O PRAWIE MARIOTTE'A

PRZEZ

W. GOSIEWSKIECO

Przedstawiono na posiedzeniu towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, dnia 4 maja 1876 roku.

W niniejszym artykule mam zamiar wyprowadzić teoretycznie prawo Mariotte'a, albo raczéj, *wyznaczyć takie prawo sił atomowych, aby układ ciągły atomów im poddanych oddziaływał na swoją powłokę ciśnieniem posłusznem prawu Mariotte'a.*

Zadanie to, o ile mi wiadomo, nie było jeszcze dotąd rozwiązane w sposób zadawalniający, pomimo usiłowań matematyków bardzo znakomitych. Powód tego leżał w braku dokładnéj definicyi ciśnienia w ogóle. A ponieważ dokładność ta wynika z porządku rzeczy wyłożonych w moich pracach poprzednich, przeto, w skutek związków ztąd wynikających pomiędzy ciśnieniami z jednéj strony a siłami atomowemi z drugiéj, zadanie zapowiedziane nie przedstawia już żadnych trudności.

§ 1

Powtórzmy równania ogólne równowagi układu ciągłego, opuszczając w nich siły działające na masę, t. j. załóżmy:

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = 0,\\
&\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} \quad \frac{dT_1}{dz} = 0,\\
&\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

wewnątrz ciała, i

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&m_1N_1 + m_2T_3 + m_3T_2 + X = 0,\\
&m_1T_3 + m_2N_2 + m_3T_1 + Y = 0,\\
&m_1T_2 + m_2T_1 + m_3N_3 + Z = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

na jego powierzchni.

Przypomnijmy następnie inne nazwania i oznaczenia używane w przytoczonych wyżéj pracach :

$$(3)\quad\begin{cases} N_1 = \Sigma\lambda r a^2, \quad N_2 = \Sigma\lambda r b^2, \quad N_3 = \Sigma\lambda r c^2, \\ T_1 = \Sigma\lambda r bc, \quad T_2 = \Sigma\lambda r ca, \quad T_3 = \Sigma\lambda r ab; \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1\,; \\ m = \varepsilon\Sigma m, \ldots, r = \left(\dfrac{\Sigma m}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} R, \ldots, \Sigma m = \rho\, dx\, dy\, dz\,; \\ \lambda\, dx\, dy\, dz = (\Sigma m)\left(\dfrac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}} f, \; f = \dfrac{dF}{dR}, \; \lambda dx dy dz = (\Sigma m)\dfrac{dF}{dr}, \end{cases}$$

gdzie F przedstawia funkcyę stałych $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ i zmiennych $R, R', \ldots$ i ρ.

Pierwsze z równań (1) pomnożone przez x, może być przedstawione pod postacią :

$$\frac{d(N_1 x)}{dx} + \frac{d(T_3 x)}{dy} + \frac{d(T_2 x)}{dz} = N_1.$$

Mnożąc go następnie przez $dx\, dy\, dz$, w celu całkowania w całéj rozciągłości ciała i wykonywając to całkowanie, znajduje się łatwo :

$$\int (m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2)\, d\omega = \int\!\!\int\!\!\int N_1 dx\, dy\, dz,$$

gdzie całka pojedyncza rozciąga się do całéj powierzchni ciała. Lecz ponieważ na téj powierzchni jest tym razem użyteczne pierwsze z równań (2), przeto będzie także :

$$-\int Xx\, d\omega = \int\!\!\int\!\!\int N_1 dx\, dy\, dz.$$

Związki podobne

$$-\int Yy\, d\omega = \int\!\!\int\!\!\int N_2 dx\, dy\, dz, \quad -\int Zz\, d\omega = \int\!\!\int\!\!\int N_3 dx\, dy\, dz,$$

otrzymują się w ten sam sposób, wychodząc z dwóch innych równań (1) mnożonych odpowiednio przez y i z.

Te trzy związki, dodane stronami odpowiedniemi, dają związek jeden

$$(4)\qquad -\int (Xx + Yy + Zz)\, d\omega = \int\!\!\int\!\!\int (N_1 + N_2 + N_3)\, dx\, dy\, dz,$$

który będzie służył za punkt wyjścia w wyprowadzeniu prawa Mariotte'a.

§ 2

W tym celu zauważmy najprzód, że jeżeli chodzi o równowagę gazu, to ciśnienia zewnętrzne redukują się do jednego ciśnienia p, normalnego i jednostajnego na całéj powierzchni ciała. Jest więc w tym przypadku :

$$-X = m_1 p, \quad -Y = m_2 p, \quad -Z = m_3 p,$$

i pierwsza strona związku (4) staje się po prostu

$$p\int (m_1 x + m_2 y + m_3 z) d\omega = 3pV,$$

rozumiejąc przez V objętość ciała.

Jest również łatwo zapewnić się, używając w tym celu oznaczeń (3), że druga strona tego samego związku przyjmuje kształt całki

$$\int\int\int (\Sigma m) \sum R \frac{dF}{dR},$$

zkąd wynika

$$3pV = \int\int\int (\Sigma m) \sum R \frac{dF}{dR},$$

albo lepiéj,

$$p = \frac{1}{3} \frac{\int\int\int (\Sigma m) \sum R \frac{dF}{dR}}{V}. \tag{5}$$

Jeżeli układ uważany ma posiadać własność gazu posłusznego prawu Mariotte'a, to summa $\sum R \frac{dF}{dR}$, powinna być stałą. Załóżmy więc

$$\sum R \frac{dF}{dR} = k \sum \varepsilon\varepsilon', \tag{6}$$

gdzie k oznacza stałę dowolną, i szukajmy następnie takiéj funkcyi F, któraby zadość czyniąc równaniu różniczkowemu (6), wyrażała się jednocześnie sposobem podobnym tak względem wszystkich sześciu zmiennych R, jak i względem wszystkich czterech stałych ε...

Można udowodnić bardzo łatwo, że to tylko jedyna funkcya

$$F = k \log. \text{nat.} (R^{\varepsilon\varepsilon'} R'^{\varepsilon\varepsilon''} \ldots), \tag{7}$$

posiada tę podwójną własność.

Ztąd wynika że siły atomowe $(\Sigma m)\left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}} f$, (3), w gazie trwałym wyrażają się za pomocą formuły

$$\frac{mm'}{\Sigma m} \frac{k}{r};$$

ciśnienie p, (5), wywierane na jego powłokę, ma wartość

$$\frac{1}{3} \frac{\int\int\int (\Sigma m) k \sum \varepsilon\varepsilon}{V};$$

a składowe (3), ciśnień wewnątrz gazu są

$$N_1 = \rho k \sum \varepsilon\varepsilon' a^2, \quad N_2 = \rho k \sum \varepsilon\varepsilon' b^2, \quad N_3 = \rho k \sum \varepsilon\varepsilon' c^2,$$

$$T_1 = \rho k \sum \varepsilon\varepsilon' bc, \quad T_2 = \rho k \sum \varepsilon\varepsilon' ca, \quad T_3 = \rho k \sum \varepsilon\varepsilon' ab.$$

Jeżeli przypuścimy tylko że F niezawiera ρ wyraźnie, to summa $\sum R \frac{dF}{dR}$ będzie także niezależną od gęstości ρ, i ciśnienie p pozostanie odwrotnie proporcyonalne do objętości ciała; to więc jest także prawo Mariotte'a uogólnione. W tym przypadku, licznik w formule (5) ciśnienia p pozostaje stałym, jeżeli ciało ściska się lub rozszerza jednakowo we wszystkich kierunkach. W okolicznościach innych licznik ten staje się zmiennym i ciśnienie p nie ulega już ściśle prawu Mariotte'a.

Warszawa, w lipcu 1876 roku.