O POTENCYALE SPRĘŻYSTOŚCI

PRZEZ

W. GOSIEWSKIEGO.

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa, dnia 4 maja 1876 roku.

W pracy mojéj poprzedniéj, « *O zadniczéj hypotezie mechaniki cząsteczkowéj* (*) », podałem fakta główne dotyczące zadania o równowadze układów, któreby można nazwać *układami ciągłemi.* Aby pokazać ich użyteczność, mam zamiar zastosować je do przypadków spotykających się w naturze. Rozpoczynam od przypadku ciał stałych, pozostawiając ciecze i gazy do prac następujących. Lecz przedewszystkiém powinienem udokładnić (a czego nie zrobiłem w pracy przytoczonéj), sposób według którego siły wewnętrzne $\left(f=\frac{\varepsilon\varepsilon}{\Im+\varepsilon}\cdot\frac{\Phi}{R}\right)$ jednostki cząsteczki zależą od mas $\left(\varepsilon=\frac{m}{\Sigma m},\dots\right)$ i odległości wzajemnych $\left[R=\left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}}r\dots\right]$ czterech punktów składających tę jednostkę, jak również od gęstości (ρ) ciała do którego ona należy. Wyznaczy się następnie, przy pomocy formuły $(\Sigma m)\left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}}$, prawa ogólne sił atomowych, i w ten sposób będzie się miało uzupełnienie pracy poprzedniéj, któréj definicye i oznaczenia zachowuję i jednocześnie wstęp do pracy niniejszéj.

Ilość ψ, wchodząca w wyrażenie siły f, jako gr(φr), może zależyć tylko od $\varepsilon,\dots,R,\dots$ i ρ, albowiem to są jedynie wielkości nie znikające kiedy element ciągły ($\rho dx\,dy\,dz=\Sigma m$) zmniejsza się nieograniczenie. Jeżeli więc F jest funkcyą ilości stałych $\varepsilon, \varepsilon',\dots,$ i zmiennych $R, R',\dots,\rho$, to można założyć w ogóle dla sił wewnętrznych jednostki cząsteczki :

$$f=\frac{dF}{dR},$$

(*) *Pamiętnik Tow. Nauk Ścisłych w Paryżu*, t. VII.

zkąd wynika dla sił atomowych :

(1) $$(\Sigma m)\left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}} f = (\Sigma m)\frac{dF}{dr}.$$

Szukajmy następnie takiego kształtu funkcyi F, aby siły atomowe (1) nie zależały od gęstości ρ. W tym celu należy wyrazić, że pochodna funkcyi F względem ρ jest zerem.

Warunek ten przyjmuje kształt równania różniczkowego częściowego

$$3\rho\frac{dF}{d\rho} + \sum R\frac{dF}{dR} = 0,$$

którego całka ogólna

$$F = F\left[\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}}, \frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}}, \ldots\right] = F\left\{\frac{r}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}}, \frac{r'}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}}, \ldots\right\}$$

daje dla siły atomowéj (1) wyrażenie

(2) $$(\Sigma m)\frac{dF}{dr},$$

niezależne od gęstości ρ.

To właśnie prawo (2) przyjmuję za punkt wyjścia w moich poszukiwaniach nad sprężystością ciał stałych. Ten wybór jest usprawiedliwiony zresztą tą okolicznością, że w tego rodzaju poszukiwaniach summa $\sum(\Sigma m)\frac{dF}{dr}dr$ powinna być różniczką zupełną funkcyi (Σm)F, co ma miejsce tylko wtedy, kiedy prawo działań atomowych wyraża się za pomocą formuły (2).

§ 1

Przypuszczamy że ciało stałe znajduje się w stanie naturalnym przed odkształcaniem się i proponujemy znaleźć jego *potencyał sprężystości*, t. j. pracę rozwiniętą podczas odkształcania się przez jednostkę objętości elementu w punkcie M(x, y, z).

Porównawszy to ciało z układem atomów poddanych siłom (2), to z uwagi, że w takim razie praca przygotowana sił atomowych cząsteczki wyraża się summą $\sum(\Sigma m)\frac{dF}{dr}\delta r = dxdydz\rho\sum\frac{dF}{dr}\delta r$, całka

$$\delta V = \int\int\int dxdydz\,\rho\sum\frac{dF}{dr}\delta r$$

powinna być tożsamościowo zerem, jeżeli ciało znajduje się w stanie równowagi, zwanym stanem jego *naturalnym*. Ztąd wynika, że wartości obecne sił atomowych są zerami, albowiem mają miejsce warunki

(3) $$\frac{dF}{dr} = 0, \quad \frac{dF}{dr'} = 0\ldots$$

Lecz ponieważ ciało jest doskonale sprężystém, to jego równowaga naturalna powinna być stała a to ma miejsce tylko wtedy kiedy wartość przyrostu

$$\delta^2 V = \sum \frac{d(\delta V)}{dr}\delta r$$

iest odjemną. I w rzeczy samėj, odkształciwszy ciało nieskończenie mało i pozostawiwszy go następnie samemu sobie, ono, jeśli jest doskonale sprężystém, pocznie drgać około swego położenia równowagi. Ponieważ wtedy przyrost $\delta^2 V$ oznacza podwójną pracę rozwiniętą podczas tego ruchu, więc gdy u, v, w są rzutami na osie x, y, z przesunięcia punktu M w czasie t, a $\left(\frac{du}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)_0$ rzutami prędkości odpowiedniemi, którą punkt posiada w chwili swego przejścia przez położenie równowagi, to jak wiadomo z mechaniki, jest

$$\delta^2 V = \int\int\int dxdydz\rho \left[\left\{ \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 \right\} - \left\{ \left(\frac{du}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)_0^2 \right\} \right].$$

Lecz że prędkość punktu M w chwili jego przejścia przez położenie najbardziéj oddalone od położenia równowagi jest równą zeru, podczas kiedy jest największą wtedy gdy tenże punkt przechodzi przez to ostatnie położenie, staje się przeto widocznem, że przyrost $\delta^2 V$ posiada w rzeczy samėj znak odjemny.

Szukajmy teraz innego wyrażenia tego samego przyrostu a to przez rozwinięcie różniczki $\sum d\frac{(\delta V)}{dr}\delta r$. Jest łatwém do przekonania się że on wyraża się w ten sposób :

$$\delta^2 V = \int\int\int dxdydz\rho \left\{ \sum r^2 \frac{d^2 F}{dr^2}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2 + 2\sum rr' \frac{d^2 F}{drdr'}\frac{\delta r}{r}\frac{\delta r'}{r'} \right\},$$

i że nie staje się nigdy dodatnym, jeżeli wszystkie pierwiastki równania

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d^2F}{dr^2} - s, & \frac{d^2F}{drdr'}, & \ldots, & \frac{d^2F}{drdr''''} \\ \frac{d^2F}{drdr'}, & \frac{d^2F}{dr'^2} - s, & \ldots, & \frac{d^2F}{dr'dr''''} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^2F}{drdr''''}, & \frac{d^2F}{dr'dr''''}, & \ldots, & \frac{d^2F}{dr''''^2} - s \end{vmatrix} = 0$$

są odjemnemi (*).

(*) Nie chcąc przekroczyć granic zwykłych praktyki, poprzestaję w tych poszukiwaniach na uważaniu tylko tego przypadku w którym przyrost $\delta^2 V$ nie jest zerem. W przypadku ogólnym należałoby założyć że to dopiero przyrost $\delta^{2n} V$ nie znika, podczas kiedy wszystkie inne poprzedzające są zerami. $\frac{1}{(2n)!}\delta^{2n} V$ przedstawiałoby wtedy *potencyał sprężystości*.

W celu znalezienia warunków sprężystości doskonałéj, możnaby stosować korzystnie piękną metodę p. Żmurki odróżniania maksymów i minimów funkcyi wielu zmiennych. Metoda ta wyłożona jest w rozprawie p. t. « Przyczynek do teoryi największości i najmniejszości funkcyi wielu zmiennych », napisał Wawrzyniec Żmurko — (patrz. *Pam. Tow. Nauk Ścisłych w Paryżu*, t. I.)

Jeżeli ten ostatni warunek wypełnia się i jeżeli jednocześnie mają miejsce rownania (3), to wyrażenie

$$\frac{\rho}{2}\left\{\sum r^2 \frac{d^2F}{dr^2}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2 + 2\sum rr' \frac{d^2F}{drdr'}\frac{\delta r}{r}\frac{\delta r'}{r'}\right\} \tag{5}$$

przedstawia potencyał sprężystości ciała *doskonale sprężystego*, w założeniu że to ciało znajdowało się przed odkształceniem w stanie naturalnym

To samo wyrażenie (5) przedstawia także potencyał sprężystości ciała *niedoskonale* sprężystego ; ale w tym przypadku same tylko warunki (3) są konieczne i dostateczne.

Jeżeli mają miejsce nierówności

$$\frac{d^2F}{dr^2} < 0, \frac{d^2F}{dr'^2} < 0, \ldots,$$

to równanie (4) przyjmuje postać

$$\left(\frac{d^2F}{dr^2} - s\right)\left(\frac{d^2F}{dr'^2} - s\right) \cdots \left(\frac{d^2F}{dr''''^2} - s\right) = 0,$$

posiada wszystkie pierwiastki odjemne. Wyrażenie (5) redukuje się wtedy do wyrażenia

$$\frac{\rho}{2}\sum r^2 \frac{d^2F}{dr^2}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2, \tag{6}$$

które przedstawia potencyał sprężystości w takiém ciele, w którém siły atomowe wyrażają się za pomocą formuły

$$(\Sigma m)\,\frac{d\sum F\left\{\dfrac{r}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}}\right\}}{dr} = \frac{\Sigma m}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}}\,F\left\{\frac{r}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}}\right\}.$$

§ 2

Można nadać jeszcze potencyałom (5) i (6) kształty dobrze znane, a to wyrażając stosunki $\frac{\delta r}{r}, \frac{\delta r'}{r'}, \ldots$, za pomocą ilości u, v, w. W tym celu wystarczy zauważyć, że stosunki te otrzymują się z formuły (2) rozprawy przytoczonéj, przez zastąpienie w téj formule ilości $\delta x, \delta y, \delta z$ ilościami u, v, w, a ilości a, b, c kolejno ilościami $a, b, c — a', b', c'$ ... W ten sposób będzie :

$$\frac{\delta r}{r} = a^2\frac{du}{dx} + b^2\frac{dv}{dy} + c^2\frac{dw}{dz} + bc\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + ca\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + ab\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$

$$\frac{\delta r'}{r'} = a'^2\frac{du}{dx} + b'^2\frac{dv}{dy} + c'^2\frac{dw}{dz} + b'c'\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + c'a'\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + a'b'\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).$$

....

Jeżeli więc teraz otrzymane wartości stosunków $\frac{\delta r}{r}, \frac{\delta r'}{r'}, \ldots$, wstawi się w wyrażenia (5) i (6), to z uwagi że odkształcenia $\frac{du}{dx}, \ldots, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \ldots$, mają wartości jednakowe we wszystkich wyrazach summ $\sum$, łatwo jest zapewnić się, wykonywając rachunki bardzo proste, że **potencyał (5) przyj**-mie kształt wielomianu jednorodnego drugiego stopnia względem $\frac{du}{dx}, \dots, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \dots$, o 21 współczynnikach różnych, i któremi będą :

$$a_{1,1} = \frac{\rho}{2}\left(\sum r^2 \frac{d^2F}{dr^2} a^4 + 2\sum rr' \frac{d^2F}{drdr'} a^2 a'^2\right), \dots$$

$$2a_{1,2} = \rho\left\{\sum r^2 \frac{d^2F}{dr^2} a^2b^2 + \sum rr' \frac{d^2F}{drdr'} (a^2b'^2 + a'^2b^2)\right\}, \dots$$

podczas kiedy potencyał (6) stawszy się także wielomianem jednorodnym drugiego stopnia tych samych ilości, będzie miał tylko 15 współczynników różnych, i temi będą :

$$a_{1,1} = \frac{\rho}{2}\sum r^2 \frac{d^2F}{dr^2} a^4, \dots, \quad 2a_{1,2} = \rho\sum r^2 \frac{d^2F}{dr^2} a^2b^2, \dots$$

Skoro więc potencyał sprężystości jest funkcyą odkształceń względnych, to jego pochodne częściowe względem tych odkształceń są ciśnieniami (N_i T_i) wywierającemi się na jednostkę powierzchniową trzech elementów płaskich, przecinających się prostopadle w punkcie M ciała. Ciśnienia te, mając zawsze formę liniową względem odkształceń, posiadają współczynników 21 jeżeli różniczkujemy potencyał (5), a 15 jeżeli różniczkujemy potencyał (6).

Nakoniec, łatwo jest zauważyć, że współczynniki $a_{1,1}, \dots, a_{1,2}, \dots$, potencyału (5), zadość czynią w przypadku sprężystości doskonałéj, tym samym warunkom co odpowiadające im ilości $\frac{d^2F}{dr^2}, \dots, \frac{d^2F}{d\cdot dr'}, \dots$ a że te współczynniki powinny nadto sprawdzać związki..

$$a_{2,3} = a_{4,4}, \quad a_{3,1} = a_{5,5}, \quad a_{1,2} = a_{6,6},$$

$$a_{5,6} = a_{1,4}, \quad a_{4,6} = a_{2,5}, \quad a_{3,6} = a_{4,5},$$

jeżeli ckcemy przejść od potencyału (5) do petencyału (6).

Zbierając więc wszystkie wypadki poprzedzające, przychodzi się do twierdzenia następującego :

Jeżeli porównamy ciało stałe doskonale sprężyste z układem atomów poddanych siłom wyrażającym się pochodnemi częściowemi względem r, r', ... funkcyi

$$\int\int\int \rho dxdydz\, F\left\{\frac{r'}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}}, \frac{r'}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}}, \dots\right\}, \tag{7}$$

o jego potencyał sprężystości może być wyrażony wielomianem jednorodnym drugiego stopnia względem odkształceń

$$\frac{du}{dx}, \dots, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \dots$$

21 *o współczynnikach różnych* $a_{1,1}, \dots, 2a_{1,2}, \dots$, *dobranych w sposób aby pierwiastki równania*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - s, a_{1,2}, \dots, a_{1,6} \\ a_{1,2}, a_{2,2} - s, \dots, a_{2,6} \\ \dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots \\ a_{1,6}, a_{2,6}, \dots, a_{6,6} - s \end{vmatrix} = 0$$

były odjemnemi. A jeżeli przypuści się że siły atomowe są pochodnemi częściowemi funkcyi

$$\int\int\int \rho dxdydz\, F\left\{ \frac{r}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}} \right\}, \tag{8}$$

to liczba tych spółczynników redukuje się do 15 *za pomocą równości* :

$$a_{2,3}=a_{4,4},\quad a_{3,1}=a_{5,5},\quad a_{1,2}=a_{6,6},$$

$$a_{5,6}=a_{1,4},\quad a_{4,6}=a_{2,5},\quad a_{3,6}=a_{4,5}.$$

Z twierdzenia tego wynika :

1° Hypoteza Green'a, za pomocą której on otrzymał potencyał o 21 współczynnikach, jest zupełnie zgodną z zasadami mechaniki, i nadto jest ogólniejszą od hypotezy Cauchy,ego, ponieważ oznaczenie funkcyi sił (7) jest ogólniejsze od oznaczenia (8)(*);

2° Hypoteza Green'a będąc konieczną nie jest jednak dostateczną dla zdefiniowania sprężystości doskonałéj; albowiem w tym ostatnim przypadku, 21 współczynników powinny nadto zadość czynić warunkom wymienionym w powyższém twierdzeniu. Warunki te, o ile mi wiadomo, nie były jeszcze dotąd zauważane przez żadnego z matematyków.

Warszawa, w styczniu 1876.

(*) Nadewszystko zaś p. Barré de Saint Venant (patrz §§ 71, 72 i 75 dodatku V° na końcu dzieła zatytułowanego ; *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des construction et des machines*. Première section. *De la résistance des corps solides*, par Navier. Troisième édition avec des notes et des appendices par M. Barré de Saint Venant, t. I, fasc II, Paris, 1864, zbija hypotezę Green'a. Lecz myśl jego zdaje mi się, wzięła początek z téj okoliczności, że nie umiano otrzymać wyników Green'a wychodząc z działań między punktami materyalnemi według ich linii połączenia po dwa. O ile udowodniłem coś przeciwnego, sądzę, że zarzuty tego rodzaju nie byłyby już słusznemi.