

- 5.10. — mechanika skał i górotworu
- 1.1.5. — metody wariacyjne
- 5.1.6. — zagadnienia kontaktowe
- 5.21.2. — tarcie

W. R. Bielski, J. J. Telega

**TARCIE NA USKOKACH GEOLOGICZNYCH:
MODELOWANIE
I WARIACYJNE SFORMUŁOWANIE
ZAGADNIENŃ BRZEGOWO-POCZĄTKOWYCH**

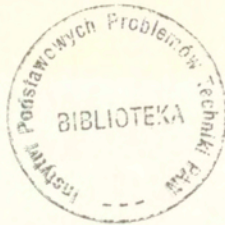
31/1994

P. 269



WARSZAWA 1994

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 września 1994 r.



56618



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 2,25 Ark. druk. 3,0
Oddano do drukarni w październiku 1994 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

Włodzimierz Robert Bielski
Instytut Geofizyki PAN
Józef Joachim Telega
Instytut Podstawowych
Problemów Techniki PAN
Warszawa

**TARCIE NA USKOKACH GEOLOGICZNYCH:
MODELOWANIE I WARIACYJNE SFORMUŁOWANIE
ZAGADNIENŃ BRZEGOWO-POCZĄTKOWYCH**

Streszczenie

W pracy dokonano przeglądu doświadczalnych i teoretycznych wyników dotyczących modelowania tarcia na uskokach geologicznych. Zaproponowano również nowe podejście wprowadzając prawo tarcia w postaci subróżniczkowej. Sformułowano quasistatyczne i dynamiczne zagadnienia początkowo-brzegowe w dwóch przypadkach: 1. dla jednej sekwencji poślizgu, 2. dla tarcia opisanego z użyciem parametrów wewnętrznych.

Wstęp

Zjawisko tarcia jest zazwyczaj badane dla materiałów takich jak metale, polimery, kompozyty, por. np. Telega (1988), Zmitrowicz (1987, 1989) oraz odnośną literaturę cytowaną w tych pracach. Od końca lat siedemdziesiątych coraz więcej uwagi poświęca się zagadnieniom tarcia w geomechanice, a w szczególności tarcia między materiałami skalnymi. Na szczególną uwagę zasługuje zjawisko tarcia występujące na uskokach geologicznych oraz konsekwencje tego zjawiska dla zagadnień przewidywania trzęsień Ziemi. Jak wynika z obserwacji, wiele dużych trzęsień Ziemi ma miejsce w rejonach aktywnych uskoków geologicznych, które są strefami osłabienia płaszcza Ziemi. Wymieńmy tu dla przykładu uskoki San Andreas

(Kalifornia), uskok North Anatolian (Turcja), a także systemy uskoków tworzących strefy subdukcji, w których wydziela się około 90% całej energii sejsmicznej wyzwolanej w trzęsieniach Ziemi.

Obserwacje i opis zachowania się uskoków oraz modelowanie tarcia na uskokach mają istotne znaczenie w analizie procesów w ogniskach trzęsień Ziemi, a także w badaniach nad ich prognozowaniem.

1. Uskoki i ich klasyfikacja

Z uskokiem geologicznym mamy do czynienia wtedy, gdy zachodzi utrata spójności materiału (skały) wzdłuż pewnej powierzchni wraz z wzajemnym przemieszczeniem materiałów występujących po obu stronach tej powierzchni, zwanej powierzchnią uskoku. Powierzchnia ta stanowi pewne uproszczenie, ponieważ w rzeczywistości mamy do czynienia z trójwymiarowym obszarem przejściowym, w którym materiał z obu stron uskoku uległ dużej fragmentacji wywołanej uprzednimi procesami zniszczenia (trzęsieniami Ziemi), jednakże obszar ten jest zwykle wąski, od kilku cm do kilkuset metrów w zależności od wieku systemu uskoków. W literaturze geofizycznej przyjmuje się upraszczające rozważanie założenie, że powierzchnia uskoku jest płaska. Mówi się wówczas o płaszczyźnie uskoku.

Powstawanie uskoku modeluje prosty i dobrze znany eksperyment ściskania próbki skalnej. Gdy naprężenia przekraczają wartość krytyczną próbka materiału pęka wzdłuż linii gdzie koncentrują się maksymalne naprężenia ścinające, por. rys. 1.

Zachowanie głównych uskoków tektonicznych na Ziemi opisuje tektonika płyt. Teoria ta mówi, że cała litosfera ziemska jest podzielona na kilkanaście głównych płyt będących we wzajemnym ruchu, por. rys. 2. Wzajemne oddziaływanie prowadzi do powstawania naprężeń, których rezultatem są uskoki; np. gdy jedna z płyt oceanicznych podchodzi pod drugą płytę kontynentalną; mówimy, że ma wówczas miejsce zjawisko subdukcji, por. rys. 3. Warto nadmienić, iż tektonika płyt jest rezultatem badań paleomagnetycznych; te ostatnie dotyczą badań pola magnetycznego w Ziemi w jej przeszłości, por. Westphal (1986).

Klasyfikacja uskoków

Geologia strukturalna dostarcza bogatej klasyfikacji uskoków pod względem ich geometrii, por. Jaroszewski (1984). Z punktu widzenia sejsmologii wystarcza nam znacznie prostsza klasyfikacja względem wartości głównych tensora naprężenia por. Turcotte i Schubert (1982), Cook i Jaeger (1971).

Wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych (x, y, z) w ten sposób, że składowa

y jest składową pionową skierowaną w głąb Ziemi zaś pozostałe składowe są poziome.

Niech $\underline{\sigma} = (\sigma_{ij})$ ($i, j = 1, 2, 3$) oznacza tensor naprężenia, przy czym σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} są naprężeniami głównymi tego tensora.

Będziemy rozważać trzy główne typy uskoku (Turcotte i Schubert, 1982):

a) uskok nasuwczy (thrust fault): występuje wtedy gdy np. oceaniczna litosfera (płyta) podchodzi pod sąsiadującą z nią płytę oceaniczną lub kontynentalną w oceanicznym rowie, patrz rys. 3. Wówczas pionowa składowa tensora naprężenia σ_{yy} jest ciśnieniem litosferycznym $\sigma_{yy} = \rho gy$, por. rys. 4. W przypadku uskoku nasuwczych spełniony jest warunek

$$\sigma_{xx} > \sigma_{zz} > \sigma_{yy}.$$

Oznacza to, że naprężenie pionowe (ciśnienie litosferyczne) jest najmniejszym naprężeniem ściskającym.

b) Uskok normalny (normal fault), schematycznie przedstawiony na rys. 5, charakteryzuje warunek:

$$\sigma_{yy} > \sigma_{xx} > \sigma_{zz},$$

czyli ciśnienie litosferyczne jest tutaj największym naprężeniem.

c) Uskok przesuwczy (strike-slip fault) charakteryzuje się tym, że przemieszczenie na uskoku jest poziome i nie ma odkształceń w kierunku składowej pionowej. Scharakteryzowany jest warunkiem

$$\sigma_{zz} > \sigma_{yy} > \sigma_{xx} \quad (\text{lub } \sigma_{xx} > \sigma_{yy} > \sigma_{zz}),$$

co oznacza, że naprężenie pionowe jest zawsze naprężeniem pośrednim. Schematyczny widok z góry tego uskoku jest przedstawiony na rys. 6. Klasycznym przykładem takiego uskoku jest uskok San Andreas w Kalifornii (rys. 7), a także uskok North Anatolian w Turcji (rys. 8).

Każdy uskok naturalny jest zwykle kombinacją trzech wymienionych typów uskoku, na ogół jedna z tych cech gra rolę dominującą; np. w uskoku San Andreas dominującą cechą jest przesunięcie poziome, stąd uskok ten jest klasyfikowany w literaturze jako uskok przesuwczy.

2. Tarcie w zagadnieniach seismologii

We współczesnej geofizyce uważa się, że trzęsienia Ziemi są procesami powstawania nieciągłości pól przemieszczeń pod jej powierzchnią, na różnych głębokościach. Procesy te zachodzą na starych lub nowych systemach uskoku geologicznych. W niniejszej pracy pomijamy inne czynniki mające znaczenie w procesach trzęsień Ziemi, takie jak wpływy termiczne, chemiczne, przejścia

fazowe, porowatość itp.; por. Teisseyre (1983, 1986).

Obserwacje aktywnych uskoków tektonicznych (np. uskok San Andreas - prędkość poślizgu $\sim 10\text{mm/rok}$ do 30mm/rok , por. rys. 6) wskazują na istotną rolę mechanizmów tarcia na powierzchniach uskoków. Większość trzęsień Ziemi i erupcji wulkanicznych ma miejsce wzdłuż linii oddzielającej główne płyty tektoniczne; por. rys. 2.

Zagadnienia tarcia materiałów skalnych (geomateriałów) o siebie, jak i tarcia wewnętrznego, należą do mechaniki skał i stanowią jeden z ważnych problemów współczesnej sejsmologii. Badania te mają swoją długą tradycję i już od dawna były silnie powiązane z teorią sprężystości, plastyczności oraz mechaniki pęknięcia i zniszczenia, por. Cook i Jaeger (1970), Nikolaewskij (1983, 1990), Teisseyre (1995).

Zagadnienie opisu tarcia na uskockach lub też tarcia materiałów skalnych o siebie jest dość trudne ale frapujące. Pewien program minimum odnośnie tych badań można scharakteryzować dwupunktowo, por. Rice (1983):

(i) sformułowanie pełnego konstytutywnego opisu zachowania się powierzchni wzajemnego poślizgu (tj. przedstawienie naprężeń stycznych jako funkcji naprężenia normalnego, temperatury, prędkości poślizgu, dystansu poślizgu i historii poślizgu),

(ii) opis mechanicznego oddziaływania pomiędzy powierzchniami kontaktu oraz otaczającym układem sprężystym (lub niesprężystym).

Rozwiązanie tych dwóch problemów jest istotne w procesie zrozumienia i wyjaśnienia tego, co dzieje się w ogniskach trzęsień Ziemi.

Badania takie mają swój początek w prostym doświadczeniu z tarcieniem. Schematyczny diagram takiego typowego doświadczenia z tarcieniem pokazany jest na rys. 9.

Ciało o masie m może ślizgać się po sztywnej powierzchni P . Siła styczna wymagana do przesunięcia ciała jest realizowana przez sprężynę AB , przy czym punkt B porusza się z prędkością V . Zależność między siłą przyłożoną w punkcie B a przemieszczeniem tego samego punktu B przedstawiono na rys. 10. Do momentu C zależność ta jest liniowa, w punkcie C wykres odchodzi od linii prostej. Oznacza to, że nastąpiło względne przemieszczenie pomiędzy ciałem a powierzchnią albo ciało lub powierzchnia deformują się w sposób niesprężysty. W punkcie D siła osiąga maksimum i ciało może nagle zacząć się ślizgać a siła działająca na sprężynę nagle spada do punktu E . Następnie siła rośnie (nieliniowo) do punktu F , tj. do momentu gdy ma miejsce następny poślizg, itd. Taki rodzaj ruchu i spoczynku jest znany jako zjawisko adhezja-poślizg (stick-slip). Teoretycznie jest możliwy przypadek gdy w skali makroskopowej poślizg jest stabilny, tj. mamy wtedy gładką zależność pomiędzy przemieszczeniem a siłą. Na wykresie jest to

zaznaczone linią CD i dalej linią kropkowaną DG.

Punkty C, D oraz G odpowiadają, odpowiednio, tarcu początkowemu, tarcu maksymalnemu i tarcu spoczynkowemu (statycznemu).

W swojej pionierskiej pracy Brace i Byerlee (1966) pokazali, że poślizg może być albo stabilny albo niestabilny. Jako pierwsi zasugerowali oni, że w sejsmologii niestabilność typu adhezja-poślizg może być interpretowana jako trzęsienie Ziemi. Od tego momentu wiele prac, w tym także doświadczalnych, poświęcono zagadnieniom niestabilności poślizgu z tarciem i warunkom przy których niestabilność ta ma miejsce, por. Byerlee (1970), Dieterich (1978, 1979, 1981, 1983), Ruina (1980, 1983), Johnson i Scholz (1976). Zaproponowano również i przedyskutowano prawa tarcia z uwzględnieniem zależności współczynnika tarcia od prędkości i stanu, por. Dieterich (1972, 1978, 1979, 1980, 1981, 1983), Ruina (1980, 1983), Rice i Ruina (1983), Rice i Gu (1983), Gu, Rice, Ruina i Tse (1984), Gu (1984/85), Nussbaum i Ruina (1987).

2.1. Tarcie. Wyniki laboratoryjne

Można wyróżnić trzy główne źródła danych doświadczalnych dotyczących tarcia materiałów skalnych. Pierwsze związane jest z inżynierią lądową, drugie z inżynierią górniczą a trzecie źródło stanowi literatura geofizyczna. W pierwszym przypadku chodzi głównie o tarcie skał z uwagi na budowę tam, zapór, szos, nasypów, itp.; ciśnienie rzadko przekracza wówczas 50 barów. Z kolei inżynieria górnicza jest zainteresowana zagadnieniami tarcia skał przy uwzględnieniu naprężeń normalnych dochodzących do 1000 barów. Natomiast geofizycy są głównie zainteresowani tarciem na dużych głębokościach Ziemi. Najsilniejsze trzęsienia Ziemi występują na głębokościach do 50 km w strefach subdukcji. Głębokie ogniska trzęsień Ziemi sięgają nieraz do głębokości 700 km, lecz wstrząsy głębokie są zwykle mniej niszczące. Panujące na takiej głębokości ciśnienie jest nie do zrealizowania w warunkach laboratoryjnych. Dla zagadnień z tarciem granica normalnego naprężenia wynosi około 15 kbarów. Taka wielkość ciśnienia jest wystarczająca aby symulować ciśnienie dla trzęsień w górnym płaszczu Ziemi.

Poniżej przedstawimy kilka rezultatów dotyczących badań zjawiska tarcia wewnętrznego skał pod różnymi ciśnieniami w warunkach laboratoryjnych.

Rys. 11 pokazuje zależność naprężeń stycznych od naprężeń normalnych, przy czym te ostatnie nie przekraczają 50 barów. Przedstawione poniżej dane pochodzą z prac: Bartona (1973), Jaegera i Cooka (1973) oraz Lane'a i Hecka (1973); wspomniany rysunek pochodzi z pracy Byerlee (1978). Linia prosta $\tau = 0.85\sigma_n$ jest otrzymana dla ciśnienia pośredniego i została narysowana jedynie dla

porównania. Widoczne jest duże rozproszenie danych doświadczalnych, współczynniki tarcia zmieniają się tu w granicach od 0.3 aż do 10.

Następny rysunek, czyli rys. 12, prezentuje dane dotyczące tarcia początkowego przy naprężeniach normalnych dochodzących do 1000 barów. Wszystkie dane leżą poniżej wykresu porównawczego $\tau = 0.85\sigma_n$.

Rys. 13 przedstawia dane dla tarcia maksymalnego. Mają one mniejsze rozproszenie i mogą być aproksymowane funkcją liniową $\tau = 0.85\sigma_n$.

Następne dwa wykresy, przedstawione na rys. 14 i rys. 15, pokazują dane dla tarcia odpowiednio początkowego i maksymalnego przy dużych ciśnieniach. Rys. 12 przedstawia rezultaty dla tarcia początkowego uzyskane w doświadczeniach wykonywanych przy ciśnieniu nie przekraczającym 7 kbarów. Na rys. 15 pokazano tarcie maksymalne dla licznej grupy skał przy ciśnieniu dochodzącym aż do 17 kbarów.

Niektórzy autorzy proponują dokonanie następującej aproksymacji rezultatów pokazanych na rys. 15 liniami prostymi, por. Byerlee (1978)

$$\tau = \begin{cases} 0.85\sigma_n, & \text{dla } \sigma_n < 2 \text{ kb,} \\ 0.5 + 0.65\sigma_n, & \text{dla } 2\text{kb} < \sigma_n < 20\text{kb} \end{cases}$$

Wyniki badań doświadczalnych pozwalają przypuszczać, że przy dużych ciśnieniach współczynnik tarcia jest prawie niezależny od typu skały, temperatury, prędkości poślizgu, obecności wody a także charakteru powierzchni kontaktowych. Wyniki te sugerują, iż w warunkach jakie zachodzą w płaszczu Ziemi naprężenia potrzebne do wywołania poślizgu jednego masywu skalnego po drugim wynoszą kilka kilobarów. Z drugiej strony sejsmologia pokazuje, że uskoki są słabe i poruszają się już przy naprężeniu ok. 100 barów. Kontrowersja ta jest obecnie przedmiotem badań sejsmologów.

Zjawisko tarcia skał w warunkach wilgotnych i porównanie z tarciem suchym było przedmiotem pracy Dietericha i Conrada (1984). Podczas gdy w doświadczeniu wykonanym w warunkach suchych współczynnik tarcia mieści się w granicach 0.85 – 1.0, to w warunkach wilgotnych współczynnik ten maleje i znajduje się w granicach 0.55 – 0.65. Odpowiednie doświadczenie przeprowadzono na próbkach: granitu (Westerly granite), pojedynczego kryształu kwarcu i kwarcytu Eureka. Warunki suche osiągnięto przez ogrzanie próbki do temperatury 300°C w atmosferze suchego argonu ($\text{H}_2\text{O} < 1\text{ppm}$, ppm = per part million) przez blisko 16 godz.

2.2. Modelowanie tarcia przy pomocy parametrów wewnętrznych

Laboratoryjne pomiary wykonywane od początku lat siedemdziesiątych pokazują, że związki konstytutywne opisujące tarcie skał o siebie zależą nie tylko od naprężenia normalnego lecz także od prędkości poślizgu i stanu strefy uskoku, czyli powierzchni kontaktu, por. Dieterich (1979, 1981).

Pierwsze prace dotyczące modelowania tarcia na uskockach geologicznych należą do Dietericha (1972, 1978, 1979, 1981). Wyniki te były potem rozwijane przez niego samego (1979, 1981), a także w pracach Ruiny (1980), Rice'a i Ruiny (1983), Gu, Rice, Ruiny i Tse (1984).

Dieterich (1978) na podstawie wyników doświadczalnych oraz na podstawie swoich wcześniejszych prac wskazał na zależność współczynnika tarcia od czasu, prędkości i osłabienia przemieszczeniowego (displacement weakening effect). Zaproponował on następujące prawo dla zależności współczynnika tarcia μ od czasu

$$\mu = \mu_0 + A \log[Bt + 1]. \quad (1)$$

Jak zwykle μ jest współczynnikiem tarcia danym stosunkiem naprężenia stycznego τ do naprężenia normalnego σ , $\mu = \frac{\tau}{\sigma}$, t oznacza czas kontaktu mierzony w sekundach; μ_0 , A , B są stałymi takimi, że $0.6 \leq \mu_0 \leq 0.8$, $0.01 \leq A \leq 0.02$ oraz $1.0 \leq B \leq 2.0$.

Pomiary tarcia przy różnych prędkościach poślizgu wykazują podobną zależność od prędkości

$$\mu = \mu_0 + A \log\left[B \frac{d_c}{V} + 1\right], \quad (2)$$

gdzie d_c jest doświadczalnym przemieszczeniem, na którym współczynnik tarcia maleje od wartości statycznej do wartości poślizgowej, zaś V jest prędkością poślizgu. W doświadczeniu Dietericha przemieszczenia i prędkości były mierzone w cm i cm/sek.

Z zależności (2) widać, że współczynnik tarcia maleje wraz ze wzrostem prędkości poślizgu V . Zastępując t przez d_c/V wnioskujemy, że (1) i (2) są identycznymi formułami o ile odpowiednie współczynniki są identyczne.

Zauważmy, że zarówno eksperyment jak i podane zależności dotyczą zagadnienia jednowymiarowego.

Tullis i Weeks (1986) badali zagadnienie opisu stabilności poślizgu z tarciami na próbkach z granitu (Westerly granite). Eksperyment był prowadzony przy użyciu aparatury obrotowej i wysokociśnieniowej, w warunkach temperatury pokojowej i przy normalnym naprężeniu w granicach 27 - 84 MPa.

Autorzy ci otrzymali kilka nowych interesujących wyników. Po poślizgu na

dystansie między 18 a 70 mm utworzyła się warstwa sypka (gouge layer) o grubości 100 do 200 μm . Ustalona siła tarcia została osiągnięta po ok. 10mm poślizgu i jest ona proporcjonalna do ujemnego logarytmu prędkości poślizgu. Nagłe zmiany prędkości poślizgu prowadzą do zmiany siły tarcia tego samego znaku co zmiana prędkości. Zachodzi przy tym stopniowe zmniejszanie współczynnika tarcia do nowej ustalonej wartości na charakterystycznym dystansie poślizgu d_c por wzór (6).

Wyniki te dają się dobrze opisać przy pomocy prawa tarcia typu Rice'a-Ruiny z dwoma parametrami stanu. Zaproponowano tam również jednoparametrową aproksymację.

Wartości współczynnika tarcia w ostatnim eksperymencie mieściły się w granicach od 0.57 do 0.70, zależnie od prędkości poślizgu i całkowitego przemieszczenia.

Ruina (1980, 1983, 1985) oraz Rice i Ruina (1983) uogólnili opis tarcia zaproponowany przez Dietericha. Rice i Ruina (1983) przyjmują następujący związek

$$\mu = \mu_0 + \vartheta + A \ln \left[\frac{V}{V_c} \right], \quad (3)$$

gdzie μ_0 , A oraz V_c są stałymi materiałowymi, zaś ϑ jest parametrem stanu o prawie ewolucji

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{V}{d} \left[\vartheta + B \ln \frac{V}{V_c} \right]. \quad (4)$$

B jest dodatkową stałą materiałową.

Gdy $A - B < 0$ wówczas możliwa jest niestabilność poślizgu, w przypadku gdy

$A - B > 0$ poślizg jest stabilny (Ruina, 1983; Blanpied, Tullis i Weeks, 1987).

W literaturze spotyka się zazwyczaj opisy tarcia z jednym lub dwoma parametrami stanu (ϑ_1, ϑ_2). W przypadku n parametrów mamy następujące zależności:

$$\frac{\tau}{\sigma} = \mu = \mu_0 + \vartheta_1 + \dots + \vartheta_n + A \ln \frac{V}{V_c}. \quad (5)$$

$$\frac{d\vartheta_p}{dt} = -\frac{V}{d} \left[\vartheta_p + B \ln \frac{V}{V_c} \right], \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

W przypadku prawa tarcia z jednym parametrem stanu wielkość ϑ jest interpretowana jako czas kontaktu chropowatości (asperity contact time), por. Dieterich (1978).

Jeszcze ogólniejsze prawo ewolucji parametrów wewnętrznych ma postać

$$\frac{d\vartheta_p}{dt} = D \ln \frac{V}{V_c} + f_p(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n), \quad p = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Model opracowany przez Ruinę (1980) oraz Rice'a i Ruinę (1983) jest bardziej

adekwatny niż wcześniejsze modele Dietericha (1979). Jednakże model ten nie opisuje wielu obserwacji i nie jest dość zrozumiały w skali mikroskopowej.

Zagadnienia dotyczące modelowania zjawiska tarcia na uskokach oraz badania doświadczalne rozwinęły się głównie w ostatnim dwudziestoleciu, por. Lajtai (1989), Rundle (1988, 1989, 1991), Byerlee (1967, 1970, 1978), Brace i Byerlee (1966), Wong (1982), Blanpied, Tullis i Weeks (1987), Tullis i Weeks (1986), Tullis (1986, 1988), Brosch (1990), Bro (1992), Wohua i Valliappan (1990), Rudnicki (1988), Dieterich (1992), Kilgore, Blanpied i Dieterich (1993), Rice (1993).

Krytyczną analizę podejścia, opartego na teorii z parametrami wewnętrznymi, przedstawili w swoich pracach Rundle (1998, 1989), Rundle i Brown (1991) oraz Rundle i Turcotte (1992). Zaproponowali oni pewne uproszczone podejście oparte na wcześniejszych modelach Burrigge'a i Knopoffa (1967), a związanych z modną obecnie teorią automatów komórkowych (cellular automata, self-organized criticality). W tym samym duchu, choć idąca nieco dalej pod względem ogólności rozważań jest praca Senatorskiego (1993). Jednakże ten rodzaj rozważań nie uwzględnia, naszym zdaniem, istotnej roli tarcia.

Warto również odnotować próby numerycznej analizy oddziaływań w strefach uskoków, por. Burrigge, Moon (1981), Virieux i Madariaga (1982), Nemat-Nasser i Rowshandel (1986), Rice (1992), Ben-Zion i Rice (1993).

3. Nowy opis tarcia

Poprzednio omówione opisy tarcia ograniczają się do modelowania zmian współczynnika tarcia w przypadku jednowymiarowym. Obecnie podamy warunki i prawa tarcia nawiązujące do współczesnej mechaniki kontaktu, por. Moreau, Panagiotopoulos, (1988). W tym punkcie pracy ograniczamy się do modelowania jednej sekwencji poślizgu (one-slip sequence).

Niech Ω^a ($a = 1, 2$) będą obszarami w przestrzeni \mathbb{R}^3 zajmowanymi przez dwa ciała liniowo sprężyste \mathfrak{B}_a^1 . Brzeg obszaru Ω^a oznaczamy przez Γ^a . Zakładamy, że oba ciała są utwierdzone na częściach brzegu Γ_0^a , zaś na Γ_1^a dane są obciążenia. Powierzchnią kontaktu jest $\Gamma_2 = \Gamma_2^1 = \Gamma_2^2$. Niech $\mathbf{N}^{(a)} = (N_{ij}^{(a)})$ oznacza normalny wektor jednostkowy skierowany na zewnątrz obszaru Ω^a . Na powierzchni kontaktu Γ_2 przyjmujemy $\mathbf{N} = \mathbf{N}^{(2)} = -\mathbf{N}^{(1)}$. Niech $\sigma^{(a)} = (\sigma_{ij}^{(a)})$ ($i, j = 1, 2, 3$) będzie tensorem naprężenia w ciele \mathfrak{B}_a^1 , $\mathbf{u}^{(a)} = (u_i^{(a)})$ wektorem przemieszczenia tego ciała,

$\sigma_N^{(a)} = \sigma_{ij}^{(a)} N_i^{(a)} N_j^{(a)}$ jest składową normalną wektora naprężenia, $\sigma_T^{(a)} = (\sigma_{ij}^{(a)} N_j^{(a)})$

$-\sigma_N^{(a)} \mathbf{N}^{(a)}$; $[\mathbf{u}_T] = \mathbf{u}_T^{(1)} - \mathbf{u}_T^{(2)}$ oznacza skok składowej stycznej wektora przemieszczenia. Podobnie $[\mathbf{u}_N]$ oznacza skok składowej normalnej wektora przemieszczenia. Zgodnie z zasadą akcji i reakcji wektor naprężeń stycznych $\underline{\sigma}_T$ ma postać $\underline{\sigma}_T = \underline{\sigma}_T^{(1)} = -\underline{\sigma}_T^{(2)}$.

Warunek tarcia przyjmujemy w postaci (Telega 1987, 1990; Bielski i Telega 1990)

$$f(\sigma_N, \underline{\sigma}_T, [\mathbf{u}_T]) \leq 0, \quad (8)$$

gdzie f jest funkcją ciągłą.

Dla ustalonego $(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])$ wprowadźmy zbiór $K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])$ dopuszczalnych naprężeń stycznych zdefiniowany następująco

$$K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T]) = \left\{ \underline{\tau} \mid f(\sigma_N, \underline{\tau}, [\mathbf{u}_T]) \leq 0, \underline{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \Gamma_2 \right\}. \quad (9)$$

Zakładamy, że $K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])$ jest zbiorem wypukłym i domkniętym.

W przypadku jednej sekwencji poślizgu proponujemy następujące subróżniczkowe prawo tarcia, które w ogólności może być anizotropowe:

$$[\dot{\mathbf{u}}_T] \in \partial I_{K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])}(\underline{\sigma}_T), \quad (10)$$

gdzie $I_{K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])}$ jest funkcją indykatorową zbioru $K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])$ czyli, por.

Dodatek A:

$$I_{K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])}(\underline{\tau}) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \underline{\tau} \in K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T]), \\ \infty, & \text{jeśli } \underline{\tau} \notin K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T]). \end{cases} \quad (11)$$

Gęstość dysypacji tarcia przedstawia funkcja podpierająca (support function) zbioru $K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])$

$$\begin{aligned} D(\sigma_N, [\mathbf{u}_T], \mathbf{v}) &= \sup \left\{ \mathbf{v} \cdot \underline{\tau} - I_{K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])}(\underline{\tau}) \right\} = \\ &= \sup \left\{ \mathbf{v} \cdot \underline{\tau} \mid \underline{\tau} \in K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T]) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Elementarne rozważania z zakresu analizy wypukłej prowadzą do zależności, por. Rockafellar (1970)

$$D(\sigma_N, [\mathbf{u}_T], [\dot{\mathbf{u}}_T]) = [\dot{\mathbf{u}}_T] \cdot \underline{\sigma}_T. \quad (13)$$

Zachodzi przy tym następująca równoważność

$$[\dot{\mathbf{u}}_T] \in \partial I_{K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])}(\underline{\sigma}_T) \Leftrightarrow (14) \Leftrightarrow \underline{\sigma}_T \in \partial_3 D(\sigma_N, [\mathbf{u}_T], [\dot{\mathbf{u}}_T]), \quad (14)$$

gdzie $\partial_3 D$ oznacza subróżniczkę funkcji D względem trzeciego argumentu. Względem tego właśnie argumentu funkcja ta jest funkcją jednorodną rzędu 1, wypukłą i dolnie półciągłą.

Przykład.

Przyjmijmy warunek tarcia typu prawa Coulomba,

$$f(\sigma_N, \sigma_T, [\mathbf{u}_T]) = |\sigma_T| - \mu([\mathbf{u}_T])\sigma_N \leq 0,$$

$$\text{gdzie } |\sigma_T|^2 = \sigma_{T1}\sigma_{T1}.$$

Wówczas gęstość dyssypacji tarcia ma postać

$$D(\sigma_N, [\mathbf{u}_T], [\dot{\mathbf{u}}_T]) = |[\dot{\mathbf{u}}_T]| |\sigma_T| = \mu([\mathbf{u}_T])|\sigma_N| |[\dot{\mathbf{u}}_T]|.$$

4. Kontakt dwóch ciał liniowo-sprężystych. Powierzchnia kontaktu jako powierzchnia uskoku

Problem początkowo-brzegowy z tarcieniem na uskokach przedstawimy jako zagadnienie kontaktowe dwóch ciał sprężystych, przy czym powierzchnia kontaktu modeluje powierzchnię uskoku. W niniejszym opracowaniu pomijamy warunki typu Signorini'ego; oznacza to, iż w kierunku normalnym powierzchni kontaktu nie oddalają się od siebie, czyli $[u_N] = 0$ oraz $[\dot{u}_N] = 0$ na Γ_2 . W obecnym punkcie zakładamy, iż prawo tarcia ma postać (10).

Dla prostoty zapisu wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}), \mathbf{F} = (\mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}), \mathbf{B} = (\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)}).$$

gdzie $\mathbf{u}^{(a)}(x)$ ($x \in \Omega^a$) jest wektorem przemieszczenia; $\mathbf{B}^{(a)}$ i $\mathbf{F}^{(a)}$ są, odpowiednio, obciążeniami masowymi i powierzchniowymi mogącymi zmieniać się w

$$\text{czasie; ponadto niech } \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^{(a)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{k,l}^{(a)} + \mathbf{u}_{l,k}^{(a)}).$$

W poniższych rozważaniach nie stosujemy konwencji sumacyjnej do powtarzających się wskaźników a ($a = 1, 2$).

Możemy teraz przejść do *sformułowania silnego* (czyli klasycznego):

Znaleźć $\mathbf{u}^{(a)} = \mathbf{u}^{(a)}(x, t)$ ($a = 1, 2$) takie, że

$$\sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{u}^{(a)}) + B_i^{(a)} = \rho^{(a)} \ddot{u}_i^{(a)} \quad \text{w } \Omega^a \times (0, T), \quad (15)$$

$$\sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{u}^{(a)}) = a_{ijkl}^{(a)} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^{(a)}), \quad (16)$$

$$\mathbf{u}^{(a)}(x, t) = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_0^a \times (0, T), \quad (17)$$

$$\sigma_{ij}^{(a)} N_j^{(a)} = F_i^{(a)} \quad \text{na } \Gamma_1^a \times (0, T), \quad (18)$$

$$[\dot{\mathbf{u}}_T] \in \partial I_{K(\sigma_N, [\mathbf{u}_T])}(\sigma_T) \text{ na } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (19)$$

$$\mathbf{u}^{(a)}(x, 0) = \mathbf{u}_0^{(a)}(x) \quad \text{dla } x \in \Omega^a. \quad (20)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(a)}(x, 0) = \dot{\mathbf{u}}_1^{(a)}(x) \quad \text{dla } x \in \Omega^a. \quad (21)$$

Funkcje $\mathbf{u}_0^{(a)}$, $\mathbf{u}_1^{(a)}$ są zadane; ponadto $T > 0$. Przejdźmy do sformułowania wariacyjnego, czyli słabego. Przyjmujemy, że $B_i^{(a)} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^a))$,

$F_i^{(a)} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1^a))$, oraz $\rho^a \in L^\infty(\Omega^a)$. Ponadto przyjmujemy, że $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$, oraz, że macierz (a_{ijkl}) spełnia warunek eliptyczności, tj. $a_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq \lambda \xi_{ij} \xi_{ij}$, dla pewnej liczby $\lambda > 0$ i dla dowolnej symetrycznej macierzy (ξ_{ij}) .

Sformułowania wariacyjne stanowią punkt wyjścia do obliczeń numerycznych, np. przy pomocy metody elementów skończonych. W celu otrzymania sformułowania wariacyjnego problemu brzegowo-początkowego (15) - (21) mnożymy obie strony równania (15) przez $\mathbf{v}^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}^{(a)}$, gdzie $\mathbf{v}^{(a)} \in \mathfrak{H}_a = \{\mathbf{u}^{(a)} \in H^1(\Omega^a; \mathbb{R}^3) \mid \mathbf{u}^{(a)} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_0^a\}$.

Całkując otrzymane wyrażenie po obszarze Ω^a otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^a} \sigma_{ij,j}^{(a)}(\mathbf{v}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}_i^{(a)}) dx + \int_{\Omega^a} B_i^{(a)}(\mathbf{v}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}_i^{(a)}) dx &= \\ &= \int_{\Omega^a} \rho^{(a)} \ddot{\mathbf{u}}_i^{(a)}(\mathbf{v}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}_i^{(a)}) dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Po prostych przekształceniach dostajemy

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega^a} \sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{v}_{i,j}^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}_{i,j}^{(a)}) dx + \int_{\partial\Omega^a} \sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{v}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}_i^{(a)}) N_j^{(a)} d\Gamma &= \\ &+ \int_{\Omega^a} B_i^{(a)}(\mathbf{v}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}_i^{(a)}) dx = \int_{\Omega^a} \rho^{(a)} \ddot{\mathbf{u}}_i^{(a)}(\mathbf{v}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}_i^{(a)}) dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Uwzględniając związek konstytutywny (16), pierwszą całkę we wzorze (23) zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^a} \sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{u}^{(a)})(\mathbf{v}_{i,j}^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}_{i,j}^{(a)}) dx &= \int_{\Omega^a} a_{ijkl}^{(a)} \mathbf{u}_{k,l}^{(a)}(\mathbf{v}_{i,j}^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}_{i,j}^{(a)}) dx = \\ &= \bar{a}^{(a)}(\mathbf{u}^{(a)}, \mathbf{v}^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}^{(a)}). \end{aligned} \quad (24)$$

Całkę po brzegu obszaru Ω^a przestawimy w postaci

$$\int_{\partial\Omega^a} \sigma_{ij}^{(a)}(v_i^{(a)} \cdot \dot{u}_i^{(a)}) N_j^{(a)} d\Gamma = \int_{\Gamma_1^a} F_i^{(a)}(v_i^{(a)} \cdot \dot{u}_i^{(a)}) N_j^{(a)} d\Gamma + \int_{\Gamma_2^a} \sigma_{ij}^{(a)}(v_i^{(a)} \cdot \dot{u}_i^{(a)}) N_j^{(a)} d\Gamma. \quad (25)$$

Korzystając z zależności

$$\int_{\Gamma_2^a} \sigma_{ij}^{(a)} v_i^{(a)} N_j^{(a)} d\Gamma = \int_{\Gamma_2^a} \sigma_T^{(a)} \cdot v_T^{(a)} d\Gamma + \int_{\Gamma_2^a} \sigma_N^{(a)} v_N^{(a)} d\Gamma, \quad (26)$$

oraz przyjmując oznaczenia

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{a=1}^2 \left(\int_{\Omega^a} B_i^{(a)} u_i^{(a)} dx + \int_{\Gamma_1^a} F_i^{(a)} u_i^{(a)} dx \right), \quad (27)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{a=1}^2 a^{(a)}(\mathbf{u}^{(a)}, \mathbf{v}^{(a)}), \quad (28)$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2,$$

otrzymujemy następujące wariacyjne sformułowanie problemu (15) - (21).

Zadanie P_d

Znaleźć $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) \in BS(0, T; \mathfrak{H})$, takie, że

$$\sum_{a=1}^2 (\rho^{(a)} \ddot{\mathbf{u}}^{(a)}(t), \mathbf{v}^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}^{(a)}(t)) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + \int_{\Gamma_2^a} D(\sigma_N(t), [\mathbf{u}_T(t)], [\mathbf{v}_T]) d\Gamma - \int_{\Gamma_2^a} D(\sigma_N(t), [\mathbf{u}_T(t)], [\dot{\mathbf{u}}_T(t)]) d\Gamma \geq \geq L(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)), \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{H}, t \in [0, T] \quad (29)$$

$$\mathbf{u}^{(a)}(x, 0) = \mathbf{u}_0^{(a)}(x), \quad (29a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(a)}(x, 0) = \mathbf{u}_1^{(a)}(x). \quad (29b)$$

Mamy tutaj $\mathbf{u}_0^{(a)} \in [H^1(\Omega^a)]^3$, $\mathbf{u}_1^{(a)} \in L^2(\Omega^a)$, przy czym warunek (29a) ma sens, por. Lions (1969) natomiast warunek (29b) jest rozumiany w sensie Moreau (1988b), por. też Dodatek B. Przypomnijmy, iż $D(\sigma_N, [\mathbf{u}_T], [\dot{\mathbf{u}}_T])$ oznacza gęstość

dysypacji związanej z tarcieniem oraz $[[u_N]] = 0$, $[[\dot{u}_N]] = 0$ na Γ_2 . Wprowadziliśmy następujące oznaczenie: $\mathbf{u}^{(a)}(t) = [\mathbf{u}^{(a)}(x,t) \mid x \in \Omega^a]$, por. Duvaut i Lions (1976).

Przestrzeń $BS(0,T;\mathfrak{H})$ została zdefiniowana w Dodatku B. Zwróćmy uwagę na fakt, iż w zadaniu (P_d) pole prędkości może być *nieciągłe* względem czasu; przyspieszenie jest wówczas elementem przestrzeni $L^1(0,T;[H^1(\Omega)]^3)$, por. Moreau (1988b).

Przejdźmy do zagadnienia quasistatycznego. Jako przestrzeń kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeń przyjmiemy, por. Andersson (1989a, 1989b), Telega (1990) i Dodatek B

$$\mathbf{u}^{(a)} \in BV(0,T; \mathfrak{H}_a), \quad a = 1,2.$$

Pomijając zatem człony inercyjne $\rho^{(a)}\ddot{\mathbf{u}}^{(a)}$ i warunek początkowy dla prędkości dochodzimy do następującego sformułowania wariacyjnego.

Zadanie P_k

Znaleźć pole przemieszczeń $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) \in BV(0,T;\mathfrak{H})$, takie, że

$$a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + \int_{\Gamma_2} D(\sigma_N(t), [\mathbf{u}_T(t)], [\mathbf{v}_T]) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} D(\sigma_N(t), [\mathbf{u}_T(t)], [[\dot{\mathbf{u}}_T(t)]]) d\Gamma \geq L(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{H}, t \in [0,T] \quad (30)$$

$$\mathbf{u}^{(a)}(x,0) = \mathbf{u}_0^{(a)}(x), \quad x \in \Omega^a. \quad (30a)$$

Z podanego sformułowania wynika, że pola przemieszczeń mogą być *nieciągłe* względem czasu; prędkości są wówczas elementami przestrzeni $L^1(0,T;[H^1(\Omega)]^3)$. Warunek początkowy (30a) należy rozumieć zgodnie z interpretacją Moreau (1988b), por. też Dodatek B.

5. Prawo tarcia z parametrami wewnętrznymi

5.1. Dieterich (1978) oraz Ruina (1980) podali warunek tarcia typu (5), tj.

$$\tau = \mu\sigma,$$

gdzie

$$\mu = \mu_0 + \hat{\nu}_1 + \dots + \hat{\nu}_n + \text{Aln } V/V_*.$$

Widać stąd, że istotna modyfikacja polega na złożoności współczynnika tarcia, który zależy od prędkości poślizgu V i parametrów wewnętrznych $\hat{\nu}_p$ ($p = 1,2,\dots,n$), por. Rabinowitz (1965), Rice (1983), Ruina (1983), Rybicki (1986).

Zarówno Dieterich jak i Rice czy Ruina nie rozpatrzyli przypadku ogólnego jak i nie podali prawa tarcia (poślizgu). Podamy obecnie ogólny opis tarcia uwzględniający parametry wewnętrzne.

Bazując na przedstawionych wcześniej pracach doświadczalnych przyjmujemy warunek tarcia w następującej postaci:

$$f(\sigma_N, \underline{\sigma}_T, [\dot{\mathbf{u}}_T], \vartheta_p) \leq 0.$$

Dla ustalonego $(\sigma_N, [\mathbf{v}_T], \vartheta_p)$ zbiór dopuszczalnych naprężeń stycznych ma postać

$$K(\sigma_N, [\mathbf{v}_T], \vartheta_p) := \left\{ \tau \mid f(\sigma_N, \tau, [\mathbf{v}_T], \vartheta_p) \leq 0, \tau \cdot \mathbf{N} = 0 \text{ na } \Gamma_2 \right\}.$$

Podobnie jak poprzednio \mathbf{N} jest wektorem normalnym do powierzchni kontaktu (uskoku). Zakładamy, że zbiór $K(\sigma_N, [\mathbf{v}_T], \vartheta_p)$ jest zbiorem domkniętym i wypukłym.

Gęstość dysypacji pochodząca od tarcia ma obecnie postać

$$\begin{aligned} D(\sigma_N, \vartheta_p, [\dot{\mathbf{u}}_T], \mathbf{w}) &= \sup_{\tau} \{ \mathbf{w} \cdot \tau - I_{K(\sigma_N, [\mathbf{v}_T], \vartheta_p)}(\tau) \} = \\ &= \sup \{ \mathbf{w} \cdot \tau \mid \tau \in K(\sigma_N, [\mathbf{v}_T], \vartheta_p) \}. \end{aligned} \quad (31)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, iż względem czwartego argumentu funkcja dysypacji D jest funkcją dodatnio jednorodną rzędu 1, wypukłą i dolnie półciągłą.

Prawo tarcia przyjmiemy w postaci subrózniczkowej:

$$\underline{\sigma}_T \in \partial_4 D(\sigma_N, \vartheta_p, [\dot{\mathbf{u}}_T], [\dot{\mathbf{u}}_T]), \quad (32)$$

przy czym prawo ewolucji parametrów wewnętrznych opisuje równanie

$$\frac{d\vartheta}{dt} = G_p(\sigma_N, \vartheta_m, [\dot{\mathbf{u}}_T]), \quad m, p = 1, \dots, n. \quad (33)$$

Przyjmiemy, że funkcje G_p są ciągłe, choć założenie to można osłabić.

Przykład

Załóżmy, że warunek tarcia ma postać

$$f(\sigma_N, \underline{\sigma}_T, [\dot{\mathbf{u}}_T], \vartheta_p) = |\sigma_T| - \mu([\dot{\mathbf{u}}_T], \vartheta_p) \sigma_N \leq 0.$$

Mamy wówczas

$$D(\sigma_N, \vartheta_p, [\dot{\mathbf{u}}_T], [\dot{\mathbf{u}}_T]) = |\sigma_T| |[\dot{\mathbf{u}}_T]| = \mu([\dot{\mathbf{u}}_T], \vartheta_p) |\sigma_N| |[\dot{\mathbf{u}}_T]|.$$

5.2. Sformułowanie silne zagadnienia początkowo-brzegowego

Podobnie jak w punkcie 4 pracy podamy obecnie silne sformułowanie zagadnienia początkowo-brzegowego uwzględniając parametry stanu. Sformułowanie to brzmi:

znaleźć $\mathbf{u}^{(a)}(x,t)$, $((x,t) \in \Omega^a \times (0,T))$, oraz $\vartheta_p(x,t)$, $((x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T))$

takie, że

$$\sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{u}^{(a)}) + B_i^{(a)} = \rho^{(a)} u_i^{(a)} \quad \text{w } \Omega^a \times (0,T),$$

$$\sigma_{ij}^{(a)}(\mathbf{u}^{(a)}) = a_{ijkl}^{(a)} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^{(a)}), \quad \text{gdzie } \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{kl} + u_{lk})$$

$$\mathbf{u}^{(a)}(x,t) = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_0^a \times (0,T),$$

$$\sigma_{ij}^{(a)} \mathbf{N}_j^{(a)} = \mathbf{F}_i^{(a)} \quad \text{na } \Gamma_1^a \times (0,T),$$

$$\sigma_{-T} \in \partial_4 D(\sigma_N, \vartheta_m, [\dot{\mathbf{u}}_T], [\dot{\mathbf{v}}_T]) \quad \text{na } \Gamma_2 \times (0,T),$$

$$\dot{\vartheta}_p = \frac{d}{dt} \vartheta_p = G_p(\sigma_N, \vartheta_m, [\dot{\mathbf{u}}_T]), \quad m, p = 1, 2, \dots, n;$$

$$\mathbf{u}^{(a)}(x,0) = \mathbf{u}_0^{(a)}(x) \quad \text{dla } x \in \Omega^a,$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(a)}(x,0) = \mathbf{u}_1^{(a)}(x) \quad \text{dla } x \in \Omega^a,$$

$$\vartheta_p(x,0) = \vartheta_p^0(x) \quad \text{dla } x \in \Gamma_2, p = 1, \dots, n.$$

5.3. Przejdźmy do *sformułowania wariacyjnego*. Stosując procedurę identyczną jak w punkcie 4 dochodzimy do sformułowania słabego zagadnienia z poprzedniego podpunktu.

Zadanie P_{ϑ}

Znaleźć $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) \in BS(0,T;\mathfrak{X})$,

oraz $\vartheta_p \in C^1(0,T;L^2(\Gamma_2))$ ($p = 1, \dots, n$), takie, że

$$\sum_{a=1}^2 (\rho^{(a)} \dot{\mathbf{u}}^{(a)}(t), \mathbf{v}^{(a)} - \dot{\mathbf{u}}^{(a)}(t)) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + \int_{\Gamma_2} D(\sigma_N(t), \vartheta_p(t), [\dot{\mathbf{u}}_T(t)], [\dot{\mathbf{v}}_T]) d\Gamma -$$

$$- \int_{\Gamma_2} D(\sigma_N(t), \vartheta_p(t), [\dot{\mathbf{u}}_T(t)], [\dot{\mathbf{u}}_T(t)]) d\Gamma \geq L(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{X}, t \in [0,T] \quad (34)$$

$$\int_{\Gamma_2} (\dot{\vartheta}_p(t) - G_p(\sigma_N(t), \vartheta_m(t), [\dot{\mathbf{u}}_T(t)])) \eta_p d\Gamma = 0, \quad \forall \eta_p \in L^2(\Gamma_2), \quad (35)$$

$$\mathbf{u}^{(a)}(x,0) = \mathbf{u}_0^{(a)}(x) \quad \text{dla } x \in \Omega^a, \quad (36)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(a)}(x,0) = \mathbf{u}_1^{(a)}(x) \quad \text{dla } x \in \Omega^a, \quad (37)$$

$$\vartheta_p(x,0) = \vartheta_p^0(x) \quad x \in \Gamma_2, p = 1, 2, \dots, n. \quad (38)$$

Zakładamy, że $\vartheta_p^0 \in L^2(\Gamma_2)$ ($p = 1, \dots, n$) oraz $\mathbf{u}_0^{(a)}, \mathbf{u}_1^{(a)} \in \mathfrak{X}_a$ ($a = 1, 2$). Założenie

$\vartheta_p \in C^1(0,T;L^2(\Gamma_2))$ można osłabić. Jeżeli przyjmiemy, że $\vartheta_p \in BV(0,T;L^2(\Gamma_2))$,

wówczas prawo ewolucji (33) tych parametrów stanowi układ równań z nieciągłymi

prawymi stronami.

Podobnie jak w poprzednim przypadku można podać sformułowanie wariacyjne dla problemu quasistatycznego.

Zadanie P_q

Znaleźć $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) \in BV(0, T; \mathfrak{H})$,

oraz $\vartheta_p \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_2))$ ($p = 1, \dots, n$), takie, że

$$a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + \int_{\Gamma_2} D(\vartheta_p(t), \sigma_N(t), [\dot{\mathbf{u}}_T(t)], [\mathbf{v}_T]) d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_2} D(\vartheta_p(t), \sigma_N(t), [\dot{\mathbf{u}}_T(t)], [\dot{\mathbf{u}}_T(t)]) d\Gamma \geq L(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)), \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{H}, t \in [0, T]$$

$$\int_{\Gamma_2} (\dot{\vartheta}_p(t) - G_p(\sigma_N(t), \vartheta_m(t), [\dot{\mathbf{u}}_T(t)]) \eta_p) d\Gamma = 0, \forall \eta_p \in L^2(\Gamma_2), t \in [0, T]$$

$$\mathbf{u}^{(a)}(x, 0) = \mathbf{u}_0^{(a)}(x) \quad \text{dla } x \in \Omega^a.$$

$$\vartheta_p(x, 0) = \vartheta_p(x) \quad \text{dla } x \in \Gamma_2.$$

Funkcje $\mathbf{u}_0^{(a)} \in [H^1(\Omega^a)]^3$ i $\vartheta_p \in L^2(\Gamma_2)$, opisujące warunki początkowe, są zadane.

7. Wnioski i uwagi końcowe

Niniejsza praca stanowi pierwszą próbę pełniejszego opisu tarcia na uskokach geologicznych, w tym sensie, że uzupełniono warunki tarcia prawami tarcia. Istniejące przy tym w literaturze modele są ograniczone do przypadku jednowymiarowego modelu tarcia. Zaproponowane przez nas podejście nie jest ograniczone do przypadku jednowymiarowego i uwzględnia anizotropię tarcia, por. Telega (1987, 1988, 1990), Zmitrowicz (1987, 1989), He i Cumier (1993).

Zjawisko adhezja-poślizg (stick-slip) stanowi ważną dziedzinę badań mechaniki kontaktu. Nieco inne spojrzenie na ten problem, inspirowane podejściem numerycznym, przedstawili w swojej pracy Martins, Oden i Simões (1990).

Jak pokazują badania doświadczalne, uskok geologiczny stanowi "cienka" warstwa (gouge) znajdująca się pomiędzy blokami skalnymi. Wynika stąd, że w modelowaniu tarcia na uskokach powinno się uwzględnić koncepcję "trzeciego ciała", wprowadzoną w trybologii, por. Godet (1984), Berthier (1990), Alexeyev (1990), Zmitrowicz (1987, 1989).

Naturalne byłoby również fraktalowe modelowanie nierówności na powierzchniach uskoku, por. Panagiotopoulos (1992), Majumdar-Bhushan (1992), Majumdar-Tien (1990).

W dalszych badaniach należałoby zwrócić uwagę na rolę występowania wody w górotworze. Jak wykazują badania obecność wody w górotworze wpływa na szybszy rozwój szczelin i ogólnie na zniszczenie w górotworze i trzęsienia Ziemi (Bernstein, 1983; Dieterich, Conrad 1984).

Poszukiwanie rozwiązań analitycznych i numerycznych dla zaproponowanych przez nas modeli stanowi problem całkowicie otwarty, por. Jaeger (1994), Zhong i Mackerle (1994).

Podziękowanie. Pierwotna wersja pracy została wykonana w ramach projektu badawczego finansowanego przez KBN, projekt Nr 300199101. Wersja aktualna została częściowo sfinansowana w ramach projektu badawczego Nr 3 P404 013 06 przyznanego przez Komitet Badań Naukowych.

Pierwszy z autorów wyraża podziękowanie dr Renacie Dmowskiej z Harvard University za dyskusję.

Literatura

Adams R., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

Alexeyev N.M., On the motion of material in the border layer in solid state friction, *Wear*, **136**, 33-48, 1990.

Andersson L-A., A global existence result for a quasistatic contact problem with friction, May 1989. Linköping University, preprint.

Andersson L-A., A quasistatic frictional problem with normal compliance. *Nonlinear Analysis, TMA*, **16**, 347-369, 1991.

Barton M., Review of a new shear strength criterion for rock joints, *Eng. Geol.*, **7**, 287-332, 1973.

Ben-Zion Y., Rice J.R., Earthquake failure sequences along a cellular fault zone in a three-dimensional elastic solid containing asperity and nonasperity regions, *J. Geophys. Res.*, **98**, 14109-14131, 1993.

Bernstein W.A., *Miechano-Gidroliticheskiye Processy i Procznost Twiordych Tiel*, Leningrad, 1983.

Berthier Y., Experimental evidence for friction and wear modelling, *Wear*, **139**, 77-92, 1990.

Bielski W.R., Telega J.J., Friction and faulting: from experimental results to variational approach, in: *Unilateral Contact and Dry Friction*, *Euromech 273*, La Grande Motte, May 29th - June 1st 1990.

- Blanpied M.L., Tullis T.E., Weeks J.D., Frictional behavior of granite at low and high sliding velocities, *Geophys. Res. Lett.*, **14**, 554-557, 1987.
- Brace W.F., Byerlee, J.D., Stick slip as a mechanism for earthquakes, *Science*, **153**, 990-992, 1966.
- Brézis H., *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- Bro A., Stick-slip behaviour of smooth joints, *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.* **29**, 171-177, 1992.
- Brosch F.J., Anisotropy of dilatation, 3-D stress state and the talobre friction cone, *Rock Mech. Rock Engn.*, **23**, 113 - 121, 1990.
- Burridge R., Knopoff L., Model and theoretical seismicity, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **57**, 341-371, 1967.
- Burridge R., Moon R., Slipping on a frictional fault plane in three dimensions: a numerical simulation of a scalar analogue, *Geophys. J. Astr. Soc.*, **67**, 325-342, 1981.
- Byerlee J.D., Frictional characteristics of granite under high confining pressure, *J. Geophys. Res.*, **72**, 3639-3648, 1967.
- Byerlee J.D., The mechanics of stick slip, *Tectonophysics*, **9**, 475-486, 1970.
- Byerlee J.D., Friction of rocks, *Pageoph.*, **116**, 615-626, 1978.
- Dieterich J.H., Time dependent friction in rocks, *J. Geophys. Res.*, **77**, 3690-3697, 1972.
- Dieterich J.H., Time-dependent friction and the mechanics of stick slip, *Pure Appl. Geophys.*, **116**, 790-806, 1978.
- Dieterich J.H., Modelling of rock friction: 1. Experimental results and constitutive equations, *J. Geophys. Res.*, **84**, 2161-2168, 1979.
- Dieterich J.H., Modelling of rock friction: 2. Simulation of preseismic slip, *J. Geophys. Res.*, **84**, 2169-2175, 1979.
- Dieterich J.H., Constitutive properties of faults with simulated gouge, w: *Mechanical Behavior of Crystal Rocks*, N.L. Carter, M. Friedman, J.M. Logan, D.W. Stearns (red) *Geophys. Monogr. Ser.*, No. 24, Amer. Geophys. Union. ss. 103-120, 1981.
- Dieterich J.H., Conrad G., Effect of humidity on time- and velocity-dependent friction in rocks, *J. Geophys. Res.*, **89**, 4196-4202, 1984.
- Dieterich J.H., Earthquake nucleation on faults with rate- and state-dependent strength, *Tectonophysics*, **211**, 115-134, 1992.
- Duvaut G., Lions J.-L., *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- Ekeland I., Temam R., *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland,

Amsterdam, 1977.

Godet M., The third body approach. A mechanical view of wear, *Wear*, **100**, 437-452, 1984.

Gu J.-C., Rice, J.R., Ruina, A.L., Tse, S.T., Slip motion and stability of a single degree of freedom elastic system with rate and state dependent friction, *J.Mech.Phys. Solids*, **32**, 167-196, 1984.

Gu J. C., Frictional resistance to accelerating slip, *Pure Appl. Geophys.*, **122**, 662-679, 1984/85.

He Q.-C., Curnier A., Anisotropic dry friction between two orthotropic surfaces undergoing large displacements, *Eur. J. Mech.*, **12**, 631-666, 1993.

Ioffe A.D., Tihomirov V.M., *Theory of Extremal Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

Jaeger J.C., Cook M.G.W., *Fundamentals of Rock Mechanics*, 1973.

Jaeger J., Analytical solutions of contact impact problems, *Appl. Mech. Reviews*, **2**, **47**, 35-54, 1994.

Jaroszewski W., *Fault and Fold Tectonics*, PWN, Warszawa; Ellis Horwood, Chichester, 1984.

Johnson T., Scholz C.H., Dynamic properties of stick-slip friction of rocks, *J. Geophys. Res.*, **81**, 881-888, 1976.

Kilgore B.D., M.L. Blanpied, Dieterich J. H., Velocity dependent friction of granite over a wide range of conditions, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 903-906, 1993.

Lajtai E.Z., Gadi A.M., Friction on a granite to granite interface, *Rock Mech. and Rock Eng.*, **22**, 25-49, 1989.

Lane K.S., Heck W.J., Triaxial testing for strength of rock joints, *Proc. 6th Symp. Rock Mech. Rolla*, ss.98-108, 1964.

Lions J.-L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris 1963.

Martins J.A.C., Oden J.T., Simões F.M.F., A study of static and kinetic friction, *Int. J. Engng. Sci.*, **28**, 29-92, 1990.

Majumdar A., Bhushan B., Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces, *J. Tribology*, **113**, 1-11, 1991.

Majumdar A., Tien C.L., Fractal characterization and simulation of rough surfaces, *Wear*, **136**, 313-327, 1990.

Moreau J.J., Panagiotopoulos P.D. (red.) *Nonsmooth Mechanics and Applications*, Springer-Verlag, Wien-New York, 1988a.

Moreau J.J., Bounded variation in time, w: *Topics in Nonsmooth Mechanics*, J.J.Moreau, P.D.Panagiotopoulos, G. Strang (red.), Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1988b, s.1-74.

- Nikołaeuskij W.N., *Miechanika Geomatieriałow i Ziemiętriasenija*, w: *Itogi Nauki i Tiechniki*, ser. *Miechanika Deformirujemogo Twierdogo Tela*, Moskwa, 1983.
- Nikołaeuskij W.N., *Mechanics of Porous and Fractured Media*, World Scientific, Singapore, 1990.
- Nussbaum J. Ruina A., A two degree-of-freedom earthquake model with statics/dynamic friction, *Pure Appl. Geophys.*, **125**, 629-656, 1987.
- Panagiotopoulos P.D., Fractal geometry in solids and structures, *Int.J.Solids Structures*, **29**, 2159-2175, 1992.
- Panagiotopoulos P.D., Fractals and fractal approximation in structural mechanics, *Meccanica*, **27**, 25-33, 1992b.
- Rabinowicz E., *Friction and Wear of Materials*, John Wiley, New York, 1965.
- Rice J.R., Ruina A.L., Stability of steady frictional slipping, *Trans. ASME, J.Appl.Mech.*, **50**, 343-349, 1983.
- Rice J.R., Constitutive relations for fault slip and earthquake instabilities, *Pageoph.*, **121**, 443-475, 1983.
- Rice J.R., Shear localization, faulting, and frictional slip: Discussor's report, in: *Mechanics of Geomaterials*, Z.Bazant (red.), 1985, J. Wiley and Sons, New York. Chapter 11.
- Rice J.R., Tse S., Dynamic motion of a single degree of freedom system following a rate and state dependent friction law, *J. Geophys. Res.* **91**, 521-530, 1986.
- Rice J. R., Fault stress states pore pressure distribution and the weakness of the San Andreas fault, w: *Fault Mechanics and Transport Properties of Rocks*, Evans B., Teng-Fong Wong (red.), Academic Press, 1992.
- Rice J. R., Spatio-temporal complexity of slip on a fault, *J. Geophys. Res.*, **98**, 9885-9907, 1993.
- Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Academic Press, New York 1970.
- Rowshandel B., Nemat-Nasser S., A mechanical model for deformation and earthquakes on strike-slip faults, *Pageoph.*, **124**, 531-566, 1986.
- Rudnicki J.W., Physical models of earthquake instability and precursory process, *Pageoph.*, **126**, 531-554, 1988.
- Ruina A.L., Friction laws and instabilities: a quasi-static analysis of some dry frictional behavior, Ph.D. Division of Engineering, Brown University, 1980.
- Ruina A.L., Slip instability and state variable friction laws, *J. Geophys. Res.*, **88**, 10359-10370, 1983.
- Ruina A.L., Constitutive relations for frictional slip, w: *Mechanics of Geomaterials*, Bazant Z. (red.), J.Wiley, New York 1985, ss. 169-188.
- Rundle J.B., A physical model for earthquakes: 1. Fluctuations and interactions, *J.Geophys.Res.*, **93**, 6237 - 6254, 1988.

- Rundle J.B., A physical model for earthquakes: 2.Application to southern California, *J.Geophys.Res.*, **93**, 6255-6274, 1988.
- Rundle J.B., A physical model for earthquakes: 3.Thermodynamical approach and its relation to nonclassical theories of nucleation, *J.Geophys.Res.*, **94**, 2839-2855, 1989.
- Rundle J.B., Brown S.R., Origin of rate dependence in frictional sliding, *J.Stat.Phys.*, **65**, 403-412, 1991.
- Rybicki K., Dislocation and their geophysical applications, w: *Continuum Theories in Solid Earth Physics*, R. Teisseyre (red.), PWN, Warszawa; Elsevier, Amsterdam, Ch. 2, ss.18-186, 1986.
- Rybicki K. R., On faulting in a medium containing an inhomogeneity: inplane and antiplane strain models, *Pageoph* **134**, 283-301, 1990.
- Rybicki K. R., Strike-slip faulting in the presence of low-rigidity inhomogeneities, *Bull. Seism. Soc. A.*, **82**, 2170-2190, 1992.
- Senatorski P., Fault zone dynamics: evolution patterns, *Publ.Inst. Geophys.*, **A-21(261)**, PAN, 1993.
- Teisseyre R., Crack formation and energy release caused by the concentration of dislocations along fault planes, *Tectonophysics*, **9**, 547-557, 1970.
- Teisseyre R. (red.), *Fizyka i Ewolucja Wnętrza Ziemi, część 1 i część 2*, PWN, Warszawa, 1983.
- Teisseyre R. (red.), *Physics and Evolution of the Earth's Interior 3*, *Continuum Theories in Solid Earth Physics*, Elsevier-PWN, Amsterdam-Warszawa, 1986.
- Teisseyre R. (red.), *Theory of Earthquake Premonitory and Fracture Processes*, PWN Warszawa, 1995 (w druku).
- Telega J.J., Variacionnyje metody v kontaknykh zadachach mechaniki, *Uspechi Mechaniki*, **10**, 3-95, 1987.
- Telega J.J., Topics on unilateral contact problems of elasticity and inelasticity, w: *Nonsmooth Mechanics and Applications*, J.J.Moreau, P.D.Panagiotopoulos (red.), Springer-Verlag, Wien-New York, ss.341-462, 1988.
- Telega J.J., Metody wariacyjne i analiza wypukła w zagadnieniach kontaktowych i homogenizacji, *Prace IPPT*, **38/90**, 1990.
- Theocaris P.S., Panagiotopoulos P.D., On the T- and S-criteria in fracture mechanics: new formulations and variational principles, *Acta Mechanica*, **87**, 135-152, 1991.
- Theocaris P.S., Panagiotopoulos P.D., On a mathematical comparison of the S- and T-criteria in fracture mechanics, *ZAMM*, **72**, 341-345, 1992.
- Tullis T.E., Weeks J.D., Constitutive behavior and stability of frictional sliding of granite, *Pageoph.*, **124**, 383-414, 1986.

Tullis T.E., Rock friction constitutive behavior from laboratory experiments and its implications for an earthquake prediction field monitoring program, *Pageoph.*, **126**, 555-588, 1988.

Turcotte D.L., Schubert G., *Applications of Continuum Physics to Geological Problems*, J.Wiley, New York, 1982.

Turcotte D. L., *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge University Press, 1992.

Weeks J., Tullis T., Frictional sliding of dolomite: A variation in constitutive behavior, *J. Geophys. Res.*, **90**, 7821-7826, 1985.

Westphal M., *Paléomagnétisme et Magnétisme des Roches*, DOIN Editeurs, Paris 1986 (tł. na język polski: *Paleomagnetyzm i własności magnetyczne skał*, PWN, Warszawa 1993).

Wohua Z., Valliappan S., Analysis of random anisotropic damage mechanics problems of rock mass. Part I - Probabilistic simulation, *Rock Mech. Rock Engn.* **23**, 91-112, 1990.

Wohua Z., Valliappan S., Analysis of random anisotropic damage mechanics problems of rock mass. Part II - Statistical estimation, *Rock Mech. Rock Engn.* **23**, 241-259, 1990.

Wong T.F., Micromechanics of faulting in Westerly granite, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **19**, 998-1000, 1982.

Virieux J., Madariaga R., Dynamic faulting studied by a finite difference method, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 345-369, 1982.

Zhong Z-H, Mackerle J., Contact-impact problems: a review with bibliography, *Appl. Mech. Reviews*, **47**, 2, 55-76, 1994.

Zmitrowicz A., A thermodynamical model of contact friction and wear: I. Governing equations, II. Constitutive equations for materials and linearized theories, III. onstitutive equations for friction, wear and frictional heat, *Wear*, **114**, 1987, 135-168, 169-197, 199-221.

Zmitrowicz A., On the thermodynamics of contact friction and wear, ZN Instytutu Maszyn Przepływowych PAN, *Studia i Materiały*, Gdańsk 287/1212/89.

Dodatek A.

Elementy analizy wypukłej (Rockafellar (1970), Ekeland i Temam (1976), Ioffe i Tihomirow (1979))

Niech X będzie unormowaną przestrzenią liniową (np.: \mathbb{R} , $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$), a X^* przestrzenią sprzężoną, tj. $X^* = L(X, \mathbb{R})$ jest przestrzenią funkcjonałów liniowych i ciągłych określonych na X ; na przykład $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$, $(L^2(\Omega))^* = L^2(\Omega)$, $(H_0^1(\Omega))^*$

$$= H^1(\Omega).$$

Niech A będzie podzbiorem przestrzeni liniowej X . Zbiór $[x_1, x_2] = \{x \in X \mid x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ nazywamy odcinkiem łączącym punkty x_1 i x_2 w X . Mówimy, że podzbiór $A \subseteq X$ jest *zbiorem wypukłym*, jeżeli zbiór A zawiera odcinek łączący dowolne dwa swoje punkty. Inaczej: dla dowolnych elementów $x, y \in A$ i dowolnej liczby $\lambda \in [0, 1]$ kombinacja liniowa $\lambda x + (1-\lambda)y$ jest elementem zbioru A , tj. $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$. Przykładami zbiorów wypukłych są: podprzestrzeń liniowa w X , kula w przestrzeni trójwymiarowej, jednostkowa kula w przestrzeni Banacha.

Dla danej funkcji (funkcjonału) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ następujące zbiory:

$$\text{dom } f = \{x \in X \mid f(x) < \infty\},$$

$$\text{epi } f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\},$$

nazywamy, odpowiednio, *dziedzina efektywną* funkcji f i *epigrafem (nadgrafem)* funkcji f . Funkcja f jest funkcją *właściwą*, jeżeli $\text{dom } f \neq \emptyset$ oraz $f(x) > -\infty$ dla dowolnego x .

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą* na zbiorze wypukłym A , jeżeli dla dowolnej liczby $\lambda \in [0, 1]$ i dowolnych elementów $x, y \in A$ spełniona jest nierówność

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Inaczej mówiąc funkcja f jest wypukła, jeżeli jej epigraf jest wypukły.

Łatwo sprawdzić, iż następujące funkcje są wypukłe:

$$(i) \quad f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{- całka Dirichleta,}$$

$$(iii) \quad I_A(u) = \begin{cases} 0, & u \in A \\ +\infty, & u \notin A. \end{cases}$$

Jest to funkcja indykatorowa podzbioru $A \subseteq X$: funkcja ta jest wypukła jeśli zbiór A jest wypukły.

$$(iv) \quad a(u, u) = \int_{\Omega} a_{ijkl} u_{,ij} u_{,kl} dx, \quad u \in [H^1(\Omega)]^3.$$

Ostatni funkcyjnał, będący funkcyjnałem kwadratowym, jest wypukły przy założeniu, że $a_{ijkl} = a_{klij}$ oraz $a = (a_{ijkl})$ jest dodatnio półokreślona (jeśli a jest dodatnio określona, to funkcyjnał $a(u, u)$ jest ściśle wypukły).

(v) funkcja podpierająca zbioru $A \subset X$, niekoniecznie wypukłego

$$D_A(x^*) = \sup\{\langle x^*, x \rangle \mid x \in A\}.$$

Niech $(X^*, X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie parą dualną. Forma dwuliniowa $\langle \cdot, \cdot \rangle: X^* \times X \rightarrow \mathbb{R}$ jest taka, że

(i) $\forall v \in X, v \neq 0, \exists v^* \in X^*$ takie, że $\langle v^*, v \rangle \neq 0$.

(ii) $\forall v^* \in X^*, v^* \neq 0, \exists v \in X$ takie, że $\langle v^*, v \rangle \neq 0$.

Dla przykładu jeśli $X = \mathbb{R}^n$ lub $X = L^2(\Omega)$ (tj. dla przestrzeni samosprężonych) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ staje się iloczynem skalarowym w tych przestrzeniach; w szczególności

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

Niech F będzie funkcją wypukłą i właściwą na X . Funkcjonał ten jest *subrózniczkowalny* w punkcie $x \in X$ jeżeli istnieje element $x^* \in X^*$, taki, że spełniony jest warunek

$$f(x) - f(u) \leq \langle x^*, x - u \rangle \quad \forall u \in X.$$

Dowolny element x^* spełniający powyższy warunek nazywamy *subgradientem* funkcjonału f w punkcie $x \in X$, zaś zbiór

$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \mid f(x) - f(u) \leq \langle x^*, x - u \rangle \quad \forall u \in X\}$ nazywamy *subrózniczką* funkcjonału f w punkcie x .

W analizie wypukłej subrózniczki odgrywają podobną rolę jak pochodne w analizie klasycznej. W przypadku, gdy funkcjonał f jest różniczkowalny w sensie Gâteaux (w punkcie x), wówczas subrózniczka funkcji f w tym punkcie x jest zbiorem jednoelementowym i jest pochodną Gâteaux. Funkcja $f(x) = |x|$ określona na \mathbb{R} ma subrózniczkę w każdym punkcie:

$$\partial f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x > 0, \\ [-1, 1], & \text{dla } x = 0, \\ -1, & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Subrózniczka funkcji indykatorowej I_A zbioru domkniętego i wypukłego A ma postać

$$\begin{aligned} \partial I_A(x) &= \{x \in X \mid \langle x, z - x \rangle \leq 0, \forall z \in A\} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \in \text{int } A \\ N(x), & \text{jeśli } x \in \partial A \\ \emptyset, & \text{jeśli } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

$N(x)$ oznacza tutaj stożek normalny w punkcie x , zaś ∂A przedstawia brzeg zbioru A a $\text{int } A$ oznacza wnętrze zbioru A .

Jeżeli f jest funkcją dwóch zmiennych, $f = f(x, y)$, to symbole $\partial_1 f(x, y)$, $\partial_2 f(x, y)$ oznaczają cząstkowe subrózniczki funkcji, odpowiednio $x \rightarrow f(x, y)$ oraz $y \rightarrow f(x, y)$.

Niech $f: X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ będzie dowolną funkcją. Funkcjonał sprzężony (dualny)

$f^*: X^* \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ jest określony przez *transformację Fenchela* funkcji $f(x)$

$$f^*(x^*) = \sup \{ \langle x^*, x \rangle - f(x) \mid x \in X \}.$$

Funkcjonał podparcia (por. (v)) zbioru A ma postać

$$D_A(x^*) = \sup\{ \langle x^*, x \rangle - I_A(x) \mid x \in X \} = \sup\{ \langle x^*, x \rangle \mid x \in A \}.$$

Dodatek B.

Przestrzeń funkcji o wahaniu ograniczonym. (Brezis (1973), Moreau (1988b))

Niech u będzie funkcją odwzorowującą odcinek $[0, T]$ w przestrzeni wektorowej X w naszym przypadku będzie to przestrzeń funkcyjna, tj $u: [0, T] \rightarrow X$. Wariacją całkowitą funkcji u nazywa się wyrażenie

$$\text{var}(u; [0, T]) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|u(x_k) - u(x_{k-1})\|_X, \quad \text{po wszystkich możliwych}$$

podziałach odcinka $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = T$.

Jeżeli $\text{var}(u; [0, T]) < +\infty$, to mówimy, że u ma *wahanie ograniczone*. Zamiast $\text{var}(u; [0, T])$ piszemy krótko $V_u(T)$. Zbiór funkcji o wahaniu skończonym na odcinku $[0, T]$ oznaczamy symbolem $BV(0, T; X)$.

Podstawowe własności przestrzeni $BV(0, T; X)$:

(i) Niech $u \in BV(0, T; X)$. Wówczas $u \in L^\infty(0, T; X)$ oraz u posiada w każdym punkcie odcinka $(0, T)$ jednoznaczny granicę prawo i lewostronną. Zbiór punktów nieciągłości jest co najwyżej przeliczalny, oraz zachodzi nierówność

$$\int_0^{T-\eta} \|u(t+\eta) - u(t)\|_X dx \leq \eta V_u(T) \quad \forall \eta \in (0, T).$$

(ii) Niech X będzie przestrzenią refleksywną i niech $u \in BV(0, T; X)$. Wówczas u jest różniczkowalna w sensie słabym prawie wszędzie na odcinku $(0, T)$; jej słaba pochodna $\frac{du}{dt} \in L^1(0, T; X)$, oraz

$$\int_0^T \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X dt \leq V_u(T). \quad \text{Ponadto } \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \leq \frac{d}{dt} V_u(t) \text{ dla prawie każdego } t \in (0, T).$$

W dwóch ostatnich nierównościach równość zachodzi wtedy gdy $u \in W^{1,1}(0, T; X)$, por. Brezis (1973).

Ponieważ funkcje i ich pochodne, które rozpatrujemy są nieciągłe względem czasu a ogólnie parametru t , przeto powstaje problem jak należy rozumieć warunki początkowe (36) i (37). Zgodnie z sugestią Moreau (1988b) warunki początkowe mają sens następujący. Niech $u(t)$ reprezentuje przemieszczenie lub prędkość układu dynamicznego i niech t_0 będzie chwilą początkową, w szczególności $t_0 = 0$. Warunek początkowy $u(t_0)$ interpretujemy jako granicę lewostronną w chwili t_0 , co jest konsekwencją możliwości skoku zmiennej u już w chwili początkowej. Niech

$\hat{u}(t) = u(t_0)$ będzie funkcją stałą przedłużoną dla $t < t_0$, wówczas $\hat{u}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-}$

$\hat{u}(t) = u(t)$ jest warunkiem początkowym w chwili t_0 .

Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Mając na uwadze wariacyjne sformułowanie zagadnień dynamicznych wprowadzamy *przestrzeń* $BS(0, T; X)$:

$$BS(0, T; X) = \{u \in L^\infty(0, T; X) \mid \dot{u} \in BV(0, T; X)\}.$$

Do funkcji \dot{u} stosują się własności wymienione powyżej.

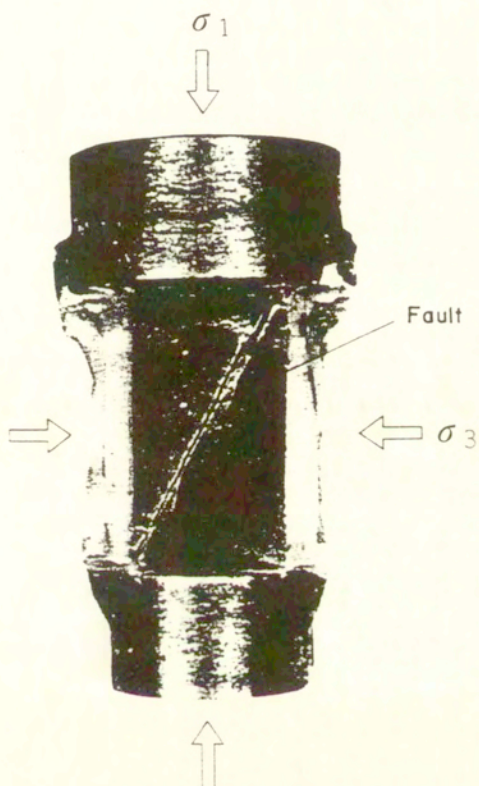
FRICITION ON GEOLOGICAL FAULTS:
MODELLING AND VARIATIONAL FORMULATION
OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS

W.R.Bielski, J.J.Telega (Warsaw)

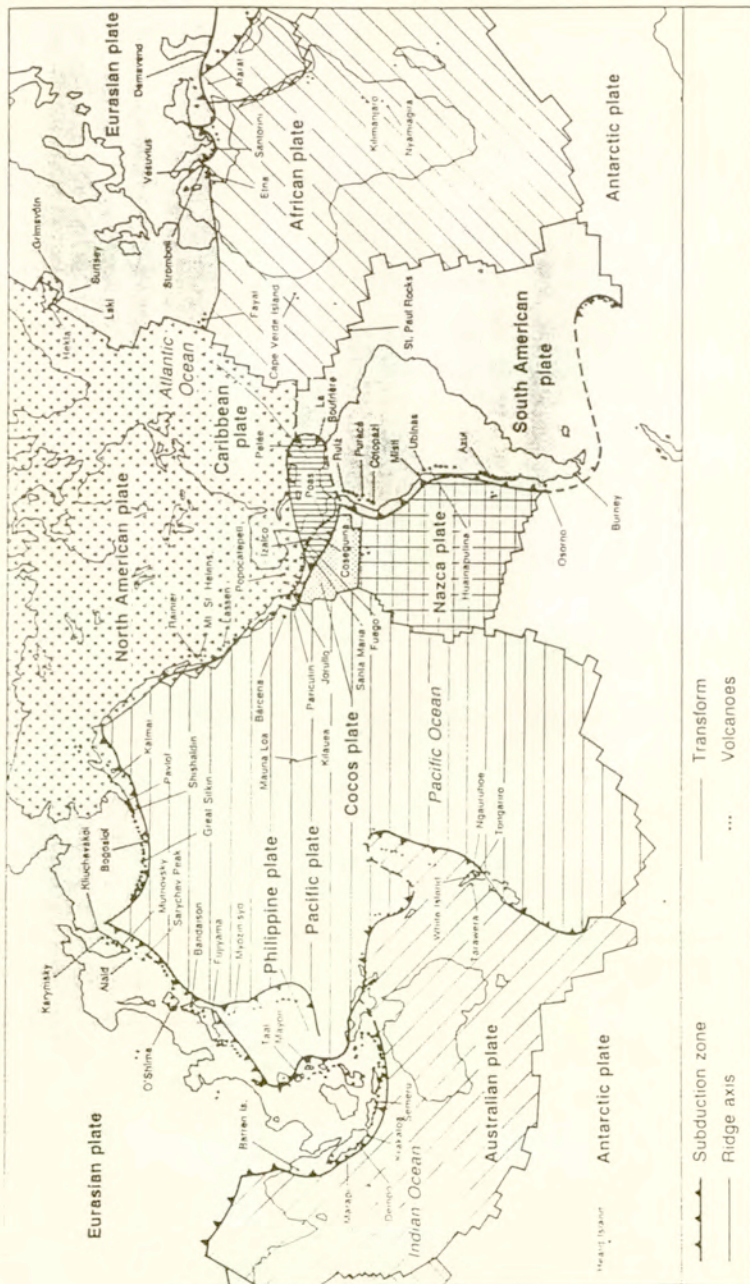
Abstract

Experimental and theoretical results concerning modelling of friction on geological faults were reviewed. New approach proposed consists in the description of friction law in the subdifferential form. Quasi-static and dynamic initial-boundary value problems were formulated in two cases:

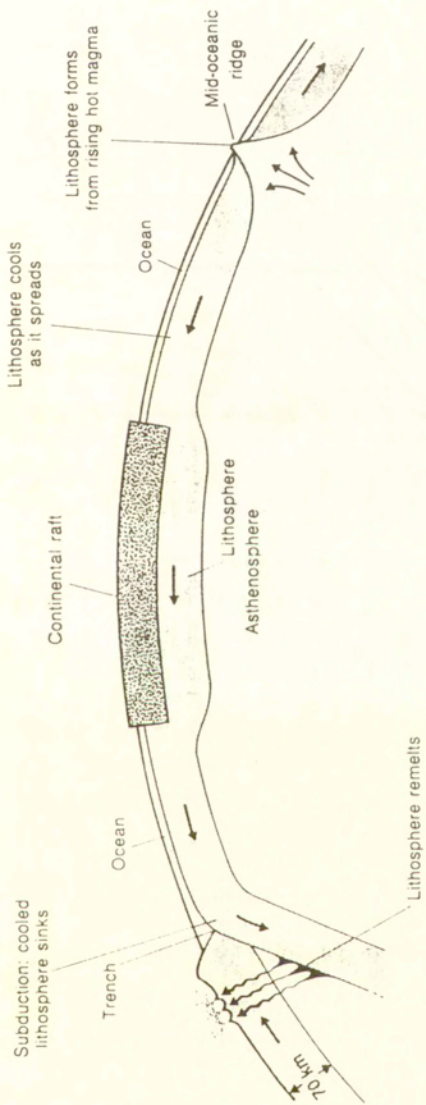
1. for one-slip sequence.
2. for friction described by using internal parameters.



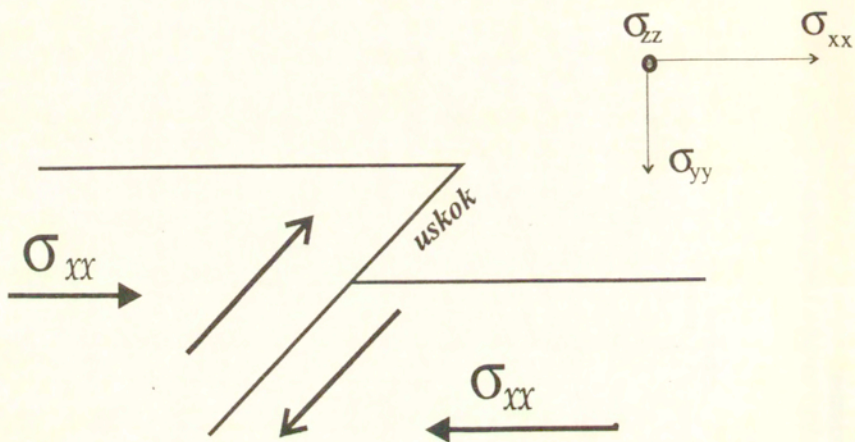
Rys. 1. Zniszczenie próbki z dolomitu podczas próby trójosiowego ściskania.
 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.



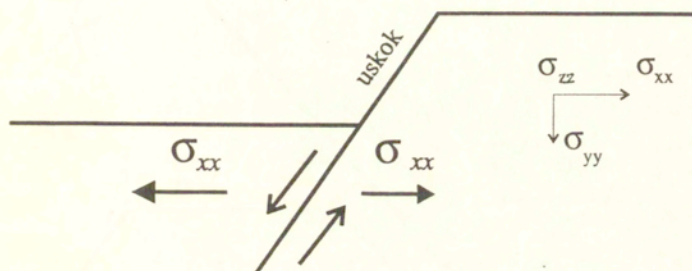
Rys. 2. Mapa głównych płyt tektonicznych. Rozkład głównych uskoków i wulkanów jest skoncentrowany wzdłuż linii oddzielających płyty tektoniczne.



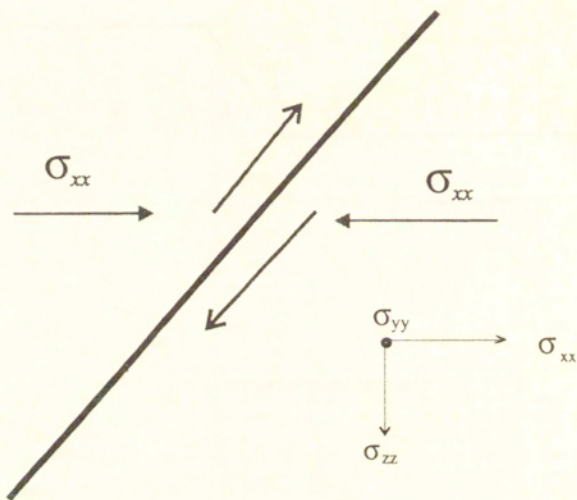
Rys. 3. Ruch płyt tektonicznych. Jedna z płyt zanurza się pod drugą płytę w strefie subdukcji.



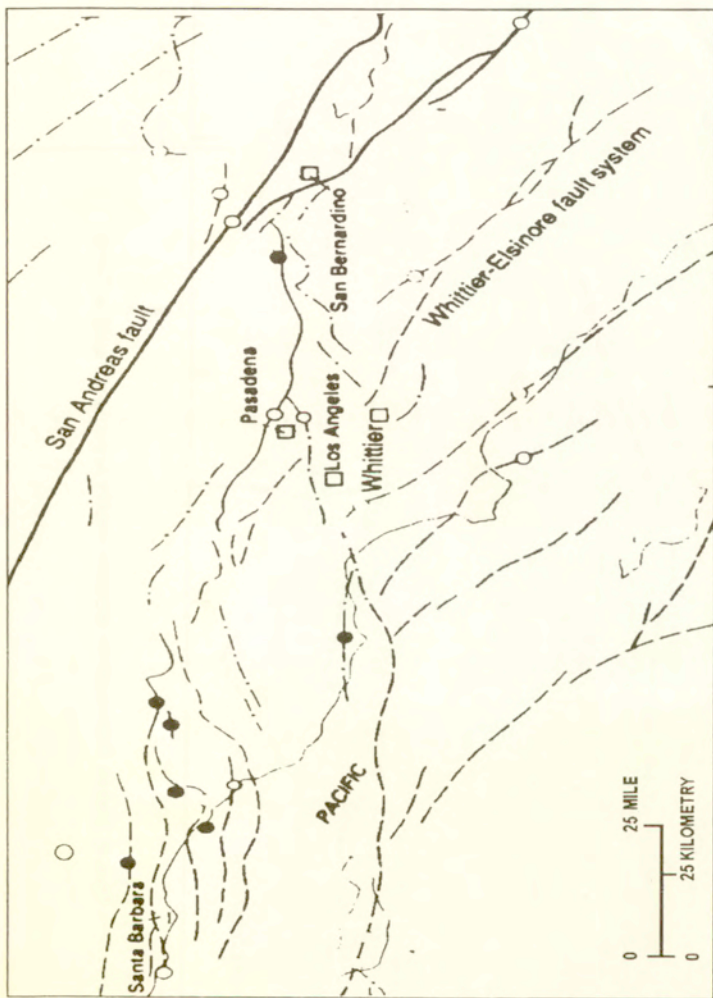
Rys. 4. Schemat uskoku nasuwczego.



Rys. 5. Schemat uskoku normalnego.



Rys. 6. Schemat uskoku przesuwczego.



Prędkość poślizgu (mm/rok)

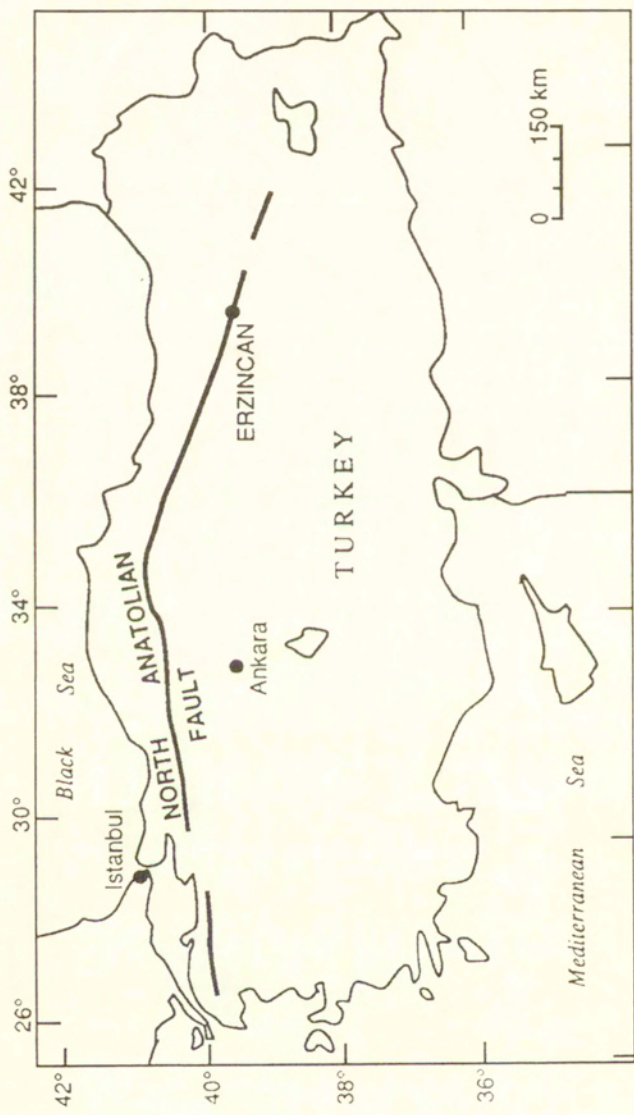
10 - 30 - - - - - 1 - 2

3 - 9 - · - · - · < 1

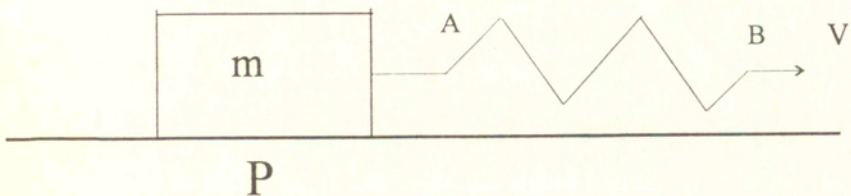
● Miejsca gdzie prędkość poślizgu jest znana

○ Miejsca gdzie tylko płonowa lub pozycja składowa jest znana

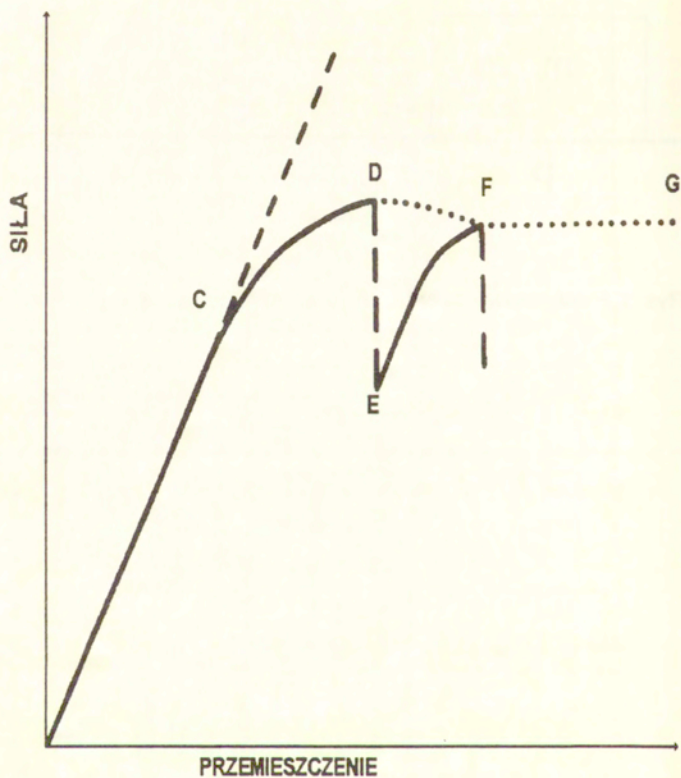
Rys. 7. Uskok Świętego Andrzeja w Kalifornii (San Andreas Fault = SAF).



Rys. 8. Uskok Północno-Anatolijski (North Anatolian Fault) w Turcji.

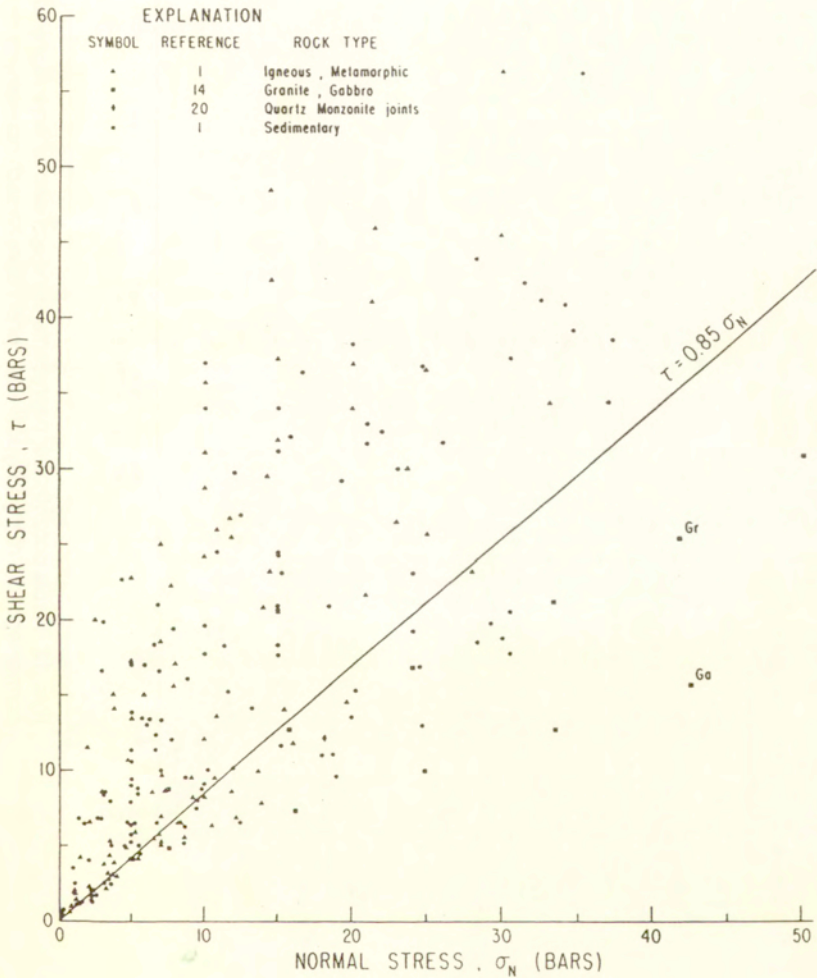


Rys. 9. Prosty model do badania zjawiska adhezja-poślizg.



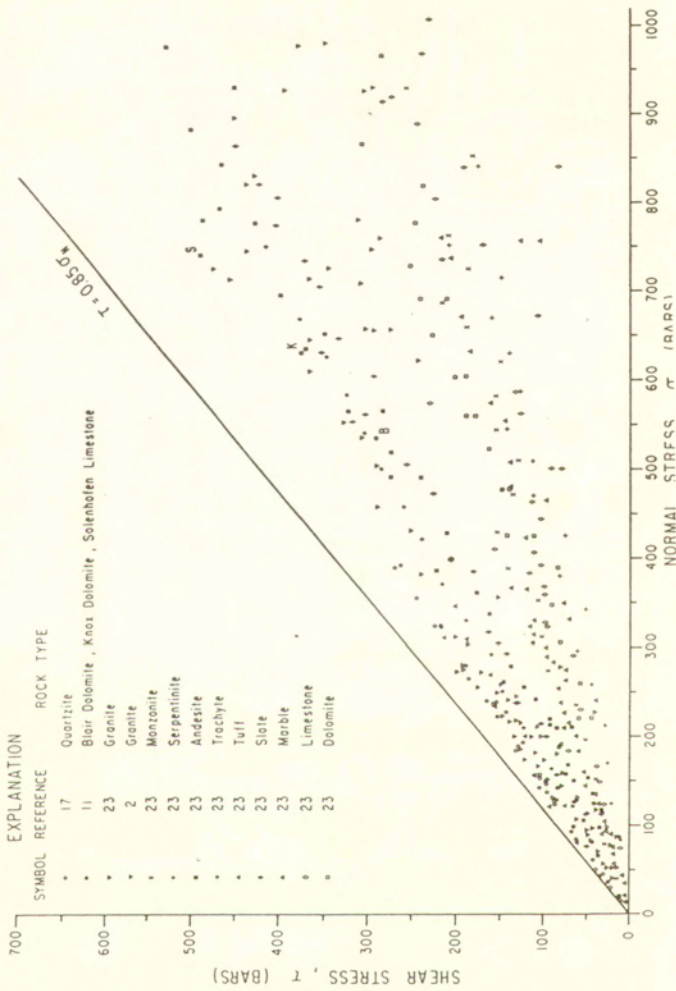
Rys. 10. Zależność siły tarcia od poślizgu w ruchu adhezja-poślizg.

MAXIMUM FRICTION



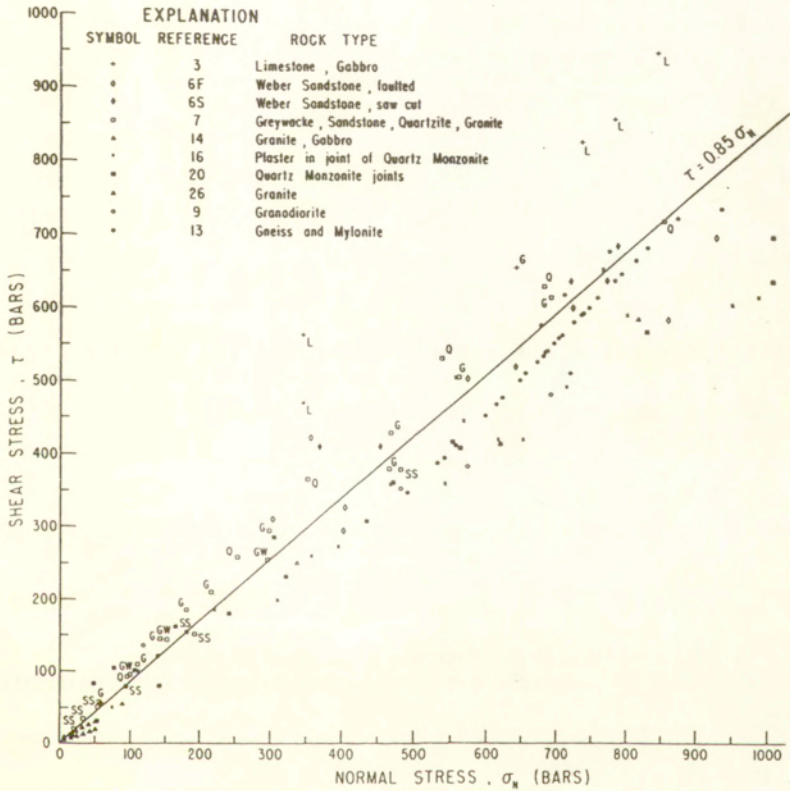
Rys. 11. Tarcie maksymalne: napężenie ścinające jako funkcja napężenia normalnego dla różnych typów skał; napężenie normalne do 50 b.

INITIAL FRICTION



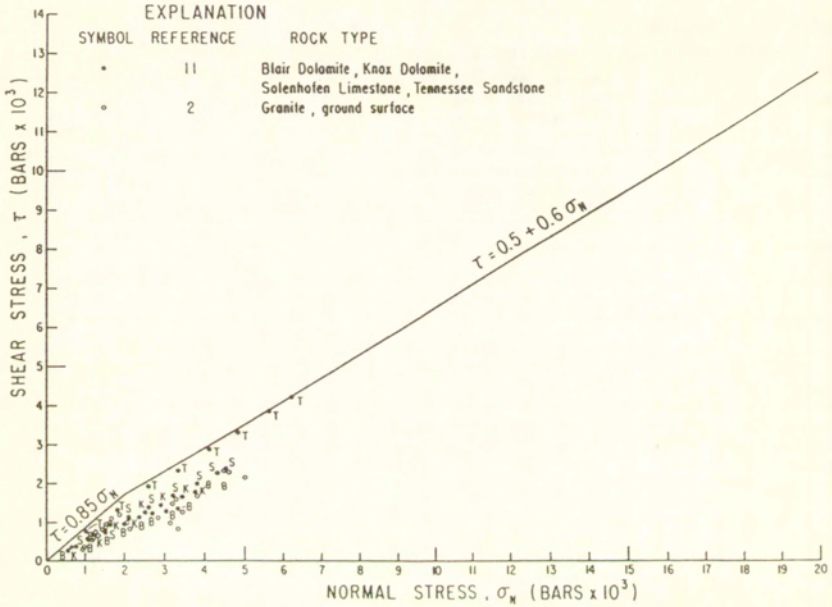
Rys. 12. Tarcie początkowe: naprężenie ścinające jako funkcja naprężenia normalnego dla różnych typów skał, przy naprężeniach normalnych do 1000 b.

MAXIMUM FRICTION



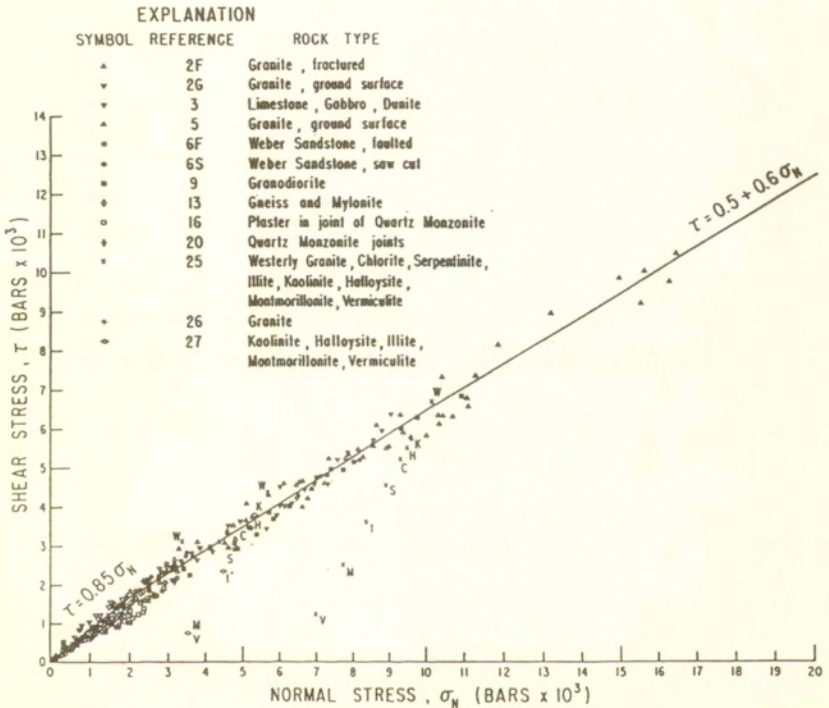
Rys. 13. Tarcie maksymalne: naprężenie ścinające jako funkcja naprężenia normalnego dla różnych typów skał; naprężenia normalne do 1000 b.

INITIAL FRICTION



Rys. 14. Tarcie początkowe: naprężenie ścinające jako funkcja naprężenia normalnego dla różnych typów skał; naprężenia normalne do 20 kb.

MAXIMUM FRICTION



Rys. 15. Tarcie maksymalne: naprężenie ścinające jako funkcja naprężenia normalnego dla różnych typów skał; naprężenia normalne do 20 kb.