

13/59

NOWA TEORYJA KSZTAŁTU I GRAWITACYI ZIEMI.

NAPISAŁ

Dr. LUDWIK BIRKIENMAJER
DOCENT UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.

Osobne odbicie z XIII. Tomu Pamiętnika Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności.

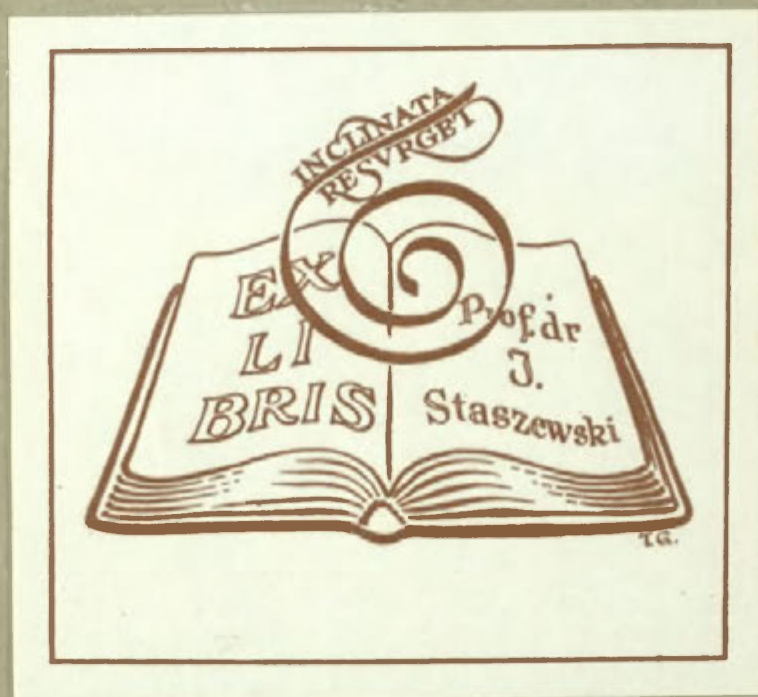
KRAKÓW.

DRUKARNIA UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządkiem Anatola Maryjana Kosterkiewicza.

1887.

13/59 Pomeń
20
do przykłaśca

109 450
Hortona nauka



NOWA TEORYJA
KSZTAŁTU I GRAWITACYI ZIEMI.

NAPISAŁ

Dr. LUDWIK BIRKENMAJER
DOCENT UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.

Osobne odbicie z XIII. Tomu Pamiętnika Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności.

KRAKÓW.

DRUKARNIA UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządkiem Anatola Maryjana Kosterkiewicza.

1887.

CBGİOŚ, ul. Twarda 51/55
tel. 0 22 69-78-773



<http://rcin.org.pl>

gospodynie - graninucha



III - 2215

Nowa teoria kształtu i grawitacji ziemi.

NAPISAZ

Dr. Ludwik Birkenmajer

docent Uniw. Jagiellońskiego.

W XIV tomie Rozpraw i Sprawozdań z posiedzeń Wydziału mat.-przyrodniczego Akademii Umiejętności (str. 44 — 68) streściłem pokrótce stan obecnych naszych wiadomości, dotyczących postaci i grawitacji ziemi, a zwróciwszy uwagę na niezupełną dostateczność wzorów A. CLAIRAUTA, zapowiedziałem ich modyfikację, polegającą na uwzględnieniu wyrazów rzędu wyższego niż spłaszczenie. Wywiązując się z przyrzeczenia, mam zaszczyt przedłożyć dzisiaj Akademii Umiejętności część pierwszą swej pracy, zawierającą wyniki teoretyczne ważne dla wszelkiego ciała postacią do kuli zbliżonego, a którego wewnętrzny ustrój czyli rozkład mas, jest w przybliżeniu centrobarycznym.

Zastosowanie wyłożonej tutaj teorii do ziemi, będzie stanowiło drugą część pracy niniejszej, do której mam już wszystkie materiały w pogotowiu. Możliwa praca wynajdywania źródeł i zbierania materiałów empirycznych, jakoteż krytyczna ich dyskusja byłyby dla mnie niewykonalne, gdyby nie pomoc, jakiej doznałem od Prof. Dra FRANCISZKA KARLIŃSKIEGO, dyrektora Obserwatorium astronomicznego w Krakowie, Jego to zainteresowaniu się memi pracami zawdzięczałem prawo korzystania w pełnej mierze z bogatej biblioteki Obserwatorium, co więcej, zawdzięczam Mu bardzo wiele cennych rad i wskazówek, za co wszystko składam Mu serdeczne podziękowanie.

§. I.

Definicja pierwsza. Powierzchnię poziomą (*Niveau-fläche*) dowolnej niejednorodnej masy, zostającej pod wpływem sił bądźto rzeczywistych, bądź wymyślonych, ale posiadających potencyjał, zwiemy powierzchnią poprowadzoną przez dany punkt tak, iż potencyjał wszystkich sił w każdym jej punkcie posiada wartość stałą. Znaczy to, że każdy element tej powierzchni jest normalnym do kierunku wypadkowej wszystkich sił działających na punkt uważany.

W teorii kształtu i grawitacji ziemi rzeczywiste siły są pochodnymi grawitacyjnego potencjału całej niejednorodnej masy na uważany punkt; siły wymyślone są składowymi przyspieszenia normalnego obrotowego ruchu ziemi, tj. siły odśrodkowej.

Definicja druga. Niejednorodną masę M zwiemy centrobaryczną, jeżeli wszelki poza nią leżący punkt materyjalny doznaje od niej przyciągania tak, jak gdyby ono wychodziło od pewnego stałego punktu wewnątrz tej masy leżącego (Sir William THOMSON).

Jednorodna kula będzie tedy ciałem centrobarycznym; przeciwnie jednorodna elipsoida lub jednorodny pierścień symetryczny, w którymto razie środek przyciągania musiałby padać w środek pierścienia, więc w punkt nienależący do masy pierścienia i zewnątrz niej leżący nie są ciałami centrobarycznymi.

Daje się udowodnić ¹⁾, że wszelki zasób masy daje się zawsze w jeden, ale tylko jeden sposób ugrupować na dowolnej zamkniętej powierzchni tak, iż powstała warstwa materyjalna będzie centrobaryczną; dalej, że wszelka masa daje się na nieskończenie rozmaitych sposobach ugrupować wewnątrz dowolnej zamkniętej powierzchni S tak, iż ciało w ten sposób utworzone będzie centrobarycznym ze względu na każdy punkt zewnątrz powierzchni S położony (GREEN i GAUSS).

§. II.

Jeżeli x, y, z są współrzędnymi bieżącymi punktów niejednorodnej masy M ; ξ, η, ζ współrzędnymi przyciąganego punktu, to mamy potencjał

$$V = \int \frac{dm}{R},$$

gdzie dm jest elementem masy, zaś

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = r^2 - 2(\xi x + \eta y + \zeta z) + u^2,$$

przyczem

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad u^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Naznaczone całkowanie symbolicznie jako pojedyncze jest właściwie potrójnem i odnosi się do całej masy M ; początek współrzędnych Des CARTESA pozostaje dotąd dowolnym jak również kierunki osi X, Y, Z . Położmy jeszcze

$$\frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{ru} = i,$$

a będzie

$$R = \sqrt{r^2 - 2rut + u^2} = r \sqrt{1 - 2i + i^2},$$

gdzie dla skrócenia

$$i = \frac{u}{r}$$

położyliśmy.

¹⁾ Zob. np. THOMSON and TAIT *Natural Philosophy*, Cambridge 1883 (new edition) Part. II. pag. 56.

Wyrażenie

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\epsilon_0 + \epsilon^2}}$$

możemy rozwinąć na szereg postępujący według dodatnich potęg ilości ϵ , któreto rozwinięcie będzie, jak wiadomo, zbieżnym dla $\epsilon \leq 1$, tj. dla punktu $(\xi\eta\zeta)$ nie wewnątrz masy M położonego ¹⁾, skutkiem czego wyrażenie potencjału V daje się przedstawić w kształcie szeregu

$$V = \frac{1}{r} \left\{ \int dm + \sum_{n=2}^{\infty} r^{-n} \int H_n dm \right\},$$

gdzie

$$H_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left[\epsilon^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \epsilon^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \epsilon^{n-4} - \dots \right], \quad u'$$

Oznaczając ogólnie

$$\int H_n dm = Q_n,$$

gdzie całkowanie odnosi się zawsze do całej masy i uważając, że $\int dm = M$, napiszemy zwięźle

$$V = \frac{M}{r} + \frac{Q_1}{r^3} + \frac{Q_2}{r^5} + \frac{Q_3}{r^7} + \dots,$$

któryto szereg jest zbieżnym rozwinięciem potencjału grawitacyjnego V według odjemnych potęg odległości r niewewnętrzny punktu $(\xi\eta\zeta)$ od początku współrzędnych. Przedstawia on rzeczony potencjał z tem większą dokładnością, im mniejszą jest różnica ciała M od jednorodnej kuli, a raczej im bardziej ustrój tej masy zbliża się do ustroju centrobarycznego. Dla jednorodnej kuli jest jak wiadomo

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad Q_4 = 0, \quad \dots$$

pod warunkiem, że początek współrzędnych przyjmiemy w geometrycznym środku kuli.

§. III.

Wszelako i dla dowolnej masy możemy sprawić, że z pomiędzy ostatnich równań przy najmniej pierwsze, tj. $Q_1 = 0$, będzie dopełnionem. Z powyższego bowiem widać, że wartości pierwszych trzech funkcji H są następujące

$$H_1 = \xi x + \eta y + \zeta z,$$

$$H_2 = \frac{3}{2} \left[(\xi x + \eta y + \zeta z)^2 - \frac{1}{3} r^2 u^2 \right],$$

$$H_3 = \frac{5}{2} \left[(\xi x + \eta y + \zeta z)^3 - \frac{3}{5} r^2 u^2 (\xi x + \eta y + \zeta z) \right],$$

¹⁾ Patrz przypisek 1szy.

zatem nasamprzód

$$Q_1 = \xi \int f x dm + \eta \int f y dm + \zeta \int f z dm ;$$

jeżeli tedy dotąd dowolny początek współrzędnych umieścimy w środku bezwładności masy M (tj. w środku „ciężkości“), to jak wiadomo

$$\int f x dm = 0, \quad \int f y dm = 0, \quad \int f z dm = 0,$$

a więc $Q_1 = 0$, skutkiem czego

$$V = \frac{M}{r} + \frac{Q_2}{r^2} + \frac{Q_3}{r^3} + \dots$$

Ile wyrazów tego szeregu należy zachować w dalszych rachunkach, zależy nasamprzód od jakości rozdzielenia gęstości wewnątrz masy M , a powtóre od dokładności z jaką możemy lub musimy wyprowadzać te rachunki, aby wnioski na nich oparte zdawały sprawę ze zjawisk uważanych. I tak, dla jednorodnej kuli lub złożonej z warstw współśrodkowych o równej gęstości a wreszcie dla wszelkiej centrobarycznej masy M znikają w ostatnim rozwinięciu wszystkie wyrazy z wyjątkiem pierwszego; dla eliptycznego sferoidu (niekoniecznie obrotowego) tak zbliżonego do kuli, iż kwadraty i wyższe potęgi jego spłaszczenia wolno pominąć, drugi wyraz cechujący niecentrobaryczność elipsoidu wprawdzie nie znika, natomiast odpadają wszystkie następujące wyrazy jako zależne od wyższych potęg spłaszczenia. Jeżeli zaś powierzchnia poziomu (§. I) różni się od ostatniej powierzchni o ilości pomiarom naszym dostępne, a będące rzędu wyższego niż spłaszczenie, podczas gdy masa M jest ciągle w przybliżeniu centrobaryczną, to jasna, że trzeci wyraz

$$\frac{Q_3}{r^3}$$

musi być uwzględnionym w rachunku, jeżeli życzymy sobie zdać sprawę z aberacyi sferoidu od kształtu elipsoidalnego. O tejto aberacyi okazały pomiary geodezyjne dowodnie, iż rząd jej jest mniejszym od rzędu spłaszczenia σ , ale większym od rzędu σ^2 lub od wartości prawdopodobnych błędów samych pomiarów ¹⁾. Jeżeli tedy rząd spłaszczenia (lub siły odśrodkowej ruchu obrotowego ziemi) weźmiemy za jednostkę, przyjmiemy więc rząd ilości σ^2 równym 2, to rząd ostatniej aberacyi (zdradzającej się odchyleniami pionu od kierunku normalnej do sferoidu eliptycznego) wyrazi się symbolicznie liczbą $\frac{3}{2}$. Uwidocznimy to, pisząc:

aberacyja sferoidu S od kształtu kulistego . . .	jest rzędu	1go
„ „ „ „ elipsoidy . . .	„ „	$\frac{3}{2}$
prawdopodobne błędy pomiarów . . .	są „	2.

§. IV.

W dotychczasowych teoriach kształtu i grawitacyi ziemi uwzględniano tylko ilości rzędu 1go (t. j. rzędu spłaszczenia), a wszystkie inne pomijano i było to wystarczającym do-

¹⁾ Zob. np. H. BRUNS: *Die Figur der Erde Publication des königl. geodätischen Institutes.* Berlin 1878, pag. 14. *Die Lothstörungen.* Zobacz nadto przypisek 2gi.

póty, dopóki praktyka nie wykazała, że aberacje kształtu elipsoidalnego (a więc ilości rzędu $\frac{3}{2}$ go) są bardzo dobrze dostrzegalne. Ponieważ ilości rzędu 2go i wyższych leżą już całkiem w granicach błędów prawdopodobnych i niewątpliwie zawsze pozostaną w tych granicach, przeto wyraz czwarty ostatniego szeregu

$$\frac{Q_4}{r^3}$$

nie może wywierać dostrzegalnego wpływu na dokładność rachunków, co tem bardziej stosuje się do następnych wyrazów szeregu. Ztąd wynika, że dla zamierzonego tutaj celu, wyrażenie grawitacyjnego potencyjału V będzie się przedstawiało w kształcie

$$V = \frac{M}{r} + \frac{Q_2}{r^3} + \frac{Q_3}{r^3}.$$

Zachowując tylko pierwsze dwa wyrazy prawej strony tego równania, otrzymuje się z całą łatwością — jak to poniżej zobaczymy — równanie powierzchni poziomej w postaci elipsoidy, prawo zmiany siły ciężkości (jako prostą funkcję wstawy szerokości geograficznej), a wreszcie znany wzór A. CLAIRAUTA. Okazawszy rachunkową konieczność zachowania trzeciego wyrazu w teorii kształtu ziemi, pozostaje jeszcze wyjaśnić fizyczne jego znaczenie.

§. V.

Dla eliptycznego sferoidu różniącego się bardzo mało od kuli wiemy, iż trzeci wyraz potencyjału odpada, gdyż ilość Q_3 jest zerem. Ale nie tylko dla takiego sferoidu ma to miejsce. Jeżeli dowolna (w przybliżeniu centrobaryczna) masa M posiada trzy prostopadłe do siebie osie symetrii geometrycznej (a jak można okazać, niekoniecznie geometrycznej, lecz nawet t. z. kinetycznej symetrii), to każda z dziesięciu całek

$$\begin{aligned} & \int x^2 dm, \quad \int y^2 dm, \quad \int z^2 dm, \quad \int xyz dm, \\ & \int xy^2 dm, \quad \int x^2 y dm, \quad \int yz^2 dm, \quad \int y^2 z dm, \quad \int zx^2 dm, \quad \int z^2 x dm \end{aligned}$$

(wzięta dla całej masy M) jest z osobna zerem, gdyż każda z nich składa się z elementów parami równych a o przeciwnych znakach ¹⁾. Ponieważ tedy funkcja H_3 jest agregatem 10ciu wyrazów proporcjonalnych do $x^3, y^3, z^3, xyz, xy^2, \dots$, przeto ilość $Q_3 = \int H_3 dm$ jest zerem. Oczywiście, że wówczas znikają także funkcje Q_4, Q_7, \dots t. j. opatrzone nieparzystymi wskaźnikami.

Jeżeli więc niezupełnie centrobaryczna masa M nie przedstawia zupełnej symetrii (geometrycznej lub ogólniej kinetycznej) około trzech osi współrzędnych, jak to ma miejsce dla ziemi, to widoczna, że wyraz $Q_3 r^{-3}$ jest różnym od zera, i dla tego nie powinien być pomijanym przy wyprowadzaniu równania powierzchni poziomej, jak to czynią niektórzy autorowie ²⁾.

¹⁾ W dwóch przeciwległych oktantach.

²⁾ Patrz np. H. BRUNS: *Die Figur der Erde* l. c.

Wyraz Q_3 znamionujący tedy dyssymetryję całej masy M nie odnosi się więc tylko do najbliższego sąsiedztwa przyciąganego punktu (ϵr), ale zdaje teoretycznie sprawę z perturbacji potencyału grawitacyjnego zawisłej od wszystkich nierówności terenu fizycznej powierzchni ziemi i nierównego rozdzielenia gęstości wewnątrz niej. Słowem, wprowadzenie wyrazu Q_3 pozwoli uwzględnić perturbacje kierunku i wielkości siły ciężkości, znane pod nazwą „odchylenie pionu“ (*Lothstorungen*), a wynikające nie tylko z widzialnych i pobliskich nierówności terenu, ale i z niewidzialnych jakoteż odległych konfiguracyj globu ziemskiego. Dotąd używane metody w tej mierze, takie jak YOUNGA, POISSONA, PRATTA lub WALKERA, a polegające na kwadratach lokalnych, jakkolwiek nieraz zmyślne, a w praktyce zawsze mozolne, mogą być — w obec tego, co się wyżej powiedziało — niestety tylko iluzorycznymi ¹⁾. Dwa główne błędy wszelkich takich metod polegają na tem, iż z jednej strony uwzględniają one tylko widzialną różnicę mas i kształtów terenu, a z drugiej strony pomijają wpływ dalszych jakkolwiek wielkich mas perturbujących i ograniczają się jedynie do najbliższego sąsiedztwa. Co do pierwszego, to snadź zapomniano, iż wielkie obszary płaszczyzn lądowych i gładkie zwierciadło oceanów są tylko zwodniczą maską, pod którą kryć się mogą wielkie nierówności w rozdzieleniu mas działające perturbująco na kierunek i wielkość pozornej siły ciężkości. Wielkie odchylenia pionu na płaskich przestrzeniach kontynentalnych i anormalne długości wahadła sekundowego na samotnych wysepkach wielkich oceanów są najwymowniejszym tego dowodem. Co do drugiego wyżej wspomnianego błędu, to daje się okazać, iż błąd samej „poprawy“ popełniony skutkiem pominięcia wpływu dalszych mas, może dosięgnąć a nawet przekroczyć połowę wartości tej poprawy ²⁾. Jeżeli np. istotna poprawa długości wahadła sekundowego spowodowana obecnością perturbacji siły ciężkości wynosi 0.34 milimetra, to za pomocą kwadratur lokalnych może dla takiej poprawy wypaść tak dobrze $(0.34 - \frac{0.34}{2}) = 0.17$ jak i $(0.34 + \frac{0.34}{2}) = 0.51$ milimetra. To poucza dostatecznie, iż takie rzekome poprawy nie zasługują wcale na tę nazwę i są raczej pokryciem niż sprostowaniem naszej niewiadomości.

Zjawiska perturbacji tak kierunku jak i natężenia siły ciężkości zostaną natomiast ujęte w jednolitą formę objawów perturbacyjnych jednej ogólnej przyczyny: dyssymetryi globu ziemskiego, jeżeli do zjawisk tu należących zostosujemy wyrażenie potencyału grawitacyjnego dokładniejsze od dotąd używanego. Widzieliśmy zaś powyżej, że powiększenie tej dokładności polega na uwzględnieniu wyrazu $\frac{Q_3}{r^3}$ cechującego wspomnianą dyssymetryję.

W tem, co się dopiero rzekło, nie leży twierdzenie, jakoby niniejsza teoryja miała z całą dokładnością wyczerpywać zjawiska grawitacji ziemskiej w ich wielkiej różnorodności i wyznaczać kształt powierzchni morza z bezwzględną dokładnością. Owszem nie wahamy się wypowiedzieć, iż wszelkie takie usiłowanie byłoby z jednej strony daremnem, a z drugiej zbyt bezcelnem. Istnieje granica dokładności wszelkich pomiarów i wyznaczeń ilościowych w każdej gałęzi nauk przyrodniczych, której niedokładność naszych zmysłów i narzędzi, chociażby najdelikatniejszych, przekroczyć nie jest w stanie: zdobywamy nowe podstawy naukowe, posuwając dalej dokładność przybliżeń do prawdy, ale zawsze są one przybliżeniami. KEPLER zastępując koła orbit planetarnych przez elipsy, posunął przybliżenie o jeden wielki krok; zadanie „trzech ciał“ posuwa przybliżenie to o krok dalszy, wprowadzając orbity eliptyczne, których elementa

¹⁾ Pierwszym, który wyprowadził wzór poprawczy znany pospolicie pod nazwą reguły YOUNGA (*Y.'s rule*) lub POISSONA, jest mimo to BOUGUER (zob. tego autora *La figure de la Terre*, Paris 1749, pag. 361).

²⁾ Zob. przypisek 3ci.

nie są stałe lecz zmienne z czasem, a zadawaliśmy się tem przybliżeniem, dopóki nie będzie możliwym krok dalszy uczynić. To samo daje się spostrzedz w rozwoju naukowych wyobrażeń, dotyczących kształtu ziemi — i tu wybitnie występują podobne trzy fazy w tej twórczej czynności umysłu ludzkiego, usiłującego dotrzeć do prawdy przez kolejne przybliżenia. Wyobrażenie kulistości ziemi daje się snadno porównać z kołowymi orbitami planet, a jak ta doktryna musiała ustąpić pod naciskiem spostrzeżeń i rozumowania, tak i tamto wyobrażenie ostać się nie mogło: ziemia przestała być kulą a genijusz NEWTONÓW i HUYGHENSÓW stworzył inną dla niej postać — elipsoidę obrotową. Gdy wreszcie spostrzeżeniom liczniejszym i dokładniejszym niezmienna orbita eliptyczna planet nie zdołała wystarczyć i kształt ostatniej zmieniono przez wprowadzenie funkcji perturbacyjnej, należało oczekiwać, że nie inny los spotka w przyszłości ową elipsoidę, przedstawiającą już z wielkiem przybliżeniem kształt powierzchni oceanów. Wysiłki gen. SCHUBERTA, JAMESA i CLARKEA były pierwszym tego zwiastunem: podstawienie elipsoidy nieobrotowej za obrotową było jednak i jest tylko połowicznym środkiem, który nie mógł doprowadzić teorii do pożądaney zgodności z materyjałem doświadczalnym. Sprawa stanęła na tym punkcie dojrzenia, że potrzeba było mieć odwagę zaprzeczyć ziemi kształtu elipsoidy, albo — nie kusząc się o dalsze przybliżenie — po prostu pozostać przy elipsoidzie AIRYEGO, BESSELA lub CLARKEA. Treścią pracy niniejszej jest pierwsza — może nieudana — próba wypracowania owego dalszego przybliżenia, o którym dopiero nadmieniono.

§. VI.

Obliczenie wyrazu Q_2 . Położmy dla skrócenia

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p,$$

to

$$Q_2 = \int H_2 dm = \frac{1}{2} \int (3p^2 - r^2 u^2) dm ;$$

biorąc teraz trzy główne osie bezwładności masy M za osie współrzędnych, będzie

$$\int yz dm = 0, \quad \int xz dm = 0, \quad \int xy dm = 0,$$

skutkiem czego

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{1}{2} \cdot \int \{ 3 (\xi^2 x^2 + \eta^2 y^2 + \zeta^2 z^2) - r^2 (x^2 y^2 z^2) \} dm \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \{ (3\xi^2 - r^2) x^2 + (3\eta^2 - r^2) y^2 + (3\zeta^2 - r^2) z^2 \} dm \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) \int x^2 dm + \frac{1}{2} \cdot (2\eta^2 - \zeta^2 - \xi^2) \int y^2 dm + \frac{1}{2} \cdot (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2) \int z^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \xi^2 \int (2x^2 - y^2 - z^2) dm + \frac{1}{2} \eta^2 \int (2y^2 - z^2 - x^2) dm + \frac{1}{2} \zeta^2 \int (2z^2 - x^2 - y^2) dm. \end{aligned}$$

Otóż trzy główne momenta bezwładności masy M są

$$\int (y^2 + z^2) dm, \quad \int (z^2 + x^2) dm, \quad \int (x^2 + y^2) dm ;$$

oznaczając je przez AMk^2 , BMk^2 , CMk^2 , gdzie A , B , C są pewnymi liczbami (niemianowanymi), k zaś nieoznaczoną na razie długością wprowadzoną tylko w tym celu, aby wyrażenia momentów miały kształt jednorodny (*homogen*) — otrzymamy nasamprzód

$$\int (2x^2 - y^2 - z^2) dm = \int (z^2 + x^2) dm + \int (x^2 + y^2) dm - 2 \int (y^2 + z^2) dm ,$$

t. j.

$$\int (2x^2 - y^2 - z^2) dm = (B + C - 2A) Mk^2 ,$$

a podobnie

$$\int (2y^2 - z^2 - x^2) dm = (C + A - 2B) Mk^2 ,$$

$$\int (2z^2 - x^2 - y^2) dm = (A + B - 2C) Mk^2 ,$$

skutkiem czego

$$Q_2 = Mk^2 (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2) ,$$

gdzie dla skrócenia

$$A = \frac{B + C - 2A}{2} , \quad B = \frac{C + A - 2B}{2} , \quad C = \frac{A + B - 2C}{2} .$$

§. VII.

Obliczenie wyrazu Q_3 . Przedewszystkiem mamy (§. III)

$$H_3 = \frac{5}{2} (p^3 - \frac{3}{5} p r^2 u^2) = \frac{1}{2} (5p^3 - 3r^2 u^2) p ,$$

dalej

$$(5p^3 - 3r^2 u^2)$$

$$= x^2 (5\xi^2 - 3r^2) + y^2 (5\eta^2 - 3r^2) + z^2 (5\zeta^2 - 3r^2) + 10\eta\xi \cdot yz + 10\xi\zeta \cdot zx + 10\zeta\eta \cdot xy ;$$

mnożąc teraz przez

$$p = \xi x + \eta y + \zeta z$$

i zbierając należycie, otrzymamy

$$\begin{aligned} 2H_3 = & \xi (5\xi^2 - 3r^2) x^3 + \eta (5\eta^2 - 3r^2) y^3 + \zeta (5\zeta^2 - 3r^2) z^3 \\ & + [\xi(5\eta^2 - 3r^2) + 10\xi\eta^2] xy^2 + [\eta(5\xi^2 - 3r^2) + 10\xi^2\eta] x^2y \\ & + [\xi(5\zeta^2 - 3r^2) + 10\xi\zeta^2] xz^2 + [\zeta(5\xi^2 - 3r^2) + 10\xi^2\zeta] x^2z \\ & + [\eta(5\zeta^2 - 3r^2) + 10\eta\zeta^2] yz^2 + [\zeta(5\eta^2 - 3r^2) + 10\eta^2\zeta] y^2z + 30\xi\eta\zeta \cdot xyz . \end{aligned}$$

Wyrażenie $Q_3 = \int H_3 dm$ sprowadza się zatem do dziesięciu całek kształtu

$$\int x^3 dm , \int y^3 dm , \int z^3 dm , \int xy^2 dm , \dots \int xyz dm ,$$

wziętych dla całej niejednorodnej masy M , — a wiemy z poprzedniego, że gdy ciało jednorodne jest geometrycznie symetrycznem względem 3 głównych osi bezwładności (np. gdy jest elipsoidą), każda z tych dziesięciu całek staje się z osobna zerem. Ciało może być jednak niesymetrycznem geometrycznie i zarazem niejednorodnem, lecz gdy spełniają się pewne warunki (zależne od kształtu i rodzaju niejednorodności), to powyższe całki mogą się również stawać zerem. Wówczas mówimy, że mamy przed sobą kinetyczną symetryję uważanej masy (ust. V).

Bliższe badanie symetrii kinetycznej jest zadaniem ciekawem, dającym się rozpatrywać niezależnie od teorii kształtu ziemi, co jednak w tej chwili jest dla nas zbyt dalekiem.

Oznaczmy teraz dla krótkości

$$\frac{1}{2} \int x^3 dm = DMk^3, \quad \frac{1}{2} \int y^3 dm = EMk^3, \quad \frac{1}{2} \int z^3 dm = FMk^3,$$

$$\frac{3}{2} \int yz^2 dm = D_1 Mk^3, \quad \frac{3}{2} \int zy^2 dm = D_2 Mk^3,$$

$$\frac{3}{2} \int zx^2 dm = E_1 Mk^3, \quad \frac{3}{2} \int xz^2 dm = E_2 Mk^3,$$

$$\frac{3}{2} \int xy^2 dm = F_1 Mk^3, \quad \frac{3}{2} \int yx^2 dm = F_2 Mk^3,$$

$$\int xyz dm = H \cdot Mk^3,$$

gdzie $D, E, F, D_1, E_1, \dots, H$ są liczbami (niemianowaniami), które możnaby nazwać parametrami dyssymetrii, k zaś pewną długością, wprowadzoną już poprzednio dla nadania jednorodności poszczególnym wyrazom. Ilości k będzie wolno nadać następnie pewną umówioną wartość tak, iż takowa w końcu wypadnie z rachunku.

Funkcja Q_3 będzie tedy po łatwych przeróbkach

$$\begin{aligned} Q_3 = Mk^3 \{ & D\xi (5\xi^2 - 3r^2) + E\eta (5\eta^2 - 3r^2) + F\zeta (5\zeta^2 - 3r^2) \\ & + D_1\eta(5\zeta^2 - r^2) + E_1\zeta(5\xi^2 - r^2) + F_1\xi(5\eta^2 - r^2) \\ & + D_2\zeta(5\eta^2 - r^2) + E_2\xi(5\zeta^2 - r^2) + F_2\eta(5\xi^2 - r^2) + 5H\xi\eta\zeta \}, \end{aligned}$$

przyczem

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Zauważymy jeszcze, że obie funkcje Q_2 i Q_3 są funkcjami jednorodnemi trzech zmiennych ξ, η, ζ czyli, że poszczególne dodajniki tych funkcyj są wszystkie równego wymiaru, tj. drugiego a względnie trzeciego stopnia.

Niebawem zobaczymy, iż pomiędzy dziesięcioma parametrami dyssymetrii istnieją w teorii kształtu ziemi pewne związki, które ich liczbę pozwolą zredukować do pięciu — wprzód jednak wprowadzimy równanie powierzchni sferoidu.

§. VIII.

Równanie powierzchni sferoidu. Z poprzednio podanej definicyi powierzchni S będącej w każdym punkcie normalną do kierunku pozornej siły ciężkości, wnosimy, iż ta powierzchnia jest ciągłą nawet tam, gdzie oceanów nie ma. Powierzchnia S może bowiem przecinać (i jak wiemy przecina) masy kontynentów wznoszące się ponad nią; ponieważ jednak pozorna siła ciężkości składa się tak dobrze z przyciągania masy zamkniętej powierzchnią S , jak i z przyciągania części kontynentów zewnątrz S położonych, jak wreszcie z działania siły odśrodkowej ruchu obrotowego ziemi, któreto siły zmieniają swą wielkość i kierunek w sposób ciągły, przeto kierunek normalnej do sferoidu S musi się w taki sam sposób zmieniać na całym jego obszarze.

Jeżeli ω oznaczać będzie chyżość kątową ruchu obrotowego ziemi, to składowe przyspieszenia normalnego w tym ruchu (tj. siły odśrodkowej) są jak wiadomo

$$\omega^2 \xi, \quad \omega^2 \eta, \quad 0,$$

tak, iż potencjał tej siły wymyślonej (*fingirte Kraft*) będzie

$$\int (\omega^2 \xi d\xi + \omega^2 \eta d\eta + 0 \cdot d\zeta) = \frac{\omega^2}{2} (\xi^2 + \eta^2).$$

Oznaczając przez W potencjał wszystkich sił czynnych na punkt (ξ, η, ζ) , znajdziemy równanie powierzchni sferoidu S z warunku

$$W = \frac{M}{r} + \frac{Q_2}{r^3} + \frac{Q_3}{r^5} + \frac{\omega^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) = \text{stałej} = \frac{M}{q},$$

gdzie zamiast „stałej“ napisaliśmy iloraz $\frac{M}{q}$ zawierający nieokreśloną jeszcze stałą ilość q .

Ażeby dalszy rachunek poprowadzić z zamierzoną i potrzebną dokładnością, zauważmy, iż (§§. III i IV) funkcja Q_2 zawiera ilości tego samego rzędu małości, co spłaszczenie σ , funkcja Q_3 zaś ilości wprawdzie rzędu wyższego od σ , lecz niższego od σ^2 (symbolicznie rzędu $\frac{3}{2}$ go), że wreszcie ilości proporcjonalne do kwadratu i wyższych potęg spłaszczenia odpadają jako usuwające się dokładności pomiarów i leżące już w obrębie ich prawdopodobnych błędów. Ztąd wynika, że ocalimy jeszcze potrzebną tu dokładność rachunków teoretycznych, jeżeli pominiemy kwadraty i iloczyny funkcyj ω^2 , Q_2 , Q_3 jako ilości 2go, $\frac{5}{2}$ go, 3go, itd. rzędu małości.

To zastrzegłszy otrzymamy z ostatniego równania

$$r = q + q \cdot \frac{Q_2}{Mr^4} + q \cdot \frac{Q_3}{Mr^6} + q \cdot \frac{\omega^2}{2M} r (\xi^2 + \eta^2),$$

a że — według tego, co się przed chwilą powiedziało — w wyrazie drugim, 3cim i 4tym prawej strony zamiast r wolno położyć wprost q , przeto

$$r = q + \frac{Q_2}{Mq^3} + \frac{Q_3}{Mq^5} + \frac{q^2 \omega^2}{2M} (\xi^2 + \eta^2),$$

a widać ztąd zarazem, jakie znaczenie posiada wprowadzona powyżej ilość q . Jestto promień kuli, na którą zamieniłby się sferoid S , gdyby masa M była centrobaryczną, a zarazem nieruchomą (gdyż wówczas $\omega = 0$).

W ostatniem równaniu drugi i czwarty dodajnik po prawej stronie jest, jak wiemy, rzędu spłaszczenia, trzeci wyraz rzędu wyższego niż σ ale niższego niż σ^2 ; promienie więc i siły odśrodkowe w różnych punktach równika ¹⁾ nie są tedy całkiem równe, ale różnice ich są rzędu wyższego nad drugi, tak iż w czwartym wyrazie iloczyn $\omega^2 q$ przedstawia wielkość siły odśrodkowej na równiku. W tem samym przybliżeniu iloraz $\frac{M}{q^2}$ będzie przedstawiał wielkość rzeczywistej siły ciężkości na równiku, zatem stosunek γ tych dwóch sił będzie

$$\gamma = \omega^2 q : \frac{M}{q^2} = \frac{a^2 \omega^2}{M} \cdot q,$$

zkaż

$$\frac{q \omega^2}{2M} = \frac{\gamma}{2q},$$

a równanie sferoidu S będzie

$$r = q + \frac{Q_2}{Mq^3} + \frac{Q_3}{Mq^3} + \frac{\gamma}{2q} (\xi^2 + \eta^2).$$

Długość k (§. VI) pozostała dotąd nieoznaczoną: biorąc teraz $k = q$, napiszemy z uwagi na wartości funkcyj Q_2 i Q_3 (§. VI i VII)

$$\begin{aligned} r = q + \frac{1}{q} (A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi^2) + \frac{\gamma}{2q} (\xi^2 + \eta^2) \\ + \frac{1}{q^2} \left\{ D\xi(5\xi^2 - 3r^2) + E\eta(5\eta^2 - 3r^2) + F\xi(5\xi^2 - 3r^2) \right. \\ + D_1\eta(5\xi^2 - r^2) + E_1\xi(5\xi^2 - r^2) + F_1\xi(5\eta^2 - r^2) \\ \left. + D_2\xi(5\eta^2 - r^2) + E_2\xi(5\xi^2 - r^2) + F_2\eta(5\xi^2 - r^2) + 5H\xi\eta\xi \right\}, \end{aligned}$$

a to jest szukanem równaniem powierzchni sferoidu S , wyrażonem we współrzędnych prostokątnych

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} (A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi^2) + \frac{\gamma}{2q} (\xi^2 + \eta^2) = v, \\ \frac{1}{q^2} \left\{ D\xi(5\xi^2 - 3r^2) + \dots + 5H\xi\eta\xi \right\} = w, \end{aligned}$$

napiszemy powyższe równanie w kształcie zwięzłym

$$r - q - v - w = 0,$$

¹⁾ Właściwie płaszczyzny XOY , gdyż równik może być w ogólności krzywą przestrzenną (zob. §§. XI i XIII).

gdzie v i w są funkcjami jednorodnymi zmiennych ξ , η , ζ stopnia 2go a względnie 3go, pierwsza 1go, druga $\frac{3}{2}$ go rzędu małości (§§. III i IV).

§. IX.

Biegunowe równanie sferoidu. Chcąc mieć to samo równanie we współrzędnych biegunowych — co jest ważnem w zastosowaniu — oznaczymy przez λ długość geograficzną (liczoną od południka odpowiadającego jednej z dwóch głównych osi bezwładności na płaszczyźnie XOY) przez φ szerokość geocentryczną, a będzie nasamprzód

$$\xi = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad \eta = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad \zeta = r \sin \varphi;$$

podstawiając to w ostatnie równanie i zważając, że r od q różni się o ilości rzędu spłaszczenia, którego kwadrat i wyższe potęgi pomijamy, będziemy mieli równanie biegunowe

$$\begin{aligned} r = q \{ & 1 + A \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + B \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + C \sin^2 \varphi \\ & + D \cos \varphi \cos \lambda (5 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - 3) + E \cos \varphi \sin \lambda (5 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda - 3) + F \sin \varphi (5 \sin^2 \varphi - 3) \\ & + D_1 \cos \varphi \sin \lambda (5 \sin^2 \varphi - 1) + E_1 \sin \varphi (5 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - 1) + F_1 \cos \varphi \cos \lambda (5 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda - 1) \\ & + D_2 \sin \varphi (5 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda - 1) + E_2 \cos \varphi \cos \lambda (5 \sin^2 \varphi - 1) + F_2 \cos \varphi \sin \lambda (5 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - 1) \\ & + 5 H \cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \lambda \cos \lambda + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \varphi \} . \end{aligned}$$

Równanie to oprócz ilości q i γ wyznaczających rozmiar sferoidu i wielkość siły odśrodkowej, zawiera 13 parametrów A, B, C, D, E, \dots, H , które mogą być znalezione albo za pomocą pomiarów geodezyjno-astronomicznych, albo też za pomocą doświadczeń wahadłowych, a przypomnimy jeszcze, że ich liczba daje się zredukować do 8miu, skutkiem istnienia 5ciu związków pomiędzy nimi, jak to poniżej (§. XII) okażemy. Rzut oka na ostatnie równanie poucza natychmiast, że dziesięć wyrazów mnożonych przez D, E, F, \dots, H zawdzięcza swe istnienie dyssymetrii powierzchni S względem trzech głównych osi bezwładności; symetryja tego rodzaju wymagałaby bowiem, aby wartość r nie ulegała zmianie, skoro kąty φ i λ zamieniają się na $-\varphi$ i $(\pi + \lambda)$, co nie ma miejsca. Widzimy zarazem, że możliwa różnica krzywizny półkuli północnej i południowej znajduje w powyższym wzorze wyjaśnienie teoretyczne; różnica taka (jeżeli w ogóle istnieje), może być rzędu $\frac{3}{2}$ go.

§. X.

Wypadek symetryi kinetycznej. Jeżeli wyrazy pochodzące z dyssymetrii sferoidu ziemskiego względem jej trzech głównych osi bezwładności pominiemy, a jeżeli nadto przypuszczimy, że S jest powierzchnią obrotową około osi Z (t. j. osi wirowania), to $A=B$, a zostanie

$$r = q \left\{ 1 + (A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi) + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \varphi \right\} .$$

Kładąc teraz dla krótkości $C - A = K$, więc

$$A = \frac{C-A}{2} = \frac{K}{2}, \quad C = A + C = -K,$$

otrzymamy:

$$r = a \left\{ 1 - K + \frac{3K + \gamma}{2} \cdot \cos^2 \varphi \right\},$$

a że dla $\varphi = 0$ ma być $r = r_0$, to

$$r_0 = a \left\{ 1 - K + \frac{3K + \gamma}{2} \right\};$$

dzieląc obydwa te równania i zważając, że w przybliżeniu tutaj użytym, kwadraty i wyższe potęgi ilości K, γ należy pominąć, napiszemy

$$r = r_0 \left[1 - \frac{(3K + \gamma)}{2} \sin^2 \varphi \right].$$

Ztąd widać, że w razie dokładnej symetrii masy M względem trzech głównych płaszczyzn (mieszczących w sobie 3 główne osie bezwładności), powierzchnia S jest eliptycznym sferoidem (obrotowym) spłaszczoneym. Spłaszczenie σ takiego sferoidu jest widocznie

$$\sigma = \frac{3K + \gamma}{2}.$$

Zauważymy jeszcze ten ciekawy szczegół, iż z kombinacji pomiarów geodezyjnych z pewnymi obserwacjami astronomicznymi dają się oznaczyć obydwa główne momenta bezwładności oddzielnie.

Według A. R. CLARKEA¹⁾, najprawdopodobniejszą wartością spłaszczenia σ jest $\frac{1}{293.465} = 0.003408$, stosunek γ siły odśrodkowej na równiku do ciężkości tamże wynosi bardzo blisko $\frac{1}{289.1} = 0.003469$, ząd znajdujemy

$$K = 0.001119.$$

Według najstaranniejszych poszukiwań J. U. LEVERRIERA i A. SERRETA: stała precesyi księżycowo-słonecznej, t. j. iloraz $\frac{C-A}{C} = \frac{K}{C}$ wynosi bardzo blisko²⁾ 0.003273 , zatem

$$C = \frac{0.001119}{0.003273} = 0.341888,$$

a następnie

$$A = C - K = 0.340769.$$

¹⁾ Colonel A. R. CLARKE, *Geodesy* (Clarendon Press, Oxford 1880), pag. 319.

²⁾ *Annales de l'Observatoire impériale de Paris*. (Mémoires, Tome V) 1859, pag. 324.

Same momenta bezwładności ziemi około małej osi i którejkolwiek średnicy równikowej znajdziemy, mnożąc ostatnie liczby przez Mq^2 (§. VI). Powyższe liczby byłyby

$$0.401833 \quad \text{i} \quad 0.400464 ;$$

gdyby ziemia była jednorodną, jak o tem łatwo przekonać się można, jeżeli zważymy, że momenta bezwładności posiadają wówczas wartości

$$\frac{2}{5} Ma^2 \quad \text{i} \quad \frac{1}{5} M(a^2 + c^2) ,$$

przyczem półoś równikowa a i biegunowa c oblicza się wzorami

$$a = q(1 - K + \sigma) , \quad c = q(1 - K) .$$

Rzeczywiste momenta bezwładności ziemi są więc 1.17534, a względnie 1.17518 razy mniejsze od tych momentów, jakiby były, gdyby ziemia była całkiem jednorodną przy tej samej masie, jaką istotnie posiada.

§. XI.

Równoleżniki, południki i linija geodezyjna. Ażeby znalezione równanie powierzchni sferoidu S mogło być zastosowaniem do pomiarów geodezyjnych, potrzeba z niego wyprowadzić równania pewnych krzywych na nim leżących, a to tych właśnie, wzdłuż których bywają wykonywane pomiary. Takimi krzywymi są równoleżniki, południki i linije geodezyjne, a właściwie tylko pierwsza i trzecia, gdyż wszystkie pomiary południka, jakie się wykonywają, są — ściśle biorąc — pomiarami linii geodezyjnej, której dwa skrajne punkty leżą na jednej płaszczyźnie, przechodzącej przez małą oś sferoidu ziemskiego.

Nie leży to wcale w naszym zamiarze wyprowadzać tutaj wzory, z którychby mogli korzystać geodeci praktyczni i w obec prac dokonanych od czasu LAPLACEA byłoby to po prostu zbytecznem. Teoretyczna geodezyja — jak to już we wstępie napomknęliśmy — przez cały szereg prac BESSELA, BAËYRA a wreszcie przez najświetniejsze prace YVONA VILLARCEAU tak została wykończoną, iż pewnie nie wiele dałoby się jeszcze nowego w tym względzie powiedzieć. Ostatni zwłaszcza uczony, uogólniając znany wzór LAPLACEA ¹⁾, wiążący długości geograficzne z azymutami końcowych punktów linii geodezyjnej, bez względu na to, jakie odchylenia pionu występują na mierzonym obszarze tej linii, załatwił — mojem zdaniem — teoretyczną stronę sprawy w sposób zasadniczy.

W drugiej części pracy niniejszej obiecuję sobie wykazać, że przynajmniej dopóki sieci geodezyjne nie zostaną rozprzestrzenione na większych obszarach powierzchni ziemi jak dotychczas, co więcej, dopóki gęste archipelagi nie zostaną włączone w ogólną sieć geodezyjną — metody praktycznej geodezyi są właściwemi tylko do wyznaczenia rozmiarów nie zaś kształtu ziemi, uważanej jako całość. W dzisiejszych warunkach, — nie waham się tego wypowiedzieć, — ostatnie zagadnienie może oczekiwać swego rozwiązania tylko ze strony doświadczeń nad zmianą siły ciężkości w różnych miejscach globu ziemskiego: najstaranniejsze pomiary geodezyjne, np. europejskie lub wschodnio-indyjskie, dają tylko kształt i rozmiary

¹⁾ *Mecanique celeste* T. II. chap. V.

elipsoidy stycznej niejako do tych obszarów, nie powiadając atoli nic o jakości krzywienia się pozostałych obszarów, a najmniej olbrzymich obszarów oceanów. Użycie drugiej metody usuwa zaś tę trudność, gdyż doświadczenia wahadłowe rozsiane licznie po wszystkich prawie zakątkach ziemi i po dalekich a samotnych wyspach pozwalają już dzisiaj z wielką dokładnością wyznaczyć wielorakie różnice w krzywieniu się powierzchni sferoidu ziemskiego, jak to w części drugiej okażemy. Z tych tedy powodów nie mamy potrzeby wyprowadzenia wzorów, służących za podstawę pomiarom a w ogóle praktycznym czynnościom geodezyjnym, a ograniczamy się do wzorów rozświecających jakość krzywienia się sferoidu wzdłuż pewnych linii krzywych. Pomędzy temi najważniejsze dla nas będą równoleżniki jako te linie wzdłuż których siła ciężkości ma być rzekomo stałą.

Równoleżnikami sferoidu będą krzywe, wzdłuż których szerokość geograficzna ψ jest stałą, tj. dla których normalne sferoidu zamykają z małą jego osią kąty stałe. Jeżeli

$$u = 0,$$

jest równaniem sferoidu, to równaniem dowolnego równoleżnika będzie

$$\sin \psi = \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}},$$

gdzie

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad u_3 = \frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Krzywa ta będzie w ogólności kołem tylko wtedy, gdy sferoid jest obrotowym, w każdym innym razie zaś będzie ona krzywą o podwójnej krzywiznie.

Według §. VIIIgo równanie sferoidu daje się pisać tak:

$$u = r - q - v - w = 0,$$

gdzie

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

zaś v, w są ilościami rzędu σ a względnie σ^3 tak, iż kwadraty, iloczyny i wyższe potęgi tych ilości wolno już pominąć. Z uwagi, że

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\xi}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\eta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial \zeta} = \frac{\zeta}{r},$$

otrzymamy

$$u_1 = \frac{\xi}{r} - \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad u_2 = \frac{\eta}{r} - \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad u_3 = \frac{\zeta}{r} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \zeta};$$

podnosząc te wyrażenia do kwadratu z dokładnością tutaj potrzebną

$$u_1^2 = \frac{\xi^2}{r^2} - 2 \frac{\xi}{r} \frac{\partial v}{\partial \xi} - 2 \frac{\xi}{r} \frac{\partial w}{\partial \xi},$$

$$u_2^2 = \frac{\eta^2}{r^2} - 2 \frac{\eta}{r} \frac{\partial v}{\partial \eta} - 2 \frac{\eta}{r} \frac{\partial w}{\partial \eta},$$

$$u_3^2 = \frac{\zeta^2}{r^2} - 2 \frac{\zeta}{r} \frac{\partial v}{\partial \zeta} - 2 \frac{\zeta}{r} \frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

a więc

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{r^2} - \frac{2}{r} \left(\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) - \frac{2}{r} \left(\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right).$$

Otóż funkcje v i w są jednorodnymi rzędu 2go a względnie 3go (§. VIII); na mocy więc znanego twierdzenia o funkcjach jednorodnych ¹⁾, mamy

$$\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 2v,$$

$$\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 3w,$$

zatem

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 - \frac{2}{r} (2v + 3w),$$

a podnosząc do potęgi $-\frac{1}{2}$ w przybliżeniu tu wymaganem

$$(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{r} (2v + 3w).$$

Skutkiem tego ogólnem równaniem równoleżników (po pominięciu ilości rzędu 2go i wyższych) będzie

$$\sin \psi = \frac{\zeta}{r} \left(1 + \frac{2v + 3w}{r} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right),$$

a podstawiając tu jeszcze za r wartość wyrażoną za pomocą q , v , w otrzymamy w tem samym przybliżeniu

$$\sin \psi = \frac{\zeta}{q} \left(1 + \frac{2v + 3w}{q} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right).$$

Równanie to (po wstawieniu weń wartości na v i w) przedstawia powierzchnię konoidu, którego tworzące są nachylone pod stałym kątem ψ do płaszczyzny XOY ; przecięcie się jego z powierzchnią sferoidu daje właśnie równoleżnik, odpowiadający szerokości geograficznej ψ .

Z uwagi, że

$$\zeta = r \sin \varphi = (q + v + w) \sin \varphi,$$

¹⁾ Zob. przypisek 4ty.

możemy ostatnim równaniom nadać kształt dogodniejszy

$$\sin \psi = \sin \varphi \left(1 + \frac{2v + 3w}{a} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \right),$$

gdzie dopiero ilości rzędu wyższego niż w zostały pominięte.

§. XII.

Na tem miejscu będzie najwłaściwiej zauważyć, że dokładność przybliżenia naszego zezwala na zmniejszenie liczby dziesięciu parametrów dyssymetrii do liczby pięciu, jak o tem już wyżej napomknęliśmy (§. IX), skutkiem czego trzynastce liczbowych parametrów we funkcjach Q_2 i Q_3 redukuje się do liczby $3 + 5 = 8$.

Z uwagi, że momenta dyssymetrii są już ilościami rzędu małości $\frac{3}{2}$ go i że wszystkie dotychczasowe nasze wiadomości pod względem kształtu ziemi okazują, iż aberacja sferoidu S od kształtu obrotowego jest rzędu wyższego niż spłaszczenie, możemy zidentyfikować wszystkie te momenta dyssymetrii, które powstają przez proste przestawienie głosek x i y pod znakiem całkowania. Widocznie bowiem różnica pomiędzy takimi momentami dyssymetrii jest rzędu przynajmniej o jedność wyższego niż one same, a więc przynajmniej $\frac{5}{2}$ rzędu. W ten sposób otrzymamy związki

$$\begin{aligned} \int x^3 dm &= \int y^3 dm, \\ \int xy^2 dm &= \int x^2 y dm, \\ \int xz^2 dm &= \int yz^2 dm, \\ \int x^2 z dm &= \int xyz dm = \int y^2 z dm, \end{aligned}$$

co daje się pisać także tak (§. VII):

$$(I) \begin{cases} D = E, & F_1 = F_2, & E_2 = D_1, \\ & & E_1 = D_2 = \frac{H}{2} \end{cases}$$

i to są owe powyżej zapowiedziane związki.

Wracając po tej dygresyi do równoleżników, starajmy się uzyskane powyżej dla nich równanie tak przerobić, aby ogólny promień r jakoteż i szerokość geocentryczna φ zostały wyrażone we funkcyi długości geograficznej λ . Do tego celu posłuży następujący rachunek.

Gdyby sferoid był kulą, to $v = 0$, $w = 0$, $r = a$, zatem $\sin \psi = \frac{z}{a} = \sin \varphi$; dla tak małej aberacji od kształtu kulistego, jaka ma miejsce dla ziemi, różnica kątów ψ i φ jest rzędu spłaszczenia, skutkiem czego we wszystkich wyrazach rzędu σ lub wyższego wolno zamiast φ

położyć wprost ψ . Oznaczając tedy przez v' i w' wartości funkcyj v i w wówczas, gdy w nich ψ zamiast φ położymy, będzie

$$\sin \varphi = \sin \psi + \left(\frac{\partial v'}{\partial \zeta} + \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) - \frac{(2v' + 3w')}{q} \sin \psi.$$

Według §. VIIIgo mamy

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{2C\zeta}{q},$$

$$\begin{aligned} q^2 \frac{\partial w}{\partial \zeta} &= (4E_1 - D_2 - 3F)\xi^2 + (4D_2 - E_1 - 3F)\eta^2 + 3(2F - E_1 - D_2)\zeta^2 \\ &+ 2(4D_1 - 3E - F_2)\eta\zeta + 2(4E_2 - 3D - F_1)\zeta\xi + 5H\xi\eta, \end{aligned}$$

wstawiając to, jakoteż i wartości na v , w w ostatnie równanie, wyrażając ξ , η , ζ za pomocą r , φ , λ , zastępując φ gdzie należy przez ψ , korzystając ze związków (I) i zachowując potrzebne przybliżenie, otrzymamy

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \\ &= \sin \psi + 2C \sin \psi + 3(H - F) \cos^2 \psi + 3(2F - H) \sin^2 \psi \\ &+ 2(4D_1 - 3D - F_1) \cos \psi \sin \psi (\cos \lambda + \sin \lambda) + 5H \cos^2 \psi \cos \lambda \sin \lambda \\ &- [2(A \cos^2 \psi \cos^2 \lambda + B \cos^2 \psi \sin^2 \lambda + C \sin^2 \psi) + \gamma \cos^2 \psi] \sin \psi \\ &- \left\{ 3D \cos \psi [\cos \lambda (5 \cos^2 \psi \cos^2 \lambda - 3) + \sin \lambda (5 \cos^2 \psi \sin^2 \lambda - 3)] + 3F \sin \psi (5 \sin^2 \psi - 3) \right. \\ &+ 3D_1 \cos \psi (5 \sin^2 \psi - 1) (\cos \lambda + \sin \lambda) + 3F_1 \cos \psi [\cos \lambda (5 \cos^2 \psi \sin^2 \lambda - 1) + \sin \lambda (5 \cos^2 \psi \cos^2 \lambda - 1)] \\ &\left. + \frac{3}{2} H \sin \psi (5 \cos^2 \psi - 2) + 15H \cos^2 \psi \sin \psi \cos \lambda \sin \lambda \right\} \sin \psi. \end{aligned}$$

Ten rozwlekły wzór staje się znowu bardzo prostym, jeżeli pominiemy wpływ dyssymetrii globu ziemskiego. Wówczas, jak wiemy, sferoid będzie eliptycznym, a równanie dające związek między geocentryczną a geograficzną szerokością, jakoteż długością będzie

$$\sin \varphi = \sin \psi - 2 \left(A \cos^2 \lambda + B \sin^2 \lambda - C + \frac{\gamma}{2} \right) \cos^2 \psi \sin \psi,$$

a jeżeli nadto sferoid będziemy uważali za obrotowy, tj. $A = B = \frac{K}{2}$, $C = -K$ (§. Xty), to

$$\sin \varphi = [1 - (3K + \gamma) \cos^2 \psi],$$

lub także

$$\text{tang } \varphi = (1 - 2\sigma) \text{ tang } \psi,$$

jak to dostatecznie wiadomo.

§. XIII.

Ażeby okazać, jak poprzednie wywody dają się zastosować do rzeczywistych pomiarów geodezyjnych, oznaczymy teoretyczną długość kawałka równoleżnika, odpowiadającego danej szerokości geograficznej ψ . Powyższe równanie biegunowe równoleżnika piszemy krótko

$$\sin \varphi = \sin \psi + \beta ,$$

gdzie β jest agregatem pozostałych wyrazów, będących rzędu σ i wyższego, przyczem widocznie ilość ta jest funkcją samej zmiennej λ (szerokość geograficzna ψ jest bowiem stałą).

Z ostatniego równania, w potrzebnem tu przybliżeniu znajdujemy jeszcze

$$\cos \varphi = \cos \psi - \beta \operatorname{tang} \psi ,$$

zatem

$$\xi = (q + v' + w') (\cos \psi - \beta \operatorname{tg} \psi) \cos \lambda ,$$

$$\eta = (q + v' + w') (\cos \psi - \beta \operatorname{tg} \psi) \sin \lambda ,$$

$$\zeta = (q + v' + w') (\sin \psi + \beta) ,$$

gdzie akcenta przy głoskach v i w oznaczają, jak dawniej (§. XII), że w wyrażeniach v , w (§. XI) kąt φ został zmienionym na ψ .

Z tą samą dokładnością będzie

$$\xi = q \cos \psi \cos \lambda + (v' + w') \cos \psi \cos \lambda - q\beta \operatorname{tg} \psi \cos \lambda ,$$

$$\eta = q \cos \psi \sin \lambda + (v' + w') \cos \psi \sin \lambda - q\beta \operatorname{tg} \psi \sin \lambda ,$$

$$\zeta = q \sin \psi + (v' + w') \sin \psi + q\beta ;$$

różniczkując te wyrażenia względem jedynej tu zmiennej λ i kładąc tymczasowo dla skrótowania

$$\frac{\partial (v' + w')}{\partial \lambda} = K_1 , \quad \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = K_2 ,$$

otrzymamy

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = -q \cos \psi \sin \lambda - (v' + w') \cos \psi \sin \lambda + K_1 \cos \psi \cos \lambda + q\beta \operatorname{tg} \psi \sin \lambda - q K_2 \operatorname{tg} \psi \cos \lambda ,$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = q \cos \psi \cos \lambda + (v' + w') \cos \psi \cos \lambda + K_1 \cos \psi \sin \lambda - q\beta \operatorname{tg} \psi \cos \lambda - q K_2 \operatorname{tg} \psi \sin \lambda ,$$

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = K_1 \sin \psi + q K_2 .$$

Podnosząc te równania do kwadratu, dodając je do siebie, wyciągając następnie drugi pierwiastek z pominięciem kwadratów, iloczynów i wyższych potęg ilości v' , w' β K_1 K_2 i zważając, że

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = ds^2 ,$$

gdzie ds jest różniczką łuku równoleżnika, otrzymamy

$$ds = [q \cos \psi + (v' + w') \cos \psi - a\beta \operatorname{tang} \psi] d\lambda,$$

a całkując w granicach od λ_1 do λ_2

$$s = q(\lambda_2 - \lambda_1) \cos \psi + \cos \psi \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (v' + w') d\lambda - q \operatorname{tang} \psi \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta d\lambda,$$

które to równanie wyznacza długość kawałka dowolnego równoleżnika za pomocą szerokości geograficznej ψ i skrajnych długości λ_1 , λ_2 . Aby ten wzór przystosować do rzeczywistych obliczeń, potrzeba wskazane tutaj całkowania wykonać, co jednak w tej chwili jest dla nas zbyt trudnym.

Tutaj nasuwają się jeszcze dwie uwagi. Nasamprzód widać z ostatniego równania, że gdy zostanie pominięta funkcja w' i ta część funkcji β , która od parametrów dyssymetrii jest zawisła, to błąd taki będzie się objawiał jako „odchylenie pionu“ w długości geograficznej; powtóre, że gdy kąt ψ jest dość wielkim, to wpływ błędów pomiarów i obliczeń na wartość trzeciego wyrazu staje się dość znacznym, czyli że dokładność rachunków geodezyjnych musi uciepnieć, gdy kąt ψ wzrasta. Jedyne dotąd równoleżnik, na którym znaczniejszy pomiar długości został wykonany jest 52° (sześćdziesiąt kilka stopni długości od Valencyi w Irlandyi do Orska nad Uralem): z powyższego widać, iż geodezyja zyskałaby wiele na wykonaniu pomiaru drugiego równoleżnika w mniejszej szerokości geograficznej.

§. XIV.

Dla równika jest $\psi = 0$; szerokość geocentryczna φ nie jest wprawdzie wówczas w ogólności zerem, lecz posiada wartość zmienną (rzędu wyższego niż spłaszczenie), zależną od długości λ i parametrów dyssymetrii. Z uwagi, że natenczas φ jest bardzo małym, otrzymamy

$$\varphi = 3 \left(\frac{1}{2} H - F \right) + 5H \cos \lambda \sin \lambda.$$

Ztąd widać, iż najwyżej w czterech punktach szerokość geocentryczna na równiku jest zerem (tj. równą szerokości geograficznej; biorąc bowiem $\varphi = 0$, otrzymamy warunek w kształcie

$$\sin 2\lambda = \frac{3(2F - H)}{5H}.$$

Jeżeli na 2λ wypada ztąd kąt ostry p , to widocznie także kąty $(\pi - p)$, $(2\pi + p)$ i $(3\pi - p)$ dogadzają temu warunkowi: dla kąta λ wypadają ztąd cztery (mniejsze od 2π) wartości

$$\frac{p}{2}, \quad \frac{\pi - p}{2}, \quad \pi + \frac{p}{2} \quad \text{i} \quad \pi + \frac{\pi - p}{2},$$

tak, iż dwom pierwszym punktom odpowiadają diametralnie dwa inne.

Płaszczyzna XOY zostaje tedy przez linię o podwójnej krzywiznie jaką jest równik przeciętą albo w 4ch albo w żadnym punkcie (mianowicie gdy $\frac{3(2F - H)}{5H} > 1$). Płaszczyzna

wspomniana XOY (zawierająca w sobie jak wiemy dwie boczne osie bezwładności), przecina zaś sferoid ziemski w krzywej oczywiście płaskiej, którą należy pilnie odróżniać od równika.

Równaniem jej będzie (§. IX)

$$\frac{r}{a} = 1 + (A \cos^2 \lambda + B \sin^2 \lambda) + (4F_1 - 3D - D_1) (\cos \lambda + \sin \lambda) + 5(D - F_1) (\cos^3 \lambda + \sin^3 \lambda),$$

co od równania koła różni się widocznie tylko o ilości rzędu wyższego niż spłaszczenie.

§. XV.

Południki ziemskie wyznaczają się z następującego warunku ¹⁾.

Kładąc przez oś ziemi i zenit danego punktu na powierzchni ziemi płaszczyznę, przecinającą pozorne sklepienie nieba w wielkiem kole, szukamy wszystkich tych miejsc powierzchni ziemi, których zenity leżą w tem samem kole wielkiem. Miejsca te leżą na jednym i tym samym południku ziemskim, który zatem jest w ogólności linią krzywą o podwójnej krzywiznie. Ten warunek daje się jeszcze zastąpić dogodniejszym, jeżeli będziemy szukali wszystkich tych punktów sferoidu ziemskiego, których normalne leżą w jednej płaszczyźnie, przechodzącej przez oś obrotu ziemi; miejsce geometryczne wszystkich takich punktów będzie właśnie szukany południkiem ziemskim. Na tej zasadzie możnaby z łatwością wynaleźć równanie dowolnego południka, obliczyć długość jego kawałka, odpowiadającego skrajnym szerokościom geograficznym ψ_1 i ψ_2 i t. d. — ponieważ jednak geodezyjne pomiary południka są, ściśle biorąc, pomiarami linii geodezyjnej, przeto odnośne rachunki mogą dla nas przedstawiać tylko drugorzędny interes i z tego powodu je tu pomijamy.

§. XVI.

Linija geodezyjna jestto krzywa na sferoidzie ziemskim (a w ogólności na dowolnej ciągłej powierzchni), wzdłuż której wykonywa się praktycznie pomiar odległości dwóch punktów na powierzchni sferoidu. Linija ta jest w ogólności krzywą o podwójnej krzywiznie, a wyznacza się z warunku, że normalna główna (t. j. normalna leżąca w płaszczyźnie ściśle stycznnej) tej krzywej, pada stale na kierunek normalnej do powierzchni sferoidu w odpowiednim punkcie ²⁾. Bezpośredni następstwem tego jest, że linija geodezyjna jest najkrótszą, jaką na powierzchni sferoidu można poprowadzić między dwoma danymi na nim punktami, z wyjątkiem bardzo szczególnych przypadków, dla których ta własność przestaje być prawdziwą ³⁾.

Bliższe szczegóły linii geodezyjnej na globie ziemskim i należące tutaj rozważania „odchylenia pionu“ w kierunku południka (tj różnic między astronomiczną i geodezyjną szerokością geograficzną) pozostawiamy sobie do części drugiej.

¹⁾ LAPLACE *Mécanique céleste* T. II. pag. 109.

²⁾ LAPLACE *Méc. cél.* l. c. pag. 111.

³⁾ Np. MOIGNO *Leçons sur le calcul des variations.* Paris 1861, pag. 271.

§. XVII.

Prawo ciężkości na powierzchni sferoidu. Na wyrażenie potencjału rzeczywistej siły ciężkości i siły odśrodkowej otrzymaliśmy powyżej (§. VIII) wyrażenie

$$W = \frac{M}{r} + \frac{Q_2}{r^5} + \frac{Q_3}{r^7} + \frac{\omega^2}{2} (\xi^2 + \eta^2).$$

Pochodne cząstkowe funkcji W względem współrzędnych ξ , η , ζ przedstawiają, jak wiadomo, składowe pozornej siły ciężkości, wzięte równoległe do kierunków osi współrzędnych. Z uwagi, że

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2,$$

zkaąd

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\xi}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\eta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial \zeta} = \frac{\zeta}{r},$$

otrzymamy te składowe

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = -\frac{M}{r^2} \cdot \frac{\xi}{r} + \frac{1}{r^5} \frac{\partial Q_2}{\partial \xi} - \frac{5Q_2\xi}{r^7} + \frac{1}{r^7} \frac{\partial Q_3}{\partial \xi} - \frac{7Q_3\xi}{r^9} + \omega^2 \xi,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = -\frac{M}{r^2} \cdot \frac{\eta}{r} + \frac{1}{r^5} \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} - \frac{5Q_2\eta}{r^7} + \frac{1}{r^7} \frac{\partial Q_3}{\partial \eta} - \frac{7Q_3\eta}{r^9} + \omega^2 \eta,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} = -\frac{M}{r^2} \cdot \frac{\zeta}{r} + \frac{1}{r^5} \frac{\partial Q_2}{\partial \zeta} - \frac{5Q_2\zeta}{r^7} + \frac{1}{r^7} \frac{\partial Q_3}{\partial \zeta} - \frac{7Q_3\zeta}{r^9},$$

przyczem pochodne cząstkowe funkcji Q_2 i Q_3 względem zmiennych ξ , η , ζ odnoszą się tak dobrze do tych zmiennych wyrażnie w Q_2 i Q_3 zachodzących, jak i do tych, które znajdują się we funkcji $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. W ostatnich równaniach po prawej stronie, drugie, trzecie i szóste wyrazy są rzędu σ , czwarte i piąte rzędu $\sigma^{\frac{3}{2}}$ (§§. III i IV); jeżeli tedy dokładność rozwinięć ograniczamy po ilości rzędu σ^2 , które jak wiemy, padają już w obręb błędów spostrzeżeń, to

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{M^2}{r^4} \xi^2 - 2 \frac{M\xi}{r^5} \left(\frac{1}{r^5} \frac{\partial Q_2}{\partial \xi} - \frac{5Q_2\xi}{r^7} + \frac{1}{r^7} \frac{\partial Q_3}{\partial \xi} - \frac{7Q_3\xi}{r^9} + \omega^2 \xi \right),$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{M^2}{r^4} \eta^2 - 2 \frac{M\eta}{r^5} \left(\frac{1}{r^5} \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} - \frac{5Q_2\eta}{r^7} + \frac{1}{r^7} \frac{\partial Q_3}{\partial \eta} - \frac{7Q_3\eta}{r^9} + \omega^2 \eta \right),$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)^2 = \frac{M^2}{r^4} \zeta^2 - 2 \frac{M\zeta}{r^5} \left(\frac{1}{r^5} \frac{\partial Q_2}{\partial \zeta} - \frac{5Q_2\zeta}{r^7} + \frac{1}{r^7} \frac{\partial Q_3}{\partial \zeta} - \frac{7Q_3\zeta}{r^9} \right).$$

Jeżeli G jest całkowitą (pozorną) siłą ciężkości w danym miejscu sferoidu ziemskiego, to

$$G^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)^2,$$

a więc według powyższego ¹⁾

$$G^2 = \frac{M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^6} \left(\xi \frac{\partial Q_2}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial Q_2}{\partial \zeta} \right) + \frac{10M}{r^4} Q_2 - \frac{2M}{r^{10}} \left(\xi \frac{\partial Q_3}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial Q_3}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial Q_3}{\partial \zeta} \right) + \frac{14M}{r^{10}} Q_3 - \frac{2M\omega^2}{r^8} (\xi^2 + \eta^2).$$

Otóż Q_2 i Q_3 są funkcjami jednorodnymi trzech zmiennych ξ , η , ζ — pierwsza stopnia 2go, druga stopnia 3go; na mocy więc znanego twierdzenia o funkcjach jednorodnych ²⁾

$$\xi \frac{\partial Q_2}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial Q_2}{\partial \zeta} = 2Q_2, \quad \xi \frac{\partial Q_3}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial Q_3}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial Q_3}{\partial \zeta} = 3Q_3,$$

zatem

$$G^2 = \frac{M^2}{r^4} \left\{ 1 + \frac{6Q_2}{Mr^4} + \frac{8Q_3}{Mr^6} - \frac{2r\omega^2}{M} (\xi^2 + \eta^2) \right\};$$

podnosząc do potęgi $\frac{1}{2}$ i zastępując wewnątrz klamry ilość r wprost przez q (§. VIII), otrzymamy w potrzebnem tu przybliżeniu

$$G = \frac{M}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3Q_2}{Mq^4} + \frac{4Q_3}{Mq^6} - \frac{q\omega^2}{M} (\xi^2 + \eta^2) \right\}.$$

Jeżeli na chwilę położymy

$$s = \frac{Q_2}{Mq^4} + \frac{Q_3}{Mq^6} + \frac{q\omega^2}{2M} (\xi^2 + \eta^2),$$

to (§. VIII) $r = q(1+s)$, a więc z potrzebną tu dokładnością

$$r^{-2} = q^{-2} (1-2s),$$

skutkiem czego

$$G = \frac{M}{q^2} \left\{ 1 - 2s + \frac{3Q_2}{Mq^4} + \frac{4Q_3}{Mq^6} - \frac{q\omega^2}{M} (\xi^2 + \eta^2) \right\},$$

¹⁾ Niektórzy autorowie szukając wyrażenia na całkowitą siłę ciężkości z dokładnością kwadratu spłaszczenia, biorą tę siłę równą $-\frac{\partial W}{\partial r}$ (zob. np. H. BRUNS: *Die Figur der Erde* Berlin 1878, pag. 17). Będzie to prawdziwem tylko wtedy, jeżeli dokładność rachunku sięga do σ włącznie, a nie — jak sądzą — aż po σ^2 .

²⁾ Zob. przypisek 4ty.

czyli

$$G = \frac{M}{q^2} \left\{ 1 + \frac{Q_2}{Mq^2} + \frac{2Q_3}{Mq^4} - \frac{2q\omega^2}{M} (\xi^2 + \eta^2) \right\},$$

a tu potrzeba jeszcze tylko podstawić wartości na Q_2 i Q_3 , aby otrzymać prawo ciężkości na powierzchni sferoidu S .

§. XVIII.

Wzór CLAIRAUTA. Gdybyśmy pominęli wyraz Q_3 , pochodzący z dyssymetrii kształtu i masy globu ziemskiego, a zarazem sferoid S uważali za obrotowy (będący natenczas, jak wiemy, eliptycznym), to byłoby

$$G = \frac{M}{q^2} \left\{ 1 + \frac{Q_2}{Mq^2} - \frac{2q\omega^2}{M} (\xi^2 + \eta^2) \right\},$$

a ponieważ natenczas (§§. VI i X)

$$\begin{aligned} Q_2 &= Mq^2 \left[\frac{K}{2} (\xi^2 + \eta^2) - K\xi^2 \right] = \frac{Mq^2 K}{2} (\xi^2 + \eta^2 - 2\xi^2) \\ &= \frac{Mq^2 r^2 K}{2} (1 - 3 \sin^2 \varphi), \end{aligned}$$

zaś

$$\frac{q\omega^2}{M} = \frac{\gamma}{q^2},$$

(§. VIII), przeto z uwagi, że K jest już rzędu spłaszczenia, zamiast r należy wewnątrz klamry położyć wprost q , skutkiem czego

$$G = \frac{M}{q^2} \left\{ 1 - 2\gamma + \frac{K}{2} + (2\gamma - \frac{3}{2} K) \sin^2 \varphi \right\}.$$

Jeżeli G_0 jest pozorną siłą ciężkości na równiku (który w tym razie jest krzywą płaską i kołem), to

$$G_0 = \frac{M}{q^2} \left\{ 1 - 2\gamma + \frac{K}{2} \right\},$$

zatem

$$G - G_0 = \frac{M}{q^2} \left(2\gamma - \frac{3}{2} K \right) \sin^2 \varphi,$$

a więc z dokładnością tutaj przyjętą

$$\frac{G - G_0}{G_0} = \left(2\gamma - \frac{3}{2} K \right) \sin^2 \varphi.$$

Aby się pozbyć ilości K zauważmy, że dla spłaszczenia σ eliptycznego sferoidu otrzymaliśmy wyrażenie (§. X)

$$\sigma = \frac{3}{2} K + \frac{\gamma}{2}, \quad \text{z kąd } \frac{3}{2} K = \sigma - \frac{\gamma}{2};$$

podstawiając tę wartość w ostatnie równanie, napiszemy ostatecznie

$$\frac{G - G_0}{G_0} = \left(\frac{5}{2} \gamma - \sigma \right) \sin^2 \varphi,$$

któryto związek jest niczem innym, jak właśnie wzorem CLAIRAUTA dla zmienności siły ciężkości na powierzchni sferoidu eliptycznego. Ponieważ współczynnik $\left(\frac{5}{2} \gamma - \sigma \right)$ jest rzędu spłaszczenia, przeto zamiast szerokości geocentrycznej φ można w tym wzorze wziąć także szerokość geograficzną ψ , kąty te różnią się bowiem od siebie tylko o ilości rzędu spłaszczenia.

Oznaczając przez G_1 siłę ciężkości na biegunie, otrzymamy słynny wzór

$$\frac{G_1 - G_0}{G_0} = \frac{5}{2} \gamma - \sigma,$$

wyprowadzony po raz pierwszy przez CLAIRAUTA sposobem zupełnie odmiennym od powyższego, a nadto w przypuszczeniu współśrodkowego ustroju mas we wnętrzu sferoidu.

Z przebiegu rachunku widać, że wzory CLAIRAUTA będą wystarczającym przybliżeniem do prawdy tylko wówczas, gdy

- a) pominiemy ilości proporcjonalne do kwadratu i wyższych potęg spłaszczenia;
- b) pominiemy nawet ilości proporcjonalne do σ^2 , a pochodzące, jak wiemy, z dyssymetrii sferoidu;
- c) sferoid będziemy uważali za obrotowy, gdyż inaczej pojęcie spłaszczenia σ staje się wieloznacznem.

Ponieważ trzecie, a zwłaszcza drugie z tych przypuszczeń nie może być dopuszczonem w obec dzisiejszej dokładności tak pomiarów geodezyjnych jakoteż i doświadczeń wahadłowych ¹⁾, przeto obydwie związki dopiero wyprowadzone będą niedostateczne, jeżeli chodzi o teoretyczne zdanie sprawy tak ze zjawisk „odchylenia pionu“ jak i z wielkiej różnicy w rozdzieleniu siły ciężkości na powierzchni sferoidu.

§. XIX.

Uzupełnienie wzorów CLAIRAUTA. Chcąc znaleźć związek analogiczny do wzoru CLAIRAUTA, uwzględniający jednak niezupełną symetrię globu ziemskiego, tj. inwolwujący w sobie

¹⁾ Że perturbacje ciężkości (więc i anormalne długości wahadła sekundowego są rzędu wyższego od σ , lecz niższego od σ^2 , zob. przypisek 5ty.

perturbacje siły ciężkości, podstawmy we wzorze §. XVII wartości za Q_2, Q_3, ξ, η , to ograniczając dokładność rachunku do przybliżenia tutaj wymaganego, otrzymamy

$$G = \frac{M}{q^2} \left\{ 1 + U + 2\Omega - 2\gamma \cos^2 \varphi \right\},$$

gdzie

$$U = A \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + B \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + C \sin^2 \varphi,$$

$$\Omega = D \cos \varphi \cos \lambda (5 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda - 3) + \dots + 5H \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos \lambda \sin \lambda.$$

Równania te dają związek między wielkością pozornej siły ciężkości a współrzędnymi φ i λ w każdym punkcie sferoidu ziemskiego. Widać ztąd, że ciężkość zależy od obydwóch tych kątów równocześnie, że więc—ogólnie mówiąc—ilość G na jednym i tym samym równoleżniku nie posiada wszędzie jednakiej wartości. Iloraz

$$\frac{M}{q^2}$$

(który najdogodniej będzie oznaczać na przyszłość jedną głoską P), nie posiada tu tak wyraźnego znaczenia jak w prostszym przypadku symetrycznego i eliptycznego sferoidu obrotowego. Przedstawia on mianowicie wielkość pozornej siły ciężkości we wszystkich miejscach powierzchni ziemi, dla których kąty φ i λ dogadzają warunkowi

$$U + 2\Omega - 2\gamma \cos^2 \varphi = 0,$$

któreto równanie odpowiada całej linii krzywej (o podwójnej krzywiznie) na sferoidzie S .

Na równiku szerokość geograficzna $\psi = 0$, szerokość geocentryczna φ tylko najwyżej w 4 punktach równika może być dokładnie równą zero, zresztą jest ona małym kątem tego samego rzędu co parametry dyssymetrii. Zatem dla funkcji $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$ na równiku należy wziąć wartość $= 1$, a względnie zero we wszystkich wyrazach mnożonych przez $A, B, C, D, \dots H$ oznaczając więc przez G_0 wartość (słabo zmienną) funkcji G na równiku, napiszemy

$$G_0 = P(1 + U_0 + 2\Omega_0 - 2\gamma),$$

gdzie

$$U_0 \text{ jest wartością funkcji } U \text{ dla } \varphi = 0,$$

$$\Omega_0 \text{ " " " " } \Omega \text{ " } \varphi = 0.$$

Jeżeli β jest przyrostem siły ciężkości G od równika do bieguna wziętym wzdłuż pewnego uważanego południka, a podzielonym przez ciężkość na równiku, t.j. jeżeli

$$\beta = \frac{G_1 - G_0}{G_0},$$

gdzie

$$G_1 = P(1 + U_1 + 2\Omega_1)$$

jest ciężkością na równiku, to

$$\beta = (U_1 - U_0) + 2(\Omega_1 - \Omega_0) + 2\gamma,$$

przyczem oczywiście

$$U_1 \text{ jest wartością funkcji } U \text{ dla } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\Omega_1 \text{ " " " } \Omega \text{ " } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Na wyrażenie zmiennego promienia sferoidu S mamy (§§. IX i XIX)

$$r = q \left(1 + U + \Omega + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \varphi \right),$$

zatem promienie równikowy i biegunowy

$$r_0 = q \left(1 + U_0 + \Omega_0 + \frac{\gamma}{2} \right),$$

$$r_1 = q \left(1 + U_1 + \Omega_1 \right),$$

więc spłaszczenie uważanego południka (z potrzebną dokładnością)

$$\sigma = \frac{r_0 - r_1}{r_0} = -(U_1 - U_0) - (\Omega_1 - \Omega_0) + \frac{\gamma}{2}.$$

Dodając tę równość do powyższej otrzymanej dla β , napiszemy

$$\beta + \sigma = \frac{5}{2} \gamma + (\Omega_1 - \Omega_0),$$

gdzie wyraz $(\Omega_1 - \Omega_0)$ jest widocznie funkcją samej długości geograficznej λ .

Ztąd wynika, że przyrost siły ciężkości wzdłuż uważanego południka od równika aż do bieguna, powiększony spłaszczeniem tego południka, równa się $\frac{5}{2}$ stosunku siły odśrodkowej na równiku do ciężkości tamże, więc pewnej funkcji (słabo zmiennej) długości geograficznej λ , a na tem polega właśnie uzupełnienie wzoru CLAIRAUTA. Jeżeli wpływ dyssymetrii globu ziemskiego pominiemy, to obie ilości Ω_1 , Ω_0 znikają, a ostatni związek zamienia się na zwykły i dobrze znany wzór tego uczonego, co już w §. XVIII okazaliśmy.

Może się jednak zdarzyć, że w pewnych szczególnych razach prosty wzór CLAIRAUTA jest zupełnie dokładnym. Nastąpi to zawsze dla wartości na λ dogadzających warunkowi

$$\Omega_1 - \Omega_0 = 0,$$

któreto równanie — jak łatwo spostrzedz — daje się przywieść do postaci

$$A_3 \sin^3 \lambda + A_2 \cos \lambda \sin^2 \lambda + A_1 \cos^2 \lambda \sin \lambda + A_0 \cos^3 \lambda = A_4,$$

gdzie A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 są ilościami stałymi, zależnymi tylko od parametrów dyssymetrii D , E , F , H . Pisząc je tak :

$$\cos^3 \lambda (A_3 \operatorname{tg}^3 \lambda + A_2 \operatorname{tg}^2 \lambda + A_1 \operatorname{tg} \lambda + A_0) = A_4,$$

podnosząc do drugiej potęgi i wyrażając $\cos \lambda$ za pomocą $\operatorname{tg} \lambda$, otrzymamy

$$(A_3 \operatorname{tg}^3 \lambda + A_2 \operatorname{tg}^2 \lambda + A_1 \operatorname{tg} \lambda + A_0)^2 = A_2^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \lambda)^3,$$

równanie 6go stopnia względem $\operatorname{tg} \lambda$, dające najwyżej 6 różnych wartości na $\operatorname{tg} \lambda$, a więc i na λ (gdyż pozostałe 6 mogą się od tych różnić tylko o 180°). Ztąd wniosek, że

„Istnieje najwyżej 6 południków, dla których prawo wyrażone przez wzór CLAIRAUTA jest zupełnie dokładnem. W rzeczywistości może ich być tylko cztery, dwa, albo wreszcie nie być żadnego (w razie gdyby ostatnie równanie dawało na $\operatorname{tg} \lambda$ same pierwiastki urojone).“

§. XX.

W powyższem wyprowadzeniu uzupełnionego wzoru CLAIRAUTA staraliśmy się okazać, o ile dotychczasowy wzór musi ulegnąć zmianie, aby zdawał sprawę z perturbacyj wywołanych dyssymetrią ziemi, przyczem staraliśmy się zachować — ogólnie biorąc i o ile się to dało — zwykłą jego postać. Okażemy teraz, że z powyższych rozważań daje się wyprowadzić nowy, uwagi godny wzór i — o ile mi wiadomo — dotąd niespostrzeżony. Charakterystycznym w tym wzorze — zastępującym w zupełności znany wzór CLAIRAUTA — jest to, iż jest on zupełnie niezależnym od parametrów dyssymetrii globu ziemskiego.

W poprzednim ustępie mieliśmy dwa współistniejące równania, jedno na wyrażenie β , drugie na wyrażenie spłaszczenia σ , a rugując z nich ilość $(U_1 - U_0)$, otrzymaliśmy wzór analogiczny do CLAIRAUTOWSKIEGO. Rugując natomiast ilość $(\Omega_1 - \Omega_0)$ w obu tamtych równaniach zachodzącą, dochodzimy do związku

$$\beta + 2\sigma = (U_0 - U_1) + 3\gamma,$$

a z uwagi na znaczenie funkcji U_0 i U_1

$$\beta + 2\sigma = (A \cos^2 \lambda + B \sin^2 \lambda - C) + 3\gamma,$$

któreto równanie zupełnie nie zawiera parametrów dyssymetrii $D, E, F, \dots H$.

Związek ten w razie steroidu eliptycznego i obrotowego jest równoważnym ze wzorem CLAIRAUTA. Wówczas bowiem $A = B$, skutkiem czego

$$\beta + 2\sigma = (A - C) + 3\gamma,$$

a ponieważ w razie pominięcia perturbacji wynikającej z dyssymetrii

$$A = \frac{K}{2}, \quad C = -K.$$

(§. X), przeto

$$\beta + 2\sigma = \frac{3}{2} K + 3\gamma,$$

a że $\frac{3}{2} K = \sigma - \frac{\gamma}{2}$, więc ostatecznie

$$\beta + \sigma = \frac{5}{2} \gamma$$

dokładnie wzór CLAIRAUTA ¹⁾.

Ponieważ funkcja Q , nie zmienia swej wartości ale tylko znak, gdy współrzędne ξ, η, ζ przejdą na $-\xi, -\eta, -\zeta$, czyli wyraz Ω zamienia się na $-\Omega$, gdy

$$\begin{aligned} \varphi & \text{ zamienimy na } -\varphi & , \\ \lambda & \text{ „ „ „ } \lambda + \pi & , \end{aligned}$$

przeto oznaczając przez r' i G' wartości r i G , gdy współrzędne punktu na sferoidzie są $-\varphi$ i $(\lambda + \pi)$, otrzymamy

$$\begin{aligned} r' &= q \left(1 + U - \Omega + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \varphi \right) , \\ G' &= P \left(1 + U - \Omega - \gamma \cos^2 \varphi \right) . \end{aligned}$$

Łącząc te równania z poprzednimi

$$\begin{aligned} r &= q \left(1 + U + \Omega + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \varphi \right) , \\ G &= P \left(1 + U + \Omega - \gamma \cos^2 \varphi \right) , \end{aligned}$$

otrzymamy w potrzebnem tu przybliżeniu

$$\frac{r - r'}{r_0} = 2\Omega \quad , \quad \frac{G - G'}{G_0} = 4\Omega$$

zskąd

$$\frac{G - G'}{G_0} = 2 \cdot \frac{r - r'}{r_0} .$$

Dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$ będzie

$$\frac{G_1 - G'_1}{G_0} = 2 \cdot \frac{r_1 - r'_1}{r_0} ,$$

albo

$$\frac{G_1 - G_0}{G_0} - \frac{G'_1 - G_0}{G_0} = 2 \left\{ \frac{r_1 - r_0}{r_0} - \frac{r'_1 - r_0}{r_0} \right\} ,$$

czyli

$$(\beta - \beta') = 2 (\sigma - \sigma') .$$

¹⁾ Zob. przypisek 6ty.

Jeżeli tedy w ogóle istnieje podstawa do mniemania, że spłaszczenia południków na półkuli południowej są cokolwiek odmienne od spłaszczeń na półkuli północnej, to różnica spłaszczeń obydwóch półkul równa się połowie różnicy zmian siły ciężkości od równika do biegunów na obydwóch półkulach.

Czy taka różnica spłaszczeń w ogólności istnieje, nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć, zanim poddamy cały znany materiał doświadczeń wahadłowych wyrównaniu za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Nie przesądzając rezultatu (który będzie owocem bardzo mozolnych rachunków w znacznej części już wykonanych przez piszącego), zaznaczamy w tej chwili tylko, że w razie istnienia takiej różnicy spłaszczeń na obydwóch półkulach, obliczenia odnośne na podstawie zwykłego wzoru CLAIRAUTA, maskują raczej rzeczywisty stan rzeczy, zamiast go śledzić.

§. XXI.

Linije isograwiczne. Ponieważ na pewnym równoleżniku pozorna siła ciężkości (tj. od grawitacji i zarazem siły odśrodkowej pochodząca) ściśle biorąc nie jest stałą, ale podlega wzdłuż tej linii krzywej malutkim zmianom zależnym — jakto widzieliśmy — od rozmaitości rozdzielania mas niezupełnie symetrycznego względem 3 głównych osi bezwładności ziemi, przeto będzie ważnem i ciekawem zapytać, wzdłuż których linii na globie ziemskim ta siła posiada wielkość stałą. Krzywe takie, które możnaby nazwać krótko isograwicznymi lub isograwami, będą widocznie bardzo zbliżone do równoleżników, ale w ogólności nie będą one nigdy zupełnie na nie padały. Na karcie globu ziemskiego, wykonanej według pewnej projekcji (najlepiej MERKATORA), dałby się więc bieg tych linii przedstawić podobnie jak np. linii isotermicznych, isoklinicznych lub isodynamicznych¹⁾; z góry jednak można być pewnym, że aberracje ich pochodzą od biegu równoleżników będą nieporównanie mniejszemi aniżeli w układach ostatnich krzywych. Ogólnem równaniem całego systemu tych krzywych będzie oczywiście (§. XIX)

$$U + 2\Omega - 2\gamma \cos^2 \varphi = \text{Const.} ,$$

gdzie za U i Ω należy podstawić wartości ich wyrażone we funkcji kątów φ i λ , jakoteż ośmiu parametrów $A, B, C, D, \dots H$ (§. XII). Chociaż nie znamy dotąd istotnych wartości parametrów dyssymetrii $D, E, \dots H$ (ich wyznaczenie jest rzeczą pomiarów geodezyjnych z jednej, a doświadczeń wahadłowych z drugiej strony²⁾), to jednak wiemy z góry, że wartości ich są znacznie mniejsze od A, B, C ; nadto wiemy, że różnica ilości A i B jest tego samego rzędu małości co wspomniane parametry dyssymetrii, a to sprawia, iż linije isograwiczne nawet na większych kartach będą się niewydatnie różniły od równoleżników. Chcąc rozmaitość rozdzielania siły ciężkości na globie ziemskim uwydatnić wyraźniej na kartach, potrzeba się chwycić cokolwiek odmiennego sposobu.

¹⁾ W ostatnim dziesiątku lat zachwiana została doktryna o niezmienności siły ciężkości nawet w jednym i tem samym miejscu na powierzchni ziemi; jak się zdaje ulega ona (podobnie jak temperatura powietrza i jego ciśnienie) zmianom rocznym a nawet dziennym, jakkolwiek nadzwyczaj małym. Zob. pod tym względem bardzo ciekawy artykuł: *On the gravitational Observatories*. (W. THOMSON: *Treat. on nat. philosophy*, new edition II. pag. 391).

²⁾ Obliczenia tych parametrów, kształtu (a względnie spłaszczenia) sferoidu ziemskiego i zmian ciężkości na jego powierzchni podam w części drugiej pracy niniejszej.

Najprościej będzie wziąć średnią siłę ciężkości Γ z całego równoleżnika badanego i dla każdej na nim leżącej miejscowości przypadającą tam ciężkość G pomniejszyć o Γ , a różnicę tę wyrazić w jednostkach średniej siły ciężkości ¹⁾. Nazywając ilość J ztąd wypadającą krótko anomalią grawitacyjną, możemy teraz wszystkie te miejscowości globu ziemskiego, które posiadają równe anomalie grawitacyjne połączyć idealnymi linijami krzywymi, a układ krzywych w ten sposób powstałych możemy nazwać isanomalami grawitacyjnymi.

Z uwagi, że (§. IX)

$$G = P (1 + U + 2\Omega - 2\gamma \cos^2 \varphi) ,$$

więc

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G d\lambda = \frac{P}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + U + 2\Omega - 2\gamma \cos^2 \varphi) d\lambda \\ &= P \left\{ 1 + \frac{A+B}{2} \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi - 2\gamma \cos^2 \varphi \right\} , \end{aligned}$$

gdyż

$$\int_0^{2\pi} \Omega d\lambda = 0 , \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \lambda d\lambda = \int_0^{2\pi} \sin^2 \lambda d\lambda = \pi ,$$

anomalia grawitacyjna

$$J = \frac{G - \Gamma}{P} ,$$

będzie (po łatwej redukcji)

$$J = \frac{A - B}{2} \cos^2 \varphi \cdot \cos 2\lambda + 2\Omega .$$

Biorąc $J =$ stałej, otrzymujemy ztąd równanie odpowiadające pewnej isanomali grawitacyjnej; zmieniając wartość tej stałej sposobem ciągłym otrzymalibyśmy zatem cały układ tych krzywych na globie ziemskim. Dopóki wartości parametrów dyssymetrii wchodzących we funkcję Ω nie są znane, dopóty nie można nic bliższego orzec o kształcie i naturze tych krzywych; to tylko jest pewnem, że bieg ich będzie w wysokim stopniu zawisłym od rozdzielienia lądów i oceanów na powierzchni ziemi.

Gdybyśmy pominęli wyrazy pochodzące z dyssymetrii sferoidu, to ogólnem równaniem isanomaliów byłoby

$$\cos^2 \varphi (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) = \text{stałej}$$

albo wprowadzając współrzędne DESCARTESA

$$z^2 - r^2 = C' (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) ,$$

co przedstawia układ ostrokregów drugiego stopnia, mających swe wierzchołki w środku sferoidu. Przecięcie się takiego ostrokregu z powierzchnią sferoidu S , (który w tym razie jest eliptycznym

¹⁾ Pomysł tego przedstawienia rzeczy został użyty z wielką korzyścią w klimatologii i należy się profesorowi H. DOVEMU.

nieobrotowym) daje właśnie isanomale. Z uwagi, że $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ jest ilością prawie stałą, równanie rzutu isanomali na płaszczyznę XOY będzie

$$\xi^2 - \eta^2 = C'q^2,$$

przedstawia więc szereg hyperbol równobocznych. W rzeczywistości rzuty te będą cokolwiek odmienne; z wejrzenia będą one jednak prawdopodobnie zbliżone do hyperbol.

§. XXII.

Możnaby jeszcze poszukiwać miejscowości na sferoidzie ziemskim, gdzie siła ciężkości osiąga swe maximum lub minimum. Jeżeli dla pewnego λ , więc w przybliżeniu dla pewnego południka (§. XV) szukamy miejsc, gdzie ciężkość staje się największą lub najmniejszą, to należy położyć

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} + 4\gamma \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

Maximum ciężkości na pewnym południku będzie leżeć w każdym razie bardzo blisko bieguna ziemi; szerokość geocentryczna φ będzie zatem bardzo bliską $\frac{\pi}{2}$. Kładąc

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \tau,$$

gdzie τ jest bardzo małym kątem (mogącym w danym razie stawać się zerem), będziemy mieli w dostatecznym przybliżeniu

$$\cos \varphi = \tau, \quad \sin \varphi = 1,$$

wykonywając naznaczone różniczkowania cząstkowe funkcji U i Ω (§. XIX), podstawiając ostatnie wartości, opuszczając wszystkie potęgi małej ilości τ wyższe nad pierwszą, otrzymamy

$$\begin{aligned} & (A \cos^2 \lambda + B \sin^2 \lambda - C - 2\gamma - 12F + E_1 + D_2 + 10E_1 \cos^2 \lambda + 10D_2 \sin^2 \lambda + 10H \cos \lambda \sin \lambda) \tau \\ & = (3D - 4E_2 + F_1) \cos \lambda + (3E - 4D_1 + F_2) \sin \lambda, \end{aligned}$$

z kądem po pominięciu iloczynów DF , E_2F , DH , EH , $(A-B)D$, i t. d. i uwzględnieniu równań (I) §. XII wypada

$$\tau = \frac{(3D - 4D_1 + F_1)}{(A - C - 2\gamma)} (\cos \lambda + \sin \lambda),$$

a że bardzo blisko $(A - C - 2\gamma) = -0.00524$ (§. X), przeto

$$\tau = \frac{(4D - F_1 - 3D)}{0.00524} (\cos \lambda + \sin \lambda).$$

Ponieważ w ogólności agregat $(4D_1 - F_1 - 3D)$ nie potrzebuje być zerem, przeto istnieje na każdym południku w pobliżu bieguna miejsce, gdzie ciężkość osiąga swoje maximum.

Jeżeli szukamy bezwzględnego maximum, to należy do poprzedniego dołączyć jeszcze równanie

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{i. j.} \quad \frac{\partial U}{\partial \lambda} + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0,$$

wykonywując różniczkowanie cząstkowe i wprowadzając ilość τ zamiast kąta φ napiszemy

$$\tau \{ (B-A) \tau \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda + 11(D_2 - E_1) \tau \cos \lambda \sin \lambda + 5H \tau \cos 2\lambda + (3D - 4E_2 + F_1) - (3E - 4D_1 + F_2) \} = 0,$$

z kąd albo $\tau = 0$, albo

$$[(B-A) \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda - 11(E_1 - D_2) \cos \lambda \sin \lambda + 5H \cos 2\lambda] \tau = 3(E-D) - 4(D_1 - E_2) + (F_2 - F_1),$$

a bacząc na związki (I) §. XII

$$[(B-A) \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda + 5H \cos 2\lambda] \tau = 0,$$

z kąd tylko ¹⁾ $\tau = 0$. Bezwzględne maximum siły ciężkości pada zatem dokładnie w geograficzne bieguny ziemi. Zauważyć jednak musimy, iż ostatniemu równaniu można uczynić zadość, biorąc

$$(B-A) \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda + 5H \cos 2\lambda = 0,$$

z kąd znając A, B, H wyznajduje się kąt λ , mogący również odpowiadać pewnemu maximum w okolicy biegunów. Odpowiednia szerokość geocentryczna znajduje się następnie za pomocą wzoru na τ podanego wyżej.

W podobny sposób szuka się miejsc na sferoidzie S , w których siła ciężkości osiąga swoje minimum. Z równania warunkowego

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0,$$

(pamiętając, iż w tym razie kąt φ jest bardzo bliskim zera), otrzymamy w dostatecznym przybliżeniu

$$\varphi = \frac{5(E_1 \cos^2 \lambda + D_2 \sin^2 \lambda + H \sin \lambda \cos \lambda) - (3F + E_1 + D_2)}{(A - C - 2\gamma)}$$

albo z uwagi na związki (I) §. XII i na wartość agregatu $(A - C - 2\gamma)$ powyżej podaną

$$\varphi = \frac{3(2F - H) - 5H \sin 2\lambda}{0.01048},$$

któryto związek przedstawia krzywą o podwójnej krzywiznie leżącą w pobliżu płaszczyzny XOY (a więc i równika ziemi). Krzywą powyższą możnaby całkiem odpowiednio nazwać grawitacyjnym równikiem ziemi.

¹⁾ Jeżeli mianowicie będziemy żądali od ostatniego równania, aby wyznaczało szerokość φ (a więc i kąt τ) szukanego miejsca, a nie jego długość λ .

Dla równika znaleźliśmy poprzednio (§. XIV) równanie

$$\varphi = 3 \left(\frac{1}{2} H - F \right) + 5H \sin \lambda \cos \lambda ;$$

porównywając je z poprzednim widzimy, że obie krzywe przestrzenne nie padają wcale na siebie, a przecinają się ze sobą najwyżej w czterech punktach ¹⁾, co więcej widać, iż grawitacyjny równik daleko więcej zbacza od kształtu koła i mocniej jest pociętym aniżeli równik geograficzny ²⁾.

§. XXIII.

Ciężkość zewnątrz sferoidu. W celu redukcji obserwowanych długości wahadła sekundowego, a więc i pozornej siły ciężkości ponad powierzchnią sferoidu, na powierzchnię morza, użyjemy równania (§. XIX).

$$G = \frac{M}{q^2} (1 + U + 2\Omega - 2\gamma \cos^2 \varphi) ,$$

Gdy wysokość stacy nad poziomem morza jest h , to ponieważ wpływ odpowiedniego, wzgórza, góry lub płaskowzgórza jest tylko jedną małą częścią tej perturbacji siły ciężkości której ogólna przyczyna leży w niezupełnie symetrycznym rozdzieleniu mas wewnątrz ziemi i na jej powierzchni ³⁾, przeto dla obydwóch stacyj funkcye U , Ω i ilość γ będą posiadały wartości różniące się od siebie tylko ilościami o jedność wyższego rzędu niż są same, zatem z potrzebną u dokładnością

$$G' = \frac{M}{(q + \delta)^2} (1 + U + 2\Omega - 2\gamma \cos^2 \varphi) ,$$

gdzie $(q + \delta)$ jest wartością parametru q dla stacyi wyżej nad poziomem morza położonej. Ztąd wynika

$$\frac{G'}{G} = \left(1 + \frac{\delta}{q} \right)^2 ,$$

a ponieważ dla obydwóch stacyj mamy na zasadzie powyższego

$$r = q \left(1 + U + \Omega + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \varphi \right) ,$$

i

$$r + h = (q + \delta) \left(1 + U + \Omega + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \varphi \right) ,$$

¹⁾ Daje się to okazać równając obie wartości na φ , co doprowadza do prostego równania, dającego dwie różne wartości na 2λ , a więc cztery różne wartości na kąt λ (§. XIV).

²⁾ Z powodu, że prawa strona jego równania ma za mianownik ilość $(A - C - 2\gamma)$, będącą, jak wiemy, rzędu spłaszczenia, podczas gdy mianownik w drugim razie $= 1$, liczniki zaś prawych stron w obu razach są tego samego rzędu małości.

³⁾ A więc nie tylko na samej powierzchni, jak to pospolicie przyjmują.

więc

$$h = \delta \left(1 + U + \Omega + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \varphi \right),$$

przeto z dostateczną dokładnością

$$= \left(1 + \frac{\delta}{q} \right)^2 = 1 + 2 \frac{h}{q},$$

gdzie dopiero ilości rzędu σ' opuszczonemi zostały. Skutkiem tego wzór mający służyć do redukcji siły ciężkości a więc i długości wahadła sekundowego na poziom morza będzie

$$G' = G \left(1 + 2 \cdot \frac{h}{q} \right),$$

wzór dobrze znany ¹⁾. Ten, a nie inny (BOUGUERA, YOUNGA lub POISSONA), wzór powinien być użytym do sprowadzenia ciężkości na poziom morza, jeżeli pragniemy pozostać konsekwentnie przy zasadniczych naszych wyobrażeniach ogólnej dyssymetrii ziemi, a nie tylko jej fizycznej powierzchni. Perturbacje „lokalne“ natężenia siły ciężkości w różnych miejscach globu ziemskiego są bowiem już przedstawione ²⁾ dziesięcioma wyrazami tak w ogólnym wzorze na G (§. XIX), jakoteż i w rozszerzonym wzorze CLAIRAUTA: nie ma więc żadnego powodu uwzględniać dwa razy jedną i tę samą korekcję, tem bardziej, że dokładność wzoru YOUNGA jest bardzo problematyczną ³⁾. W drugiej części niniejszej pracy przy sposobności istotnych obliczeń będziemy mieli zresztą sposobność przybliżonego wyznaczenia wielkości perturbacji, pochodzącej tylko od wzniesienia się kontynentów ponad poziom oceanów i przekonania się, że wpływ ten jest niedostatecznym do wyjaśnienia rozlicznych anormalnych długości wahadła sekundowego, że więc dyssymetryja mas ziemskich sięga znacznie większych głębokości aniżeli to sobie zwykle wyobrażamy.

§. XXIV.

Zakończenie. Na tem kończymy ogólną teorię kształtu i grawitacyi steroidu ziemskiego, teorię wyprowadzoną bez żadnych hipotez o wewnętrznym ustroju naszej planety,

¹⁾ Że ten prosty wzór należy przyjąć przy redukcjach doświadczeń wahadłowych, czuje dobrze Sir W. THOMSON, skoro przestrzega przed użyciem „reguły“ YOUNGA w takich razach „..... g is known by observation in different localities, with reduction to the sea level according to the square of the distance from the earth's centre (not according to Young's rule)“ (l. c. pag. 363).

²⁾ A przedstawienie to, jak wiemy, zdolne jest zdawać sprawę z całej esencyjonalnej strony tego zjawiska, tak iż zamiar wprowadzenia funkcji Q_4 lub Q_6 (§. IV) do rachunku musiały się rozbić o ograniczoną dokładność wszelkich naszych pomiarów.

³⁾ Pod tym względem bardzo trafne zdanie znajduję w rozprawie C. S. PEIRCEA (syna) „The corrections for elevation of the station above the level of the sea has hitherto been made by Dr. Young's rule, which is based on the assumption that all the earth and rock rising above the level of the sea is to be considered as attracting the pendulum as if it was so much additional matter beneath the pendulum in excess of what is found at the level of the sea. That this assumption so foreign to the facts of the case, does not accord with the determinations of gravity made at great elevations in the neighborhood, has often been pointed out“ (Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey for 1881. Washington 1883, pag. 442. Zob. nadto przypisek 7my.

a opartą jedynie na NEWTONOWSKIM prawie „wzajemnego przyciągania się mas.“ Praca ta wywołaną została niezupelną dostatecznością dotychczasowej teorii, która przymuszając sferoid ziemski do kształtu eliptycznego i obrotowego, nie zdołała dotąd zdać sprawy z różnic między pomiarami geodezyjnymi a obserwacjami astronomicznymi, dalej pozostawiała zagadkowe anomalije siły ciężkości (odpowiadające niekiedy kilkunastu wahniom wahadła sekundowego w przeciągu jednego dnia, jak np. na wyspach Bonin) zgoła niewyjaśnionemi. Wszelkie wysilenia zbliżenia obliczeń teoretycznych do rzeczywistych spostrzeżeń, a to na podstawie przybliżonych wiadomości o konfiguracji widzialnych nierówności globu ziemskiego, miały albo tylko częściowy skutek, albo były wprost bezskutecznymi. Nie pozostawało tedy nic innego, jak tylko rozstać się z myślą przedstawienia sferoidu ziemskiego jedną jedyną elipsoidą obrotową i wyznaczyć jego kształt, jakoteż rozdzielenie pozornej siły ciężkości z większą dokładnością, aniżeli to dotąd było praktykowanym i dopiero porównać takie dokładniejsze wzory z materiałem empirycznym: czynność mozolna i zawikłana, która będzie tworzyła część drugą niniejszej pracy.

PRZYPISEK I (do §. IIgo).

Rozwinięcie wyrażenia

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2t\theta + \theta^2}}$$

na szereg zbieżny daje się wykonać w rozmaity sposób, jak to okazali POISSON, LEJEUNE-DIRICHLET i inni geometrowie. Jeżeli chodzi o rozwinięcie powyższej funkcyi na zbieżny szereg postępujący według dodatnych potęg ilości θ , przyczem oczywiście $\theta < 1$, najprostszą drogą będzie następująca.

Położmy

$$T = (1 - 2t\theta + \theta^2)^{-\frac{1}{2}} = A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2 + A_3\theta^3 + \dots$$

gdzie współczynniki A_0, A_1, A_2, \dots są widocznie funkcyjami samej ilości t , to z uwagi, iż rozwinięcie to jest szeregiem MAC-LAURINA dla funkcyi T , będziemy mieli ogólnie

$$A_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n T}{d\theta^n} \right)_{(\theta=0)} \quad n! = 1. 2. 3 \dots (n-1)n.$$

Aby wyznaczyć pochodną

$$\frac{d^n T}{d\theta^n},$$

zauważmy, że

$$T^2 (1 - 2t\theta + \theta^2) = 1,$$

zkład przez różniczkowanie względem θ

$$2T \frac{dT}{d\theta} (1 - 2t\theta + \theta^2) + T^2 (-2t + 2\theta) = 0,$$

a dzieląc przez $2T$

$$\frac{dT}{d\theta} (1 - 2t\theta + \theta^2) + T (\theta - t) = 0.$$

Różniczkujemy teraz to równanie $(n-1)$ razy według θ , to posługując się twierdzeniem LEIBNITZA dla wyższych pochodnych iloczynu, otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} (1-2t\theta + \theta^2) \frac{d^n T}{d\theta^n} + \binom{n-1}{1} \frac{d^{n-1} T}{d\theta^{n-1}} (-2t + 2\theta) + 2 \binom{n-1}{2} \frac{d^{n-2} T}{d\theta^{n-2}} \\ + (\theta - t) \frac{d^{n-1} T}{d\theta^{n-1}} + \binom{n-1}{1} \frac{d^{n-2} T}{d\theta^{n-2}} \end{aligned} \right\} = 0,$$

kładając tu $\theta = 0$ i bacząc, że

$$\left(\frac{d^n T}{d\theta^n} \right)_{\theta=0} = n! A_n,$$

po zebraniu odpowiednich wyrazów i skróceniu przez $(n-1)!$ otrzymamy wzór

$$nA_n - (2n-1)tA_{n-1} + (n-1)A_{n-2} = 0,$$

z którego kolejno można znaleźć A_1, A_2, A_3, \dots

Mamy nasamprzód widocznie $A_0 = 1$, zatem

$$A_1 = t, \quad A_2 = \frac{3}{2} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$A_3 = \frac{5}{2} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right), \quad A_4 = \frac{35}{8} \left(t^4 - \frac{6}{7} t^2 + \frac{3}{35} \right), \dots$$

i t. d.

co można także pisać tak:

$$A_2 = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left(t^2 - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} \right), \quad A_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(t^3 - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 5} t \right),$$

$$A_4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(t^4 - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 7} t^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 5} \right), \dots \text{ i t. d.}$$

gdzie budowa współczynników A_2, A_3, A_4, \dots jest już widoczną. Kładąc tedy ogólnie

$$A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[r^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} r^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} r^{n-4} - \dots \right],$$

łatwo okazać, że jeżeli wzór ten jest ważnym dla pewnego wskaźnika (indexu) n , to musi być on także ważnym dla wskaźnika o jedność wyższego czyli dla $(n+1)$. A że jest on ważnym dla $n=2, 3, 4$, przeto będzie ważnym dla $n=5, 6, 7, \dots$ tj. wreszcie dla dowolnego n . A to było do okazania ¹⁾.



PRZYPISEK IIgi (do §. IIIgo).

Empirycznie odkryty fakt, że perturbacje kierunku siły ciężkości, spowodowane atrakcyjami lokalnymi mają wielkość leżącą między ilościami rzędu spłaszczenia σ a ilościami rzędu σ^2 , co symbolicznie określamy, znacząc że są one rzędu $\sigma^{\frac{3}{2}}$ (zob. §. III), znajduje potwierdzenie teoretyczne w następujący sposób.

Normalna do sferoidu eliptycznego (obrotowego i spłaszczonego)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad a > b,$$

będąca jak wiadomo kierunkiem pozornej siły ciężkości, zamyka z równikiem (tj. z płaszczyzną XOY) kąt $\psi =$ szerokości geograficznej uważanego miejsca M na powierzchni sferoidu, przyczem

$$\text{tang } \psi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \text{tang } \varphi,$$

gdzie φ jest geocentryczną szerokością punktu M . Gdyby sferoid był kulą, to $a=b$, $\psi=\varphi$, różnica więc $(\psi - \varphi)$ będzie perturbacją kierunku siły ciężkości spowodowaną eliptycznością sferoidu.

Kładąc $\psi = \varphi + \mu$, gdzie μ jest bardzo małym kątem (gdyż różnica $a-b$ jest bardzo małą), będziemy mieli w dostatecznym przybliżeniu

$$\text{tang } \psi = \text{tg } (\varphi + \mu) = \frac{\text{tg } \varphi + \mu}{1 - \mu \text{tg } \varphi} = \text{tang } \varphi + \mu \sec^2 \varphi,$$

(opuszczając kwadrat i wyższe potęgi ilości μ), skutkiem czego

$$\text{tg } \varphi + \mu \sec^2 \varphi = \frac{a^2}{b^2} \text{tg } \varphi, \quad \text{zkaąd } \mu = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin \varphi \cos \varphi.$$

¹⁾ Inne dowodzenia znaleźć można u POISSONA (*Connaissance des Temps*, pour 1829 pag. 333). RIEMANN: *Schwere, Elektrizität und Magnetismus* 1876 pag. 343, i t. d.

Jeżeli $\sigma = \frac{a-h}{a}$ jest spłaszczeniem sferoidu, to z powyższą dokładnością będzie

$$\mu = \psi - \varphi = 2\sigma \sin \varphi \cos \varphi = \sigma \sin 2\varphi,$$

perturbacja będąca w mowie jest zerem tak dla $\varphi = 0$, jak i dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a maximum osiąga dla $\varphi = 45^\circ$. Średnia wartość tej perturbacji będzie

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu d\varphi = \frac{2\sigma}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{2\sigma}{\pi} \quad (\text{w jednostce łukowej});$$

oznaczając tę wartość w jednostce kątowej przez μ' i biorąc spłaszczenie $= \frac{1}{294}$ otrzymamy

$$\mu' = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{294} \cdot \frac{180}{\pi} \quad \text{stopni},$$

albo

$$\mu' = \frac{21600}{294 \cdot \pi^2} = 7.44 \quad \text{minut kątowych.}$$

Kwadrat tej perturbacji wynosi $\left(\frac{2\sigma}{\pi}\right)$ w jednostkach łukowych, tj. $0.97''$ sekundy kątowej, podczas gdy atrakcyjne lokalne dosięgają 15 i 20 sekund kątowych.

Natomiast $\frac{3}{2}$ potęga ilości μ' , tj. $\left(\frac{2\sigma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$, zamieniona na jednostki kątowe, posiada wartość $20.78''$ sekundy kątowej. Maximum tej perturbacji wynosi oczywiście $\sigma^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{294}\right)^{\frac{3}{2}}$ w jednostkach łukowych, tj. $40.9''$ w jednostkach kątowych. Praktyka geodezyjna stwierdza istnienie takich różnic w kierunku pozornej siły ciężkości, spowodowanych rzekomo lokalnymi atrakcjami, a to upoważnia do uważania tych perturbacji za ilości $\sigma^{\frac{3}{2}}$ rzędu małości ¹⁾.

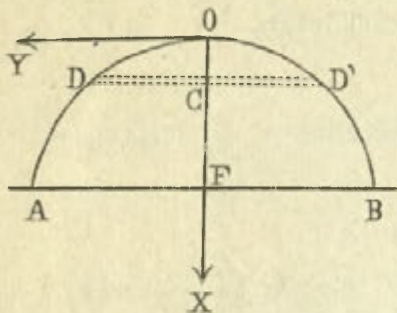
Zupełnie ten sam wniosek daje się wysnuć z rozważania perturbacji już nie kierunku, ale wielkości siły ciężkości, co okazemy w innym przypisku.

¹⁾ General CHODŹKO znalazł na Kaukazie nawet $54''$ różnicy między geodezyjną a astronomiczną szerokością, któryto rezultat chociażby nieco mylny, zawsze świadczy, do jakich rozmiarów ta perturbacja dojść może. (Zob. p. t. wzgl. Y. VILLARCEAU: *Procès-Verbaux des séances de la Commission permanente à Paris 1875* pag. 131).

PRZYPISEK 3ci (do §. Vgo).

Lokalne perturbacje siły ciężkości. Krytyka dotychczasowej metody (t. z. metody YOUNGA).

Wyobraźmy sobie masę górzystą m , wystającą ponad powierzchnię sferoidu S (§. I, 8) będącą ciałem obrotowym około osi pionowej. Wysokością jej ponad poziomem w S niech będzie h , promieniem (kołowej) podstawy k , zaś



$$y = f(x)$$

oraz obróceniem krzywej tworzącej swym obrotem osłonę masy m , o której przypuszczamy że jest jednorodną i ma gęstość ρ . Kładziemy początek O współrzędnych prostokątnych na szczycie masy m , oś symetrii (pionową) tej masy obrotowej obieramy za kierunek współrzędnych x . Przypuszczamy zarazem, że obszar zajęty przez masę AOB jest dostatecznie małym, aby część AFB powierzchni sferoidu S mogła uchodzić za płaską.

Szukamy teraz przyciągania masy m na punkty O i F . Oznaczając je przez A a względnie A' , rozetnijmy idealnie masę szeregiem płaszczyzn równoległych do poziomu AB na szereg cieniutkich krążków materyjalnych o grubości dx a zmiennym promieniu $CD=y$. Otóż wiadomo, że przyciąganie cieniutkiego materyjalnego krążka kołowego o promieniu a na punkt jego osi (prostopadłej do płaszczyzny krążka) o δ odległy od krążka

$$= 2\pi\rho \left[1 - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + a^2}} \right],$$

(THOMSON and TAIT *Natural Philosophy*, 2 edition Vol. I part 2, pag. 22);

zatem z uwagi, że

$$OF = h, \quad AF = k,$$

obie szukane atrakcje będą oczywiście

$$A = 2\pi\rho \int_0^h \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] dx \quad \text{i} \quad A' = 2\pi\rho \int_0^h \left[1 - \frac{(h-x)}{\sqrt{(h-x)^2 + y^2}} \right] dx,$$

gdzie całkowania mają się wykonać po wstawieniu za y wartości $f(x)$.

Zauważyć jeszcze należy, że oba te wyrażenia są dodatne, tj. że w punkcie O siła ciężkości zostaje o A powiększoną, w punkcie F zaś o A' pomniejszoną.

a) Paraboloid obrotowy. Przy tego rodzaju redukcjach lokalnych, uważają geodeci masę górzystą najczęściej za paraboloid obrotowy. Jeżeli tedy krzywa $ADOD'B$ jest parabolą (tworzącą)

$$y^2 = 2px,$$

to

$$A = 2\pi\rho \int_0^h \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2\rho x}} \right] dx, \quad A' = 2\pi\rho \int_0^h \left[1 - \frac{(h-x)}{\sqrt{(h-x)^2 + 2\rho x}} \right] dx.$$

Wykonywając całkowania w granicach wskazanych i zważając, że

$$k^2 = 2\rho h,$$

to wprowadziwszy jeszcze skrótanie

$$\beta = \frac{h}{k},$$

otrzymamy

$$A = 2\pi\rho k \left\{ \beta - \sqrt{\beta^2 + 1} + \frac{1}{2\beta} \log \left[\frac{\sqrt{\beta^2 + 1} + \beta}{\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta} \right] \right\},$$

$$A' = 2\pi\rho k \left[1 - \frac{1}{2\beta} \log(1 + 2\beta) \right].$$

Jeżeli (jak to zwykle bywa) wysokość h w porównaniu z k jest bardzo małą, to ułamek β jest bardzo małym, rozwijając więc logarytmy (naturalne) na szeregi aż po 4tą potęgę ułamka β otrzymamy

$$A = 2\pi\rho k\beta \left(1 - \frac{2\beta}{3} + \frac{1}{5} \beta^2 \right),$$

$$A' = 2\pi\rho k\beta \left(1 - \frac{4}{3} \beta + 2\beta^2 \right).$$

Jeżeli G jest ciężkością na poziomie, w razie gdyby masa m nie istniała, g zaś obserwowaną ciężkością na szczycie góry, g_1 ciężkością w tem samym miejscu gdyby masa m nie istniała, to nasamprzód

$$\frac{g_1}{G} = \frac{a^2}{(a+h)^2} = \left(1 + \frac{h}{a} \right)^{-2},$$

(gdzie a jest promieniem sferoidu, odpowiadającym punktowi F), albo w dostatecznym przybliżeniu

$$g_1 = G \left(1 - 2 \frac{h}{a} \right).$$

Otóż

$$g = g_1 + A = G \left(1 - 2 \frac{h}{a} \right) + A = G \left(1 - 2 \frac{h}{a} + \frac{A}{G} \right),$$

a ponieważ

$$G = \frac{4}{3} a^3 \pi D : a^2 = \frac{4}{3} \pi D a, \quad \text{gdzie } D \text{ jest średnią gęstością ziemi,}$$

w przybliżeniu zaś

$$A = 2\pi\rho k\beta = 2\pi\rho h,$$

przeto

$$\frac{A}{G} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho}{D} \cdot \frac{h}{a},$$

skutkiem czego

$$g = G \left[1 - \frac{h}{a} \left(2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho}{D} \right) \right],$$

a to jest dokładnie wzór YOUNGA i POISSONA. Niektórzy autorowie upraszczają ten wzór jeszcze bardziej, biorąc gęstość ρ równą połowie średniej gęstości ziemi ¹⁾, (co istotnie w przybliżeniu jest prawdziwem), a wówczas po prostu

$$g = G \left(1 - \frac{5}{4} \cdot \frac{h}{a} \right), \text{ lub odwrotnie (w tem samym przybliżeniu)}$$

$$G = g \left(1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{h}{a} \right).$$

Ostatni wzór bywa używanym ²⁾, aby siłę ciężkości obserwowaną w wysokości h nad poziomem sprowadzić na poziom morza. Zauważyć jednak musimy, iż taka redukcja jest niedokładną, chociażbyśmy przy wszystkich uczynionych przypuszczeniach pozostali. W istocie ostatnie wzory wyznaczają tę siłę ciężkości, która dałaby się obserwować w punkcie F , gdyby masa m z powierzchni ziemi całkowicie usunięta została, skutkiem czego wartość jej pozbawioną jest tego znaczenia fizycznego, jakie pragnęlibyśmy jej przypisać. W badaniach rozdzielenia potencjału grawitacyjnego na powierzchni sferoidu S chodzi bowiem o wielkość siły ciężkości w każdym miejscu tej powierzchni taką, jaką jest rzeczywiście a nie taką, jakaby istniała wówczas, gdyby pewne wymuszone zmiany w konfiguracji fizycznej powierzchni dopiero nastąpić miały. W obecnym przypadku nie idzie tedy o wielkość siły ciężkości w punkcie F , gdyby masa m znikła, lecz o ciężkość, którą w F dałyby obserwacje, gdyby było możliwem tam dotrzeć. Oznaczając tę ilość przez g' i zważając, że w punkcie F przyciąganie masy m odbywa się z dołu do góry (tj. w kierunku przeciwnym sile ciężkości), napiszemy

$$g' = G - A' = G \left(1 - \frac{A'}{G} \right),$$

a ponieważ w pierwszym przybliżeniu

$$\frac{A'}{G} = 2\pi\sigma k\beta : \frac{4}{3} \pi D a = \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho}{D} \cdot \frac{h}{a},$$

przeto

$$g' = G \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho}{D} \cdot \frac{h}{a} \right).$$

¹⁾ Zob. np. JIMENEZ y FERNANDEZ: *Determinacion de la longitud del pendulo de segundos y de la gravedad en México* 1879 (pag. 30).

²⁾ SCHMIDT w swem dziele geografii mat. i fizycznej przeprowadza powyższy rachunek błędnie (I, p. 431).

Rugując teraz G z tego równania i z poprzedniego na g , otrzymamy w tem samem przybliżeniu

$$g' = g \left[1 + \frac{h}{a} \left(2 - 3 \frac{\rho}{D} \right) \right],$$

Biorąc więc jak wyżej $\rho = \frac{1}{2} D$, będzie

$$g' = g \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{a} \right),$$

zamiast wyrażenia

$$g \left(1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{h}{a} \right).$$

Gdyby się zdarzyło, że

$$3 \frac{\rho}{D} > 2, \quad \text{t. j. } \rho > \frac{2}{3} D,$$

to widocznie $g' < g$, czyli siła ciężkości byłaby większą w miejscowości wyżej położonej, aniżeli w niższej. Ponieważ bardzo blisko $D = 5.7$ przeto nastąpić to może, gdy $\rho > 3.8$, t. j. dla bardzo gęstych niskich wzgórz o znacznej rozciągłości poziomej ¹⁾.

Odmienne przedstawia się rzecz, jeżeli wysokość h wzgórza jest znaczną w porównaniu z jego rozciągłością, tj. jeżeli ilość β posiada wartość większą. Z równań

$$g = G \left(1 - 2 \frac{h}{a} \right) + A \quad \text{i} \quad g' = G - A'$$

rugując G otrzymamy w potrzebnem tu przybliżeniu

$$g' = g \left[1 + 2 \frac{h}{a} - \frac{A + A'}{G} \right].$$

Rozwijając logarytmy wyrażen A i A' według odjemnych potęg ilości β (nie jak wprzód dodatnych) otrzymamy nasamprzód w dostatecznem przybliżeniu

$$A + A' = 2\pi k \left(1 + \frac{\log 2\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{4\beta^2} + \frac{7}{15\beta^3} \right),$$

z uwagi więc, że $G = \frac{4}{3} \pi D a$, otrzymamy

$$g' = g \left\{ 1 + \frac{h}{a} \left(2 - \frac{3}{2} \frac{B}{\beta} \cdot \frac{\rho}{D} \right) \right\},$$

¹⁾ Według listownej komunikacji p. majora ROBERTA STERNECKA, członka geograficznego Instytutu w Wiedniu, przypadek taki odkrytym został przez niego w pobliżu Kronstadtu (Siedmiogród) w bliskości kopalni rud. (Czerwiec 1884).

gdzie

$$B = \left(1 + \frac{\log 2\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{4\beta^2} + \frac{7}{16\beta^3} \right).$$

Biorąc np. $\beta = 2$ (co nie jest niczem nadzwyczajnym) otrzymamy

$$g' = g \left\{ 1 + \frac{h}{a} \left(2 - 0.82 \frac{\rho}{D} \right) \right\},$$

a gdybyśmy przyjęli (jak to pospolicie czynią) $\rho = \frac{D}{2}$, to

$$g' = g \left(1 + 1.59 \frac{h}{a} \right).$$

Anormalny przypadek $g' < g$ zajdzie w takim razie, gdy będzie

$$2 < 0.82 \frac{\rho}{D},$$

tj. gdy $\rho > 13.9$, co jest bardzo nieprawdopodobnym. Ztąd widać, że podobne wyjątkowe przypadki (jeżeli w ogóle istnieją) zdarzać się mogą tylko na niezbyt wyniosłych a rozległych wzgórzach złożonych z ciał, których gęstość przenosi 3.8 gęstości wody. W przypisku 7ym podajemy jeszcze niektóre uwagi i szczegóły dotyczące tego zajmującego przedmiotu.

b) Ostrokraż obrotowy. Tutaj tworzącą jest linija prosta, np. $y = nx$, skutkiem czego teraz (zachowując powyższe znakowanie) z uwagi, że $n = \frac{k}{h} = \frac{1}{\beta}$

$$A = 2\pi\alpha k \left[\beta - \frac{\beta^2}{\sqrt{1+\beta^2}} \right];$$

przyciąganie A' możnaby podobnie z łatwością otrzymać, w tej chwili jestto jednak dla nas zbyt technem.

c) Odcinek kuli. Jeżeli p jest promieniem kuli, to

$$y^2 = 2px - x^2,$$

zatem

$$A = 2\pi\alpha \int_0^h \left[1 - \sqrt{\frac{x}{2px}} \right] dx,$$

wykonywając całkowanie i zważając, że $k^2 = 2ph - h^2$, tj. $\frac{h}{2p} = \frac{h^2}{h^2 + k^2}$, jakoteż $h = \beta k$, otrzymamy

$$A = 2\pi\alpha k \left(\beta - \frac{2}{3} \cdot \frac{\beta^2}{\sqrt{1+\beta^2}} \right).$$

Z trzech tutaj rozważanych ciał dla danego ρ , k i h największą objętość (więc i masę) posiada odcinek kuli, najmniejszą ostrokągiel obrotowy; oznaczając przyciąganie A w pierwszym razie przez A_1 , w drugim razie przez A_2 , napiszemy

$$A_1 : A_2 = 1 - \frac{2}{3} \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} : 1 - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

z kądem

$$\frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{\beta}{3\sqrt{1+\beta^2} - 2\beta}$$

Jeżeli np. $\beta = \frac{1}{3}$ (co jest bardzo dobrze możliwem), to znajduje się

$$A_1 - A_2 = 0.133 A_1.$$

Ponieważ więc przy „poprawach“ pozornej siły ciężkości skutkiem sąsiedztwa mas górskich, kształt perturbującej masy ocenia się na oko, a biorąc go np. paraboloidalnym nie uchyla się możliwości, że jest on tak dobrze odcinkiem kuli albo częścią ostrokągiela, przeto jak widzimy, błąd takiej „poprawy“ może bardzo dobrze sięgać do 0.133 całkowitego przyciągania masy górskiej. Rozumie się samo przez się, iż błąd taki pochodzi tylko z niewiadomości dokładnego kształtu masy perturbującej i że błąd ten może być jeszcze zwiększonym nieświadomością naszą o rozdzieleniu gęstości wewnątrz masy, którąto masę przypuściliśmy jednorodną.

Aby tę rzecz jeszcze lepiej uwydatnić, przytaczamy następujący przykład.

Dla miejscowości *Inselberg* „poprawa“ długości wahadła sekundowego, wywołana atrakcją lokalną znalazła się równą

$$0.0002071 \text{ metra}$$

(Zob. *Generalbericht der europ. Gradmessung für das Jahr 1869*, pag. 34), błąd całkowity tej poprawy mógł tedy, według poprzedniego, wynosić

$$0.133 \cdot 0.0002071 = 0.000275 \text{ metra,}$$

czego połową jest 0.000138, tak iż rzeczywista poprawa długości wahadła sekundowego mogła być tak dobrze

$$0.0002071 - 0.000138 = 0.0001933 \text{ metra,}$$

jakoteż

$$0.0002071 + 0.000138 = 0.0002209 \text{ metra.}$$

A więc poprawa będąca w mowie mogła dawać rękojmię pewności tylko najwyżej w czterech miejscach dziesiętnych, a wartość jej wynosić mogła z tą dokładnością 0.0002 m. tj. 0.2 millimetra z niepewnością 0.014 millim. Te uwagi w połączeniu z niepewnością korekcy wskazanych istnieniem odleglejszych mas (przypisek 7) okazują dostatecznie, jak iluzoryczną jest wszelka taka redukcja doświadczeń wahadłowych.

W przypisku 7mym okażemy, iż błąd tego rodzaju popraw, pochodzący z pominięcia wpływu mas odleglejszych, może dosięgnąć a nawet przekroczyć 0.4 ilości mającej być wyznaczoną (t. j. szukanej poprawy). Całkowita niepewność takiej poprawy może tedy dojść do $(0.4 + 0.13 = 0.53)$, tj. do połowy rzeczywistej wielkości tej poprawy, jak to w tekście powiedzieliśmy (§. Vty).

PRZYPISEK IVty (do §§. XI i XVII).

Wystarczy tutaj wziąć na uwagę funkcję jednorodną trzech zmiennych niezależnych x, y, z . Jeżeli f jest taką funkcją stopnia ng^o , to z definicyi funkcyi jednorodnej (*homogen*) wynika

$$f(xt, yt, zt) = t^n f(x, y, z),$$

gdzie t jest dowolną ilością od x, y, z niezależną.

Różniczkując to równanie co do t otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(xt, yt, zt)}{\partial(xt)} \cdot x + \frac{\partial f(xt, yt, zt)}{\partial(yt)} \cdot y + \frac{\partial f(xt, yt, zt)}{\partial(zt)} \cdot z = \\ = nt^{n-1} f(x, y, z), \end{aligned}$$

a kładąc teraz $t = 1$ i pisząc krótko f zamiast $f(x, y, z)$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = nf,$$

a to jest własność funkcyi jednorodnych, z której (dla $n = 2$ i $n = 3$) uczyniliśmy użytek.

PRZYPISEK Vty (do §. XVIII).

Okazaliśmy, że perturbacje kierunku siły ciężkości (t. z. odchylenia pionu) na globie ziemskim są ilościami leżącymi w pośrodku między ilościami rzędu σ a rzędu σ^2 , co wyraziliśmy symbolicznie mówiąc, iż są one rzędu $\sigma^{\frac{3}{2}}$. Daje się nadto okazać, że także perturbacje wielkości siły ciężkości, pochodzące z dyssymetryi globu ziemskiego są tego samego rzędu małości.

Dla długości wahadła sekundowego mamy w przybliżeniu

$$l = 0.991 (1 + 0.0052 \sin^2 \varphi) \text{ metra};$$

średnia anomalija ciężkości, spowodowana deformacją sferoidu od kształtu kulistego (z uwagi, że $g = \pi^2 l$) będzie

$$\frac{2}{\pi} g \cdot 0.0052 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot g \cdot 0.0052 \cdot \frac{\pi}{4} = g \cdot 0.0026 .$$

Kwadrat tej perturbacji będzie $g \cdot (0.0026)^2 = g \cdot 0.00000676$ ilość, która z pewnością uchodzi wszelkim naszym pomiarom. Długość wahadła sekundowego doznaje skutkiem takiej perturbacji zmiany o

$$l \cdot 0.00000676 = 0.991 \cdot 0.00000676 = 0.0000067 \text{ metra,}$$

t. j. $\frac{1}{150}$ część milimetra.

Natomiast $\frac{3}{2}$ ga potęga tej perturbacji będzie $g \cdot (0.0026)^{\frac{3}{2}} = g \cdot 0.000133$, którato perturbacja zdradzi się w długości wahadła sekundowego ilością

$$l \cdot 0.000133 = 0.991 \cdot 0.000133 = 0.00013 \text{ metra,}$$

t. j. długością 0.13 millimetra, którato ilość jest dostrzegalną w obec wielkiej dokładności dzisiejszych pomiarów. Maximum tej perturbacji będzie widocznie $2^{\frac{3}{2}} = 2.83$ razy większem, t. j. będzie wynosiło 0.37 milimetra w długości wahadła sekundowego. A w rzeczy samej takiej wielkości wydłużenia lub skrócenia długości wahadła sekundowego obserwowano w perturbowanych miejscowościach.

PRZYPISEK 6ty (do §. XX).

Gdybyśmy pominęli wyrazy, pochodzące z dyssymetrii sferoidu ziemskiego, to równik byłby elipsą o nader małym spłaszczeniu. A. R. CLARKE, z drugiego swego obliczenia (po odkryciu małego błędu w południowej części dawnego łuku indyjskiego) znalazł spłaszczenie równika

$$\frac{r_1 - r_2}{r_1} = \frac{1}{13731} = 0.000073 ,$$

(A. R. CLARKE Geodesy, Oxford 1880, pag. 308). To oznaczenie dozwala nam obliczyć różnicę obydwóch głównych momentów bezwładności A i B około dwóch głównych osi bezwładności, leżących w płaszczyźnie równika.

Dla $\varphi = 0$, biorąc raz $\lambda = 0$, drugi raz $\lambda = \frac{\pi}{2}$, otrzymamy (§. IX)

$$r_1 = q(1 + A), \quad r_2 = q(1 + B),$$

więc

$$r_1 - r_2 = q(A - B), \text{ a ztąd } A - B = \frac{r_1 - r_2}{q} = \frac{r_1 - r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{q} = \frac{r_1 - r_2}{r_1} (1 + A),$$

więc w dostatecznym przybliżeniu

$$A - B = \frac{r_1 - r_2}{r_1} = 0.000\,073.$$

Mamy jednak (§. VI)

$$A - B = \frac{B + C - 2A}{2} - \frac{C + A - 2B}{2} = \frac{3}{2}(B - A),$$

zatem

$$\frac{3}{2}(B - A) = 0.000\,073, \text{ ztąd } B - A = 0.000\,049.$$

Otóż znaleźliśmy (§. V) $A = 0.340769$, zatem $B = 0.340818$, jakoteż $C = 0.341888$. Same momenta bezwładności ziemi około trzech głównych osi znajdują się, mnożąc te liczby przez Mq^2 .

Ilości A, B, C będą więc

$$A = 0.000\,584, \quad B = 0.000\,511, \quad C = -0.001\,095.$$

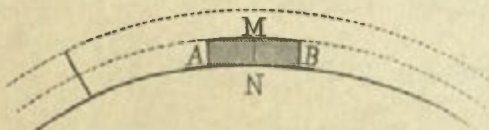
Powyższy rachunek może jednak uchodzić tylko za przybliżenie pierwsze, tem bardziej, że chodzi tu o wyznaczenie ilości tak małych jak np. $(A - B) = 0.000\,073$, że więc parametrów $D, E, F, \dots H$ przy obliczeniach tego rodzaju żadną miarą pomijać nie wolno. Istotne obliczenie wartości momentów bezwładności (a właściwie proporcjonalnych do nich ilości A, B, C) może nastąpić dopiero wówczas, gdy za pomocą materiału pomiarów geodezyjnych lub doświadczeń wahadlowych zostaną obliczone parametry $A, B, C, D, E, F, \dots H$ razem w liczbie trzynastu, którato liczba zmniejsza się do ośmiu z uwagi na związki §. XIIgo.

PRZYPISEK 7my (do §. XXIII).

Przybliżone ocenienie wpływu pominięcia przyciągań odleglejszych mas na wielkość popraw lokalnych siły ciężkości.

Wyobraźmy sobie kulę o promieniu a , a na niej wyniosłość AB o wysokości $MN = l$.

Jeżeli promień podstawy tej wyniosłości (którą uważamy za krążek materyjalny o jednorodnej gęstości ρ) jest $AN = p$, to przyciąganie tej masy na punkt M wynosi



$$A_1 = 2\pi\rho [l + p - \sqrt{l^2 + p^2}].$$

(THOMSON and TAIT Natural Philosophy Vol. I, part. 1, pag. 22). Wyobraźmy sobie dalej kulę naszą, otoczoną do koła warstwą materyjalną o wysokości L a o tej samej gęstości, to ponieważ warstwa ta będzie przyciągała punkt M tak, jak gdyby cała jej masa była zgromadzoną w środku kuli, więc zważając, że L i l w porównaniu z a jest bardzo małym i że warstwa zewnętrzna o grubości $(L-l)$ na punkt M nie wywiera żadnego przyciągania, otrzymamy przyciąganie warstwy L na punkt M

$$\frac{4a^2\pi l\rho}{a^3} = 4\pi\rho \cdot l \quad \text{gdy } L > l,$$

zaś

$$\frac{4a^2\pi L\rho}{a^3} = 4\pi\rho \cdot L \quad \text{„ } L < l.$$

Weźmy nasamprzód na uwagę przypadek pierwszy. Ponieważ areal kontynentów wznoszących się ponad poziom morza wynosi około $\frac{1}{5}$ całej powierzchni ziemi, przeto wyraz opuszczany przy poprawach lokalnych siły ciężkości wynosi blisko $\frac{4\pi\rho l}{3}$ tak, iż rzeczywista korekcja powinna wynosić

$$A_2 = A_1 + \frac{4\pi\rho l}{3}.$$

Otóż biorąc (jak to zwykle się dzieje) wysokość l dość małą w porównaniu z promieniem p , będziemy mieli bardzo blisko

$$\sqrt{l^2 + p^2} = \sqrt{p^2 \left(1 + \frac{l^2}{p^2}\right)} = p \left(1 + \frac{l^2}{2p^2}\right),$$

więc w przybliżeniu tutaj zupełnie dostatecznym

$$A_1 = 2\pi\rho l.$$

skutkiem czego

$$\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{4\pi\rho l}{3} : 2\pi\rho l = \frac{2}{3}. \quad \text{więc } \frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{2}{5},$$

t. j.

$$A_2 - A_1 = 0.4 A_2,$$

zatem błąd powstały z pominięcia wpływu dalszych mas może osiągnąć 0.4 wartości szukanej poprawy.

W drugim razie otrzymamy podobnie

$$\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{4\pi\rho L}{3} : 2\pi\rho l = \frac{2}{3} \tau, \quad \text{gdzie dla skrótienia } \tau = \frac{L}{l},$$

zatem

$$A_2 - A_1 = \frac{2\tau}{3 + 2\tau} A_2,$$



przyczem $l > L$. Tak np. dla wysokości $l = 2000$ stóp, przyjmując cyfrę HUMBOLDTA na średnią wysokość wzniesienia się kontynentów ponad powierzchnię morza (około 1000 stóp), będziemy mieli $\tau = \frac{1}{2}$, zatem

$$A_2 - A_1 = \frac{1}{4} A_1,$$

w takim razie błąd poprawy sięga czwartej części jej własnej wartości.

Widzimy, że wielkość popełnianego w tych przypadkach błędu jest tem mniejszą, im wyżej leży uważana miejscowość ponad poziomem morza. Najczęściej jednak wysokość miejsca obserwacji jest dość małą, a w takim razie — jak widzieliśmy — wielkość błędu może sięgać 0.4 wartości szukanej.

Sprostowanie omyłek.

Str.	wiersz		zamiast		czytaj	
37	6 od dołu		—	$r^2 (x^2 y^2 z^2)$		— $r^2 (x^2 + y^2 + z^2)$
38	11 od góry		"	$Q_2 = Mk^2 (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)$	"	$Q_2 = Mk^2 (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)$
45	1 "		"	stycznej, niejako	"	stycznej niejako
70	8 "		"	równaniem	"	równaniem
"	"	"	"	m,	"	m,

