest granicy plastyczności materiału można wyznaczyć c z warunku



Rys. 5.6

utruty stateczności określonego wzorami /5,2/ oraz /5,3/, w którym kładziemy $k = 4$ oraz $h = 2c$. Widać więc, że takie podejście eliminuje wpływ wysokości środka na obciążenie krańcowe i uzależnia je jedynie od kwadratu grubości płyty t_s . Rozwiązanie to jest ponadto nieprzydatne ze względu na fakt, że otrzymano je zakładając swobodne podparcie wszystkich brzegów płyty. Dlatego zastąpimy je innym rozwiązaniem, również opisanym w w/w pracy i opartym na wielu doświadczeniach, które pozwoliły określać szerokość c w zależności od wymiarów płyt. Na rys. 9.61, str.384 w pracy /114/ podano wartości współczynnika c w funkcji parametru $\sqrt{E \cdot t_s / (6\sigma \cdot L)}$. Na ich podstawie można założyć, że szerokość c wynosi w przybliżeniu

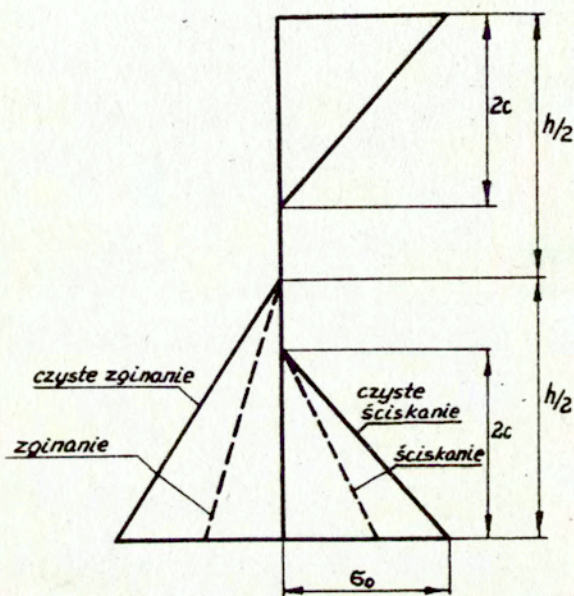
/5,27/

$$c = 1,26 t_s \sqrt{E / 6\sigma}$$

przy czym t_s oznacza grubość środka, E - moduł sprężystości, zaś 6σ - granicę plastyczności materiału środka.

Równomiernemu rozkładowi naprężeń na szerokości c przy czystym ściskaniu odpowiada wyidealizowany rozkład naprężeń, pokazany na rys. 5.7. Idealizacja polega na tym, że naprężenie 6σ w skrajnych włóknach środka zmniejszają się do zera w odległości $2c$, tworząc dwa trójkątne rozkłady naprężeń.

Kiedy na środek działa czysty moment zginający, strefa ściskana jest podobna do poprzednio omówionej, a więc jej szerokość wynosi c , podczas gdy szerokość strefy rozciąganej, w pełni efektywnej, wynosi $h/2$. Przedstawia to linia ciągła na



Rys. 5.7

rys. 5.7. Mamy więc do czynienia z niepełnym wykorzystaniem efektywnej szerokości strefy ściskanej, lecz zjawisko to nie ma poważniejszego ujemnego znaczenia, ponieważ i tak większa część momentu zginającego przenoszona jest przez pówki.

Jeżeli siła ściskająca działa łącznie z momentem zginającym, efektywna szerokość strefy ściskanej jest równa c . Efektywna szerokość b na drugim brzegu zależy od stosunku siły

ściskającej do momentu zginającego, zmieniając się od c dla przypadku czystego ściskania do $h/2$ dla przypadku czystego zginania. Przyjmując, że zmiana ta jest liniowa możemy obliczyć efektywną szerokość b ze wzoru

$$/5.28/ \quad b = (h/2) - (h - 2c) \cdot \Psi / \Pi ,$$

w którym

$$\Psi = \arctg (N \cdot h/M) ,$$

Uwzględniając trzecią wewnętrzną siłę uogólnioną - ścinanie, możemy podobnie jak w poprzednim podpunkcie, wyróżnić 2 przypadki

A. $V \leq V_{kr}$ / siła tnąca jest mniejsza od siły krytycznej, wywołującej wyboczenie przy czystym ścinaniu/.

Zdefiniowana powyżej efektywna szerokość środnika zmniejsza się w miarę wzrastania siły tnącej aż do zera w chwili, gdy siła ta osiągnie wartość wywołującą wyboczenie przy czystym ścinaniu. Zakładając zmienność liniową szerokości efektywnej środnika w funkcji siły poprzecznej możemy napisać wzory

$$/5.29/ \quad C_v = C (1 - V / V_{kr}) ,$$

$$/5.30/ \quad b_v = b (1 - V / V_{kr}) .$$

B. $V > V_{kr}$ /siła tnąca jest większa od siły krytycznej, wywołującej wyboczenie przy czystym ścinaniu/.

W tym przypadku efektywna szerokość środnika maleje do

zera / $C_v = 0$, $b_v = 0$ /, naprężenia normalne przenoszone są wyłącznie przez półki, zaś przyrost siły ścinającej przenoszony jest, jak już napisaliśmy w poprzednim podpunkcie przez część rozciąganą środka.

5.4. Nośność krańcowa po sprężystym wyboczeniu środka

- A. $V \leq V_{kr}$ / siła tnąca jest mniejsza od siły krytycznej, wywołującej wyboczenie przy czystym ścinaniu/.

W tym przypadku półki przenoszą wyłącznie naprężenia normalne, podczas gdy środek przenosi naprężenia normalne oraz naprężenia ścinające, które wynoszą

$$\tau = V / A_s$$

A_s - oznacza przekrój środka

Obliczając zredukowaną wartość granicy plastyczności możemy uwzględnić naprężenia ścinające za pomocą warunku plastyczności Treski

$$/5.31/ \quad \sigma_x^2 + 4 \tau_{xy}^2 = 4k^2$$

Stąd

$$\sigma_x = 2 \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}$$

przy czym σ_x oznacza średnie naprężenia normalne

Jeśli podstawimy do powyższego wyrażenia wartość

$$k = \sigma_0 / 2,$$

to

/5.32/

$$\sigma_{ozr} = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{V}{A_s}\right)^2}$$

Posługiwanie się zredukowaną wartością granicy plastyczności pozwala rozpatrywać podczas analizowania rozkładu naprężeń jedynie naprężenia normalne. Naprężenia ścinania uwzględnione są automatycznie dzięki wzorowi /5.32/.

Przyjmijmy następujące KRYTERIUM ZNISZCZENIA ELEMENTU , którego środek uległ sprężystemu wyboczeniu:

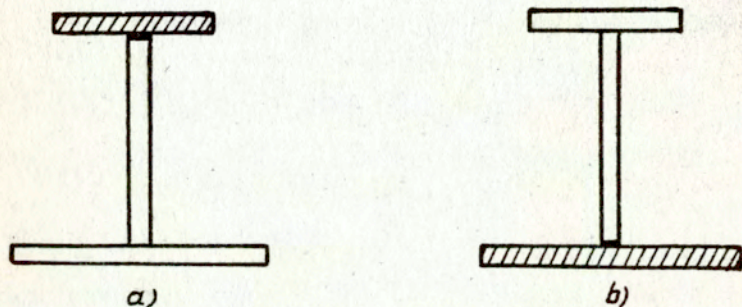
Element osiąga wytrzymałość krańcową gdy pólka i sąsiednie skrajne włókno środka na jednym brzegu, lub na obydwu brzegach jednocześnie, uplastyczniają się.

Przyjęcie takiego kryterium jest konsekwencją założenia, że środki elementów skończonych mogą ulegać lokalnym wybočeniom przy nieograniczonych zmianach geometrii, tzn wielkość ugięcie środka po wyboczeniu w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ramy nie ma żadnego wpływu na wytrzymałość krańcową.

Sposób zniszczenia zależy więc jedynie od wartości i proporcji sił wewnętrznych oraz od materiału i wymiarów elementu.

Analizując różne typowe rozkłady naprężeń dla poszczególnych miejsc zniszczenia można wyróżnić pewną ograniczoną liczbę charakterystycznych przypadków, odpowiadających różnym proporcjom sił wewnętrznych. Rozpatrzmy te przypadki,

AI. Zniszczenie następuje poprzez uplastycznienie mniejszej pólki i przyległego skrajnego włókna środnika, rys. 3.8a.



Rys. 5.8

Zakładamy, że momenty od wyidealizowanych, jak na rys.5.7, pól naprężeń, odpowiadających rozpatrywanemu sposobowi zniszczenia, będziemy liczyć względem osi przechodzącej przez środek wysokości przekroju. Jeżeli moment zginający $M = 0$, to siła normalna, charakteryzująca warunek nośności krańcowej, N_{kn} zależy od wartości siły tnącej i wynosi

$$N_{kn} = 2(\sigma_0 \cdot A_{mp} + \sigma_0 t_s c) \quad , \text{ gdy } V = 0,$$

ponieważ efektywna szerokość środnika po stronie ściskanej wynosi wtedy c oraz

$$N_{kn} = 2 \cdot \sigma_0 \cdot A_{mp} \quad , \quad \text{gdy } V = V_{kr}$$

ponieważ efektywna szerokość środka zmniejsza się wówczas do zera.

Jeżeli siła podłużna $N = 0$, to moment zginający charakteryzujący warunek nośności krańcowej M_{kn} zależy również od siły tnącej, a ponadto od tego, w jakiej relacji pozostają względem siebie strefa ściskana i strefa rozciągana środka. Miarą tej relacji może być wielkość

$$t_s (b/2 - c)$$

Gdy $V = 0$ oraz

$$A_{mp} > A_{dp} + t_s (b/2 - c),$$

to

$$M_{kn} = \sigma_0 A_{mp} h + \sigma_0 t_s (c(h - 2c/3)) - \sigma_0 t_s b^2/6$$

Gdy $V = 0$ oraz

$$A_{mp} \leq A_{dp} + t_s (b/2 - c),$$

to

$$M_{kn} = \sigma_0 A_{mp} h + \sigma_0 t_s c (h - 2c/3) - (\sigma_0 A_{mp} + \sigma_0 t_s c) / (A_{dp} + t_s b/2) t_s b^2/6$$

Gdy siła tnąca $V = V_{kr}$, szerokość efektywna środka maleje do zera, więc wówczas

$$M_{knp} = \sigma_0 A_{mp} h$$

Wobec liniowego związku pomiędzy naprężeniami normalnymi i ułamkiem M/N powierzchnię stanów granicznych możemy aproksymować płaszczyzną o równaniu

/5.33/

$$F_{kn} = \frac{N}{N_{kn} - (N_{kn} - N_{knp}) V/V_{kr}} + \frac{M}{M_{kn} - (M_{kn} - M_{knp}) V/V_{kr}} - 1 = 0$$

Na rys.5.9, przedstawiającym warstwicę powierzchni stanu krańcowego w płaszczyźnie M-N dla $V=0$ oraz $V=V_{kr}$, wzorowi /5.33/ odpowiadają linie $N_{kn} - M_{kn}$ oraz $N_{knp} - M_{knp}$. Współrzędne charakterystycznych punktów na tym rysunku obliczono dla dwuteownika stanowiącego element ramy z przykładu nr.6 rozdział 7.

Jeśli moment jest ujemny /wywołuje rozciąganie w mniejszej półce/, to będzie on rekompensował oddziaływanie siły ściskającej aż do pewnej, największej co do modułu wartości, odpowiadającej punktowi L na rys. 5.9.

$$M_{max} = \sigma_0 (A_{dp} + A_{dp}) h/2 + t_3 c \sigma_0 (h/2 - \frac{2}{3} c) + L \cdot h^2 \sigma_0 / 12$$

dla $V = 0$

oraz

$$M_{Pmax} = \sigma_0 (A_{dp} + A_{mp}) h/2$$

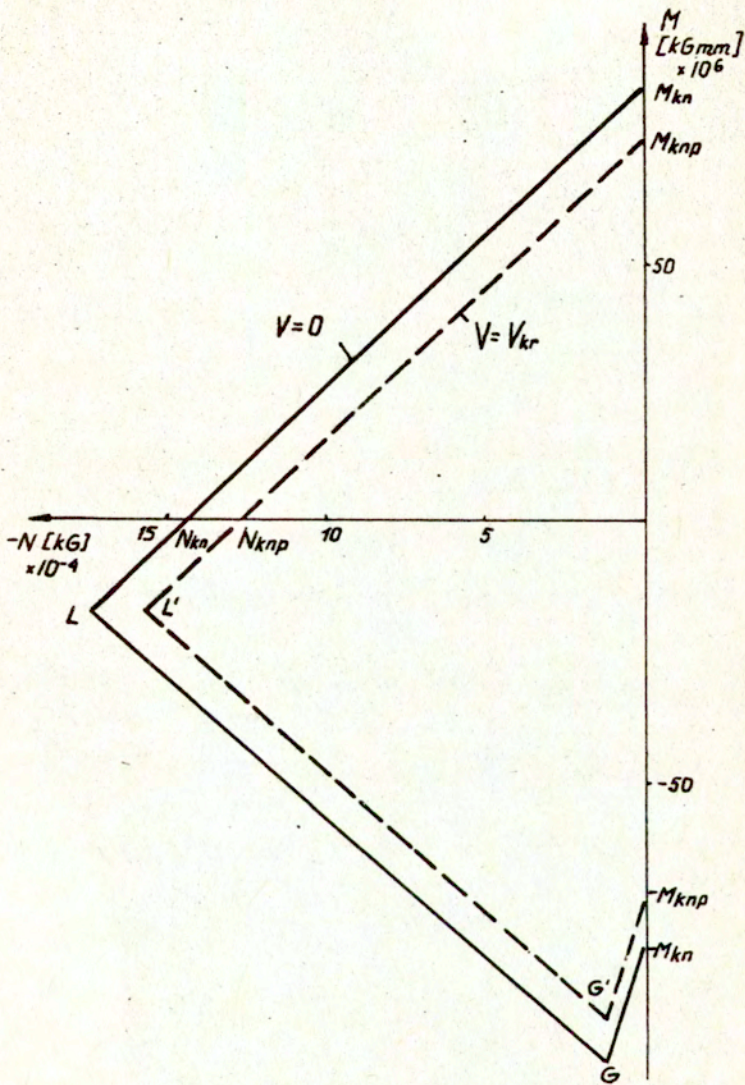
dla $V = V_{kr}$

Odpowiednie wartości siły podłużnej N w punkcie L wynoszą

$$N_{Mmax} = \sigma_0 A_{dp} + t_3 c \sigma_0 - \sigma_0 A_{mp} - t_3 h \sigma_0 / 4,$$

$$N_{MmaxP} = \sigma_0 (A_{dp} - A_{mp})$$

Powierzchnia krańcowych stanów sił wewnętrznych ma w tym przypadku równanie



Rys. 5.9.

/5.34/

$$F_{kn} = \frac{N - N_1}{N_2 - N_1} + \frac{M}{M_2} = 0,$$

przy czym

$$N_{max} = \sigma_0 (A_{mp} + A_{dp}) + 2 t_s c \sigma_0$$

$$N_{maxp} = \sigma_0 (A_{mp} + A_{dp})$$

$$N_1 = N_{kn} - (N_{kn} - N_{knp}) \cdot (V / V_{kr}),$$

$$N_2 = N_{max} - (N_{max} - N_{maxp}) \cdot (V / V_{kr}),$$

$$M_2 = \sigma_0 \cdot (A_{dp} - A_{mp}) \cdot h/2$$

Na rys. 5.9 stanowi temu odpowiada

dla warstwy $V = 0$ odcinek $N_{kn} - L$ oraz dla warstwy

$V = V_{kr}$ odcinek $N_{knp} - L'$.

Jeżeli podłużna siła ściskająca jest mała co do modułu, zaś wartość bezwzględna momentu ujemnego, wywołującego rozciąganie

w mniejszej półce, jest stosunkowo duża, mniejsza półka może

ulec zniszczeniu przy towarzyszących temu stanowi normalnych

naprężeniach rozciągających. Przypadkowi temu odpowiada na

rys. 5.9. linia $G - M_{kn}$ / dla $V = 0$ / oraz linia $G' - M_{knp}$

/dla $V = V_{kr}$ /. Jeśli oznaczymy współrzędne punktu G przez

$N_3, 0, M_3$ /, zaś moment zginający odpowiadający punktowi G'

przez M_4 , to równanie płaszczyzny opisującej omawiany warunek

stanu krańcowego przybierze postać

$$/5.35/ F_{kn} = - (N - N_3) / N_3 + (M + M_3) / (M_4 - M_3) = 0$$

przy czym

$$N_3 = N_{Mmax} - (N_{Mmax} - N_{Mmaxp}) \cdot (V/V_{kr})$$

$$M_3 = M_{max} - (M_{max} - M_{Pmax}) \cdot (V/V_{kr})$$

$$M_4 = M_{kn} - (M_{kn} - M_{knp}) \cdot (V/V_{kr})$$

III. Zniszczenie następuje poprzez uplastycznienie większej pólki oraz przyległego skrajnego włókna średnika, rys. 3.8b.

Dla tego przypadku możemy wypisać podobne związki, wynikające z tych samych założeń odnośnie pól naprężeń towarzyszących zniszczeniu. Otrzymamy w ten sposób równanie powierzchni krańcowej, której odpowiadają na rys. 5.9 warstwy LG /dla $V = 0$ / oraz L'G' dla $V = V_{kr}$ /. Wtedy

/5.36/

$$F_{kn} = -(M + M_2) / (M_3 - M_2) - (N - N_2) / (N_3 - N_2) = 0$$

W ten sposób otrzymaliśmy część powierzchni, charakteryzującej warunek nośności krańcowej, dla $V \leq V_{kr}$. Dla uproszczenia przyjmujemy założenie, że przy sile podłużnej $N > 0$ /rozciąganie/ nie dochodzi do wyboczenia i element będzie wykazywał pełną wytrzymałość plastyczną.

B. $V > V_{kr}$ / siła tnąca jest większa od siły krytycznej, wywołującej wyboczenie przy czystym ścinaniu/.

Po wyboczeniu sprężystym, gdy siła tnąca osiągnie wartość krytyczną, odpowiadającą czystemu ścinaniu, średnik nie prze-

nosi już naprężeń normalnych i pozostają w nim jedynie naprężenia spowodowane ścinaniem. Dalsze przyrosty siły tnącej spowodują rozwój odkształceń w strefie rozciągania w środku. W efekcie górna i dolna półka zostaną dodatkowo obciążone równomiernie rozłożoną podłużną siłą ściskającą \bar{F}_{pr} oraz obciążeniem ciągłym p

$$/5.37/ \quad \bar{F}_{pr} = (V - V_{kr}) / 2 .$$

$$p = (V - V_{kr}) / h_s .$$

Wyliczone na podstawie wzorów /5.37/ wartości tych dodatkowych obciążeń, stanowią ich górne, bezpieczne oszacowania i są proporcjonalne do nadwyżki siły tnącej nad krytyczną siłą tnącą.

Półka jest ponadto obciążona siłą podłużną \bar{F}_c , spowodowaną siłą podłużną N oraz momentem zginającym M /część którego pochodzi od siły tnącej V /. Całkowite obciążenie półki składa się więc z obciążenia ciągłego p oraz siły podłużnej \bar{F}_p , równej

$$/5.38/ \quad \bar{F}_p = \bar{F}_{pr} + \bar{F}_c$$

Rozpatrzmy trzy charakterystyczne przypadki postaci zniszczenia, które mogą, zgodnie z podanym na początku tego podpunktu kryterium, spowodować osiągnięcie przez element wytrzymałości krańcowej.

BI. Jednakowa wytrzymałość powyboczeniowa środka i półki.

W tym przypadku zniszczenie wywołane jest równoczesnym uplastycznieniem pólki oraz skrajnego włókna środka. Oznaczmy naprężenia główne, które panują w środku w chwili gdy siła tnąca V osiąga na skutek wzrostu obciążenia swoją wartość krytyczną V_{kr} , przez σ_1 i σ_2 . Jak już wspomnieliśmy, przyrosty siły tnącej ponad jej wartość krytyczną mogą być przenoszone przez środek kosztem rozwoju odkształceń w strefie rozciąganej, którym towarzyszy przyrost głównych naprężeń rozciągających $\Delta \sigma_1$, przy niezmiennych głównych naprężeniach ściskających $\Delta \sigma_2 = 0$. Uplastycznienie materiału środka, decydujące o osiągnięciu przez element wytrzymałości końcowej nastąpi, gdy całkowita siła tnąca osiągnie wartość maksymalną równą

$$/5.39/ \quad V_{kn} = V_{kr} + \Delta V$$

Założone dla tego przypadku równoczesne zniszczenie pólki możemy opisać traktując ją jak belkę o utwierdzonych końcach, obciążoną siłą podłużną \bar{F}_p oraz obciążeniem ciągłym p . Siła podłużna, która pojawi się w półce pod wpływem momentu zginającego

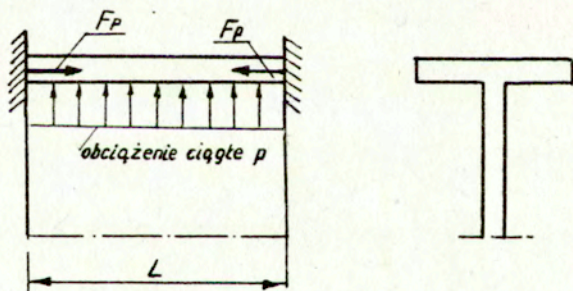
$$V_1 \frac{L}{2} - V_{1x}$$

wywołanego siłą tnącą, ma przeciwne znaki w punktach węzłowych 1 oraz 2 i znika w środku rozpiętości elementu, dla $x = L/2$. Jej wpływ na uplastycznienie pólki jest więc stosunkowo niewielki i może być pominięty. Fakt ten uwzględniamy w oznaczeniach zapisując go następująco

$$F_p \cong \bar{F}_p \quad \text{oraz} \quad \bar{F} \cong \bar{F}_c$$

Zakładamy zatem, że siła podłużna obciążająca pólkę F_p jest wywołana jedynie momentem zginającym M , siłą podłużną N oraz siłą \bar{F}_{pr} .

Siłę podłużną F_p oraz pochodzący od obciążenia ciągłego p moment zginający M , które działając na pólkę elementu dwuteowego o długości L , jak na rys. 5.10, wywołują jego zniszczenie spowodowane uplastycznieniem tej pólki, możemy obliczyć na przykład według podejścia kinematycznego teorii plastyczności, zakładając mechanizm zniszczenia polegający na utworzeniu trzech przegubów plastycznych: po jednym na każdym końcu i jednego w środku rozpiętości elementu.



Rys. 5.10

Otrzymamy następujące wartości

$$F_p = \bar{F}_{pr} + \bar{F} \quad ,$$

/5.40/

$$\bar{M} = pL^2 / 16$$

Podstawiając te wartości do warunku plastyczności, który -
przyjmie postać

/5.41/

$$\frac{\bar{M}}{M_{gr}} + \left(\frac{F_p}{F_{pgr}} \right)^2 - 1 = 0 \quad ,$$

możemy obliczyć siłę podłużną F . Wartości graniczne momentu
zginającego M_{gr} oraz siły podłużnej F_{pgr} określają przy tym
wzory

/5.41a/

$$F_{pgr} = \sigma_0 b_p t_p$$

$$M_{gr} = \sigma_0 b_p t_p^2 / 4$$

Z zależności /5.37/ wynika, że

$$\bar{M} = (v - v_{kr}) \cdot L^2 / (16 \cdot h) \quad ,$$

$$F_p = (v - v_{kr}) / 2 + \bar{F}$$

Ostatecznie więc warunek plastyczności przybierze postać

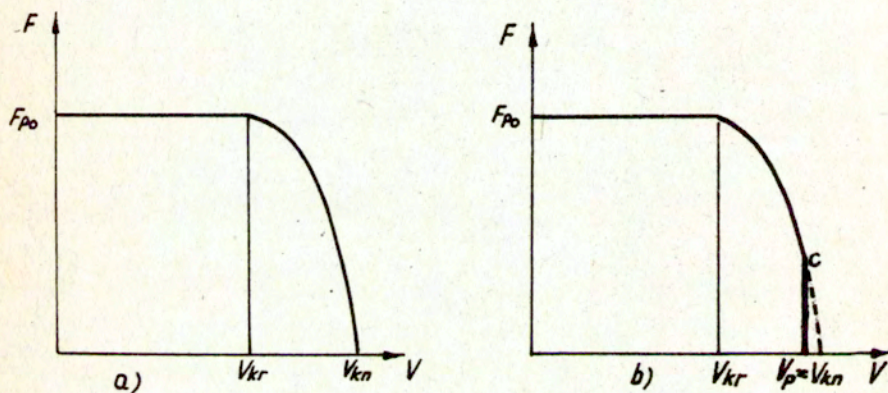
/5.42/

$$\frac{(v - v_{kr}) L^2 / (4h)}{\sigma_0 \cdot b_p t_p^2} + \frac{(v - v_{kr})^2 / 4 + \bar{F}(v - v_{kr}) + \bar{F}^2}{\sigma_0 \cdot b_p t_p} - 1 = 0$$

Rozwiązując to równanie ze względu na \bar{F} otrzymamy

$$/5.43/ \quad \bar{F}_{1/2} = \pm \sqrt{1 - (V - V_{kr})^2 L^2 / 4 \sigma_0 b_p t_p^2 h} \quad (\sigma_0 b_p t_p) - \frac{\sqrt{V - V_{kr}}}{2}$$

Znak pierwszego składnika w powyższym wyrażeniu przyjmujemy taki sam, jak znak F . Równanie /5.43/ możemy przedstawić graficznie jak na rys. 5.11a.



Rys. 5.11.

Wyrażając \bar{F} w funkcji M i N możemy otrzymać równanie powierzchni wytrzymałości krańcowej w przestrzeni sił uogólnionych M , N oraz V .

Z równania /5.43/ wynika, że gdy $V = V_{kr}$, to siła podłużna

F działająca w półce i wywołująca jej uplastycznienie wynosi

$$\bar{F} = \bar{F}_{po} = A_p \cdot \bar{\sigma}_o$$

Zniszczenie elementu może również nastąpić przy sile podłużnej $F = 0$, gdy siła tnąca przybierze wartość krańcową $V = V_{kn}$.

BII Słabszy środnik /Materiał skrajnego włókna środnika uplastycznia się przed uplastycznieniem się półki/.

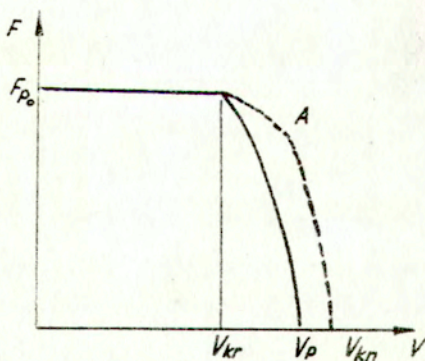
Pomimo uplastyczniania się kolejnych włókien środnika, półki zachowują się sprężyste i mogą nadal przenosić dalsze przyrosty siły podłużnej i momentu zginającego tak długo, dopóki same nie osiągną stanu, który odpowiada warunkowi granicznemu dla sił wewnętrznych stanowiących ich obciążenie. W tym przypadku obowiązuje więc również równanie /5.43/, decydujące o wytrzymałości krańcowej elementu skończonego, lecz istnieje tym razem ograniczenie obszaru określoności funkcji $\bar{F} = \bar{F}(V)$ w postaci warunku

$$V \leq V_p,$$

przy czym V_p oznacza maksymalną wartość siły tnącej, która może towarzyszyć uplastycznieniu materiału półki. Siła V_p odpowiada więc pewien zakres wartości, które może przybierać siła podłużna \bar{F} działająca w półce określony linią pionową na rys. 5.11b, biegnącą przy $V = V_p = V_{kn}$ do punktu plastycznego zniszczenia półki c. Kiedy $V = V_{kr}$, wytrzymałość krańcową elementu skończonego określa, jak poprzednio, stan zniszczenia półki przez siłę podłużną \bar{F}_{po} .

BIII. Słabsza półka /jedna lub dwie półki ulegają zniszczeniu przed uplastycznieniem się skrajnego włókna środniczka/.

Punktowi (\bar{F}_{po}, V_{kr}) na rys. 5.12 odpowiada tym razem zniszczeniu półki spowodowane wyłącznie siłą podłużną F przy zerowej sile \bar{F}_{pr} związanej z polem rozciągania w środniczku. Wzrost obciążenia wywołujący przekroczenie wartości krytycznej siły tnącej przy czystym ścinaniu V_{kr} pociąga za sobą powstanie pola rozciągania w środniczku, które oddziałuje na półkę podobnie, jak w dwu poprzednich przypadkach. Odpowiednia krzywa obrazująca zależność wyrażoną wzorem /5.43/, charakteryzuje, jak poprzednio, wytrzymałość na uplastycznienie samej półki. Pokazuje to linia ciągła na rys. 5.12, której odpowiada, jak wykazało wiele badań, kierunek naprężeń w polu rozciągania środniczka określony kątem 45° w stosunku do jego krawędzi.



Środek może dalej przejmować przyrosty siły tnącej, którym towarzyszy zmiana kierunku naprężeń rozciągających. Doświadczenia wykazują, że w przypadku wysokiego środka odkształcenia wywołane rozciąganiem koncentrują się w paśmie bezpośrednio podpartym przez usztywnienie. Wytrzymałość krańcową elementu determinują łącznie dwa zjawiska: przyrost obciążenia ciągłego p oraz redystrybucja sił wewnętrznych, polegająca na redukcji siły podłużnej N przez siłę podłużną \bar{F}_{pr} . Wartość krańcowa siły tnącej V_{kn} , przy której płynie skrajne włókno środka, zaś siła podłużna \bar{F} w półce maleje do zera, możemy wyznaczyć analizując stan naprężeń w tym włóknie i wykorzystując warunki jego uplastycznienia. Skrajne włókno półki, sąsiadujące z rozpatrywanym włókniem środka, uplastycznia się przy sile tnącej V_p , obliczonej ze wzoru /5.43/, w którym kładziemy $V = V_p$ oraz $\bar{F} = 0$.

Miarą wytrzymałości powyboczeniowej półki może być parametr

$$U_{kr} = \frac{V_{kr}}{V_p}$$

Obciążenie skrajnego włókna środka możemy określić porównując pola przekroju półki A_p i środka A_s oraz naprężenia wywołane siłą podłużną \bar{F}_{pr} w skrajnym włóknie półki z naprężeniami pochodzącymi od obciążenia ciągłego p w skrajnym włóknie środka. Odpowiednie proporcje określają związki

$$\varepsilon_1 = \frac{A_p}{A_s} \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_2 = \frac{\bar{F}_{pr} t_p}{\rho L^2 / 16} = \frac{8 t_p \cdot h}{L^2}$$

Jeśli naprężenia od wymienionych wyżej obciążeń dodają się, spełniony jest warunek

$$\frac{1 - (\lambda + \sigma_{kr}(1 + \lambda \sigma_{kr}))}{\sqrt{\lambda^2 + (1 + \lambda \sigma_{kr})^2}} < \varepsilon_1 \varepsilon_2 \leq 1 - \sigma_{kr}$$

gdzie $\lambda = L/h$, i wtedy v_{kn} określa wzór

$$/5.44/ \quad v_{kn} = \frac{V_P [(1 - \varepsilon) \sigma_{kr} + \sqrt{1 + \sigma_{kr}^2 - (1 - \varepsilon)^2}]}{1 + \sigma_{kr}^2}$$

Gdy zaś naprężenia te odejmują się, co zachodzi gdy

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \leq \frac{1 - (\lambda + \sigma_{kr}(1 + \lambda \sigma_{kr}))}{\sqrt{\lambda^2 + (1 + \lambda \sigma_{kr})^2}}$$

to wtedy

$$/5.45/ \quad V_{kn} = V_P (\sqrt{\lambda^2 + (1 + \lambda \sigma_{kr})^2} - (1 - \varepsilon) \lambda)$$

BIV. Uproszczona powierzchnia nośności krańcowej

Powyżej wyprowadziliśmy zależności opisujące wytrzymałość krańcową kiedy V jest większe od V_{kr} , dla trzech podstawowych przypadków. Krzywe te przechodzą przez punkty (V_{kr}, \bar{F}_{po}) oraz $(V_{kn}, 0)$ i są podobne, lecz nie identyczne. Można byłoby opisać każdą krzywą niezależnie, lecz ze względu na stosowany

algorytm przyrostowy i konieczność wyboru macierzy sztywności elementu w obszarze stanów powyboczeniowych korzystnie jest dysponować możliwie małą liczbą krzywych granicznych. Uwzględniając taki punkt widzenia i zbliżony charakter tych trzech krzywych przedstawimy je za pomocą jednego równania

$$/5.46/ \quad F_{kn} = \bar{F} + \frac{1}{2} \sqrt{G - H(V - V_{kr})} + \frac{1}{2}(V - V_{kr}) = 0$$

gdzie G i H są stałymi, które można wyznaczyć z warunku, że krzywe przechodzą przez punkty (V_{kr}, \bar{F}_{po}) i $(V_{kn}, 0)$

$$G = 4(\sigma_0 A_p)^2$$

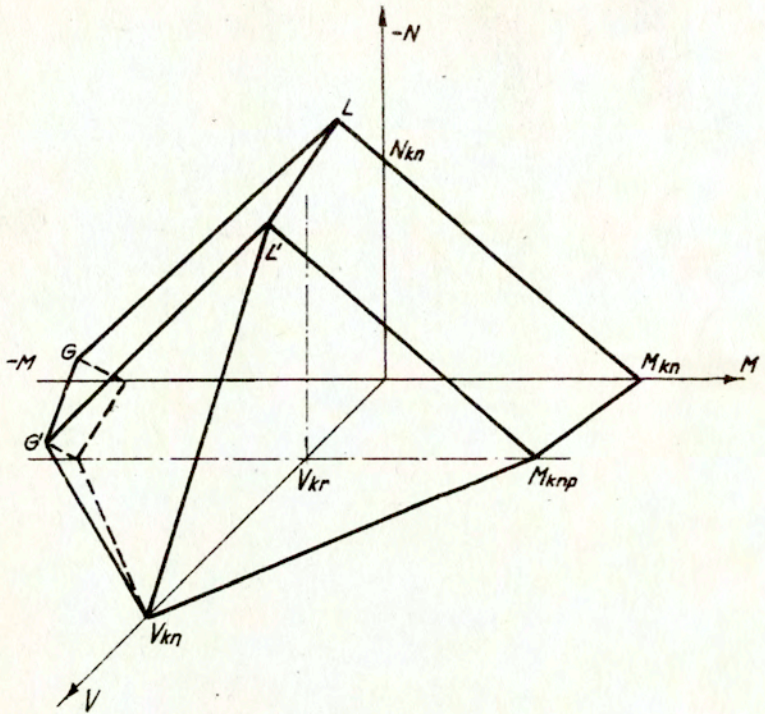
$$H = G / (V_{kn} - V_{kr}) - (V_{kn} - V_{kr})$$

Wartości \bar{F}_{po} , V_{kr} i V_{kn} są różne dla każdego z trzech wymienionych przypadków i należy je wyznaczyć jak poprzednio. W programie numerycznym wprowadzono dalsze uproszczenie aproksymując powierzchnię wytrzymałości krańcowej dla $V > V_{kr}$ za pomocą płaszczyzn jak pokazano na rys. 5.13.

Aby przedstawić tę powierzchnię w przestrzeni sił wewnętrznych działających w przekroju przywęzłowym i elementu skończonego $\bar{\alpha}$, konieczne jest podzielenie siły podłużnej, obciążającej półkę \bar{F} na części: \bar{F}_N , odpowiadającą sile podłużnej N oraz \bar{F}_M , odpowiadającą momentowi zginającemu M .

Siłę \bar{F}_N obliczamy, zależnie od tego, która półka jest ściskana, za pomocą wzorów

$$/5.47/ \quad \bar{F}_N = N \frac{A_{mp}}{A_{mp} + A_{dp}} \quad \text{lub} \quad \bar{F}_N = N \frac{A_{dp}}{A_{mp} + A_{dp}}$$



Rys. 5.13

Siła \bar{F}_M zależy od naprężeń w pólce wywołanych momentem, gdyż zgodnie z uczynionym wcześniej założeniem część naprężeń pochodzących od momentu wywołanego siłą tnącą ma nieduży wpływ na warunek uplastycznienia pólki. Jeśli oznaczymy odległość osi obojętnej od osi podłużnej przechodzącej przez środek wysokości przekroju dwuteowego, przez e , to

$$\bar{F}_M = \sigma A_{mp} = \frac{M(0.5 \cdot h_s - e + t_{mp})}{I_y}$$

/5.48/ lub

$$\bar{F}_M = \sigma A_{dp} = \frac{M(0.5 h_s + e + t_{mp})}{I_y}$$

zależnie od tego, do której pólki odnosi się warunek wytrzymałości krańcowej. Ostatecznie więc mamy związek

/5.49/ $\bar{F} = \bar{F}_N + \bar{F}_M$

pozwalający bezpośrednio napisać warunek wytrzymałości krańcowej

$$F_{kn} (N, M, V) = 0$$

dla rozpatrywanego przekroju elementu ramy.

Aby umożliwić porównanie otrzymanego warunku stanu krańcowego ze zdefiniowanymi uprzednio warunkami wytrzymałościowymi, przekroje powierzchni stanu krańcowego płaszczyznami $V = 0$ oraz $V = V_{kr}$, a także przekrój powierzchni opisującej warunek wybożenia sprężystego płaszczyzną $V = 0$ naniesiono na wydruk, pokazany na rys. 5.14 i przedstawiający przekroje powierzchni stanu granicznego tymi samymi płaszczyznami $V = 0$ oraz $V = V_{kr}$, wygenerowanymi za pomocą programu INSECT. Wszystkie przekroje dotyczą profilu dwuteowego o wymiarach podanych na tym rysunku.

5.5. Macierz sztywności elementu po osiągnięciu przez niego stanu wytrzymałości krańcowej.

Po wybożeniu środnika i osiągnięciu przez element wytrzymałości krańcowej zachowanie się elementu zależy od tego, czy

siła ścinająca jest mniejsza czy większa od wartości wywołującej wyboczenie przy czystym ścinaniu. W pierwszym przypadku, jak opisaliśmy w podpunkcie 5.4.A element osiąga wytrzymałość krańcową gdy materiał półki i skrajnego włókna środka uplastycznia się. Uplastycznienie może wystąpić w jednym lub w obydwu przekrojach przywęzłowych, ponieważ założyliśmy, że obciążenie zewnętrzne nie jest przyłożone w punktach pomiędzy węzłami. Siły wewnętrzne w uplastycznym przekroju nie mogą przekroczyć powierzchni stanu krańcowego i można, podobnie jak w rozdziale 4, wprowadzić pojęcie "przegubu wytrzymałości krańcowej", w którym koncentrują się deformacje elementu, które określimy w tym podpunkcie.

W drugim przypadku element, jak opisaliśmy w podpunkcie 5.4.B, niszczy się podobnie, lecz strefa uplastycznienia rozszerza się na całą długość elementu oraz obejmuje środek. Deformacje towarzyszące temu rodzajowi zniszczenia możemy opisać wprowadzając "przegub wytrzymałości krańcowej" w środku rozpiętości elementu.

W obydwu przypadkach, traktując powierzchnię wytrzymałości krańcowej jako potencjał plastyczny, możemy zastosować przyrostową teorię plastyczności do opisu zachowania się elementu po osiągnięciu stanu wytrzymałości krańcowej.

Przypadek I Wytrzymałość krańcowa osiągnięta została w punkcie węzłowym / $V < V_{kr}$ /.

Kiedy dwa przekroje przywęzłowe, 1 oraz 2, są sprężyste, równania równowagi elementu skończonego /5.26/ można zapisać krócej w postaci

$$/5.50/ \quad \Delta \underline{Q}_{6 \times 1} = \underset{\sim}{k}_{6 \times 6}^{(w)} \Delta \underline{T}_{6 \times 1}$$

Zgodnie z umową w tym wzorze i w dalszych pomijamy indeksy oznaczające nr elementu.

Wzór /5.50/ obowiązuje dla warunku wytrzymałościowego $F_{kn} < 0$.

Spełnienie warunku wytrzymałości krańcowej w przekroju przywęzłowym k , $k=1$ lub $k=2$, określone równaniami /5.33/ - /5.36/, można zapisać w postaci

$$F_{kn} = 0$$

Ponieważ przyrost sił wewnętrznych jest wówczas równy zeru, mamy także zależność

$$/5.51/ \quad \Delta F_{kn} = 0$$

Całkowity przyrost uogólnionych deformacji $\Delta \underline{T}$ przedstawiamy, podobnie jak w podpunkcie 4.3, w postaci sumy przyrostu sprężystego $\Delta \underline{T}^S$ oraz przyrostu związanego ze zniszczeniem powyboczeniowym $\Delta \underline{T}^{kn}$. Przyrost uogólnionych deformacji $\Delta \underline{T}^{kn}$ można, traktując powierzchnię wytrzymałości krańcowej jako powierzchnię potencjału, zapisać następująco

$$/5.52/ \quad \Delta \underline{T}_{kn} = M_k \left(\frac{\partial F_{kn}}{\partial \underline{Q}_i} \right)_k$$

$$i = 1, \dots, 3$$

$$k = 1, 2$$

M_k oznacza w tym wzorze stałą wyrażającą przyrost uogólnionych deformacji w przekroju przywęzłowym k .

Przyrosty składowych sił wewnętrznych są wprost proporcjonalne do przyrostów deformacji sprężystych i mogą być wyrażone następująco

$$/5.53/ \quad \Delta \underline{Q} = \underset{\sim}{k}^{(w)} (\Delta \underline{T} - \Delta T^{(kn)})$$

Podobnie, jak przy wyprowadzaniu macierzy sprężysto-plastycznych w podpunkcie 4.3 możemy podstawić równanie /5.52/ do równania /5.53/, a następnie, wykorzystując związek /5.51/, obliczyć M_k i zbudować macierz wytrzymałości krańcowej elementu $\underset{\sim}{k}^{(kn)}$, otrzymując ostatecznie równanie równowagi w postaci

$$/5.54/ \quad \Delta \underline{Q}_{6 \times 1} = \underset{\sim}{k}^{(kn)}_{6 \times 6} \Delta \underline{T}_{6 \times 1}$$

Macierz $\underset{\sim}{k}^{(kn)}$ jest więc podobna do macierzy sprężysto-plastycznych i może przyjąć trzy różne postacie w zależności od tego, czy przekrój przywęzłowy 1, czy 2, czy też obydwa jednocześnie osiągną stan wytrzymałości krańcowej.

Odciążenie w przekrojach przywęzłowych może być przy tym realizowane za pośrednictwem mnożnika skalarnego M_k następująco

$M_k > 0$	obciążenie
$M_k = 0$	obciążenie neutralne
$M_k < 0$	odciążenie

Jeżeli w przekroju przywęzłowym występuje odciążenie, należy ponownie podstawić macierz sztywności elementu po wyobczeni sprężystym $\underset{\sim}{k}^{(w)}$.

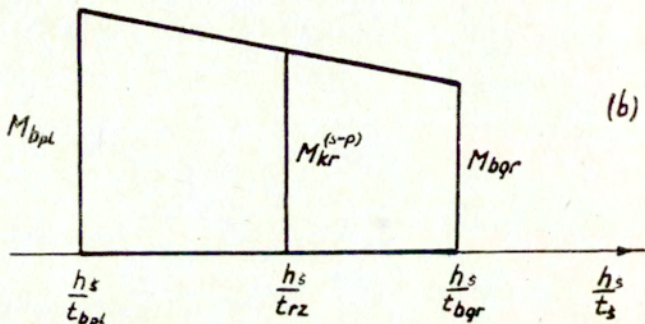
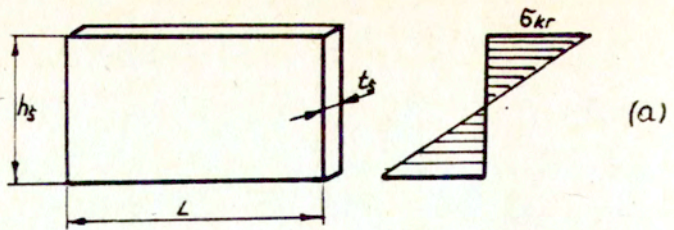
Przypadek II . Warunek wytrzymałości krańcowej dotyczy środka długości elementu.

W tym przypadku upraszczamy analizę, podstawiając macierz sztywności k (kn), odpowiadającą jednoczesnemu osiągnięciu stanu wytrzymałości krańcowej w przekrojach przywęzłowych 1 oraz 2. Dokładniejsza analiza wymagałaby przeanalizowania stanu uogólnionych sił wewnętrznych i uogólnionych deformacji w fikcyjnym "przegubie wytrzymałości krańcowej" przyjmowanym w środku długości elementu skończonego.

5.6. Wytrzymałość krańcowa po sprężysto-plastycznym wyboczeniu środka

Przypadek wyboczenia sprężysto-plastycznego środka ma miejsce, gdy wyboczenie sprężyste jest poprzedzone uplastycznieniem przekroju środka. Taka sytuacja może zaistnieć, jeśli środek jest dostatecznie sztywny. Kiedy w przekrojach przywęzłowych elementu działa tylko jedna siła uogólniona, np. wyłącznie siła ściskająca, lub wyłącznie siła tnąca, to środek albo wyboczy się, albo całkowicie się uplastyczni. W przypadku działania momentu zginającego stan wyboczenia sprężysto-plastycznego jest pewnym stanem pośrednim między granicznym przypadkiem wyboczenia sprężystego, który zdefiniujemy dalej, a stanem nośności granicznej /przy całkowitym uplastycznieniu/.

Wyznaczając krytyczną wartość momentu zginającego dla tego przypadku przyjmujemy założenie o liniowej zależności obciążenia powodującego wyboczenie sprężysto-plastyczne w funkcji ilorazu wysokości do grubości środka h_3/t_2 /rys.5.15 b/



Rys. 5.15

Wspomniana liniowa zależność obowiązuje pomiędzy stanem granicznym wyoboczenia sprężystego, a stanem kiedy wyoboczenie i całkowite uplastycznienie przekroju poprzecznego występują jednocześnie.

Wyoboczeniu sprężystemu przy zginaniu /rys.5.15a/ odpowiada następująca wartość naprężenia normalnego w skrajnym włóknie środnika /86 , 114, 130/

/5.55/

$$\sigma_{kr} = \frac{k \pi^2 E t_s^2}{12(1-\nu^2) h_s^2}$$

Współczynnik k jest stały dla danej wartości ilorazu L/h_s , E oznacza moduł sprężystości, ν - współczynnik Poissona zaś t_s - grubość środnika.

Stan graniczny wyoboczenia sprężystego zdefiniujemy

następująco:

$$/5.56/ \quad \sigma_{kr} = \sigma_0$$

σ_0 oznacza granicę plastyczności przy ściskaniu.

Na podstawie zależności /5.55/ oraz /5.56/ możemy wyznaczyć iloraz h_s/t_s , odpowiadający stanowi granicznemu wyboczenia sprężystego przy zginaniu

$$/5.57/ \quad \sigma_0 = \frac{k \pi^2 E t_s^2}{12 (1 - \nu^2) h_s^2}$$

Stąd możemy otrzymać wzór

$$/5.58/ \quad \frac{h_s}{t_s} = \sqrt{\frac{\pi^2 k E}{12 (1 - \nu^2) \sigma_0}}$$

Mając h_s /rozważania nasze przeprowadzamy dla średnika o określonej wysokości/, możemy wyznaczyć ze wzoru /5.58/ t_{bgr} , przy którym wyboczenie sprężyste osiągnie stan graniczny

$$/5.59/ \quad t_{bgr} = \frac{h_s}{\pi} \sqrt{\frac{12 (1 - \nu^2) \sigma_0}{k E}}$$

Stan ten wystąpi, gdy na średnik o powyższych wymiarach będzie działał moment zginający o następującej wartości

$$/5.60/ \quad M_{bgr} = \frac{\sigma_0 h_s^2 t_{bgr}}{6} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\sigma_0} h_s^3}{3\pi} \sqrt{\frac{3(1 - \nu^2)}{k E}}$$

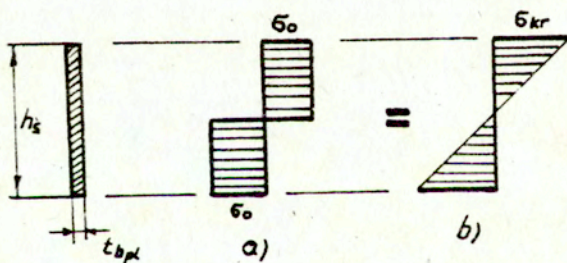
Wyznaczyliśmy zatem wartość ilorazu h_s/t_s /5.58/ i odpowiadającą mu wartość momentu zginającego M_{bgr} /5.60/, powodującą graniczny stan wyboczenia sprężystego środnika.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia parametrów charakterystycznych dla stanu całkowitego uplastycznienia środnika z jednoczesnym jego wyboczeniem.

Wysokość środnika jest ustalona i wynosi h_s . Jego grubość charakterystyczną dla opisanego powyżej stanu oznaczmy przez t_{bpl} . Całkowite uplastycznienie przekroju poprzecznego środnika /rys. 5.16a/ wywołuje moment zginający M_{pl} o wartości

/5.61/

$$M_{pl} = \frac{\sigma_0 h_s^2 t_{bpl}}{4}$$



Kys. 5.16

Jednocześnie moment zginający, powodujący wyboczenie środka o wymiarach określonych powyżej, bez założenia uplastycznienia /rys.5.16b/ przyjmuje wartość

$$/5.62/ \quad M_{kr} = \frac{\sigma_{kr} h_s^2 t_{bpl}}{6}$$

Porównując powyższe wartości otrzymujemy zależność pomiędzy umowną wartością naprężenia krytycznego σ_{kr} a granicą plastyczności σ_0 .

$$/5.63/ \quad \sigma_{kr} = \frac{3}{2} \sigma_0$$

Mając określoną wartość umownego naprężenia krytycznego możemy wyznaczyć na podstawie zależności /5.55/ wartość ilorazu h_s/t_{bpl} , odpowiadającą stanowi całkowitego uplastycznienia z jednoczesnym wyboczeniem

$$/5.64/ \quad \frac{h_s}{t_{bpl}} = \pi \sqrt{\frac{kE}{18(1-\nu^2)\sigma_0}}$$

Stąd możemy obliczyć grubość środka t_{bpl}

$$/5.65/ \quad t_{bpl} = \frac{h_s}{\pi} \sqrt{\frac{18(1-\nu^2)\sigma_0}{kE}}$$

oraz wartość momentu zginającego

$$/5.66/ \quad M_{bpl} = \frac{3\sigma_0 \sqrt{\sigma_0} h_s^3}{4\pi} \sqrt{\frac{2(1-\nu^2)}{kE}}$$

Zauważmy, że iloraz M_{bpl} / M_{bgr} wynosi

$$\frac{M_{bpl}}{M_{bgr}} = \frac{9\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = 1,837$$

Wykorzystując postulowany przez nas na wstępie tego podpunktu liniowy rozkład momentu zginającego pomiędzy granicznym stanem wybożenia sprężystego, a stanem pełnego uplastycznienia i jednoczesnego wybożenia w funkcji ilorazu h_s/t_s /rys.5.15b/, wartość krytyczną momentu zginającego, towarzyszącą wybożeniu sprężysto-plastycznego, wyrażamy następująco

$$M_{kr}^{(s-p)} = \frac{15\sqrt{2} + 10\sqrt{3}}{12} \frac{\sigma_0 \sqrt{6_0} h_s^3}{\pi} \sqrt{\frac{1-\nu^2}{KE}}$$

/5.67/

$$- \frac{6+5\sqrt{6}}{3} \frac{1}{t_s} \frac{h_s^4 \sigma_0^2 (1-\nu^2)}{\pi^2 KE}$$

Otrzymaną powyżej zależność wykorzystujemy przy formułowaniu warunku wybożenia sprężysto-plastycznego.

Punktem wyjścia jest warunek wybożenia sprężystego środka /wzór 5.9/. We wzorze tym na miejsce M_{kr} podstawiamy wartość określoną zależnością /5.67/. Jest to niewątpliwie uproszczenie. Najmniejsza dokładność występuje dla punktów z przestrzeni uogólnionych sił wewnętrznych położonych blisko osi momentu zginającego M . Dla większych wartości podłużnej siły ściskającej N oraz siły tnącej V dokładność zbliża się do dokładności wzoru /5.9/. Wyznaczenie macierzy sztywności elementu przebiega podobnie, jak w podpunkcie 5.2A.

Powierzchnia wytrzymałości krańcowej jest podobna, jak w

przypadku wyboczenia sprężystego. Jedynie wartości M_{kn} oraz M_{max} są inne. Tak więc odpowiednie składniki we wzorach /5.33/, /5.34/, /5.35/ oraz /5.36/ ulegną zmianie

$$\begin{aligned} /5.68/ \quad M_{kn} &= \sigma_0 A_{mp} h + M_{kr}^{(s-p)} \\ N_3 &= \sigma_0 (A_{dp} - A_{mp}) \\ M_3 &= \sigma_0 (A_{dp} + A_{mp}) \frac{h_s}{2} + M_{kr}^{(s-p)} \left(1 - \frac{V}{V_{kr}}\right) \\ M_4 &= \sigma_0 A_{mp} h_s + M_{kr}^{(s-p)} \left(1 - V/V_{kr}\right) \end{aligned}$$

Rozważania związane z wyboczeniem sprężysto-plastycznym dotyczą przypadku $V < V_{kr}$, ponieważ dla stanu $V > V_{kr}$ naprężenia normalne w środku nie występują i w związku z tym nie przewidujemy wyboczenia sprężysto-plastycznego.

Macierz sztywności elementu po osiągnięciu przez niego stanu wytrzymałości krańcowej wyznaczamy podobnie, jak w punkcie 4.3.

6. Opis programów numerycznych

6.1. Opis programu ASGRAM

Na podstawie teorii podanej w rozdziałach 1-4 opracowano program, którego budowę ilustruje schematycznie rys.6.1. Program ASGRAM składa się z głównego programu i z 16 podprogramów służących do analizy nieliniowej oraz 82 funkcji i podprogramów zbioru IPPT - tworzących system WAT - KM. Dokładny opis większości podprogramów składających się na system WAT-KM, a

w szczególności podprogramów przeznaczonych do budowania macierzy sztywności sprężystej elementu prętowego, składania globalnej macierzy sztywności całej konstrukcji, rozwiązywania układu równań oraz obliczanie sił wewnętrznych można znaleźć w /108/. W niniejszym podpunkcie ograniczymy się do podania szczegółowych schematów najważniejszych podprogramów przeznaczonych do analizy nieliniowej. Omówimy główny podprogram sterujący MPL3 oraz współpracujące z nim podprogramy, wyjaśnimy zasady transformacji macierzy sztywności elementu skończonego ramy pomiędzy układami współrzędnych oraz przedstawimy podprogram MWPRET budujący macierz sztywności sprężysto-plastycznej elementu w układzie lokalnym i transformujący ją do wspólnego dla całej konstrukcji układu współrzędnych. Na końcu podamy instrukcję wprowadzenia danych. Aktualnie istniejąca wersja programu ASGRAM umożliwia sprężysto-plastyczną analizę przyrostową ram płaskich przy następujących ograniczeniach:

- dane techniczne :

EMC - RIAD, system "OS", pamięć operacyjna

256 K - byte'ów

- wymagane parametry techniczne dla programu ASGRAM

pamięć operacyjna 230 K

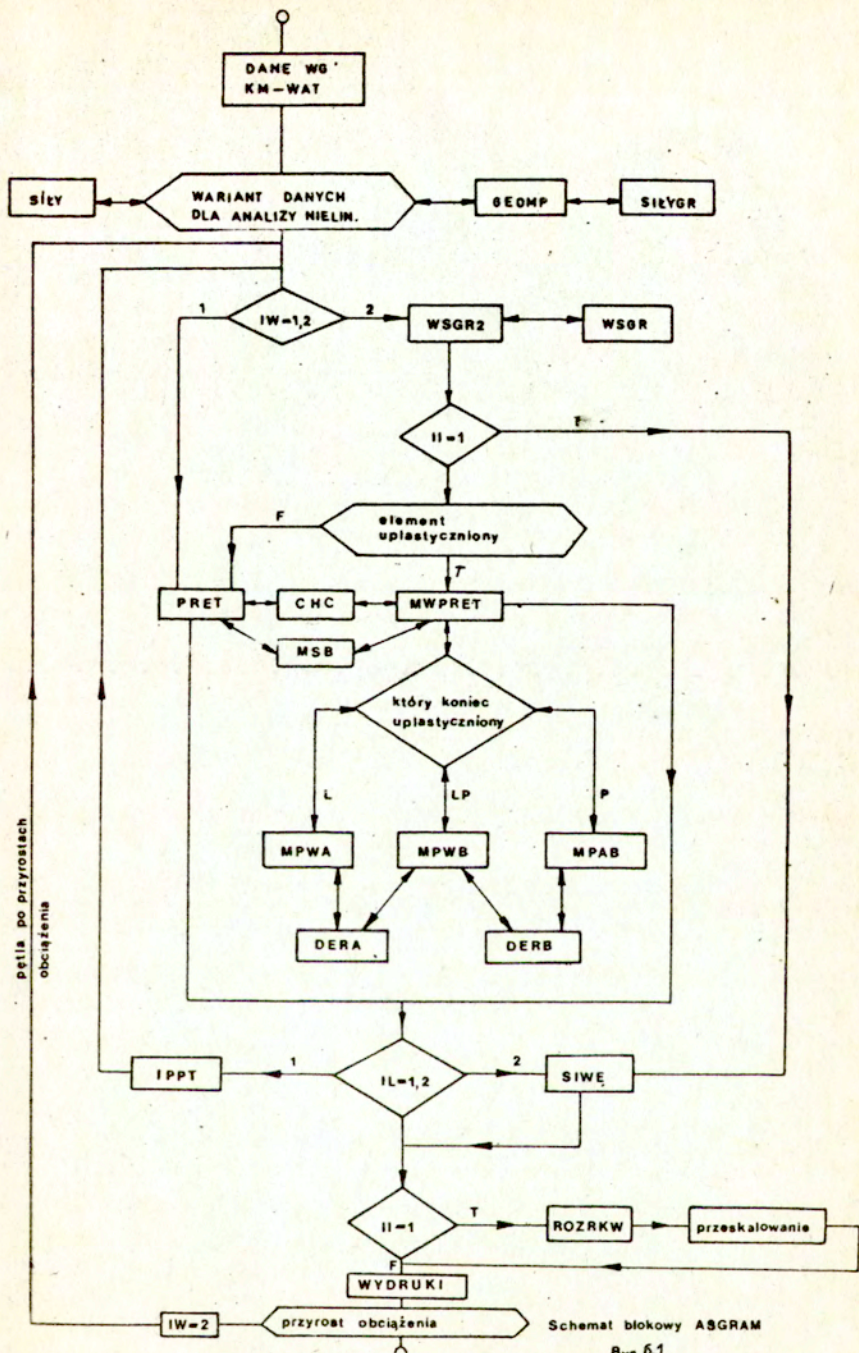
pamięć dyskowa /jednostki typu 23111 lub 2314/

czytnik kart

drukarka wierszowa

stacja taśm magnetycznych.

Istnieje możliwość przekodowania programu z systemu IBM na system ICL.



Schemat blokowy ASGRAM

Rys. 6.1

- dane użytkowe :

maksymalna liczba węzłów - 100 ,

maksymalna liczba elementów - 150,

wzajemne usytuowanie prętów na płaszczyźnie jest dowolne, warunki podparcia są realizowane w węzłach i obejmują wszystkie przypadki spotkane w praktyce, obciążenia w postaci sił i momentów skupionych są przyłożone w węzłach.

Program główny oraz podprogram MPL 3

Uproszczony oraz szczegółowy schemat podprogramu MPL-3 pokazują rys. 6.2 oraz rys. 6.3. Objaśnienia do tych rysunków umieszczono na końcu opisu programu ASGRAM.

Dane kontrolne zadania, dane materiałowe, dane elementowe oraz warunki brzegowe są przekazywane do programu głównego za pomocą podprogramów należących do zbiorów KMO-1 oraz IPPI i tworzących system WAT-KM. System sprawdza poprawność przygotowania danych, drukuje ich zestawienie i w razie potrzeby podaje diagnostykę błędów. Dane potrzebne wyłącznie ze względu na analizę nieliniową wprowadzane są zgodnie z instrukcją zamieszczoną na końcu opisu za pomocą podprogramów SIŁY, GEOMP oraz SIŁYGR.

Na początku analizy* znajdujemy rozwiązanie sprężyste dla obciążenia testowego. Wykorzystujemy przy tym podprogram PRET budujący macierz sztywności sprężystej elementu /patrz /108/, rys.3-4, str.55/. Po określeniu wektora przemieszczeń r wszystkich węzłów siły wewnętrzne we wszystkich elementach obliczamy za pomocą podprogramu SIWE /108/, /rys.3-7, str.59/.

Podprogram SIWE był opracowany początkowo dla zagadnienia ram przestrzennych i dlatego liczy wszystkie charakterystyczne dla przestrzennego przypadku siły wewnętrzne. Na wyjściu z podprogramu poszczególne składowe wektora sił wewnętrznych

Q_k (8×1) ustawione są w następującej kolejności:

PN - siła normalna

PY - siła tnąca działająca w płaszczyźnie ramy

PZ - siła tnąca działająca w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ramy

MS - moment skręcający

MYL } - momenty zginające element prętowy,

MYP } działające w płaszczyźnie prostopadłej

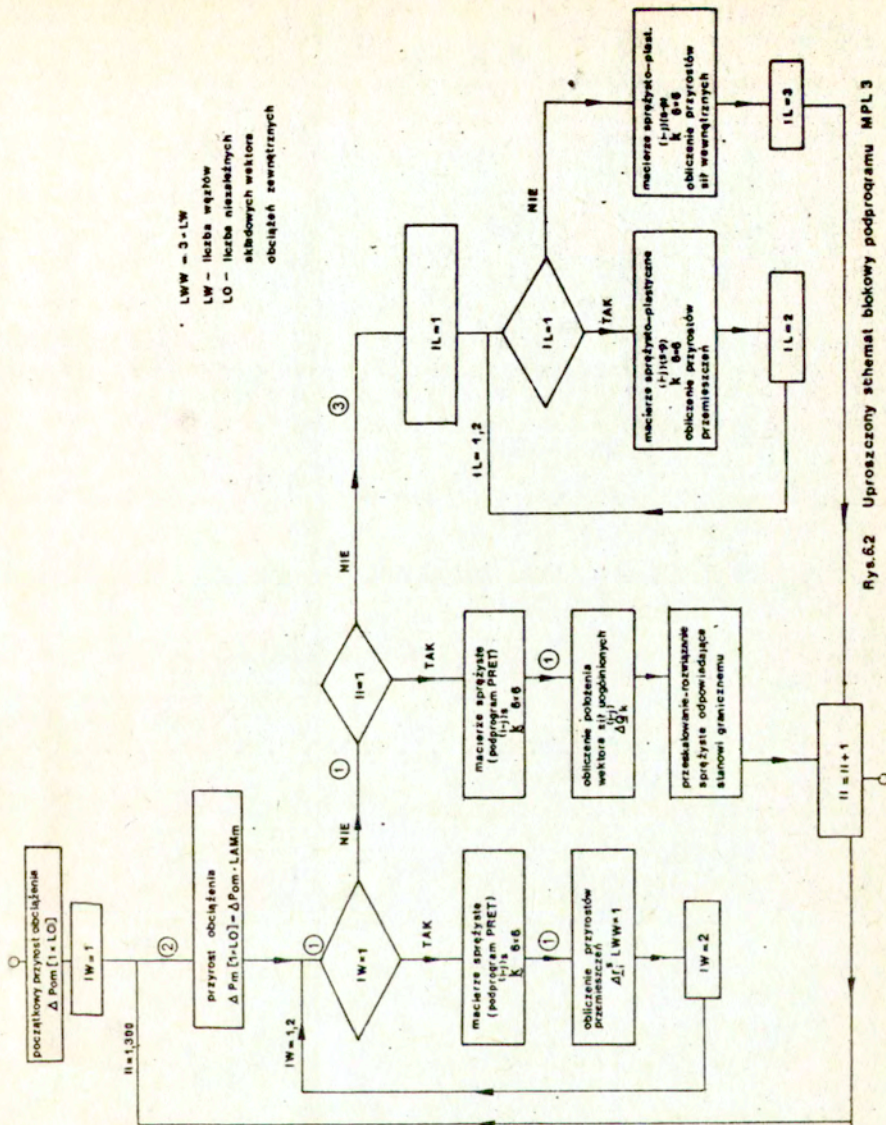
do płaszczyzny ramy odpowiednio na lewym i prawym końcu elementu

MZL - momenty zginające element prętowy

MZP - działające w płaszczyźnie ramy odpowiednio na lewym i prawym końcu elementu.

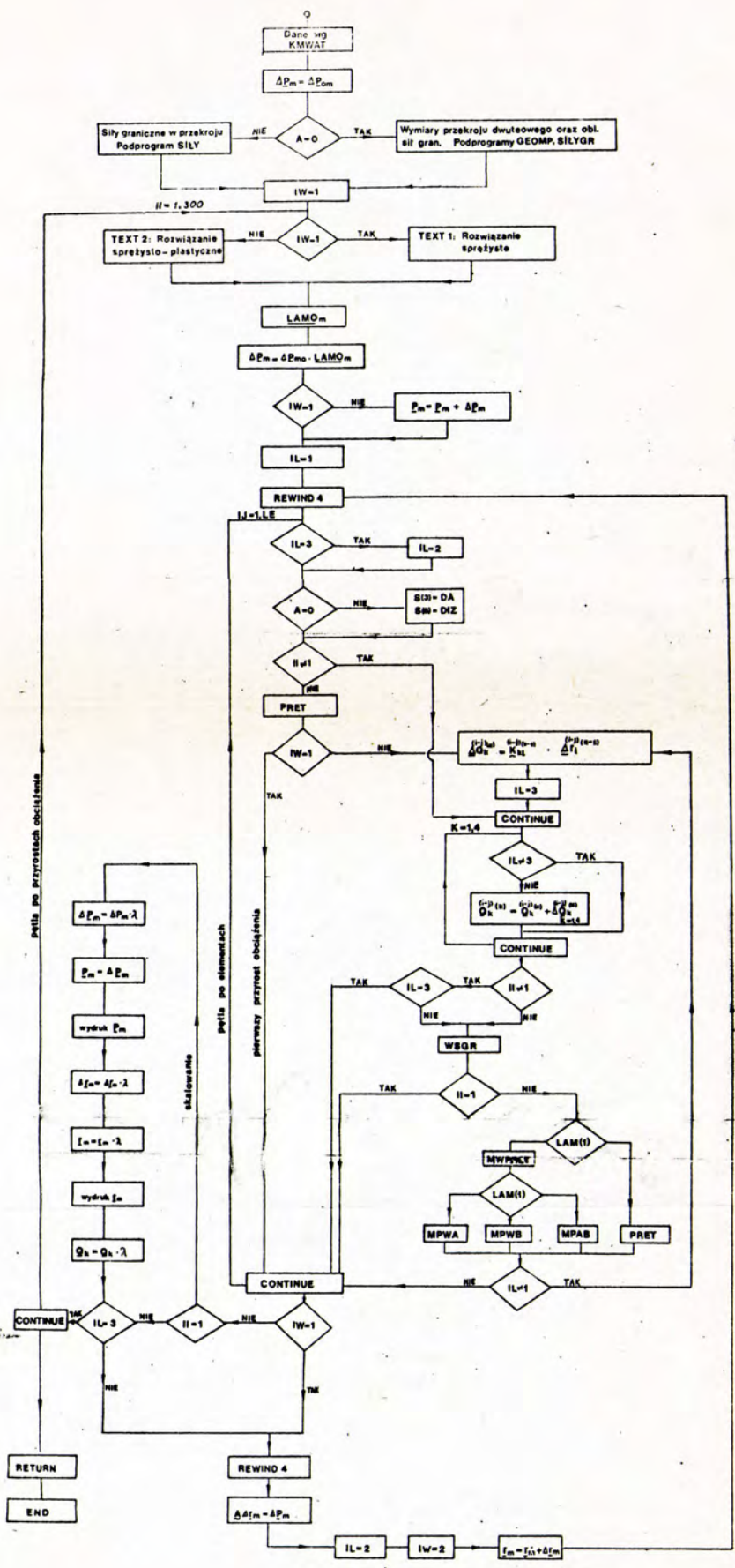
W rozpatrywanym przypadku ram płaskich składowe PZ, MS, MYL oraz MYP są zawsze z założenia równe zero.

Następnie badamy za pomocą podprogramów WSGR2 i WSGR położenie wypadkowego wektora sił wewnętrznych względem wybranej powierzchni plastyczności. Danymi wejściowymi do programu WSGR2 są: wektor sił wewnętrznych Q_k , wektor sił granicznych Q_G oraz kryterium dokładności osiągnięcia powierzchni plastyczności EPS. Na wyjściu uzyskujemy parametr λ /oznaczony w programie LAMB/, określający obciążenie w najniebezpieczniejszym przekroju przywęzłowym całej ramy.



LWW = 3 · LW
 LW – liczba węzłów
 LO – liczba niesamoznacznych
 składowych wektora
 obciążeń zewnętrznych

Rys.62 Uproszczony schemat blokowy podprogramu MPL 3



Pętla po przystawkach obciążenia

składowane

Pętla po elementach

pierwszy przystaw obciążenia

Rys. 63 Podprogram MPL 3 Patrz uwagi do rys. 62. 17x 63 i 17x 64, 64c:127

W testowej wersji programu ASGRAM przyjęto warunek stanu granicznego (2.2) w k - tym przekroju przywęzłowym w postaci

$$/6.1/ \quad n(k)^2 + v(k)^2 + m(k) - 1 = 0$$

czyli podobny do tego, jaki zwykle przyjmuje się dla pełnych przekrojów prostokątnych, lecz uzupełniony o siłę tnącą.

We wzorze tym

$$n(k) = \frac{N(k)}{N_{gr}}, \quad v(k) = \frac{V(k)}{V_{gr}}, \quad m(k) = \frac{M(k)}{M_{gr}}$$

zaś N_{gr} , V_{gr} i M_{gr} oznaczają wielkości graniczne odpowiednio do siły podłużnej N , siły tnącej V i momentu zginającego M są liczone dla przekrojów dwuteowych wg wzoru 4.4.

Ostateczna wersja programu ASGRAM zawiera warunek stanu granicznego opisany w podpunkcie 4.1 i generowany na podstawie podprogramu WSGP, opartego na programie INSECT.

Po przeskalowaniu rozwiązania sprężystego za pomocą podprogramu ROZRKW kontynuujemy analizę sprężysto-plastyczną, wykorzystując ponownie podprogramy sprawdzające warunek stanu granicznego WSGR2 i WSGR i przywołując, w zależności od położenia wektora sił wewnętrznych względem powierzchni stanu granicznego 6.1, podprogramy budujące macierz sztywności sprężystej PRET, lub macierz sztywności sprężysto-plastycznej MWPRET elementu i transformujące ją do wspólnego układu współrzędnych. Transformacja macierzy pomiędzy układami współrzędnych - podprogram MWPRET

W systemie WAT-KM wprowadzono trzy układy współrzędnych prostokątnych prawoskrętnych:

- lokalny $/x, y, z/$, przyjmowany dla każdego elementu, określony przez oś podłużną elementu oraz główne osie bezwładności przekroju dwuteowego; w tym układzie określone są siły wewnętrzne w elemencie,
- globalny $/X, Y, Z/$, przyjęty dla całej konstrukcji, w którym określa się współrzędne węzłów,
- węzłowy $/U, V, W/$, przyjmowany dla węzłów, w których kierunki istniejących węzłów nie pokrywają się z osiami układu globalnego; w tym układzie odbywa się składanie macierzy sztywności poszczególnych elementów w macierz sztywności całej konstrukcji oraz rozwiązanie zadania /obliczanie przemieszczeń i reakcji/.

W rozdziale 4 określiliśmy macierz sztywności elementu w układzie lokalnym. Zachodzi więc konieczność obliczenia tej macierzy w układzie węzłowym. Wektor przemieszczeń uogólnionych, zawierający składowe przemieszczeń liniowych i składowe obrotu wybranego węzła k w układzie lokalnym, oznaczmy przez \underline{r}_k . Zależność między przemieszczeniami uogólnionymi we współrzędnych lokalnych, globalnych i węzłowych jest następująca:

$$/3.2/ \quad \underline{r}_k = \underline{C} \underline{g}_k = \underline{C} \underline{K} \underline{w}_k$$

gdzie \underline{r}_k , \underline{g}_k , \underline{w}_k - wektory przemieszczeń uogólnionych odpowiednio w układzie lokalnym i węzłowym k -tego przekroju przywęzłowego.

$\underline{C}, \underline{K}$ - macierze transformacji.

Energia wewnętrzna elementu wyraża się wzorem

$$/6.3/ \quad W = \frac{1}{2} \underline{r}^T \underline{k}^{(l)} \underline{r}$$

w którym $\underline{k}^{(l)}$ oznacza macierz sztywności sprężystej elementu w układzie lokalnym.

Wprowadzając przemieszczenia węzłowe wyrażamy energię wewnętrzną elementu następująco

$$/6.4/ \quad W = \frac{1}{2} \underline{w}^T \underline{K}^T \underline{C}^T \underline{k}^{(l)} \underline{C} \underline{K} \underline{w}$$

Poszukiwaną macierz sztywności elementu w układzie węzłowym

$\underline{k}^{(w)}$ obliczamy jako iloczyn

$$/6.5/ \quad \underline{k}^{(w)} = \underline{K}^T \underline{C}^T \underline{k}^{(l)} \underline{C} \underline{K}$$

Iloczyn macierzy typu $\underline{C}^T \underline{k}^{(l)} \underline{C}$ realizuje, pomijając działania na zerach, podprogram CHC.

Tak samo transformujemy macierze sztywności sprężysto-plastycznej elementu skończonego.

Opisane wyżej transformacje macierzy realizuje podprogram MWPRET, pokazany na rys. 6.4. Parametrami wejściowymi dla tego podprogramu są współrzędne końców pręta w układzie globalnym, dane geometryczne i materiałowe, wektor sił wewnętrznych, wektor sił granicznych oraz wielkość LAM, decydująca o wyborze odpowiedniej macierzy sprężysto-plastycznej.

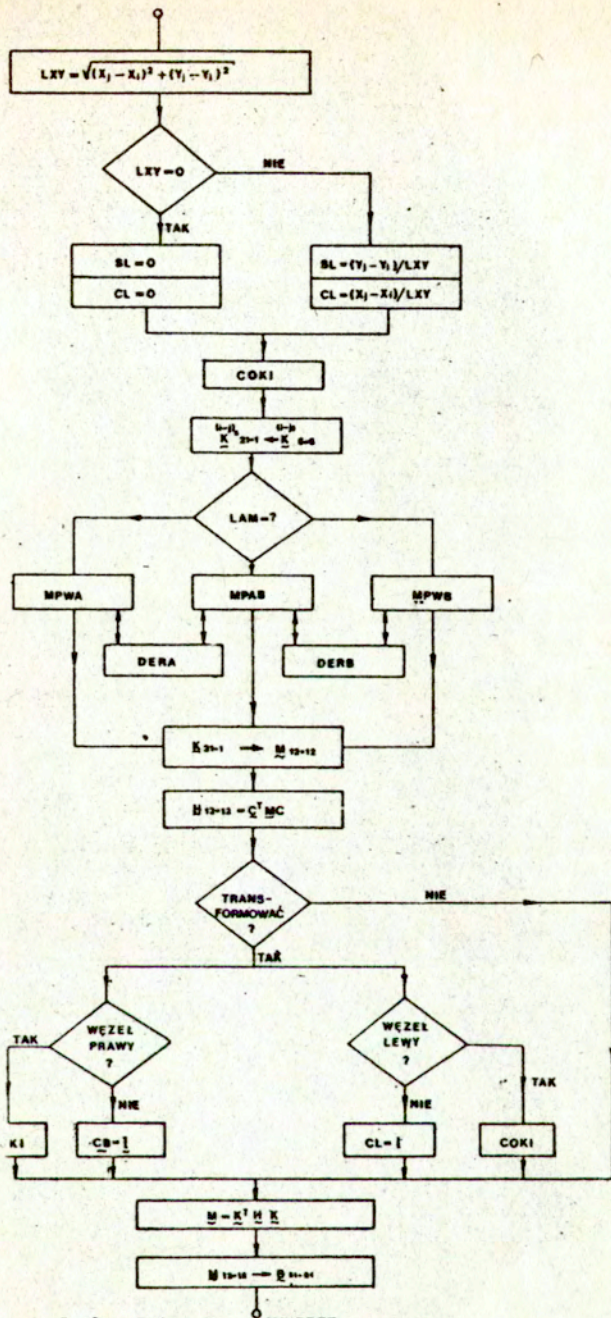
Po obliczeniu długości pręta l , funkcji sinus i cosinus

kąta pomiędzy osiami układu globalnego i lokalnego oraz współczynników macierzy transformacji \underline{C} podprogram przywołuje, w zależności od obliczonych uprzednio podprogramem WSGR2 współczynników LAM, odpowiednią macierz sztywności sprężysto-plastycznej /podprogramy MPWA, MPWB1, MPAB1/ elementu. Na tym etapie obliczeń zachodzi ponadto konieczność wyznaczenia pochodnych funkcji uplastycznienia względem odpowiednich składowych sił wewnętrznych. Pochodne to dla przekroju przywęzłowego 1 liczy podprogram DERA, zaś dla przekroju przywęzłowego 2 podprogram DERB. Macierz sprężysto-plastyczna elementu obliczona była w układzie lokalnym. Za pomocą macierzy \underline{C} transformujemy ją do układu globalnego, a następnie liczymy macierz transformacji \underline{K} i obliczamy macierz sztywności sprężysto-plastycznej w układzie węzłowym. Jest ona symetryczna, więc za pomocą podprogramu MSB przekazujemy na wyjście podprogramu MWPRET jedynie 21 współczynników górnej połowy tej macierzy w postaci wektora jednokolumnowego.

Instrukcja wprowadzenia danych

Zestaw danych do programu zawiera słowa sterujące oraz listy, w których opisane są węzły, elementy i obciążenia. Schemat kompletu danych do programu powinien mieć następującą postać:

1. Tytuł
2. Słowo RAMA PŁASKA
3. Słowo CZYTAJ
- 3a. Słowo WEZŁY i po nim lista węzłów



Rys.64 Podprogram MWPRET

Łočkyny $C^T M C$ oraz $K^T H K$ realizuja podprogram CHC

- 3.b Słowo ELEMENTY i po nim lista elementów
- 3.c Słowo MATERIAŁY i po nim lista materiałów
4. Opcjonalne słowo DRUKUJ
 - 4.1 Słowo sterujące DRUKUJ i po nim w dowolnej kolejności
 - a. Słowo WEZŁY
 - b. Słowo ELEMENTY
 - c. Słowo MATERIAŁY
5. Słowo KONIEC
6. Lista obciążeń początkowych
7. Siły graniczne, geometria przekroju
8. Granica plastyczności przy rozciąganiu oraz granica plastyczności przy ścinaniu
9. Lista mnożników LAMO

Czytanie oraz wydruk informacji wczytanych można również zredagować następująco :

- 3.a CZYTAJ WEZLY i po nich lista węzłów
- 3.b CZYTAJ ELEMENTY i po nich lista elementów
- 3.c CZYTAJ MATERIAŁY i po nich lista materiałów
- 4.1.a DRUKUJ WEZLY
- 4.1.b. DRUKUJ ELEMENTY
- 4.1.c. DRUKUJ MATERIAŁY

Poniżej omówimy poszczególne listy przedstawiając listy w pełnej postaci tj. bez dopuszczalnych uproszczeń i skrótów.

ad 3.a Lista węzłów

- Numer ostatniego węzła; - numer węzła, - współrzędne kartezjańskie węzła w układzie globalnym X,Y
- kąt obrotu KT do transformacji układu globalnego w węzłowy

- charakter stopni swobody U, V, C,
- przecinek po ostatniej informacji dla węzła.

Listę węzłów kończy średnik napisany po przecinku ostatniego węzła. Poszczególne informacje dla węzła oddzielamy spacjami. Numeru węzła nie poprzedzamy żadną nazwą. W pozostałych informacjach najpierw podajemy nazwę zmiennej, a potem jej wartość liczbową.

ad 3.b. Lista elementów.

Pierwszą informacją jest numer ostatniego elementu.

Następnie dla każdego elementu podajemy:

- numer elementu
- numery węzłów określających początek WA i koniec WB elementu
- numer pozycji listy MAT, gdzie określone są własności geometryczne i fizyczne elementu
- przecinek kończący informacje dla elementu.

Listę kończy średnik napisany po przecinku ostatniego elementu. Numeru elementu nie poprzedzamy żadną nazwą.

W pozostałych informacjach podajemy najpierw nazwę zmiennej, a następnie jej wartość liczbową.

ad 3.c Lista materiałów

Podajemy w niej stałe sprężystości i charakterystyki geometryczne przekrojów poszczególnych elementów.

Pierwszą informacją jest liczba określająca numer ostatniej pozycji listy.

Następnie podajemy:

- numer pozycji listy

- moduł Kirchhoffa - G

- liczbę Poissona - NI

- charakterystyki geometryczne przekroju A, IZ

Przecinek, średnik dla zmiennych stosujemy podobnie jak dla list węzłów i elementów.

ad 4.2.a Informacje o wprowadzonych poprawkach powinny zawierać:

- a/ nazwę listy /tj. słowo WEZŁY, ELEMENTY lub MATERIALY/
- b/ numer pozycji, w której dokonujemy poprawek
- c/ nazwę i nową wartość zmiennej
- d/ jeżeli poprawki dotyczą tej samej listy, to piszemy przecinek i przechodzimy do punktu b/
- e/ średnik po przecinku dla ostatniej pozycji poprawionej na danej liście
- f/ gdy poprawiamy informacje dot: innej listy to przechodzimy do punktu a/

ad.6. Lista obciążeń.

Na liście obciążeń podajemy informacje określające obciążenia konstrukcji w postaci sił węzłowych oraz przemieszczeń podpór. Inne rodzaje obciążeń tj. obciążenie ciągłe, termiczne, montażowe należy sprowadzić do sił węzłowych.

Można wprowadzić dane dla szeregu wariantów obciążeń, w sposób następujący:

- 1/ dane dla pierwszego wariantu obciążeń
- 2/ dane dla drugiego wariantu obciążeń

n/ dane dla ostatniego wariantu obciążeń

n + 1/ słowo KONIEC

W każdym wariantcie obciążeń podajemy

1/ Słowo WARIANT

2/ numer wariantu /l.całkowita/

3/ tytuł wariantu /w jednym wierszu/

4/ opcjonalne słowo sterujące

CZYTAJ, DRUKUJ, POPRAW /znaczenie jak poprzednio/

4a/ po słowie sterującym CZYTAJ podajemy opcjonalnie

- słowo SIŁY i po nim listę sił węzłowych

- słowo PRZEMIESZCZENIA i po nim listę przemieszczeń
stanowiących obciążenia

4b/ po słowie DRUKUJ podajemy słowo SIŁY lub PRZEMIESZCZENIA
określające listę lub listy, które chcemy drukować

4c/ po słowie POPRAW zestaw informacji jak w komentarzu do
pkt.4.2.a.

Na liście sił węzłowych podajemy:

a/ numer węzła

b/ nazwy sił węzłowych PU, PV, PC i po nich ich wartości

c/ przecinek po ostatniej informacji dla węzła

Listę kończy średnik napisany po ostatnim przecinku.

Na liście przemieszczeń podajemy:

a/ numer węzła

b/ nazwy przemieszczenia DU, DV, DC i po nich ich wartości, wartościami dla zmiennej DC jest tangens kąta obrotu, który dla małych przemieszczeń możemy traktować jako kąt obrotu w radianach

c/ przecinek po ostatniej informacji dla węzła.

Listę kończy średnik napisany po ostatnim przecinku.

W jednym wariancie obciążeń mogą być określone obciążenia zarówno w postaci sił jak i przemieszczeń.

Na liście podajemy informacje tylko dla węzłów obciążonych.

Siły węzłowe oraz przemieszczenia podajemy w układzie węzłowym.

Jeżeli nie zdefiniujemy układu węzłowego poprzez podanie kąta

KT /patrz komentarz do pkt: 3.a lista węzłów/, to program

automatycznie przyjmie $KT=0$ i wtedy osie U, V, W, układu

węzłowego są odpowiednio równoległe do osi X, Y, Z, układu

globalnego.

Dla tego przypadku siły węzłowe oraz przemieszczenia podajemy w układzie globalnym.

Powyżej przedstawione zostały ogólne zasady wprowadzania danych

do programu. W opisie nie zostały uwzględnione możliwości

skracania listy danych przy wykorzystaniu podprogramów automatycznej generacji brakujących informacji.

Zostały one szczegółowo przedstawione w książce / 5 /

ad 7. Informacje o przekroju elementu ramy możemy wczytać w następujących dwu wariantach /patrz, schemat, rys.13/:

WARIANT 1

Na liście materiałów /karty 3 c/ podajemy parametr A

/pole przekroju/ równy 0 /stała typu INTEGER/

Wtedy podprogram GEOMP czyta kolejno formatem /6 F 6.2/ charakterystyczne wymiary przekroju dwuteowego:

TW - grubość środnika,

TSF - grubość mniejszej półki,

TBF - grubość większej półki,

HW - wysokość środnika,

BBF - szerokość większej półki,

BSF - szerokość mniejszej półki,

a następnie podprogram SILYGR liczy wektor Q_G sił granicznych dla tego przekroju. W testowej wersji programu przyjęto do obliczeń stałe wartości naprężenia plastycznego płynięcia

$\sigma_0 = 3000 \text{ kg/cm}^2$ oraz granicy plastyczności przy ścinaniu

$\tau_0 = 1500 \text{ kg/cm}^2$. W ostatecznej wersji niedogodność ta zostanie zlikwidowana.

WARIANT 2

Na liście materiałów /karty 3 c/ podajemy charakterystyki geometryczne A oraz IZ zgodnie z zasadami opisanymi w punkcie 3c. Wtedy podprogram SILY czyta kolejno formatem /5 F12.3/ siły graniczne w przekroju ramy:

- graniczną siłę normalną przy ściskaniu,
- graniczną siłę normalną przy rozciąganiu /ze znakiem -/,
- graniczny moment zginający dodatni,
- graniczny moment zginający ujemny /ze znakiem -/,
- graniczną siłę tnącą.

Liczba kart i ich kolejność odpowiadają liczbie materiałów i ich kolejności na liście materiałów.

Ad.8 Granicę plastyczności przy rozciąganiu σ_0 oraz granicę plastyczności τ_0 wczytujemy za pomocą formatu /2 F7.2/. Liczba kart i ich kolejność odpowiadają liczbie materiałów i ich kolejności na liście materiałów.

Ad.9 Lista mnożników obciążenia jest zbudowana identycznie, jak lista obciążeń początkowych 6. Kolejne karty tej listy odpowiadają kolejnym przyrostom obciążenia, a ich wielkość jest równa określonej mnożnikiem wielokrotności obciążeń początkowych wczytanych dla poszczególnych węzłów. Możemy więc stosować dowolne przyrosty, różniące się między sobą, a także, o ile zachodzi konieczność analizy konstrukcji dla obciążeń nieproporcjonalnych, różne dla różnych składowych wektora obciążeń.

Uwagi do rys. 6.2, rys.6.3 oraz rys. 6.4

Uproszczony schemat blokowy podprogramu MPL3 pokazuje rys.6.2, zaś szczegółowy schemat tego podprogramu pokazuje rys.6.3.

Dotyczy rysunku 6.2	}	①	przebieg analizy na 1-m kroku obciążenia $II = 1$
		②	część wspólna procedury
		③	przebieg analizy dla obciążeń $II > 1$

λ - parametr skalujący

LAMO - mnożnik obciążenia, który decyduje o liczbie przyrostów obciążenia, a ponadto pozwala stosować przyrosty obciąż-

zenia równe wielokrotnościom testowego przyrostu początkowego ΔP_0

Jeśli nie zachodzi potrzeba różnicowania przyrostów, kładziemy $LAMO = 1$ i wtedy wszystkie przyrosty są sobie równe i zależą jedynie od doboru testowego przyrostu początkowego ΔP_0

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{k}_{kl}^{(i-j)} &= \underset{\sim}{k}_{kl}^{(i-j)(s)} && - \text{gdy } II = 1 \\ \underset{\sim}{k}_{kl}^{(i-j)} &= \underset{\sim}{k}_{kl}^{(i-j)(s)} \text{ lub } \underset{\sim}{k}_{kl}^{(i-j)} = \underset{\sim}{k}_{kl}^{(i-j)(s-p)} && - \text{gdy } II > 1 \end{aligned}$$

Na schematach oznaczenie $\{i-j\}$ dotyczy elementu o końcach i oraz j

A (rys.6.3)- pole przekroju pręta. Patrz, instrukcja wprowadzania danych, punkt 7.

Parametry sterujące :

IW = 1 - rozwiązanie sprężyste

IW = 2 - rozwiązanie sprężysto-plastyczne

IL = 1 - liczenie przemieszczeń

IL = 2 - liczenie sił wewnętrznych

6.2. Opis programu ASGRAMW

Program ASGRAMW stanowi rozszerzenie programu ASGRAM o część uwzględniającą lokalne, sprężyste lub sprężysto-plastyczne

ne wyboczenie łożysk. Omawiając go ograniczymy się zatem do przedstawienia podprogramów realizujących algorytm opisany w rozdziale 5 i służących do wyznaczenia powyboczeniowych macierzy sztywności elementu skończonego, generowania odpowiednich warunków wytrzymałościowych i określania macierzy sztywności elementu w stanie wytrzymałości krańcowej. Dane techniczne testowej wersji programu ASGRAMW nie różnią się zasadniczo od przedstawionych w poprzednim podpunkcie danych programu ASGRAM. Współpracę opisanych poniżej podprogramów pokazuje rys.6.5.

Podprogram WW sprawdza warunek wyboczenia sprężystego lub wyboczenia sprężysto-plastycznego dla elementu o numerze NE. Przekazuje do podprogramu głównego wartość GAB funkcji wyboczenia oraz wskaźnik IKW, który informuje o tym, czy spełniony jest warunek wyboczenia $F(Q_k)$, $k=1...4$, $IKW = 1$ gdy $F(Q_k) \leq \alpha$, $IKW = 4$ gdy $F(Q_k) > \alpha$.

α w powyższych nierównościach oznacza stopień dokładności.

Podprogram PRETM wyznacza macierz sztywności B elementu o numerze NE, który uległ wyboczeniu sprężystemu przy sile tnącej $V < V_{kr}$. Szczegóły analizy zostały przedstawione w podpunkcie 5.2.A oraz w dodatku 2. W trakcie obliczeń wykorzystywany jest podprogram POWYB wyznaczający współczynniki równania powierzchni wyboczenia, według wzoru /D2.1/ z dodatku 2, podprogram PLPV określający współczynniki równania krzywej w płaszczyźnie P-V według wzoru /D2.2/ z dodatku 2, oraz podprogram MACPOD obliczający podmacierze macierzy podatności.

Podprogram PRETW wyznacza macierz sztywności B elementu NE w stanie wyboczenia sprężystego, gdy siła tnąca $V \geq V_{kr}$.

W równaniu powierzchni wybożenia sprężystego /5.9/ występują wielkości opisujące krytyczne siły wewnętrzne powodujące wybożenie środnika N_{kr} , V_{kr} , M_{kr} .

Wielkości te wyznaczamy za pomocą podprogramu SCR dla elementu NE o takich wymiarach, że iloraz L/h_s zawiera się w przedziale $[0.3, 1.0]$. Wówczas parametr sterujący, $IKR=1$. Gdy iloraz wymiarów środnika L/h_s jest poza przedziałem $[0.3, 1.0]$, wczytujemy dla danego elementu parametr sterujący $IKR=7$ oraz wartości N_{kr} , V_{kr} i M_{kr} obliczane za pomocą wzorów przybliżonych.

Podprogram POKN sprawdza dla każdego elementu warunek wytrzymałości krańcowej, zgodnie z podpunktem 5.4, określając stopień dokładności spełnienia równania powierzchni wytrzymałości krańcowej EPS oraz parametr IKK informujący o tym, czy warunek ten jest spełniony. Jeśli tak, to $IKK = 1$, jeśli nie, to $IKK=0$.

Podprogram ILNEW oblicza współczynnik skalujący XLN , proporcjonalny do odległości pomiędzy końcem wektora sił wewnętrznych SW o składowych N , M , V , a punktem przecięcia płaszczyzny aproksymującej płat powierzchni wytrzymałości krańcowej z prostą, na której leży wektor SW . Ponadto podprogram ten wylicza składowe GN , GM i GV wektora normalnego do płaszczyzny aproksymującej.

Przy wyznaczaniu macierzy sztywności elementu, który osiągnął stan wytrzymałości krańcowej, traktujemy powierzchnię wytrzymałości krańcowej jak powierzchnię potencjału plastyczności i postępujemy analogicznie, jak przy wyznaczaniu macierzy sztywności w przypadku uplastycznienia /podpunkt 5.5/.

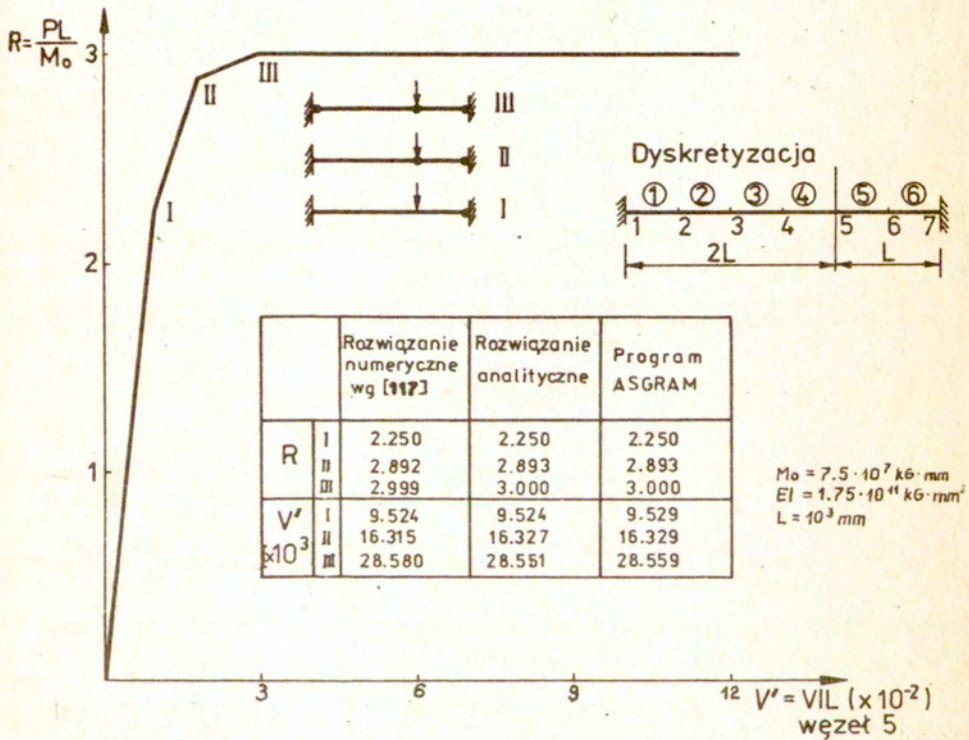
7. Przykłady obliczeń

Przedstawioną metodę nieliniowej analizy ram zilustrujemy przykładami obliczeń wykonanych za pomocą obydwu omówionych w poprzednim rozdziale podprogramów. W trakcie ich opracowywania korzystano z maszyny cyfrowej RIAD 32, na której też policzono wszystkie zamieszczone w pracy przykłady. Otrzymane rozwiązania porównano z wynikami uzyskanymi na drodze eksperymentalnej, analitycznej lub numerycznej przez innych autorów.

Ze względu na konieczność dokonania porównań we wszystkich przykładach przyjęto takie same dane, jak w cytowanych przy ich opisie pracach. Dlatego między innymi przykłady nr 1, nr 2 i nr 4 policzono kładąc $V_{gr} = 99999999$, kG, co pozwoliło w praktyce zmniejszyć wpływ siły tnącej prawie do zera. Z tych samych powodów w przykładach nr 3 i nr 5 pominięto wpływ siły podłużnej N . Większość danych dotyczących poniższych przykładów naniesiono na rysunkach. Przykłady 1+6 policzono wychodząc z warunku plastyczności danego wzorem /6.1/, za pomocą programu ASGRAM, dalsze przykłady policzono programem ASGRAMW, stosując warunek plastyczności opisany w podpunkcie 4.1 i warunek stanu krańcowego wg podpunktu 5.4.

Przykład 1

Pręt jak na rys. 7.1, utwierdzony po obydwu końcach, jest obciążony siłą skupioną. W tabelce na rysunku pokazano wyniki uzyskane za pomocą metody kolejnych rozwiązań sprężystych wg podejścia statycznego [96] oraz otrzymane na drodze numerycznej wg [117] i przez autorów niniejszej pracy



Rys. 7.1

Przykład 2

Przy obliczaniu ramy dwuprzegubowej jak na rys. 7.2 zastosowano dużą liczbę niewielkich przyrostów obciążenia, dzięki czemu można założyć, że warunek plastyczności jest spełniony w całym zakresie obciążeń. Wyniki porównano z [98].

Przykład 3

Trzykrotnie statycznie niewyznaczalną ramę jednonawową rys. 7.3 rozwiązano analitycznie w pracy [96]. W tablicy 1 zestawiono wyniki i porównano je z wynikami obliczeń programem ASGRAM. Kolejność pojawiania się przegubów plastycznych oraz moment utraty nośności a także wartości obciążeń odpowiadające powstawaniu stref aktywnych zgadzają się, a błąd względny nie przekracza 0,5 % obciążenia niszczonego.

Przykład 4, rys. 7.4

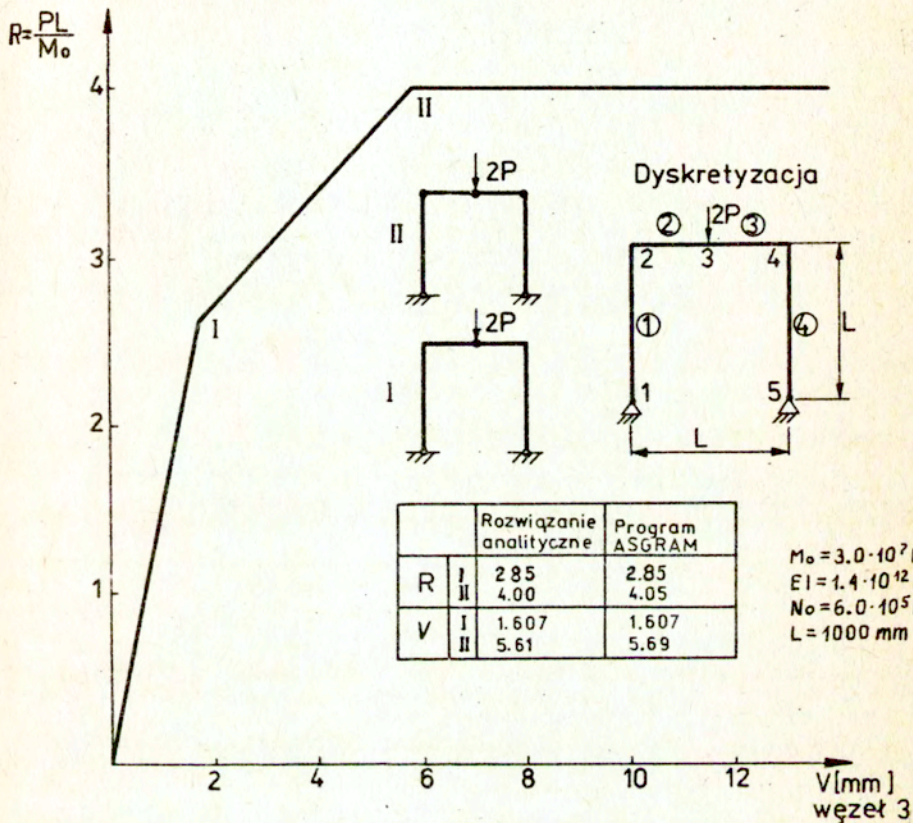
Rama pokazana na rys. 7.4 była wykonana specjalnie w celu przeprowadzenia doświadczeń w Leigh University w USA. Dwuteowniki ze stali 12WF36 miały następujące wymiary :

wysokość środnika	$2H = 30,8 \text{ cm}$
grubość półki	$t_f = 1,28 \text{ cm}$
szerokość półki	$b_f = 16,7 \text{ cm}$
grubość środnika	$t_w = 0,77 \text{ cm}$

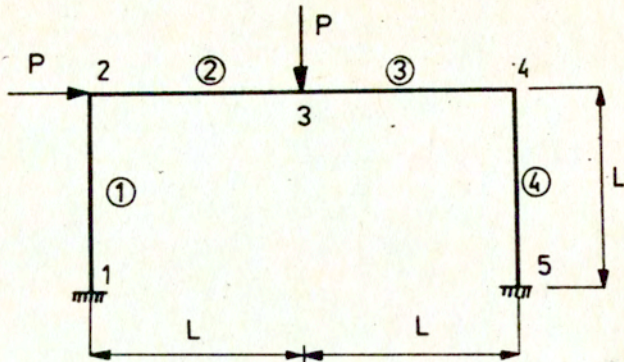
Granica plastyczności dla użytej stali $\sigma_0 = 3000 \text{ kg/cm}^2$

Pozostałe dane, dotyczące wymiarów ramy oraz sposobu obciążenia, naniesiono na rys. 7.4.

Otrzymana krzywa obciążenia - przemieszczenie pionowe środ-



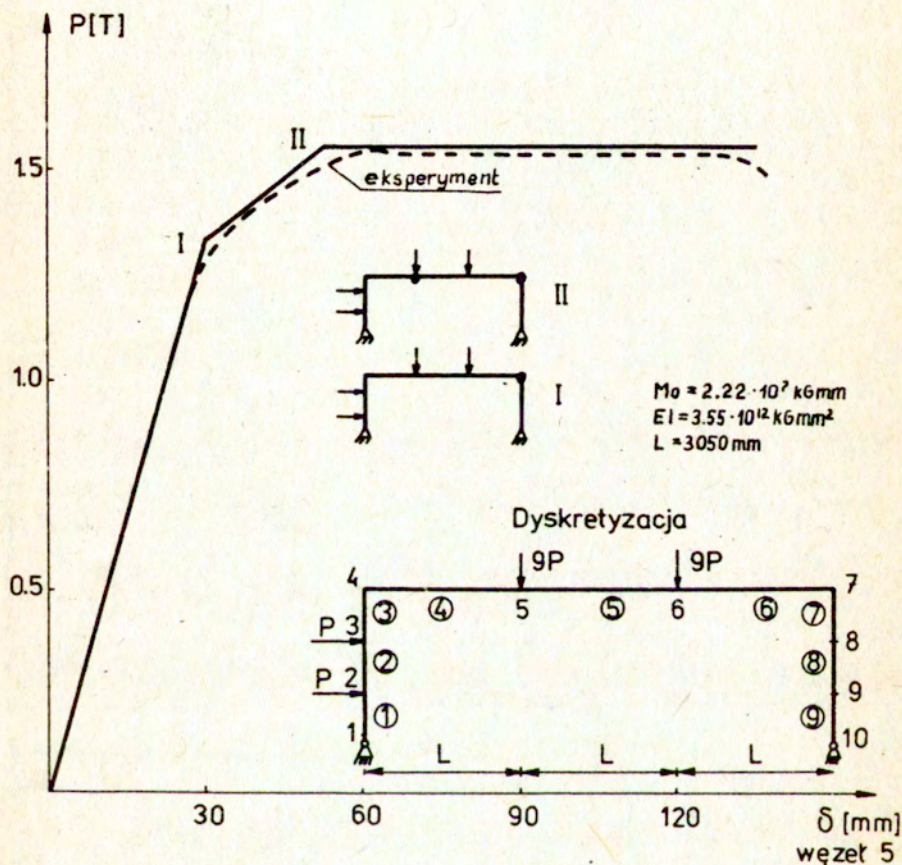
Dyskretyzacja



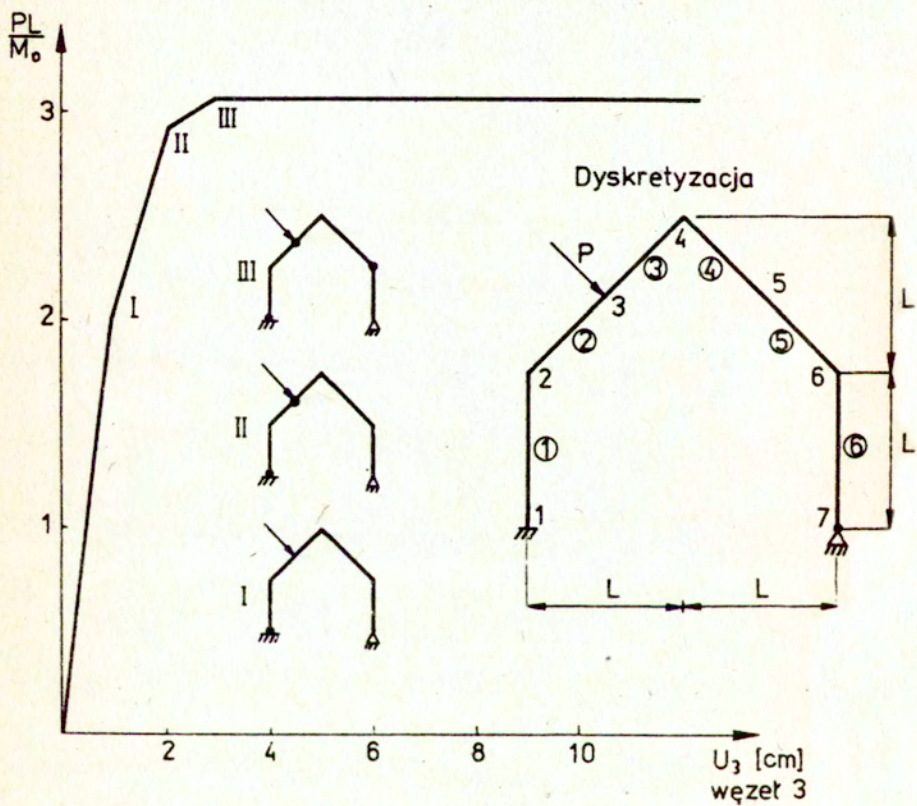
Rys. 7.3

Tablica 1

	Schemat statyczny	Pl / M_0 [96]	Pl / M_0 ASGRAM
1		2.424	2.46
2		2.567	2.57
3		2.957	2.98
4		3.0	3.01



Rys. 7.4



Rys. 7.5

ka belki poziomej przebiega bardzo blisko krzywej sporządzonej podczas doświadczeń [49] .

Przykład 5

Dwukrotnie statycznie niewyznaczalną ramę z załamanym ryg-
lem obliczono metodą superpozycji podstawowych mechanizmów
zniszczenia w pracy [96] , uzyskując wartość obciążenia granicz-
nego

$$\frac{PL}{M_0} = 3.095$$

Wyniki obliczeń programem ASGRAM wyniosł

$$\frac{PL}{M_0} = 3.099$$

a ponadto pozwolił określić kolejność tworzenia się przegubów
plastycznych (rys. 7.5) .

Przykład 6

W przykładzie tym policzono zamkniętą ramę płaską o wymia-
rach charakterystycznych dla okrętownictwa. Zależność obciążenia
- przemieszczenie węzła nr 21 pokazano na rys 7.6, na którym
zilustrowano również kolejność tworzenia się stref aktywnych.

Przykład 7

Belka obustronnie utwierdzona /rys.7.7a/ jest obciążona
poziomą siłą ściskającą oraz siłami pionowymi przyłożonymi w
węzłach. Obciążenie wzrasta proporcjonalnie. Na rys. 7.7.b
przedstawiono zależność między ugięciem pionowym węzła w śr

rozpiętości, a współczynnikiem przyrostu obciążenia.

Przedstawiono również tworzenie się stref wyboczenia/wyboczenie przy $V < V_{kr}$, wyboczenie przy $V \geq V_{kr}$ oraz stan wytrzymałości krańcowej /w zależności od przyrostu obciążenia /rys.7.7.c/. Wyniki porównano z rezultatami przedstawionymi w pracy [120]. Obserwujemy wyraźną nieliniowość zależności obciążenie - ugięcie w środku rozpiętości, spowodowaną utratą stateczności kolejnych elementów belki o wiotkim środku.

Przykład 8

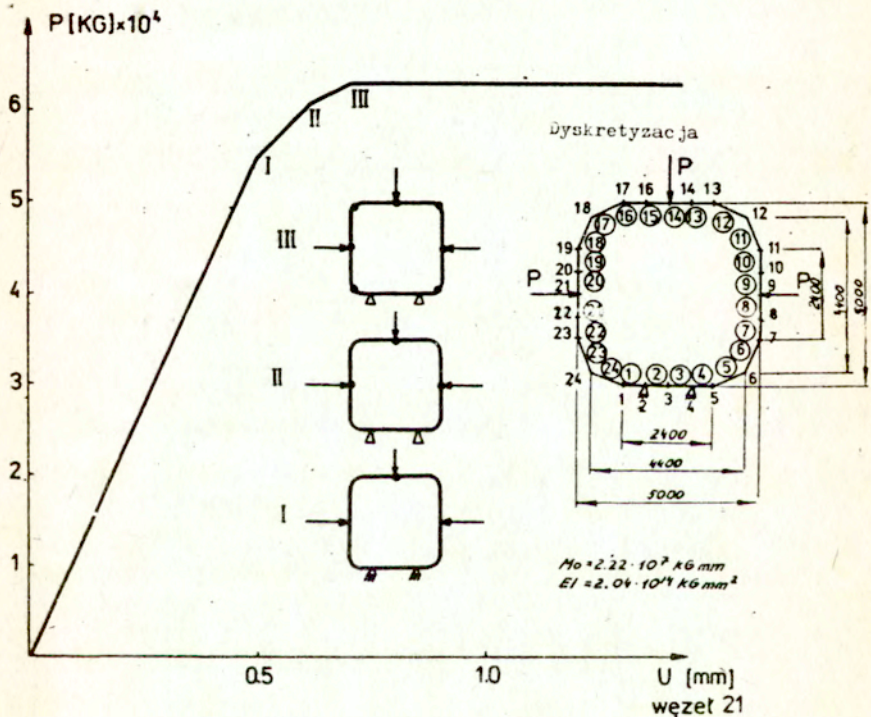
Rama zamknięta o przekroju dwuteowym /rys.7.8.a/. Na wykresie przedstawiającym zależność pomiędzy mnożnikiem obciążenia a ugięciem pionowym węzła 15 /rys.7.8b/ zaznaczono rozwój stref wyboczenia oraz wyniki otrzymane w pracy [120].

Przykład 9

Belka o przekroju dwuteowym, o jednym brzegu utwierdzonym, drugim swobodnie podpartym /rys.7.9a/ obciążona w środku rozpiętości siłą skupioną. Grubość trzech elementów przy swobodnym podparciu jest ponad trzykrotnie większa od grubości środka pozostałych elementów.

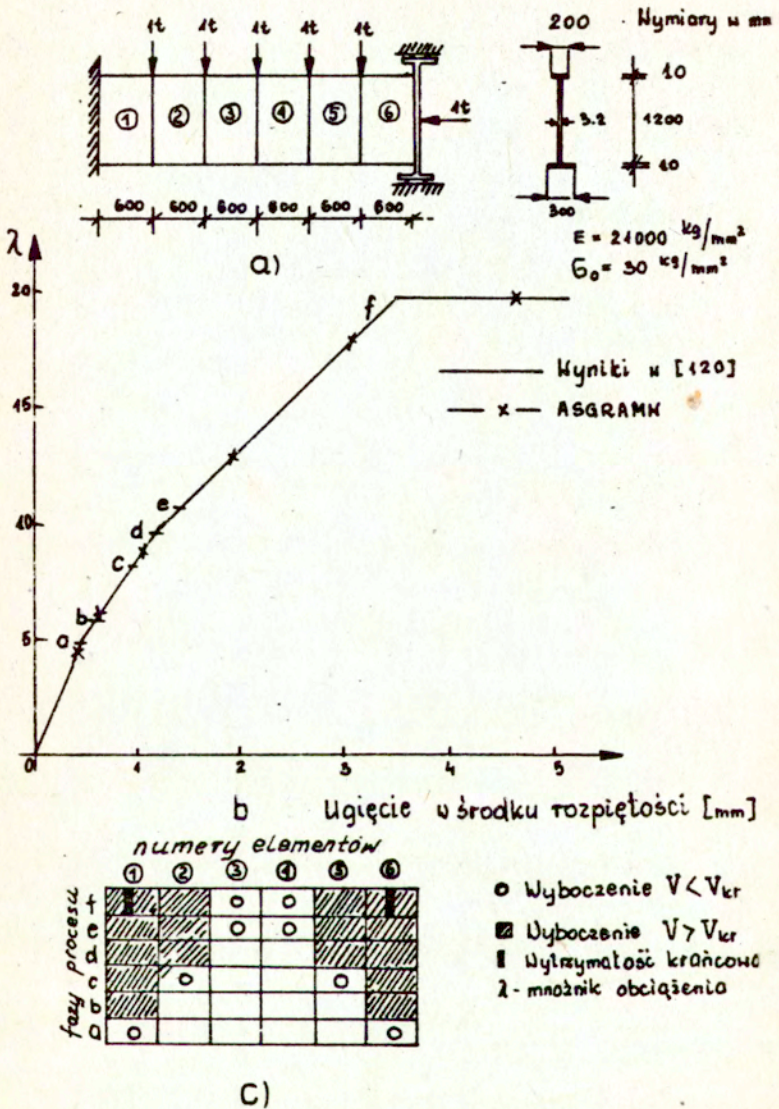
Górna półka tych elementów jest trzykrotnie szersza. Na rys. 7.9.b przedstawiono zależność między ugięciem węzła w środku rozpiętości a mnożnikiem obciążenia oraz zaznaczono strefy wyboczenia. Z kolei na rys. 7.9.c.d przedstawiono zależność między obciążeniem a siłami wewnętrznymi w kilku wyróżnionych przekrojach. Wyniki porównano również z rezultatami obliczeń numerycznych i badań eksperymentalnych przedstawionych w pracy [120]. Obserwując przebieg zależności obciążenie - ugięcie w środku rozpiętości stwierdzamy, że podobnie jak na

poprzedni rysunku dotyczącym wyoboczenia jest ona zbliżona do zależności liniowej dla całego zakresu obciążeń poprzedzających osiągnięcie stanu wytrzymałości krańcowej lub stanu granicznego przez najbardziej obciążone przekroje. Wynika to z małych różnic pomiędzy wielkościami charakteryzującymi przekrój efektywny przed i po wyoboczeniu, szczególnie w przypadku, gdy $V < V_{kr}$. Charakterystyczne zmiany momentu zginającego M oraz siły tnącej V w funkcji obciążenia P wiążą się z faktem, że osiągnięcie stanu wytrzymałości krańcowej w najbardziej obciążonym przekroju /punkt h/ pociąga za sobą redystrybucję sił wewnętrznych i wzrost tych sił w innych przekrojach.

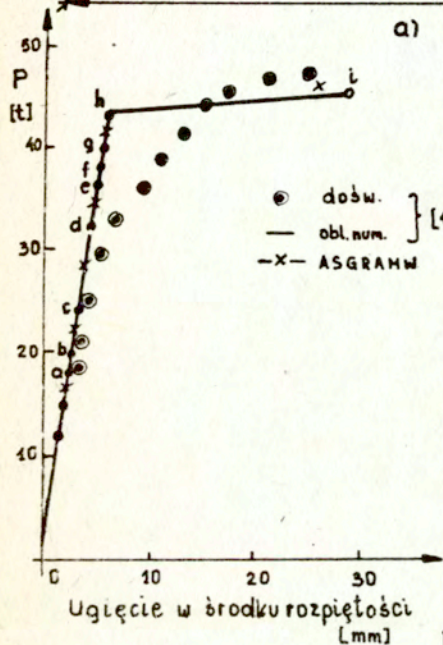
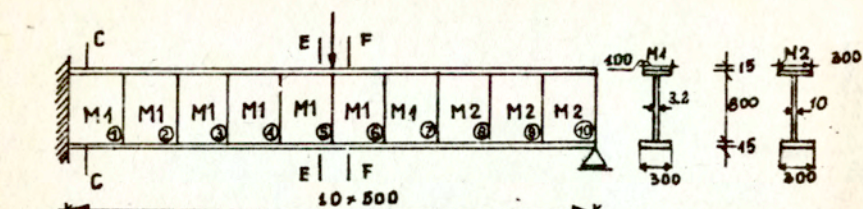


Rys.7.6

Na schemacie dyskretyzacji cyfry arabskie w kółku oznaczają numery elementów, zaś cyfry bez kółek - numery węzłów.



Rys. 7.7

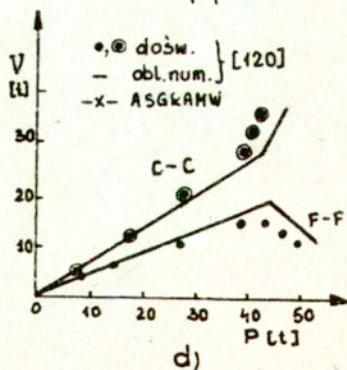
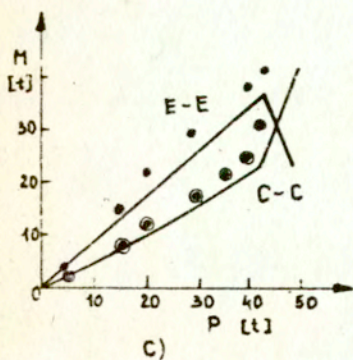


Wymiary w mm
 $E = 22000 \text{ kg/mm}^2$
 $G_0 = 37,8 \text{ kg/mm}^2$

numery elementów

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	▨	▨	▨	▨	▨	○	○			
h	▨	▨	▨	▨	▨	○	○			
g	▨	▨	▨	▨	▨	○	○			
f	▨	▨	▨	▨	▨	○	○			
e					○	○	○			
d					○	○	○			
c					○	○	○			
b					○	○				
a					○					

- Wyboczenie $V < V_{kr}$
- ▨ Wyboczenie $V > V_{kr}$
- ▩ Wytrzymałość krańcowa
- P - Obciążenie
- M - Moment zginający
- V - siła poprzeczna



Rys. 7.9
<http://rcin.org.pl>

Uwagi i wnioski

Za najważniejszy element przedstawionej pracy autor uważa opracowanie podstaw teoretycznych oraz napisanie programów numerycznych ASGRAM i ASGRAMW. Połączenie zalet systemu liniowej analizy konstrukcji WATKM z efektami wysiłków autora nad częścią nieliniową pozwoliło uzyskać algorytmy nadające się po wykonaniu niewielkich usprawnień, bezpośrednio do wykorzystania w biurach projektowych. Programy te mogą okazać się szczególnie przydatne wszędzie tam, gdzie projektantowi zależy na ciężarze konstrukcji oraz na dokładnej znajomości faz jej niszczenia pod wzrastającym dowolnym obciążeniem. Przykłady obliczeń wykonano wprawdzie, z uwagi na koszt eksploatacji maszyny cyfrowej oraz możliwość dokonania porównań, dla bardzo prostych belek i ram płaskich, lecz rzeczywiste możliwości programów obejmują znacznie bardziej skomplikowane przypadki i zostały podane w rozdziale 6.

Ponieważ zaproponowany sposób analizy stanowi połączenie różnych metod przybliżonych /metoda elementów skończonych przybliżone metody określania warunków wytrzymałościowych, uproszczone sposoby przyjmowania przekrojów efektywnych elementu skończonego po utracie stateczności środka przekroju dwuteowego, itp./, pojawiły się trudności w oszacowaniu dokładności rozwiązań. Tym niemniej skorzystano z możliwości dość dokładnej weryfikacji większości "ścieżek" algorytmu, jaką stwarza porównanie wyników otrzymanych w niniejszej pracy z wynikami badań eksperymentalnych, rozwiązaniami analitycznymi oraz rezultatami obliczeń numerycznych znalezionymi w litera-

turze.

Dokonane porównania wskazują, że przedstawione podejścia umożliwiają efektywną i dostatecznie dokładną analizę zachowania się płaskich sprężysto-plastycznych ram dwuteowych uwzględniającą zjawisko lokalnego wyboczenia środników w całym zakresie występujących deformacji.

Istotną zaletę algorytmów widzi autor w możliwości stosowania dowolnych warunków wytrzymałościowych, przy wyeliminowaniu konieczności ich linearyzacji. Uzyskujemy w ten sposób nie tylko poprawienie dokładności obliczeń, ale także możemy łatwo uwzględniać oddziaływanie dowolnie złożonych zjawisk, np. efektów termicznych, niejednorodności materiału, wpływ otworów lub usztywnień, ponieważ stopień skomplikowania funkcji opisującej warunek wytrzymałościowy nie stanowi żadnego ograniczenia zwiększając jedynie czas eksploatacji komputera. Uogólnienie podejścia na przypadki układów przestrzennych oraz wprowadzenie warunków wytrzymałościowych dokładniej opisujących przebieg utraty nośności poszczególnych elementów nie powinno przedstawiać żadnych trudności. Modularna struktura programów w połączeniu z faktem, że są one częścią dużego systemu WATKM pozwala sądzić, że w przyszłości można będzie za ich pomocą rozwiązywać bardziej złożone przypadki z zakresu statyki i dynamiki konstrukcji.

Obecne wersje programów wymagają znacznie szerszego przetestowania. Szczególnie ważne znaczenie posiada wpływ siły tnącej na zagadnienie nośności krańcowej po wyboczeniu sprężystym środnika. Należałoby niewątpliwie korzystając z bardzo dużej ilości różnych badań eksperymentalnych, zweryfikować

dokładniej zjawisko redystrybucji sił wewnętrznych spowodowane utratą stateczności, oraz ewentualnie wykorzystać możliwość wprowadzenia dodatkowej siły wewnętrznej w postaci bimomentu przyjmowanego w tradycyjnym podejściu analizy przekrojów cienkościennych metodą Własowa. Równie celowe jest sprawdzenie proponowanego podejścia w odniesieniu do wyboczenia sprężysto-plastycznego. Autor nie spotkał niestety przykładów obliczeń numerycznych ani innych wyników badań związanych z tym zjawiskiem i dlatego dokładność rezultatów otrzymanych w tej części pracy należy traktować z pewną rezerwą.

DODATEK 1

Jawna postać współczynników macierzy sprężysto-plastycznych elementu skończonego.

Oznaczmy składowe wektora gradientów powierzchni granicznej względem odpowiednich sił wewnętrznych w przekrojach przywęzłowych 1 oraz 2 elementu skończonego następująco

$$\underline{\phi}_1^T = \left(\frac{\partial F}{\partial Q_1} \right)^T = \{NA, TA, MA\} \quad \underline{\phi}_2^T = \left(\frac{\partial F}{\partial Q_2} \right)^T = \{NB, TB, MB\}$$

Ponadto wprowadźmy ze względu na przejrzystość zapisu następujące oznaczenia

$$EAL = \frac{EA}{L} \quad EJL1 = \frac{(4+\delta)EJ}{(1+\delta)L} \quad EJL2 = \frac{6EJ}{L^2(1+\delta)}$$

$$EJL3 = \frac{12EJ}{(1+\delta)L^3}$$

gdzie $\delta = \frac{12EJ}{GA_{ef}L^2}$ - współczynnik deformacji pochodzących od ścinania

A_{ef} - przekrój efektywny ze względu na ścinanie/ równy w obszarze sprężystym przekrojowi średnika elementu dwuteowego/

Macierz sprężystą elementu prętowego można wtedy zapisać w postaci

$$\tilde{k}^{(s)} = \begin{bmatrix} \text{EAL} & 0 & 0 & -\text{EAL} & 0 & 0 \\ & \text{EJL3} & \text{EJL2} & 0 & -\text{EJL3} & \text{EJL2} \\ & & \text{EJL1} & 0 & -\text{EJL2} & \frac{\text{EJL1} / 2 - \gamma /}{4 + \gamma /} \\ & & & \text{EAL} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \text{EJL3} & -\text{EJL2} \\ & & & & & \text{EJL1} \end{bmatrix}$$

wprowadźmy oznaczenia

$$\underline{\phi}_1^T \tilde{k}_{11} = \{ \text{EAL} \cdot \text{NA}, \text{EJL3} \cdot \text{TA} + \text{EJL2} \cdot \text{MA}, \text{EJL2} \cdot \text{TA} + \text{EJL1} \cdot \text{MA} \}$$

$$= \{ \text{RA1}, \text{RA2}, \text{RA3} \}$$

$$\tilde{k}_{11} \underline{\phi} = \begin{Bmatrix} \text{EAL NA} \\ \text{EJL3 TA} + \text{EJL2 MA} \\ \text{EJL2 TA} + \text{EJL1 MA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{RA1} \\ \text{RA2} \\ \text{RA3} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\phi} \tilde{k}_{12} = \{ -\text{RA1}, -\text{RA2}, \text{RA4} \}$$

gdzie

$$\text{RA4} = \text{EJL2} \cdot \text{TA} + \text{EJL1} \cdot \text{MA} \cdot (2 - \gamma) / (4 + \gamma)$$

$$\tilde{k}_{21} \underline{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} -\text{RA1} \\ -\text{RA2} \\ \text{RA4} \end{Bmatrix} \quad \tilde{k}_{22} \underline{\phi} = \begin{Bmatrix} \text{RB1} \\ \text{RB2} \\ \text{RB3} \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{12} \underline{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} -RB1 \\ -RB2 \\ RB4 \end{Bmatrix}$$

gdzie .

$$RB4 = -EJL2 \cdot TB + EJL1 \cdot MB \cdot (2 - \delta) / (4 + \delta)$$

$$RB1 = EAL \cdot NB$$

$$RB2 = EJL3 \cdot TB - EJL2 \cdot MB$$

$$RB3 = -EJL2 \cdot TB + EJL1 \cdot MB$$

$$\underline{\phi}_2^T \tilde{k}_{21} = \{ -RB1, -RB2, RB4 \}$$

$$\underline{\phi}_2^T \tilde{k}_{22} = \{ RB1, RB2, RB3 \}$$

$$CA = \underline{\phi}_1^T \tilde{k}_{11} \underline{\phi}_1$$

$$CB = \underline{\phi}_2^T \tilde{k}_{22} \underline{\phi}_2$$

$$CAB = CA \cdot CB - (\underline{\phi}_1^T \tilde{k}_{12} \underline{\phi}_2)^2 = CA \cdot CB - (-RA1 \cdot NB - RA2 \cdot TB + RA4 \cdot MB)^2$$

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_2^T \tilde{k}_{11} &= \{ EAL \cdot NB, EJL3 \cdot TB + EJL2 \cdot MB, EJL2 \cdot TB + EJL1 \cdot MB \} \\ &= \{ RB1, RB5, RB6 \} \end{aligned}$$

1. Uplastycznienie lewego przekroju przywęzłowego pręta

$$\tilde{k}_{11}^P = \tilde{k}_{11} - \frac{1}{CA} \begin{bmatrix} R/1/= RA1^2 & R/2/=RA1 RA2 & R/4/=RA1 RA3 \\ & R/3/=RA2^2 & R/5/=RA2 RA3 \\ sym & & R/6/=RA3^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{12}^P = \tilde{k}_{12} - \frac{1}{CA} \cdot \begin{bmatrix} -R/1/ & -R/2/ & RA1 \cdot RA4 = R/16/ \\ -R/2/ & -R/3/ & RA2 \cdot RA4 = R/17/ \\ -R/4/ & -R/5/ & RA3 \cdot RA4 = R/18/ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{22}^P = \tilde{k}_{22} - \frac{1}{CA} \cdot \begin{bmatrix} R/1/ & R/2/ & -R/16/ \\ \text{sym} & R/3/ & -R/17/ \\ & & RA4 \cdot RA4 \end{bmatrix}$$

2. Uplastycznienie prawego przekroju przywęzłowego pręta

$$\tilde{k}_{11}^P = \tilde{k}_{11} - \frac{1}{CB} \cdot \begin{bmatrix} R/1/ = RB1^2 & R/2/ = RB1 \cdot RB2 & R/4/ = RB1 \cdot RB4 \\ \text{sym} & R/3/ = RB2^2 & R/5/ = -RB2 \cdot RB4 \\ & & R/6/ = RB4^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{12}^P = \tilde{k}_{12} - \frac{\tilde{k}_{12} \underline{\phi}_2 \underline{\phi}_2^T \tilde{k}_{22}}{CB} =$$

$$= \tilde{k}_{12} - \frac{1}{CB} \cdot \begin{bmatrix} -R/1/ & -R/2/ & -RB1 \cdot RB3 = R/16/ \\ -R/2/ & -R/3/ & -RB2 \cdot RB3 = R/17/ \\ -R/4/ & -R/5/ & RB3 \cdot RB4 = R/18/ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{22}^P = \tilde{k}_{22} - \frac{\tilde{k}_{22} \underline{\phi}_2 \underline{\phi}_2^T \tilde{k}_{22}}{CB} =$$

$$= \tilde{k}_{22} - \frac{1}{CB} \cdot \begin{bmatrix} R/1/ & R/2/ & -R/16/ \\ \text{sym} & R/3/ & -R/17/ \\ & & RB3 \cdot RB3 \end{bmatrix}$$

3. Uplastycznienie otydnu przekrojów przywężziowych pręta

$$\begin{aligned}
 & \underset{\sim 11}{k}^P = k - \frac{1}{CAB} \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} RA1 \\ RA2 \\ RA3 \end{array} \right\} \left(\left\{ RB1, RB2, RB3 \right\} \phi_2 \left\{ RA1, RA2, RA3 \right\} \right. \\ \left. - \left\{ -RA1, -RA2, RA4 \right\} \phi_2 \left\{ -RB1, -RB2, RB4 \right\} \right) \\ \left. \begin{array}{c} -RB1 \\ -RB2 \\ RB4 \end{array} \right\} \left(\left\{ RA1, RA2, RA3 \right\} \phi_1 \left\{ -RB1, -RB2, RB4 \right\} \right. \\ \left. - \left\{ -RB1, -RB2, RB4 \right\} \phi_2 \left\{ RA1, RA2, RA3 \right\} \right) \\ \left. \begin{array}{c} RA1 \\ RA2 \\ RA3 \end{array} \right\} \left(RBB \cdot \left\{ RA1, RA2, RA3 \right\} + \left(RA1 \cdot NB + RA2 \cdot TB - RA4 \cdot MB \right) \right. \\ \left. \cdot \left\{ -RB1, -RB2, RB4 \right\} \right) \\ \left. \begin{array}{c} -RB1 \\ -RB2 \\ RB4 \end{array} \right\} \left(\left(RA1 \cdot NA + RA2 \cdot TA + RA3 \cdot MA \right) \left\{ -RB1, -RB2, RB4 \right\} + \right. \\ \left. \left. + \left(RB1 \cdot NA + RB2 \cdot TA - RB4 \cdot MA \right) \left\{ RA1, RA2, RA3 \right\} \right) \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \underset{\sim}{k}_{11} - \frac{1}{CAB} \begin{Bmatrix} RA1 \\ RA2 \\ RA3 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} (RBB \cdot RA1 - RAB \cdot RB1) \quad , \quad (RBB \cdot RA2 - RAB \cdot RB2) \quad , \\ (RBB \cdot RA3 + RAB \cdot RB4) \end{array} \right\}$$

$$+ \begin{Bmatrix} -RB1 \\ -RB2 \\ RB4 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} (RBA \cdot RA1 - RAA \cdot RB1) \quad , \quad (RBA \cdot RA2 - RAA \cdot RB2) \quad , \\ (RBA \cdot RA3 + RAA \cdot RB4) \end{array} \right\}$$

$$\underset{\sim}{k}_{11}^P = \underset{\sim}{k}_{11} - \frac{1}{CAB} \begin{bmatrix} R/1/=RA1 \cdot RBB1+ & R/2/=RA1 \cdot RBB2+ & R/4/=RA1 \cdot RBB3+ \\ -RB1 \cdot RAA1 & -RB1 \cdot RAA2 & -RB1 \cdot RAA3 \\ & R/3/=RA2 \cdot RBB2+ & R/5/=RA2 \cdot RBB3+ \\ & -RB2 \cdot RAA2 & -RB2 \cdot RAA3 \\ & & R/6/=RA3 \cdot RBB3+ \\ & & +RB4 \cdot RAA3 \end{bmatrix}$$

sym

$$\underset{\sim}{k}_{12}^P = \underset{\sim}{k}_{12} - \frac{1}{CAB} \begin{Bmatrix} RA1 \\ RA2 \\ RA3 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{RB1, RB2, RB3\} \underline{\phi}_2 \{-RA1, -RA2, RA4\} \\ -\{-RA1, -RA2, RA4\} \underline{\phi}_2 \{RB1, RB2, RB3\} \end{array} \right\}$$

$$+ \left[\begin{array}{c} -RB_1 \\ -RB_2 \\ \\ RB_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \{RA_1, RA_2, RB_3\} \phi \{RB_1, RB_2, RB_3\} \\ - \{ -RE_1, -RB_2, RB_4\} \phi \{ -RA_1, -RA_2, RA_4 \} \end{array} \right\} =$$

$$= k_{12} - \frac{1}{CAB} \left[\begin{array}{c} RA_1 \\ RA_2 \\ RA_3 \end{array} \right] \left(RBE \{ -RA_1, -RA_2, RA_4 \} + RAB \{ +RB_1, RB_2, RB_3 \} \right) +$$

$$+ \left[\begin{array}{c} -RB_1 \\ -RB_2 \\ \\ RB_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} RAA \{ +RB_1, RB_2, RB_3 \} + RBA \{ -RA_1, -RA_2, RA_4 \} \end{array} \right\} =$$

$$= k_{12} - \frac{1}{CAB} \left[\begin{array}{c} RA_1 \\ RA_2 \\ RA_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} -RBB \cdot RA_1 + RAB \cdot RB_1, -RBB \cdot RA_2 + RAB \cdot RB_2, \\ RBB \cdot RA_4 + RAB \cdot RB_3 \end{array} \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{c} -RB1 \\ -RB2 \\ \\ RB4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} RAA \quad RB1-RBA \quad RA1, \quad RAA \quad RB2-RBA \quad RA2, \\ \\ RAA \quad RB3+RBA \quad RA4 \end{array} \right\}$$

R/7/=RAA1 RB1+	R/11/=RAA2 RB1	R/16/=RA1
-RBB1 RA1=-R/1/	-RBB2 RA1=-R/2/	RAB1+-RB1
		RAB2
R/8/=RAA1 RB2+	R/12/=RAA2 RB2+	R/17/=RA2
-RBB1 RA2	-RBB2 RA2=	RAB1+-RB2
	=-R/3/	RAB2
R/9/=-RA3 RBB1+	R/13/=-RA3	R/18/=RA3
-RB4 RAA1	RBB2+-RB4	RAB1+RB4
	RAA2	RAB2

$$k_{12}^P = k_{12} - \frac{1}{CAB}$$

$$k_{22}^P = k_{22} - \frac{1}{CAB} \left\{ \begin{array}{c} -RA1 \\ -RA2 \\ \\ RA4 \end{array} \right\} \left(\left\{ RB1, RB2, RB3 \right\} \phi_2 \left\{ -RA1, -RA2, RA4 \right\} - \left\{ -RA1, -RA2, RA4 \right\} \phi_2 \left\{ RB1, RB2, RB3 \right\} \right)$$

$$+ \begin{bmatrix} RB1 \\ RB2 \\ RB3 \end{bmatrix} \left\{ \left(\{ RA1, RA2, RA3 \} \phi \{ RB1, RB1, RB3 \} \right) - \left(-RB1, -RB2, RB4 \right) \phi \{ -RA1, -RA2, RA4 \} \right\} =$$

$$= k_{22} - \frac{1}{CAB} \begin{bmatrix} -RA1 \\ -RA2 \\ RA4 \end{bmatrix} \left\{ RBB \{ -RA1, -RA2, RA4 \} + RAB \{ \{ RB1, RB2, RB3 \} \} \right\}$$

$$+ \begin{bmatrix} RB1 \\ RB2 \\ RB3 \end{bmatrix} \left\{ RAA \{ RB1, RB2, RB3 \} + RBA \{ -RA1, -RA2, RA4 \} \right\} =$$

$$= k_{22} - \frac{1}{CAB} \begin{bmatrix} -RA1 \\ -RA2 \\ RA4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} &(-RBB \cdot RA1 + RAB \cdot RB1, -RBB \cdot RA2 + RAB \cdot RB2, \\ &RBB \cdot RA4 + RAB \cdot RB3) \end{aligned} \right\}$$

$$+ \begin{bmatrix} RB1 \\ RB2 \\ RB3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} &(RAA \cdot RB1 - RBA \cdot RA1, RAA \cdot RB2 - RBA \cdot RA2, \\ &RAA \cdot RB3 + RBA \cdot RA4) \end{aligned} \right\}$$

R/10/=RA1 RBB1
-RB1 RAA1

R/14/=RA1 RBB2
-RB1 RAA2=R/2/

R/19/=-RA1 RAB1
+RB1 RAB2

$=k_{22} - \frac{1}{CAB}$

R/15/=RA2 RBB2
-RB2 RAA2=-R/3/

R/20/=-RA2 RAB1
+RB2 RAB2

sym.

R/21/=RA4 RAB1
+RB3 RAB2

DODATEK 2

Jawna postać macierzy pomocniczych przy wyznaczaniu macierzy sztywności elementu w przypadku wyboczenia sprężystego dla $v < v_{kr}$.

Powierzchnia wyboczenia /5.9/ w postaci ogólnego równania powierzchni stopnia drugiego w funkcji zmiennych niezależnych $(N1, M1, V1)$.

$$A_{11} * N1^2 + A_{22} * M1^2 + A_{33} * V1^2 + 2 * A_{12} * N1M1 + 2 * A_{13} * N1V1 + 2 * A_{23} * V1M1 + 2 * A_{14} * N1 + 2 * A_{24} * M1 + 2 * A_{34} * V1 + A_{44} = 0$$

gdzie $A_{11} = \left(\frac{I_3 e}{I M_{kr}}\right)^2$, $A_{22} = \left(\frac{I_3}{M_{kr} I}\right)^2$, $A_{33} = \left(\frac{L I_3}{2 I M_{kr}}\right)^2 + \frac{1}{V_{kr}}$,

$$A_{12} = 2 \left(\frac{I_3}{I M_{kr}}\right)^2$$
, $A_{13} = \frac{1}{2} L e \left(\frac{I_3}{I M_{kr}}\right)^2$, $A_{23} = \frac{1}{2} L \left(\frac{I_3}{I M_{kr}}\right)^2$,

$$A_{14} = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3}{N_{kr} A} + \frac{A_3 e^2}{N_{kr} I}\right)$$
, $A_{24} = \frac{A_3 L e}{4 N_{kr} I}$, $A_{34} = \frac{A_3 e}{2 N_{kr} I}$

$$A_{44} = -1$$

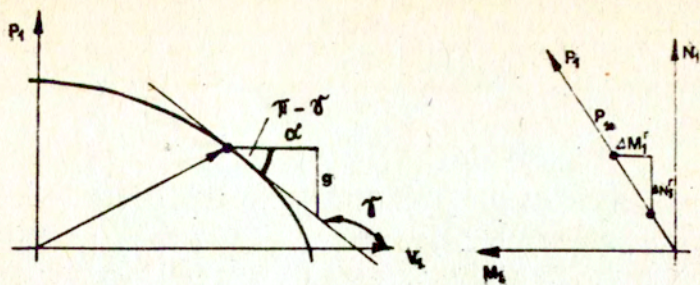
Jak wiadomo z procedury przedstawionej w p.2.4 wektor przyrostu siły węzłowej rozkładamy na dwie składowe:

składową ścinania oraz składową zginania wraz ze ściskaniem.

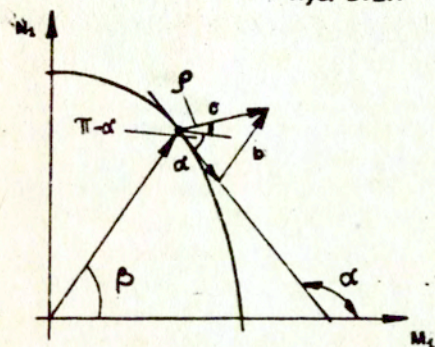
Rozważania prowadzimy w płaszczyźnie $(P - V1)$ oraz w płaszczyźnie

$$V_1 = V_1^0 \quad \left| \text{/rys. 5.2, 5.3, 5.5 /} \right.$$

Płaszczyzna P1 - V1



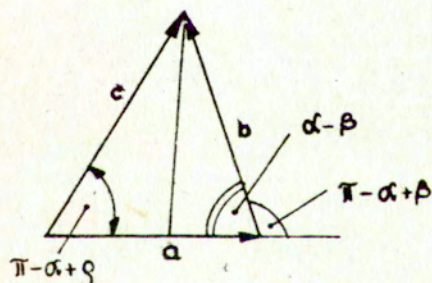
Rys. D.2.1



$$c \cdot \sin g = \Delta N_1$$

$$c \cdot \cos g = \Delta M_1 - \Delta V_1 \cdot \frac{1}{2}$$

Rys. D.2.2



$$a = c \cdot \cos(\pi - \alpha + g) + \frac{c \cdot \sin(\pi - \alpha + g)}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}$$

$$b = \frac{c \cdot \sin(\pi - \alpha + g)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$c \cdot \sin(\pi - \alpha + g) = (\Delta M_1 - \Delta V_1 \cdot \frac{1}{2}) \sin(\pi - \alpha) + \Delta N_1 \cos(\pi - \alpha)$$

$$c \cdot \cos(\pi - \alpha + g) = (\Delta M_1 - \Delta V_1 \cdot \frac{1}{2}) \cos(\pi - \alpha) - \Delta N_1 \sin(\pi - \alpha)$$

Rys. D.2.3

Krzywą powstałą w wyniku przecięcia płaszczyzną $(P - V_1)$ powierzchni wybożenia D2.1 możemy zapisać w postaci ogólnej w funkcji zmiennych niezależnych (P_1, V_1) następująco:

$$AP_{11} * P_1^2 + AP_{22} * V_1^2 + 2 * AP_{12} * P_1 * V_1 + 2 * /D2.2 / * AP_{13} * P_1 + 2 * AP_{23} * V_1 + AP_{33} = 0$$

gdzie :

$$AP_{11} = A_{11} * (T_{11})^2 + 2 * A_{12} * T_{11} * T_{21} + T_{22} * (T_{21})^2$$

$$AP_{22} = A_{33}$$

$$AP_{12} = A_{14} * T_{11} + A_{24} * T_{21}$$

$$AP_{13} = A_{14} * T_{11} + A_{24} * T_{21}$$

$$AP_{23} = A_{34}$$

$$AP_{33} = A_{44}$$

$$P_1 = \sqrt{N_1^2 + M_1^2}$$

$$T_{11} = N_1 / P_1$$

$$T_{21} = M_1 / P_1$$

$$T_{22} = T_{11}$$

$$T_{12} = - T_{21}$$

W dalszych rozważaniach niezbędna jest znajomość współczynnika kierunkowego stycznej do krzywej /D2.2/ w punkcie

$$\left(\sqrt{N_{10}^2 + M_{10}^2}, V_{10} \right) \quad /rys.D2.1/.$$

Równanie stycznej ma postać:

$$(AP_{11} * P_{10} + AP_{12} * V_{10} + AP_{13}) * P_1 + (AP_{22} * V_1 + AP_{23}) * V_1 + AP_{33} = 0 \quad /D2.2 /$$

$$V_{10} + AP_{12} * P_{10} + AP_{23}) * V_1 + AP_{13} * P_{10} + AP_{23} * V_{10} + AP_{33} = 0$$

gdzie

$$P_{10} = \sqrt{N_{10}^2 + M_{10}^2}$$

Zapisując równanie /D2.3/ inaczej, mamy

$$P_1 = - \frac{WSP_2}{WSP_1} * V_1 - \frac{WSP_3}{WSP_1} \quad /D2.4/$$

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy współczynnikowi przy zmiennej V_1 .

$$\operatorname{tg} \delta = \text{MPS} = - \frac{WSP_2}{WSP_1} \quad /D2.5/$$

$$WSP_1 = AP_{11} * P_{10} + AP_{12} * V_{10} + AP_{13}$$

$$WSP_2 = AP_{22} * V_{10} + AP_{12} * P_{10} + AP_{23}$$

$$WSP_3 = AP_{13} * P_{10} + AP_{23} * V_{10} + AP_{33}$$

Możemy już teraz wyznaczyć składowe odcinka "g" /rys.D2.1/ w funkcji składowych wektora przyrostu siły węzłowej (ΔN_1 , ΔM_1 , ΔV_1)

$$\Delta N_1^r = - \frac{N_{10}}{\sqrt{M_{10}^2 + N_{10}^2}} \Delta V_1 \operatorname{tg} \delta$$

$$\Delta M_1^r = - \frac{M_{10}}{\sqrt{M_{10}^2 + N_{10}^2}} \Delta V_1 \operatorname{tg} \delta$$

Macierz $\underline{\underline{\epsilon}}^T$ ze wzoru /5.18/ przyjmuje więc postać:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^T = \begin{bmatrix} 0 & CR12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & CR32 & 0 \end{bmatrix} \quad /D2.6/$$

$$CR12 = - \frac{N_{10}}{\sqrt{M_{10}^2 + N_{10}^2}} \operatorname{tg} \delta = - \frac{N_{10}}{\sqrt{M_{10}^2 + N_{10}^2}} \text{ MPS}$$

$$CR32 = - \frac{M_{10}}{\sqrt{M_{10}^2 + N_{10}^2}} \operatorname{tg} \delta = - \frac{M_{10}}{\sqrt{M_{10}^2 + N_{10}^2}} \text{ MPS}$$

Płaszczyzna $V_1 = V_1^0$

Równanie krzywej powstałej poprzez przecięcie powierzchni wyboczenia /D2.1/ płaszczyzną $V_1 = V_{10}$

$$\begin{aligned} & A11 * N1^2 + A22 * M1^2 + 2 * A12 * N1 * M1 + \quad /D2.7/ \\ & + 2 * (A14 + A13 * V10) * N1 + 2 * (A24 + A22 * V10) * \\ & * M1 + A33 * V10^2 + 2 * A34 * V10 + A44 = 0 \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio wyznaczmy współczynnik kierunkowy prostej stycznej do krzywej /D2.7/ w punkcie (N_{10}, M_{10}) .

Na podstawie równania stycznej współczynnik kierunkowy ($\operatorname{tg} \alpha$ z rys. D2.2) przybiera wartość

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{AS11}{AS22} = MS \quad /D2.8/$$

gdzie

$$AS11 = A22 * M_{10} + A12 * N_{10} + A24 + A23 * V_{10}$$

$$AS22 = A11 * N_{10} + A12 * M_{10} + A14 + A13 * V_{10}$$

Składowa styczna wektora przyrostu sił węzłowych $\Delta Q_1^{S'}$ (odcinek "a" na rys. D2.3) jest równa

$$a = \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} - \cos \alpha \right) \left(\Delta M_1 - \frac{\Delta V_1 \cdot L}{2} \right) - \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + \sin \alpha \right) \Delta N_1$$

Składowa równoległa do wektora sił węzłowych (odcinek "b" na rys. D2.3) .

$$b = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \left(\Delta M_1 - \frac{\Delta V_1 \cdot L}{2} \right) - \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \Delta N_1$$

Macierze $\tilde{C}^{S'}$ i \tilde{C}^P przyjmują więc postać (wzory : /5.16 /, /5.17/).

$$\tilde{C}^{S'} = \begin{bmatrix} CT11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & CT32 & CT33 \end{bmatrix} \quad /D2.11/$$

gdzie :

$$CT11 = - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} - \sin \alpha \quad ,$$

$$CT32 = - \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} - \cos \alpha \right) L/2 \quad ,$$

$$CT33 = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} - \cos \alpha .$$

$$\tilde{C}^P = \begin{bmatrix} CP11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & CP32 & CP33 \end{bmatrix}$$

$$CP_{11} = - \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)},$$

$$CP_{32} = - \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \frac{L}{2},$$

$$CP_{33} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

, kąty α , β zaznaczone są na rys. D2.2, D2.3.

Macierz \tilde{B}^S /wzór 5.17/

$$\tilde{B}^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L/2 & 0 \end{bmatrix} \quad /D2.12/$$

Na podstawie zależności /5.19/ i /5.20/ oraz dysponując wzorami na współczynniki macierzy $C^T, C^{S'}, C^P$ otrzymujemy wartości współczynników macierzy $\tilde{B}^{S'}$ i $\tilde{B}^{P'}$.

$$\tilde{B}^{S'} = \begin{bmatrix} CT_{11} & -CR_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & CT_{32}-CR_{32} & CT_{33} \end{bmatrix} \quad /D2.13/$$

$$\tilde{B}^{P'} = \begin{bmatrix} CP_{11} & CR_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & CP_{32}+CR_{32} & CP_{33} \end{bmatrix} \quad /D2.14/$$

$\tilde{k}^m, \tilde{k}^{si}$ we wzorze /5.24/ są podmacierzami 3 x 3 macierzy podatności elementu (1,2) dla przekroju całkowitego,

\tilde{k}^F we wzorze /5.24/ podmacierz 3 x 3 macierzy podatności elementu (1,2) dla przekroju efektywnego .

Bibliografia

1. ABDEL-BASET S.B., Limit analysis of skeletal structures under combined stresses, Thesis presented to the University of Waterloo, Canada, 1976.
2. ABDEL-BASET S.B., BEST M.J., GRIERSON D.E., Plastic analysis of skeletal structures, Proceedings of the International Conference on Computational Methods in Nonlinear Mechanics University of Texas at Austin, Tex, 989-999, Sept. 1974.
3. ALMENOW K.S., ASYLBAJEV O.N., Ekspierimentalnoe opredzielenije predziel'nogo sostojanija elementow stalnoj bałki, Stroit, Mech., 3, 22-27, 1978.
4. ARGYRIS J.H., Energy theorems and structural analysis, Butterworth, London, 1960.
5. ARGYRIS J.H., Matrix analysis of three-dimensional elastic media, small and large deflections, AIAAJ., 3, 45-51, 1965.
6. ARGYRIS J.H., BONI B., BINDENLANG U., KLEIBER M., Finite element analysis of elasto-plastic two-and three-dimensional frames-the natural approach, ISD-Report, Stuttgart, 1981.
7. ARGYRIS J.H., KELSEY S., KAMEL W.H., Matrix methods of structural analysis. A precis of recent developments, Proc. 14th Meeting of Structures and Materials Panel, AGARD, 1963.
8. BACKLUND J., Mixed finite element analysis of elasto-plastic plates in bending, Arch. Mech. Stos., 24, 3, 319-335, 1972.

9. BAKER J., HEYMAN J., Plastic design of frames, 1. Fundamentals, Cambridge University Press, Cambridge, 1969.
10. BARSOUM R.S., GALLAGHER R.H., Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 335-352, 1970.
11. BAUER J., KLEIBER M., SAWCZUK A., SOSNOWSKI W., ZUBELEWICZ A., Numeryczna analiza sprężysto-plastycznych ram dwuteowych z uwzględnieniem możliwości wyboczenia środków. Sprawozdanie dla Polskiego Rejestru Statków, etap I, Warszawa, 1980.
12. BAUER J., BONI B., KLEIBER M., SAWCZUK A., SOSNOWSKI W., Numeryczna analiza nośności granicznej dwuteowych ram okrętowych z uwzględnieniem lokalnego wyboczenia środków. Sprawozdanie dla Polskiego Rejestru Statków, etap II, Warszawa, 1980.
13. BAUER J., KLEIBER M., SOSNOWSKI W., Plane I-beam frames- numerical analysis accounting for inelastic material properties and the local web buckling, /w przygotowaniu/.
14. BERGMAN S.G.A., Behavior of Buckled Rectangular Plates under the Action of Shearing Forces, Kungl. Tekniska Hogskola, Sztokholm, 1948.
15. BILDSTEIN W., Anwendung der nichtlinearen Beultheorie auf vorverformte, mit diskreten Längssteifen verstärkte Rechteckplatten unter Längsbelastung, Stahlbau 43, H 7, 193-201, H 9, 276-282, 1974.
16. BOCZKOW B.F., Uprugo-plastический изгиб рам, Труды Горк. Полит. Ин-та, 14, 10, 35-62, 1960.

17. BONI B., Analiza plastyczna rusztów w ujęciu mechaniki ciał dyskretyzowanych, praca doktorska, Warszawa, 1975.
18. BONI B., KLEIBER M., Numerical plastic collapse analysis of plane bending - and - torque supporting grids, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 19, 1-19, 1979.
19. BONI B., KLEIBER M., SAWCZUK A., Warunek stanu granicznego przekroju belki dwuteowej, poddanej działaniu momentu zginającego, siły podłużnej i siły poprzecznej, Prace IPPT, Warszawa, 1981r.
20. BONI B., SARAN M., Numerical plastic analysis of plane frames with axial forces taken into account, Arch.inż. lądowej tom XXIV, 241, 629-643, 1978.
21. BROUDE B.M., Predzielnyje sostojanija stalnych balok, Gos. izd. po stroit. i arch., M-1, 1953.
22. BROUDE B.M., Rascziot balok po priedielnomu sostojaniu pri ucziotie kasatielnych napriazienij, Gosstrojizdat, Moskwa-Leningrad, 1953.
23. BRÒDKA J., LUBIŃSKI M., Lekkie konstrukcje stalowe, Warszawa 1961.
24. BRUHNS O., Fundamentals of the theory of plasticity and its application, VDI-Z120, 8, 381-387, Apr. 1978.
25. BRZÒZKA Z., Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych, Warszawa, 1961.
26. BUDIANSKY B., Buckling of structures, IUTAM Symposium Cambridge, USA 1974.

27. BURTH K., Immenkötter K., Reckling K.A., Experimentelle Untersuchungen über den Einfluß von Querkräften auf die Traglast kurzer Balken, Der Stahlbau, H3, 77-85, 1980.
28. CHEN W.T., ATSUTA, Theory of beam columns, Mc Graw-Hill, 1977.
29. CICHON CZ., WASZCZYSZYN Z., Numeryczna analiza wybozeniowa sprężysto-plastycznych ram płaskich, Arch.inż.lądowej, 25 Nr 1, 35-41, 1979.
30. CRISFIELD M.A., Large-deflection elasto-plastic buckling analysis of eccentrically stiffened plates using finite elements, Dept. of Enviroment, TRRL Report LR 725, Crowthorne, 1976.
31. CRISFIELD M.A., Combined material and geometric nonlinearity for thin steel plates, World Congress on F.F.M. in structural Mechanics, Bournemouth, Anglia, 1975.
32. CYWIŃSKI Z., SZMIDT J.K., Der dünnwandige stab im allgemeinen Bezugssystem, Stahlbau, 46, 8, 245-251, 1977.
33. DAWIDOW J.W., ZAJCEW P.J., Issledwanije wlijanija popierecznoj siły na niesuszczeniu sposobność bałok iz raznych marok staliej, Sbornik dinamika i proczność maszin, Wyp.3, 70-74, 1966.
34. DANKERT J., Numerische Methoden der Mechanik, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1977.
35. BINNO K.S., MERCHANT W., A procedure for calculating the plastic collapse of I-sections under bending and torsion,

The Struct. Eng., Vol. 43, No 7, 219-221, 1965.

36. EBEL H., Beitrag zur Stabilitätsbeⁿrechnung ebener Flächentragwerke mit Hilfe der methode der finite Elemente, T.H. Diss, Darmstadt, 1967.
37. FAULKNER D., Compression strenght of welded shurp panels, Arch. Bud. Masz., 24, 2, 147-163, 1977.
38. GAUSSEL E., Ultimate strength of prestressed I-beams under combined torsion, bending and shear, I.Am.Concr.Inst., 67, 675-678, Sept. 1970.
39. GOYAL S.C., The effect of shear on the plastic bending of I-beam, Proc.7-th Congr.Mech.India, Ind., S.T.A.M., 77-106, 1961.
40. GREEN A.P., HUNDY B.B., Plastic yielding of I-beams, Engineering, 184, 74-76, 112-115, 1957.
41. GRIERSON D.E., ABDEL-BASET S.B., PLASTIC analysis under combined stresses, ASCE, Vol 103, No EM5, Proc Pap 13276, str 837-854, 1977.
42. HAISLER W.E., STRICKLIN J.A., STEBBINS F.J., Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural analysis, AIAAJ., Vol.10, pp 264-272, 1972.
43. HALL A.S., RANGAN B.V., Studies on prestressed concrete I-beams in combined torsion, bending and shear, University of New South Wales, Kensington, UNICIV Report R 161, 1976.
44. HALL A.S., WOODHEAD R.W., Frame analysis, John Wiley and

Sons.Inc., New York, 1961.

45. HANCOCK G.J., Local distortional and lateral buckling of I-beams, J.Struct. Div.Proc.Amer.Soc.Civ.Eng.,104, No 11, 1787-1798, 1978.
46. HANCOCK G.J., TRAHAIR N.S., Finite element analysis of the lateral buckling of continuously restrained beam-columns, Civ. Eng.Trans.Inst.Eng. Austral., CE 20, 120-127, 1978.
47. HERZOG M., Die Traglast unversteifter und versteifter, "dünnwandiger Blachträger unter reinem Schub und Schub mit Biegung nach Versuchen, Bauingenieur 49, s 382-389, 1974.
48. HO H.S., Limit analysis, uniqueness and a method of constructing yield surfaces. Proceedings of the International Conference on Computational Methods in Nonlinear Mechanics University of Texas at Austin, Tex, s 663-672, Sept. 1974.
49. HODGE P.G., Plastic Analysis of Structures, Mc Graw-Hill, New York, 1959.
50. HORNE M.R., The plastic theory of bending of mild steel beams with particular reference to the effect of shear forces, Proc.Roy. Soc.London, A 207, 1951.
51. HUBER M.T., Studia nad belkami o przekroju dwuteowym, Prace Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego, t II, zeszyt 1 i 2, Warszawa, 1923.
52. Handbook of buckling, strength of plates and stiffened plates, Japan Welding Society, 1971.
53. JENNINGS A., MAID K., An elastic-plastic by computer for

- framed structures loaded up to collapse, *The Struct.Eng.*
Vol. 43,12, December 1959.
54. JEREMIA M., Theoretical and experimental investigations on the behavior of curved frame corners in steel constructions *Revue Rou. des Scienc.Tech.Serie de Mec.Appl.*, 21,4,617-634, 1976.
55. KAMAT M.P., On the importance of cross-sectional flexibility on gross response, *Comp. Struct.*, 10, 831-832, 1979.
56. KITIPORNAHAI S., RICHARTER N., Elastic lateral buckling of I-beams with discrete intermediate restrains, *Civ. Eng. Trans. Inst. Eng. Austr.*, CE 20, 2, 105-111, 1978.
57. KLEIBER M., Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych. Teoria i numeryczna analiza konstrukcji, praca habilitacyjna, Warszawa, 1979.
58. KLEIBER M., Numeryczne aspekty analizy ciał i konstrukcji sprężysto-plastycznych, *Mechanika i komputer*, t.3 Warszawa, 1980.
59. KLEIBER M., SOSNOWSKI W., Analiza płaskich ram sprężysto-plastycznych w systemie WAT-KM, *Mechanika i komputer /w przygotowaniu/*.
60. KOITER W.T., *Natl.Luchtvaart-Laboratorium, Amsterdam*, Rept. s.295, 1944.
61. KLÖPPEL K., SCHMIED R., SCHUBERT I., Traglast mittig und aussermittig gedrückter dünnwandiger Stützen mit kastenförmigen Querschnitt im überkritischen Bereich unter

- Verwendung der nichtlinearen Beultheorie, Der Stahlbau 38, H 1, s 9 i H 3, s.73, 1969.
62. KOMATSU S., Ultimate strength of stiffened plate girders subjected to shear, Seminar-Bemessung von Blech und Lastenträgern im überkritischen Tragbereich, s 49-65, London, 1971,
63. KOMATSU SADAŌ, USITIO MASAYUKI, KITADA TOSHUYUKI, An experimental study on the ultimate strength of stiffened plates, Trans. Jap.Soc.Civ.Eng., 8, 363-366, 1977.
64. KOWALCZYK K., Powierzchnie graniczne dla modelu sprężysto-plastycznego pręta przy uwzględnieniu zmian geometrii. Mech. teorii i stos., 17, No 2, str 203-215, 1979.
65. KUKUDŻANOW W.N., Uprugo-plastyczny izgib tonkostennych stierżniej z ucziotom kasatielnych napriażenij, Trudy Mosk. Fiz.-Tech.Inst., wyp.1, 97-114, 1958.
66. KUTZELNIGG E., Beulwertdiagramme für Stegbleche ohne Zwischensteifen nach der linearen Beultheorie bei Berücksichtigung von in Trägerlängsrichtung veränderlichen Spannungen und der Torsionssteifigkeit der Trägergurte, Der Stahlbau 11, 329-338, 1978.
67. LEE H.P., HARRIS P.J., Post-buckling strength of thinwalled members, Comp.Struct., 10, 689-702, 1979.
68. LEONOW M.A., TJUTIUKIN G.W., Prodolno-popierecznyj izgib uprugo-plastycznego sterżnia, Uzb. AN KIRG SSR, No 3, 3-9, 1979.

69. LETH C.F.A., The effect of shear stresses on the carrying capacity of I-beam, DAM Pept. A 11-107, Brown Univ. Providence, 1954.
70. ŁODYGOWSKI T., Geometrycznie nieliniowa analiza sztywno-plastycznych i sprężysto-plastycznych belek i ram płaskich, Poznań, 1981 r.
71. MARCAL P.V., TURNER C.E., Numerical analysis of the elastic-plastic behavior of axisymmetrically loaded shells of revolution, I. Mech. Engng. Sci., 15, 232, 1963.
72. MARQUERRE K., Luftfahrforsch. t. 14, str. 121, 1937.
73. MARTIN H.C., Introduction to matrix methods of structural analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1966.
74. MARTIN L.H., WAINWRIGHT P.J., Torsion and bending of prestressed concrete beams, I. Struct. Div. Am. Soc. Civ. Eng., 99, ST 11, Nov., 2229-2244, 1973.
75. MASAHARU H. YODA T., Elastic stability of centrally loaded thin walled members with open sections, Trans. Jap. Soc. Civ. Eng., 8, 64-65, 1977.
76. MASSONNET Ch., SAVE M., Calcul Plastique des Constructions, Nelissen, Liege, 1976.
77. MELOSH R.I., Basis for derivation of matrices for direct stiffness method, AIAA, J., 16, 31, 1963.
78. MROMLIŃSKI R., Konstrukcje aluminiowe, s 126, Arkady 1964.
79. MUTERMILCH I., OLSZEWSKI E., LUBIŃSKI M., Wymiarowanie konstrukcji stalowych według stanów granicznych z uwzglę-

- dnieniem naprężeń stycznych i odkształceń, Arch.Inż.Ląd., 1-2, 2, 15-44, 1956.
80. NEAL B.G., The plastic methods of structural analysis, Wiley, New York, 1956.
81. NEAL B.G., Effect of shear force on the fully plastic moment of an I-beams, J. Mech., Eng.Sci., 3,3, 258-266, 1961.
82. OLSZAK W., PERZYNA P., SAWCZUK A., Teoria plastyczności, Warszawa, 1965.
83. OLIVEIRA E.R.A., Mathematical foundations of the finite elem.met., Inst.Publ.Div.Appl.Math., Labor.Nacion. Eng. Civil, Lisboa, 1967.
84. OWEN J., HINTON E., Finite elements in plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press Limited, Swansea, UK, 1980.
85. PANOWKO A.G., O kriticzeskoj sile szatogo stierżnija w nieuprugoj oblasti, Inż Sbornik, 20, 160-163, 1954.
86. PANOWKO A.G., BIRGER I.A., Sprawocznik, Proczność, ustojczliwość, kolebanija, tm3, Moskwa, 1968.
87. PIETRZAK J., RAKOWSKI G., WRZEŚNIEWSKI K., Macierzowa analiza konstrukcji, Warszawa, 1979r.
88. PROTTE W., Zur Beuling von Ramenecken, Technische Mitteilungen Krupp, 35, 2, 127-133, 1977.
89. RECKLING K.A., Experimente zur Feststellung Werkstoffanisotropie und zur "Überprüfung" der Hillschen Verfestigungshypothese, Stahlbau 2, 38, 43-51, 1969.

90. RECKLING K.A., Beitrag zum Traglastverfahren speziell für die Balkenbiegung mit Querkräften, Der Stahlbau, 44, H 12 s 358, 1975.
91. Wytyczne do PN-76/B/03200 projektowania konstrukcji stalowych, opracowane przez Centr.Oś. Bad.-Proj. Konstrukcji Mostowych "Mostostal".
92. Royal Aeronautical Society, Structure Data Sheets, No. 02.04.04., 02.04.05., 02.03.01., 1964.
93. ROCKEY K.C., SKALOUD M., The ultimate load behavior of plate girders load in shear, Seminar-Bemessung von Blech und Kastentragen im überkritischen Tragbereich, 1-19, London, 1971.
94. RUTECKI J., Cienkościenne konstrukcje nośne, Warszawa, 1966.
95. SAWCZUK A., Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych. Wyd. Pol. Wrocł. , Wrocław, 1978.
96. SAWCZUK A., Nośność graniczna ram płaskich, Warszawa, 1964.
97. SAWCZUK A., BORKOWSKI A., Mechanika budowli-ujęcie komputerowe, Rozdział 6, Warszawa, 1977.
98. SCHILLING C.G., SCHUTZ F.W., BEEDLE L.S., Behavior of welded single-span frames under combined loading, Welding J.Research, Suppl., 35, 234-252, 1956.
99. SCHMIDT B., DAMRATH R., PAHL P.J., A geometrically and physically nonlinear finite element method for the analysis of stiffened rectangular panels, Symp.USA-RFN, MIT 295-320. Boston 1976.

100. SKALOUD M., Ultimate load and failure mechanism of thin webs in shear, Seminar-Bemessung von Blech und Lastenträgern im überkritischen Tragbereich, s 115-129, London 1971.
101. SOREIDE T.H., Collapse behavior of stiffened plates using alternative finite element formulations, Div. Struct.Mech., The Norwegian Institute of Technology, The Univ of Trondheim, Norway, Report 77-3, June 1977.
102. STEIN M., STARNES Jr., J.H., Numerical analysis of stiffened shear webs in the postbuckling range, Symp.Numerical solution of nonlinear structural problems, 211-223, Detroit 1973.
103. STRELBICKAJA A.J., Niektoryje zawisimosti miezdu silowymi faktorami w predielnom sostojanii tonkostiennogo profilija, Sbornik trudow Inst.Stroit, Mech., Ak.Nauk Ukr.SSR, 10, 1949, 15, 1950.
104. STRELBICKAJA A.J., Issledowanije procznosti tonkostiennyh stierzniej za predielom uprugosti, Izd.Ak.Nauk, Ukr. SSR, Kiew, 1958.
105. STRELBICKAJA A.J., Opredielenije predielnoj nagruzki bałok pri izgibie z ucziotom kasatielnych napriazhenij, Izv WUZ, Stroit. i Arch., 3, 119-127, 1959.
106. STRELBICKAJA A.J., Predielnoe sostojanie ram iz tonkostiennyh stierzniej pri izgibie z kruczeniem, Naukowa Dumka, Kiew, 1964.
107. SZCZEPIŃSKI W., Introduction to the mechanics of plastic forming of metals, Warszawa, 1979.

108. SZMELTER J., DACKO M., DOBROCIŃSKI S., WIECZOREK M., Programy metody elementów skończonych, Arkady, Warszawa, 1973.
109. SZMELTER J., DACKO M., DOBROCIŃSKI S., WIECZOREK M., Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji, Arkady, Warszawa, 1979.
110. SZMELTER J., The energy method of networks of arbitrary shapes in problems of the theory of elasticity, Proceedings of an IUTAM Symposium Held in Warsaw, sept. 1958.
111. SZMIDT J.K., Analiza ram z elementów cienkościennych, Praca doktorska, Polit. Szczec., 1973.
112. TERAZAWA K., UEDA Y., i inni, Analysis of elastic-plastic buckling of plates with stiffeners by finite element method, I.S.N.A., Japan, vol.122, 1967 i vol. 127, 1970.
113. TIMOSHENKO S.P., WOJNOWSKY-KRIEGER S. Theory of plates and shells, New York, 1959.
114. TIMOSHENKO S.P., GERE J.M., Teoria stateczności sprężystej, Arkady, 1961.
115. TURNER M.J., CLOUGH R.W., MARTIN H.C., TOPP L.J., Stiffness and deflection analysis of complex structures, I.Aeron. Sci., No 9, 1956.
116. UEDA Y. i inni Inelastic local buckling of built-up I-section, Technology reports of the Osaka University, vol. 16, No 737, 1966.
117. UEDA Y. i inni, Elastic-plastic analysis of framed structures using matrix method, /1-st and 2-nd Reports/, Journal

- of the Society of Naval Architects of Japan, vol. 124, 43-51, 1968.
118. UEDA Y. i inni, A new theory on elastic-plastic analysis of framed structures, Technology Reports of the Osaka University, vol. 19, No 875, 1969.
119. UEDA Y., RASHED S.M.W., Elastic-plastic analysis of framed structures using the matrix method, /3 rd Report/, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, vol. 131, str. 257-268, 1972.
120. UEDA Y., RASHED S.M.W., An ultimate transverse strength analysis of ship structures, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, vol.136, 87-104, 1974.
121. UEDA Y. YAO T., Compressive strength of plate elements with welding residual stresses and deformations, Welding Research Institute of Osaka University, vol. 7, No 1, 1978.
122. UEDA Y., YAO T., Ultimate strength of a rectangular plate under thrust-with consideration of the effect, of initial imperfections due to welding, Welding Research Institute of Osaka University, vol.8, No 2, 1978.
123. UEDA Y., YAO T., KATAYAMA M., Minimum stiffness ratio of stiffeners for ultimate strength of a stiffened plate, Theoretical and Appl.Mech., 27-th Japan Congress, 1977.
124. UEDA Y., YASUKAWA W., YAOU T., IKEGAMI H., OHMINAMI R., Effects of welding residual stresses and initial deflection on rigidity and strength of square plates subjected

- to compression, Welding Research Inst. of Osaka University, Vol. 4, No 2, 1975.
125. UENOYA M., REDWOOD R.G., Buckling of webs with openings, Comp and Struct. Vol.9, pp 191-199, 1977.
126. UHLMAN W., Traglastversuche angewählten Breitflanschprofilrsgern-Nachrechnung der Lastverformungskurven, Stahlbau 48, No 8, 239-247, 1979.
127. WDOWIN C.J., GLADKI A.S., Issledowanije plasticzeskogo izgiba tonkostiennych profiliej, Izd. wuzow maszynostrojenija nr 3, 110-113, 1979.
128. WEKEZER J., Analiza numeryczna belek cienkościennych ze zróżnicowanymi przekrojami otwartymi, Praca doktorska, Polit.Gdańska, 1974.
129. WINTER G., NILSON A.H., Design of concrete structures, Mc Graw-Hill, 1972.
130. WOLMIR A.S., Ustojczywość uprugich system, Moskwa, 1963.
131. WYSS A.N. and MATTOCK A.H., A study of I-section prestressed concrete girders subjected to torsion, shear and bending, University of Washington, Seattle, Structures and Mechanics Report SM-71-1, 1971.
132. VOS R.G., VANN W.P., A finite element tensor approach to plate buckling, Int. Jour. for Num. Meth. in Eng., Vol.5, 351-365, 1973.
133. YLIEN A., A method of determining the buckling stress and required cross-sectional area for centrally loaded straight

columns in elastic and inelastic range, Memoires Ass.Int. Ponts et Charpentes, 16, 529-550, 1956.

134. YOSHIDA H., MAEGAWA K., Local and member buckling of Hcolumns, Jour. of Struct. Mech., 6, 1, 1-27, 1978.
135. ZIENKIEWICZ O.C., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa, 1972.
136. ŻYCZKOWSKI M., Obciążenia złożone w teorii plastyczności, PWN Warszawa, 1973.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- A - pole przekroju poprzecznego belki
- B - macierz definiująca związki pomiędzy składowymi siłami wewnętrznymi działającymi w przekrojach przywęzłowych oraz wektorem sił węzłowych
- b - efektywna szerokość strefy rozciąganej środnika po sprężystym wyboczeniu spowodowanym ściskaniem i zginaniem
- C - macierz definiująca związki pomiędzy składowymi siłami wewnętrznymi działającymi w przekrojach przywęzłowych oraz wektorem sił węzłowych
- c - efektywna szerokość środnika po obydwu jego stronach po sprężystym wyboczeniu spowodowanym ściskaniem
- D - sztywność zginania środnika $D = \frac{E \cdot t_s^3}{12(1-\nu^2)}$
- E - moduł Younga
- e - odległość pomiędzy środkiem wysokości środnika i osią obojętną przekroju dwuteowego
- F - 0 - równanie warunku wytrzymałościowego
- F - siła ściskająca działająca w półce
- G - moduł Kirchoffa , $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
- H - macierz definiująca związki pomiędzy macierzą sztywności elementu skończonego i jej podmacierzami
- h - wysokość (przekroju, półki, środnika w zależności od indeksu)
- I - moment bezwładności
- k - macierz sztywności elementu, podmacierz
- K - macierz globalnej sztywności układu (ramy)

- L - długość elementu skończonego
- M - moment zginający
- m - bezwymiarowy moment zginający
- N - siła podłużna
- n - bezwymiarowa siła po dłużna
- P - obciążenie ciągle działające na półkę i pochodzące od strefy rozciągania w środku
- Q - wektor wewnętrznych sił uogólnionych
- q - wektor przemieszczeń węzłowych
- R - wektor obciążeń
- r - wektor przemieszczeń elementu
- t - grubość płyty
- u - przemieszczenie osiowe
- V - siła tnąca
- v - bezwymiarowa siła tnąca
- w - przemieszczenie spowodowane ścinaniem
- U - energia sprężysta nowej postaci odkształcenia układu
- W - energia rozpraszana w przegubach plastycznych
- Z - praca sił zewnętrznych
- x, y, z - współrzędne prostokątne
- $\alpha, \beta, \delta, \delta^*$ - kąty, współczynniki liczbowe
- ε - odkształcenie względne
- λ - parametr skalujący
- ν - współczynnik Poissona
- φ - kąt obrotu przekroju przywęziowego
- $\underline{\phi}$ - wektor gradientów ($\underline{\phi} = \frac{\partial F}{\partial Q}$)
- μ - mnożnik w stowarzyszonym prawie płynięcia lub w prawie rządzącym zachowaniem się elementu po osiągnięciu

wytrzymałości krańcowej

$\bar{\sigma}$ - naprężenie normalne

$\bar{\tau}$ - naprężenie styczne

ω - przemieszczenie w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny
ramy wywołane wyboczeniem

Indeksy , oznaczenia specjalne

o - całkowity (przekrój , siła)

dp - dotyczy dużej półki

e - sprężysty (przekrój , element)

ef - efektywny przekrój

el - dotyczy elementu skończonego

gr - graniczny (przekrój , siła uogólniona)

i,j- indeksy

gl - globalny (układ , macierz sztywności)

k - dotyczy przekroju przywęzłowego elementu (k = 1,2)

kr - krytyczny

kn - krańcowy

max- maksymalny

mp - dotyczy małej półki

o - dotyczy płynięcia plastycznego

pl - plastyczny

pr - dotyczy pola rozciągania w środku

P - dotyczy półki

r - składowa związana z redystrybucją sił wewnętrznych

\bar{s} - dotyczy środka lub środka długości elementu skończonego

S - składowe styczne do powierzchni wyboczeniowej

s-p - sprężysto - plastyczność

v - dotyczy ścinanie

zr - zredukowany

Δ - przyrost sił, przemieszczeń, odkształceń

1 - dotyczy węzła nr 1 elementu prętowego

2 - dotyczy węzła nr 2 elementu prętowego

- - podkreślenie oznacza wektor

~ - podkreślenie oznacza tensor lub macierz

SPIS TREŚCI

Str.

Rozdział 1

Wprowadzenie	3
1.1. Cel pracy	3
1.2. Zakres pracy	6
1.3. Przegląd literatury	11

Rozdział 2

Podstawowe założenia oraz koncepcja analizy	22
2.1. Podstawowe założenia	22
2.2. Koncepcja analizy	26
2.2.1. Stany zachowania się elementu skończonego	26
2.2.2. Algorytm postępowania	29

Rozdział 3

Metoda elementów skończonych w liniowej statyce układów ramowych	32
3.1. Przemieszczeniowe równanie równowagi elementu skończonego sprężystej ramy płaskiej	32
3.2. Liniowa analiza ram płaskich	35

Rozdział 4

Sprężysto - plastyczna analiza ram	37
4.1. Warunek stanu granicznego dla przekroju dwuteowego poddanego działaniu momentu zginającego, siły podłużnej i siły poprzecznej	37
4.2. Algorytm postępowania	50
4.3. Macierze sprężysto - plastyczne elementu skończonego ramy	54

Rozdział 5

Lokalne wyboczenie środника	61
5.1. Warunek sprężystego lokalnego wyboczenia środnika	63
5.2. Zachowanie się elementu skończonego po sprężystym wyboczeniu środnika	70
5.3. Przekrój efektywny po sprężystym wyboczeniu środnika	80
5.4. Nośność krańcowa po sprężystym wyboczeniu środnika	84
5.5. Macierz sztywności elementu po osiągnięciu przez niego stanu wytrzymałości krańcowej	103
5.6. Wytrzymałość krańcowa po sprężysto-plastycznym wyboczeniu środnika	107

Rozdział 6

Opis programów numerycznych	113
6.1. Program ASGRAM	113
6.2. Program ASGRAMW	128

Rozdział 7

Przykłady obliczeń	132
Uwagi i wnioski	145
Dodatek 1. Jawna postać współczynników macierzy sprężysto-plastycznych elementu skończonego	148
Dodatek 2. Macierze sztywności elementu skończonego po wyboczeniu sprężystym	158

Bibliografia

Wykaz ważniejszych oznaczeń	181
-----------------------------	-----