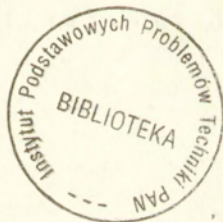


- 87.02.8010/2221
- 5.3.10. — ośrodki anizotropowe
  - 5.3.14. — techniki doświadczalne
  - 5.17.10. — obciążenia jedno-  
i wieloosiowe

**Lech Dietrich**

**DOŚWIADCZALNE OKREŚLENIE  
ANIZOTROPI PLASTYCZNEJ METALI**

**33/1994**



**WARSZAWA 1994**

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 listopada 1994 r.



56616



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,0 Ark. druk. 1,50  
Oddano do drukarni w listopadzie 1994 r.

---

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.  
Warszawa, ul. Jasna 1

## Doświadczalne określenie anizotropii plastycznej metali

### Streszczenie

Doświadczalne wyznaczenie postaci anizotropii i jej liczbowych współczynników zależy od postaci badanych półwyrobów metali i jest zwykle przeprowadzane przy jednoosiowym rozciąganiu próbek wyciętych pod różnymi kątami w stosunku do ustalonej osi półwyrobu. Badania takie wymagają zamocowania próbki w taki sposób, aby nie ograniczać swobody deformacji próbki w tych przypadkach gdy główne osie anizotropii nie pokrywają się z osią wyciętej próbki [1].

Racjonalnym sposobem identyfikacji anizotropii metali są badania w złożonym stanie naprężenia umożliwiające wyznaczenie kształtu i położenia powierzchni plastyczności materiału, a tym samym określenie postaci i współczynników warunku plastyczności. Badania wykonuje się na próbkach jednakowo zorientowanych w stosunku do osi półwyrobu, poddanych różnym stanom naprężeń. W przypadku półwyrobów w postaci prętów i rur stosuje się cienkościenne próbki rurkowe obciążane różnymi kombinacjami siły osiowej, momentu skręcającego i/lub ciśnienia wewnętrznego. Zasadniczym problemem takich badań dla materiałów anizotropowych jest określenie umownej granicy plastyczności i związanej z tym zależności efektywnych naprężeń jako funkcji efektywnych odkształceń, bowiem wielkości te są związane z warunkami plastyczności.

W pracy zaproponowano prosty sposób iteracyjny, w którym w pierwszym przybliżeniu przyjmuje się wyrażenia dla efektywnych naprężeń i odkształceń w postaci jak dla materiału izotropowego opisanego warunkiem Hubera-Misesa, a następnie dla tak przetworzonych doświadczalnych krzywych materiałowych w różnych stanach naprężenia określa się pierwsze przybliżenie liczbowych wartości współczynników warunku plastyczności w ogólnej postaci. Następnie określa się kolejne przybliżenie związku efektywnych naprężeń i odkształceń, skąd po ponownym przetworzeniu tych samych danych doświadczalnych wyznacza się kolejne przybliżenie liczbowych wartości współczynników warunku plastyczności. Obliczenia są przerywane gdy różnice wartości poszczególnych współczynników w kolejnych iteracjach są dostatecznie małe.

W pracy przedstawiono również stosowane sposoby określania umownych granic plastyczności w dotychczasowych badaniach w złożonych stanach naprężenia zarówno dla materiałów anizotropowych w stanie początkowym jak i dla materiałów początkowo izotropowych, które nabywały cech anizotropowych pod wpływem wstępnej deformacji.



## Wstęp

Właściwości mechaniczne metali i ich stopów są w większości przypadków zależne od kierunku obciążenia. Materiały takie określamy terminem anizotropowych. Cecha ta wynika przede wszystkim z silnie ukierunkowanej struktury nadanej w procesie wytwórczym, a wywołana w ten sposób anizotropia nazywana jest anizotropią początkową. Wyróżnia się też zwykle wyraźnie anizotropię wywołaną deformacją plastyczną jakiej doznaje materiał bądź to w procesie kształtowania gotowego wyrobu bądź też na skutek celowo wprowadzonej deformacji. Wywołana w ten sposób kierunkowość właściwości mechanicznych jest określana terminem wtórnej anizotropii plastycznej. Wyniki wielu badań doświadczalnych wskazują na bardzo silny wpływ odkształceń plastycznych na kształtowanie się lub zmianę anizotropii plastycznej. Nawet wówczas gdy materiał w stanie początkowym wykazuje izotropię, to pod wpływem deformacji plastycznej staje się anizotropowy, a stopień zróżnicowania cech anizotropowych zależy od wartości tej wtórnej deformacji plastycznej i od wzmocnienia materiału. Niezależnie od przyczyn powstania cech anizotropowych i umownego zróżnicowania początkowej i wtórnej anizotropii materiał taki ma właściwości mechaniczne zależne od kierunku przyłożenia obciążenia w stosunku do ukształtowanych osi anizotropii i w dalszych badaniach doświadczalnych zachowania się tego materiału powinna być brana pod uwagę jego anizotropia.

Doświadczalne wyznaczenie właściwości mechanicznych materiałów anizotropowych stanowi nie tylko problem opisu zachowania się takich materiałów pod wpływem obciążeń, ale jest ściśle związane z praktyką inżynierską procesów wytwórczych i obliczeń wytrzymałościowych elementów konstrukcyjnych. Przy czym istotny rozwój metod obliczeniowych, a zwłaszcza metody elementów skończonych umożliwiającej uwzględnienie w obliczeniach rzeczywistej charakterystyki materiałowej, stanowi jeden z czynników wywołujących potrzebę prowadzenia doświadczalnych badań materiałów anizotropowych.

Anizotropia plastyczna blach jest jednym z głównych czynników ograniczających parametry procesów głębokiego tłoczenia i w związku z tą dziedziną zastosowań już od

dawna prowadzi się badania doświadczalne w tym zakresie. Powszechnie przyjętym sposobem wyznaczenia anizotropowych cech blachy są badania przy jednoosiowym rozciąganiu próbek wyciętych pod różnymi kątami w stosunku do kierunku walcowania. Mimo prostego sposobu obciążania badania te wymagają specjalnego oprzyrządowania zapewniającego prawidłową realizację warunków brzegowych w tych przypadkach gdy kierunki anizotropii nie pokrywają się z kierunkiem obciążenia [1] jak również w przypadku realizowania badań przy ściskaniu [2].

Realizowane przy jednoosiowym obciążeniu badania anizotropii są ściśle związane z postacią badanego materiału, a ich wyniki są ważne z praktycznego punktu widzenia, ale nie zapewniają pełnej informacji o rodzaju ukształtowanej anizotropii i o jej współczynnikach liczbowych. Badania te są zwykle związane z założoną z góry postacią anizotropii.

Znacznie mniej badań doświadczalnych przeprowadzono w warunkach złożonego stanu naprężenia, mimo że wyniki takich badań dostarczają informacji o zachowaniu się materiałów anizotropowych w warunkach wieloosiowego płynięcia plastycznego i umożliwiają weryfikację warunku plastyczności tego materiału. Badania w złożonym stanie naprężenia, których celem była ocena założonej postaci warunku plastyczności materiałów anizotropowych przeprowadzano zarówno na płaskich próbkach [3, 4], jak i na cienkościennych próbkach rurkowych [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Istotną trudność związaną z badaniami materiałów anizotropowych w warunkach złożonego stanu naprężenia jest związana z wyznaczeniem umownej granicy plastyczności dla różnych stanów naprężenia. Podobnie jak to występuje dla wszystkich materiałów nie wykazujących fizycznej granicy plastyczności, a charakteryzujących się gładkim przejściem od zakresu sprężystego do zakresu plastycznego, również dla materiałów anizotropowych zachodzi konieczność wprowadzenia pewnej umownej granicy plastyczności utożsamianej zwykle z określoną wartością efektywnych odkształceń plastycznych. Problem polega jednak na tym, że definicje efektywnych naprężeń i odkształceń są związane z postacią warunku plastyczności. Dlatego też w dotychczasowych pracach zwykle zakładano najpierw postać anizotropowego warunku



plastyczności, a następnie weryfikowano poprawność położenia punktów doświadczalnych dla różnych dróg obciążenia w stosunku do założonej krzywej teoretycznej.

Celem niniejszej pracy jest sposób wyznaczenia postaci kwadratowego warunku plastyczności dla materiałów anizotropowych i wartości liczbowych jego współczynników dla określonych umownych granic plastyczności bez konieczności wprowadzania założeń ograniczających typ anizotropii i prawo płynięcia.

### Warunek plastyczności dla materiałów anizotropowych

Za podstawę dalszych rozważań przyjęto kwadratowy warunek anizotropowy R.v.Misesa [12] w postaci przedstawionej przez W.Szczepińskiego [13] z uwzględnieniem liniowych członów wszystkich składowych naprężeń. Warunek ten uwzględnia efekt Bauschingera i efekt obrotu głównych osi anizotropii, a w ogólnym przypadku wyrażony jest następującym związkiem:

$$\begin{aligned} f(\sigma_y) = & k_{12}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + k_{23}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + k_{31}(\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ & + 2\tau_{xy} [k_{16}(\sigma_z - \sigma_x) + k_{26}(\sigma_z - \sigma_y)] + \\ & + 2\tau_{yz} [k_{24}(\sigma_x - \sigma_y) + k_{34}(\sigma_x - \sigma_z)] + \\ & + 2\tau_{zx} [k_{35}(\sigma_y - \sigma_z) + k_{15}(\sigma_y - \sigma_x)] + \\ & + k_{44} \cdot \tau_{yz}^2 + k_{55} \cdot \tau_{zx}^2 + k_{66} \cdot \tau_{xy}^2 + \\ & - b_{12}(\sigma_x - \sigma_y) - b_{23}(\sigma_y - \sigma_z) - b_{31}(\sigma_z - \sigma_x) + \\ & + b_{44} \cdot \tau_{yz} + b_{55} \cdot \tau_{zx} + b_{66} \cdot \tau_{xy} = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Współczynniki  $k_{12}, k_{23}, k_{31}$  i  $b_{12}, b_{23}, b_{31}$  wyrażone są przez granice plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu i ściskaniu w trzech kierunkach przyjętego układu współrzędnych  $x, y, z$ . Współczynniki  $k_{44}, k_{55}, k_{66}$  i  $b_{44}, b_{55}, b_{66}$  są wyrażone przez granice plastyczności na ścinanie w kierunkach wywołujących dodatnie i ujemne wartości składowych naprężeń ścinających. Wszystkie te współczynniki mogą więc być wyznaczone na podstawie badań w jednoosiowych stanach naprężeń w trzech kierunkach przyjętego układu współrzędnych  $x, y, z$ . Natomiast współczynniki

$k_{16}, k_{26}, k_{24}, k_{34}, k_{35}, k_{15}$  występujące przy mieszanych członach składowych naprężeń nie mają tak prostej interpretacji i mogą być wyznaczone jedynie na podstawie doświadczeń w złożonym stanie naprężenia. Szczegółową interpretację fizyczną i omówienie różnych przypadków szczególnych równania (1) podano w pracy [13].

Warunek plastyczności (1) jest ogólną postacią obejmującą inne znane i rozpowszechnione postacie kwadratowego warunku plastyczności zaproponowane przez R. Hilla [14] dla przypadku ortotropii plastycznej w postaci:

$$f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \\ + 2 \cdot L \cdot \tau_{yz}^2 + 2 \cdot M \cdot \tau_{zx}^2 + 2 \cdot N \cdot \tau_{xy}^2 = 1 \quad (2)$$

oraz przez A.Ota, S.Shindo i H. Fukuokę [15], który poprzez wprowadzenie członów liniowych uwzględni możliwość opisanie efektu Bauschingera i został podany w postaci:

$$f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \\ + 2 \cdot L \cdot \tau_{yz}^2 + 2 \cdot M \cdot \tau_{zx}^2 + 2 \cdot N \cdot \tau_{xy}^2 + \\ - C \cdot \sigma_x - D \cdot \sigma_y - E \cdot \sigma_z = 1 \quad (3)$$

Podstawowa trudność związana z pomiarem współczynników równań warunków plastyczności materiałów anizotropowych wynika z faktu, że nie można dokonać takich pomiarów za pomocą doświadczeń w jednoosiowych stanach naprężenia przy jednoznacznie określonych warunkach brzegowych zapewniających jednorodny stan naprężenia i odkształcenia w próbce. Wprawdzie w przypadku warunku Hilla (2) jest możliwe, z formalnego punktu widzenia, wyznaczenie stałych materiałowych na podstawie prób jednoosiowego rozciągania i ściskania oraz czystego ścinania próbek wyciętych w kierunkach zgodnych z kierunkami przyjętego układu współrzędnych, ale podejmowane dotychczas próby czystego ścinania nie dają zadawalających wyników [16, 17]. Sytuacja ulega jeszcze komplikacji w przypadku warunków plastyczności



uwzględniających efekt Bauschingera, w których występują liniowe człony składowych naprężeń (3) lub w przypadku ogólnym (1), w którym występują człony mieszane składowych naprężeń. W takim przypadku nie jest możliwa prosta interpretacja niektórych ze stałych materiałowych przy pomocy wielkości wyznaczonych przy jednoosiowym stanie naprężenia, a do ich wyznaczenia konieczne są badania w złożonych stanach naprężenia [13].

Trudność dodatkowa związana jest, jak wspomniano wyżej, z definicją granicy plastyczności przy różnych stanach naprężenia. Większość metali i ich stopów cechuje się gładkim przejściem od zakresu zachowania czysto sprężystego do zakresu zachowania plastycznego. Granica plastyczności jest w takich przypadkach określana w doświadczeniach dla materiałów izotropowych jako wartość efektywnego naprężenia odpowiadająca określonej wartości efektywnego odkształcenia plastycznego. Stosowanie takiej procedury wymaga określenia efektywnych naprężeń i odkształceń, a wielkości te są związane z warunkiem plastycznego płynięcia rozpatrywanego materiału.

### **Określenie granicy plastyczności w złożonym stanie naprężenia**

Podstawowy problem doświadczalnych badań materiałowych, których celem jest identyfikacja anizotropowych właściwości związany jest z określeniem granicy plastyczności przy różnych stanach naprężenia. Jest to wprawdzie problem występujący w badaniach właściwości mechanicznych większości materiałów, ale w przypadku warunków plastyczności o prostej i znanej z góry postaci nie ma kłopotów z wyznaczeniem efektywnych naprężeń i efektywnych odkształceń. Efektywne naprężenia przyjmuje się na podstawie warunku plastyczności Hubera - Misesa, a efektywne odkształcenia wyrażane są jako funkcja drugiego niezmiennika tensora odkształcenia. Zależność efektywnych naprężeń jako funkcji efektywnych odkształceń jest wykorzystywana następnie do określenia umownej granicy plastyczności materiału, odpowiadającej określonej wartości efektywnych odkształceń plastycznych. Jest to procedura stosowana najczęściej w wielu badaniach zachowania się materiałów izotropowych w warunkach złożonego stanu naprężenia [18, 19, 20, 21, 22, 23, 28],



nawet wówczas gdy początkowo izotropowy materiał poddano wstępnej deformacji plastycznej, po której występowały bardzo wyraźne cechy anizotropii wtórnej. W niektórych pracach ograniczano wartość odkształceń plastycznych odpowiadających umownej granicy plastyczności nawet do tak małej wartości jak 0,0005% [9], ale sposób ten stosowano również do wyznaczenia umownych granic plastyczności materiału odpowiadających odkształceniom plastycznym 0,2% [18, 20, 22]. Sposób ten nazywany jest w niniejszej pracy pierwszym sposobem wyznaczania granicy plastyczności materiału.

Drugi sposób określenia granicy plastyczności w badaniach w warunkach złożonego stanu naprężenia, który stosowano do materiałów anizotropowych [10] i do materiałów początkowo izotropowych poddanych wstępnej deformacji plastycznej, po której występowały bardzo wyraźne cechy anizotropowości [24, 25, 26, 27] polega na wykorzystaniu zależności poszczególnych składowych naprężeń od odpowiadających składowych odkształceń, które bezpośrednio mierzono w trakcie obciążania próbek wzdłuż różnych dróg w przestrzeni naprężeń. Przy czym poszczególne składowe granice plastyczności utożsamiano, albo z wartością składowych naprężeń przy dostatecznie małych (na przykład 0,0005%) i jednakowych dla poszczególnych składowych wartościach odkształceń [24, 25, 26], albo utożsamiano z punktem przecięcia prostej odwzorowującej sprężysty przebieg wykresu danej składowej naprężeń jako funkcji odpowiadającej składowej odkształceń ze styczną do tego wykresu poprowadzoną przez punkt wyznaczony przez odkształcenia plastyczne o określonej wartości, na przykład 0,05% [10, 11]. Sposób ten odnosi się tylko do jednej granicy plastyczności odpowiadającej początkowi plastycznego płynięcia, jego zaletą jest wykorzystanie bezpośrednich danych pomiarowych. Wadą natomiast jest ograniczenie pomiaru tylko do jednej wartości umownej granicy plastyczności odpowiadającej początkowi plastycznego płynięcia, oraz nieokreślony błąd pomiarowy związany z przyjętymi definicjami w odniesieniu do poszczególnych składowych przy różnych drogach obciążenia.

W przypadku materiałów anizotropowych, gdy celem badań jest wyznaczenie zarówno rodzaju anizotropii jak i określenie wartości liczbowych współczynników tej anizotropii powstają poważne trudności formalne związane z doбором definicji efektywnych naprężeń i odkształceń. Sposób określenia tych wielkości zaproponował G.N.White i D.C.Drucker [29]. Efektywne naprężenie wyrażono jako funkcję warunku plastyczności w postaci:

$$\sigma_e = (f)^{1/2} \quad (4)$$

gdzie  $f$  oznacza warunek plastyczności dla materiału anizotropowego, na przykład w postaci (1). Do określenia efektywnych odkształceń plastycznych w pracy [29] podano dwie propozycje. W pierwszej z nich wykorzystuje się pracę plastyczną jako podstawową miarę wielkości deformacji plastycznej wyrażoną jako:

$$dW^p = \sigma_e \cdot d\epsilon_e^p = \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p \quad (5)$$

gdzie  $d\epsilon_e^p, d\epsilon_{ij}^p$  oznaczają odpowiednio przyrost efektywnych odkształceń plastycznych i tensor przyrostu odkształceń plastycznych. Przyrost efektywnych odkształceń plastycznych oblicza się następnie z zależności:

$$d\epsilon_e^p = \frac{\sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p}{\sigma_e} \quad (6)$$

a efektywne odkształcenia plastyczne określa się z zależności:

$$\epsilon_e^p = \int d\epsilon_e^p \quad (7)$$

Drugi sposób wyznaczenia efektywnych odkształceń polega na znalezieniu całki przyrostów odkształceń, które wyznaczono z warunku prostopadłości wektora przyrostu odkształcenia do powierzchni płynięcia, a więc przy założeniu stowarzyszonego prawa płynięcia. Przyrosty składowych odkształceń plastycznych określone są więc jako:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8)$$



Zależności te wykorzystywano w kilku pracach dla materiałów anizotropowych przy wyznaczaniu zastępczej zależności efektywnych naprężeń jako funkcji efektywnych odkształceń lub przy wyznaczaniu współczynników anizotropii. Na podstawie powyższych zależności wyróżnić więc można dwa podane niżej sposoby związane z dwiema definicjami efektywnych odkształceń wynikającymi z zależności (6) i (8).

Tak więc trzeci z kolei sposób wyznaczenia granicy plastyczności opiera się na związkach (4) i (8). Procedurę taką stosowano w pracy [15] do wyznaczenia współczynników anizotropii określonej związkiem (3) na podstawie jednoosiowych prób obciążania cienkościennych próbek rurkowych w kierunku rozciągania i skręcanie w kierunkach wywołujących dodatnie lub ujemne naprężenia ścinające. Podobna technika była stosowana w pracy [5] dla próbek rurkowych obciążanych oddzielnie w różnych, jednoosiowych stanach naprężenia przy rozciąganiu, ciśnieniu wewnętrznym i skręcaniu, a do identyfikacji odpowiadających sobie punktów dla różnych stanów naprężenia przyjmowano taką samą wartość współczynnika proporcjonalności  $d\lambda$  określonego ze związku (8). Wyznaczono w ten sposób współczynniki anizotropii dla dwóch założonych warunków plastyczności (2) i (3). Taką samą procedurę stosowano w pracy [4]. Związki (4) i (8) stosowano również w pracy [8] do weryfikacji anizotropowego warunku plastyczności R.Hilla (2) na podstawie badań cienkościennych próbek rurkowych obciążonych kombinacją rozciągania i ciśnienia wewnętrznego oraz kombinacją rozciągania i skręcania. Przy czym dwa współczynniki anizotropii wyznaczano ze stosunku przyrostów odpowiednich składowych odkształceń określonych ze związków (8), a przy wyznaczaniu zależności ekwiwalentnych naprężeń jako funkcji ekwiwalentnych odkształceń wykorzystywano dodatkowo potwierdzony doświadczalnie fakt stałej wartości ilorazu przyrostów dwóch składowych odkształceń.

Czwarty ze stosowanych sposobów wyznaczania umownych granic plastyczności polega na określeniu efektywnych naprężeń z zależności (4) i efektywnych odkształceń plastycznych z wyrażenia na pracę plastyczną (5) za pośrednictwem związków (6) i (7). Procedura taka była stosowana do opisu anizotropowych właściwości blach przy pomocy warunku plastyczności w postaci funkcji czwartego stopnia [30, 31].

## Doświadczalne wyznaczenie współczynników anizotropii

Rodzaj badań doświadczalnych, których celem jest wyznaczenie postaci warunku plastyczności i liczbowych wartości współczynników tego warunku jest zależny od postaci badanego materiału. Praca niniejsza dotyczy prętów i rur, z których można przygotować cienkościennie próbki rurkowe przeznaczone do badań w warunkach płaskiego stanu naprężenia wywołanego różnymi kombinacjami równocześnie działającej siły osiowej i momentu skręcającego. Zaletą tego typu obciążenia jest możliwość realizacji różnych dróg obciążenia dla dodatnich i ujemnych wartości poszczególnych składowych naprężeń, co umożliwia wyznaczenie punktów doświadczalnych we wszystkich czterech ćwiartkach rozpatrywanego układu składowych naprężeń. Jest to często stosowany schemat realizacji złożonego stanu naprężenia w badaniach materiałowych. Dla uproszczenia dalszych rozważań sposób wyznaczenia współczynników anizotropii zostanie przedstawiony na przykładzie takiego właśnie płaskiego stanu naprężenia.

W rozpatrywanym dalej w pracy przypadku płaskiego stanu naprężenia, gdy jedynymi niezerowymi składowymi naprężenia są: naprężenie osiowe  $\sigma_{zz}$  i naprężenie ścinające  $\tau_{z\theta}$ , zamieniając odpowiednio oznaczenia osi  $x, y, z$  na osie  $\theta, r, z$  powyższe, ogólne warunki uplastycznienia (1), (2), (3) dla materiałów anizotropowych sprowadzą się do postaci:

- warunek (1):

$$f(\sigma_{ij}) = (k_{23} + k_{31})\sigma_{zz}^2 - 2 \cdot k_{35} \cdot \tau_{z\theta} \cdot \sigma_{zz} + k_{55} \cdot \tau_{z\theta}^2 + (h_{23} - h_{31})\sigma_{zz} + h_{35} \cdot \tau_{z\theta} = 1 \quad (9)$$

- warunek (2):

$$f(\sigma_{ij}) = (F + G)\sigma_{zz}^2 + 2 \cdot L \cdot \tau_{z\theta}^2 = 1 \quad (10)$$

- warunek (3):

$$f(\sigma_{ij}) = (F + G)\sigma_{zz}^2 - 2 \cdot Q \cdot \sigma_{zz} + 2 \cdot L \cdot \tau_{z\theta}^2 = 1 \quad (11)$$

Równanie (9) jest pełnym równaniem krzywej drugiego stopnia przedstawianym zwykle w następującej postaci:



$$A \cdot \sigma_{zz}^2 + 2 \cdot B \cdot \sigma_{zz} \cdot \tau_{z\theta} + C \cdot \tau_{z\theta}^2 + 2 \cdot D \cdot \sigma_{zz} + 2 \cdot E \cdot \tau_{z\theta} = 1 \quad (12)$$

gdzie współczynniki  $A$  i  $D$  są określone następującymi związkami jako funkcje bezwzględnych wartości granicy plastyczności na rozciąganie  $Y_z$  i na ściskanie  $Z_z$  w kierunku osi  $z$ :

$$A = \frac{1}{Y_z \cdot Z_z} ; \quad D = \frac{1}{Y_z} - \frac{1}{Z_z} \quad (13)$$

a współczynniki  $C$  i  $E$  są określone następującymi związkami jako funkcje bezwzględnych wartości granicy plastyczności przy ścinaniu  $R_{z\theta}$  w kierunku wywołującym dodatnie naprężenia  $\tau_{z\theta}$  i  $S_{z\theta}$  w kierunku wywołującym ujemne naprężenia  $\tau_{z\theta}$ :

$$C = \frac{1}{R_{z\theta} \cdot S_{z\theta}} ; \quad E = \frac{1}{R_{z\theta}} - \frac{1}{S_{z\theta}} \quad (14)$$

Współczynnik  $B$ , który jest proporcjonalny do obrotu przekroju powierzchni plastyczności względem układu współrzędnych  $\sigma_{zz} - \tau_{z\theta}$  nie ma tak prostej interpretacji fizycznej jak pozostałe współczynniki i może być wyznaczony jedynie na podstawie doświadczeń w złożonym stanie naprężenia.

Wymiary geometryczne elipsy powyższego warunku plastyczności dla materiałów anizotropowych wyrażają się następującymi zależnościami jako funkcje współczynników krzywej drugiego stopnia:

- współrzędne środka elipsy:

$$\alpha_o = \frac{B \cdot E - C \cdot D}{\delta} ; \quad \alpha_\tau = \frac{B \cdot D - A \cdot E}{\delta} \quad (15)$$

- kąt obrotu osi elipsy w stosunku do układu współrzędnych  $\sigma_{zz} - \tau_{z\theta}$ :

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot B}{A - C}\right) \quad (16)$$

- wielka i mała półos elipsy:

$$a = \sqrt{-\frac{\Delta}{a' \cdot \delta}} ; \quad b = \sqrt{-\frac{\Delta}{b' \cdot \delta}} \quad (17)$$

gdzie oznaczono:

$$\Delta = A \cdot C + 2 \cdot B \cdot D \cdot E - C \cdot D^2 - A \cdot E^2 - B^2 ; \quad \delta = A \cdot C - B^2 \quad (18)$$

oraz:

$$a' = \frac{1}{2} \left( A - C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \right) ; \quad b' = \frac{1}{2} \left( A - C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \right) \quad (19)$$

Dwa z wymienionych wyżej warunków plastyczności w płaskim stanie naprężenia dla ośrodków anizotropowych stanowią szczególne postacie równania (12). W warunku R.Hilla (10) przyjęto  $B = D = E = 0$  co oznacza, że środek elipsy pokrywa się z początkiem układu współrzędnych i oś elipsy pokrywa się z osią  $\sigma_{xx}$ , a w warunku zaproponowanym przez T.Ota, S.Shindo i H.Fukuokę (11) przyjęto  $B = E = 0$ , co oznacza, że środek elipsy leży na osi  $\sigma_{xx}$  i oś elipsy pokrywa się z osią  $\sigma_{xx}$ . Warunek plastyczności dla materiałów anizotropowych w postaci (12) określony jest przez pięć stałych materiałowych, którymi z geometrycznego punktu widzenia mogą być, na przykład dwie osie główne elipsy, dwie współrzędne jej środka i kąt obrotu względem układu współrzędnych.

Sposób wyznaczania rodzaju anizotropii i jej współczynników liczbowych na podstawie danych doświadczalnych w złożonym stanie naprężania realizowanym na cienkościennych próbkach rurkowych przy różnych kombinacjach jednocześnie działającej, w rozpatrywanym przypadku, siły osiowej i momentu skręcającego polega na iteracyjnym przetwarzaniu wyników doświadczeń dla mierzonych bezpośrednio poszczególnych składowych naprężeń  $\sigma_{xx}$  i  $\tau_{x\theta}$  oraz składowych odkształceń  $\epsilon_{xx}$  i  $\epsilon_{x\theta}$ . W pierwszym przybliżeniu przyjmujemy znane wyrażenia dla efektywnych naprężeń obliczonych dla warunku plastyczności materiału izotropowego Hubera-Misesa

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3 \cdot \tau_{x\theta}^2} \quad (20)$$



oraz dla efektywnych odkształceń obliczonych na podstawie drugiego niezmiennika tensora odkształcenia jako:

$$\varepsilon_e = \sqrt{\varepsilon_{zz}^2 + \frac{3}{(1+\nu)^2} \varepsilon_{\theta\theta}^2} \quad (21)$$

gdzie  $\nu$  jest współczynnikiem Poissona.

Składowe naprężeń  $\sigma_{zz}$  i  $\tau_{r\theta}$  występujące we wzorze (20) mierzone są za pośrednictwem cel, odpowiednio siły osiowej i momentu skręcającego maszyny wytrzymałościowej. Składowe odkształceń osiowych  $\varepsilon_{zz}$ , postaciowych  $\varepsilon_{\theta\theta}$  i obwodowych  $\varepsilon_{\phi\phi}$  mogą być mierzone na przykład przy pomocy układów tensometrycznych. Odkształcenia po grubości ścianki próbki  $\varepsilon_r$  można określić z warunku nieściśliwości na podstawie wartości  $\varepsilon_{\theta\theta}$  i  $\varepsilon_{zz}$ . Wartość współczynnika Poissona  $\nu$  w zakresie prowadzonych pomiarów może być obliczona jako stosunek odkształceń obwodowych do osiowych, albo może być przyjęta z tablic dla danego materiału. Efektywne odkształcenia będą więc wyrażone w pierwszym przybliżeniu według wzoru (21).

Związki (20) i (21) wykorzystywane są dla wszystkich zrealizowanych w doświadczeniu kierunków obciążenia do przygotowania wykresów efektywnych naprężeń jako funkcji efektywnych odkształceń plastycznych, po uprzednim odjęciu odkształceń sprężystych. Następnie określony zostaje ciąg umownych granic plastyczności odpowiadających określonym wartościom efektywnych odkształceń plastycznych, które stanowią zestawy punktów doświadczalnych dla różnych powierzchni plastyczności. Dla kolejnych zestawów punktów doświadczalnych przy różnych kierunkach obciążenia równomiernie rozłożonych w przestrzeni naprężeń oblicza się z kolei współczynniki równania (12) elipsy aproksymującej punkty doświadczalne z warunku minimalizacji sumy kwadratów odległości punktów doświadczalnych od krzywej aproksymacji. Pozwala to na określenie pierwszego przybliżenia liczbowych wartości współczynników elipsy w ogólnej postaci, a tym samym określenie w pierwszym przybliżeniu anizotropowych cech badanego materiału.

Dalsze etapy obliczeniowe polegają na powtórzeniu ciągu obliczeń w ten sposób, że obliczone w poprzedniej iteracji współczynniki równania elipsy (12) są

uwzględnione w obliczeniu efektywnych naprężeń według wzoru (4) iteracji następnej, natomiast nowa wartość efektywnych odkształceń jest obliczana z pracy plastycznej według wzoru (7), w którym przyrost efektywnych odkształceń plastycznych oblicza się ze wzoru (6), a praca plastyczna obliczana jest na podstawie doświadczalnych zależności poszczególnych składowych naprężeń jako funkcji odpowiadających składowych odkształceń plastycznych, a więc w rozpatrywanym, przykładowym stanie naprężenia przyrosty pracy plastycznej będą obliczone z zależności:

$$dW^p = \sigma_{zz} \cdot d\epsilon_{zz}^p + 2 \cdot \tau_{z\theta} \cdot d\epsilon_{z\theta}^p \quad (22)$$

Na podstawie wyznaczonej w kolejnej iteracji zależności efektywnych naprężeń (4) jako funkcji efektywnych odkształceń plastycznych (7) wyznacza się nową serię umownych granic plastyczności dla różnych odkształceń plastycznych i dla tych nowych punktów doświadczalnych oblicza się w ten sam sposób jak wyżej wskazano nowe wartości współczynników równania (12) elipsy aproksymującej kształt i położenie powierzchni plastyczności w kolejnej iteracji. Obliczenia te powtarza się tak długo, aż różnice wartości współczynników anizotropii w kolejnych dwóch iteracjach będą dostatecznie małe.

Przedstawiony sposób doświadczalnego wyznaczania serii powierzchni plastyczności dla różnych umownych granic plastyczności na podstawie wyników badań dostatecznej liczby próbek obciążanych w warunkach złożonego stanu naprężenia umożliwia określenie rodzaju anizotropii badanego materiału i wartości liczbowych współczynników anizotropii, przy czym wyniki obliczeń stanowią jednocześnie uśrednienie pomiarów uzyskanych dla całej serii próbek. Istotnym elementem proponowanego sposobu wyznaczania parametrów powierzchni plastyczności jest rozłożenie punktów doświadczalnych na całym obwodzie wyznaczonej elipsy.

## Wnioski

1. Proponowany sposób umożliwia wyznaczenie rodzaju i liczbowych wartości parametrów nieznaney z góry anizotropii materiału na podstawie wyników badań w złożonym stanie naprężenia.
2. Punktem wyjścia iteracyjnego przetwarzania wyników doświadczalnych jest warunek plastyczności Hubera-Misesa dla materiałów izotropowych i odpowiadające mu wyrażenie efektywnych odkształceń plastycznych.
3. W dalszych iteracjach oblicza się efektywne naprężenia z zależności (4) z uwzględnieniem postaci warunku plastyczności z iteracji poprzedniej, natomiast efektywne odkształcenia plastyczne oblicza się z zależności (7) na podstawie przyrostów pracy plastycznej obliczonych z danych doświadczalnych.
4. Proponowany sposób umożliwia wyznaczania serii powierzchni plastyczności odpowiadających różnym definicjom odkształceń plastycznych.
5. Kształt i położenie powierzchni plastyczności stanowi uśrednienie wyników doświadczeń dla serii próbek, z których każda obciążona jest przy innej proporcji składowych naprężeń.
6. Proponowany sposób wyznaczania powierzchni plastyczności jest szczególnie przydatny do badań na próbkach rurkowych przy obciążeniach złożonych umożliwiających wywoływanie dodatnich i ujemnych składowych naprężeń, ale może być również stosowany przy innych rodzajach badań w warunkach złożonego stanu naprężenia przy dostatecznej liczbie punktów doświadczalnych zapewniających zbieżność procedury iteracyjnej.

## Podziękowanie

Autor wyraża podziękowanie Komitetowi Badań Naukowych za finansowanie pracy wykonywanej w ramach grantu nr 3 0154 91 01.



### Literatura cytowana w pracy

1. J.P. Boehler, L.El Aoufi, J. Raclin: On experimental testing methods for anisotropic materials, *Res Mechanica*, 21, 73-95, 1987.
2. L. Dietrich, K. Turski: Nowa metoda badania cienkich blach przy ściskaniu, *Rozp. Inżyn.*, 26, 1, 91-99, 1978.
3. D. Lee, W.A. Backofen: An Experimental Determination of the Yield Locus for Titanium and Titanium-Alloy Sheet, *Trans. Metal. Soc. AIME*, 236, 1077-1084, 1966.
4. J.L. Bassani, Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties, *Int. J. Mech. Sci.* 19, 651-660, 1977.
5. R.M.W. Frederking, O.M. Sidebottom: An Experimental Evaluation of Plasticity Theories for Anisotropic Metals, *J. Appl. Mech.* 38, 15-22, 1971.
6. S.S. Hecker: Yield Surfaces in Prestrained Aluminum and Copper, *Metal. Trans.*, 2, 2077-2086, 1971.
7. S.S. Hecker: Influence of deformation history on the yield locus and stress-strain behavior of Aluminum and Copper, *Metal. Trans.*, 4, 985-989, 1973.
8. M.G. Stout, S.S. Hecker, R. Bourcier: An Evaluation of Anisotropic Effective Stress-Strain Criteria for the Biaxial Yield and Flow of 2024 Aluminum Tubes, *J. Engine. Mater. Tech.* 105, 242-249, 1983.
9. D.E. Helling, A.K. Miller, M.G. Stout: An Experimental Investigation of Yield Loci of 1100-0 Aluminum, 70:30 Brass, and an Overaged 2024 Aluminum Alloy After Various Prestains, *J. Engine. Mater. Tech.* 108, 313-320, 1986.
10. K. Mallick, Shyam K. Samanta, A. Kumar: An Experimental Study of the Evolution of Yield Loci for Anisotropic Materials Subjected to Finite Shear Deformation, *J. Engine. Mater. Tech.* 113, 192-198, 1991.
11. A. Kumar, Shyam K. Samanta, K. Mallick: Study of the Effect of Deformation on the Axes of Anisotropy, *J. Engine. Mater. Tech.* 113, 187-191, 1991.
12. R.v. Mises: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, *Zeitschr. angew. Math. Mech.*, Band 8, Heft 3, 161-185, 1928.

13. W. Szczepiński: On Deformation-induced Plastic Anisotropy of Sheet Metals, Arch. Mech., 45, 1, 3-38, 1993.
14. R. Hill: A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals, Proc. Roy. Soc., London, Ser.A 193, 281-297, 1948.
15. T. Ota, A. Shindo, H. Fukuoka: A Consideration on Anisotropic Yield Criterion, Proc.. 9th Japan Nat. Cong. for Appl. Mech., 117-120, 1959.
16. G. Socha: Optimal design of specimens for pure shear tests of sheet metals. Engng Trans., 42,1-2,1994.
17. G. Socha, W. Szczepiński: On experimental determination of the coefficients of plastic anisotropy in sheet metals, Arch. Mech., 46, 1-2, 177-190, 1994.
18. W. Szczepiński: On the Effect of Plastic Deformation on Yield Condition, Arch. Mech. 15, 2, 275-296, 1963.
19. W. Szczepiński, J. Miastkowski: An Experimental Study of the Effect of the Prestraining History on the Yield Surfaces of an Aluminium Alloy, J.Mech.Phys.Solids, 16, 153-162, 1968.
20. J. Miastkowski, W. Szczepiński: An Experimental Study of Yield Surfaces of Prestrained Brass, Int. J. Solids and Structures, 1, 189-194, 1965.
21. J. Miastkowski: Analysis of the Memory Effect of Plastically prestrained material, Arch. Mech. 3, 20, 1968.
22. K. Turski: Badania wpływu odkształcenia plastycznego na zachowanie się metalu przy różnych drogach wtórnego obciążania, Mech. Teor. Stos., 9, 1, 155-199, 1971.
23. M. Śliwowski, K. Turski: Wpływ cyklicznej plastycznej deformacji na powierzchnię plastyczności, Mech Teor. Stos., 3, 12, 1974.
24. A. Phillips: Yield Surfaces of Pure Aluminum at Elevated Temperatures, Proc. IUTAM Sym. East Kilbride, June 25-28, 1968.
25. A. Phillips, C.S. Liu, J.W. Justusson, An Experimental Investigation of Yield Surfaces at Elevated Temperatures, Acta Mechanica, 14, 119-146, 1972.
26. A. Phillips, Juh-Ling Tang: The Effect of Loading Path on the Yield Surface at Elevated Temperatures, Int. J. Solids Structures, 8, 463-474, 1972.

27. A. Phillips, Wei-yang Lu: An Experimental Investigation of Yield Surfaces and Loading Surfaces of Pure Aluminum With Stress-Controlled and Strain-Controlled Path of Loading, *J. Engine. Mat. Techno.*, 106, 349-354, 1984.
28. K. Ikegami, Y. Nittsu: Effect of Creep Prestrain on Subsequent Plastic Deformation, *Int. J. Plasticity*, 1, 331-345, 1985.
29. G.N. White, D.C. Drucker: Effective Stress and Effective Strain Relation to Stress Theories of Plasticity, *J. Appl. Physics*, 21, 1013-1021, 1950.
30. M. Gotoh: A Theory of Plastic Anisotropy Based on a Yield of Fourth Order (Plane Stress State) -I, *Int. J. Mech. Sci.*, 19, 505-512, 1977.
31. M. Gotoh: A Theory of Plastic Anisotropy Based on a Yield of Fourth Order (Plane Stress State) -II, *Int. J. Mech. Sci.*, 19, 513-520, 1977.