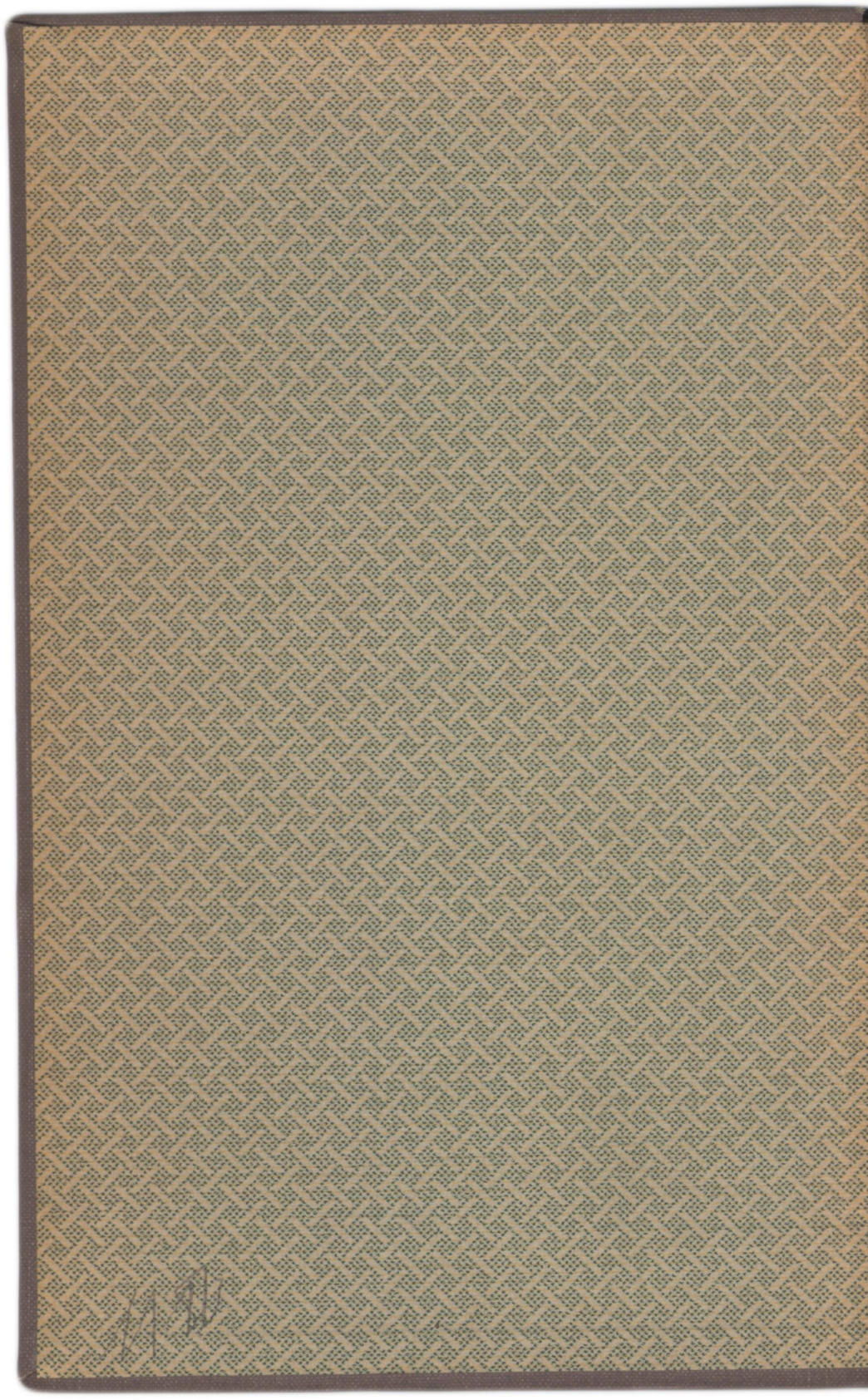




Von
Strecke, Quadrat
und Würfel
zum
bestimmten Integral.

Zum
Gebrauche in den oberen Klassen unserer Mittelschulen
und beim
Selbstanterrichte

VON
Dr. Gottlieb Gerting,
A. Gymnasialprofessor und Diplom-Ingenieur.



working

Am 2 800E
an 4000

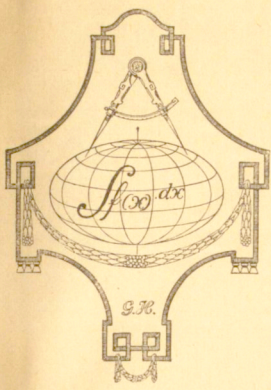
1180

<http://rcin.org.pl>

Kat.

1. Aufl.

I.



Von Strecke, Quadrat

und Würfel

zum

bestimmten Integral.

Zum

Gebrauche in den oberen Klassen unserer Mittelschulen

und beim

Selbstunterrichte

von

Dr. Gottlieb Herting,

R. Gymnasialprofessor und Diplom-Ingenieur.

Inhalt: Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie, einige bestimmte Integrale mit Anwendungen.

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

~~L. inw. 1218~~

Leipzig und Berlin,

Verlag von B. G. Teubner

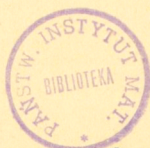
1910.

1190

opis nr 47471

Alle Rechte vorbehalten.

J. W. T. 956



5218

Vorwort.

Die Mathematik, in früherer Zeit an unseren Mittelschulen die bestgehabte Wissenschaft, hat im letzten Vierteljahrhundert wesentlich mehr Interesse gefunden als in jener früheren Zeit. Wir brauchen bloß die Worte auszusprechen: Naturwissenschaft, Technik, Industrie und der einigermaßen Sachkundige hat die Erklärung für diese Erscheinung. Was alle Anpreisung des Studiums der Mathematik als einer vorzüglichen Schule strenglogischen Denkens von Plato bis Kant und darüber hinaus nicht erreicht hat, das hat die mannigfaltige praktische Anwendung der Mathematik in den weiten Gebieten der Naturwissenschaft und der darauf gegründeten Technik zuwege gebracht.

Leonardo da Vinci hat bekanntlich kein Wissen als gesichert anerkannt, das nicht in streng mathematischer Weise begründet werden konnte, und von Kant rührt der Satz her: „Jede Naturwissenschaft enthält nur soviel wahre Wissenschaft als sie Mathematik enthält.“ So ließ letzterer z. B. die Chemie seiner Zeit gar nicht als Wissenschaft gelten. Wer aber moderne, eingehendere Werke über Chemie zur Hand nimmt, z. B. die Arbeiten von Geheimrat Ostwald u. a., der wird nicht mehr behaupten können, daß die Chemie keine Mathematik enthalte. Das ist seit Kant alles anders geworden. Die Mathematik ist im Laufe des letzten Jahrhunderts in alle Spezialgebiete der Naturwissenschaft eingedrungen und eine Art Sprache derselben geworden. Sogar die Mediziner rufen jetzt auf ihren Versammlungen nach „mehr Mathematik“. Sie verlangen nicht mehr Stunden. Aber sie sagen: Der alte Weg über Euklid bis Descartes und Leibniz ist zu lang und zu mühselig, an vielen Stellen für die Mittelschuljugend auch zu schwierig. Sie rufen den Mathematikern zu: „Kürzt diesen weiten Weg nach Möglichkeit ab, haut an den schwierigen Stellen gut gangbare Stufen, bringt sichere Drahtseile an, damit auch die mathematisch weniger talentierten Schüler über diese schwierigen Stellen hinwegkommen! Verwendet die so gewonnene Zeit lieber dazu, eure Schüler ein Stückchen in die moderne Mathematik einzuführen: Begriff der Funktion, etwas Infinitesimalrechnung! Nicht nur unsere Ophthalmologen brauchen solche mathematische Kenntnisse, wir alle brauchen sie zu einem eingehenden Studium der naturwissenschaftlichen Gebiete, die wir zu betreten haben.“

In welcher Form wurde nun die Mathematik im Laufe der Zeit unseren Mittelschülern geboten? Wir wollen hier nur von der Geometrie reden. In Arithmetik und Algebra liegen die Verhältnisse ähnlich.

In früherer Zeit trug man das Euklidische System vor. Dieses Kunstwerk, wie Chamberlain es in den „Grundlagen des XIX. Jahrhunderts“ nennt, hat aber bei der germanischen Jugend nie recht Gefallen erregt. Es ist für den Durchschnittsmittelschüler zu schwierig; es gehört auf die Hochschule. Man könnte bestenfalls in den oberen Klassen darauf eingehen, wenn man Zeit dazu hätte.

Chamberlain bedauert es, daß die neuzeitlichen Mathematiker dieses vollendete, streng aufgebaute System allmählich beiseite rücken und neue Methoden und Wege suchen. Aber was hilft's? Wir haben mit dem Massenvolk auch die Massenschule bekommen und unsere Mittelschulen hören allmählich auf hauptsächlich Vorbereitungsschulen für die Staatsbeamten und Gelehrten zu sein. Das sind sie schon heute nicht mehr; denn weitaus die Mehrzahl der jungen Leute, welche durch sie hindurchgehen, kann auf Verwendung im Staatsdienst nicht mehr rechnen. Dieser Vorgang, der sich vor unseren Augen abspielt, wird noch manche Veränderung an unseren Schulen zur Folge haben.

Nun bietet in der Euklidischen Geometrie gleich der erste Anstieg dem 14-, 15jährigen Knaben schon zu viel Schwierigkeiten. Hier stürzte die Mehrzahl schon ab um sich nie mehr zu erheben oder bestenfalls nur noch recht mühsam nachzukriechen. Es ist nicht zuviel behauptet, wenn wir sagen, man hat den strengen Aufbau mit einer Klasse nie recht zumege gebracht. Der junge Mensch muß zuerst Erfahrungen sammeln. Das Nachdenken darüber und Systematisieren kommt später.

Dann, als die Naturwissenschaft in breitere Schichten drang und als die Technik aufzublühen begann und sich ein größeres Bedürfnis nach mathematischen Kenntnissen und Können bemerkbar machte — es war um die Mitte des vorigen Jahrhunderts —, als technische Mittelschulen ins Leben gerufen wurden: die alte Gewerbeschule, das alte Polytechnikum, da jagte man, am leichtesten und besten dringe man in dieses Studium ein, wenn man viele mathematische Aufgaben löse. Damit wurde das „System“ schon ein wenig auf die Seite gerückt; man trug es noch vor, aber die mathematische Aufgabe trat in den Vordergrund. Die neue Lehrweise ging von den genannten Schulen allmählich auch auf die Gymnasien über.

Nicht auf diesen, denn da hat die Mathematik, wie es nach dem Charakter dieser Schulen ja als selbstverständlich erscheint, immer eine etwas bescheidene Rolle gespielt; aber auf den realistischen Anstalten wurde die Lösung von mathematischen Aufgaben zuweilen stark übertrieben. Es wurden oft recht spitzfindige, fernliegende Aufgaben behandelt.

Und nun kommt eine dritte Periode, die seit etwa 10 Jahren einsetzte. Man sagt den Lehrern der Mathematik: Seht bei der ersten Einführung von Systematik und Strenge ab, führt die Schüler zunächst den Weg der Erfahrung, die Lösung von Aufgaben setzt fort, aber gebt nur einfache und praktische Aufgaben, sucht die Texte dazu in den Gebieten der Naturwissenschaft, der Technik, des gewerblichen und industriellen Lebens, der kaufmännischen und geschäftlichen Tätigkeit, des Versicherungswesens zc. zc! Natürlich nur soweit, als es der Gesichtskreis der Schüler gestattet.

Also: Vereinfachung, Kürze, Rücksichtnahme auf praktische Anwendung sind z. B. die Lösung.

In der Tat, wer die Literatur der Elementarmathematik wie der höheren Mathematik in den letzten 25—30 Jahren verfolgt hat, der wird überall ein Streben nach Vereinfachung konstatieren können. Man sehe nur die neueren Lehrbücher daraufhin an und vergleiche damit die älteren! Auch unsere Schulprogramme und Instruktionen lassen dieses Streben erkennen.

In der Geometrie sind für den ersten Anstieg, um zu unserem ersten Bilde zurückzugreifen, die Stufen und Drahtseile bereits vorhanden. Wir haben seit dem Jahre 1902 den sogen. propädeutischen Unterricht in der Geometrie in der 4. Klasse. Der Schüler lernt hier, wenn der Unterricht richtig gegeben wird, nach den Methoden der Physik eine größere Zahl von geometrischen Lehrsätzen kennen, einzeln, zunächst nur auf dem Wege der Erfahrung. Auf diesem breiteren Fundament von Erfahrungssätzen fällt dann der weitere Aufbau, zu dem allmählich eine strengere Behandlung überleitet, wesentlich leichter, als wenn er auf die wenigen Axiome des Euklid fundiert wird.

Diese physikalische Methode wird sich aber an manchen Stellen beim ersten Gang auch fernerhin empfehlen. Auf solche Stellen stoßen wir bei der Berechnung des Kreises (Bestimmung der Zahl π), bei der Berechnung des Rauminhalts des schiefen Prismas und Zylinders, der Pyramide, des Kegels, der Kugel und der Kugelteile usw.

Bei diesen Problemen also auf der Unterstufe: physikalische Messungen. Was ein Schüler auf dem Wege der Erfahrung gefunden hat, sitzt fester als das Ergebnis eines halbverstandenen strengen Beweises.

Bislang behilft man sich bei den erwähnten Berechnungen mit dem Satz von Cavalieri und führt so das bestimmte Integral, das in ihm steckt, verschleiert an den Augen der Schüler vorüber. Auf der Oberstufe (8 und 9. Klasse) stoßen wir aber auf keine Schwierigkeiten mehr, wenn wir das bestimmte Integral gleich bei seinem Namen nennen und ohne Umweg auswerten.

Es ist der Hauptinhalt dieses Schriftchens: die Auswertung einiger bestimmter Integrale. Wir fassen das Integral hier nur in seiner einen Bedeutung: als Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen. Und wenn wir auf die Prämisse eingehen bei der Kleinteilung die Dicken (dx) der Lamellen **gleich** zu machen, so gelangen wir bei der Auswertung des Integrals $\int x^n dx$ für einige wenige Fälle, $n = 1, 2, 3, 4$, zu Potenzreihen mit ganzzahligen konstanten Exponenten, deren Summenbildung in der 8. u. 9. Klasse keinerlei Schwierigkeiten bereitet. Und diese wenigen Fälle genügen uns vorläufig.

Nachdem wir aus Anlaß der eben angeführten Probleme auf dieses Integral gekommen waren, haben wir auch noch die beiden einfachen Integrale $\int \cos \varphi d\varphi$ u. $\int \sin \varphi d\varphi$ dazu genommen. Die Auswertung dieser Integrale verlangt keinerlei Rechnung. Ihre Werte können aus einer guten Zeichnung unmittelbar abgelesen werden.

Mit diesen 3 Integralen haben wir nun eine Reihe von Aufgaben aus der Geometrie, Physik, Mechanik, Hydrostatik, Aerostatik, Festigkeitslehre gelöst

Wir haben diese Aufgaben mit Rücksicht auf den Leserkreis, den wir uns vorstellten, rechnerisch etwas ausführlicher behandelt, als es sonst in derartigen Schriften üblich ist. Insbesondere aber hat uns die von Interessenten oft gehörte Äußerung, derartige mathematische Schriften könnten von weniger Geübten nicht gelesen werden, dazu veranlaßt. Wir haben eine besondere Sorgfalt auf die Herstellung möglichst exakter Figuren verwendet, haben alle Figuren zuerst in vierfacher Größe möglichst genau gezeichnet und sie dann beim Klischieren verkleinern lassen. Insbesondere lag uns daran den Infinitesimalprozeß figurlich anschaulich zu machen; es wurde deshalb an solchen Stellen mit Figuren nicht gespart.

Aus den behandelten Aufgaben ersehen wir, daß das Pensum der Mittelschulmathematik schon eine Reihe von Problemen der höheren Mathematik in sich birgt. Es gibt keine Grenzen zwischen den verschiedenen Gebieten der Naturwissenschaften, zwischen Physik und Chemie, zwischen anorganischer und organischer Chemie, zwischen Pflanzenreich und Tierreich usw. und es gibt auch keine scharfen Grenzlinien zwischen Elementarmathematik und höherer Mathematik. Alles greift ineinander über. Unser gesamtes Wissen bildet ein Ganzes, wenn auch der einzelne Mensch sich nur einen Bruchteil davon anzueignen vermag.

Augsburg, Juni 1910.

Der Verfasser.

I. Messung und Berechnung von Linten.

Eine Strecke **mess**en heißt sie mit einer Längeneinheit vergleichen, bestimmen, wievielmals diese Längeneinheit in ihr enthalten ist.

Als Längeneinheit können wir jede beliebige Strecke wählen. Wir benützen in der Regel die Einheiten unseres metrischen Maßsystems.

$$1 \text{ m} = \frac{1}{40\,000\,000} \text{ des Umfangs eines Erdmeridians. } ^1)$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10\,000 \text{ dm} = 100\,000 \text{ cm} = 1\,000\,000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1\,000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

(Die Einheiten 1 Dm = 10 m, 1 Hm = 100 m sind nicht gebräuchlich geworden). 1 geogr. Meile = 7420,4 m

In der Astronomie hat man ungeheuer große Längeneinheiten, Entfernungen, von denen uns jede Vorstellung abgeht, gewählt:

$$1 \text{ Erddurchmesser} = 12\,755 \text{ km (Achsen-Durchmesser} = 12\,712 \text{ km)}$$

$$1 \text{ Erdbahnhalmesser} = 149\,500\,000 \text{ km} ^2) \text{ (größte Entfernung } 152 \text{ Mill. km, kleinste } 147 \text{ Mill. km)}$$

$$1 \text{ Lichtjahr} = \text{Weg des Lichtes in einem Jahre} = 9,4585 \text{ Bill. km}$$

(Weg des Lichtes pro Sekunde = 299 900 km)

$$1 \text{ Sternweite } ^3) = 206\,265 \text{ Erdbahnhalmesser} = 30,8 \text{ Bill. km. ca.}$$

Für Strecken, die weit unter 1 mm liegen, sind sehr kleine Einheiten gewählt worden, von denen wir auch keine Vorstellung mehr haben.

$$1 \mu \text{ (Mikron)} = 0,001 \text{ mm}$$

$$1 \mu\mu \text{ (Millimikron)} = 0,001 \mu = 0,000\,001 \text{ mm.}$$

Diese sind bei mikroskopischen Messungen und zur Messung der Wellenlängen der verschiedenen Licht- und Wärmestrahlen gebräuchlich u. a. m.

¹⁾ Nach neueren Messungen ist der Meridianumfang = 40 003,4 km, der Äquatorumfang = 40 070,4 km.

²⁾ Ein Schnellzug von 20 m Sekundengeschwindigkeit bräuchte ca. 237 Jahre, ein Geschöß von 600 m Sekundengeschwindigkeit ca. 7,9 Jahre um die Strecke Erde — Sonne zu durchlaufen, das Licht braucht dazu 8^{1/3} Min.

³⁾ 1 Sternweite ist die Entfernung, aus welcher der Erdbahnhalmesser bei senkrechter Draufsicht unter einem Sehinkel von 1" erscheint.

Im allgemeinen kann eine gegebene Strecke nicht durch eine ganze Zahl in einer Einheitsstrecke ausgedrückt werden, so klein man diese auch wählen mag. Es bleibt immer noch ein Rest, der kleiner als die gewählte Längeneinheit ist.

Indem wir bei Messungen diesen Rest in der Weise abrunden, daß wir ihn, wenn er kleiner als 0,5 L. E. ist, vernachlässigen, und wenn er mehr als 0,5 L. E. beträgt, für 1 L. E. zählen, kann der Messungsfehler äußerst nur $\pm 0,5$ L. E. betragen.

Wir messen eine Strecke, die eine gewisse Zahl von m umfaßt, indem wir zunächst die Zahl der m bestimmen, die wir auf sie auflegen können (Maßstäbe, Meßband, Meßkette), dann die Zahl der dm , die wir noch auf die Reststrecke legen können, dann die Zahl der cm , die wir noch auf die neue Reststrecke legen können usw.

Die äußerste Genauigkeit, die sich bei einer auf dem Reißbrett gezeichneten, genau begrenzten Strecke erreichen läßt, beträgt wohl nur Dezimillimeter (0,1 mm). Eine noch genauere Unterscheidung läßt die Beschränktheit unserer Sinne und die Art der Darstellung nicht zu.

Mit sehr feinen Mikrometern können wir eine Dimension eines festen Körpers auf $\frac{1}{1000}$ mm*) genau messen. Das dürfte für direkte mechanische Messung die äußerste Grenze der Genauigkeit sein.

Schon aus der Messung einer gegebenen Strecke erkennen wir, daß alle praktische Mathematik nur Approximationsmathematik sein kann.

Die Länge einer **krummen Linie** bestimmen wir durch direkte Messung, indem wir sie ohne Dehnung gerade ausstrecken (feiner, weicher Metalldraht, dem wir vorher die Form dieser Linie gegeben haben) und dann mit einem Maßstab messen, oder indem wir ein undehnbare, biegsames Meßband längs der gegebenen krummen Linie anlegen.

Wir können eine krumme Linie auch kleinteilweise messen, indem wir sie in kleine Teilchen zerlegen, die wir als gerade ansehen können. Auf dem Reißbrett verfahren wir häufig so, auch auf dem Felde.

Ist die krumme Linie nach irgend einem Gesetz entstanden, so können wir ihre Länge durch Rechnung aus gewissen geraden Strecken, durch die sie bestimmt ist, finden. Dies soll später gezeigt werden.

Zunächst wollen wir diejenigen Sätze und Gleichungen zusammenstellen, welche zur Berechnung von geraden Strecken dienen,

*) Mit den neuesten Mikrotomen können wir Scheibchen von 0,001 mm Dicke noch herstellen.

die durch andere, gegebene oder bequem meßbare, Strecken bestimmt sind:

I. Die Sätze über die Proportionalität von Strecken.

Werden die Schenkel eines Winkels von parallelen Geraden geschnitten, so stehen die Abschnitte auf dem einen Schenkel zu einander im gleichen Verhältnis wie die entsprechenden Abschnitte auf dem andern Schenkel und die parallelen Strecken verhalten sich zu einander wie die zugehörigen vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf dem einen oder andern Schenkel.

(Gilt auch, wenn eine der Parallelen die Verlängerungen der Winkelschenkel über den Scheitel hinaus schneidet).

Wenn wir die einfachen Dreieckskonstruktionen (aus Seiten und Winkeln) erledigt haben, so können wir ohne weiteres die Kongruenzsätze für die Dreiecke aussprechen. Sie lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in sovielen Stücken übereinstimmen als zur eindeutigen Bestimmung eines Dreiecks notwendig sind, nämlich in drei Stücken, worunter mindestens eine Seite sein muß.

Auf Grund eines dieser Sätze, beweisen wir dann den Satz: Wenn wir auf einer Geraden aneinander stoßende gleiche Strecken abtragen und durch deren Endpunkte in irgend einer Richtung Parallele ziehen, so schneiden diese auf jeder andern Geraden ebenfalls gleiche Strecken aus.

Von diesem Satz machen wir Gebrauch, wenn wir eine gegebene Strecke in eine bestimmte Zahl gleicher Strecken zu teilen haben.

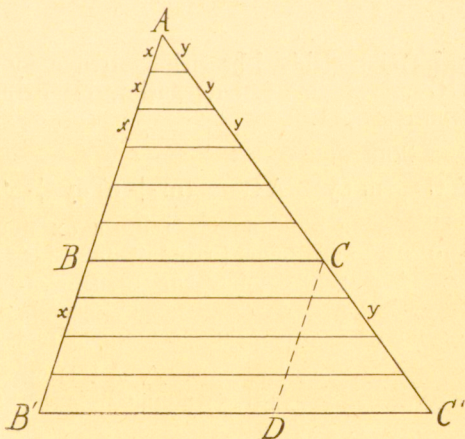
Fig. 1.

a) Angenommen es gibt eine Strecke x , welche in AB $m = m$ mal, in BB' $n = n$ mal enthalten ist, dann ist

$$AB = mx, \quad BB' = nx,$$

$$AB' = (m + n)x.$$

Ziehen wir durch die Teilpunkte des Schenkels AB' die Parallelen zu BC und $B'C'$, so schneiden sie auf AC m gleiche Strecken y u. auf CC' n gleiche Strecken y aus und es ist $AC = my$, $CC' = ny$, $AC' = (m + n)y$.



Folglich $AB : AB' : BB' = m : (m + n) : n$

und $AC : AC' : CC' = m : (m + n) : n$

Also $AB : AB' : BB' = AC : AC' : CC'$.

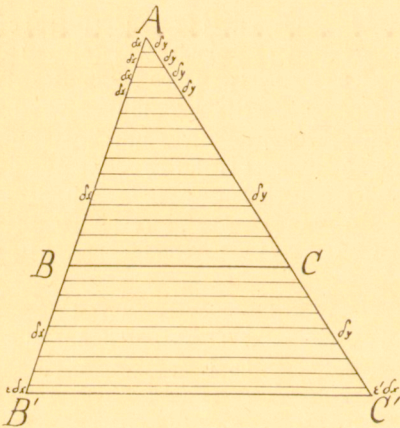
Ziehen wir nun $CD \parallel AB'$, so verhält sich nach diesem Ergebnis

$$B'D : B'C' = AC : AC'. \quad \text{Da nun } B'D = BC,$$

so folgt $BC : B'C' = AC : AC' = AB : AB'$.

b) Im allgemeinen trifft aber die bei a) gemachte Annahme nicht zu. Um nun für den allgemeinen Fall die eben gefundene Proportionalität nachzuweisen denken wir uns die Strecke AB in m sehr kleine Strecken δx geteilt, etwa in der Größe 1μ , $1 \mu\mu$ oder noch kleiner, dann wird m eine sehr große Zahl, aber es bleibt immer $AB = m \cdot \delta x$

Fig. 2.



Denken wir uns diese sehr kleine Strecke δx von B nach B' hin abgetragen (es sei $n = \text{mal möglich}$), so wird zuletzt ein Rest bleiben, der einen Bruchteil von δx ausmacht, etwa $\epsilon \delta x$, wobei $\epsilon < 1$. In diesem Falle ist also

$$AB = m \delta x$$

$$AB' = (m + n) \delta x + \epsilon \delta x$$

$$BB' = n \delta x + \epsilon \delta x$$

Ziehen wir wieder durch die Teilpunkte auf AB' die Parallelen zu BC u. $B'C'$, so werden auf AC m und auf CC' n gleiche sehr kleine Strecken δy ausgeschnitten, wobei auf CC' zuletzt eine Strecke bleibt, die kleiner als δy ist, etwa $\epsilon' \delta y$, wobei $\epsilon' < 1$.

Nun ist

$$AC = m \delta y \quad AC' = (m + n) \delta y + \epsilon' \delta y \quad CC' = n \delta y + \epsilon' \delta y$$

Denken wir uns die Teilchen δx und δy in den Größen 1μ , $1 \mu\mu$ oder noch kleiner (dafür ist uns keinerlei Grenze gesetzt), so können wir die für uns unmeßbar kleinen Strecken $\epsilon \delta x$ und $\epsilon' \delta y$ gegen die größeren Strecken vernachlässigen und es ergeben sich auch hier die im Falle (a) angeführten Gleichungen.

Solche Dreiecke wie $\triangle ABC$ und $\triangle AB'C'$, die in den 3 Winkeln übereinstimmen und in welchen die den gleichen Winkeln

gegenüberliegenden Seiten (homologen Seiten) in gleichem Verhältniß zueinander stehen, bezeichnen wir als

Ähnliche Dreiecke.

Zwischen den Seiten und Winkeln zweier ähnlichen Dreiecke, $\triangle \sim \triangle'$ (Fig. 3), bestehen 4 voneinander unabhängige Gleichungen.

Etwa

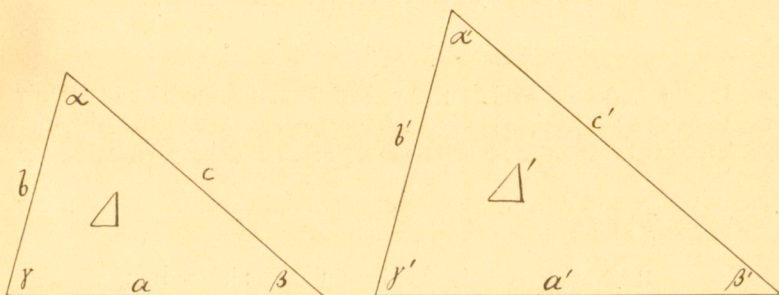
$$\begin{aligned} a:a' = b:b' \text{ und } \alpha = \alpha' \\ b:b' = c:c' \text{ und } \beta = \beta'. \end{aligned} \quad (\text{und damit auch } \gamma = \gamma')$$

oder anstelle der Proportionen:

$$\left. \begin{aligned} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \\ c' = \lambda c \end{aligned} \right\} \text{ worin } \lambda \text{ einen konstanten Zahlenfaktor bezeichnet.}$$

Zum Nachweis der Ähnlichkeit sind aber nur zwei dieser Gleichungen nötig.

Fig. 3.



1. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

$$\alpha = \alpha' \text{ u. } \beta = \beta'$$

2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und in dem Verhältniß der diesen Winkel einschließenden Seiten übereinstimmen.

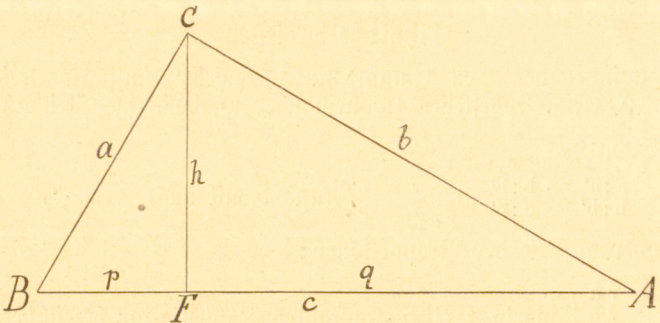
$$\gamma = \gamma' \text{ u. } a:b = a':b' \text{ oder } \left. \begin{aligned} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \end{aligned} \right\}$$

3. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre 3 Seiten in gleichem Verhältniß zu einander stehen.

$$a:a' = b:b' = c:c' \text{ oder } a:b:c = a':b':c' \text{ oder } \left. \begin{aligned} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \\ c' = \lambda c \end{aligned} \right\}$$

II. Aus dem Satze (1) ergeben sich in sehr einfacher Weise die folgenden Beziehungen:

Fig. 4.



1) für das rechtwinklige Dreieck:

$$\angle ACB = 90^\circ. \quad CF \perp BA.$$

$$\alpha) \triangle CBF \sim \triangle ABC, \text{ folglich } p : a = a : c$$

$$\triangle CAF \sim \triangle BAC, \text{ folglich } q : b = b : c$$

$$\text{also } \underline{a^2 = c \cdot p} \text{ und } \underline{b^2 = c \cdot q}$$

d. h. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem dieser Kathete anliegenden Höhenabschnitt (oder: im rechtwinkligen Dreieck ist jede Kathete die mittlere geometrische Proportionale oder das geometrische Mittel zwischen der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Höhenabschnitt).

$$\beta) \triangle CFB \sim \triangle AFC, \text{ folglich } p : h = h : q$$

oder

$$\underline{h^2 = p \cdot q}$$

d. h. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Höhenabschnitten (oder: im rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe mittlere geometr. Proportionale oder das geometrische Mittel zwischen den beiden Höhenabschnitten).

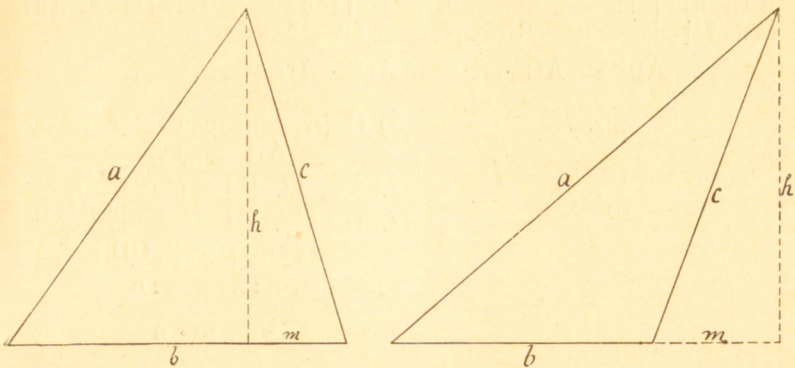
Aus den beiden ersten Gleichungen folgt unmittelbar der

Pythagoreische Lehrsatz:

$$\gamma) \underline{a^2 + b^2} = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) = \underline{c^2}.$$

Im rechth. Dreieck ist die Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse.

Fig. 5.



Wendet man den Pythagoreischen Lehrsatz auf ein
schiefwinkliges Dreieck

an, so ergibt sich:

δ) für ein spitzwinkliges Dreieck:

$$a^2 = (b - m)^2 + h^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2$$

ε) für ein stumpfwinkliges Dreieck:

$$a^2 = (b + m)^2 + h^2$$

$$a^2 = b^2 + 2bm + m^2 + c^2 - m^2$$

folglich $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$. bezw. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$.

d. h. das Quadrat einer Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert oder vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen Seite auf dieselbe — vermindert, wenn der ersten Seite ein spitzer, vermehrt, wenn ihr ein stumpfer Winkel gegenüberliegt.

2) Um Kreise:

α) AB Tangente in B.

$$\angle BAC = \angle BAD$$

$$\angle ABC = \angle ADB$$

(Satz v. Tangentialwinkel),
also

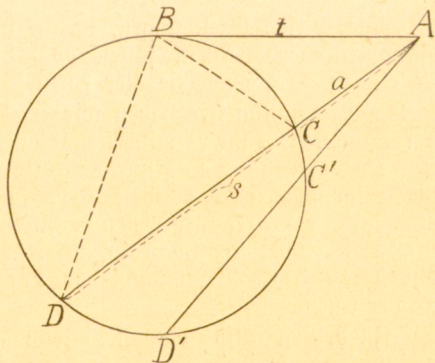
$$\triangle ABC \sim \triangle ADB.$$

Folglich $a : t = t : s$ oder

$$\underline{t^2 = a \cdot s}$$

d. h. Das Quadrat einer von einem Punkt an einen Kreis

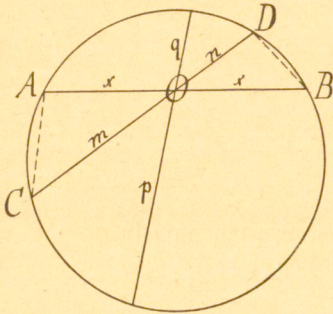
Fig. 6.



gelegten Tangente ist gleich dem Rechteck aus den von diesem Punkt aus gemessenen Abschnitten auf einer jeden durch ihn gehenden Sekante.

$$AB^2 = AC \cdot AD = AC' \cdot AD' = \dots$$

Fig. 7.



β) O sei Mittelpunkt der Sehne AB, dann ist

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle D \\ \angle C &= \angle B \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{(Satz von den} \\ \text{Peripheriewinkeln),} \end{array} \right\} \triangle OAC \sim \triangle ODB$$

Folglich $m : x = x : n$

$$\text{oder} \quad \underline{x^2 = m \cdot n}$$

Ebenso $x^2 = p \cdot q$

$$x^2 = m \cdot n = p \cdot q = \dots$$

d. h. Im Kreis ist das Quadrat über einer halben

Sehne gleich dem Rechteck aus den Abschnitten einer jeden anderen Sehne, die durch den Mittelpunkt der ersteren geht.

Die Beziehungen (I) dienen zur Konstruktion oder Berechnung einander proportionaler Strecken, zur Umwandlung eines Dreiecks bzw. eines Rechtecks in ein anderes u. a. m.

Die Beziehungen des Abschnittes II (1 u. 2) verwenden wir zur Umwandlung von Rechtecken in Quadrate bzw. zur Addition und Subtraktion von Quadraten.

Es ist noch zu bemerken, daß die Sätze 1 α , β in den Sätzen 2 α , β als besondere Fälle enthalten sind.

III. Trigonometrische Gleichungen.

Nach diesen Gleichungen, welche in der ebenen Geometrie zunächst gefunden werden, sollen noch die wesentlichen Beziehungen der ebenen Trigonometrie hier einen Platz finden.

In der Planimetrie haben wir erfahren, daß ein Dreieck durch drei Stücke, worunter mindestens eine Seite sein muß, bestimmt ist. Die drei andern Stücke ergeben sich aus der Konstruktion. Die Trigonometrie lehrt diese drei Stücke auf dem Wege der Rechnung aus den drei gegebenen Stücken zu bestimmen. Da jedes Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann, so können wir dieser Berechnung das rechtwinklige Dreieck zugrunde legen.

Zuvörderst also die vier Fundamentalgleichungen für das rechtwinklige Dreieck,

Die 4 trigonometrischen
Funktionen:

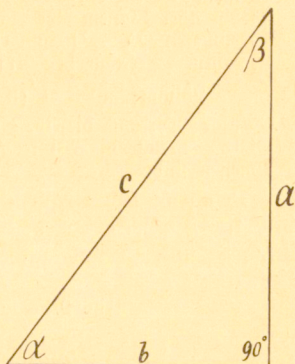
Fig. 8.

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$



Diese vier Gleichungen mit dem Pythagoreischen Lehrsatz ($a^2 + b^2 = c^2$) bilden den Inhalt der Trigonometrie. Mit ihnen können alle trigonometrischen Aufgaben gelöst werden, wenn einmal die trigonometrischen Funktionen aller Winkel von $0^\circ \dots 90^\circ$ (oder deren Logarithmen) vor uns liegen.

Wir können noch weiter zurückgehen. Da wir jede trigonometrische Funktion in jeder andern ausdrücken können, so muß eine Funktion mit dem Pythagoreischen Lehrsatz zur Lösung aller trigonometrischen Aufgaben ausreichen, etwa

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha \text{ und } a^2 + b^2 = c^2.$$

Ein gewandter Geiger kann auch nur auf einer Saite spielen, aber seine Aufgabe wird ihm wesentlich erleichtert, wenn er vier Saiten zur Verfügung hat.

Löse einige trigonometrische Aufgaben mit den beiden letzten Gleichungen!

Etwa die folgenden:

1. Aufg. Um die Höhe eines Berges berechnen zu können, messen wir in der Talsole in der Richtung gegen den Gipfel des Berges eine Standlinie $BA = a$, dann in deren Endpunkten die Elevationswinkel β und α , welche die Visierlinien nach dem Berggipfel mit der Horizontalen bilden. Berechne die Höhe des Berges, wenn die Standlinie horizontal ist und wenn die Standlinie gegen die Horizontale um den Winkel ε geneigt ist (2 Fälle: $+\varepsilon$ u. $-\varepsilon$).

$$\text{Lösung: } h_1 = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}, \quad h_2 = \frac{a \sin \alpha \sin(\beta \mp \varepsilon)}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (\text{über } A)$$

2. Aufg. Stellen wir uns die Aufgabe die Breite eines Stromes durch trigonometrische Messung und Berechnung zu bestimmen, so stecken wir dicht am Ufer eine Standlinie ab und messen sie, $AB = a$. Dann messen wir die Winkel, welche die Visierlinien von A und B aus nach einem am andern Ufer markierten Punkt C mit der Standlinie AB bilden,

$$\angle CAB = \alpha, \quad \angle CBA = \beta.$$

Wir finden für die Breite x des Stromes an dieser Stelle bloß mit Anwendung der ersten Gleichung wie bei [1])

$$x = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

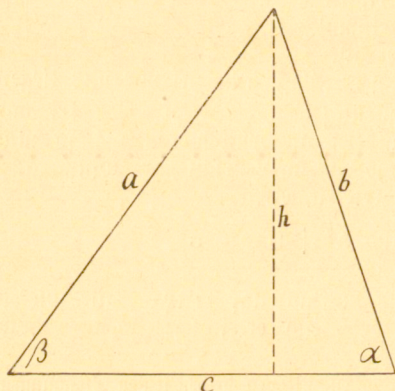
3. Aufg. Die Entfernung zweier Punkte A u. B kann wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses (Berg, See, Sumpf) nicht direkt gemessen werden, wohl aber können von einem seitwärts liegenden Punkt C aus die Entfernungen $CA = b$ und $CB = a$, sowie der Winkel $ACB = \gamma$ bestimmt werden. Berechne den Abstand $AB = c$!

$$\text{Lösung: } c = \sqrt{(b \sin \gamma)^2 + (a - b \sin (90^\circ - \gamma))^2}$$

4. Aufg. Berechne dieselbe Entfernung AB, wenn seitwärts eine Standlinie $CD = e$ und die Winkel $ACD = \alpha$, $BCD = \beta$, $BDC = \gamma$, $ADC = \delta$ gemessen sind.

Nur der Bequemlichkeit wegen (um nicht immer in rechtwinkelige Dreiecke zerlegen zu müssen) leiten wir aus diesen Gleichungen noch einige andere Beziehungen für das schiefwinklige Dreieck ab.

Fig. 9.



Bisher war α zunächst ein spitzer Winkel. Wird α ein stumpfer Winkel, also $\alpha > 90^\circ$, so ist

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg} (180^\circ - \alpha)$$

Ist β ein spitzer Winkel, so ist

$$\sin (90^\circ + \beta) = \cos \beta$$

$$\cos (90^\circ + \beta) = -\sin \beta$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ + \beta) = -\operatorname{ctg} \beta$$

$$\operatorname{ctg} (90^\circ + \beta) = -\operatorname{tg} \beta$$

Zerlegen wir ein schiefwinkliges Dreieck durch eine Höhe in 2 rechtwinklige Dreiecke, so ist

$$a \sin \beta = h = b \sin \alpha$$

und damit haben wir den

Sinussatz

$$1) \quad \underline{a : b = \sin \alpha : \sin \beta.}$$

In jedem Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Zusammenfassend ausgedrückt verhält sich also

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

oder

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Aus (1) folgt durch korrespondierende Addition und Subtraktion

$$2) \quad \underline{\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}} \quad (\text{Siehe die goniometr. Gleichungen, letzte Gruppe}).$$

eine Gleichung, welche mit Vorteil verwendet werden kann, wenn 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel eines Dreiecks gegeben sind.

Aus dem erweiterten Pythagoreischen Lehrsatz folgt der sogenannte

Cosinus-Satz

$$3) \quad \underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

Wird hier α stumpf, so wird $\cos \alpha$ negativ und damit nimmt das doppelte Produkt ein positives Vorzeichen an.

(Vergl. den oben angeführten Lehrsatz $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2bc \cos \alpha$)

Wollen wir mit dieser Gleichung die Seite a zuerst berechnen, so führen wir der bequemen logarithmischen Berechnung wegen einen Hilfswinkel φ so ein, daß

$$\cos \varphi = \frac{2 \sqrt{bc} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{b + c},$$

dann ist

$$a = (b + c) \sin \varphi.$$

Goniometrische Gleichungen.

Diese finden häufig Anwendung bei Umformung trigonometrischer Ausdrücke.

$$1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Aus dem Pythagoreischen Lehrsatz folgt, wenn man mit dem Quadrat der Hypotenuse dividiert,

$$2) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

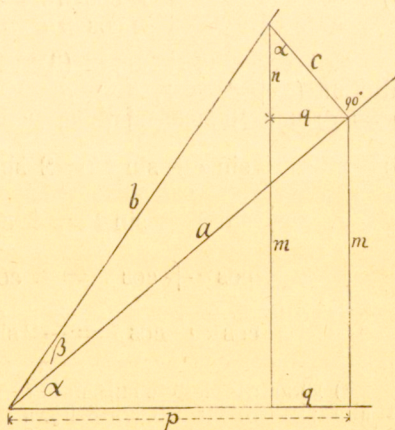
Funktionen von Summen und Differenzen zweier Winkel.

Aus nebenstehender Figur 10 erhellt, daß

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \\ \frac{m+n}{b} &= \frac{a \sin \alpha + c \cos \alpha}{b} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

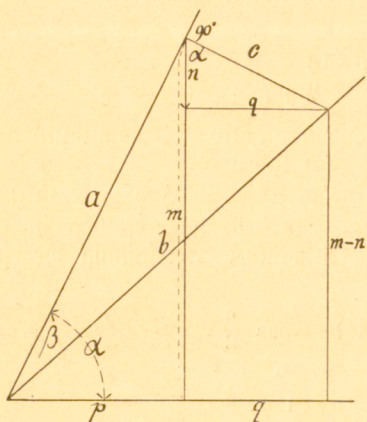
$$\begin{aligned} \text{und } \cos(\alpha + \beta) &= \\ \frac{p-q}{b} &= \frac{a \cos \alpha - c \sin \alpha}{b} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Fig. 10.



Ferner aus Fig. 11

Fig. 11.



$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \\ \frac{m - n}{b} &= \frac{a \sin \alpha - c \cos \alpha}{b} \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \cos(\alpha - \beta) &= \\ \frac{p + q}{b} &= \frac{a \cos \alpha + c \sin \alpha}{b} \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen erhalten wir kürzer aus den beiden ersten, wenn wir dort anstelle von $+\beta -\beta$ schreiben. Es ist dann rechter Hand

$$\begin{aligned} \sin(-\beta) &= -\sin \beta \text{ und} \\ \cos(-\beta) &= +\cos \beta \text{ zu setzen.}^* \end{aligned}$$

Zusammenfassend geschrieben haben wir also die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3) \quad \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Setzen wir in (3) $\beta = \alpha$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 4) \quad \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Diese Gleichungen mit Gleichung (2) zusammengenommen ergeben

$$\begin{aligned} 5) \quad 1 + \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha \\ 1 - \cos 2\alpha &= 2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Aus den 4 Gleichungen (3) gelangen wir durch passende Substitution ($\alpha + \beta = \xi$, $\alpha - \beta = \eta$ u. nachträglich wieder $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$) und Zusammenfassung zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} 6) \quad \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

*) Wenn wir die Bekanntschaft mit dem Koordinatensystem voraussetzen, so ist also die 2. Figur mit den 2 letzten Gleichungen unnötig, weil diese schon in den ersten enthalten sind.

In diesen wenigen Gleichungen haben wir den wesentlichen Inhalt der ebenen Trigonometrie. Mit ihnen und den wenigen Gleichungen der ebenen Geometrie sind wir nun imstande unbekannte gerade Strecken und Winkel in Figuren, welche durch angegebene oder bequem zu messende Strecken und Winkel bestimmt sind, auf dem Wege der Rechnung zu finden.

Die erste krumme Linie, deren Länge (Umfang) uns interessiert, ist

Die Kreislinie.

Der Umfang eines Kreises, der sich auf einem Rotationskörper befindet, kann auf die eben beschriebene Art leicht gemessen werden. Da ein Kreis durch seinen Durchmesser bestimmt ist, so muß sein Umfang aus dem Durchmesser berechnet werden können. Es bezeichnen u u. u' , r u. r' , d u. d' die Umfänge, Radien und Durchmesser zweier konzentrischen Kreise (Fig. 12.) Wir denken uns, der Umfang des äußeren Kreises sei in n gleiche, sehr kleine Teilchen δu geteilt, so klein, daß wir jeden dieser kleinen Kreisbögen als gerade ansehen können, etwa in der Größe von 1 mm, 1 μ , 1 $\mu\mu$ oder noch kleiner — dafür ist uns gar keine Grenze gesetzt. Denken wir uns ferner durch die Teilpunkte die Radien gezogen, so wird der innere Kreis auch in n gleiche, sehr kleine Teilchen $\delta u'$ geteilt und es ist nun

$$u = n \cdot \delta u \quad u' = n \cdot \delta u'$$

Dabei bezeichnet δu ein sehr kleines Teilchen von u (ist nicht etwa als ein Produkt aufzufassen!)

Aus diesen Gleichungen folgt,

$$\frac{u}{u'} = \frac{\delta u}{\delta u'}$$

Andererseits folgt aus den sehr schmalen, ähnlichen, gleichschenkeligen Dreiecken

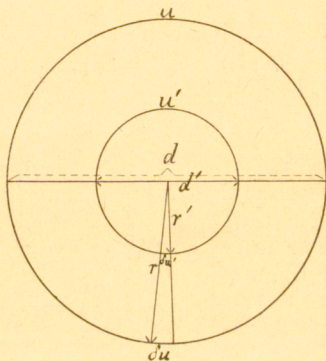
$$\frac{\delta u}{\delta u'} = \frac{r}{r'} = \frac{2r}{2r'} = \frac{d}{d'}$$

Folglich
$$\frac{u}{u'} = \frac{d}{d'} \quad \text{oder} \quad \frac{u}{d} = \frac{u'}{d'}$$

Ziehen wir mehrere Kreise in unsere Betrachtung, so erhalten wir die Beziehung

$$\frac{u}{d} = \frac{u'}{d'} = \frac{u''}{d''} = \frac{u'''}{d'''} = \dots$$

Fig. 12.



d. h. das Verhältniß zwischen Umfang und Durchmesser hat für alle Kreise den gleichen Wert.

Ist der numerische Wert dieser Quotienten (unbenannte Zahl!) einmal bestimmt, so ist, wenn π diesen Wert bezeichnet,

$$\underline{u = \pi \cdot d.}$$

Bestimmung der Zahl π .

1. Aus vorgenommenen Messungen.

Wir lassen uns vom Drechsler oder Metalldreher aus hartem Holz oder Metall (Messing) einen oder besser einige senkrechte Kreiszyylinder herstellen, messen so sorgfältig als möglich den Durchmesser (Maßstab mit Nonius) und mit Hilfe eines Streifens aus dünnem Papier (Pauspapier) den Umfang.

Wir finden dann nach der Gleichung

$$\frac{u}{d} = \pi$$

für π Zahlenwerte wie

3,140 3,141 3,142 3,143 3,144

Nehmen wir eine Reihe solcher Messungen vor, so erhalten wir als Mittelwert etwa

$$\pi = 3,142,$$

einen Wert, der für sehr viele praktische Aufgaben vollauf genügt.

Für gewöhnliche Zeichnungen genügt es $\pi = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$ zu setzen

(Genauer ist $\pi = \frac{355}{113}$).

2. Durch eine Wägung. Wir haben bereits dargelegt, daß das Verhältniß zwischen dem Umfang u und dem Durchmesser d eines Kreises einen konstanten Wert hat, den wir vorläufig mit π bezeichneten,

$$\frac{u}{d} = \pi.$$

Im zweiten Abschnitt werden wir den Flächeninhalt F eines Kreises berechnen und finden

$$F = \pi r^2$$

Im dritten Abschnitt werden wir die Frage nach dem Rauminhalt eines senkrechten Kreiszyinders stellen und die Antwort erhalten: Sein Rauminhalt ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Stellen wir nun aus einer Blechtafel eine Kreisscheibe vom Radius r und eine quadratische Scheibe von der Seitenlänge r her, so ist das Gewicht dieser Scheiben, wenn d die Blechdicke und s das spezifische Gewicht des Materials bezeichnet,

$$G_k = \pi r^2 d s \quad \text{bzw.} \quad G_q = r^2 d s.$$

Hieraus folgt: $\pi = \frac{G_k}{G_q}$

Bestimmen wir also die Gewichte der beiden Scheiben auf einer empfindlichen Wage, so ergibt sich der numerische Wert von π als der Quotient dieser Gewichte.

Wir haben hier zwei solche Scheiben aus 1,5 mm dickem Messingblech, aus dem Innern einer Blechtafel nebeneinander ausgeschnitten und von einem Feinmechaniker so genau als möglich bearbeitet. $r = 10$ cm.

Das Gewicht der Kreisscheibe beträgt $G_k = 582,425$ g,

das Gewicht der quadratischen Scheibe $G_q = 185,391$ g.

$$\pi = \frac{582,425 \text{ g}}{185,391 \text{ g}} = \underline{\underline{3,14160.}}$$

Es wird sich wegen der Unvollkommenheit des Materials empfehlen mehrere solche Plattenpaare herstellen zu lassen und aus den verschiedenen Resultaten das arithmetische Mittel zu nehmen.

3) Durch eine Annäherungsmethode. Wir schließen dabei die Zahl π zwischen 2 Grenzen ein, die wir allmählich enger und enger zu ziehen imstande sind.

Beschreiben wir einem geg. Kreis vom Durchmesser d ein regelmäßiges n -Eck (5-Eck oder 6-Eck oder 8-Eck) ein und um, so liegt der Umfang des Kreises augenscheinlich zwischen den Umfängen dieser zwei n -Ecke; er ist größer als der Umfang des eingeschriebenen und kleiner als der Umfang des umgeschriebenen n -Ecks.

Wir können nun aus dem Radius oder Durchmesser eines Kreises Seite und Umfang eines eingeschriebenen und umgeschr. regelmäßigen n -Ecks, für $n = 5, 6, 8$, leicht berechnen und erhalten

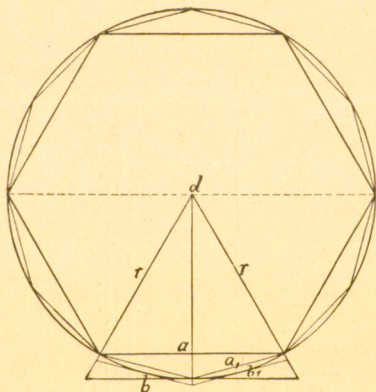
$$u_e = c \cdot d \text{ bzw. } u_u = c' \cdot d.$$

Dabei sind c u. c' zwei unbenannte Zahlen und es ist

$$c < \pi < c'$$

Nun können wir aus der Seite a des eingeschriebenen n -Ecks die Seite a_1 des eingeschriebenen $2n$ -Ecks berechnen.

Fig. 13.



$$a_1 = \sqrt{2r \left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right)}$$

$$b_1 = \frac{a_1 r}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}}$$

Der Umfang des eingeschriebenen $2n$ -Ecks ist also

$$u'_e = 2n \cdot a_1$$

und der des umgeschriebenen $2n$ -Ecks

$$u'_u = 2n \cdot b_1 \quad \text{u. s. w.}$$

Beginnen wir z. B. mit dem eingeschr. regelm. Sechseck, dessen Seite bekanntlich gleich dem Radius des Kreises ist, bestimmen zunächst die Umfänge des ein- und umgeschr. regelm. 6-Ecks, dann die Umfänge des ein- und umgeschr. regelm. 12-Ecks, 24-Ecks, 48-Ecks u. s. w., so ergibt sich für die Zahlenfaktoren c u. c' die folgende Tabelle, die dem Lehrbuch der Planimetrie von Heis u. Eschweiler entnommen ist.

Die Durchführung dieser Rechnung ist sehr langwierig, weshalb sie hier nur angedeutet werden kann.

Wir erkennen aus dieser Tabelle, daß die Grenzen c u. c' der Zahl π immer enger und enger werden. Im letzten Fall zeigen sie erst in der 9ten Dezimalstelle noch eine kleine Abweichung.

Anzahl der Seiten.	Umfang der eingeschriebenen Polygone. $u_e = c \cdot d$	Umfang der umgeschriebenen Polygone. $U_u = c' \cdot d$
6	$c = 3.000\ 0000$	$c' = 3.4641\ 0162$
12	3.1058 2854	3.2153 9031
24	3.1326 2861	3.1596 5994
48	3.1393 5020	3.1460 8622
96	3.1410 3195	3.1427 1460
192	3.1414 5247	3.1418 7305
384	3.1415 5761	3.1416 6275
768	3.1415 8389	3.1416 1018
1536	3.1415 9046	3.1415 9703
3072	3.1415 92106	3.1415 9375
6144	3.1415 92517	3.1415 92927
12288	3.1415 92619	3.1415 92722
24576	3.1415 92645	3.1415 92671
49152	3.1415 92651	3.1415 92658
98304	3.1415 92653	3.1415 92655

Da die Zahl π zwischen c u. c' liegen muß, so können wir hiernach bis auf 8 Dezimalstellen genau schreiben

$$\pi = \underline{\underline{3,1415\ 9265}}$$

4) Trigonometrische Bestimmung. (auch Annäherung!)
Stehen uns einmal die trigonometrischen Funktionen zur Verfügung,
so ist der numerische Wert der Zahl π sehr rasch bestimmt.

Ziehen wir zunächst das einem Kreise vom Durchm. d ein-
geschr. regelm. 360-Eck in Betracht, so ist dessen Umfang

$$u_e = 360 \cdot 2 \cdot r \cdot \sin 30' = 360 \cdot \sin 30' \cdot d = c \cdot d$$

$$\begin{array}{r} \log 360 = 2,556\ 3025 \\ \log \sin 30' = 7,940\ 8419 - 10 \\ \hline \log c = 0,497\ 1444 \\ c = 3,141\ 553 \end{array}$$

Betrachten wir das einem Kreise eingeschr. regelm. 360 · 60-Eck
= 21 600-Eck, so ist der zu einer Seite gehörige Zentrwinkel $1'$
und der Umfang

$$u'_e = 21\ 600 \sin 30'' \cdot d = c' \cdot d.$$

$$\begin{array}{r} \log 21\ 600 = 4,334\ 4538 \\ \log \sin 30'' = 6,162\ 6961 - 10 \\ \hline \log c' = 0,497\ 1499 \\ c' = 3,141\ 593. \end{array}$$

Der Umfang des umgeschr. regelm. 21 600 Ecks ist

$$u'_u = 21\ 600 \cdot \text{tg } 30'' \cdot d = c'' \cdot d$$

$$\begin{array}{r} \log 21\ 600 = 4,334\ 4538 \\ \log \text{tg } 30'' = 6,162\ 6961 - 10 \\ \hline \log c'' = 0,497\ 1499. \end{array}$$

Die Logarithmen der Zahlenfaktoren c' und c'' stimmen also
bis in die 7. Dezimale überein und, wenn wir uns auf diese Ge-
nauigkeit beschränken, so können wir setzen

$$\log \pi = 0,497\ 1499 \quad \text{oder} \quad \pi = \underline{\underline{3,141593.}}$$

5) Durch Summierung der Glieder von unend-
lichen Reihen, welche in der algebraischen Analysis für die
Zahl π aufgestellt werden:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

oder die konvergenteren Reihen:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \dots \right) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \dots \right) \\ &= 1 - 2 \left(\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{15 \cdot 17} + \dots \right) \end{aligned}$$

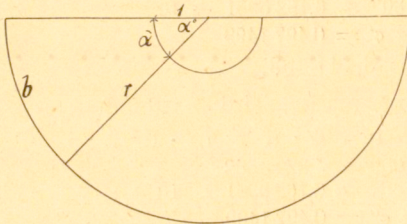
oder die noch rascher konvergierende Reihe:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 2^9} + \dots$$

Wir erfahren bei diesen Berechnungen, daß die Zahl $\pi = \frac{u}{d}$ eine sogen. irrationale Zahl ist, eine Zahl, die sich nicht vollständig genau durch ganze Zahlen oder in Bruchteilen der Einheit ausdrücken läßt, der wir uns aber bis zu jeder gewünschten Genauigkeit nähern können (Dezimalbruch mit unendlich vielen Stellen).

Bestimmung der Länge eines Kreisbogens. Gradmaß und Bogenmaß eines Winkels.

Fig. 14.



In einem Kreis ist die Länge eines Bogenstückes augenscheinlich dem zugehörigen Zentriwinkel proportional.

$$b : \pi r = \alpha^\circ : 180^\circ$$

$$b = \pi r \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

Unter dem Bogenmaß eines Winkels (α°) versteht man den entsprechenden Bogen ($\widehat{\alpha}$) im Kreis vom Radius 1, der um den Scheitel dieses Winkels beschrieben ist. Wir erhalten also die Beziehung

$$\widehat{\alpha} : \pi \cdot 1 = \alpha^\circ : 180^\circ$$

und diese gestattet Gradmaß und Bogenmaß eines Winkels ineinander umzurechnen.

$$\widehat{\alpha} = \pi \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \quad \alpha^\circ = \frac{\widehat{\alpha}}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Die Länge des Bogens b ist nun

$$b = \pi r \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = r \cdot \widehat{\alpha}$$

Für denselben Zentriwinkel ist die Bogenlänge dem Radius des Kreises proportional.

II. Messung und Berechnung von ebenen Flächen.

Um den Inhalt von Flächen messen zu können ist es zuvörderst nötig, daß wir Flächeneinheiten bestimmen. Als eine Flächeneinheit nehmen wir die Fläche eines Quadrats, dessen Seite gleich einer Längeneinheit ist. Wir erhalten so die Flächeneinheiten: 1 qkm, 1 qm, 1 qdm, 1 qcm, 1 qmm u. s. w.

Während in unserem metrischen Maßsystem jede Längeneinheit 10 der nächst kleineren Einheiten zählt, zerfällt jede Flächeneinheit, wie ein Blick auf Fig. 15 zeigt, in 100 der nächst kleineren Flächeneinheiten.

$$1 \text{ qm} = 100 \text{ qdm} = 10000 \text{ qcm} = 1000000 \text{ qmm.}$$

$$1 \text{ qdm} = 100 \text{ qcm} = 10000 \text{ qmm.}$$

$$1 \text{ qcm} = 100 \text{ qmm.}$$

$$1 \text{ qkm} = 1000000 \text{ qm.}$$

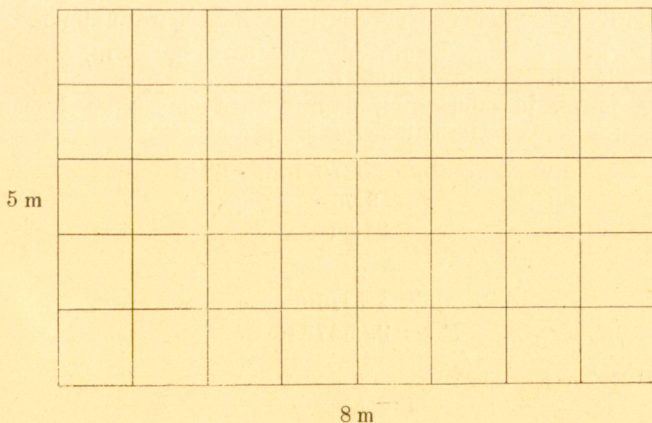
Für Feldmaße haben wir die Einheiten:

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10000 \text{ qm} = 1 \text{ qHm.}$$

$$1 \text{ a} = 100 \text{ qm} = 1 \text{ qDm.}$$

1) Flächeninhalt eines Rechtecks und eines Quadrats.

Fig. 16.



Beträgt z. B. die Länge eines Rechtecks 8 m, seine Breite 5 m, so können wir es, wie in Fig. 16 geschehen, in qm teilen und wir erhalten für seinen Flächeninhalt:

$$F = 8 \cdot 5 \cdot 1 \text{ qm} = 40 \cdot 1 \text{ qm} = 40 \text{ qm}.$$

Den Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Länge und Breite durch ganze Zahlen in derselben Längeneinheit ausgedrückt sind, erhalten wir in Quadraten dieser Längeneinheit, wenn wir die Maßzahlen der Länge und Breite miteinander multiplizieren.

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen und aus einem später noch zu erörternden anderen Grunde setzen wir fest, daß wir diesen Flächeninhalt von 40 qm als das Produkt zweier Strecken von 8 m und 5 m auffassen wollen. Wir schreiben also fortan:

$$F = 8 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 40 \text{ qm},*)$$

obgleich diese Auffassung arithmetisch nicht zulässig ist, denn man kann eine benannte Zahl nur mit einer unbenannten Zahl multiplizieren. Wir sagen nun:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus Länge und Breite.

$$F = a \cdot b,$$

wenn a und b diese Dimensionen in irgend einer Längeneinheit bezeichnen.

Der eben ausgesprochene Satz gilt aber zunächst nur, wenn a und b durch ganze Zahlen in ein und derselben Längeneinheit ausgedrückt sind.

Wir wollen nun an einem Zahlenbeispiel untersuchen, wie sich die Sache gestaltet, wenn a und b gebrochene Zahlen sind. Da wir praktisch fast immer mit Dezimalbrüchen rechnen, so wollen wir uns hier auch auf solche beschränken. Es hat keinerlei Schwierigkeit dieselbe Entwicklung für gemeine Brüche durchzuführen.

Es sei die Länge eines Rechtecks $a = 8,476 \text{ m}$, die Breite $b = 3,84 \text{ m}$. Wenn a und b in ganzen Zahlen ausgedrückt werden sollen, so müssen wir 1 mm als Längeneinheit wählen. Dann ist der Flächeninhalt dieses Rechtecks

$$\begin{aligned} F &= a \cdot b = 8476 \text{ mm} \cdot 3840 \text{ mm} \\ &= 8476 \cdot 3840 \text{ qmm} \\ &\quad \begin{array}{r} 25428 \\ 67808 \\ \hline 33904 \end{array} \\ F &= 32547840 \text{ qmm} \\ F &= 32,547840 \text{ qm}. \end{aligned}$$

*) Also auch $40 \text{ qm} : 8 \text{ m} = 5 \text{ m}$
 $40 \text{ qm} : 5 \text{ m} = 8 \text{ m}.$

Genau dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir das Produkt
 $8,476 \text{ m} \cdot 3,84 \text{ m}$ berechnen.

$$F = 32,54784 \text{ qm.}$$

Nach dem Multiplikationsatz für Dezimalbrüche kommt das Komma genau an dieselbe Stelle wie nach der eben vorgenommenen Umwandlung der qmm in qm.

Wenn wir also den Flächeninhalt dieses Rechtecks in qm haben wollen, so ist es gar nicht notwendig Länge und Breite erst durch ganze Zahlen in einer kleineren Längeneinheit auszudrücken.

Die Formel $F = ab$

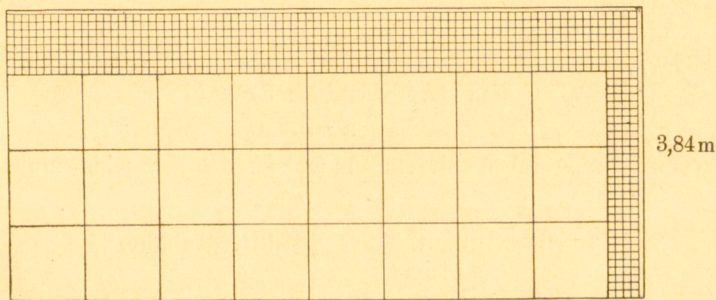
gibt auch dann den Flächeninhalt eines Rechtecks, wenn a und b gebrochene Zahlen sind.

Was heißt es nun, wir multiplizieren $8,476 \cdot 3,84$ (qm)?

Es heißt:

Wir legen zuerst, indem wir von einer Ecke aus anfangen, aneinanderstoßend sovielen qm in das Rechteck als wir hineinbringen und zählen sie.

Fig. 17.



8,476 m

Es sind $8 \cdot 3 \text{ qm} = 24 \text{ qm.}$

Dann umrändern wir das von den 24 qm gebildete Rechteck mit soviel qdm als noch Platz finden.

Es sind $(80 \cdot 8 + 4 \cdot 30 + 4 \cdot 8) \text{ qdm} = 792 \text{ qdm.}$

Dann umrändern wir das von den qm und qdm gebildete Rechteck mit sovielen qem als wir noch hineinlegen können.

Es sind $(840 \cdot 4 + 7 \cdot 380 + 7 \cdot 4) \text{ qem} = 6048 \text{ qem.}$

Schließlich bringen wir hier auf der Breitseite noch

$$6 \cdot 3840 \text{ qmm} = 23040 \text{ qmm unter.}$$

Summe aller dieser Quadrate:

$$\begin{array}{rcl}
 24 \text{ qm} & = & 24 \text{ qm} \\
 792 \text{ qdm} & = & 7,92 \text{ "} \\
 6\,048 \text{ qcm} & = & 0,6048 \text{ "} \\
 230\,409 \text{ qmm} & = & 0,023040 \text{ "} \\
 \hline
 F & = & 32,547840 \text{ qm.}
 \end{array}$$

Dies ist der genaue Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seiten
 $a = 8,476 \text{ m}$, $b = 3,84 \text{ m}$.

Ist dieses Rechteck nicht ein bloß vorgestelltes, gedachtes, sondern ist es materiell vorhanden, hat man seine Seiten gemessen, so beträgt der Fehler bei der Abrundung auf mm äußerst $\pm 0,5 \text{ mm}$ für jede Strecke. Die Fehlergrenze für den Flächeninhalt ist also

$$\begin{aligned}
 & \pm (8476 \cdot 0,5 + 3840 \cdot 0,5) \text{ qmm} \\
 & = \pm 12316 \cdot 0,5 \text{ qmm} = \pm 6158 \text{ qmm.}
 \end{aligned}$$

Und dabei ist noch vorausgesetzt, daß der angewandte Maßstab vollkommen genau war.

Der Flächeninhalt eines gegebenen Rechtecks ist also der Grenzwert des Produktes aus der gemessenen Länge und Breite. Wir kommen dem wirklichen Flächeninhalt umso näher, je genauer wir diese Dimensionen zu messen vermögen.

Der Flächeninhalt wird bei allen Rechtecken in der gleichen Weise bestimmt wie bei dem hier durchgeführten besonderen Fall.

Wir können also den Satz aussprechen:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem
 Produkt aus Länge und Breite

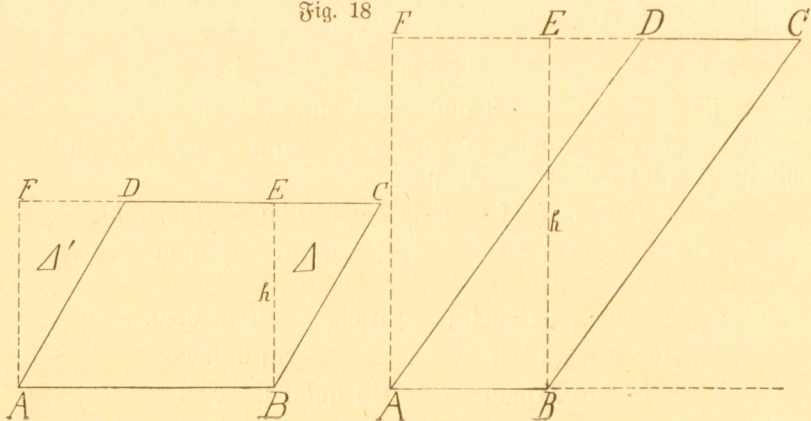
$$F = a \cdot b.$$

Wird $b = a$, so haben wir ein Quadrat und dessen Flächeninhalt

$$F = a \cdot a = a^2.$$

2. Flächeninhalt eines Parallelogramms.

Fig. 18



Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm, also $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ und $h \perp AB$ (u. CD) seine Höhe.

Ziehen wir AF und BE senkrecht zu AB und damit auch senkrecht zu DC , so ist $ABEF$ ein Rechteck. Da nun $\triangle' \cong \triangle$, so ist

Parallelogramm $ABCD =$ Rechteck $ABEF$.

Indem wir das durch B in der ersten Figur abgeschchnittene Dreieck \triangle linker Hand in \triangle' wieder anfügen, erhalten wir das Rechteck $ABEF$. Die beiden Fälle erledigt auf einmal folgender Gedankengang:

Subtrahieren wir von dem Trapez $ABCF$ das eine Mal das rechtwinklige Dreieck AFD , das andere Mal das diesem kongruente Dreieck BEC , so folgt

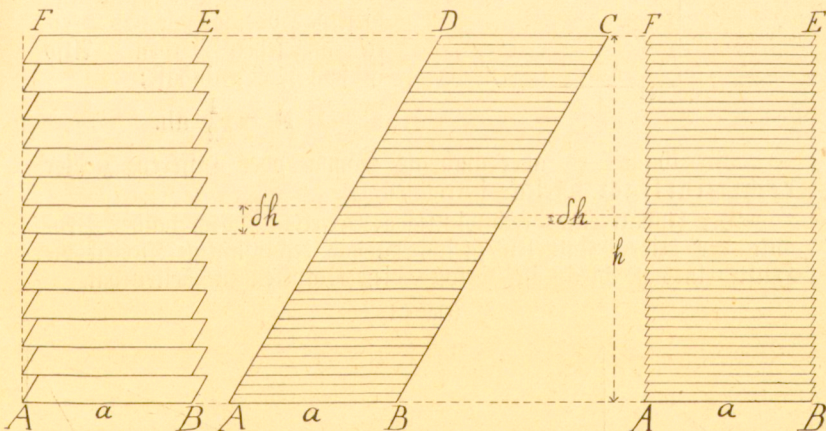
Parallelogramm $ABCD =$ Rechteck $ABEF = a \cdot h$.

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe.

Um nun allmählich in eine Methode einzuführen, deren wir uns später öfters bedienen werden, wollen wir das dem Parallelogramm $ABCD$ flächengleiche Rechteck $ABEF$ noch auf eine andere Art entstehen lassen.

Diese Methode ist eine Annäherungsmethode. Es empfiehlt sich sie bei diesen einfachen Aufgaben schon in Anwendung zu bringen, weil wir hier die strenge Formel schon kennen und so am einleuchtendsten erfahren, daß diese Annäherungsmethode auch zu der strengen Formel führt.

Fig. 19.



Wir zerschneiden das Parallelogramm $ABCD$ parallel zur Grundlinie a in n sehr schmale Streifen (Lamellen) von gleicher Breite dh , dann sind diese sehr schmalen Parallelogramme kongruent und es ist $n \cdot dh = h$.

Diese Lamellen verschieben wir parallel zu AB so, daß ihre entsprechenden Eckpunkte in je eine senkrechte Linie zu AB zu liegen kommen. Es erhellet ohne weiteres, daß die Figur ABFE, begrenzt von den 2 gleichen und parallelen Strecken AB und FE und von den zwei Sägezahnlinien AF und BE, dem Parallelogramm ABCD stets flächengleich sein muß, wie groß oder klein auch δh sein mag.

Die Sägezahnlinien werden um so feiner, nähern sich umso mehr geraden Linien, je kleiner δh gedacht wird. Für $\delta h = 0,1$ mm ist die Sägezahnlinie schon sehr fein, für $\delta h = 1\mu$, $1\mu\mu$ und noch kleiner sind die Zähne mit keinem unserer Sinne mehr wahrnehmbar, für $1\mu\mu$ und darunter nicht einmal mehr mit Hilfe des besten Mikroskops.

Die Grenzen dieser Sägezahnlinien AF und BF sind die senkrechten Geraden AF und BE. Dabei ist aber zu beachten, daß die Sägezahnlinie auch im Unendlichkleinen eine Sägezahnlinie bleibt; die Höhe der Sägezähne wird nur unmeßbar klein.

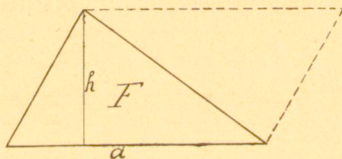
Es ist also

$$ABCD = \sum a \cdot \delta h = n \cdot a \cdot \delta h = a \cdot (n \cdot \delta h) = a \cdot h$$

$$\sum a \cdot \delta h, \text{ lies: „Summe aller } a \cdot \delta h.\text{“}$$

3. Flächeninhalt eines Dreiecks.

Fig. 20.



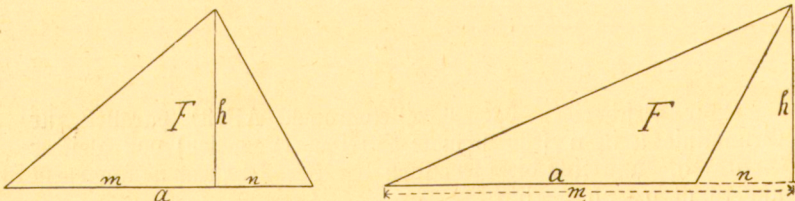
Jedes Dreieck kann als die Hälfte eines Parallelogramms, welches dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe hat wie das Dreieck, angesehen werden. Also ist sein Flächeninhalt:

$$F = \frac{1}{2} ah.$$

Wir können es aber auch als Summe oder Differenz zweier rechtwinkliger Dreiecke betrachten.

Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist dem halben Produkt der beiden Katheten gleich, da das rechtwinklige Dreieck die Hälfte eines Rechtecks ist, welches diese Katheten zu Seiten hat.

Fig 21.



$$F = \frac{1}{2} mh + \frac{1}{2} nh$$

$$F = \frac{1}{2} mh - \frac{1}{2} nh$$

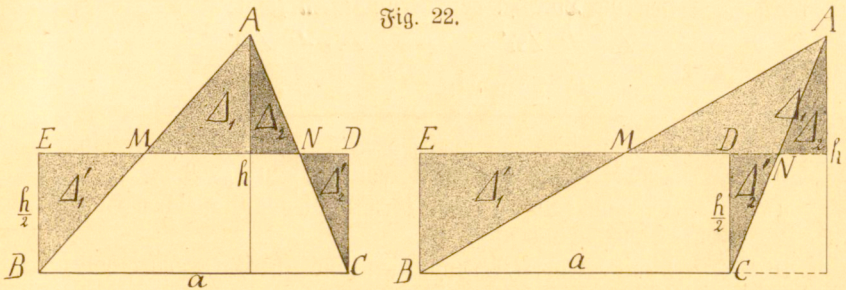
$$F = \frac{1}{2} (m + n) h$$

$$F = \frac{1}{2} (m - n) h$$

$$F = \frac{1}{2} ah$$

$$F = \frac{1}{2} ah$$

Ziehen wir durch den Mittelpunkt der Höhe die Parallele zur Grundlinie a und errichten in deren Endpunkten die Senkrechten, so erhalten wir das Rechteck $BCDE$ und es ist nun nach der Fig. 21 u. 22



$$BCNM = BCNM$$

$$\Delta_1 \cong \Delta_1'$$

$$\Delta_2 \cong \Delta_2'$$

Für Fig. 22₁ ist $BCNM + \Delta_1 + \Delta_2 = BCNM + \Delta_1' + \Delta_2'$

" " 22₂ " $BCNM + \Delta_1 - \Delta_2 = BCNM + \Delta_1' - \Delta_2'$

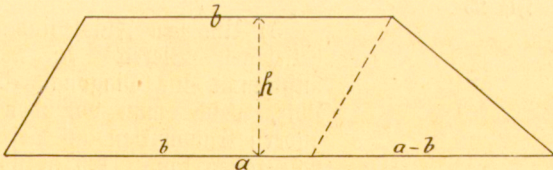
Also Dreieck $ABC =$ Rechteck $BCDE$.

In jedem Falle ist $\triangle ABC = a \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} ah$.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

4. Flächeninhalt eines Trapezes.

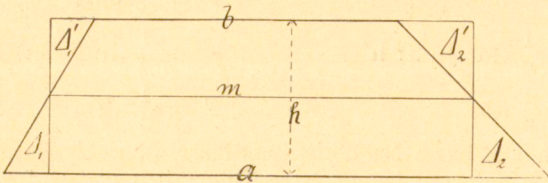
Fig. 23.



Wenn man durch einen Eckpunkt die Parallele zur gegenüberliegenden Seite zieht, so zerfällt das Trapez in ein Parallelogramm und in ein Dreieck. Beide haben dieselbe Höhe h wie das Trapez.

$$F = bh + \frac{1}{2} (a - b) \cdot h = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h.$$

Fig. 24.



Dasselbe Ergebnis, wenn man durch die Mittelpunkte der schrägen Seiten die Lote zu den Grundlinien zieht:

$$\triangle_1 \cong \triangle_1' \qquad \triangle_2 \cong \triangle_2'$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{h} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} \cdot \mathbf{h}.$$

Aus diesen wenigen einfachen Formeln ergeben sich unmittelbar die Sätze über die Flächengleichheit von Figuren; z. B.:

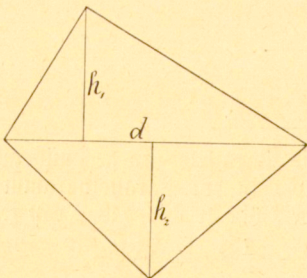
- Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen haben gleichen Flächeninhalt.
- Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen haben gleichen Flächeninhalt

Der geometrische Ort der 3 ten Eckpunkte aller Dreiecke, welche über derselben Grundlinie stehen und gleichen Flächeninhalt haben, ist die Parallele zur Grundlinie, die man im Abstand der Höhe legen kann. (Dient zur Umwandlung von flächengleichen Dreiecken, zur Verwandlung eines n -Ecks in ein Dreieck u. s. w.)

- Parallelogramme, Dreiecke, Trapeze von gleicher Höhe und gleichen Mittelparallelen zur Grundlinie haben gleichen Flächeninhalt. (Mittelparallele zur Grundlinie geht durch den Mittelpunkt der Höhe.)

Alle von geraden Strecken begrenzten Figuren können wir in die hier vorgesführten einfachen Figuren zerlegen und so können wir ihren Flächeninhalt mit Hilfe der entwickelten Formeln berechnen. — Einige Beispiele:

Fig. 25



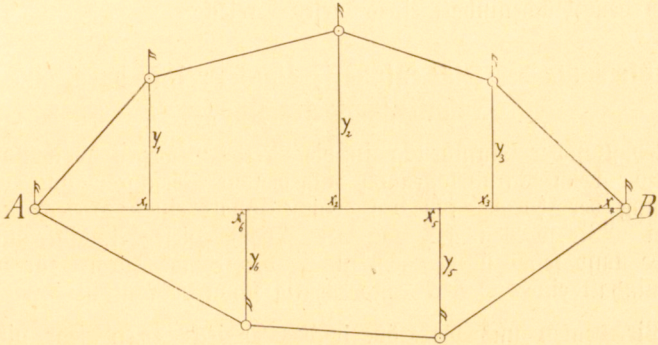
5) Um den Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks zu bestimmen mißt man eine Diagonale d und die Lote, welche man von den beiden andern Endpunkten auf diese Diagonale fallen kann. Es ist nun

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} d h_1 + \frac{1}{2} d h_2$$

$$= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$$

6) Um den Flächeninhalt eines etwa auf dem Felde abgesteckten Polygons berechnen zu können, bestimme man auf einer geeigneten Diagonalen (AB) mit Hilfe eines Winkelspiegels oder eines Prismenkreuzes die Fußpunkte der Lote, welche man von den übrigen Eckpunkten zu dieser Diagonale fallen kann. Dann messe man diese Lote $y_1 y_2 y_3 \dots$ und die Abstände $x_1 x_2 x_3 \dots$ ihrer Fußpunkte von dem einen Endpunkt A.

Fig. 26.

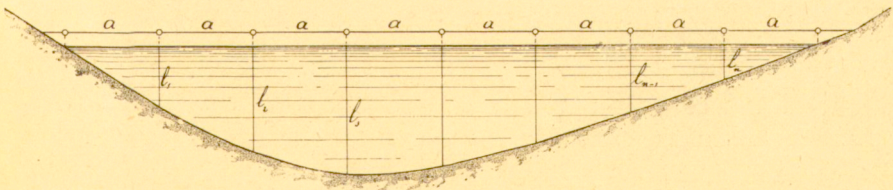


Durch diese Linien wird das Polygon in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze zerlegt und sein Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} [x_1 y_1 + (x_2 - x_1) (y_2 + y_1) + (x_3 - x_2) (y_3 + y_2) + (x_4 - x_3) \cdot y_3 + (x_4 - x_5) y_5 + (x_5 - x_6) (y_5 + y_6) + x_6 y_6].$$

7) Zur Bestimmung des Querschnittes eines Flusses an einer bestimmten Stelle spanne man quer über denselben ein Seil, an dem in gleichen Abständen a von einander Punkte markiert sind, und messe an diesen die Tiefenlote $l_1 l_2 l_3 \dots l_n$.

Fig. 27.



Dann ist der Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} a_1 l + a \frac{l_1 + l_2}{2} + a \frac{l_2 + l_3}{2} + \dots + a \frac{l_{n-1} + l_n}{2} + \frac{1}{2} a l_n$$

$$F = a (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \dots + l_n) = a \cdot \sum_{i=1}^{i=n} l_i^*)$$

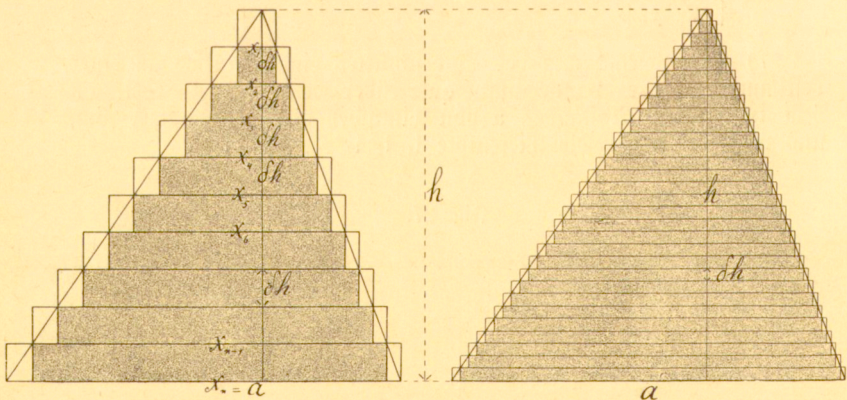
8) Bei der Berechnung des Flächeninhalts der regelmäßigen Polygone oder n -Ecke zerlegen wir im allgemeinen das n -Eck vom Mittelpunkt aus in n kongruente, gleichschenklige Dreiecke und berechnen den Flächeninhalt eines dieser Dreiecke.

Bestimmung des Flächeninhalts eines Dreiecks durch eine Infinitesimalbetrachtung.

Lediglich der Einführung in die Methode wegen wollen wir das schon beim Parallelogramm angedeutete Verfahren auch zur Ableitung der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks anwenden. Wir werden uns von der Schärfe dieser Annäherungsmethode umso fester überzeugen, als ja die strenge Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks anderweitig schon bekannt ist.

Wir denken uns die Höhe h des Dreiecks in n , sehr viele, sehr kleine, gleiche Teile δh geteilt, ziehen durch die Teilpunkte die Parallelen zur Grundlinie und errichten in den Endpunkten dieser parallelen Strecken x_i die Lote zu ihnen, erstens aufwärts, zweitens abwärts. Wir erhalten so zwei Staffeldreiecke: ein äußeres Staffeldreieck Δ_a und ein inneres Staffeldreieck Δ_i .

Fig. 28.



*) Dies: „ a mal Summe aller l_i von $i = 1$ bis $i = n$.“

Bezeichnet Δ den Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks, so ist augenscheinlich

$$1) \quad \Delta_a > \Delta > \Delta_i^*)$$

Der Inhalt des äußeren Staffeldreiecks.

$$2) \quad \Delta_a = x_1 \delta h + x_2 \cdot \delta h + x_3 \cdot \delta h + \dots + x_n \cdot \delta h \\ = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) \cdot \delta h$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$3) \quad x_1 : a = \delta h : h = \delta h : (n \delta h) = 1 : n$$

$$\text{Also } x_1 = \frac{1}{n} a, \text{ ebenso } x_2 = \frac{2}{n} a, x_3 = \frac{3}{n} a, x_4 = \frac{4}{n} a \\ \dots \dots \dots x_{n-1} = \frac{n-1}{n} a, x_n = \frac{n}{n} a.$$

Dies in Gleichung (2) substituiert gibt

$$4) \quad \Delta_a = \left(\frac{1}{n} a + \frac{2}{n} a + \frac{3}{n} a + \dots + \frac{n}{n} a \right) \cdot \delta h \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \frac{a}{n} \cdot \delta h^{**}) \\ = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{a}{n} \cdot \delta h = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot a \cdot (n \cdot \delta h) \\ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) ah$$

Die beiden Staffeldreiecke sind bis auf die unterste Staffel des äußeren Staffeldreiecks kongruent. Wir erhalten analog für das innere Staffeldreieck

$$5) \quad \Delta_i = (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) \frac{a}{n} \cdot \delta h \\ = \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot \frac{a}{n} \cdot \delta h = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot a (n \delta h) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) ah$$

Denken wir uns δh sehr klein, etwa 0,1 mm, so sind die Staffel- oder Sägezahnlinien an den schiefen Dreiecksseiten schon sehr fein. Für $\delta h = 0,01$ mm, 0,001 mm, können wir die Zähne oder Staffeln mit Tast- und Gesichtssinn nicht mehr wahrnehmen und für $\delta h = 0,1 \mu \dots 1 \mu \mu$ und noch kleiner auch nicht mehr durch das feinste Mikroskop. Die Sägezahnlinien erscheinen uns nun als gerade Linien.

*) was sich auch beim stumpfwinkligen Dreieck leicht darlegen läßt.

***)
$$\begin{array}{cccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) = n(n+1) \end{array}$$

Dabei ist aber zu beachten, daß die Staffel- oder Sägezahnlinien auch für unendlich kleine dh solche bleiben. Sie werden keine geraden Linien, aber die Summe der Flächen der Sägezähne wird unmeßbar, unangebar klein, nähert sich immer mehr dem Wert 0.

Wenn also die Strecke dh so klein wird, so wird, da immer $n \cdot dh = h$, die Zahl n sehr groß, schließlich über alle Maßen groß, und damit $\frac{1}{n}$ wieder sehr klein, schließlich unangebar klein. Dieser Wert $\frac{1}{n}$ nähert sich umsomehr dem Wert 0, je größer n wird, wird aber nie völlig gleich 0. Durch Teilung kann man den Wert 0 nicht erreichen, sondern sich ihm nur beliebig nähern. Es kann nun in dieser Weise $\frac{1}{n}$ so klein gemacht werden, daß es gegen 1 gar nicht mehr in Betracht kommt.

Die Fläche eines jeden Staffeldreiecks nähert sich also bei unendlich klein werdendem dh und damit unendlich wachsendem n dem Ausdruck $\frac{1}{2} ah$.

$$\lim \Delta_n = \lim_{\text{für } n = \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot ah = \frac{1}{2} ah$$

$$6) \quad \lim \Delta_i = \lim_{\text{für } n = \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) ah = \frac{1}{2} ah.$$

Die Fläche des Dreiecks Δ liegt stets zwischen den beiden Werten von Δ_n und Δ_i . Diese beiden Grenzen können wir, indem wir dh immer kleiner und kleiner werden lassen, enger und enger ziehen und schließlich für ein unendlich kleines dh zum Zusammenfallen bringen. Da Δ stets zwischen ihnen liegt, so muß der Wert von Δ auch mit diesem Grenzwert zusammenfallen.

$$7) \quad \underline{\underline{\Delta = \frac{1}{2} ah.}}$$

Was also anfangs Annäherungsformel für das Dreieck Δ war, geht in die strenge Formel über, wenn wir mit den Summanden in's Unendlichkleine gehen.

Ein Blick auf die Figuren zeigt, daß hier Δ immer genau in der Mitte zwischen Δ_n u. Δ_i liegt.

$$\Delta_n - \Delta_i = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] ah = \frac{1}{n} ah$$

$$8) \quad \text{Also} \quad \Delta_n - \Delta = \Delta - \Delta_i = \frac{1}{2n} \cdot ah.$$

Diese Differenz ist die Summe der Flächen der Sägezähne, der sehr kleinen rechtwinkligen Dreiecke. Sie wird umso kleiner, je kleiner dh und je größer damit n wird, sie nähert sich dem Wert 0 für ein unendlich kleines dh und ein damit unendlich wachsendes n

$$9) \quad \lim (\Delta_a - \Delta) = \lim (\Delta - \Delta_b) = \lim \left(\frac{1}{2n} ah \right) = 0$$

(für $n = \infty$)

Ein Blick auf die beiden Staffeldreiecke in Fig. 28 läßt diesen Vorgang klar erscheinen.

Rang der verschiedenen sehr kleinen bzw. unendlich kleinen Größen.

Nehmen wir z. B. mit Bezug auf die vorhergehende Rechnung $a = 1 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $\delta h = 0,1 \text{ mm}$, so ist $n = 10\,000$ und

$$\Delta_a - \Delta = \Delta - \Delta_i = \frac{1}{20\,000} \cdot 1 \text{ qm} = 50 \text{ qmm.}$$

Für $\delta h = 1\mu$ wird $n = 1\,000\,000$ und

$$\Delta_a - \Delta = \Delta - \Delta_i = \frac{1}{2\,000\,000} \cdot 1 \text{ qm} = 0,5 \text{ qmm.}$$

Für $\delta h = 1\mu\mu$ wird $n = 1\,000\,000\,000$ und

$$\Delta_a - \Delta = \Delta - \Delta_i = \frac{1}{2\,000\,000\,000} \cdot 1 \text{ qm} = \frac{1}{2\,000} \text{ qm} = 0,0005 \text{ qmm}$$

uſw.

Aus dieser Betrachtung ersehen wir folgendes:

Wenn wir den Inhalt einer Fläche in der Weise bestimmen, daß wir sie in unendlich viele, unendlich schmale Lamellen teilen, und diese Lamellen summieren, so kommt es weiter gar nicht darauf an, wie diese an ihren Enden begrenzt sind, ob durch zu ihren Längsseiten senkrechte oder schiefe Linien. Wir betrachten eine solche Lamelle immer als ein Rechteck. Ihre Fläche ist

$$\delta F = y \cdot \delta x$$

wenn y ihre Längsseite und δx ihre Breite bezeichnet. Um dies zur besseren Vorstellung noch an einem Zahlenbeispiel klarzulegen, sei in Fig. 28 a: $y = 1 \text{ m}$, $\delta x = 1\mu\mu$, dann ist

$$\delta F = 1\,000\,000\,000 \mu\mu \cdot 1 \mu\mu = 1\,000\,000\,000 \text{ q}\mu\mu$$

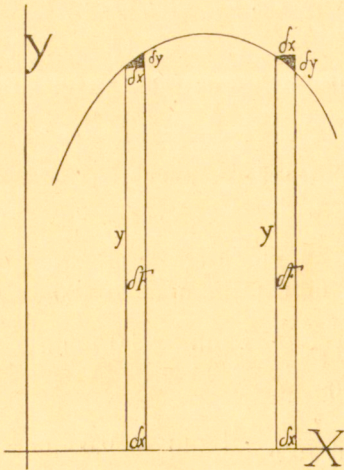
$$= 1000 \text{ qu} = 0,001 \text{ qmm.}$$

Nehmen wir an, das eine Ende sei durch eine senkrechte, das andere durch eine unter 45° geneigte Linie begrenzt, dann ist der Inhalt des vernachlässigten sehr kleinen rechtwinkligen Dreieckchens

$$\delta \Delta = \frac{1}{2} \delta x \cdot \delta y = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ q}\mu\mu = \frac{1}{2} \cdot 0,000\,001 \cdot 0,000\,001 \text{ qmm}$$

$$= 0,000\,000\,000\,000\,5 \text{ qmm.}$$

Fig. 28a



Nehmen wir noch an $F = 1 \text{ qm} = 1000000 \text{ qmm}$, ein Vielfaches oder ein Bruchteil davon und vergleichen den Rang der 3 Größen F , δF , $\delta \Delta$, so erkennen wir, daß δF eine sehr kleine (unendlich kleine) Größe im Verhältnis zu F ist und daß $\delta \Delta$ wieder eine sehr kleine (unendlich kleine) Größe im Verhältnis zu δF ist.

Wir bezeichnen F als eine endliche Größe, δF als eine sehr kleine (unendlich kleine) Größe erster Ordnung, $\delta \Delta$ als eine sehr kleine (unendlich kleine) Größe zweiter Ordnung.

Ein Produkt von 2 unendlich kleinen Größen erster Ordnung gibt eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, wie schon aus dem vorhergehenden Zahlenbeispiel ersichtlich ist.

1 mm = endliche Größe,

0,000 000 001 mm = unendlich kleine Größe 1. Ordnung,

0,000 000 000 000 000 001 mm = unendlich kleine Größe 2. Ordnung usw.

Dabei ist noch zu bemerken, daß eine unendlich kleine Größe gar keinen bestimmten konstanten Wert hat. Es ist eine Größe, die sich der Null beliebig nähert ohne sie zu erreichen. Die eben angeführten Zahlenwerte sind noch lange keine unendlich kleinen Größen. Wir haben sie nur gewählt um uns über das Rangverhältnis sehr kleiner bzw. unendlich kleiner Werte Klarheit zu verschaffen.

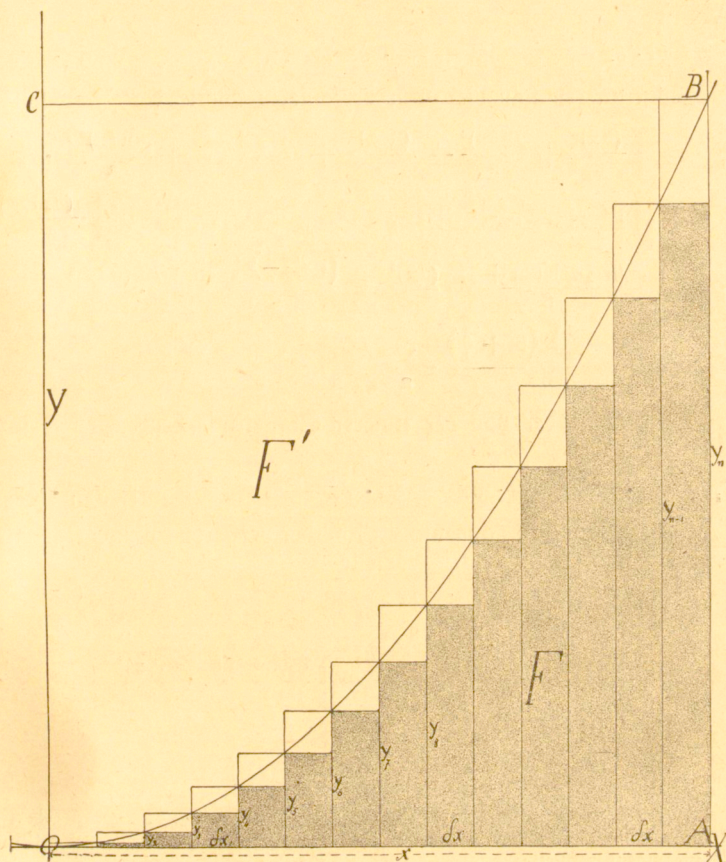
Wir dürfen also in Summen und Differenzen unendlich kleine Größen erster Ordnung gegen endliche Größen vernachlässigen, ebenso unendlich kleine Größen zweiter Ordnung gegen solche erster Ordnung usw.

Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen.

Wir wollen in der folgenden Aufgabe eine Fläche berechnen, die auf einer Seite von einer krummen Linie begrenzt wird.

1 Aufg. Es soll die Fläche bestimmt werden, welche von einer Parabel und den Koordinaten eines ihrer Punkte begrenzt ist.

Fig. 29.



Es sei $ay = x^2$ die Gleichung der Parabel.

Wir teilen die Abszisse OA in n sehr kleine, gleiche Teile δx , dann ist

$$n \cdot \delta x = x.$$

$$y_1 = \frac{(\delta x)^2}{a}$$

$$y_2 = \frac{(2\delta x)^2}{a}$$

$$y_3 = \frac{(3\delta x)^2}{a}$$

$$\dots \dots \dots y_n = \frac{(n\delta x)^2}{a}$$

Errichten wir in den Teilungspunkten die Ordinaten y_1, y_2, \dots, y_n , so wird die Fläche OAB in n gleichbreite Lamellen geteilt. Ziehen wir durch die Schnittpunkte der Ordinaten mit der Kurve die Parallelen zur X -Achse, so erhalten wir zwei längs OB staffelförmig begrenzte Figuren, zwischen deren Flächen F_n u. F_i der gesuchte Inhalt F der Figur OAB liegt.

Der Inhalt der durch die äußere Staffellinie begrenzten Figur OAB ist

$$F_a = y_1 \cdot \delta x + y_2 \cdot \delta x + y_3 \cdot \delta x + \dots + y_n \cdot \delta x.$$

Substituieren wir die oben berechneten Werte der y , so wird

$$\begin{aligned} F_a &= \left[\frac{(\delta x)^2}{a} + \frac{(2 \delta x)^2}{a} + \frac{(3 \delta x)^2}{a} + \dots + \frac{(n \delta x)^2}{a} \right] \cdot \delta x \\ &= \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 \right] \cdot \frac{(\delta x)^3}{a} \quad *) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{(\delta x)^3}{a} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \cdot \frac{(n \delta x)^3}{a} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \cdot \frac{x^3}{a}. \end{aligned}$$

Der Inhalt der von der inneren Staffellinie begrenzten Figur OAB ist

$$F_i = y_1 \cdot \delta x + y_2 \cdot \delta x + y_3 \cdot \delta x + \dots + y_{n-1} \cdot \delta x.$$

Diese Fläche ist augenscheinlich der ersteren kongruent mit Ausfluß von deren letzten Lamelle.

$$\begin{aligned} F_i &= \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2 \right) \cdot \frac{(\delta x)^3}{a} \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \cdot \frac{(\delta x)^3}{a} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6} \cdot \frac{(n \delta x)^3}{a} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6} \cdot \frac{x^3}{a} \end{aligned}$$

*) Die Summenformel der Reihe $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$, auf die wir noch öfters stoßen werden, soll hier abgeleitet werden. Es gelingt dies in folgender Weise:

$$\begin{array}{r} 1^3 = \\ 2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ 4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ 5^3 = (4+1)^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 \\ \dots \\ n^3 = ([n-1]+1)^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n+1)^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{array}$$

Durch beiderseitige Addition:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 - 1^3 - 2^3 - 3^3 - \dots - n^3 \\ + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) \\ (n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \end{aligned}$$

Ein Blick auf die Figur läßt uns erkennen, daß wir damit den Flächeninhalt F des von der Parabel begrenzten Dreiecks OAB zwischen die zwei Grenzwerte für F_n u. F_i eingeschlossen haben. Es ist und bleibt stets $F_n > F > F_i$

Wenn nun die kleine Strecke δx immer kleiner und kleiner wird (1 mm . . . 0,1 mm 1 μ 1 $\mu\mu$ ), zuletzt unendlich klein, so wird die Zahl n immer größer und größer, zuletzt unendlich groß und damit $\frac{1}{n}$ unendlich klein und kann gegen 1 vernachlässigt werden.

Bei diesem Prozeß werden die Staffel- oder Sägezahnlinien OB immer feiner und feiner und nähern sich immer mehr und mehr der Parabelinie OB , mit der beide zusammenfallen, wenn δx unendlich klein, unmeßbar klein wird. Nun ist die Sägezahnlinie auch mit dem feinsten Mikroskop nicht mehr von der Parabelinie zu unterscheiden.

Es ist also

$$\lim F_n = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \cdot \frac{x^3}{a} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{a}$$

für $n = \infty$

$$\lim F_i = \lim \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6} \cdot \frac{x^3}{a} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{a}$$

für $n = \infty$

Da F stets zwischen diesen Grenzwerten liegt, so muß

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{a} = \frac{1}{3} \underline{x \cdot y_n}$$

$$\text{folglich: } 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$

$$= (n+1)[n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1] = (n+1)\left(n^2 + \frac{n}{2}\right) = (n+1)n \cdot \frac{2n+1}{2}$$

$$\text{also } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Oder wenn die Sätze über Binominalkoeffizienten als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, so ist in der ebenfalls als bekannt vorausgesetzten Schreibweise:

$$n^2 = (n+1)n - n = 2 \cdot \binom{n+1}{2} - \binom{n}{1}$$

$$\text{also } \sum n^2 = 2 \sum \binom{n+1}{2} - \sum \binom{n}{1} = 2 \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2}$$

$$= 2 \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (n+1)[2n^2 + 4n - 3n] = \frac{(n+1)(2n+1) \cdot n}{6}$$

3*

Folglich muß die Fläche $OCB \frac{2}{3}$ des Rechtecks aus x u. y_n betragen und

$$F' = \frac{2}{3} x \cdot y_n$$

Wir haben hier wie bei der vorhergehenden Aufgabe über das Dreieck den gesuchten Wert zwischen zwei Grenzwerte eingeschlossen und diese Grenzen immer enger und enger gezogen, bis schließlich die beiden Grenzwerte zusammenfielen und damit auch mit dem gesuchten Wert zusammenfallen mußten. Es erhellt ohne weiteres, daß es bei diesem Prozeß fernerhin gar nicht mehr nötig ist zwei Grenzwerte aufzustellen. Es genügt einer.

Das Dreieck Δ ist die Grenze eines jeden der beiden Staffeldreiecke Δ_n oder Δ_i . Es wird in jedem Fall aus dem Staffeldreieck erreicht, wenn δh unendlich klein wird.

Ebenso ist die von der Parabel begrenzte Fläche OAB der letzten Aufgabe die Grenze einer jeden der beiden Flächen F_n oder F_i , welche durch die Staffellinien begrenzt sind. Sie wird von jeder derselben erreicht, wenn δx unendlich klein wird.

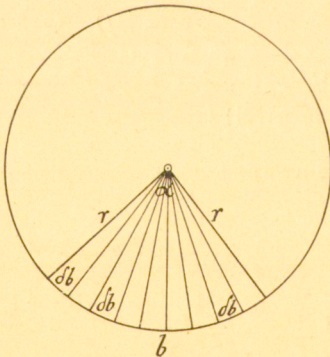
Wir werden also fortan den gesuchten Inhalt der in der Aufgabe angegebenen Fläche als den „Grenzwert“ ansehen und den Inhalt der von der Staffellinie begrenzten Fläche als einen „Annäherungswert“ betrachten, dessen Grenzwert eben zu suchen ist.

$$\Delta = \lim \Delta_n \text{ oder } = \lim \Delta_i$$

$$F = \lim F_n \text{ oder } = \lim F_i$$

2. Der Flächeninhalt eines Kreises und seiner Teile.

Fig. 30.



Hier haben wir es mit einer anderen Art der Annäherung zu tun.

Wir denken uns den Umfang des Kreises in sehr kleine Teile δb geteilt, so klein, daß wir jedes Bogenteilchen als gerade ansehen können (diese Bogenteilchen brauchen nicht gleich zu sein) und die Radien nach den Endpunkten dieser Bogenteilchen gezogen. Dadurch wird die Kreisfläche in sehr viele, sehr schmale, gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel r sind, und deren Höhen zu den δb auch $= r$

gesetzt werden können, geteilt.

Der Unterschied zwischen r und einer dieser Höhen ist sogar eine unendlich kleine Größe 2. Ordnung.

Die Fläche des vollen Kreises ist nun

$$F_k = \sum \frac{1}{2} \delta b \cdot r$$

Die sämtlichen Glieder haben den gemeinsamen Faktor $\frac{1}{2} r$.
 Deshalb ist $F_k = \frac{1}{2} r \cdot \sum \delta b = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$.

Die Fläche des Kreissektors über dem Bogen b ist
 $F_s = \frac{1}{2} r \cdot \sum \delta b$, wobei sich die Summe $\sum \delta b$ nur auf den
 Bogen b erstreckt. $\sum \delta b = b$.

$$\text{Also} \quad F_s = \frac{1}{2} r \cdot b = \frac{1}{2} b \cdot r$$

Der Flächeninhalt eines Kreissektors ist gleich dem eines Dreiecks, dessen Grundlinie dem Kreisbogen und dessen Höhe dem Kreisradius gleich ist.

Bezeichnet $\hat{\alpha}$ den zu b gehörigen Zentrivinkel im Bogenmaß, so ist

$$b = r \cdot \hat{\alpha} \quad \text{und}$$

$$F_s = \frac{1}{2} r^2 \hat{\alpha}.$$

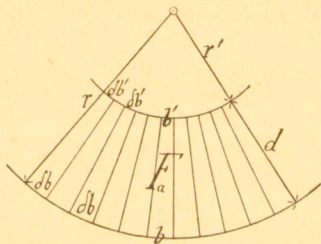
Bezeichnet α^0 diesen Winkel im Gradmaß, so ist

$$F_s = \pi r^2 \frac{\alpha^0}{360}.$$

Fig. 31.

Der Flächeninhalt eines **Kreisringes** ist $\pi (r^2 - r'^2)$

und der Flächeninhalt eines **Ausschnitts aus einem Kreisring**, wenn wir uns wieder die eingangs erwähnte Kleinteilung des äußeren Bogens b vorgenommen denken,



$$\begin{aligned} F_a &= \sum \frac{\delta b + \delta b'}{2} \cdot d = \frac{d}{2} \cdot \sum (\delta b + \delta b') \\ &= \frac{d}{2} (\sum \delta b + \sum \delta b') = \frac{d}{2} (b + b') \\ &= \frac{b + b'}{2} \cdot d = \frac{b + b'}{2} (r - r'), \end{aligned}$$

und wenn wir wieder $\hat{\alpha}$ und α^0 einführen, so ist

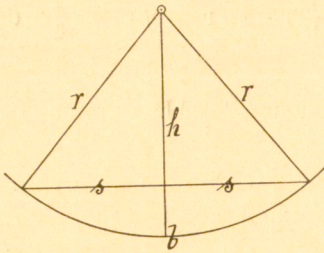
$$b = r \cdot \hat{\alpha} \quad \text{und} \quad b' = r' \cdot \hat{\alpha}$$

$$F_a = \frac{(r + r') \hat{\alpha}}{2} (r - r') = \frac{1}{2} (r^2 - r'^2) \hat{\alpha},$$

oder $F_a = \pi (r^2 - r'^2) \frac{\alpha^0}{360}.$

Der Flächeninhalt eines **Kreissegments** ist die Differenz zwischen dem Inhalt eines Kreissectors und dem Inhalt des auf seiner Sehne stehenden gleichschenkligen Dreiecks.

Fig. 32.



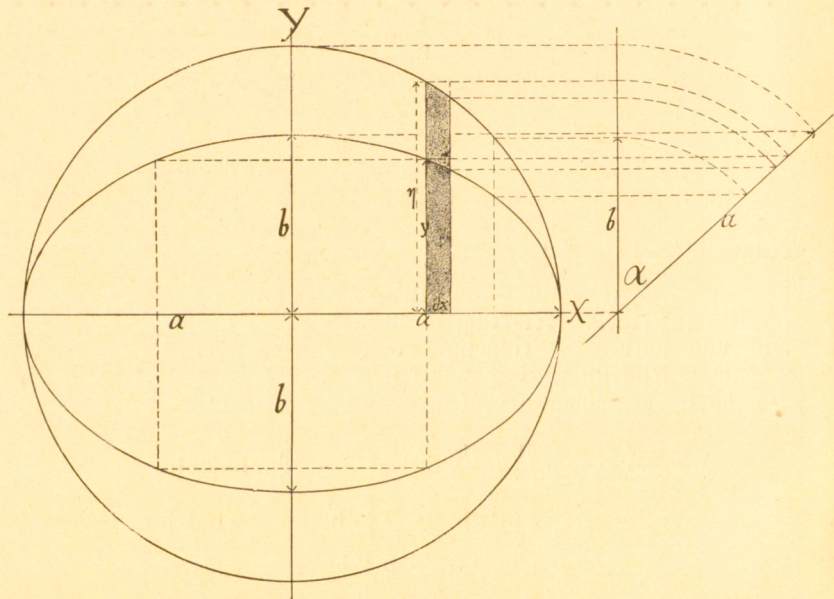
$$\underline{F = \frac{1}{2} br - sh}$$

Dazu noch die Gleichung:

$$h^2 + s^2 = r^2$$

3. Flächeninhalt einer Ellipse.

Fig. 33.



Eine Ellipse entsteht aus einem Kreis, wenn wir alle Ordinaten η des Kreises im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkleinern (oder vergrößern), was wir konstruktiv durch eine geeignete Projektion ausführen können.

$$y = \frac{b}{a} \cdot \eta$$

Wir teilen die Fläche des Viertelkreises und der Viertel-ellipse durch Ordinaten in sehr viele, sehr schmale Lamellen von der Breite δx .

Die Fläche des Kreises ist dann

$$F_k = 4 \sum_{x=0}^{x=a} \eta \cdot \delta x = \pi \cdot a^2$$

und der Flächeninhalt der **Ellipse** ist dann

$$\begin{aligned} F_e &= 4 \sum_{x=0}^{x=a} y \cdot \delta x = 4 \sum_0^a \frac{b}{a} \eta \cdot \delta x \\ &= 4 \cdot \frac{b}{a} \sum_0^a \eta \delta x = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \underline{\underline{\pi \cdot ab.}} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der Ellipse ist gleich dem mit der Zahl π multiplizierten Produkt ihrer Halbachsen.

Wir erkennen aus dieser Figur gleich den folgenden allgemein gültigen Satz:

Der Inhalt der Projektion einer Fläche wird erhalten, wenn wir den Inhalt der gegebenen Fläche mit dem \cos ihres Neigungswinkels gegen die Projektionsebene multiplizieren.

In dem eben behandelten Fall ist $\frac{b}{a} = \cos \alpha$

$$F_e = F_k \cdot \cos \alpha = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$$

4. Das elektrische Potential.

Da es für den physikalischen Unterricht von großem Interesse ist, so soll hier die Formel für das elektrische Potential entwickelt werden. Es fügt sich gerade hier gut ein, weil seine Berechnung in anschaulicher Weise durch die Inhaltsberechnung einer Fläche versinnbildlicht werden kann.

Der Vollständigkeit wegen sollen auch die elektrischen Maßeinheiten, die hier in Frage kommen, Erwähnung finden:

1) die Kräfteinheit : **1 Dyn** = $\frac{1}{981}$ **Gramm.**

2) die Längeneinheit : **1 cm.**

3) die Zeiteinheit : **1 Sekunde.**

4) die Einheit einer elektrischen Ladung (Quantität) : **1 Ladungseinheit (1 LE)**, d. i. diejenige elektrische Ladung, welche auf eine gleichgroße im Abstand 1 cm von ihr befindliche Ladung mit einer Kraft von 1 Dyn abstoßend oder anziehend wirkt.

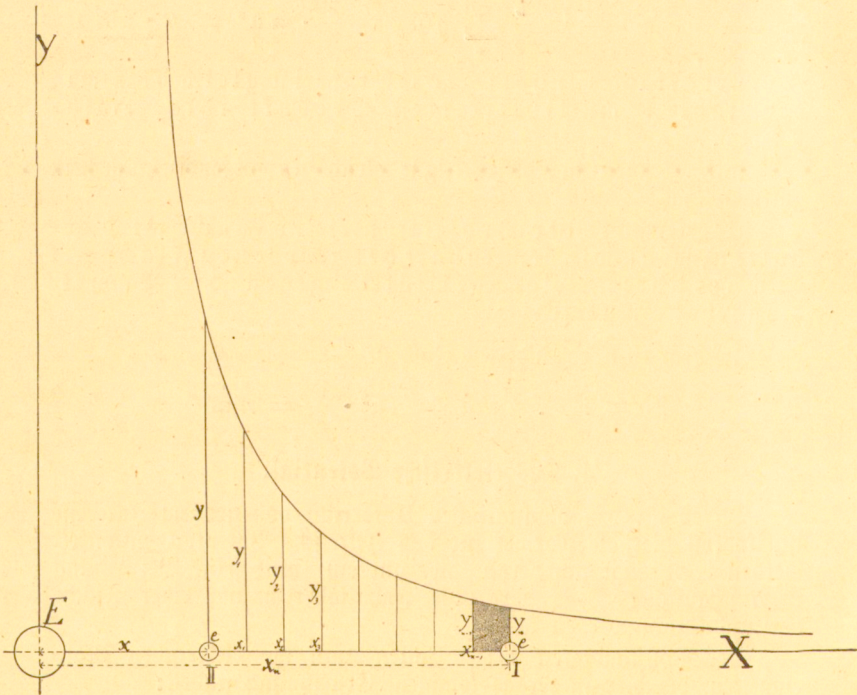
Die Ladung auf einer Kugel wirkt nach außen gerade so, als ob die ganze Ladung im Kugelmittelpunkt konzentriert wäre.

Das Coulomb'sche Gesetz, welches hier in Frage kommt, lautet: Die Kraft (y), mit welcher zwei elektrische Ladungen, E (L.E.) u. e (L.E.), die den Abstand x voneinander haben, aufeinander wirken, ist direkt proportional dem Produkt der beiden Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung (x)

$$y = + \frac{E \cdot e}{x^2} \text{ (Dyn)}$$

Dieses Gesetz veranschaulicht uns die in Fig. 34 dargestellte Kurve.

Fig. 34.



Die Ladung E im Koordinatenanfangspunkt ist fest, die Ladung e wird die X -Achse entlang bewegt.

a) Die beiden Ladungen seien gleichartig. In diesem Falle stoßen die beiden Ladungen einander ab. Wollen wir die Ladung e aus der Stellung I in die Stellung II bewegen, so haben wir dabei stets die veränderliche, abstoßende Kraft y zu überwinden, also eine gewisse Arbeit zu leisten. Wird die Ladung e dann in II festgehalten, so bleibt die geleistete Arbeit in ihr aufgespeichert. Ihre potentielle

Energie ist um diesen Arbeitsbetrag vermehrt worden (Satz von der Erhaltung der Energie). Lassen wir die Ladung e in II frei, so wird sie von der Ladung E fortgestoßen und die vorher aufgespeicherte Energie wird nun wieder verbraucht. (Die Ladung e kann bei dieser Bewegung Arbeit leisten.)

b) Die beiden Ladungen seien ungleichartig. In diesem Falle ziehen sie einander an, e wird gegen die feste Ladung E hingezogen. Wollen wir die Ladung e aus der Stellung II in die Stellung I verbringen, so haben wir stets die anziehende Kraft y zu überwinden, also auch eine gewisse Arbeit zu leisten.

Welchen dieser beiden Fälle wir behandeln, ist für die Berechnung der Arbeitsgröße, welche längs der Strecke I II oder II I zu leisten ist, gleich.

Wir wollen hier den Fall (a) zugrunde legen:

Bewegen wir die Ladung e aus I gegen E hin, mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so haben wir unterwegs die stetig nach dem Gesetz

$$y = \frac{E \cdot e}{x^2} \text{ (Dyn)}$$

zunehmende Kraft y zu überwinden. Wir müssen also stets eine gleich große Kraft aufbieten.

Die Arbeitsleistung längs der nächsten sehr kleinen Strecke δx ist, wenn wir die Kraft $y_n = \frac{E \cdot e}{x_n^2}$ (Dyn) nehmen,

$\frac{E \cdot e}{x_n^2} \cdot \delta x = \frac{E \cdot e}{x_n^2} \cdot (x_n - x_{n-1})$ (cm-Dyn), etwas zu klein, weil y_n während der Bewegung etwas wächst, und wenn wir die Kraft

$$y_{n-1} = \frac{E \cdot e}{x_{n-1}^2} \text{ (Dyn)} \text{ annehmen,}$$

so ist $\frac{E \cdot e}{x_{n-1}^2} \cdot \delta x = \frac{E \cdot e}{x_{n-1}^2} \cdot (x_n - x_{n-1})$ (cm-Dyn), etwas zu groß, weil $y_{n-1} > y_n$ erst am Ende dieser kleinen Bewegung vorhanden ist.

In beiden Fällen wird die Arbeit durch die Fläche der Lamelle von der Breite δx dargestellt. Wenn δx unendlich klein wird, so können wir jeden dieser beiden Ausdrücke (y_n oder y_{n-1}) nehmen; denn sie unterscheiden sich dann nur durch eine unendlich kleine Größe. (Siehe Seite 32). Wir sind also sicher auch berechtigt jeden Mittelwert von y_n und y_{n-1} einzusetzen. Wählen wir als solchen das geometrische Mittel, so erhalten wir einen für die weitere Rechnung sehr bequemen Ausdruck.

Das geometrische Mittel zwischen y_n und y_{n-1} ist bekanntlich

$$\sqrt{y_n \cdot y_{n-1}} = \sqrt{\frac{E \cdot e}{x_n^2} \cdot \frac{E \cdot e}{x_{n-1}^2}} = \frac{E \cdot e}{x_n \cdot x_{n-1}} \text{ (Dyn).}$$

Die Arbeitsleistung längs der Strecke δx ist hiernach

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \frac{E \cdot e}{x_n \cdot x_{n-1}} (x_n - x_{n-1}) \text{ cm-Dyn} \\ &= E \cdot e \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) \text{ cm-Dyn} \end{aligned}$$

Die Gesamtarbeit, welche während der Bewegung der Ladung e längs der Strecke I II zu leisten ist, wird dem Wert nach dargestellt durch die Fläche, welche von der X-Achse (I II), den beiden Ordinaten y u. y_n und dem dazwischen liegenden Stück der Kurve begrenzt ist.

Es ist also diese Arbeit:

$$\mathcal{A} = \sum \delta \mathcal{A} = \sum_{\text{von I}}^{\text{bis II.}} y \cdot \delta x \text{ (cm-Dyn)}$$

oder

$$\mathcal{A} = \sum E \cdot e \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) \text{ cm-Dyn, von I bis II genommen.}$$

Ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = Ee \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}} - \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-3}} - \frac{1}{x_{n-2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right) \text{ cm-Dyn,} \end{aligned}$$

was den einfachen Ausdruck

$$\mathcal{A} = Ee \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_n} \right) \text{ cm-Dyn}$$

ergibt.

Wird die Ladung e aus unendlicher Ferne ($x_n = \infty$) bis auf die Entfernung x an die Ladung E herانبewegt, so ist, da $\frac{1}{\infty} = 0$, die zu leistende Arbeit:

$$\mathcal{A} = \frac{E \cdot e}{x} \text{ (cm-Dyn)}$$

Setzen wir $e = 1$ LE, so wird

$$\mathcal{A}_1 = \frac{E}{x} \text{ cm-Dyn (Erg).}$$

Diesen Ausdruck bezeichnen wir als das „**Potential**“ der Ladung E inbezug auf einen Punkt in der Entfernung x . Es ist die Arbeit, welche zu leisten ist, wenn 1 LE aus

unendlicher Ferne bis auf den Abstand x an die Ladung E heraubewegt wird oder, da diese geleistete Arbeit in der LE aufgespeichert bleibt, solange diese sich in der Entfernung x befindet: Es ist die potentielle Energie oder Spannung, welche die Ladung E einer LE, die sich in x cm Abstand von ihr befindet, erteilt.

Damit ist unsere Aufgabe gelöst. Wir wollen im Anschlusse hieran aber doch noch die Potential- oder Spannungseinheit definieren. Wir gelangen zu ihr, wenn wir E auch noch gleich 1 LE und $x = 1$ cm setzen.

$$1 \text{ PE} = \frac{1 \text{ (LE)}}{1 \text{ (cm)}} \text{ cm-Dyn} = 1 \text{ cm-Dyn} = 1 \text{ Erg.}$$

Unter der elektr. Potential- oder Spannungseinheit verstehen wir die Arbeit, welche zu leisten ist, wenn eine Ladungseinheit (1 LE) aus unendlicher Ferne bis auf 1 cm Abstand an eine andere Ladungseinheit heraubewegt werden soll, oder: wir verstehen unter 1 PE diejenige potentielle Energie, welche 1 LE einer andern LE, die sich in 1 cm Abstand von ihr befindet, erteilt.

In dem Maß der mechanischen Arbeit ausgedrückt ist

$$1 \text{ PE} = 1 \text{ cm-Dyn} = \frac{1}{981} \text{ cm g.}$$

Da die beiden so definierten elektrischen Einheiten, 1 LE und 1 PE, sich als nicht recht geeignet erwiesen (die Ladungseinheit ist für den praktischen Gebrauch viel zu klein, die Spannungseinheit noch zu groß), so hat man auf Grund derselben laut internationalem Uebereinkommen die folgenden festgesetzt:

Einheit der Quantität: 1 Coulomb = 3000 000 000 LE.

Einheit der Spannung: 1 Volt = $\frac{1}{300}$ PE
 = $\frac{1}{300}$ cm-Dyn (Erg.)

Einheit der Stromstärke: 1 Ampère.

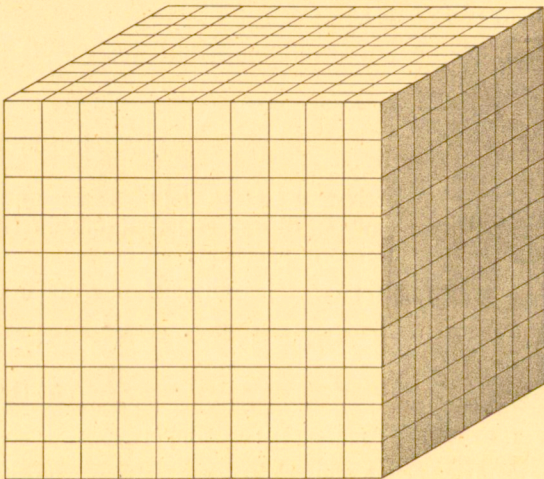
Diese Stärke besitzt ein elektrischer Strom, wenn in jeder Sekunde 1 Coulomb durch die Leitung fließt.

III. Messung und Berechnung der Oberfläche und des Rauminhaltes von Körpern.

Um den Rauminhalt oder das Volumen eines Körpers messen zu können müssen wir zunächst Einheiten für den Rauminhalt bestimmen. Wir nehmen den Rauminhalt eines Würfels (cubus), dessen Kante einer Längeneinheit gleich ist, als Volumen- oder Kubikeinheit und erhalten so die verschiedenen Kubikeinheiten, welche den Längeneinheiten unseres metrischen Maßsystems entsprechen: cbm, cdm, ccm, cmm. Zerlegen wir einen solchen Würfel durch Parallelschnitte zu den drei in einem Endpunkte zusammenstoßenden Flächen in die nächst kleineren Kubikeinheiten, so erhalten wir, wie ein Blick auf Fig. 35 erkennen läßt, deren 1000 an Zahl.

$$\begin{aligned} 1 \text{ cbm} &= 1000 \text{ cdm} = 1\,000\,000 \text{ ccm} = 1\,000\,000\,000 \text{ cmm} \\ 1 \text{ cdm} &= 1000 \text{ ccm} = 1\,000\,000 \text{ cmm} \\ 1 \text{ ccm} &= 1000 \text{ cmm}. \end{aligned}$$

Fig. 35.



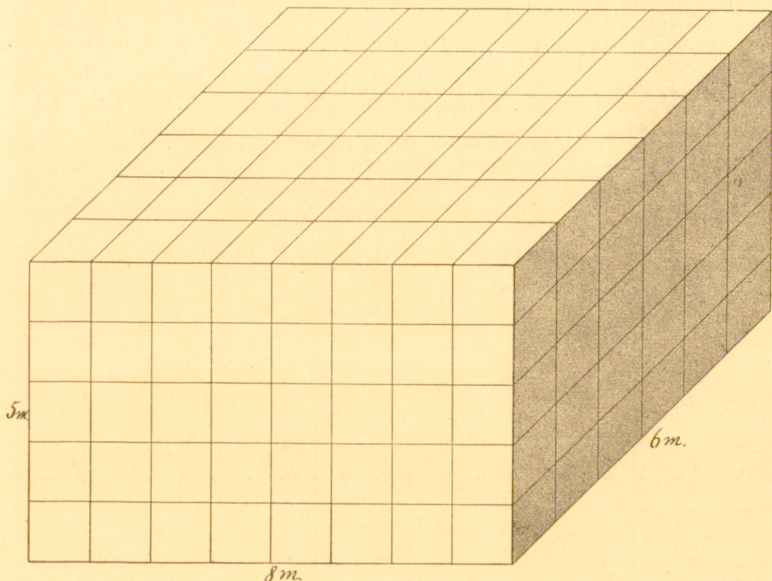
Der Vollständigkeit wegen seien auch noch die Volumeneinheiten für Flüssigkeiten, die sog. Flüssigkeits- oder Hohlmaße angeführt:

$$\begin{aligned} 1 \text{ hl} &= 100 \text{ l} = 100 \text{ cdm} \\ 1 \text{ l} &= 1 \text{ cdm} \\ 1 \text{ l} &= 10 \text{ dl} = 100 \text{ cl} = 1\,000 \text{ ml} \\ 1 \text{ dl} &= 10 \text{ cl} = 100 \text{ ml} \\ 1 \text{ cl} &= 10 \text{ ml} \\ 1 \text{ ml} &= 1 \text{ ccm}. \end{aligned}$$

1. Der Rechtecker.

Der Rechtecker ist ein kistenförmiger, überall rechtwinkliger Körper (Quader, Ziegelstein, Zigarrenkiste). Seine Begrenzungsflächen sind 6 Rechtecke, von denen je zwei gegenüberliegende kongruent sind. Er zeigt 8 rechtwinklige körperliche Ecken und 12 Kanten, von denen dreimal je vier gleich und parallel sind.

Fig. 36.



Es sei z. B. die Länge eines Rechteckers 8 m, seine Breite 6 m und seine Höhe 5 m. Diesen Körper können wir durch ebene Parallelschnitte mit den Seitenflächen in cbm teilen und so erhalten wir als den Rauminhalt des Rechteckers

$$V = 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 \text{ cbm} = 240 \cdot 1 \text{ cbm} = 240 \text{ cbm.}$$

Wir erhalten also den Rauminhalt eines Rechteckers, dessen Seiten durch ganze Zahlen in ein und derselben Längeneinheit ausgedrückt sind, in den dieser Längeneinheit entsprechenden Kubikeinheiten, wenn wir die Maßzahlen von Länge, Breite und Höhe miteinander multiplizieren.

Des kürzeren Ausdrucks und der bequemeren Feststellung der Dimensionen oder des Grades eines zusammengesetzteren algebraischen Ausdruckes wegen treffen wir auch hier das Uebereinkommen, daß wir den Rauminhalt von 240 cbm auffassen wollen als das Produkt der drei Strecken 8 m, 6 m und 5 m, obgleich diese Auffassung arithmetisch unzulässig ist.

Wir schreiben also fortan

$$V = 8 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 240 \text{ cbm}^*) \quad \text{und sagen:}$$

Der Rauminhalt eines Rechteckers ist gleich dem Produkt aus Länge, Breite und Höhe (oder Tiefe).

$$\underline{V = a \cdot b \cdot c}$$

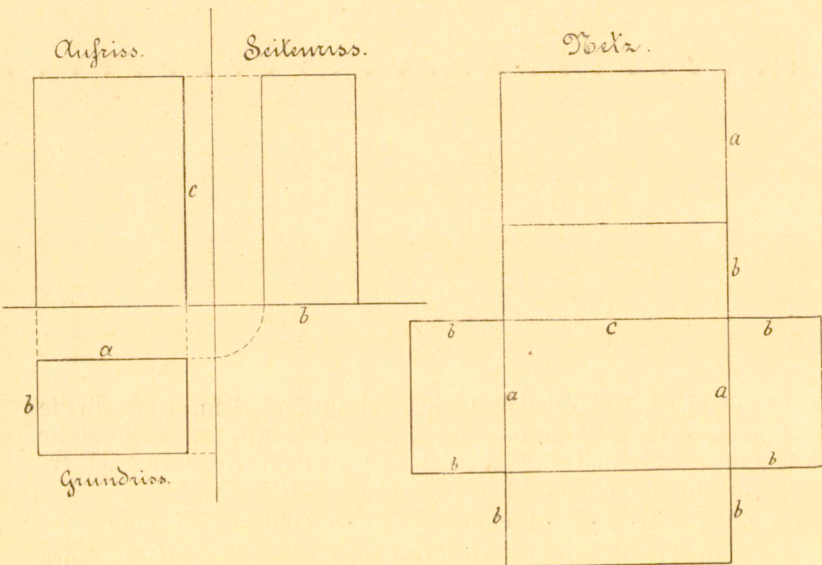
wenn a , b und c die Längen der in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten bezeichnen.

Die Oberfläche des Rechteckers ist:

$$\underline{O = 2 (ab + ac + bc)}.$$

Darstellung eines Rechteckers durch Normal-Projektion.

Fig. 37.



Die eben angeführte Formel, $V = abc$, setzt zunächst voraus, daß a , b und c ganze Zahlen sind und zwar in ein und derselben Längeneinheit ausgedrückt.

Wir wollen auch hier mit einem Zahlenbeispiel uns klarlegen, wie die Berechnung des Rauminhalts sich gestaltet, wenn a , b und c gebrochene Zahlen sind, und da wir praktisch doch nur noch mit

* Also auch $240 \text{ cbm} : 5 \text{ m} = 48 \text{ qm}$
 $240 \text{ cbm} : 48 \text{ qm} = 5 \text{ m}.$

Dezimalbrüchen zu rechnen pflegen, so wollen wir uns auch hier an Dezimalbrüche beschränken. Es sei $a = 8,647$ m; $b = 6,34$ m; $c = 5,3$ m.

Da die oben entwickelte Formel vorläufig nur Geltung hat, wenn Länge, Breite und Höhe durch ganze Zahlen in einer Längeneinheit ausgedrückt sind, so müssen wir um dies bei dem gewählten Beispiel zu erreichen **1 mm** als Längeneinheit wählen.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist:} \quad a &= 8647 \text{ mm, } b = 6340 \text{ mm, } c = 5300 \text{ mm} \\ \text{und} \quad V &= 8647 \text{ mm} \cdot 6340 \text{ mm} \cdot 5300 \text{ mm} \\ V &= 8647 \cdot 6340 \cdot 5300 \text{ cmm} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 51882 \\ 25941 \\ 34588 \\ \hline 54821980 \\ 27410990 \\ \hline 16446594 \end{array}$$

$$V = 290556494000 \text{ cmm.}$$

Oder wenn wir dieses Resultat in cbm umschreiben wollen:

$$V = 290,556494000 \text{ cbm.}$$

Es ergibt sich augenscheinlich genau dasselbe Resultat, das Komma kommt nach dem Multiplikationsfuß für Dezimalbrüche an dieselbe Stelle, wenn wir das Produkt der ursprünglich gegebenen gebrochenen Zahlen bilden:

$$\begin{aligned} V &= 8,647 \text{ m} \cdot 6,34 \text{ m} \cdot 5,3 \text{ m} \\ V &= 8,647 \cdot 6,34 \cdot 5,3 \text{ cbm} \\ V &= 290,556494 \text{ cbm.} \end{aligned}$$

Haben wir bei einem anderen Beispiel genauere Angaben, etwa auf $0,1 \text{ mm} = 1$ decimillimeter genaue, so nehmen wir eben 1 dmm als Längeneinheit, berechnen den Rauminhalt in edmm und verwandeln diese in cbm. Berechnen wir andererseits das Produkt der durch gebrochene Zahlen in m ausgedrückten drei Kanten, so kommt das Komma genau an dieselbe Stelle, die es bei dem vorhergehenden Produkt nach der Umwandlung der edmm in cbm einnimmt.

Es erhellt hieraus, daß die oben entwickelte Formel für den Rauminhalt des Rechteckers

$$\underline{V = a \cdot b \cdot c}$$

auch dann gilt, wenn a , b u. c gebrochene Zahlen sind. Wir erhalten den Rauminhalt um so genauer, je genauer wir Länge, Breite und Höhe zu messen vermögen. Der genaue Rauminhalt ist der Grenzwert des aus den gemessenen Strecken berechneten.

Was tun wir bei der vorhergehenden Aufgabe, wenn wir die drei Zahlen $8,647$; $6,34$ und $5,3$ miteinander multiplizieren?

Wir zählen:

1) Die Zahl der ganzen cbm, welche wir in den Rechtecker von einer Ecke aus aneinanderstoßend hineinbringen können.

Es sind $8 \cdot 6 \cdot 5 \text{ cbm} = 240 \text{ cbm}$.

2) Die Zahl der ganzen cdm, welche wir an diese angestoßen noch unterbringen können. Es sind

$$\begin{array}{r} 80 \cdot 60 \cdot 3 + 80 \cdot 3 \cdot 50 + 6 \cdot 60 \cdot 50 \text{ cdm} = 44\,400 \text{ cdm} \\ + 80 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 60 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 50 \text{ cdm} = 2\,700 \text{ cdm} \\ + 6 \cdot 3 \cdot 3 \text{ cdm} = 54 \text{ cdm} \\ \hline \text{im ganzen } 47\,154 \text{ cdm} \end{array}$$

3) Die Zahl der ganzen ccm, welche wir an den nun gebildeten Rechtecker angestoßen noch unterbringen können. Es sind

$$\begin{array}{r} 860 \cdot 4 \cdot 530 + 4 \cdot 630 \cdot 530 \text{ ccm} = 3\,158\,800 \text{ ccm} \\ + 4 \cdot 4 \cdot 530 \text{ ccm} = 8\,480 \text{ ccm} \\ \hline 3\,167\,280 \text{ ccm} \end{array}$$

4) Die Zahl der cmm, welche wir nun noch hineinbringen. Es sind

$$7 \cdot 6340 \cdot 5300 \text{ cmm} = 235\,214\,000 \text{ cmm}$$

Die Summe dieser vier Posten gibt auch das Volumen des Rechteckers.

$$\begin{array}{r} V = 240 \quad \text{cbm} \\ + 47,154 \quad \text{"} \\ + 3,167\,280 \quad \text{"} \\ + 0,235\,214 \quad \text{"} \\ \hline V = 290,556\,494 \text{ cbm} \end{array}$$

Ist dieser Rechtecker ein gedachter Körper, so ist dies sein genauer Rauminhalt.

Sind die 3 Ausmaße aber von einem physischen Körper abgenommen, haben wir dabei mit vollkommen genauen Maßstäben auf mm genau gemessen, d. h. in der eingangs erwähnten Art auf mm abgerundet, so ist die äußerste Fehlergrenze (nicht der wirkliche Fehler!)

$$\begin{array}{r} + (8647 \cdot 6340 + 8647 \cdot 5300 + 6340 \cdot 5300) \cdot 0,5 \text{ cmm} \\ = + 67\,126\,540 \text{ cmm} = 67,13 \text{ cdm.} \end{array}$$

Ein physischer Rechtecker von diesen Dimensionen könnte der Hohlraum eines Zimmers oder eines Wasserbehälters oder ein Mauerkörper sein.

Bei diesen Körpern hat jedoch eine Messung auf mm genau keinen praktischen Sinn mehr. Eine Genauigkeit auf 1 cm ist hier mehr als genügend.

Würfel.

Werden beim Rechtecker die 3 in einem Eckpunkt zusammenstoßenden Kanten einander gleich,

$$c = b = a,$$

so haben wir einen Würfel vor uns. Dieser ist von 6 kongruenten Quadraten begrenzt und hat 12 gleichlange Kanten.

Seine Oberfläche ist also $O = 6 \cdot a^2$

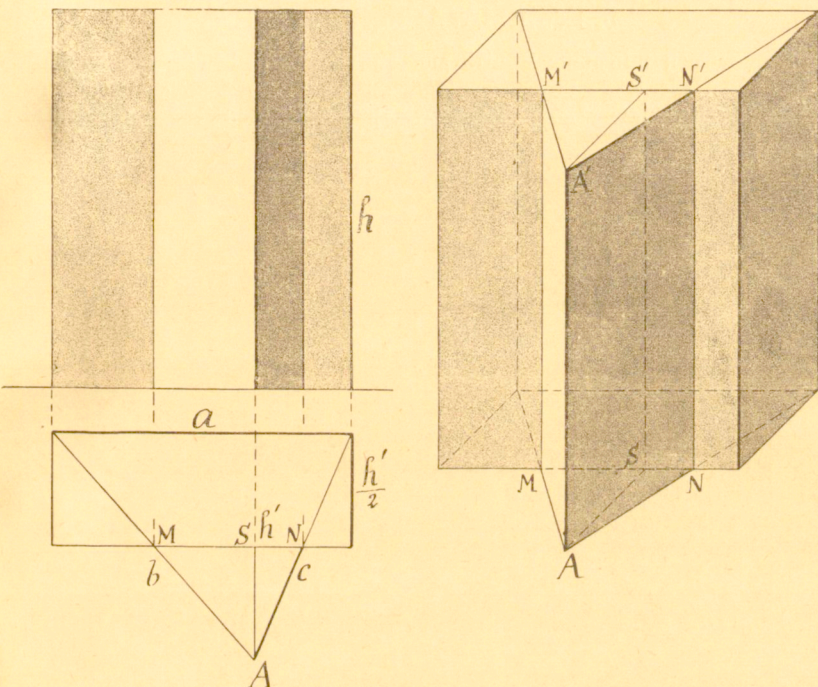
und sein Rauminhalt

$$V = a^3.$$

2. Das senkrechte dreiseitige Prisma.

Drei Ebenen, deren Schnittlinien parallel sind, begrenzen einen prismatischen Raum. Zwei weitere parallele Ebenen, die zu diesen Schnittlinien nicht parallel sind, begrenzen von diesem prismatischen Raum einen Körper, ein dreiseitiges Prisma, und wenn sie senkrecht zu den Seitenkanten des Prismas stehen, ein senkrecht dreiseitiges Prisma.

Fig. 38.



Seine Grund- und Deckfläche sind kongruente Dreiecke, seine Seitenflächen Rechtecke, seine Seitenkanten sind gleichlang (= Höhe des Prismas). Bezeichnet Δ den Inhalt der Grundfläche und h die Höhe des Prismas, so ist seine Oberfläche

$$O = 2 \Delta + (a + b + c) \cdot h$$

Wir können nun wie die vorstehende Fig. 38 zeigt das senkrechte dreiseitige Prisma auf sehr einfache Art in einen volumengleichen Rechtecker von gleicher Höhe verwandeln (auf 6 verschiedene Arten möglich). Wir verwandeln die Grundfläche in ein Rechteck, welches die eine Seite a mit dem Dreieck gemeinsam hat und dessen andere Seite gleich der halben zugehörigen Höhe h' des Dreiecks ist.

Zerschneiden wir das Prisma durch die Lotebenen durch MN und AS in drei Prismen, so erhalten wir, wenn wir das Prisma über ANS um NN' und das über AMS um MM' umklappen, den Rechtecker, welcher den gleichen Rauminhalt hat wie das dreiseitige Prisma.*) Es ist also das Volumen des senkrechten dreiseitigen Prismas

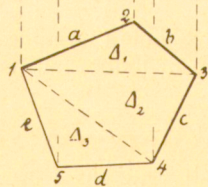
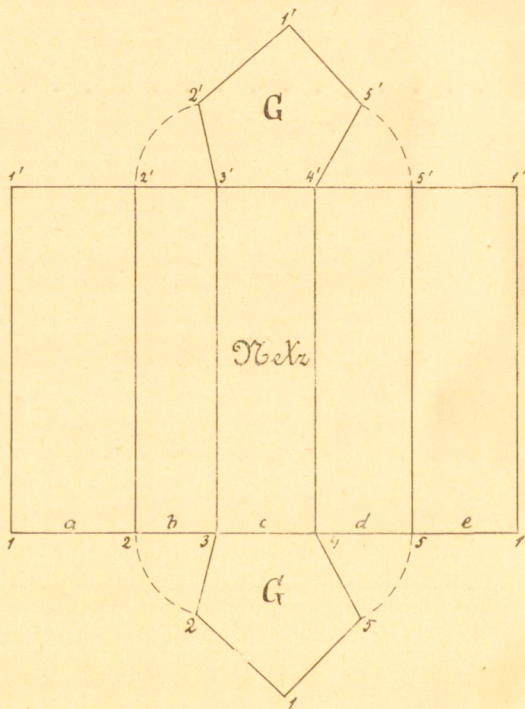
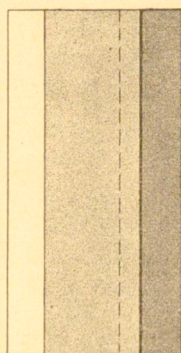
$$\underline{V} = a \cdot \frac{h'}{2} \cdot h = \underline{\underline{\Delta \cdot h}}$$

3. Das senkrechte n-seitige Prisma.

Legen wir immer durch zwei aufeinanderfolgende von n parallelen Geraden eine ebene Fläche, so wird durch diese n-Flächen ein prismatischer Raum begrenzt. Zwei zu seinen Kanten normale

Fig. 39.

2. Riss



1. Riss

*) Es empfiehlt sich ein Modell herzustellen, was ja mit sehr einfachen Mitteln möglich ist. Man klebe auf die Vorderseite MN des Rechteckers ein sehr dünnes Tuch (Gaze); dann kann man die Umklappung bequem vornehmen.

Ebenen schneiden einen allseitig begrenzten Körper aus, den wir als ein n -seitiges senkrechtcs Prisma bezeichnen. Ein solches ist in Fig. 39 durch Grund- und Aufriß dargestellt.

Grund- und Deckfläche des Prismas sind kongruente n -Ecke, seine Seitenflächen sind Rechtecke, seine Seitenkanten sind gleichlang (Höhe des Prismas).

Die Mantelfläche des Prismas besteht aus n Rechtecken und ist somit

$$M = (a + b + c + \dots) h$$

Die gesamte Oberfläche ist, wenn G den Inhalt der Grundfläche bezeichnet,

$$O = 2G + (a + b + c + \dots) h$$

Wir können ein solches Prisma durch Ebenen, die durch je zwei Seitenkanten gehen, in $(n - 2)$ dreiseitige Prismen zerlegen.

Sein Rauminhalt ist also nach (2):

$$V = \Delta_1 h + \Delta_2 \cdot h + \Delta_3 \cdot h + \dots \Delta_{n-2} \cdot h$$

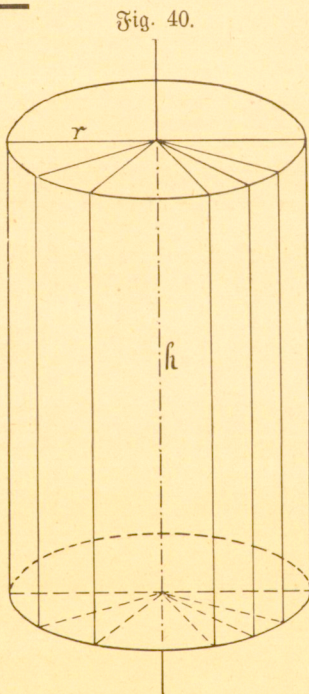
$$V = (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots \Delta_{n-2}) \cdot h$$

$$V = G \cdot h.$$

4. Der senkrechte Kreiszyylinder.

Der senkrechte Kreiszyylinder entsteht, wenn ein Rechteck um eine seiner Seiten, die festliegende Achse ist, rotiert. Dabei beschreibt die zu dieser parallele Seite die Mantelfläche des Zylinders, während die beiden anderen Seiten Grund- und Deckfläche, welche zur Achse normal gestellte, kongruente Kreisflächen sind, beschreiben. Die Rechtecksfläche beschreibt den Zylinder-Körper.

Wir können den senkrechten Zylinder als ein Prisma mit sehr vielen (unendlich vielen), sehr schmalen (unendlich schmalen) Seitenflächen ansehen. Schneiden wir die Zylinderfläche längs einer Mantellinie (Erzeugenden) auf, so können wir sie in die Ebene ausbreiten oder abwickeln und erhalten so ein Rechteck (Fig. 41), dessen eine Seite gleich dem Umfang des Grundkreises $2\pi r^*$ und



*) Für die Zeichnung genügt es diese Rechtecksseite $3 \frac{1}{7} (2r)$ zu machen.

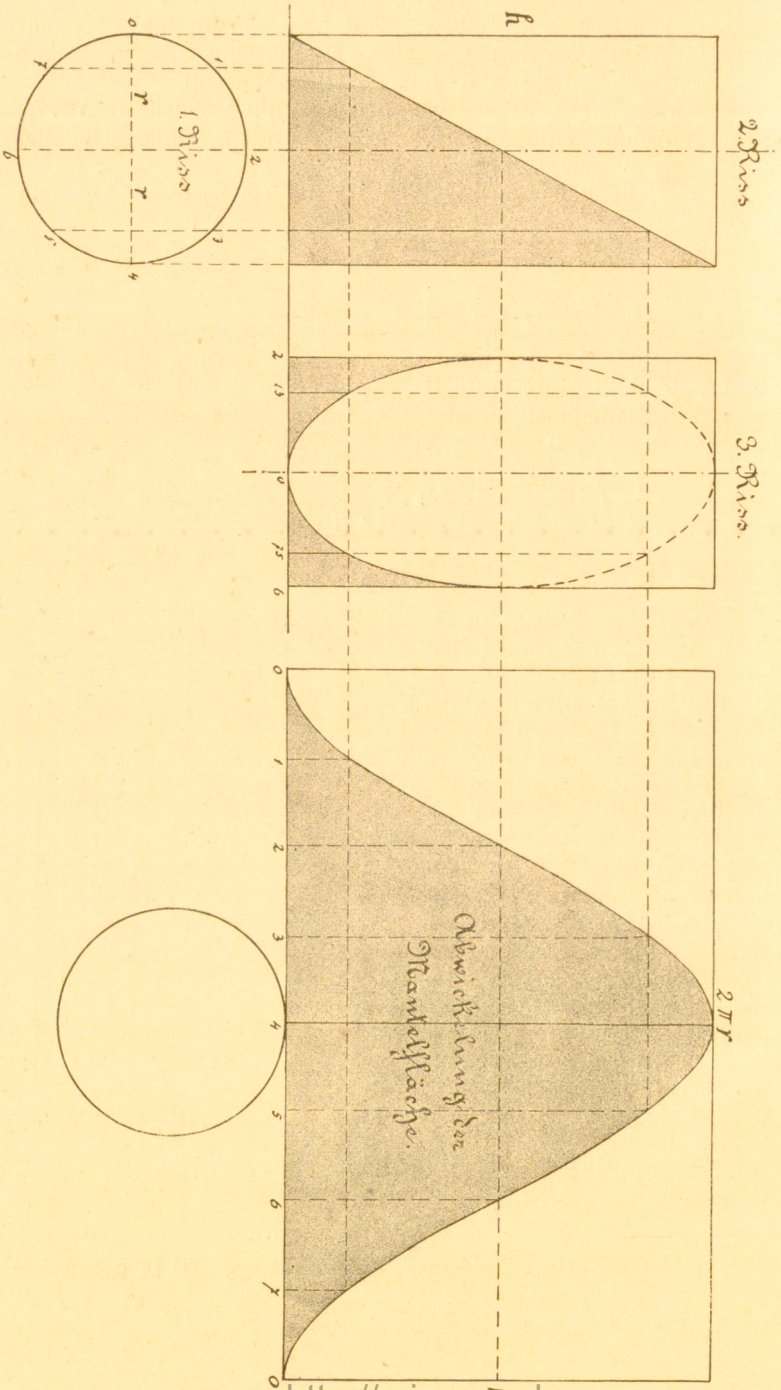


Fig. 41.

dessen andere Seite gleich der Zylinderhöhe h ist. Also ist die Mantelfläche des senkrechten Kreis-Zylinders

$$\underline{\underline{M = 2\pi rh}}$$

und seine ganze Oberfläche

$$\underline{\underline{O = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r (r + h)}}$$

Sein Rauminhalt ist wie der des n -seitigen Prismas gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe, also

$$\underline{\underline{V = \pi r^2 h}}$$

Ist die Grundfläche eines senkrechten Zylinders eine Ellipse, so ist $V = \pi abh$, wenn a und b die Halbachsen dieser Ellipse sind.

Legen wir an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten des Grund- und Deckkreises zwei Tangenten, so sind diese parallel und die durch sie bestimmte Ebene schneidet den Zylinder augenscheinlich in zwei kongruente Teile, **Zylinderhufe** (Siehe Figur 41). Die schräge Deckfläche eines Zylinderhufes ist die Fläche einer Ellipse, deren Halbachsen r und $\frac{d}{2}$ sind. ($d =$ Abstand jener Punkte).

Bei der Abwicklung der Zylinderfläche geht diese Schnitt-Ellipse in eine wellenförmige Linie über, eine Linie, auf die wir bei mancherlei Studien stoßen: Sie erscheint noch, wenn wir eine Schraubenlinie in eine zur Schraubenspindelachse parallele Ebene senkrecht projizieren und sie begegnet uns wieder als Wellenlinie in der Akustik.

Die Mantelfläche des Zylinderhufes $M' = \pi rh$.

Die Oberfläche des Zylinderhufes

$$O' = \pi r^2 + \pi r \frac{d}{2} + \pi rh = \underline{\underline{\pi r (r + \frac{d}{2} + h)}}, \text{ worin}$$

$$\frac{d}{2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h-h'}{2}\right)^2}.$$

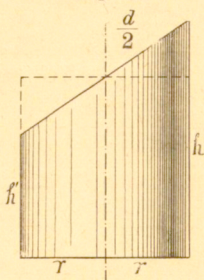
und der Rauminhalt des Zylinderhufes

$$\underline{\underline{V' = \frac{1}{2} \pi r^2 h}}$$

Bei allen Körpern mit senkrechten Wänden ist bei parallelen Grund- und Deckflächen der Rauminhalt gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe (gleichgültig, welche Form die Grundfläche hat).

$$\underline{\underline{V = G \cdot h.}}$$

Fig. 42.



Die Mantelfläche eines Kreiszyllinders, dessen Deckfläche schräg abgeschnitten ist, (Figur 42), ist, wenn h und h' die längste und kürzeste Mantellinie bezeichnen,

$$M'' = \pi r (h + h')$$

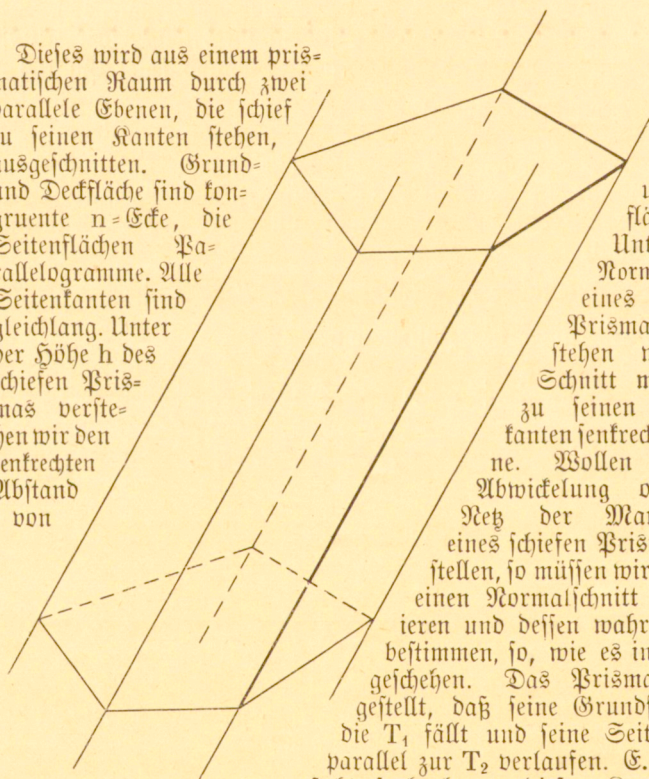
und sein Rauminhalt

$$V'' = \pi r^2 \cdot \frac{h + h'}{2}$$

5. Das schiefe Prisma.

Fig. 43.

Dieses wird aus einem prismatischen Raum durch zwei parallele Ebenen, die schief zu seinen Kanten stehen, ausgeschnitten. Grund- und Deckfläche sind kongruente n -Ecke, die Seitenflächen Parallelogramme. Alle Seitenkanten sind gleichlang. Unter der Höhe h des schiefen Prismas verstehen wir den senkrechten Abstand von

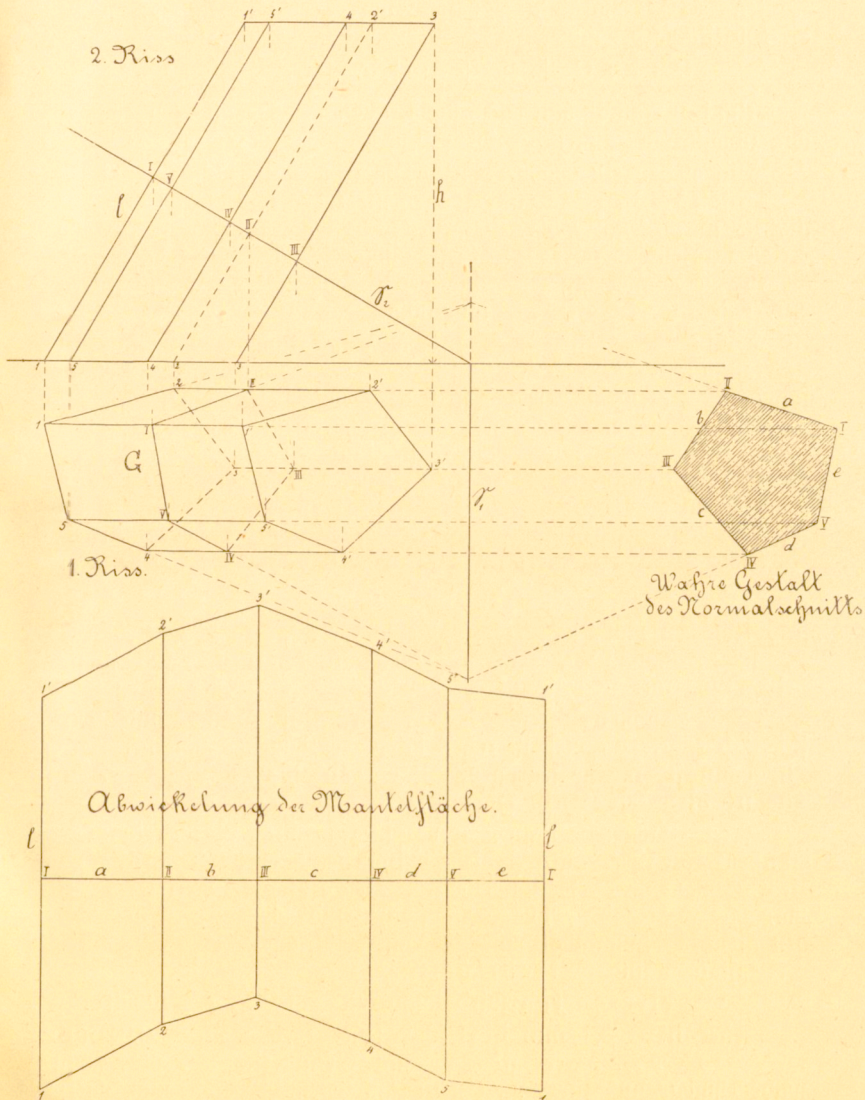


Grund- und Deckfläche.

Unter dem Normalschnitt eines schiefen Prismas verstehen wir den Schnitt mit einer zu seinen Seitenkanten senkrechten Ebene. Wollen wir die Abwicklung oder das Netz der Mantelfläche eines schiefen Prismas herstellen, so müssen wir zunächst einen Normalschnitt konstruieren und dessen wahre Gestalt bestimmen, so, wie es in Fig. 44 geschehen. Das Prisma ist so gestellt, daß seine Grundfläche in die T_1 fällt und seine Seitenkanten parallel zur T_2 verlaufen. E . (S_1 S_2) steht senkrecht zu diesen Kanten und

damit senkrecht zur T_2 . Beim Ausbreiten der Mantelfläche in eine Ebene strecken sich die Kanten des Normalschnitts in eine Gerade aus, zu der die Seitenkanten des Prismas senkrecht stehen.

Fig. 44.



Da wir hier das Prisma so gestellt haben, daß seine Seitenkanten parallel zur T_2 sind, so stellen sich in der T_2 diese Kanten und ihre Teile vom Normalschnitt aus in der wahren Größe dar, können also dem zweiten Riß unmittelbar entnommen werden.

Bezeichnen G den Inhalt der Grundfläche, $a, b, c \dots$ die Kanten des Normalschnitts, l die Länge der Seitenkanten, so ist die Oberfläche des schiefen Prismas:

$$\underline{O = 2 G + (a + b + c + \dots) \cdot l}$$

Um den Rauminhalt eines schiefen Prismas festzustellen, können wir zunächst in empirischer Weise vorgehen:

Wir stellen eine Reihe von prismatischen, verschieden schiefen Blechgefäßen her, welche alle kongruente (oder nur gleiche) Grundflächen und gleiche Höhen haben, darunter auch ein senkrecht Prisma. Füllen wir eines dieser Hohl-Prismen mit Wasser und gießen die Wassermasse nacheinander in die andere um, so finden wir, daß alle den gleichen Rauminhalt haben.

Oder: Wir lassen uns aus möglichst homogenem Material (Metallguß, Glas) verschiedene schiefe Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen herstellen, darunter auch ein senkrecht Prisma. Wir finden, daß diese Prismen alle gleiches Gewicht haben. Folglich müssen sie auch gleiches Volumen haben, gleich dem des senkrechten Prismas. Aus diesen Versuchen ergibt sich: Der Rauminhalt eines schiefen Prismas ist gleich dem Rauminhalt eines senkrechten Prismas, welches dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe hat.

$$V = G \cdot h.$$

Um den Rauminhalt des schiefen Prismas durch rein mathematische Behandlung zu finden stellen wir folgende Infinitesimalbetrachtung an:

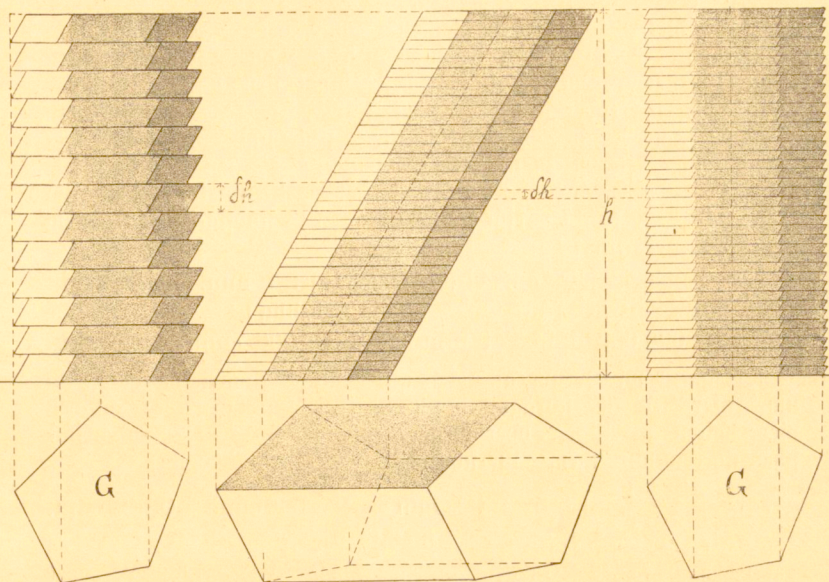
Wir zerschneiden das Prisma durch zur Grund- und Deckfläche parallele Ebenen in n gleichdicke Lamellen von der Dicke δh , dann ist n eine sehr große Zahl, δh eine sehr kleine Strecke und $n \cdot \delta h = h$ (Siehe Fig. 45).

Diese Lamellen können wir augenscheinlich so übereinanderschieben, daß ihre entsprechenden Eckpunkte in senkrechte Gerade zu liegen kommen. Dieser Lamellenstoß gleicht einem senkrechten Prisma, das nun die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe und den gleichen Rauminhalt wie das schiefe Prisma hat. Aber seine Seitenflächen sind Feilenflächen.

Der Feilenschlag wird umso feiner, je kleiner δh wird.

Für $\delta h = 0,1$ mm ist er schon sehr fein, für $\delta h = 0,01$ mm 1μ ist er mit Tasts- und Gefühlsinn gar nicht mehr wahrnehmbar und für $1\mu\mu$ und darunter auch nicht mehr mit unseren feinsten Mikroskopen.

Fig. 45.



Je kleiner also δh wird, desto mehr nähern sich die seitlichen Feilenflächen **ebenen** Flächen.

Bei diesem Prozeß bleibt aber die Summe des Rauminhalts aller Lamellen konstant.

Folglich ist der Rauminhalt eines schiefen Prismas gleich dem eines senkrechten von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

$$\underline{V = G \cdot h.}$$

Nach dieser Betrachtung wird fortan die Verschiebung der Lamellen um daraus einen schon bekannten Körper zu bilden gar nicht mehr nötig sein. Es ist nicht von Belang, wie diese unendlich dünnen Lamellen am Rande begrenzt sind, ob durch zu den parallelen Grundflächen senkrechte oder schiefe Flächen. Wir nehmen das erstere an und betrachten nun den gegebenen glatten Körper als die Grenze des Staffelförpers. Der Rauminhalt einer solchen Lamelle ist $\delta V = f \cdot \delta h$ und der des ganzen Körpers

$$V = \sum_0^h \delta V = \sum_0^h f \cdot \delta h.$$

In unserem Falle ist

$$V = \sum_0^h G \cdot \delta h = G \sum_0^h \delta h = G \cdot h$$

(da G gemeinsamer Faktor)

Es ist auch gar nicht mehr notwendig, daß die δh alle gleich sind, sie sollen nur sehr klein sein, unendlich klein.

Bei dieser Teilung in Lamellen und bei Summierung des Rauminhalts derselben begehen wir an jeder Lamelle scheinbar einen kleinen Fehler, indem wir sie bei der Volumenberechnung als senkrechtes Prisma (oder als senkrechten Zylinder) betrachten, während sie doch am Rande abgechrägt ist. Um uns nun über den Rang dieser sehr kleinen bzw. unendlich kleinen Raumgrößen Klarheit zu verschaffen wollen wir folgendes Beispiel in Rechnung ziehen. Wir betrachten eine Lamelle, deren Grundfläche nach Form und Inhalt 1 qm sei.

1) Nehmen wir an, diese Lamelle sei 1 mm dick, dann ist ihr Rauminhalt bei senkrechter Randbegrenzung:

$$\delta V = 1\,000\,000 \text{ qmm} \quad 1 \text{ mm} = 1\,000\,000 \text{ cmm} = \underline{\underline{1 \text{ edm.}}}$$

Nehmen wir ferner an, diese quadratische Lamelle werde ringsum unter 45° abgechrägt, dann ist das Volumen des an den vier Seiten angefügten oder weggenommenen Prismas von gleichschenkelig-rechtwinkligem Querschnitt:

$$\delta^2 V = \pm 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1000 \text{ cmm} = \pm 2000 \text{ cmm} = \underline{\underline{0,002 \text{ edm.}}}$$

Wir wollen diesen Rauminhalt der Abchrägung als den „Randfehler“ der abgechrägten Lamelle im Vergleich mit der senkrecht zugeschnittenen bezeichnen.

2) Machen wir nun $\delta h = 1\mu$, so ist der Rauminhalt dieser Lamelle bei senkrechter Abgrenzung:

$$\delta V = 1\,000\,000 \cdot 1\,000\,000 \cdot 1\text{cm} = 1\,000\,000\,000\,000 \text{ cm} = \underline{\underline{1 \text{ ccm}}}$$

und der Randfehler der unter 45° abgechrägten Lamelle:

$$\begin{aligned} \delta^2 V &= \pm 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1\,000\,000 \text{ cm} = 2\,000\,000 \text{ cm} \\ &= 0,002 \text{ cmm} = \underline{\underline{0,000\,002 \text{ ccm.}}} \end{aligned}$$

3) Nehmen wir noch die Dicke der Lamelle $\delta h = 1\mu\mu$, so ist ihr Volumen bei senkrechter Abgrenzung:

$$\begin{aligned} \delta V &= 1\,000\,000\,000 \cdot 1\,000\,000\,000 \cdot 1 \text{ cm} \\ &= 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ cm} = \underline{\underline{1 \text{ cmm}}} \end{aligned}$$

und der Randfehler bei 45° Abchrägung:

$$\begin{aligned} \delta^2 V &= \pm 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1\,000\,000\,000 \text{ cm} = 2\,000\,000\,000 \text{ cm} \\ &= 2 \text{ cu} = \underline{\underline{0,000\,000\,002 \text{ cmm.}}} \end{aligned}$$

Aus diesem einfachen Zahlenbeispiel erhellt, daß der Randfehler im Verhältnis zum Rauminhalt der zugehörigen Lamelle um so kleiner ausfällt, je kleiner deren Dicke wird.

$$\frac{\delta^2 V}{\delta V} = 0,002 \text{ bzw.} = 0,000\,002 \text{ bzw.} = 0,000\,000\,002 \text{ u. s. w.}$$

Wenn also dh und damit δV sehr klein (unendlich klein) werden, so wird der Randfehler eine sehr kleine (unendlich kleine) Größe zweiter Ordnung, die als Summand und als Subtrahend gegenüber der ersteren Größe gar nicht mehr in Betracht kommt.

Um hier nur einige Beispiele anzuführen, die später immer wieder vorkommen, so werden wir also fernerhin setzen:

$$y \cdot dx + \frac{1}{2} dx \cdot dy = y \cdot dx \quad (\text{Fläche einer ebenen Lamelle, siehe Seite 32}),$$

$$\pi (2x + dx) \cdot ds = 2\pi x \cdot ds \quad (\text{Fläche einer Lamelle auf einer Umdrehungsfläche}),$$

$$f \cdot dx + \frac{1}{2} dx \cdot dy \cdot u = f \cdot dx \quad (\text{Rauminhalt einer Körperlamelle}) \text{ usw.}$$

aber nur unter der Voraussetzung, daß dx , dy , ds , „unendlich kleine Größen“ (1. Ordnung) sind, ist das zulässig.

In den in der Integralrechnung üblichen Zeichen geschrieben lautet nun die vorhergehende Gleichung (Seite 57):

$$V = \int_0^h G \cdot dh = G \int_0^h dh = G \cdot h$$

Lies: „Integral von G mal dh , genommen (summiert) von 0 bis h .“

6. Schiefer Zylinder.

Dieser steht zum senkrechten Zylinder über derselben Grundfläche und von der gleichen Höhe h in dem gleichen Verhältnis wie das schiefe Prisma zum senkrechten Prisma.

Sein Inhalt ist also $V = \pi r^2 h$, wenn Grund- und Deckfläche kongruente Kreise mit dem Radius r , $V = \pi abh$, wenn diese Flächen kongruente Ellipsen mit den Halbachsen a und b sind.

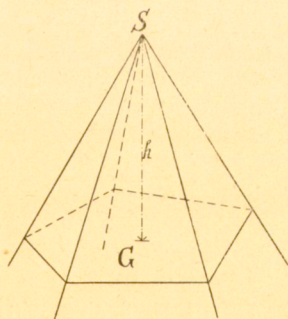
7. Die Pyramide.

Denken wir uns von einem Punkt S aus n Strahlen gezogen, dieselben in irgend einer Reihenfolge nummeriert und durch je 2 aufeinanderfolgende eine ebene Fläche gelegt, so begrenzen diese Flächen einen sogen. pyramidalen Raum. Schneiden wir diesen mit einer Ebene, so wird dadurch ein Körper begrenzt, den wir als *Pyramide* bezeichnen. Ihre Grundfläche ist ein n -Eck, ihre Seitenflächen sind Dreiecke, welche in der Spitze S der Pyramide eine gemeinsame Ecke haben. Unter der Höhe einer Pyramide verstehen wir die Senkrechte h aus der Spitze zur Grundfläche G .

Die Oberfläche der Pyramide ist

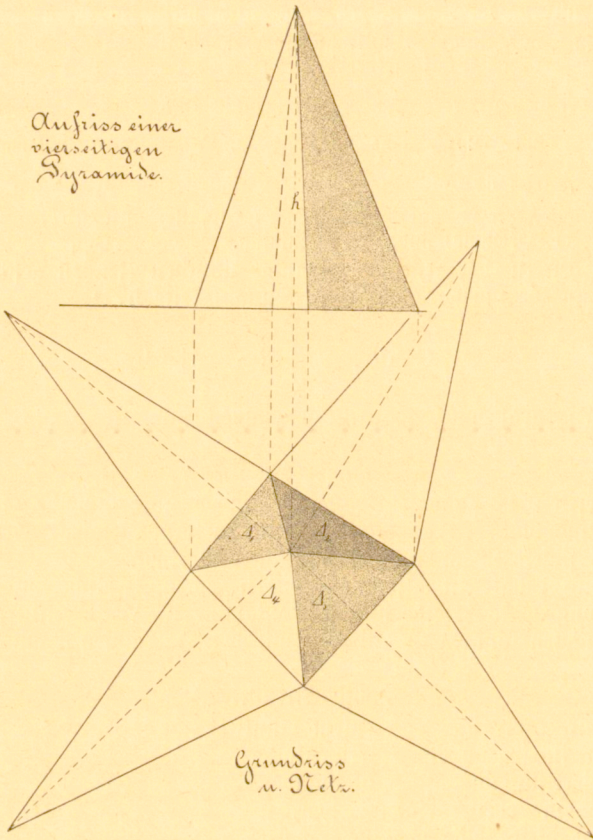
$$O = G + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i, \text{ wenn die Seitenflächen } \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \dots \Delta_n.$$

Fig. 46.



Darstellung einer Pyramide mit Netz.

Fig. 47.



Während es, wie wir auf Seite 25 gezeigt haben, leicht möglich ist ein Dreieck durch Zerschneidung in 3 Teile in ein Rechteck zu verwandeln und, wie wir auf Seite 49 dargelegt haben, ein senkrechtcs Prisma in einen Rechtecker, so mißlingt jeder Versuch ein schiefes Prisma (spez. Fälle ausgenommen) oder eine Pyramide durch eine endliche Teilung in ein senkrechtcs Prisma bezw. in einen Rechtecker umzuformen. Dies ist nur durch eine unendliche Kleinteilung möglich.

Es ist wohl zu erwarten, daß der Rauminhalt der Pyramide ein Bruchteil des Produktes $G \cdot h$ sein wird.

$$V = f \cdot G \cdot h.$$

Um nun den Zahlenfaktor f ($f < 1$) zunächst bloß auf dem Wege der Erfahrung kennen zu lernen lassen wir uns folgende Modelle herstellen:

a) Hohle dreiseitige Pyramiden von kongruenten (oder nur gleichen) Grundflächen und gleichen Höhen. Im übrigen sollen die Formen verschieden sein. Dazu noch ein dreiseitiges, senkrechtcs Hohlprisma von der gleichen Grundfläche und der gleichen Höhe, wie sie diese dreiseitigen Pyramiden haben.

Füllen wir nun eine dieser Hohlpyramiden mit Wasser und gießen diese Wassermasse nacheinander in die andern um, so finden wir, daß alle diese dreiseitigen Pyramiden gleichen Rauminhalt haben, und gießen wir die Füllung einer Pyramide in das zugehörige senkrechte Prisma, so finden wir, daß gerade drei solche Füllungen den Rauminhalt des Prismas ausmachen. Damit ist nun der Faktor f gefunden. Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide

$$\underline{V = \frac{1}{3} G \cdot h.}$$

β) Aus homogenem Material (etwa aus Messing oder Glas) einige dreiseitige Pyramiden (Tetraeder) mit kongruenten (oder nur gleichen) Grundflächen und gleichen Höhen, im übrigen von verschiedener Form. Wir wägen diese Körper und finden, daß sie alle gleiches Gewicht haben.

Bezeichnen V_1, V_2, V_3, \dots ihre Rauminhalte und bezeichnet s das spezifische Gewicht des Materials, so ist also

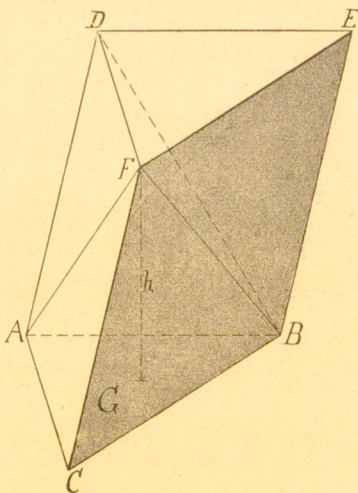
$$V_1 \cdot s = V_2 \cdot s = V_3 \cdot s = V_4 \cdot s = \dots$$

Folglich $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = \dots$

Fig. 48.

Wir gewinnen so den Satz:
Dreiseitige Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleichen Rauminhalt.

Nun können wir jedes dreiseitige Prisma in drei dreiseitige Pyramiden, welche zu je zweien kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben, zerlegen.



$B,DEF = F,ABC$; denn $\triangle DEF \cong \triangle ABC$
und die Höhen sind gleich
dem Abstand der beiden
parallelen Ebenen DEF
u. ABC

$B,ACF = B,ADF$; denn $\triangle ACF \cong \triangle FDA$
und die Höhen sind hier
identisch = Abstand des
Punktes B von der Ebene
ACFD.

Folglich $B,DEF = F,ABC = B,ADF = \frac{1}{3}$ Prisma (ABC, DEF) .

Also $F,ABC = \frac{1}{3} \triangle \cdot h.$

Da die n -seitige Pyramide in $(n-2)$ dreiseitige Pyramiden,
welche dieselbe Höhe h haben, zerlegt werden kann, so ist ihr Raum-
inhalt

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \triangle_1 \cdot h + \frac{1}{3} \triangle_2 \cdot h + \frac{1}{3} \triangle \cdot h + \dots + \frac{1}{3} \triangle_{n-2} \cdot h \\ &= \frac{1}{3} (\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle + \dots + \triangle_{n-2}) \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h. \end{aligned}$$

Berechnung des Rauminhalts einer Pyramide.

Wir schneiden die ebenflächige Pyramide P durch zur Grund-
fläche parallele Ebenen in n gleichdicke Lamellen von der Dicke δh ,
dann ist $n \cdot \delta h = h$ ($h =$ Höhe der Pyramide)

1) Die Schnittflächen $f_1 f_2 f_3 \dots f_n$ ($f_n = G$)

dieser Ebenen mit der Pyramide sind nach einem bekannten Satz
ähnliche Vielecke, deren Flächen sich wie die Quadrate homologer
Seiten oder wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze
verhalten.

2) $f_1 : G = (\delta h)^2 : h^2 = (\delta h)^2 : (n \cdot \delta h)^2 = 1^2 : n^2$

$f_2 : G = (2\delta h)^2 : h^2 = (2\delta h)^2 : (n \cdot \delta h)^2 = 2^2 : n^2$

$f_3 : G = (3\delta h)^2 : h^2 = (3\delta h)^2 : (n \cdot \delta h)^2 = 3^2 : n^2$

.....

3) Also $f_1 = \frac{1^2}{n^2} \cdot G$ $f_2 = \frac{2^2}{n^2} \cdot G$ $f_3 = \frac{3^2}{n^2} \cdot G$

.....

$f_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot G$ $f_n = \frac{n^2}{n^2} \cdot G$

Fig. 49 a.

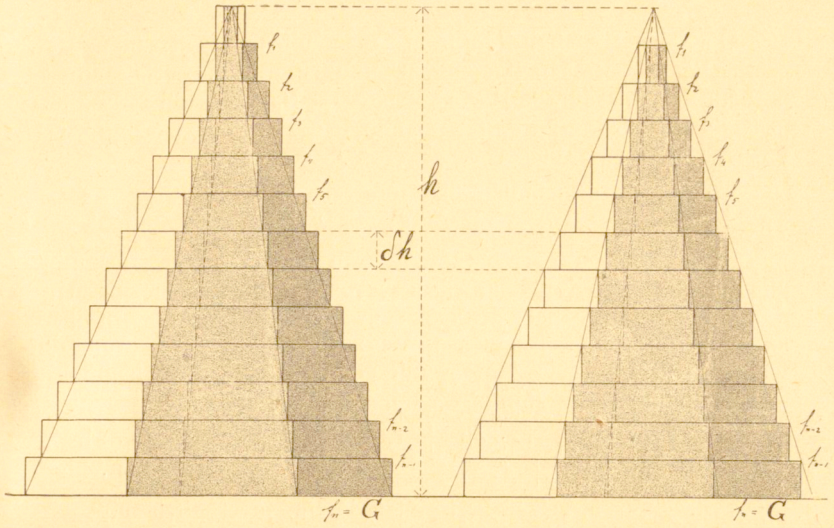
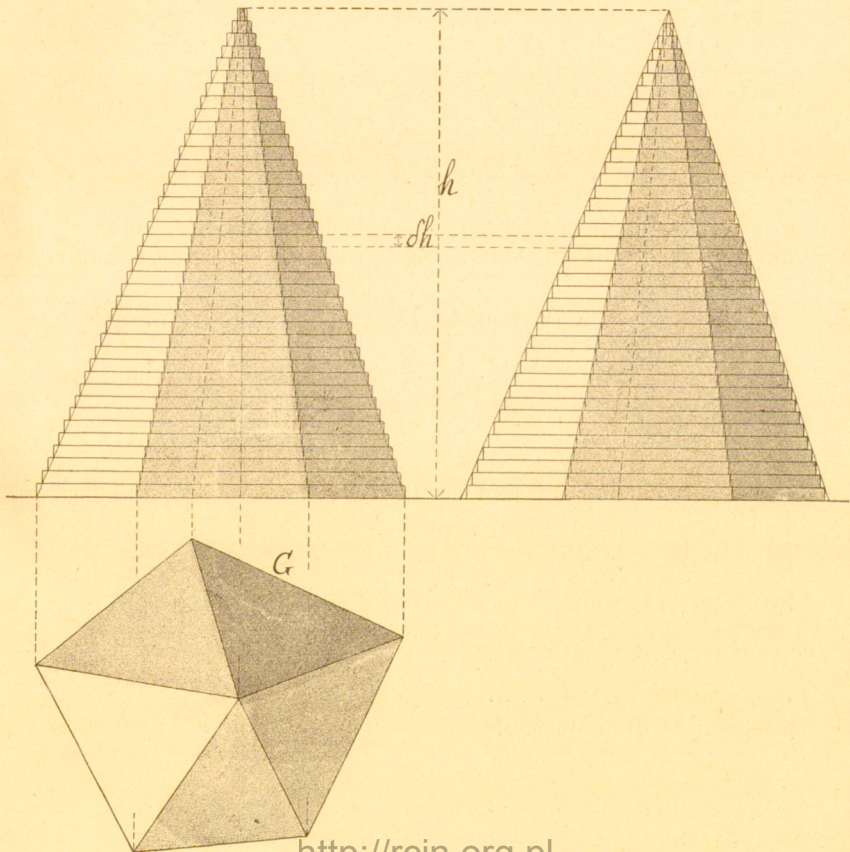


Fig. 49 b.



Über diesen Schnittflächen errichten wir nun senkrechte Prismen, a) nach oben, b) nach unten, und erhalten so zwei Staffelpyramiden: eine äußere P_a und eine innere P_i . Die äußere Staffelpyramide ist ersichtlich mit Ausschluß ihrer untersten Stufe der inneren kongruent.

Es ist nun dem Rauminhalt nach augenscheinlich

$$4) \quad P_a > P > P_i$$

Diese Ungleichung behält auch dann ihre Richtigkeit, wenn die Pyramide P nicht bloß ansteigende, sondern auch einige überhängende Seitenflächen hat; denn die durch die Staffeln an den überhängenden Seitenflächen entstehenden Einschnitte sind räumlich immer kleiner, als die Aufsätze auf den ansteigenden Seitenflächen. Der Rauminhalt der äußeren Staffelpyramide ist:

$$P_a = f_1 \cdot \delta h + f_2 \cdot \delta h + f_3 \cdot \delta h + \dots + f_n \cdot \delta h \\ = (f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n) \cdot \delta h$$

Setzen wir hier die Werte aus (3) ein, so erhalten wir

$$P_a = \left(\frac{1^2}{n^2} \cdot G + \frac{2^2}{n^2} \cdot G + \frac{3^2}{n^2} \cdot G + \dots + \frac{n^2}{n^2} \cdot G \right) \cdot \delta h \\ = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) \cdot \frac{G \cdot \delta h}{n^2} \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{G \cdot \delta h}{n^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \cdot G \cdot (n \cdot \delta h)$$

$$5) \quad P_a = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \cdot Gh$$

Der Rauminhalt der inneren Staffelpyramide ist dem der äußeren gleich mit Ausschluß von deren untersten Stufe. Wir erhalten also analog

$$P_i = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2) \cdot \frac{G \cdot \delta h}{n^2} \\ = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \cdot \frac{G \cdot \delta h}{n^2} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \cdot G \cdot (n \delta h)$$

$$6) \quad P_i = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6} \cdot Gh$$

Der Rauminhalt P der ebenflächigen Pyramide liegt also immer zwischen den Werten (5) und (6). Damit haben wir ihren Wert zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, die wir enger und enger ziehen können. Wir brauchen bloß die Staffelhöhe δh immer kleiner und kleiner werden zu lassen, während stets die Gleichung $n \cdot \delta h = h$ besteht.

*) Entwicklung der Summenformel für die Reihe

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

siehe Seite 34 u. 35, Fußnote!

Bei diesem Prozeß muß also die ganze Zahl n immer größer und größer werden. Dabei nähern sich die Staffel- oder Feilenflächen mehr und mehr den ebenen Flächen der Pyramide P und damit nähert sich auch der Rauminhalt von P_n und P_i mehr und mehr dem der Pyramide P . Für $\delta h = 1$ mm haben wir die Fläche einer groben Feile, für $\delta h = 0,1$ mm wird der Feilenschlag schon sehr fein, für $\delta h = 0,01$ mm 0,001 mm für unsern Tasts- und Gesichtssinn nicht mehr wahrnehmbar, die Flächen erscheinen uns als ebene Flächen, nur etwas matt, für $\delta h = 0,001$ mm 0,0001 mm könnten wir die Stufen nur noch mit den besten Mikroskopen wahrnehmen*) und unter diesen Größen auch damit nicht mehr.

Je mehr sich nun δh der Null nähert (ohne sie zu erreichen!), desto mehr nähern sich die Feilenflächen den ebenen Flächen der Pyramide P , desto mehr nähert sich n einer unendlich großen Zahl, desto mehr der Wert $\frac{1}{n}$ der Null. $\frac{1}{n}$ kann also so klein gemacht werden, daß es gegen 1 und 2 gar nicht mehr in Betracht kommt.

Bei unendlich klein werdendem δh und damit unendlich groß werdendem n nähern sich nun die Rauminhalte der beiden Staffelpyramiden immer mehr demselben Wert (Grenzwert):

$$\lim_{\text{für } n = \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) Gh = \frac{1}{3} Gh.$$

$$7) \quad \lim_{\text{für } n = \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot Gh = \frac{1}{3} Gh.$$

Da bei dem erwähnten Prozeß der Rauminhalt P der ebenflächigen Pyramide stets zwischen den Rauminhalten der Staffelpyramiden liegt, bis an die äußerste Grenze hin (für δh unendlich klein), so ist der Rauminhalt der ebenflächigen Pyramide:

$$8) \quad \underline{P = \frac{1}{3} G \cdot h.} \quad (**)$$

*) Betrachte ein feines Robert'sches Gitter auf Glas mit Linienabständen von 4μ $0,282 \mu$ mit bloßem Auge und unter dem Mikroskop!

**) Wir können bei der Berechnung des Inhalts der Pyramide auch in der Weise vorgehen, daß wir zuerst den Rauminhalt einer dreiseitigen Pyramide mit zwei zur Grundfläche senkrechten Seitenflächen auf die gleiche Art berechnen wie es oben geschehen. Wir haben dabei nur eine Staffelfläche, was zwar nicht weiter von Belang ist, und finden $P_3 = \frac{1}{3} \Delta \cdot h$ (Δ = Grundfläche dieses Tetraeders). Und nun können wir jede Pyramide, ohne oder mit teilweise überhängenden Seitenflächen, als eine algebraische Summe derartiger Tetraeder auffassen.

$$V = \sum \Delta \cdot h = \left(\sum \Delta\right) \cdot h = G \cdot h.$$

Es leuchtet ein, daß es für die Gewinnung dieser Formel nötig und hinreichend ist nur eine der beiden Staffelpyramiden in Rechnung zu ziehen.

Wir fassen jetzt den Inhalt der ebenflächigen Pyramide als die Grenze des Inhalts der Staffelpyramide P_n oder P_i auf.

$$9) \quad P = \lim P_n \text{ oder } = \lim P_i$$

für ein unendlich klein werdendes $d h$

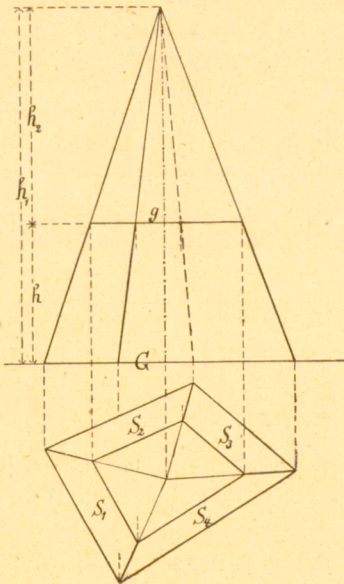
Wie wir in der ebenen Geometrie im Rechteck (ab) und im Dreieck ($\frac{1}{2}ah$) die Grundformen für alle weiteren Flächenberechnungen haben, so haben wir in der räumlichen Geometrie im Rechtecker (abc) und in der Pyramide ($\frac{1}{3} G \cdot h$) die Grundformen für alle weiteren Inhaltsberechnungen von Körpern.

Wir können dort alle Flächen entweder in endliche oder in unendlich kleine Rechtecke und Dreiecke zerlegen und können hier alle Körper in endliche oder in unendlich kleine Rechtecker und Pyramiden (Nadelpyramiden) zerlegen.

8. Die abgestumpfte Pyramide (Pyramidenstumpf)

erhalten wir, wenn wir von einer vollen Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene ein Stück abschneiden.

Fig. 50.



Ihre Seitenflächen sind Trapeze, Grund- und Deckfläche einander ähnliche n -Ecke (G u. g).

Die Oberfläche ergibt sich als Summe dieser Flächen

$$1) \quad O = G + g + \sum S.$$

Ihr Rauminhalt ergibt sich als die Differenz zweier Pyramiden.

$$2) \quad V_s = \frac{1}{3} G \cdot h_1 - \frac{1}{3} g h_2.$$

Nach einem im vorhergehenden Abschnitt bereits angeführten Satz verhält sich

$$G : g = h_1^2 : h_2^2, \text{ oder}$$

$$3) \quad \sqrt{G} : \sqrt{g} = h_1 : h_2.$$

Substituieren wir den Wert für h_2 aus dieser Gleichung in (2), so erhalten wir

$$4) \quad V_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{G \sqrt{G} - g \sqrt{g}}{\sqrt{G}} h_1$$

Um noch h_1 durch h zu ersetzen bilden wir nach (3)

$$V\bar{G} : (V\bar{G} - V\bar{g}) = h_1 : (h_1 - h_2) = h_1 : h$$

hieraus:
$$h_1 = \frac{h V\bar{G}}{V\bar{G} - V\bar{g}}$$

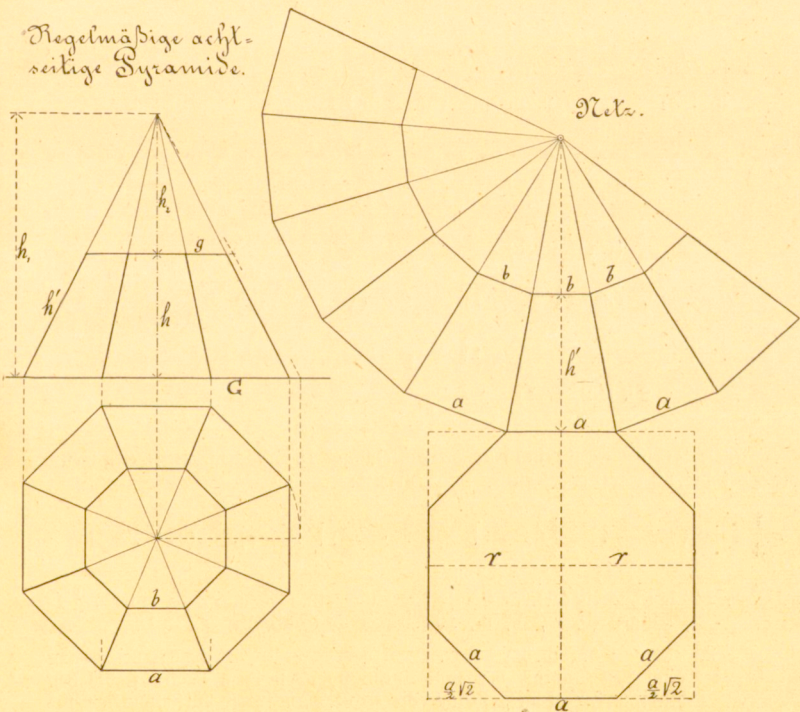
Dies in Gleichung (4) eingesetzt gibt:

$$5) V_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{(V\bar{G})^3 - (V\bar{g})^3}{V\bar{G} - V\bar{g}} \cdot h = \frac{1}{3} (G + V\bar{G} \cdot g + g) \cdot h.$$

Regelmäßige Pyramiden.

Bei praktischen Aufgaben haben wir es in den meisten Fällen mit regulären oder regelmäßigen Pyramiden zu tun. Wir bezeichnen eine Pyramide als *regelmäßig*, wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges n -Eck ist und wenn ihre Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt dieser Grundfläche liegt. Die Seitenflächen einer solchen Pyramide sind kongruente, gleichschenklige Dreiecke oder, wenn die Pyramide abgestumpft ist, kongruente, gleichschenklige Trapeze. Wir wollen hier die Berechnung einer regelmäßigen 8-seitigen Pyramide (siehe Fig. 51) ausführen.

Fig. 51.



Von einer solchen kann gegeben sein die Grundkante a und die Höhe h_1 , oder irgend zwei andere Bestimmungsstücke (Seitenkante, Winkel der Seitenkante oder Seitenfläche mit der Grundfläche u. s. w.).

Ist die Pyramide abgestumpft, so können von dem Pyramidenstumpf gegeben sein: Die Kante a der Grundfläche, die Kante b der Deckfläche und die Höhe h oder irgend drei andere Bestimmungsstücke.

Der Inhalt der Grundfläche unserer regelmäßigen 8-seitigen Pyramide ist ersichtlich

$$G = (a + a\sqrt{2})^2 - a^2 = 2a^2(\sqrt{2} + 1),$$

ihre Mantelfläche $M = 4a\sqrt{r^2 + h_1^2}$, worin $r = \frac{a}{2}(\sqrt{2} + 1)$ und ihr Rauminhalt $V = \frac{2}{3}a^2(\sqrt{2} + 1) \cdot h_1$.

Bei dem unten abgechnittenen Pyramidenstumpf ist:

die Grundfläche $G = 2a^2(\sqrt{2} + 1)$,

die Deckfläche $g = 2b^2(\sqrt{2} + 1)$,

die Mantelfläche $M = 8 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h'$, worin $h' = \sqrt{(r - \rho)^2 + h^2}$,

$$r = \frac{a}{2}(\sqrt{2} + 1), \quad \rho = \frac{b}{2}(\sqrt{2} + 1)$$

und der Rauminhalt

$$V = \frac{1}{3}(Gh_1 - gh_2).$$

Aus ähnlichen Dreiecken folgt

$$h_1 : h_2 = a : b \text{ u. hieraus } (h_1 - h_2) : h_1 = (a - b) : a,$$

$$\text{woraus } h_2 = \frac{h_1 b}{a} \qquad h_1 = \frac{a h}{a - b}$$

$$\begin{aligned} \text{Also } V &= \frac{1}{3} \left(G - g \frac{b}{a} \right) h_1 = \frac{1}{3} \left(G - g \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{ah}{a-b} \\ &= \frac{1}{3} (Ga - gb) \frac{h}{a-b} \\ &= \frac{1}{3} (2a^2(\sqrt{2} + 1) - 2b^2(\sqrt{2} + 1)) \frac{h}{a-b} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a - b} \cdot h (\sqrt{2} + 1) \\ &= \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{3} (a^2 + ab + b^2) \cdot h. \end{aligned}$$

Diese Formel ergibt sich auch aus Gleichung (5) des Abschnittes (8), wenn wir dort die Werte für G und g substituieren:

$$V = \frac{1}{3} \left(2a^2(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2a^2(\sqrt{2} + 1) \cdot 2b^2(\sqrt{2} + 1) + 2b^2(\sqrt{2} + 1)} \right) \cdot h$$

Aufgabe 1 Berechne in gleicher Weise Oberfläche und Rauminhalt einer regelmäßigen 3-, 4-, 5-, 6-, 10-seitigen Pyramide!

2. Beschreibe eines regulären Tetraeders und Oktaeders; bei diesen auch den Radius der um- und eingeschriebenen Kugel sowie den Radius der Kugel, welche die Kanten in ihren Mittelpunkten berührt.

Nachtrag zu 5 und 6. Die Formel für den Rauminhalt des schiefen Prismas und Zylinders können wir auch durch folgende Vorstellung gewinnen:

Wir denken uns das Prisma in unendlich viele Nadelprismen von unendlich kleinem Querschnitt dq (dieses dq ist eine unendlich kleine Größe 2 Ordnung) zerlegt. Dann ist der Rauminhalt einer solchen prismatischen Nadel $dV = dq \cdot l$, wenn l die Länge der Seitenkante bezeichnet, und das Volumen des ganzen Prismas ist

$$V = \int dV = \int dq \cdot l = l \int dq = l \cdot q,$$

wenn q den Flächeninhalt des Normalschnitts des Prismas bezeichnet. Nun können wir den Normalschnitt als senkrechte Projektion der Grundfläche G betrachten und es ist nach dem auf Seite 39 (Mitte) angeführten Satz

$$q = G \cdot \cos \alpha,$$

wenn α den Neigungswinkel der Ebene des Normalschnitts gegen die Ebene der Grundfläche des Prismas bezeichnet

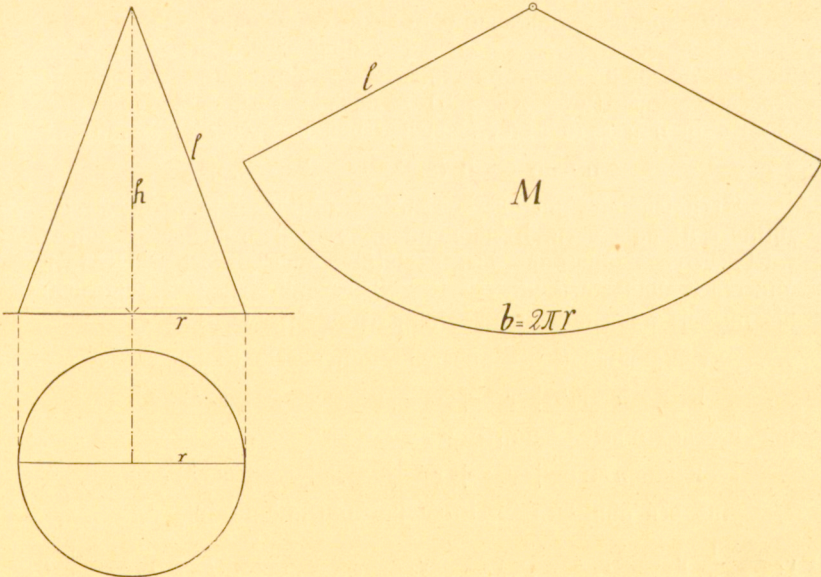
$$\text{Also} \quad V = l \cdot G \cdot \cos \alpha = G \cdot (l \cos \alpha) = \underline{G \cdot h}$$

Aus Fig. 44, S. 55 leuchtet sofort ein, daß $l \cdot \cos \alpha = h$.

Wir können diesen Vorgang leicht dadurch veranschaulichen, daß wir ein prismatisches Futteral mit feinen, gleichlangen Strichnadeln ausfüllen, zuerst ein schiefes Prisma bilden und dann dieses in senkrechter Richtung gegen eine ebene Fläche stauchen, wodurch sofort das senkrechte Prisma gleichen Inhalts mit dem Querschnitt q und der Höhe l entsteht.

9. Der Kegel.

Fig. 52.



Wir betrachten zunächst den senkrechten (geraden, normalen) Kreiskegel.

Er entsteht, wenn ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete rotiert. Dabei beschreibt die andere Kathete eine Kreisfläche, die Grundfläche; die Hypotenuse beschreibt die Mantelfläche des Kegels und die Dreiecksfläche den Kegelförper. Alle Mantellinien (Erzeugenden) des Kegels sind also gleichlang und wenn wir die Mantelfläche längs einer Mantellinie aufschneiden und dann in die Ebene ausbreiten oder abwickeln, so erhalten wir einen Kreissektor, dessen Radius gleich der Mantellinie und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist.

Der Achsenschnitt dieses Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck, mit der Grundlinie $2r$ und den Schenkeln l .

Die Mantelfläche des senkrechten Kreiskegels ist deshalb

$$1) \quad \underline{\underline{M = \pi \cdot r \cdot l}}$$

Seine ganze Oberfläche

$$2) \quad \underline{\underline{O = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (r + l)}}$$

und sein Rauminhalt ergibt sich ohne weiteres, wenn wir den Kegel als Pyramide mit unendlich vielen unendlich schmalen Seitenflächen ansehen, als

$$3) \quad \underline{\underline{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.}}$$

Wir können den Rauminhalt des Kegels aber auch in der Weise berechnen, daß wir eine analoge Betrachtung anstellen wie bei Berechnung des Rauminhalts der Pyramide. Wir schneiden den Kegel (siehe Fig. 53) durch zur Grundfläche parallele Ebenen in n gleich dicke Lamellen von der Dicke δh , dann ist

$$n \cdot \delta h = h \text{ (Höhe des Kegels).}$$

Errichten wir nun über diesen Schnittflächen senkrechte Kreiszylinder a) nach oben, b) nach unten, so erhalten wir zwei Staffelfegel, deren Stufen aus diesen Zylinderlamellen bestehen: einen äußeren K_a und einen inneren K_i . Beide sind ersichtlich kongruent bis auf die unterste Stufe des äußeren Staffelfegels.

Der Rauminhalt des äußeren Staffelfegels ist nun

$$K_a = \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2) \cdot \delta h$$

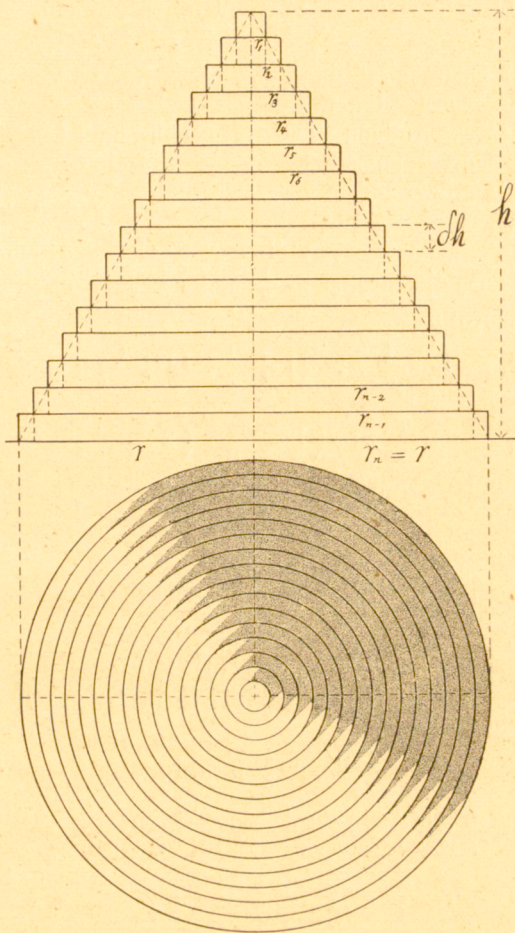
und der des inneren Staffelfegels

$$K_i = \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2) \cdot \delta h$$

Aus den ähnlichen Dreiecken im Achsenschnitt folgt:

$$r_1 = \frac{1}{n} r \quad r_2 = \frac{2}{n} r \quad r_3 = \frac{3}{n} r \quad \dots \quad r_n = \frac{n}{n} r$$

Fig. 53.



Also

$$K_a = \frac{\pi r^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \delta h$$

$$K_i = \frac{\pi r^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) \cdot \delta h$$

Und nach der bereits bekannten Summe der Quadratzahlen ist

$$K_a = \frac{\pi r^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \delta h = \frac{1}{6} \pi r^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) (n \cdot \delta h)$$

$$K_i = \frac{\pi r^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n (2n-1)}{6} \cdot \delta h = \frac{1}{6} \pi r^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) (n \cdot \delta h)$$

Bezeichnet K den gesuchten Rauminhalt des ursprünglich gegebenen glatten Kreiskegels, so ist augenscheinlich

$$K_a > K > K_i .$$

Sein Rauminhalt befindet sich also stets zwischen den Rauminhalten der beiden Staffelfegel.

Diese Grenzen können wir in der bekannten Weise dadurch enger und enger zusammenziehen, daß wir δh kleiner und kleiner und damit n größer und größer werden lassen.

Bei diesem Prozeß nähern sich die Staffelfegel mehr und mehr dem glatten Kegel und wenn δh sehr klein, unendlich klein wird, so wird n unendlich groß und $\frac{1}{n}$ auch unangebar klein.

Es wird also

$$\lim K_a = \lim_{\text{für } n = \infty} \frac{1}{6} \pi r^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{und } \lim K_i = \lim \frac{1}{6} \pi r^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) h = \frac{1}{3} \pi r^2 h .$$

Da nun K stets zwischen K_a und K_i liegt, so muß

$$\underline{\underline{K = \frac{1}{3} \pi r^2 h .}}$$

Außerdem besteht zwischen h , r und l die Beziehung

$$4) \quad r^2 + h^2 = l^2 .$$

Die Gleichung (3) gilt auch für den schiefen Kegel, auch dann, wenn die Grundfläche kein Kreis ist. Ist diese z. B. eine Ellipse, so ist

$$V = \frac{1}{3} \pi a b h ,$$

wenn a und b die Halbachsen dieser Ellipse bezeichnen. Ist die Grundfläche G von irgend einer Kurve begrenzt, so ist immer

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h .$$

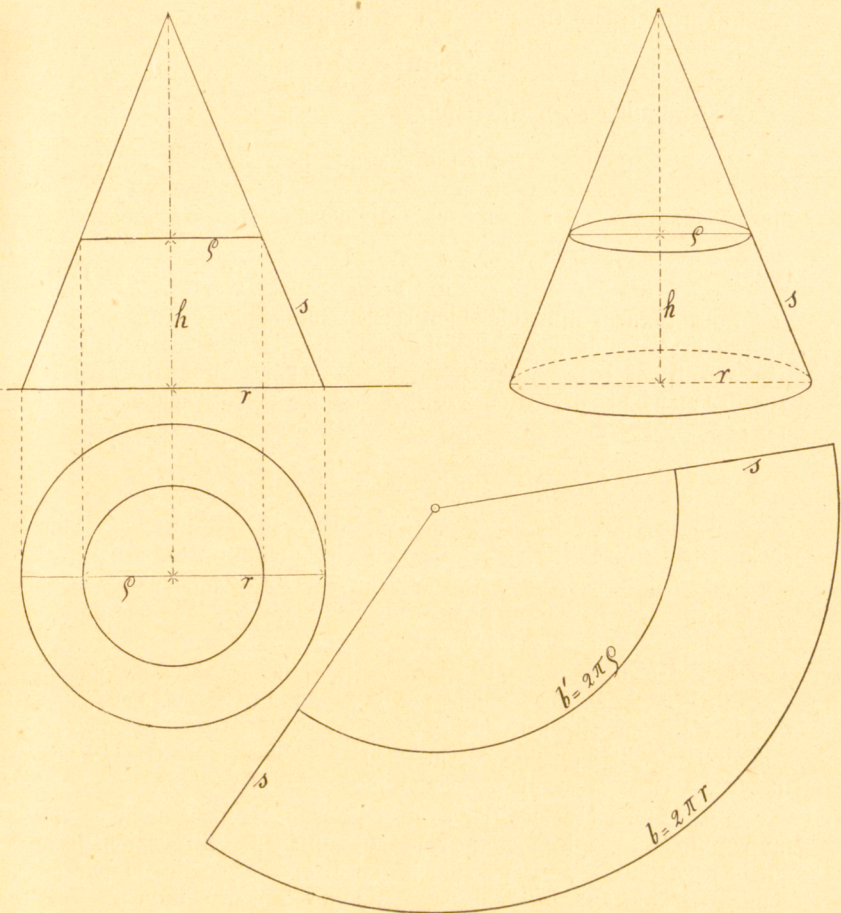
10. Den abgestumpften Kegel (Kegelstumpf)

erhalten wir, wenn wir von einem Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene ein Stück abschneiden. Die Schnittfläche ist auch ein Kreis.

Die Abwicklung der nach einer Mantellinie aufgeschnittenen Mantelfläche ist ein Ausschnitt aus einem Kreisring. Der Inhalt der Mantelfläche ist also nach Seite 37

$$\underline{\underline{M = \frac{1}{2} (b + b') s = \pi (r + \varrho) s .}}$$

Fig. 54.



Die ganze Oberfläche beträgt

$$\mathbf{O = \pi [r^2 + e^2 + (r + e) s]}$$

und der Rauminhalt

$$\mathbf{V_s = \frac{\pi}{3} (r^2 + r e + e^2) \cdot h.}$$

Vergleiche die Formel für den Pyramidenstumpf! Wir fassen dabei den Kegeltumpf als Pyramidenstumpf mit unendlich vielen, unendlich schmalen Seitenflächen auf.

Wir gelangen zu derselben Formel, wenn wir den Rauminhalt des Kegeltumpfs als Differenz des Rauminhalts zweier Vollkegel

berechnen. Die Höhe des ganzen Kegels sei h_1 , die des oben abgeschnittenen Kegels h_2 , so daß $h = h_1 - h_2$.

$$V_s = \frac{\pi}{3} r^2 h_1 - \frac{\pi}{3} \rho^2 h_2 = \frac{\pi}{3} (r^2 h_1 - \rho^2 h_2)$$

Aus ähnlichen Dreiecken folgt

$$h_1 : h_2 = r : \rho \text{ und hieraus } h_2 = \frac{h_1 \rho}{r}$$

und $h_1 : (h_1 - h_2) = r : (r - \rho)$, woraus $h_1 = \frac{h \cdot r}{r - \rho}$

$$\text{Folgl. } V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^3 - \rho^3}{r} \cdot h_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^3 - \rho^3}{r - \rho} \cdot h = \frac{\pi}{3} (r^2 + r\rho + \rho^2) \cdot h.$$

Wir können nun die bisherigen Volumenberechnungen der Körper in den einfachen Satz zusammenfassen: Der Rauminhalt der Körper von **Parallellformen** ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe, der der **Spikformen** ist $\frac{1}{3}$ dieses Produkts.

11. Die Kugel und ihre Teile.

Die Kugelfläche ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt (Mittelpunkt, Zentrum) gleichweit entfernt sind.

Eine Kugel wird beschrieben, wenn ein Kreis um einen seiner Durchmesser rotiert. Dabei beschreibt die Kreislinie die Kugelfläche, die Kreisfläche den Kugelförper.

Jede Ebene, welche die Kugel trifft, schneidet sie nach einem Kreis; jede Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, schneidet sie nach einem größten Kreis. Jede Ebene, welche in dem äußeren Endpunkt eines Halbmessers auf diesem senkrecht steht, ist eine Tangentialebene der Kugel.

Wenn wir die Oberfläche einer Kugel berechnen wollen, so müssen wir eine Infinitesimalbetrachtung anstellen. Wir zerschneiden zu diesem Zweck die Kugel durch parallele Ebenen in so dünne Lamellen, daß wir diese als Kegeltumpfe ansehen können. Die Oberfläche der Kugel ist dann gleich der Summe der Mantelflächen dieser unendlich dünnen Kegeltumpfe.

Fig. 55 stellt rechterhand den Achsenschnitt dar, δO eine Lamelle, senkrecht AB , δy deren Dicke, δs die Mantellinie dieses Kegeltumpfs, x u. $x + \delta x$ die Radien der beiden Grenzkreise.

Die Mantelfläche dieses sehr dünnen Kegeltumpfs ist:

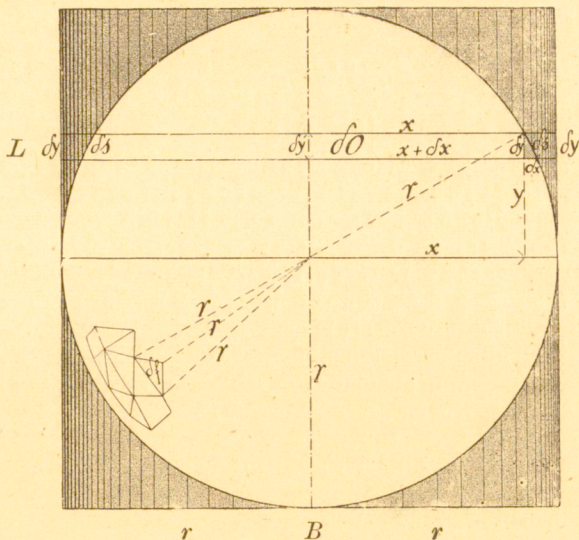
$$\delta O = \pi (x + \delta x + x) \cdot \delta s.$$

Nun können wir in der eingeklammerten Summe die unendlich kleine Größe δx gegen die endliche Strecke $2x$ vernachlässigen (siehe Seite 59) und es bleibt für

$$1) \quad \delta O = 2\pi x \cdot \delta s$$

Fig. 55.

A



Es ist nun augenscheinlich das sehr kleine rechtwinklige

$\triangle (\delta y, \delta x, \delta s)$ ähnlich dem $\triangle (x, y, r)$.

$\angle (\delta x, \delta y) = \angle (x, y) = 90^\circ$; $\angle (\delta y, \delta s) = \angle (x, r)$.

Folglich $\delta y : \delta s = x : r$

2) oder $x \cdot \delta s = r \cdot \delta y$.

Dies in Gleichung (1) substituiert gibt

3) $\delta O = 2\pi r \cdot \delta y$

Diese Gleichung sagt uns:

Die Mantelfläche der sehr dünnen Kegelscheibe L ist gleich der Mantelfläche der Zylinderscheibe von derselben Dicke oder Höhe δy , welche von denselben parallelen Ebenen, die den Kegelschiff L begrenzen, auf der Zylinderfläche ausgeschnitten wird, welche der Kugel parallel zur Achse AB um beschrieben ist.

Dies wird um so genauer der Fall sein, je kleiner δs und damit δx u. δy werden. In der obenstehenden Zeichnung erscheint für uns δs schon gerade, wenn es ungefähr 1 mm . . . 0,1 mm . . . ist. Es ist dies natürlich in dieser Größenlage nur annähernd richtig; es wird aber um so genauer, je kleiner diese Größen werden, . . . 1 μ 1 $\mu\mu$ u. s. f.

Erstrecken wir nun die Summation aller Flächenelemente δO über die ganze Kugeloberfläche, von B bis A, so ergibt sich für die Oberfläche der Kugel:

$$O = \sum \delta O = \sum 2\pi r \cdot \delta y = 2\pi r \sum_{\text{von B}}^{\text{bis A.}} \delta y = 2\pi r \cdot 2r$$

4)
$$\underline{O = 4\pi r^2.}$$

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalt eines größten Kreises oder gleich dem Flächeninhalt eines Kreises, der den Durchmesser der Kugel zum Halbmesser hat, oder gleich der Mantelfläche eines senkrechten Kreiszylinders, dessen Durchmesser dem der Kugel gleich und dessen Höhe auch gleich dem Durchmesser der Kugel ist.

Zur Berechnung des Rauminhalts einer Kugel denken wir uns ihre Oberfläche kleinformosaitartig oder facettenartig (wie die Hornhaut der Facettenaugen der Insekten*) und der schon vor Jahrmillionen verstorbenen Trilobiten, die uns noch aus den Beresteinerungen im Silur anstarren) in sehr kleine Flächenstückchen δf geteilt (Dreiecke, Vierecke . . .), so klein, daß wir jedes als ein ebenes Flächenstückchen betrachten können. Denken wir uns ferner die Eckpunkte dieser δf mit dem Kugelmittelpunkt durch Radien verbunden, so erscheint die Kugel als eine Summe von unendlich vielen sehr schmalen Pyramiden (Nadelpyramiden), welche diese δf zu Grundflächen und welche alle den Radius der Kugel zur Höhe haben. Es ist also der Rauminhalt der Kugel

5)
$$V = \sum \frac{1}{3} \delta f \cdot r = \frac{r}{3} \sum \delta f = \frac{r}{3} \cdot 4\pi r^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi r^3.}}$$

Das Volumen einer Kugel beträgt $\frac{2}{3}$ vom Volumen des ihr umbeschriebenen senkrechten Kreiszylinders.

12. Kugelhappe, Kugelsektor, Kugelsegment und Kugelschichte.

Die beiden schalenartigen Flächen, in welche eine Ebene die Kugelfläche teilt, heißen Kugelsegmente, h Höhe des einen, $(2r-h)$ Höhe des andern.

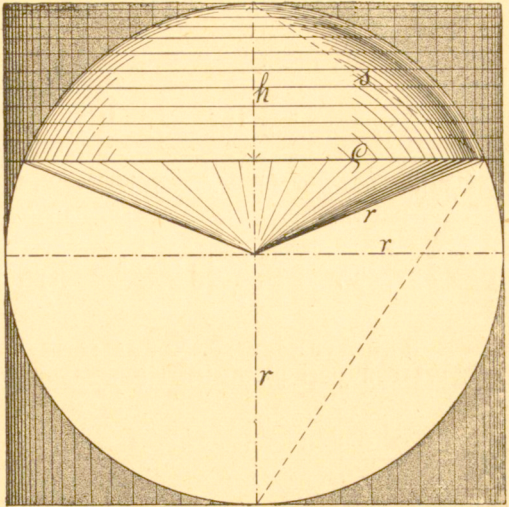
Erstrecken wir die im vorhergehenden Abschnitt ausgeführte Summation der Mantelflächen der unendlich dünnen Kegeltumpfe nur auf die Kugelhappe von der Höhe h , so finden wir für deren Fläche

1)
$$K = \sum_0^h 2\pi r \delta y = 2\pi r \sum_0^h \delta y = \underline{2\pi r h.}$$

*) Betrachte unter dem Mikroskop ein solches Insektenauge, z. B. das Auge einer Fliege! Du erblickst ein Netz von regelmäßigen Sechsecken wie bei Betrachtung einer Bienenwabe.

Fig. 56.

Sie ist gleich der Zylindermantelfläche, welche die Schnittebene und die dazu im Scheitel der Kappe parallele Ebene (Tangentialebene im Scheitel) auf der umbeschriebenen Zylinderfläche begrenzen, oder gleich der Fläche eines Kreises, der die Sehne s aus dem Scheitel nach dem Rande zum Radius hat.



$$2) \quad K = \pi s^2$$

Unter einem Kugelsektor verstehen wir einen Ausschnitt aus der Kugel, der von einer Kreiskegelfläche, deren Spitze der Kugelmittelpunkt ist, begrenzt wird, also einen Kreiskegel, dessen Basis eine Kugelfappe ist (Kugelfegel).

Seine Oberfläche besteht aus Kugelfappe und Kegelmantel

$$3) \quad O = 2\pi r h + \pi r \rho = \pi r (2h + \rho).$$

Sein Volumen erhalten wir, wenn wir die Oberfläche der Kugelfappe wie in Abschnitt (10) mosaikartig in sehr kleine Flächen df geteilt denken und die Summe der Kegel-Pyramiden bilden, welche die df zu Grundflächen und den Kugelmittelpunkt als gemeinsame Spitze haben.

$$V_s = \sum \frac{1}{3} df \cdot r = \frac{r}{3} \sum df = \frac{r}{3} \cdot 2\pi r h$$

$$4) \quad \underline{\underline{V_s = \frac{2}{3} \pi r^2 h}}$$

Ein Kugelsegment oder Kugelabschnitt ist begrenzt von einer Kugelfappe und ihrer Schnittebene. Seine Oberfläche

$$5) \quad O_a = 2\pi r h + \pi \rho^2 = 2\pi r h + \pi (2r - h) \cdot h \\ = \pi (4r - h) h$$

und sein Rauminhalt V_a ergibt sich als Differenz zwischen dem Volumen eines Kugelsektors und eines senkrechten Kreiskegels.

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{2}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi \varrho^2 (r - h) \\ &= \frac{2}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi h (2r - h) (r - h) \end{aligned}$$

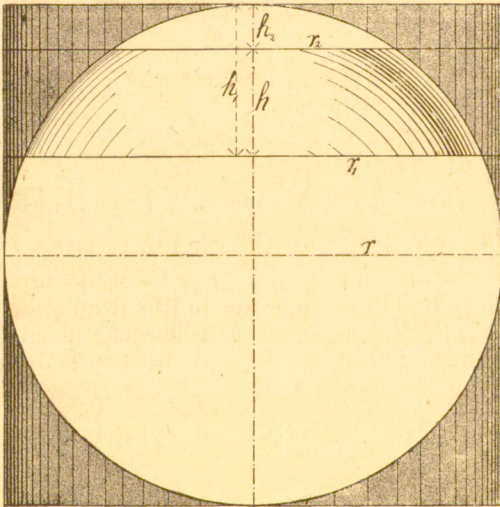
$$6) \quad \underline{\underline{V_a = \frac{\pi}{3} (3r - h) \cdot h^2}}$$

Häufig sind zur Berechnung dieses Volumens ϱ und h gegeben. Dann ist, wenn wir beachten, daß

$$2rh = \varrho^2 + h^2, \quad \underline{\underline{V_a = \frac{\pi}{3} \left(3 \frac{\varrho^2 + h^2}{2h} - h \right) h^2 = \frac{\pi}{6} (3\varrho^2 + h^2) \cdot h}}$$

Die Kugelzone bzw. Kugelschichte ist ein Teil einer Kugel, der von zwei parallelen Ebenen begrenzt ist.

Fig. 57.



Die Fläche der Kugelzone ist nach der Entwicklung im Abschn. 11

$$\begin{aligned} Z &= \sum \delta O \\ &= \sum 2\pi r \delta y \\ &= 2\pi r \sum_{h_2}^{h_1} \delta y \\ &= 2\pi r (h_1 - h_2) \\ \underline{\underline{Z = 2\pi r h}} \end{aligned}$$

Der Rauminhalt der Kugelschichte ergibt sich als Differenz zweier Kugelsegmente:

$$\begin{aligned} V_z &= S_1 - S_2 \\ &= \frac{\pi}{3} (3r - h_1) h_1^2 - \frac{\pi}{3} (3r - h_2) h_2^2 \\ &= \frac{\pi}{3} [3r (h_1^2 - h_2^2) - (h_1^3 - h_2^3)] \\ &= \frac{\pi}{3} [3r (h_1 + h_2) - (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)] (h_1 - h_2) \end{aligned}$$

Wollen wir die Radien r_1 und r_2 der Schnittkreise einführen, so ersehen wir aus der Figur, daß

$$r^2 = h_1 (2r - h_1) \text{ und } r_2^2 = h_2 (2r - h_2)$$

Folglich $r_1^2 + r_2^2 = 2r (h_1 + h_2) - h_1^2 - h_2^2$

$$r (h_1 + h_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{2}$$

Substituieren wir dies in den vorhergehenden Ausdruck, so erhalten wir

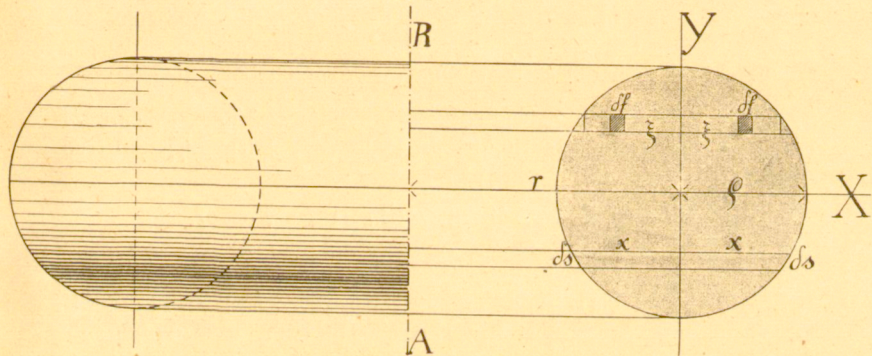
$$V_z = \frac{\pi}{3} \left[\frac{3}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{3}{2} (h_1^2 + h_2^2) - (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) \right] \cdot (h_1 - h_2)$$

$$\underline{V_z = \frac{\pi}{6} [3 (r_1^2 + r_2^2) + h^3] \cdot h.}$$

13. Ring.

Es sollen Oberfläche und Rauminhalt eines Ringes, der entsteht durch Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende Achse, die den Kreis nicht schneidet, berechnet werden.

Fig. 58.



Es sei RA die Rotationsachse, ρ der Radius des Kreises, r der Abstand des Kreismittelpunktes von RA. Wir denken uns den Ring durch Ebenen, welche zu seiner Äquatorebene parallel sind, in sehr dünne Lamellen zerschnitten.

Es seien δs , δs zwei in bezug auf die Y-Achse symmetrisch liegende Bogenelemente der Kreislinie, dann sind die Mantelflächen der beiden sehr dünnen Kegelschälchen, von welchen diese δs Mantellinien sind,

$$2\pi (r + x) \cdot \delta s \text{ und } 2\pi (r - x) \cdot \delta s.$$

Die Summe dieser 2 sehr schmalen Mantelflächen ist also:

$$4\pi \cdot r \cdot \delta s.$$

Führen wir die Summation dieser Flächenelemente des Ringes längs des einen Halbkreises aus, so ist der andere Teil mit eingeschlossen und wir erhalten für die Oberfläche des Ringes:

$$O = \sum_0^{\pi\rho} 4\pi r \cdot ds = 4\pi r \sum_0^{\pi\rho} ds = 4\pi r \cdot \pi\rho$$

$$\underline{O = 4\pi^2 r \rho = 2\pi\rho \cdot 2\pi r.}$$

Wir haben hier einen besonderen Fall der Guldinschen Regel, die wir später allgemein ableiten werden: Der Inhalt einer Rotationsfläche, welche von einer ebenen Kurve erzeugt wird, ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden (rotierenden) Linie und dem Weg ihres Schwerpunktes (hier Mittelpunkt des Kreises).

Um den Rauminhalt des Ringes zu finden verfahren wir ähnlich: Wir denken uns den rotierenden Querschnitt, den Kreis vom Radius ρ , in sehr viele, sehr kleine Flächenelemente df geteilt, derart, daß immer 2 (kongruente) symmetrisch liegen in bezug auf die Y-Achse, was bei der symmetrischen Form des Kreises durchaus möglich ist. Diese Flächenelemente brauchen nicht gerade Rechtecken und am Rande Dreiecken, wie in Fig. 58 angedeutet, zu sein. Es können irgendwelche Figuren sein. Nur müssen in diesem Kleinmosaik immer zwei df in bezug auf Y symmetrisch liegen.

Bei der Rotation beschreibt jedes dieser Flächenelemente df eine Ringfaser vom Querschnitt df . Das Volumen dieser beiden Ringfasern ist

$$2\pi (r + \xi) \cdot df \quad \text{und} \quad 2\pi (r - \xi) \cdot df$$

also die Summe beider: $4\pi r \cdot df$.

Führen wir die Summation über den einen halben Querschnitt des Ringes aus, so ist der andere Teil mit eingeschlossen und wir erhalten

$$\begin{aligned} V &= \sum 4\pi r df = 4\pi r \cdot \sum df \\ &= 4\pi r \cdot \frac{1}{2} \pi \rho^2 = 2\pi^2 r \rho^2 = \underline{\underline{\pi \rho^2 \cdot 2\pi r}} \end{aligned}$$

Wir haben hier einen besonderen Fall des zweiten Teils der Guldinschen Regel:

Das Volumen eines Rotationskörpers, welcher von einer ebenen Fläche erzeugt wird, ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt dieser Fläche und dem Weg ihres Schwerpunktes.

14. Rauminhalt der Ellipsoide.

Haben wir einmal den Rauminhalt einer Kugel bestimmt, so finden wir den Rauminhalt dieser Körper, wenn wir folgende Überlegung anstellen: Wir denken uns die Kugel vom Radius b aus sehr dünnen geraden Fasern zusammengesetzt, die alle parallel zu einer Achse verlaufen. Vergrößern wir alle diese Fasern von der zugehörigen Äquatorebene aus nach auswärts im Verhältnis $a:b > 1$, so erhalten wir aus jedem Achsenschnitt (vergl. Seite 38, 3.) eine Ellipse mit den Halbachsen a und b und aus der ganzen Kugel ein Rotationsellipsoid.*)

Es leuchtet ein, daß sich mit dieser Vergrößerung der einzelnen Halbfasern der Rauminhalt der Kugel in gleichem Verhältnis vergrößern muß.

Folglich ist der Rauminhalt des Rotationsellipsoids:

$$\underline{V_e = \frac{4}{3} \pi b^3 \cdot \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \pi ab^2.}$$

Verkleinern wir dagegen alle Halbfasern, welche in der Kugel mit dem Radius a parallel zu einer Achse laufen, in bezug auf die zugehörige Äquatorebene, also von der Kugeloberfläche aus einwärts nach dem Verhältnis $b:a < 1$, so erhalten wir in jedem Achsenschnitt aus dem Kreis eine Ellipse (vergl. Seite 38, 3.) und so aus der ganzen Kugel ein sogen. Sphäroid.*) Da bei dieser Operation die Volumina der einzelnen Fasern im Verhältnis $b:a$ verkleinert werden, so wird damit der Rauminhalt der Kugel in demselben Verhältnis verkleinert und es ist also der Rauminhalt des Sphäroids

$$\underline{V_s = \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \pi a^2 b.}$$

Um aus jedem dieser beiden Rotationskörper das dreiaxige Ellipsoid abzuleiten brauchen wir ihn nur aus parallelen Fasern zusammengesetzt zu denken, die senkrecht zu einer Meridianebene stehen. Verändern wir die Halbfasern, von dieser Meridianebene aus gemessen, im Verhältnis $c:b$ bzw. $c:a$, so ändert sich in jedem Fall auch das Volumen nach diesem Verhältnis und wir erhalten in beiden Fällen

$$\underline{V_3 = \frac{4}{3} \pi abc}$$

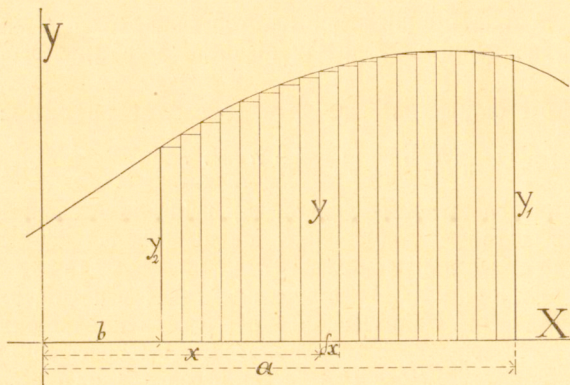
als den Rauminhalt des dreiaxigen Ellipsoids.

*) Rotiert eine Ellipse um ihre große Achse, so entsteht das „Rotationsellipsoid“; rotiert sie um ihre kleine Achse, so entsteht das „Sphäroid“ (Form der Planeten).

IV. Einige bestimmte Integrale.

Wir sind in den vorangehenden Abschnitten einigemal auf Summen von sehr vielen, sehr kleinen und schließlich beim Übergang zur Grenze auf Summen von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen gestoßen. Wir wollen nun im folgenden diese Summenbildungen der letzteren Art noch erweitern und verallgemeinern.

Fig. 59.



Wenn $y = f(x)$ die Gleichung einer Linie ist, so stellt der Ausdruck

$$\sum_{x=b}^{x=a} y \cdot dx$$

(lies: Summe aller $y \cdot dx$ genommen von $x = b$ bis $x = a$) bei kleinen dx den Inhalt einer

Fläche vor, welche von der X-Achse, der erwähnten geraden oder krummen Linie und den beiden äußersten Ordinaten, $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$, begrenzt ist, um so angenäherter, je kleiner dx ist

Bedeutet y eine Fläche, so stellt dieser Ausdruck den Rauminhalt eines Körpers vor, der von den beiden äußersten Lotebenen zur X-Achse in den Punkten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird und dessen zwischenliegende Normalschnitte zur X-Achse die Gleichung $y = f(x)$ befriedigen. Solche Summen sollen nun für einige einfache Funktionen $y = f(x)$ berechnet werden. Wir denken uns die Strecke von $x = b$ bis $x = a$ wie bei den früheren Betrachtungen in sehr viele, sehr kleine, gleiche Strecken dx geteilt, so daß immer

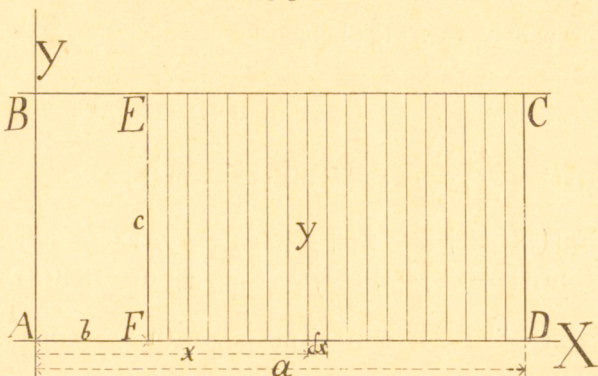
$$n \cdot dx = a - b$$

1) Es sei $y = c$, also y unveränderlich, eine Konstante. Die obere Grenzlinie ist somit eine zur X-Achse parallele Gerade und in der in Betracht stehenden Summe können wir den konstanten Faktor c vor die Summe schreiben. Es ist also

$$\sum_{x=b}^{x=a} y \cdot dx = \sum_{x=b}^{x=a} c \cdot dx = c \cdot \sum_b^n dx = c \cdot n \cdot dx = c \cdot (a - b),$$

Fig. 60.

erfichtlich
der Flächen-
inhalt eines
Rechtecks mit
den Seiten
(a-b) und c.
Wenn wir
die angedeu-
tete Multi-
plikation
ausführen,
so stellt sich
die Fläche
dieses Recht-
ecks als die
Differenz der
Flächen zweier Rechtecke dar: $c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$.



Der Ausdruck $\sum_0^x c \delta x = c \cdot x$ gibt den Inhalt des Rechtecks

mit den Seiten c und x, also die Summe der Lamellen von 0 bis x. Setzen wir hier für x einmal die obere Grenze a, so erhalten wir den Inhalt des Rechtecks ABCD, und setzen wir noch für x die untere Grenze b, so gibt der Ausdruck $c \cdot b$ den Inhalt des Rechtecks ABEF. Es ist also

$$EFDC = \sum_b^a c \delta x = c \sum_b^a \delta x = c \cdot x \Big|_b^a = ca - cb = c(a - b)$$

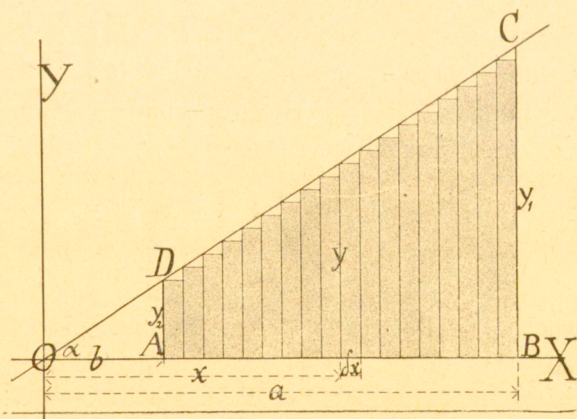
Bezeichnet c
eine Fläche, so
stellt der Aus-

druck $\sum_b^a c \delta x$

den Raum-
inhalt eines
Prismas oder
eines Zylinders
von dem Quer-
schnitt c und
der Höhe (a-b)
vor.

2) Ist $y = mx$
d. h. ist
die obere
Grenzlinie
eine gerade
Linie, die

Fig. 61.



durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems geht ($m = \operatorname{tg} \alpha$, also auch $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$), so stellt der Ausdruck $\sum_{x=0}^{x=a} y \cdot \delta x$ den Inhalt der oben zunächst von einer Staffellinie begrenzten Fläche OBC vor. Es sei nun in bekannter Weise $n \cdot \delta x = a$, dann ist

$$\begin{aligned} \text{OBC} &= \sum_0^a y \cdot \delta x = \sum_0^a mx \cdot \delta x = m \sum_0^a x \cdot \delta x \\ &= m (\delta x \cdot \delta x + 2\delta x \cdot \delta x + 3\delta x \cdot \delta x + 4\delta x \cdot \delta x + \dots + (n-1) \delta x \cdot \delta x) \\ &= m (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1)) (\delta x)^2 \quad *) \\ &= m \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot (\delta x)^2 = m \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} (n\delta x)^2 = m \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} \cdot a^2 \end{aligned}$$

Wenn nun δx immer kleiner und kleiner wird, so werden auch die rechtwinkligen Dreieckchen an der Linie OC immer kleiner und kleiner, n immer größer und größer und schließlich wird für ein unendlich kleines δx die Zahl n unendlich groß und die Staffellinie ist von der Geraden OC nicht mehr zu unterscheiden. Es wird also

$$\triangle \text{OBC} = \lim_{(\text{für } n = \infty)} m \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} \cdot a^2 = \frac{1}{2} ma^2 = \frac{1}{2} a \cdot y_1$$

$$\text{Ebenso } \triangle \text{OAD} = \frac{1}{2} mb^2 = \frac{1}{2} by_2.$$

$$\text{Der Inhalt des Trapezes ABCD} = \frac{1}{2} ma^2 - \frac{1}{2} mb^2 = \frac{1}{2} ay_1 - \frac{1}{2} by_2.$$

Der Inhalt eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks mit der horizontalen Kathete x ist

$$\lim \sum_0^x y \cdot \delta x = \lim \sum_0^x mx \cdot \delta x = \lim m \sum_0^x x \cdot \delta x = \frac{1}{2} mx^2$$

Setzen wir in diesem Ausdruck einmal $x = a$, so erhalten wir $\triangle \text{OBC} = \frac{1}{2} ma^2$, und dann $x = b$, so ergibt sich $\triangle \text{OAD} = \frac{1}{2} mb^2$ und Trapez ABCD $= \frac{1}{2} ma^2 - \frac{1}{2} mb^2$.

Wir können also fortan schreiben:

$$\lim \sum_{x=b}^{x=a} mx \delta x = \lim m \sum_b^a x \delta x = m \left. \frac{x^2}{2} \right|_b^a = \frac{ma^2}{2} - \frac{mb^2}{2} = \frac{ay_1}{2} - \frac{by_2}{2}$$

3) Die Gleichung der oberen Grenzkurve sei $y = x^2$ (Parabel, welche die X-Achse in O berührt und inbezug auf die Y-Achse symmetrisch verläuft). Wir teilen auch hier in bekannter Weise die Strecke OA in sehr viele, sehr kleine, gleiche Teilchen δx , so daß $n \cdot \delta x = a$.

*) Siehe Seite 29, Fußnote!

Fig. 62.

Der Aus-
druck $\sum_{x=b}^{x=a} y \delta x$

stellt hier den
Inhalt der
dunkler gehal-
tenen Fläche
BACD vor,
die oben von
einer Staffel-
linie begrenzt
ist, die sich an
die Parabel
anschließt. Es
ist nun

$$\sum_{x=0}^{x=a} y \delta x$$

$$= \sum_0^a x^2 \cdot \delta x$$

$$= (\delta x)^2 \cdot \delta x + (2\delta x)^2 \cdot \delta x + (3\delta x)^2 \cdot \delta x + \dots + ((n-1)\delta x)^2 \cdot \delta x$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots \dots \dots + (n-1)^2) (\delta x)^3$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} (\delta x)^3 = \frac{(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})}{6} (n \cdot \delta x)^3$$

Wird wieder δx unendlich klein, so wird n unendlich groß und die Staffellinie DC fällt mit der Kurve DC bis auf die unmeßbar kleinen Staffeln zusammen. Der Inhalt der Fläche OAC wird nun

$$= \lim \sum_0^a y \delta x = \lim \sum_0^a x^2 \cdot \delta x = \lim_{(für n = \infty)} \frac{(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})}{6} \cdot a^3 = \frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} ay_1$$

(für ein unendlich kleines δx)

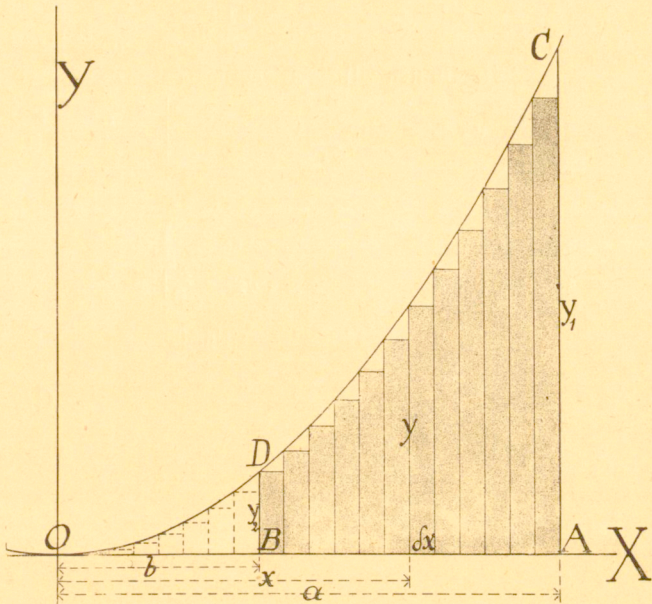
$$\text{Ebenso Fläche } OBD = \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{3} by_2.$$

$$\text{Also Fläche } BACD = \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{3} ay - \frac{1}{3} ay_2.$$

Die Fläche bis zu einer beliebigen Abszisse x ist

$$\lim \sum_0^x y \delta x = \lim \sum_0^x x^2 \delta x = \frac{1}{3} x^3.$$

*) Siehe Seite 34 und 35, Fußnote.



Substituieren wir hier an Stelle der Variablen x nacheinander die Grenzwerte a und b und bilden die Differenz, so erhalten wir

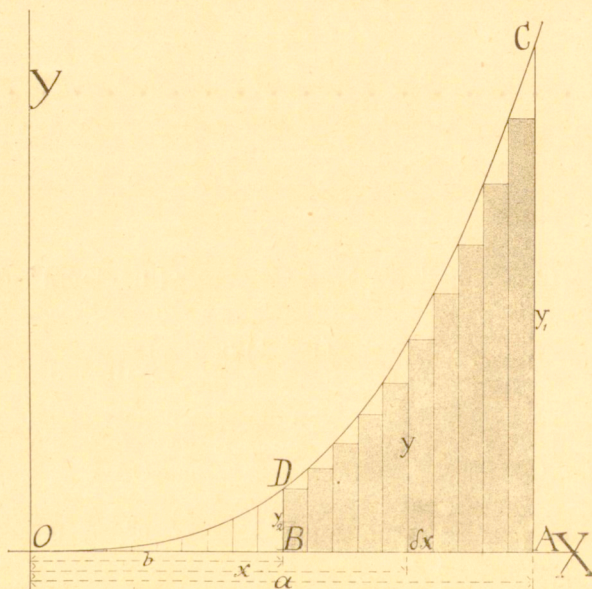
$$BACD = \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{3} b^3.$$

Wir können also fernerhin kurzerhand schreiben:

$$\lim \sum_{x=b}^{x=a} y \cdot \delta x = \lim \sum_{x=b}^{x=a} x^2 \cdot \delta x = \frac{x^3}{3} \Big|_b^a = \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3} ay_1 - \frac{1}{3} by_2.$$

Wir können die Summe $\sum_0^a x^2 \cdot \delta x$ auch als Rauminhalt einer Pyramide, deren Grundfläche x^2 und deren Höhe x ist, deuten. Der Inhalt dieser Pyramide ist dann $V = \lim \sum_0^a x^2 \cdot \delta x = \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} a^2 \cdot a$. (Vgl. Seite 62-65!)

Fig. 63.



4) $y = x^3$ sei die Gleichung einer anderen oberen Grenzkurve (kubische Parabel); diese berührt die X-Achse in O und hat hier einen sogenannten Wendepunkt. Die X-Achse ist Wendetangente; sie hat 3 konsecutive Punkte mit der Kurve gemein.

$$\begin{aligned} \text{Fläche } OAC \text{ (mit Staffellinie } OC) &= \sum_{x=0}^{x=a} y \cdot \delta x = \sum_0^a x^3 \cdot \delta x \\ &= (\delta x)^3 \cdot \delta x + (2\delta x)^3 \cdot \delta x + (3\delta x)^3 \cdot \delta x + \dots + [(n-1)\delta x]^3 \cdot \delta x \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n-1)^3) \cdot (\delta x)^4 \quad *) \\ &= \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{4} (\delta x)^4 = \frac{(1 - \frac{1}{n})^2}{4} (n \cdot \delta x)^4 = \frac{(1 - \frac{1}{n})^2}{4} \cdot a^4 \end{aligned}$$

*) Siehe Seite 87, Fußnote!

Der Inhalt der von der Kurve OC begrenzten Fläche

$$OAC = \lim \sum_0^a y \delta x = \lim \sum_0^a x^2 \cdot \delta x = \lim_{\text{für } n = \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}{4} \cdot a^4 = \frac{a^4}{4}$$

für ein unendlich kleines δx

Analog Fläche OBD = $\frac{b^4}{4}$. Fläche BACD = $\frac{a^4}{4} - \frac{b^4}{4}$

Der Inhalt der Fläche bis zu einer beliebigen Abszisse x ist

$$\lim \sum_0^x y \delta x = \lim \sum_0^x x^3 \cdot \delta x = \frac{x^4}{4}$$

Substituieren wir auch hier für x nacheinander die Grenzwerte a und b und bilden die Differenz, so ergibt sich $\frac{a^4}{4} - \frac{b^4}{4}$

Folglich können wir fortan kurz schreiben:

$$\lim \sum_{x=b}^{x=a} y \delta x = \lim \sum_{x=b}^{x=a} x^3 \cdot \delta x = \frac{x^4}{4} \Big|_b^a = \frac{a^4}{4} - \frac{b^4}{4} = \frac{ay_1}{4} - \frac{by_2}{4}$$

5) In derselben Weise wollen wir zum Schlusse noch die

Summe $\lim \sum_{x=b}^{x=a} x^4 \cdot \delta x$ behandeln.

$y = x^4$. . . Grenzkurve; sie berührt die X-Achse in O und diese hat mit der Kurve vier konsekutive Punkte gemeinsam. Die Y-Achse ist Symmetrie-Achse der Kurve. $n \cdot \delta x = a$.

$$\sum_{x=0}^{x=a} y \cdot \delta x = \sum_0^a x^4 \cdot \delta x = (\delta x)^4 \cdot \delta x + (2\delta x)^4 \cdot \delta x + (3\delta x)^4 \cdot \delta x + \dots + ((n-1)\delta x)^4 \cdot \delta x = (1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + (n-1)^4) (\delta x)^5$$

*) $1^4 =$	$1^4 =$				
$2^4 =$	$(1+1)^4 =$	$1^4 + 4 \cdot 1^3$	$+ 6 \cdot 1^2$	$+ 4 \cdot 1$	$+ 1$
$3^4 =$	$(2+1)^4 =$	$2^4 + 4 \cdot 2^3$	$+ 6 \cdot 2^2$	$+ 4 \cdot 2$	$+ 1$
$4^4 =$	$(3+1)^4 =$	$3^4 + 4 \cdot 3^3$	$+ 6 \cdot 3^2$	$+ 4 \cdot 3$	$+ 1$
$5^4 =$	$(4+1)^4 =$	$4^4 + 4 \cdot 4^3$	$+ 6 \cdot 4^2$	$+ 4 \cdot 4$	$+ 1$
.....					

$$n^4 = (n-1+1)^4 = (n-1)^4 + 4 \cdot (n-1)^3 + 6 \cdot (n-1)^2 + 4 \cdot (n-1) + 1$$

Durch beiderseitige Addition ergibt sich:

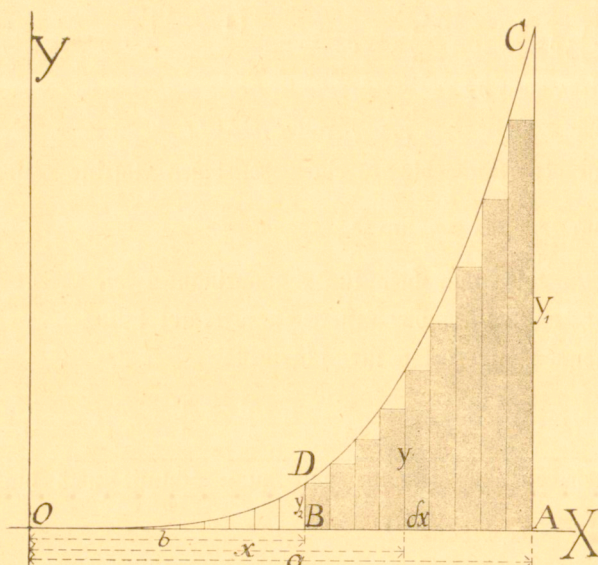
$$n^4 = 4 \sum_1^n (n-1)^3 + 6 \sum_1^n (n-1)^2 + 4 \sum_1^n (n-1) + n;$$

folglich $4 \sum_1^n (n-1)^3 = n^4 - 6 \sum_1^n (n-1)^2 - 4 \sum_1^n (n-1) - n$

oder $4 \sum_1^n (n-1)^3 = n^4 - 6 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - 4 \frac{n(n-1)}{2} - n$.

Hieraus $\sum_1^n (n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$.

Fig. 64



Wenn wir mit dieser Reihe analog verfahren wie in den vorhergehenden Fällen, so erhalten wir

$$\sum_{x=0}^{x=a} x^4 \cdot \delta x = \frac{1}{30} n(n-1) \cdot [6n^3 - 9n^2 + n + 1] \cdot (\delta x)^5$$

Und wenn wir nun wieder δx unendlich

klein und damit n unendlich groß werden lassen, so erhalten wir

$$\lim \sum_{x=0}^{x=a} x^4 \delta x = \lim \frac{1}{30} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left[6 - \frac{9}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right] \cdot (n\delta x)^5 = \frac{a^5}{5}.$$

(für ein unendlich kleines δx)

(für $n = \infty$)

Wir erhalten also in der bereits bekannten Weise geschrieben:

$$\lim \sum_0^a y \cdot \delta x = \lim \sum_0^a x^4 \cdot \delta x = \frac{a^5}{5}; \quad \lim \sum_0^b y \cdot \delta x = \lim \sum_0^b x^4 \cdot \delta x = \frac{b^5}{5}$$

$$\lim \sum_0^a y \cdot \delta x - \lim \sum_0^b y \cdot \delta x = \frac{a^5}{5} - \frac{b^5}{5}.$$

Allgemein ist $\lim \sum_0^x y \cdot \delta x = \lim \sum_0^x x^4 \cdot \delta x = \frac{x^5}{5}.$

Setzen wir in dieses allgemeine Resultat für die Variable x nacheinander die Grenzwerte a und b und subtrahieren von dem ersten Wert der Summe den zweiten, so erhalten wir

$$\lim \sum_{x=b}^{x=a} y \cdot \delta x = \lim \sum_{x=b}^{x=a} x^4 \cdot \delta x = \frac{x^5}{5} \Big|_b^a = \frac{a^5}{5} - \frac{b^5}{5} \text{ u. f. w.}$$

Diese Entwicklungen können in aufsteigender Weise beliebig weit fortgesetzt werden. Für die Aufgaben, die wir hier lösen wollen, reichen indes diese wenigen Fälle aus.

Führen wir nun für das unendlich klein werdende δx und für das Summenzeichen Σ die in der Integralrechnung gebräuchlichen Zeichen dx bzw. \int ein, so haben wir nach den vorhergehenden Entwicklungen bereits die folgenden Integrationsgleichungen gewonnen:

$$\begin{array}{l}
 1) \int_0^x dx = x \quad \text{bzw.} \quad \int_{x=b}^{x:a} dx = x \Big|_b^a = a - b \\
 2) \int_0^x x \, dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{''} \quad \int_{x=b}^{x:a} x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \Big|_b^a = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \\
 3) \int_0^x x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} \quad \text{''} \quad \int_{x=b}^{x:a} x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} \Big|_b^a = \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} \\
 4) \int_0^x x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{4} \quad \text{''} \quad \int_{x=b}^{x:a} x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{4} \Big|_b^a = \frac{a^4}{4} - \frac{b^4}{4} \\
 5) \int_0^x x^4 \cdot dx = \frac{x^5}{5} \quad \text{''} \quad \int_{x=b}^{x:a} x^4 \cdot dx = \frac{x^5}{5} \Big|_b^a = \frac{a^5}{5} - \frac{b^5}{5}
 \end{array}$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem die Entwicklung weiter schreitet, ist aus diesen wenigen Fällen schon erkennbar. Wir können nach diesen Gleichungen induktionsweise die allgemeine Form bilden:

I.

$$\int_0^x x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_{x=b}^{x=a} x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_b^a = \frac{a^{n+1}}{n+1} - \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Es sei beiläufig bemerkt, daß diese Integrationsgleichung nicht nur für ganzzahlige Exponenten n sondern auch für gebrochene und auch für negative ganze und gebrochene Exponenten n besteht, mit einziger Ausnahme des Falles $n = -1$. Doch können wir hier nicht weiter darauf eingehen. Wir werden aber gelegentlich der Lösung einzelner Aufgaben indirekt bestätigen, daß diese Angabe richtig ist.

Wir bezeichnen den Ausdruck oder die Summe

$$\int_b^a f(x) \cdot dx = F(x) \Big|_b^a = F(a) - F(b)$$

als ein **bestimmtes Integral**, (Dies: „Integral von $f(x)dx$, genommen von $x = b$ bis $x = a$ “), $f(x) \cdot dx$ als das Differential dieses Integrals oder dieser Summe, dx als das Differential der Variablen x , endlich $F(x) \Big|_b^a = F(a) - F(b)$ als den Wert dieses Integrals zwischen den Grenzen b und a . Dabei durchläuft die Variable x alle Werte von b bis a .

Ein bestimmtes Integral ist eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen (Differentialen).

Zu dem Integral $\int_0^x f(x) \cdot dx$ ist noch zu bemerken, daß die obere Grenze x die äußerste Abszisse bezeichnet, bis zu der wir das Integral führen wollen, während das x in der Funktion $f(x)$ eine Variable ist, die alle Werte von 0 bis zu jenem äußersten Grenzwert x durchläuft, in dem Sinne, den wir bei den bisherigen Entwicklungen festgestellt haben.

Zur Lösung der folgenden Aufgaben brauchen wir noch einige Sätze, die hier Erwähnung finden mögen.

Aus den bisherigen Entwicklungen und aus der eben ausgesprochenen Definition des bestimmten Integrals erhellt ohne weiteres:

1) Ein konstanter Faktor (c), der unter dem Integralzeichen steht, kann vor dasselbe gesetzt werden.

$$\begin{aligned} \int_b^a c \cdot f(x) \, dx &= c \cdot f(b) \, dx + c \cdot f(b + dx) \cdot dx + c \cdot f(b + 2dx) \cdot dx + \dots \\ &= c (f(b) \cdot dx + f(b + dx) \cdot dx + f(b + 2dx) \cdot dx + \dots) \\ &= c \int_b^a f(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

bis zu $x = a$

2) Das Integral aus einer algebraischen Summe von Funktionen ist gleich der algebraischen Summe der Integrale aus den einzelnen Funktionen.

Sind $f_1, f_2, f_3 \dots$ verschiedene Funktionen der Variablen x , so ist

$$\begin{aligned} \int_b^a (f_1 + f_2 + f_3 + \dots) \cdot dx &= \int_b^a (f_1 \cdot dx + f_2 \cdot dx + f_3 \cdot dx + \dots) \\ &= \int_b^a f_1 \cdot dx + \int_b^a f_2 \cdot dx + \int_b^a f_3 \cdot dx + \dots \end{aligned}$$

$$\text{z. B. } \int_0^x (a + bx - cx^2) \cdot dx = \int_0^x a \cdot dx + \int_0^x bx \cdot dx - \int_0^x cx^2 \cdot dx$$

$$= ax + b \cdot \frac{x^2}{2} - c \cdot \frac{x^3}{3}$$

3) Ein Satz, der sich auf die Grenzen bezieht:

$$\int_0^a f(x) \cdot dx - \int_0^b f(x) \cdot dx = \int_b^a f(x) \cdot dx,$$

der nach den vorhergehenden Figuren ohne weiteres klar ist und der bei jenen Entwicklungen wiederholt dargelegt wurde.

Aufgaben.

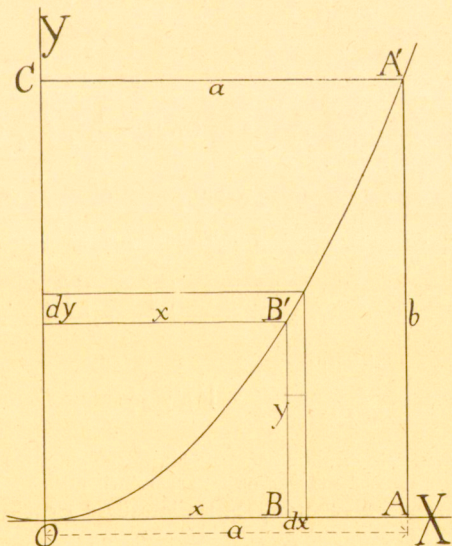
Nachdem wir in diesem Abschnitt (IV) den Wert des bestimmten

Integral $\int_b^a x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_b^a$ in endlichen Größen ausgedrückt

gefunden haben, so besitzen wir nun in dieser Integrationsgleichung eine Art Mechanismus, der uns in den Stand setzt eine Reihe von Aufgaben in raschster Weise zu lösen; Aufgaben, die sonst, wie wir in den Abschnitten II und III erfahren haben, etwas umständliche und mühsame Einzelbetrachtungen erfordern. Wir wollen nun zeigen, wie wir diese und andere Aufgaben mit Hilfe unseres Integrals fortan kurzerhand erledigen können; natürlich nur Aufgaben, deren Lösung sich unmittelbar oder nach einer geeigneten Substitution in die Form dieses Integrals bringen läßt.

1. Aufg.

Fig. 65.



Es soll die Fläche zwischen den Koordinaten eines Parabelpunktes A' und dem zwischenliegenden Stück der Parabel berechnet werden. Die Gleichung der Parabel sei:

$$py = x^2.$$

$$OAA' = \int_{x=0}^{x=a} y dx = \int_0^a \frac{1}{p} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{p} \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{p} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{p}.$$

$$\text{Für } x = a \text{ wird } b = \frac{a^2}{p},$$

$$\text{also } OAA' = \frac{1}{3} ab$$

$$\text{und folglich } \underline{\underline{OCA' = \frac{2}{3} ab}}$$

$$\text{Ober: } OCA' = \int_{y=0}^{y=b} x \cdot dy = \int_0^b \sqrt{py} \cdot dy = \sqrt{p} \int_0^b y^{\frac{1}{2}} \cdot dy$$

Dies gibt, wenn wir annehmen, daß die Gleichung (1) auch für gebrochene Exponenten n Geltung hat, für

$$OCA' = \sqrt{p} \cdot \left. \frac{y^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} \right|_0^b = \frac{2}{3} \sqrt{p} \cdot y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^b = \frac{2}{3} y \sqrt{py} \Big|_0^b = \frac{2}{3} b \sqrt{p} \cdot b = \frac{2}{3} ab.$$

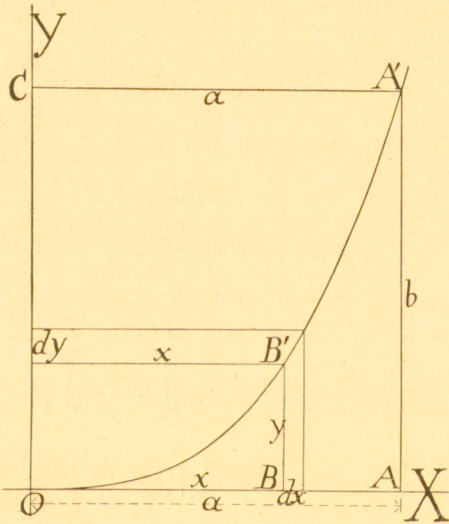
Damit haben wir indirekt gezeigt, daß die bei (1) angefügte Bemerkung für diesen Fall ($n = \frac{1}{2}$) wenigstens, richtig ist.

Wollen wir die Fläche $BA A'B'$, so ergibt sich diese augenscheinlich als die Differenz

$$BAA'B' = OAA' - OBB' = \int_{x=0}^{x=a} y dx - \int_0^{x \cdot x} y dx = \frac{1}{3} ab - \frac{1}{3} xy.$$

2. Aufg. Es soll dieselbe Aufgabe für die Annahme einer kubischen Parabel gelöst werden.

Fig. 66.



$p^3 \cdot y = x^3$. Gleichung einer kubischen Parabel.

Es ist wieder $OAA' = \int_0^a y dx$

$$= \int_0^a \frac{x^3}{p^3} dx = \frac{1}{p^3} \int_0^a x^3 dx$$

$$= \frac{1}{p^3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^a$$

$$\text{Also } OAA' = \frac{1}{p^3} \frac{a^4}{4} = \frac{1}{4} ab$$

$$\text{Folglich } OCA' = \frac{3}{4} ab.$$

Anderseits ergibt sich

$$OCA' = \int_0^b x dy = \int_0^b \sqrt[3]{p^2 y} \cdot dy$$

$$= \sqrt[3]{p^2} \int_0^b y^{\frac{1}{3}} dy = \sqrt[3]{p^2} \cdot \left. \frac{y^{\frac{1}{3} + 1}}{\frac{1}{3} + 1} \right|_0^b = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{p^2 y} \cdot y \Big|_0^b = \frac{3}{4} ab.$$

Auch hier haben wir wieder die Bestätigung, daß die Gleichung (1), für diesen 2. Fall ($n = \frac{1}{3}$) wenigstens, auch für gebrochene Exponenten gilt.

Das können wir gleicherweise bei beliebig vielen derartigen Beispielen erfahren.

3. Aufg. Es soll dieselbe Aufgabe hier noch in allgemeinsten Form behandelt werden.

$y = x^n$ sei die Gleichung der Grenzkurve

$$\text{Fläche } OAA' = \int_0^x y dx = \int_0^x x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot xy$$

$$\text{Fläche } OCA' = xy - \frac{1}{n+1} xy = \frac{n}{n+1} xy.$$

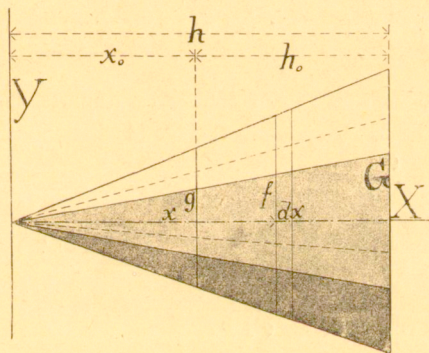
Andererseits:

$$OCA' = \int_0^y x \cdot dy = \int_0^y V \bar{y}^n \cdot dy = \int_0^y y^{\frac{1}{n}} \cdot dy = \frac{y^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{n}{n+1} xy$$

Folglich hat die Gleichung (1) Seite 89 auch für gebrochene Exponenten Geltung.

4. Aufg. Noch einmal der Rauminhalt der Pyramide und des Pyramidenstumpfs. Es bezeichne G die Grundfläche, f einen dazu parallelen Schnitt in dem Abstand x von der Spitze, h die Höhe, dann ist

Fig 67.



$$V_p = \int_{x=0}^{x=h} f \cdot dx$$

Nach einem bekannten Satz verhält sich

$$f : G = x^2 : h^2, \text{ also}$$

$$f = G \cdot \frac{x^2}{h^2}$$

$$\text{Also } V = \int_0^h G \cdot \frac{x^2}{h^2} \cdot dx$$

$$= \frac{G}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{G}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h$$

$$V = \frac{G}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} Gh.$$

Der Rauminhalt des Pyramidenstumpfs von der Höhe $h - x_0 = h_0$ ist

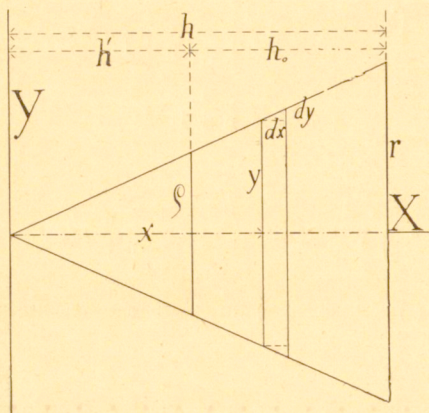
$$V_s = \int_{x_0}^h f dx = \frac{G}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x_0}^h = \frac{1}{3} \cdot \frac{G}{h^2} (h^3 - x_0^3) = \frac{1}{3} G \frac{(h-x_0)(h^2 + hx_0 + x_0^2)}{h^2}$$

$$= \frac{1}{3} Gh_0 \left(1 + \frac{x_0}{h} + \frac{x_0^2}{h^2} \right) = \frac{1}{3} Gh_0 \left(1 + \frac{V_g}{V_G} + \frac{g}{G} \right)$$

$$\underline{\underline{V_s = \frac{1}{3} (G + \sqrt{Gg} + g) h}}$$

5. Aufg. Der Rauminhalt des senkrechten Kreiskegels und des Kegelstumpfs soll berechnet werden.

Fig. 68.



$$\text{Es ist } V_K = \int_0^h \pi y^2 dx.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt:

$$dy : dx = r : h, \text{ also } dx = \frac{h \cdot dy}{r}$$

Nach dieser Substitution erhalten wir

$$\begin{aligned} V_K &= \frac{\pi h}{r} \int_{y=0}^{y=r} y^2 dy = \frac{\pi h}{r} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^r \\ &= \frac{\pi h}{r} \cdot \frac{r^3}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi r^2 h.}} \end{aligned}$$

Oder wir substituieren aus der Gleichung $y : r = x : h$

$$y = \frac{r \cdot x}{h} \text{ und erhalten}$$

$$V_K = \int_{x=0}^{x=h} \pi \frac{r^2 x^2}{h^2} \cdot dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi r^2 h.}}$$

Für den Kegelstumpf ergibt sich durch Substitution der entsprechenden Grenzen:

$$V_{ks} = \frac{\pi h}{r} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_e^r = \frac{\pi h}{r} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{e^3}{3} \right)$$

$$\text{Und setzen wir hier aus } h : h_0 = r : (r - e), \quad h = \frac{h_0 r}{r - e'}$$

so erhalten wir

$$V_{ks} = \underline{\underline{\frac{\pi}{3} (r^2 + r e + e^2) h_0.}}$$

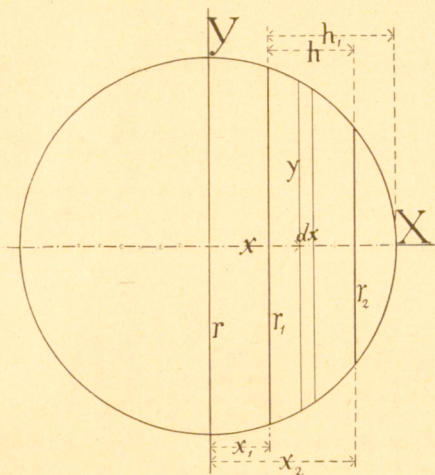
6. Aufg. Ebenso noch einmal der Rauminhalt der Kugel und ihrer Teile. Diesmal denken wir uns die Kugel durch parallele Ebenen senkrecht zur X-Achse in unendlich dünne Lamellen zerschnitten. Der Rauminhalt einer solchen Lamelle ist

$$\pi y^2 \cdot dx$$

und der Rauminhalt der ganzen Kugel:

$$V_o = 2 \cdot \int_{x=0}^{x=r} \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx$$

Fig. 69.



$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \left(\int_0^r r^2 dx - \int_0^r x^2 dx \right) \\
 &= 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r \\
 V_o &= 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) \\
 &= \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi r^3}}.
 \end{aligned}$$

Das selbe Resultat erhalten wir, wenn wir das Integral $\int \pi y^2 \cdot dx$ auf die Grenzen $-r$ bis $+r$ erstrecken.

Der Inhalt des Kugelsegments ist:

$$V_s = \pi \int_{x_1}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x_1}^r = \pi \left(\frac{2}{3} r^3 - r^2 x_1 + \frac{x_1^3}{3} \right)$$

und da $x_1 = r - h_1$, so ist

$$V_s = \underline{\underline{\frac{\pi}{3} (3r^3 - h_1^3) = \frac{\pi}{6} (3r_1^3 + h_1^3) h_1}} \quad (\text{Vergl. Seite 78})$$

und der Rauminhalt einer Kugelschicht:

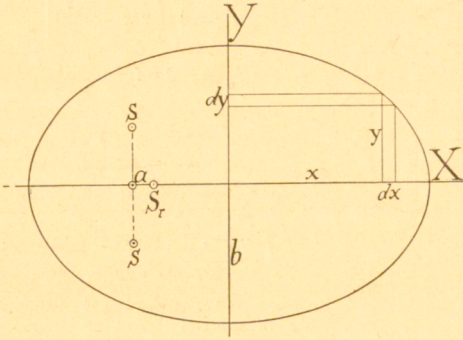
$$\begin{aligned}
 V_z &= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \pi \left(r^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} - r^2 x_1 + \frac{x_1^3}{3} \right) \\
 &= \pi \left(r^2 (x_2 - x_1) - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} \right) = \pi \left(r^2 h - \frac{x_1^3 + x_1 x_2 + x_2^3}{3} h \right) \\
 &= \frac{\pi}{3} (3r^2 - (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)) \cdot h
 \end{aligned}$$

Diese Formel läßt sich folgendermaßen in die Formel auf Seite 79 überführen:

$$\begin{aligned}
 V_z &= \frac{\pi}{6} (6r^2 - 2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)) h \\
 &= \frac{\pi}{6} (6r^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) h \\
 &= \frac{\pi}{6} (3(r^2 - x_1^2) + 3(r^2 - x_2^2) + (x_1 - x_2)^2) h \\
 &= \underline{\underline{\frac{\pi}{6} (3(r_1^2 + r_2^2) + h^2) \cdot h}}.
 \end{aligned}$$

7. Aufg. Es soll der Rauminhalt eines Rotations-Ellipsoids bzw. eines Sphäroids bestimmt werden.

Fig 70.



Die Ellipse mit den Halbachsen a u. b ($a > b$) entsteht aus dem Kreis mit dem Radius a , wenn wir alle Ordinaten (y') dieses Kreises im Verhältnis $b : a$ verkleinern.

(Vergl. Seite 38, Fig. 33).

Es ist $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$ die Gleichung dieses Kreises und $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ die Gleichung der Ellipse.

Oder die Ellipse entsteht aus dem Kreis mit dem Radius b , wenn wir alle Abszissen (x') dieses

Kreises im Verhältnis $b : a$ vergrößern. Es ist $x' = \sqrt{b^2 - y^2}$ die Gleichung dieses Kreises und $x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ die Gleichung der Ellipse.

Das Rotationsellipsoid entsteht durch Umdrehung der Ellipse um ihre große Achse (2a). Wir denken uns diesen Körper durch parallele Ebenen, welche normal zur X-Achse stehen, in unendlich dünne Lamellen zerschnitten, dann ist sein Rauminhalt

$$\begin{aligned} V_o &= 2 \int_{x=0}^{x=a} \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi a b^2}} \end{aligned}$$

Das Sphäroid entsteht durch Rotation der Ellipse um die kleine Achse (2b). Wir denken es in unendlich dünne Lamellen, die normal zur Y-Achse stehen, geteilt, dann ist sein Rauminhalt

$$\begin{aligned} V_s &= 2 \int_{y=0}^{y=b} \pi x^2 dy = 2\pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) dy = 2\pi \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b \\ &= 2\pi \frac{a^2}{b^2} \left(b^3 - \frac{b^3}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi a^2 b}}. \quad (\text{Vergl. Seite 81.}) \end{aligned}$$

8. Aufg. Es soll der Rauminhalt des bienenkorbfförmigen Körpers bestimmt werden, der entsteht, wenn eine Parabel 2. Grades um ihre Symmetrie-Achse rotiert und der von einer Normalebene zu dieser Achse begrenzt wird (Rotationsparaboloid).

$y^2 = px \dots \dots$ Gleichung der Parabel. (Fig. 71.)

Wir denken uns diesen Körper in Lamellen, die auf der X-Achse senkrecht stehen, zerschnitten, dann ist das Volumen des Rotationskörpers von der Höhe a

$$V = \int_{x=0}^{x=a} \pi y^2 dx = \pi \int_0^a px dx = \pi p \int_0^a x dx = \pi p \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \pi p \cdot \frac{a^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \pi a b^2}}.$$

Der Rauminhalt des Rotationsparaboloids ist also genau gleich der Hälfte des Rauminhalts eines senkrechten Kreiszylinders von gleicher Grundfläche und Höhe.

9. Aufg. Berechne den Rauminhalt des Körpers, der von der Fläche, die durch Rotation der Parabel 2ten Grades um ihre Scheiteltangente entsteht, und durch eine Normalebene zu dieser Achse begrenzt wird.

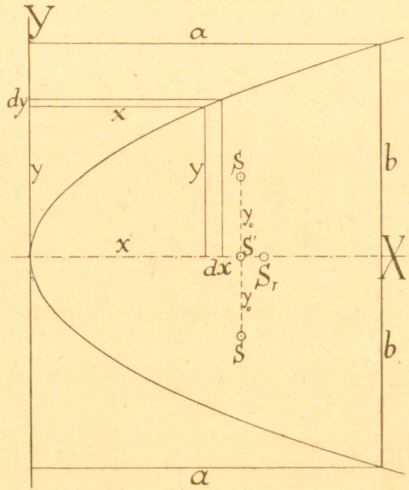
Fig. 71.

$$V = \int_0^b \pi x^2 \cdot dy; \quad x = \frac{y^2}{p}$$

$$V = \pi \int_0^b \frac{y^4}{p^2} dy = \frac{\pi}{p^2} \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^b \\ = \frac{1}{5} \pi \cdot \frac{b^5}{p^2} = \frac{1}{5} \pi a^2 b.$$

Wollen wir den unteren Teil auch noch dazu nehmen, so können wir dieses Volumen V doppelt nehmen oder wir können das Integral auf die Grenzen von $y = -b$ bis $y = +b$ ausdehnen. In jedem Fall erhalten wir

$$V' = \frac{2}{5} \pi \frac{b^5}{p^2} = \frac{2}{5} \pi a^2 b.$$



10. Aufg. Bestimme den Rauminhalt des Körpers, der von der Fläche, die durch Rotation der Parabel 2ten Grades um eine Gerade entsteht, die parallel zur Scheiteltangente ist und von dieser den Abstand e hat, und außerdem von zwei Ebenen begrenzt wird, die vom Äquator oder Kreis die Entfernung h haben. (Vergl. Fig. 71).

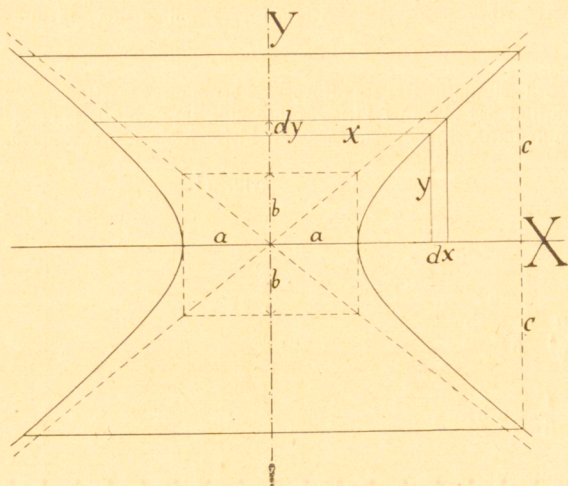
$$V' = \int_{-h}^{+h} \pi (e + x)^2 \cdot dy; \quad x = \frac{y^2}{p}$$

$$V = \pi \int_{-h}^{+h} \left(e + \frac{y^2}{p} \right)^2 dy = \pi \int_{-h}^{+h} \left(e^2 + 2e \frac{y^2}{p} + \frac{y^4}{p^2} \right) dy = \pi \left(e^2 y + \frac{2e y^3}{3p} + \frac{y^5}{5p^2} \right) \Big|_{-h}^{+h}$$

$$V = 2 \cdot \pi \left(e^2 h + \frac{2}{3} \frac{e h^3}{p} + \frac{h^5}{5p^2} \right) = \frac{2\pi h}{p^2} \left(e^2 p^2 + \frac{2}{3} e h^2 p + \frac{1}{5} h^4 \right).$$

11. Aufg. Bestimme den Rauminhalt des Körpers, der von einem einschaligen Rotationshyperboloid und von zwei vom Kreis gleichweit entfernten, zur Rotationsachse senkrechten Ebenen begrenzt ist.

Fig. 72.



Die Gleichung des Achsenschnitts, einer Hyperbel, ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$V = \int_{y=-c}^{y=+c} \pi x^2 \cdot dy$$

Aus der Hyperbelgleichung folgt

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 + y^2)$$

Dies unter dem Integral substituiert gibt

$$V = \pi \int_{-c}^{+c} \frac{a^2}{b^2} (b^2 + y^2) dy = \pi \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-c}^{+c} = \underline{\underline{2\pi \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 + \frac{c^2}{3} \right) c.}}$$

12. Aufg. Bestimme ebenso den Inhalt des Rotationskörpers eines zweischaligen Hyperboloids, der durch eine zur X-Achse senkrechte Ebene begrenzt wird, die vom Mittelpunkt den Abstand c hat, ($c > a$).

Der Rauminhalt dieses napf- oder schalenförmigen Körpers ist

$$V = \int_a^c \pi y^2 dx = \pi \int_a^c \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) \Big|_a^c$$

$$= \pi \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{c^3}{3} - a^2 c - \frac{a^3}{3} + a^3 \right) = \underline{\underline{\pi \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{c^3}{3} - a^2 c + \frac{2}{3} a^3 \right).}}$$

13. Aufg. Es soll der Rauminhalt des Rotationskörpers bestimmt werden, der von der Fläche, die durch Drehung der semikubischen Parabel um ihre Symmetrieachse entsteht, und durch eine Lotebene zu dieser Achse begrenzt wird.

Die Gleichung dieser Parabel lautet: $ay^2 = x^3$.

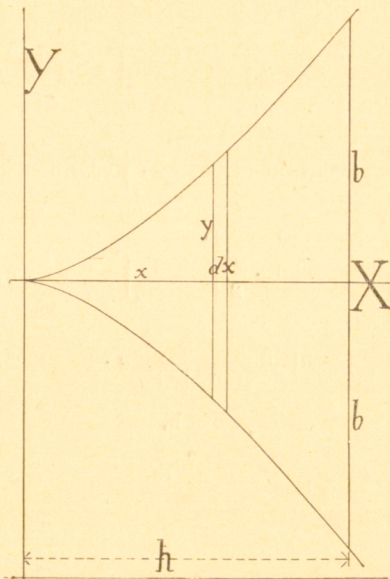
Sie besteht aus zwei zur X-Achse symmetrischen Ästen, die im Anfangspunkt des Koordinatensystems die X-Achse berühren und hier eine Spitze bilden. Hier fallen die 3 Schnittpunkte der Kurve mit der X-Achse zusammen. Jede Tangente an den einen Ast der Kurve schneidet den andern Ast noch in einem Punkt. Gleitet die Tangente an der Kurve fort, so daß sie sich der X-Achse nähert, dann rückt dieser dritte Punkt, den sie noch mit der Kurve gemein hat,

Fig. 73.

gegen die Spitze, und sobald sie mit der X-Achse zusammenfällt, rückt dieser Punkt in die Spitze hinein. Eine derartige Spitze entsteht immer dadurch, daß sich eine Schleife einer Kurve zusammenzieht. Die Gleichung $ay^2 = x^2(x+b)$ stellt eine Kurve dritten Grades dar, die symmetrisch zur X-Achse verläuft u. im Koordinatenursprung einen Doppelpunkt mit darauffolgender Schleife besitzt. Ziehen wir diese Schleife immer mehr zusammen, indem wir die für die einzelne Kurve konstante Strecke b kleiner und kleiner werden lassen (b ist die Länge der Schleife in der X-Achse gemessen), so erscheint die Spitze, sobald $b = 0$ wird, und die Gleichung der Kurve lautet jetzt:

$$ay^2 = x^3.$$

Das Volumen des Kegels mit dieser krummen Mantellinie ist



$$V = \int_0^h \pi y^2 dx = \frac{\pi}{a} \int_0^h x^3 dx = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^h = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{h^4}{a} = \frac{1}{4} \pi b^2 h.$$

Wir können den Rauminhalt dieses Kegels mit krummer Mantellinie auch in der Weise berechnen, daß wir den Rotationskörper in konaxiale Zylinderlamellen (um die X-Achse) zerlegt denken und diese summieren. Der Rauminhalt einer solchen Zylinderlamelle von der Dicke dy ist $2\pi y \cdot dy \cdot (h-x)$, also das Volumen des Kegels:

$$V = 2\pi \int_0^b y(h-x) dy = 2\pi \int_0^b y(h - \sqrt[3]{ay^2}) dy = 2\pi h \int_0^b y dy - 2\pi \sqrt[3]{a} \int_0^b y^{\frac{5}{3}} dy$$

Nehmen wir wieder an, daß unsere Integrationsgleichung (I) auch für gebrochene Exponenten besteht, so wird

$$\begin{aligned} V &= 2\pi h \cdot \frac{y^2}{2} - 2\pi \sqrt[3]{a} \frac{y^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} \Big|_0^b = \pi y^2 h - \frac{3}{4} \pi \sqrt[3]{ay^{\frac{8}{3}}} \Big|_0^b \\ &= \pi b^2 h - \frac{3}{4} \pi b^2 h = \frac{1}{4} \pi b^2 h. \end{aligned}$$

Damit haben wir wieder in einem Spezialfall bestätigt, daß die Gleichung (I) auch für gebrochene Exponenten gilt. Daß ihr für gebrochene Exponenten von der Form $\frac{1}{n}$ allgemeine Geltung zukommt, haben wir bereits auf Seite 93 gezeigt. Nun haben wir auch ein Beispiel für eine allgemeinere Form des Exponenten.

Hat die Gleichung des Meridians eines solchen Rotationskörpers die allgemeinere Form $y^2 = x^n$, so ist $b^2 = h^n$, und sein Volumen

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h x^n dx = \pi \frac{h^{n+1}}{n+1} = \frac{\pi}{n+1} b^2 h.$$

$$\text{Andererseits ist } V = 2\pi \int_0^b y dy (h-x) = 2\pi h \int_0^b y dy - 2\pi \int_0^b xy dy$$

$$= 2\pi h \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^b - 2\pi \int_0^b y^{\frac{2}{n}+1} \cdot dy = \pi b^2 h - 2\pi \frac{y^{\frac{2}{n}+2}}{\frac{2}{n}+2} \Big|_0^b$$

$$= \pi b^2 h - \frac{n}{n+1} \cdot \pi \cdot b^{2+\frac{2}{n}} = \pi b^2 h - \frac{n}{n+1} \pi b^2 h$$

$$= \frac{\pi}{n+1} b^2 \cdot h.$$

Damit haben wir dargelegt, daß die Integrationsgleichung (I) auch für gebrochene Exponenten von der Form $\frac{n+2}{n}$ gilt und somit können wir ihre allgemeine Geltung als erwiesen betrachten.

14. Aufg. Berechne den Rauminhalt der Rotationskörper von andern Parabeln ($y = ax^n$)! Ebenso den Rauminhalt des spindelförmigen Teils, der von der Umdrehungsfläche der Kurve $ay^2 = x^2(x+b)$ um die X-Achse begrenzt wird.

15. Aufg. Noch einmal die Berechnung des elektrischen Potentials.

Wir haben diese in eingehender Weise auf Seite 40–42 ausgeführt und wollen hier nur die Integrationsgleichung (I) kurzerhand darauf anwenden. Wenn 1 LE aus unendlicher Ferne bis auf den Abstand x an eine gleichartige Ladung von $E(\text{LE})$ heranbewegt wird, so ist die zu leistende Arbeit, die nun in jener LE als potentielle Energie oder „Spannung“ aufgespeichert wird,

$$P = - \int_{\infty}^x \frac{E \cdot 1}{x^2} \cdot dx \quad (\text{cm} = \text{Dyn}) = - E \int_{\infty}^x x^{-2} dx \quad (\text{cm} = \text{Dyn})$$

$$= - E \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_{\infty}^x = \frac{E}{x} \quad (\text{Erg.})$$

Das negative Vorzeichen rührt daher, daß die dx bei dieser Bewegung der positiven Richtung entgegengesetzt sind.

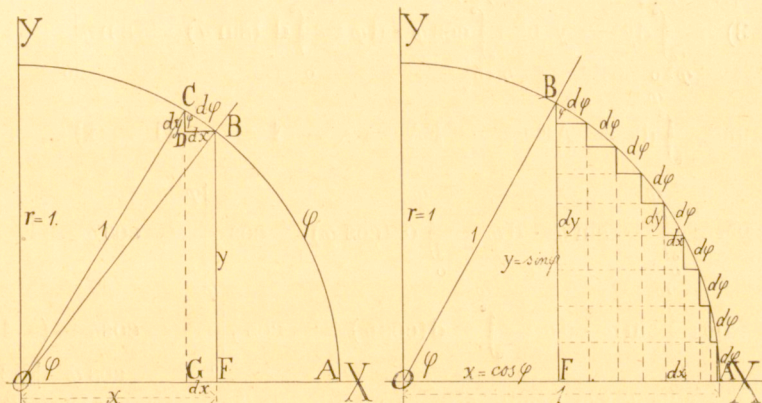
Dieses Resultat, das mit dem auf Seite 42 durch eingehende Betrachtung und Rechnung gefundenen übereinstimmt, bestätigt also, daß die Integrationsgleichung I auch für negative Exponenten gilt.

Gerade dieser Fall begegnet uns in der Physik am häufigsten; denn alle Fernwirkungen sind dem Quadrat der Entfernung indirekt proportional.

Die Integrale $\int_0^\varphi \cos \varphi \cdot d\varphi$ und $\int_0^\varphi \sin \varphi \cdot d\varphi$.

Bei verschiedenen ähnlichen Aufgaben, wie wir sie im vorhergehenden Abschnitt gelöst haben, bei denen der Kreis und damit die Zahl π eine Rolle spielt, stoßen wir auf Integrale von der hier angegebenen Form. Wir wollen auch diese Integrale auswerten suchen. Die Fig. 74 wird uns dazu führen. Wir werden die Werte dieser Integrale unmittelbar aus ihr ablesen. Es soll

Fig. 74.



hier der Winkel $\text{AOB} = \varphi$ im Bogenmaß gemessen werden. Wenn also OA gleich der Längeneinheit ist, dann mißt der Kreisbogen $\text{AB} = \varphi$ den Winkel AOB im Bogenmaß.

Es sei ferner $\text{BF} \perp \text{OA}$, dann stellt die Strecke FB direkt den \sin und die Strecke OF den \cos des Winkels φ dar.

$$\sin \varphi = \frac{\text{FB}}{1} = \text{FB} = y; \quad \cos x = \frac{\text{OF}}{1} = \text{OF} = x.$$

Der Winkel φ soll nun um $d\varphi$ wachsen, dann ist bei unendlich kleinem $d\varphi$ und nur unter dieser Voraussetzung

$$\angle \text{BCD} = \angle \text{BOF} = \varphi.$$

Aus dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck BDC ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\text{DC} = d\varphi \cdot \cos \varphi \text{ und } \text{DB} = d\varphi \cdot \sin \varphi \text{ oder } \text{BD} = -d\varphi \cdot \sin \varphi$$

Oder in anderer Bezeichnung:

$$1) \quad \cos \varphi \cdot d\varphi = dy = d(\sin \varphi)$$

$$2) \quad \sin \varphi \cdot d\varphi = -dx = -d(\cos \varphi)$$

$$\text{oder:} \quad -\sin \varphi \cdot d\varphi = dx = d(\cos \varphi).$$

Mit dem negativen Vorzeichen hat es, wie ein Blick auf unsere Figur zeigt, folgende Bewandnis: Wenn φ wächst, so wächst auch y oder $\sin \varphi$ und dy oder $d(\sin \varphi)$ ist eine unendlich kleine, positive Größe. Die Strecke x oder $\cos \varphi$ nimmt dagegen bei wachsendem φ ab, also ist dx oder $d(\cos \varphi)$ eine unendlich kleine, negative Größe.

Es ist $GF = + dx$, $FG = - dx$.

Denken wir uns den Bogen φ in unendlich viele und unendlich kleine Teilchen $d\varphi$ geteilt und, wie es in Fig. 74 (rechterhand) geschehen, durch die Teilungspunkte alle horizontalen und vertikalen Linien gezogen, so ist augenscheinlich:

$$3) \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi} dy = y \text{ oder } \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi} \cos \varphi \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} d(\sin \varphi) = \sin \varphi \Big|_0^{\varphi}$$

$$\text{und } \int_0^{\varphi} dx = AF = -FA = x - 1 = -(1 - x)$$

$$\text{oder: } \int_0^{\varphi} -\sin \varphi \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} d(\cos \varphi) = \cos \varphi \Big|_0^{\varphi} = \cos \varphi - 1.$$

$$\text{Also: } \int_0^{\varphi} \sin \varphi \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} -d(\cos \varphi) = -\cos \varphi \Big|_0^{\varphi} = -\cos \varphi - (-1) \\ = -\cos \varphi + 1.$$

Wir haben damit zwei neue bestimmte Integrale ausgewertet:

$$\text{II. } \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi} \cos \varphi \cdot d\varphi = \sin \varphi \Big|_0^{\varphi}$$

und

$$\text{III. } \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi} \sin \varphi \cdot d\varphi = -\cos \varphi \Big|_0^{\varphi}$$

An Stelle der Grenzen 0 und φ können natürlich auch zwei andere Grenzen φ_1 und φ_2 treten, was aus unserer Figur auch klar erscheint. Mit diesen zwei Integrationsgleichungen wollen wir einige Aufgaben lösen.

Aufgaben.

1. Aufg. Noch einmal die Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises. Diesmal als Beispiel für eines der letzten Integrale.

Nach Fig. 75 ist

$$y = r \sin \varphi \text{ und } dx = r d\varphi \cdot \sin \varphi.$$

Also ist der Flächeninhalt des Kreises

$$F = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 \varphi d\varphi = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi$$

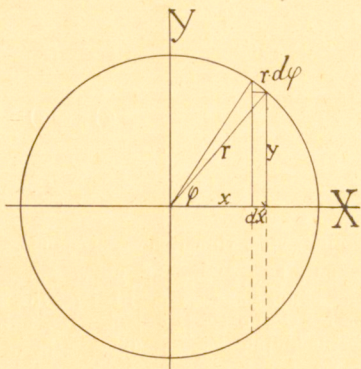
Um dieses Integral mit einem der beiden letzteren Integrale in Einklang zu bringen, substituieren wir

$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ und beachten, daß wenn sich φ um $d\varphi$ ändert, sich 2φ um $2 \cdot d\varphi$ ändert. Es ist also $d\varphi = \frac{1}{2} d(2\varphi)$ und somit

$$F = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = r^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d(2\varphi)$$

$$\underline{F} = r^2 \left[2\varphi - \sin 2\varphi \right]_0^{\pi} = r^2 (\pi - 0 - 0 + 0) = \underline{\underline{\pi r^2}}$$

Fig. 75.



2. Aufg. Berechnung des Flächeninhalts einer Ellipse.

Bekanntlich können wir die Ellipse punktweise folgendermaßen konstruieren:

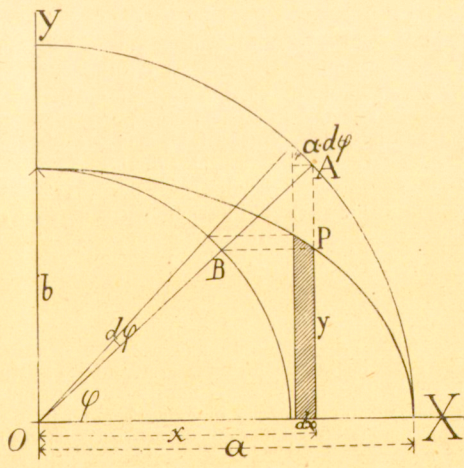
Wir beschreiben um den Koordinatenanfangspunkt mit den Halbachsen a und b Kreise, ziehen durch den Mittelpunkt O einen Strahl OBA, durch A das Lot und durch B die Parallele zur X-Achse, dann ist P ein Punkt der Ellipse. Es bestehen nun die folgenden einfachen Beziehungen:

$x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$.
 φ Winkel jenes Strahls mit der X-Achse (Parameter).

Der Flächeninhalt der Viertelellipse ist nun

$$\frac{F}{4} = \int_0^a y dx.$$

Fig. 76.



Substituieren wir $y = b \sin \varphi$ und wie aus der Zeichnung ersichtlich $dx = -a d\varphi \cdot \sin \varphi$ (negativ, weil bei wachsendem φ die Abszisse x abnimmt), so erhalten wir

$$\frac{F}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin \varphi (-a \sin \varphi d\varphi) = -ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \varphi d\varphi$$

Wir haben hier daselbe Integral wie bei Aufg. (1) und erhalten:

$$\frac{F}{4} = -\frac{ab}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos 2\varphi) d(2\varphi) = -\frac{ab}{4} \left[2\varphi - \sin 2\varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \pi \cdot \frac{ab}{4},$$

also

$$\underline{\underline{F = \pi ab.}}$$

3. Aufg. Noch einmal die Berechnung der Kugeloberfläche.

Wir denken uns die Kugel durch normale Ebenen zur X-Achse in unendlich dünne Lamellen geteilt (Fig. 75), dann ist die Mantelfläche einer solchen Lamelle $dO = \varphi (y + y + dy) r d\varphi = 2\pi y r d\varphi$, weil dy als Summand gegen $2y$ vernachlässigt werden kann. Also ist die Oberfläche der Kugel

$$O = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} 2\pi y r d\varphi = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin \varphi dy = 2\pi r^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi} = 2\pi r^2 (-(-1) - (-1)) = \underline{\underline{4\pi r^2}};$$

für die Kugelkappe ist $O_k = 2\pi r^2 (-\cos \varphi) \Big|_c^{\varphi} = 2\pi r^2 (-\cos \varphi - (-1)) = 2\pi r^2 (1 - \cos \varphi) = \underline{\underline{2\pi r h}}$;

für die Kugelzone ist $O_z = 2\pi r^2 (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 2\pi r^2 (-\cos \varphi_2 - (-\cos \varphi_1))$
 $= 2\pi r^2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) = 2\pi r \cdot (h_1 - h_2) = \underline{\underline{2\pi r h}}$,

wenn φ_1 und φ_2 die den Grenzkreisen entsprechenden halben Zentrivinkel bezeichnen.

4. Aufg. Berechnung der Fläche und des Rauminhaltes a) von einem Klostergewölbe, b) von einem Kreuzgewölbe.

Wenn zwei Zylinderflächen, wir stellen uns hier nur Kreiszyylinder vor, einander durchdringen, so schneiden sie einander nach einer Raumkurve vierter Ordnung, d. h. diese Kurve kann von einer Ebene höchstens in vier Punkten getroffen werden. Sie besteht entweder aus zwei räumlichen Ovalen oder aus einem räumlichen Oval.

Wenn die zwei Zylinderflächen einander in einem Punkt berühren, d. h. in diesem Punkt eine gemeinsame Tangentialebene haben, so vereinigen sich die beiden Ovale in einem einzigen geschlossenen Linienzug, der aus zwei Schleifen besteht; die Raumkurve erhält in diesem Punkt einen sogenannten Doppelpunkt; die Schnittkurve der Zylinderflächen schneidet sich hier selbst, oder, bei entgegengesetzter Bewegung des einen Zylinders nimmt das eine vorher vorhandene Oval einen Doppelpunkt an und besteht nun aus zwei Schleifen. Eine Ebene, welche durch diesen Doppelpunkt geht, kann die Kurve nur noch in 2 anderen Punkten treffen; dieser Doppelpunkt zählt hier für 2 Schnittpunkte. Wenn wir nun zwei Zylinder haben, die einander in zwei Punkten berühren, was eintritt, wenn die Achsen von zwei senkrechten Kreiszyindern mit gleichen Durchmessern einander schneiden, so muß ihre Schnittkurve zwei Doppelpunkte erhalten.

Eine Ebene, welche durch diese zwei Doppelpunkte und einen dritten Punkt der Kurve gelegt würde, hätte nun 5 Schnittpunkte mit der Kurve gemeinsam. Das kann aber nicht der Fall sein. Die Schnittkurve solcher Zylinder kann keine räumlich gekrümmte, doppelt gekrümmte Kurve mehr sein. Stellen wir uns ein Modell her, indem wir einen Kreiszylinder zentral mit einem Bohrer von gleichem Durchmesser durchbohren, oder stellen wir eine genaue Zeichnung her, so finden wir, daß die beiden Zylinderflächen einander in zwei Ellipsen durchdringen, die einander in jenen Doppelpunkten schneiden. Die Raumkurve 4. Ordnung zerfällt jetzt in zwei ebene Kurven 2. Ordnung, in zwei Ellipsen. Wenn wir nun die anfangs erwähnten Gewölbe herstellen wollen, so nehmen wir als einfachsten Fall zwei Kreiszylinderflächen von gleichem Durchmesser, deren Achsen einander senkrecht schneiden und in einer horizontalen Ebene liegen. Die beiden unteren Hälften kommen natürlich in Wegfall.

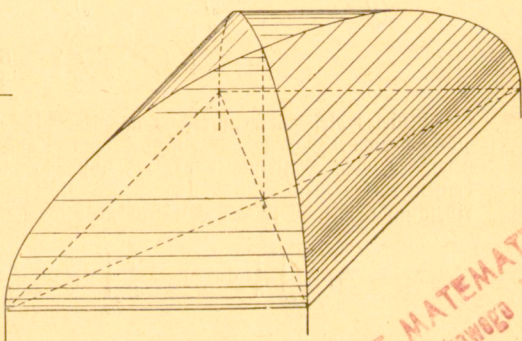
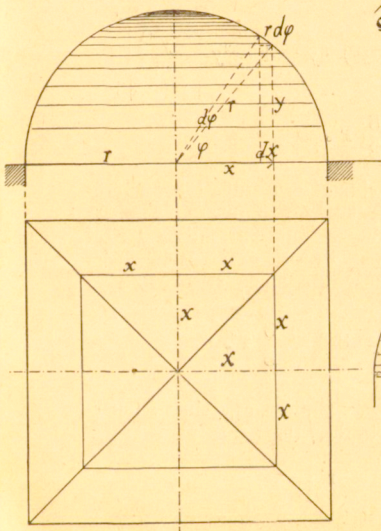
Wir haben nun zwei Halbzylinder, die auf einer horizontalen Ebene ruhen und deren unterste Erzeugenden (die Kämpferlinien) ein Quadrat bilden.

Nehmen wir die äußeren Flächenteile weg, so bleibt die innere Wölbfläche eines Klostergewölbes übrig; nehmen wir aber die inneren Flächenteile fort, so bleibt ein Kreuzgewölbe übrig.

a) Das Klostergewölbe.

Fig. 77.

Klostergewölbe.



Seine innere Wölbfläche zerfällt ersichtlich in 4 kongruente Teile, also ist sie

$$W_{kl} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot d\varphi \cdot 2x, \quad x = r \cdot \cos \varphi.$$

$$1) \quad W_{kl} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \varphi \, d\varphi = 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = 8r^2 \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8r^2(1-0) = \underline{8r^2}.$$

GABINET MATEMATYCZNY
Instytut Matematyczny
ul. Krakowska 15
00-624 Warszawa

Wir erhalten also das merkwürdige Resultat, daß die innere Wölbfläche dieses Klostergewölbes genau gleich seiner doppelten Grundfläche (seiner horizontalen Projektion) ist.

Ebenso zerfällt auch der innere Raum in 4 kongruente Teile, also ist sein Inhalt, wenn wir ihn in vertikale Lamellen geteilt denken,

$$V_k = 4 \int_{x=0}^{x=r} 2xy \cdot dx$$

Dieses Integral können wir auf verschiedene Arten auswerten. Eine davon können wir hier ausführen. Ein Blick auf die Figur läßt die Gleichungen:

$$x = y \operatorname{ctg} \varphi = y \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}; \quad dx = r d\varphi \sin \varphi; \quad r d\varphi \cos \varphi = dy$$

erkennen. Diese Werte unter dem Integral substituiert ergeben:

$$2) \quad V_{kl} = 8 \int_0^r y^2 \cos \varphi \cdot r d\varphi = 8 \int_0^r y^2 dy = 8 \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^r = \underline{\underline{\frac{8}{3} r^3}}$$

Denken wir uns den inneren Raum des Klostergewölbes in horizontale Lamellen geteilt, so ist sein Volumen

$$\begin{aligned} V_{kl} &= \int_0^r (2x)^2 \cdot dy = 4 \int_0^r x^2 \cdot dy = 4 \int_0^r (r^2 - y^2) dy = 4 \left(r^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^r \\ &= 4 \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{8}{3} r^3}} \end{aligned}$$

Dieses Resultat ergibt sich, nachdem wir einmal den Inhalt der Wölbfläche berechnet haben, mit einem Schlag, wenn wir den Raum des Klostergewölbes vom Mittelpunkt der Grundfläche aus in Nadelpyramiden zerlegt denken, deren Grundflächen dw in der Wölbfläche liegen. Es ist nach dieser Auffassung, wenn wir das Integral über die ganze Wölbfläche erstrecken,

$$V_{kl} = \int_0^{8r^2} \frac{1}{3} dw \cdot r = \frac{r}{3} \int_0^{8r^2} dw = \frac{r}{3} \cdot 8r^2 = \underline{\underline{\frac{8}{3} r^3}}$$

Wollen wir schließlich noch den Rauminhalt der Mauermaße eines Klostergewölbes, dessen Stärke mit d bezeichnet sei, so ist derselbe

$$V_m = \frac{8}{3} \left[(r+d)^3 - r^3 \right]$$

b) das Kreuzgewölbe.

Auch hier besteht die Wölbfläche aus 4 kongruenten Teilen oder aus 8 flächengleichen Teilen. Ihr Inhalt ist

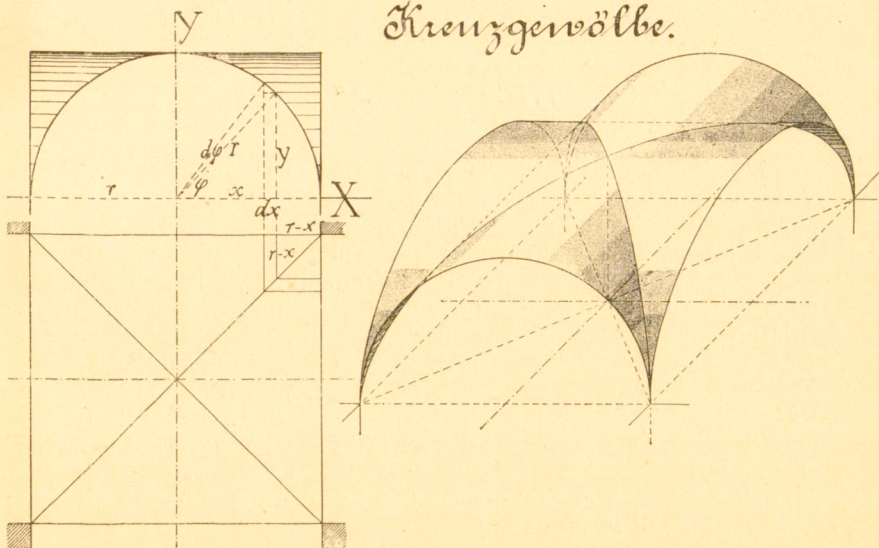
$$\begin{aligned} W_{kr} &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\varphi (r - x) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r (r - r \cos \varphi) d\varphi = 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \varphi) d\varphi \\ 3) \quad &= 8r^2 (\varphi - \sin \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{8r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}}, \end{aligned}$$

ein Resultat, das wir ohne weiteres aus Gleichung (1) finden können; denn die Wölbfläche des Kreuzgewölbes ist gleich der Summe der beiden Halbzylinderflächen abzüglich der Wölbfläche des Klostergewölbes.

$$W_{kr} = 2 \cdot \pi r \cdot 2r - 8r^2 = 8r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Fig. 78.

Kreuzgewölbe.



Ebenso besteht der Gewölberaum aus 4 kongruenten oder 8 inhaltsgleichen Teilen. Es ist also, wenn wir in vertikale Lamellen parallel zu den Achsen teilen,

$$V_{kr} = 8 \int_0^r (r-x) y dx = 8r \int_0^r y dx - 8 \int_0^r xy dx = 8r \cdot \frac{\pi r^2}{4} - \frac{8}{3} r^3 *$$

$$4) \quad = 8 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) r^3.$$

Oder wenn wir den Raum in horizontale Lamellen teilen, so ist

$$V_{kr} = \int_0^r [4r^2 - 4(r-x)^2] \cdot dy = \int_0^r (8rx - 4x^2) dy = 8r \int_0^r x dy - 4 \int_0^r x^2 dy$$

$$= 8r \cdot \frac{\pi r^2}{4} - 4 \int_0^r (r^2 - y^2) dy = 2\pi r^3 - 4 \left(r^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^r$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{8}{3} r^3 = 8 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) r^3.$$

*) Siehe Gleichung (2).

Dasſelbe Reſultat erhalten wir, wenn wir den Raum vom Mittelpunkt der Grundfläche aus in Nadelpyramiden zerlegen, deren Grundflächen df erſtens die Gewölbefläche und zweitens die 4 halbkreisförmigen Seitenflächen ausfüllen. Alle dieſe unendlich dünnen Pyramidenelemente haben die Höhe r .

$$V_{kr} = \int \frac{1}{3} df \cdot r = \frac{r}{3} \int df = \frac{1}{3} \left[8r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 4 \cdot \frac{\pi r^2}{2} \right] \cdot r = 8 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) r^3$$

Zum Schluſſe noch eine vierte Ableitung dieſer Formel: Berechnen wir den Rauminhalt der Halbzylinder, $2 \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$, ſo iſt in dieſer Summe der Rauminhalt des Kloſtergewölbes zweimal enthalten.

Der Rauminhalt des Kreuzgewölbes iſt alſo

$$\underline{V_{kr} = 2\pi r^3 - \frac{8}{3} r^3 = 8 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) r^3.}$$

Differentiale höherer Ordnung. Mehrfache Integrale.

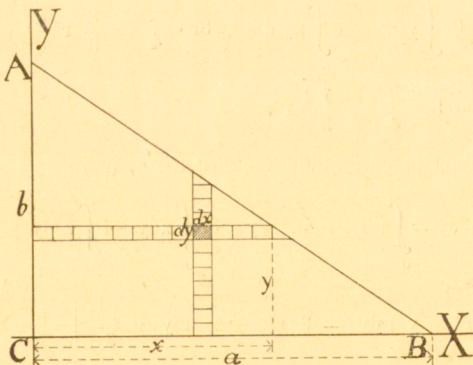
Im Anſchluß an den letzten Abſchnitt noch einige Bemerkungen über Linien-, Flächen- und Körperelemente.

1. Das Linienelement iſt eine unendlich kleine Größe erſter Ordnung, die wir mit dx , dy , ds oder beim Kreiſe mit $r d\varphi$ bezeichnen. Auf andere Darſtellungen des Linienelements kann hier nicht eingegangen werden.

2. Das Flächenelement iſt entweder eine unendlich kleine Größe erſter Ordnung: ein unendlich ſchmales Rechteck, $dF = y \cdot dx$, oder ein unendlich ſchmales Dreieck, $dF = \frac{1}{2} x \cdot dy$, oder in Polarkoordinaten $dF = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, oder eſ iſt eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, ein Rechteckchen, deſſen beide Dimenſionen unendlich kleine Größen erſter Ordnung ſind, $d^2F = dx \cdot dy$.

Wir wollen an zwei einfachen Beiſpielen zeigen, in welcher Weiſe wir ſolche unendlich kleine Größen zweiter Ordnung integrieren können.

Fig. 79.



a) Es ſoll der Flächeninhalt eines Dreiecks beſtimmt werden.

Wir denken uns das Dreieck ABC durch Parallele zu den Koordinatenachsen in unendlich kleine Rechteckchen 2. Ordnung geteilt. Summieren wir dieſelben längs einer zur X-Achſe parallelen Strecke x , ſo erhalten wir den Flächeninhalt einer Lamelle

$$d(\triangle ABC) = \int_0^x dx \cdot dy = x \cdot dy$$

Dabei spielen y und dy die Rollen von Konstanten; nur x durchläuft alle Werte von 0 bis x . Summieren wir nun alle zur X -Achse parallelen Lamellen, so erhalten wir, da

$$x : a = (b - y) : b, \quad \Delta ABC = \int_0^b x \cdot dy = \int_0^b \frac{a}{b} (b-y) \cdot dy$$

$$\Delta ABC = \frac{a}{b} \cdot \left(by - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^b = \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} ab.}}$$

Oder: $\Delta ABC = \int_0^a x \cdot dy = \int_0^a x \cdot \frac{b}{a} dx$, da längs der Grenze $AB \dots dy : dx = b : a$.

$$\text{Also } \Delta ABC = \frac{b}{a} \int_0^a x \cdot dx = \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} ab.}}$$

Die zwei hier nacheinander ausgeführten Integrationen pflegen wir von vorneherein durch ein sogenanntes Doppelintegral anzudeuten:

$$\Delta ABC = \int_0^b \int_0^x dy \cdot dx = \int_0^a \int_0^y dx \cdot dy$$

Es ist leicht einzusehen, daß es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge wir hier integrieren. Wir wollen nun noch zuerst nach y integrieren und dann nach x :

$$\Delta ABC = \int_0^a \int_0^y dx \cdot dy = \int_0^a dx \cdot \int_0^y dy = \int_0^a dx \cdot y$$

$y : b = (a - x) : a$, also

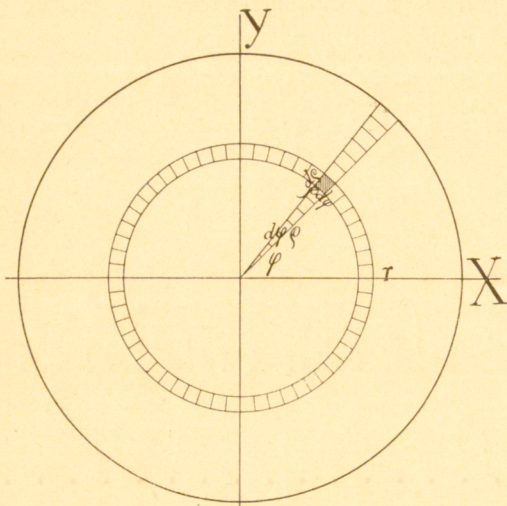
$$\Delta ABC = \int_0^a \frac{b}{a} (a - x) \cdot dx = \frac{b}{a} \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} ab.}}$$

b) Es soll der Flächeninhalt eines Kreises mit Benützung von Polarkoordinaten berechnet werden

Es ist der Inhalt des schraffierten Flächenelements

$$d^2F = \frac{(r + dr) d\varphi + r d\varphi \cdot dr}{2} = \frac{(2r + dr) d\varphi}{2} \cdot dr = r \cdot d\varphi \cdot dr$$

Fig. 80.



Im Unendlichkleinen wird der kleine oder sehr kleine Ausschnitt aus dem Kreisring ein Rechteckchen.

Also

$$F = \int_{\rho=0}^{\rho=r} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho \, d\rho \cdot d\varphi$$

$$= \int_0^r \rho \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \int_0^r \rho \, d\rho \cdot g \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \int_0^r \rho \, d\rho = 2\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^r = \underline{\underline{\pi r^2}}$$

$$\text{Oder: } F = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^r \rho \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^r = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{r^2}{2} \cdot g \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi r^2}}$$

Im ersten Fall haben wir zuerst längs eines Kreisringes vom Radius ρ und der Breite $d\rho$ integriert, dabei bleiben ρ und $d\rho$ konstant, und dann von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, d. h. wir haben die Summe der Flächen aller Kreisringe ($2\pi\rho d\rho$) berechnet, die den ganzen Kreis ausfüllen.

Im zweiten Fall haben wir zuerst längs eines Radius r integriert, haben den Flächeninhalt eines Kreissectors vom Radius r und dem Zentrivinkel $d\varphi$ berechnet, und dann haben wir erst nach φ integriert, von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, d. h. wir haben die Summe aller jener Kreissectoren, die den ganzen Kreis ausfüllen, bestimmt.

3) Das Körper- oder Volumenelement ist entweder eine unendlich kleine Größe 1. Ordnung, $dV = f \cdot dx$ (Zinhalt einer Lamelle) oder eine unendlich kleine Größe 2. Ordnung, $d^2V = z \cdot dx \cdot dy$ oder eine unendlich kleine Größe 3. Ordnung, $d^3V = dx \cdot dy \cdot dz$.

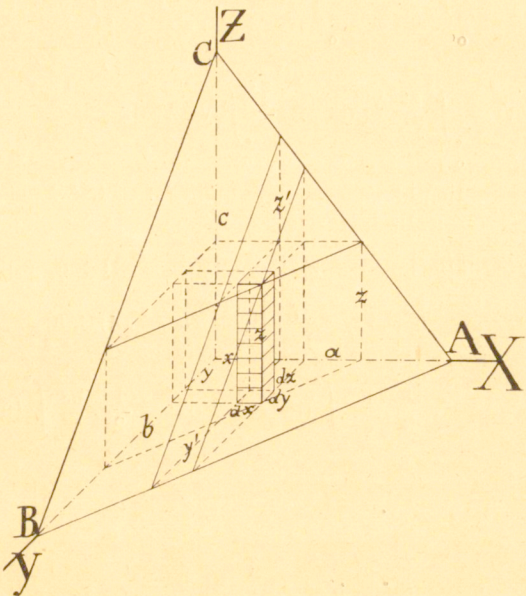
Wir wollen die Integration für den 3ten Fall auch mit zwei einfachen Beispielen klarlegen.

Fig. 81.

a) Es soll der Rauminhalt eines Tetraeders bestimmt werden, welches eine rechtwinklige körperliche Ecke besitzt.

Wir nehmen die in dieser Ecke O zusammenstoßenden Kanten als Koordinatenachsen und denken uns das Tetraeder parallel zu den Koordinatenebenen in unendlich kleine Rechteckerchen geteilt, dann ist (Fig. 81)

$$d^3V = dx \cdot dy \cdot dz$$



$$V = \int_0^a \int_0^{y'} \int_0^z dx \, dy \, dz \dots \quad (\text{analog (2)})$$

Wir integrieren zuerst das Säulchen entlang, welches über dem Flächenelement $dx \cdot dy$ steht. Für dieses Säulchen sind x u. y , dx und dy konstante Größen.

$$V = \int_0^a \int_0^{y'} dx \cdot dy \cdot \int_0^z dz = \int_0^a \int_0^{y'} dx \cdot dy \cdot z.$$

Nun integrieren wir in der Lamelle von der Dicke dx nach y

Für alle Stäbchen in dieser Lamelle sind x und dx konstante, ebensolche auch y' und z' .

Es verhält sich $z : z' = (y' - y) : y'$, hieraus $z = \frac{z'(y' - y)}{y'}$

Substituieren wir diesen Wert von z und setzen die für diese Integration konstanten Werte vor das zweite Integralzeichen, so erhalten wir

$$V = \int_0^a \frac{z'}{y'} dx \cdot \int_0^{y'} (y' - y) dy = \int_0^a \frac{z'}{y'} dx \left(y' y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{y'}$$

$$V = \int_0^a \frac{z'}{y'} \cdot \frac{y'^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^a y' z' dx.$$

Schließlich haben wir noch alle diese Lamellen von $x = 0$ bis $x = a$ zu integrieren.

Es verhält sich $z' : c = (a - x) : a$, also $z' = \frac{c(a-x)}{a}$

und $y' : b = (a - x) : a$, $y' = \frac{b(a-x)}{a}$

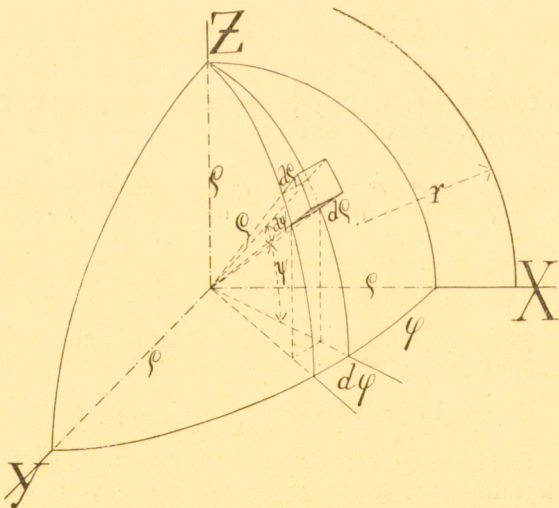
$$\text{Also } V = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a^2} \int_0^a (a-x)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a^2} \int_0^a (a^2 - 2ax + x^2) dx$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a^2} \left(a^2 x - 2a \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{1}{6} \underline{abc} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} ab \right) \cdot c.$$

Fig. 82.

Bei sehr kleinen dx, dy, dz ist die Tetraederfläche ABC eine gestichelte Fläche, aus welcher sehr kleine, dem Tetraeder $OABC$ ähnliche Vertiefungen ausgestochen sind. Beim Übergang zu den unendlich kleinen dx, dy, dz werden diese Vertiefungen unmeßbar,



unangebar klein und die gestichelte Fläche ABC wird für endliche Lebewesen, die das Unendlichkleine erster Ordnung nicht mehr wahrnehmen können, zur ebenen Fläche.

Wir übersehen leicht, daß es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge wir die 3 Integrationen ausführen.

b) Es soll mit Benützung von Polarkoordinaten der Rauminhalt der Kugel berechnet werden.

Ein Punkt sei hier bestimmt durch ϱ , φ und ψ ; ϱ = Abstand des Punktes vom Koordinatenanfangspunkt, welcher der Mittelpunkt der Kugel ist, φ und ψ zwei Winkel in der Bedeutung, wie sie aus Fig 82 ersichtlich ist.

Wir denken uns den Kugelförper durch Ebenen, welche durch die Z-Achse gehen (Meridianebenen), durch konzentrische Kugelflächen und durch konaxische Kegelflächen, welche die Z-Achse des Koordinatensystems zur Achse und ihre Spitzen im Kugelmittelpunkt haben, in unendlich kleine Rechteckerchen geteilt, dann ist der Rauminhalt eines solchen Körperelements

$$d^3 V = \varrho \cos \psi \, d\varphi \cdot \varrho d\psi \cdot d\varrho,$$

$\varrho=r \quad \psi=\frac{\pi}{2} \quad \varphi=\frac{\pi}{2}$

$$\text{also} \quad V = 8 \cdot \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varrho=0}^r \varrho^2 d\varrho \cos \psi d\psi d\varphi$$

$$= 8 \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 d\varrho \cos \psi d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 4\pi \int_0^r \varrho^2 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi$$

$$= 4\pi \int_0^r \varrho^2 d\varrho \cdot \sin \psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi \int_0^r \varrho^2 d\varrho \cdot 1 = 4\pi \cdot \frac{\varrho^3}{3} \Big|_0^r = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi r^3}}.$$

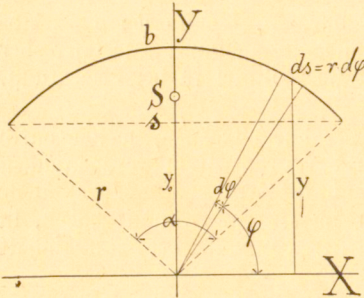
Wir haben hier zuvörderst längs eines Parallelkreises integriert. Dabei war nur φ variabel, alle andern Größen sind für diese Integration konstant. Wir haben mit diesem Integral den Rauminhalt eines Ringes auf der Kugel vom Radius ϱ , von der Breite $\varrho \cdot d\psi$ und der Dicke $d\varrho$ im Abstand ψ vom Äquator und im Abstand ϱ vom Kugelmittelpunkt bestimmt. Beim zweiten Integral summieren wir diese Ringe über die ganze Kugel und erhalten so den Inhalt einer Hohlkugel vom Radius ϱ und der Dicke $d\varrho$. Bei der dritten Integration endlich summieren wir die Rauminhalte aller Hohlkugeln, welche die Vollkugel vom Radius r ausmachen. Wir erkennen auch hier, daß die Reihenfolge der Integrationen nicht von Belang ist. Welche Bedeutung hat jede der noch möglichen 5 Reihenfolgen der Integration?

Sehr hübsche Beispiele für die Anwendung unserer drei Integrale bieten auch die

Schwerpunktsberechnungen.

Wenn wir die Schwerpunkte von Linien bestimmen wollen, so denken wir uns dieselben als sehr feine Drähte, die überall gleichen Durchmesser haben und durchaus aus demselben homogenen Stoff bestehen. Gewicht der Längeneinheit = γ . Koordinaten des Schwerpunktes stets x_0, y_0 .

Fig. 83.



1. Aufg. Schwerpunkt eines Kreisbogens.

Es sei b ein Kreisbogen, symmetrisch von der Y -Achse geteilt, dann muß der Schwerpunkt S auf dieser Symmetrieachse liegen.

Da das Drehungsmoment eines Körpers in bezug auf eine Achse gleich der Summe der Drehungsmomente aller seiner Teile in bezug auf dieselbe Achse sein muß,*) so ergibt sich, wenn wir die X -Achse als diese Achse ansehen,

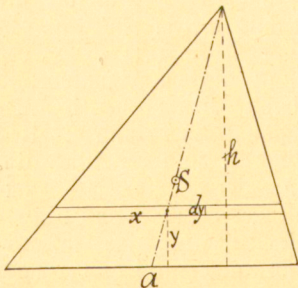
$$\begin{aligned}
 b \gamma \cdot y_0 &= \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}} \gamma \, ds \cdot y = \gamma \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}} r \sin \varphi \cdot r \, d\varphi \\
 b \cdot y_0 &= r^2 \int \sin \varphi \, d\varphi = r^2 (-\cos \varphi) \Big|_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}} = 2r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \\
 y_0 &= \frac{2r^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{b} = \underline{\underline{2r \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{s \cdot r}{b}}}
 \end{aligned}$$

Für den Halbkreis ist $\alpha = \pi$, $y_0 = 2r \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot r$.

Schwerpunkt einiger Flächen.

Wenn wir von dem Schwerpunkt einer Fläche reden, so haben wir uns eine materielle Fläche zu denken, ein sehr dünnes Blech von durchaus gleicher Dicke und aus homogenem Material. Gewicht der Flächeneinheit = γ .

Fig. 84.



2. Aufg. Schwerpunkt eines Dreiecks.

Wir teilen das Dreieck in parallele Lamellen zur Grundlinie a , dann ist

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} a h \gamma \cdot y_0 &= \int_0^h \gamma \cdot x \, dy \cdot y \\
 x : a &= (h - y) : h \\
 x &= \frac{a(h - y)}{h}
 \end{aligned}$$

*) Siehe Physik: Resultante von parallelen, gleich gerichteten Kräften.

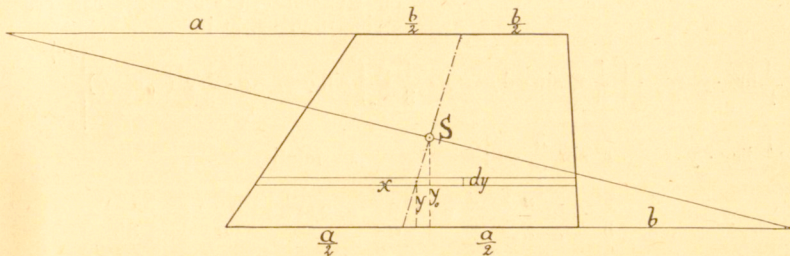
Dies substituiert gibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ah \cdot y_0 &= \int_0^h \frac{a(h-y)}{h} y \cdot dy = \frac{a}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy = \frac{a}{h} \left(h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h \\ &= \frac{a}{h} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right), \quad \text{also } \underline{y_0 = \frac{1}{3} h}. \end{aligned}$$

Dies gilt inbezug auf jede Seite. Die drei Parallelen, die im Abstand von $\frac{1}{3}$ der zugehörigen Höhen zu den Seiten des Dreiecks gezogen werden, gehen durch den Schwerpunkt des Dreiecks. Durch diesen Punkt gehen auch die 3 Mitteltransversalen, weshalb diese auch „Schwerpunktstransversalen“ heißen.

3. Aufg. Schwerpunkt eines Trapezes.

Fig. 85.



Wir teilen auch das Trapez in zu den Grundlinien parallele Lamellen, dann liegen die Schwerpunkte dieser Lamellen auf der Mitteltransversalen der beiden Grundlinien, welche also eine Schwerlinie des Trapezes ist. Es handelt sich nur noch um die Ordinate des Schwerpunktes. Die Momentengleichung lautet:

$$\frac{a+b}{2} h y_0 = \int_0^h x dy \cdot y \cdot y.$$

Wir ziehen durch einen der oberen Eckpunkte die Parallele zur gegenüberliegenden schrägen Seite, dann folgt aus der Figur, wenn h die Höhe des Trapezes bezeichnet,

$$(x - b) : (a - b) = (h - y) : h;$$

hieraus

$$x = \frac{ah - (a - b)y}{h}$$

Dies oben substituiert gibt

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} h y_0 &= \int_0^h \frac{ah - (a - b)y}{h} y \cdot y dy = \frac{1}{h} \left(ah \frac{y^3}{3} - (a - b) \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h \\ \frac{a+b}{2} h^2 y_0 &= \frac{1}{2} ah^3 - \frac{1}{3} (a - b) h^3. \end{aligned}$$

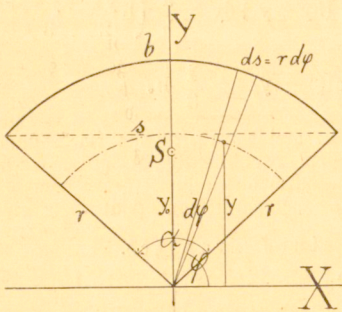
$$\text{Hieraus } y_0 = \frac{a + 2b}{3(a + b)} \cdot h \quad \text{und} \quad h - y_0 = \frac{2a + b}{3(a + b)} \cdot h.$$

$$y_0 : (h - y_0) = (a + 2b) : (2a + b) = \left(\frac{a}{2} + b \right) : \left(a + \frac{b}{2} \right),$$

wonach die einfache Konstruktion für die Bestimmung des Schwerpunktes S , welche aus der Figur 85 ersichtlich ist, einleuchtet.

4. Aufg. Schwerpunkt eines Kreissektors.

Fig. 86.



Nach dem oben angeführten Satz aus der Statik ist hier, wenn wir uns den Sektor in Sektorelemente mit den Zentrivinkeln $d\varphi$ geteilt denken,

$$\frac{1}{2} b r \gamma \cdot y_0 = \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\varphi \cdot \gamma \cdot y$$

$$y = \frac{2}{3} r \sin \varphi,$$

da der Schwerpunkt eines Sektorelements im Abstand von $\frac{2}{3}$ der Höhe von der Spitze liegt. Also ist

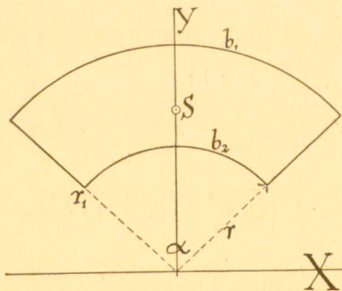
$$\frac{1}{2} b r \gamma \cdot y_0 = \gamma \cdot \int \frac{1}{3} r^3 \sin \varphi d\varphi = \gamma \cdot \frac{1}{3} r^3 \int \sin \varphi d\varphi = \gamma \cdot \frac{1}{3} r^3 (-\cos \varphi) \Big|_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1}{2} b r \gamma \cdot y_0 = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \gamma; \quad \text{folglich}$$

$$y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r^2}{b} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3} r \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} = 2 \left(\frac{2}{3} r \right) \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{2s \cdot r}{3b},$$

d. h. der Schwerpunkt des Kreissektors ist identisch mit dem Schwerpunkt des zu demselben Zentrivinkel α gehörigen Bogens von dem Radius $\frac{2}{3} r$, was von vorneherein schon klar liegt und nach dem Resultat der Aufgabe (1) ohne weiteres hätte angegeben werden können. Der geometrische Ort der Schwerpunkte der Sektorelemente ist der Kreisbogen vom Radius $\frac{2}{3} r$ in α . Der Schwerpunkt dieses Kreisbogens muß also der Schwerpunkt des Sektors sein.

Fig. 87.



5. Aufg. Schwerpunkt eines Flächenringauschnitts.

Der Schwerpunkt S muß auch hier auf der Symmetrieachse (Y) liegen.

Bezeichnet y_0 seine Ordinate, y_1 die Ordinate des Schwerpunktes des Sektors ($r_1 \alpha$) und y_2 die Ordinate des Schwerpunktes vom Sektor ($r_2 \alpha$), dann ist nach dem bei (1) angeführten Satz

$$\frac{b_1 + b_2}{2} (r_1 - r_2) \gamma \cdot y_0 + \frac{1}{2} b_2 r_2 \gamma \cdot y_2 = \frac{1}{2} b_1 r_1 \gamma \cdot y_1$$

$$y_1 = \frac{4}{3} r_1 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \quad y_2 = \frac{4}{3} r_2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \quad *)$$

folglich: $(r_1 + r_2) (r_1 - r_2) \alpha \cdot y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} (r_1^3 - r_2^3) \cdot \alpha$

*) Füge in Fig. 87 bei r den Index 2 an!

$$y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}.$$

Läßt man r_2 größer werden, so wird das Ringstück schmaler und wird schließlich ein Kreisbogen, wenn $r_2 = r_1$ wird. Dann wird

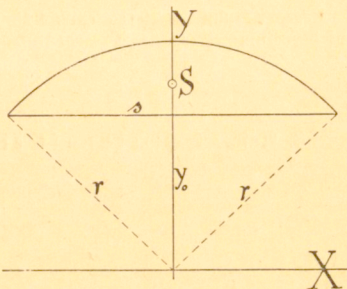
$$y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3r_1^2}{2r_1} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} = 2r_1 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}. \text{ Vergl. (1).}$$

6. Aufg. Schwerpunkt eines Kreisabschnittes (Segments).

Fig. 88.

Die Momentengleichung lautet hier, nachdem mit dem Dichtigkeitsfaktor γ dividiert ist ($\angle r, r = \alpha$),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} r^2 \alpha \cdot \frac{4}{3} r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \\ & - r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2}{3} r \cos \frac{\alpha}{2} \\ & = \left(\frac{1}{2} r^2 \alpha - r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) y_0 = f \cdot y_0 \end{aligned}$$



$$\text{Hieraus} \quad y_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r^4 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{f} = \frac{s^3}{12f}$$

Der Schwerpunkt eines Halbkreises liegt also im Abstand

$$y_0' = \frac{8r^3}{12 \cdot \frac{1}{2} \pi r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} = \frac{14}{33} \cdot r \text{ (annähernd!)}$$

7. Aufg. Schwerpunkt eines halben und eines ganzen Parabelsegments.

$y^2 = px$. Gleichung der Parabel. (Siehe S. 97, Fig. 71).

Wir denken uns zunächst die Fläche des halben Segments in zu X senkrechte, unendlich dünne Lamellen geteilt, dann lauten (Vergl. S. 114, 1) die Momentengleichungen, nachdem mit dem Gewicht γ der Flächeneinheit dividiert ist,

$$1) \quad y \cdot \int_0^a y dx = \int_0^a y dx \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \int_0^a px \cdot dx = \frac{p}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a$$

$$*) \quad \frac{2}{3} ab \cdot y_0 = \frac{1}{4} p \cdot a^2 = \frac{1}{4} ab^2. \quad \underline{\underline{y_0 = \frac{3}{8} b.}}$$

$$\text{und } 2) \quad \frac{2}{3} ab \cdot x_0 = \int_0^b (a-x) dy \left(x + \frac{a-x}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_0^b (a^2 - x^2) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b \left(a^2 - \frac{y^4}{p^2} \right) dy = \frac{1}{2} \left(a^2 y - \frac{y^5}{5p^2} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{2} \left(a^2 b - \frac{b^5}{5p^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(a^2 b - \frac{1}{5} a^2 b \right) = \frac{2}{5} a^2 b; \quad \text{folglich} \quad \underline{\underline{x_0 = \frac{3}{5} a.}}$$

*) Siehe S. 91, 1. Aufg.

oder, wenn wir schreiben:
$$\frac{2}{3} ab \cdot x_0 = \int_0^a x y dx = \int_0^a x \sqrt{px} \cdot dx$$

$$= \sqrt{p} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \sqrt{p} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \Big|_0^a = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{px} \Big|_0^a = \frac{2}{5} a^2 b.$$

Wir haben also hier wieder die Bestätigung, daß die Gleichung (I. auch für gebrochene Exponenten Geltung hat.

Es ist ohne weiteres klar, daß der Schwerpunkt S' des Parabelsegments auf der Symmetrieachse (X) liegt und sein Abstand vom Scheitel der Parabel auch

$$\underline{x_0 = \frac{3}{5} a.} \quad \text{Siehe S. 97, Fig. 71.}$$

8. Aufg. Schwerpunkt eines Ellippenquadranten.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Gleichung der Ellipse.} \\ \text{(Siehe S. 96, Fig. 70 linkerhand!).}$$

Die Momentengleichungen lauten hier:

$$y_0 \cdot \int_0^a y dx = \int_0^a y dx \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2}{2a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a$$

$$*) \frac{\pi}{4} \cdot ab \cdot y_0 = \frac{b^2}{2a^2} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{1}{3} ab^2, \quad \text{also} \quad \underline{y_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot b.}$$

$$\text{und} \quad x_0 \int_0^b x dy = \int_0^b x dy \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \int_0^b x^2 dy = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) dy \\ = \frac{a^2}{2b^2} \left(b^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b, \quad \text{also} \quad \frac{\pi}{4} ab \cdot x_0 = \frac{1}{3} a^2 b \quad \text{und} \quad \underline{x_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot a.}$$

Aus der Symmetrie der Figur erhellt sofort, daß der Schwerpunkt einer Halbellipse auf ihrer Symmetrieachse liegt und den Abstand $x_0 = \frac{4a}{3\pi}$ bzw. $y_0 = \frac{4b}{3\pi}$ vom Mittelpunkt der Ellipse hat. Siehe S. 124, Fig. 99 u. 100, auch 70.

9. Aufg. Bestimme den Schwerpunkt einer von einer Hyperbel und den beiden Koordinaten eines ihrer Punkte begrenzten Fläche.

Ebenso die Schwerpunkte von Flächen, die von Parabeln ($y = ax^n$) in gleicher Weise begrenzt sind

10. Aufg. Schwerpunkt einer Kugelzone und einer Kugelfappe.

Wir denken uns dieselbe durch zur Y -Achse senkrechte Ebenen in unendlich dünne Lamellen geteilt. Der Schwerpunkt muß selbstverständlich auf der Y -Achse liegen. Dann lautet die Momentengleichung

$$O_z \cdot y_0 = \int_{y_2}^{y_1} 2\pi x ds \cdot y$$

*) Siehe S. 39, 3. Aufg. u. S. 103 4, 2. Aufg.

Fig. 89.

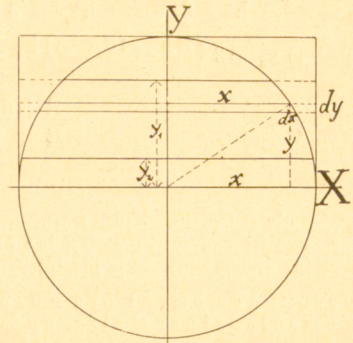
Aus den ähnlichen Dreiecken folgt:
 $dy : ds = x : r$, also $x \cdot ds = r \cdot dy$.

Somit durch Substitution

$$O_z \cdot y_0 = \int_{y_2}^{y_1} 2\pi r dy \quad y = 2\pi r \frac{y^2}{2} \Big|_{y_2}^{y_1}$$

$$\text{Also} \quad 2\pi r \cdot (y_1 - y_2) \cdot y_0 \quad *) \\ = 2\pi r \frac{1}{2} (y_1^2 - y_2^2).$$

$$\text{Hieraus } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Der Schwerpunkt jeder dieser Flächen ist der Mittelpunkt ihrer Höhe, ist also identisch mit dem Schwerpunkt der zwischen denselben Grenzebenen liegenden Mantelfläche des der Kugel umbeschriebenen Zylinders.

11. Aufg. Schwerpunkt der Mantelfläche einer Pyramide oder eines Kegels.

Hier ist keine Rechnung nötig. Der Schwerpunkt liegt in jedem Fall im Abstand $\frac{1}{3}$ der Höhe von der Basis auf der Linie, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Basis verbindet. Der Schwerpunkt der Mantelfläche eines Kegelstumpfes ergibt sich aus der Momentengleichung als im Abstand

$$x_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{R + 2r}{R + r}$$

von der Grundfläche entfernt auf der Achse.

Ableitung dieser Formel:

Fig. 90.

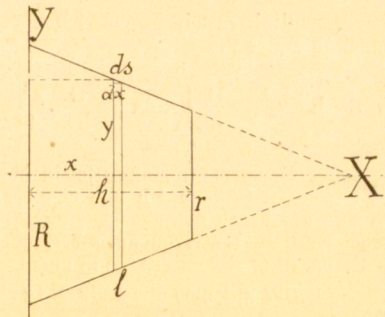
$$\pi (R + r) l \cdot x_0 = \int_0^h 2\pi y ds \cdot x$$

$$= 2\pi \int_0^h xy ds$$

$$(R - y) : (R - r) = x : h$$

$$R - y = \frac{(R - r) x}{h}$$

$$y = R - \frac{(R - r) x}{h}$$



$ds : dx = l : h$; $ds = \frac{l \cdot dx}{h}$. Dies oben eingesetzt gibt:

$$(R + r) l \cdot x_0 = 2 \int_0^h x \left(R - \frac{(R - r) x}{h} \right) \frac{l}{h} dx$$

*) Siehe S. 104, 3. Aufg.

$$= 2 \left(\frac{Rl}{h} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{(R-r) l x^3}{h^2 \cdot 3} \right) \Big|_0^h = 2 \left(\frac{Rlh^2}{2h} - \frac{(R-r) lh^3}{3h^2} \right)$$

$$(R+r) x_0 = 2 \left(\frac{Rh}{2} - \frac{(R-r)h}{3} \right) = \left(R - \frac{2}{3}(R-r) \right) h = \frac{R+2r}{3} \cdot h$$

folglich

$$x_0 = \frac{R+3r}{R+r} \cdot \frac{h}{3}$$

Schwerpunkte von Körpern.

Wir stellen uns dabei Körper aus in allen Punkten gleich dichtem Stoffe vor. Es sei das spezifische Gewicht dieses Stoffes mit γ bezeichnet. Dann besteht für irgend eine Achse die Gleichung:

Drehungsmoment des Körpers = Summe der Drehungsmomente seiner Teile, auch seiner kleinsten Teilchen, in bezug auf dieselbe Achse.

Fig. 91.

12. Aufg. Schwerpunkt einer Pyramide.

Es sei G die Grundfläche normal zur X -Achse gestellt, h die Höhe, S_0 der Schwerpunkt der Grundfläche und S' die Spitze der Pyramide.

Wir denken uns die Pyramide in unendlich dünne Lamellen parallel zur Grundfläche geteilt, dann ist

$$\frac{1}{3} Gh\gamma \cdot x_0 = \int_0^h f dx \gamma \cdot x$$

$$f : G = x^2 : h^2$$

Substituieren wir den Wert von $f = G \cdot \frac{x^2}{h^2}$ in die vorhergehende Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{1}{3} G \cdot h \cdot x_0 = \frac{G}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{G}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{4} Gh^2; \quad x_0 = \frac{3}{4} h.$$

Der Schwerpunkt muß also in normaler Richtung zur Grundfläche von der Spitze den Abstand $\frac{3}{4} h$ und von der Grundfläche den Abstand $\frac{1}{4} h$ haben. Er muß auf der geraden Schwerlinie $S'S_0$ liegen, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt S_0 der Grundfläche verbindet. Diese ist der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Lamellen. S ist auch der Schwerpunkt der Schnittfläche in $\frac{1}{4} h$.

Daselbe gilt auch für jeden Kegel.

13. Aufg. Bestimme den Schwerpunkt eines Pyramiden- resp. eines Kegeltumpfes!

Sein Normalabstand von der Grundfläche G wird

$$\frac{G + 3g + 2\sqrt{G \cdot g}}{G + g + \sqrt{G \cdot g}} \cdot \frac{h}{4} \quad \text{bzw.} \quad \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Bei jedem homogenen Rotationskörper muß der Schwerpunkt auf der Rotationsachse liegen.

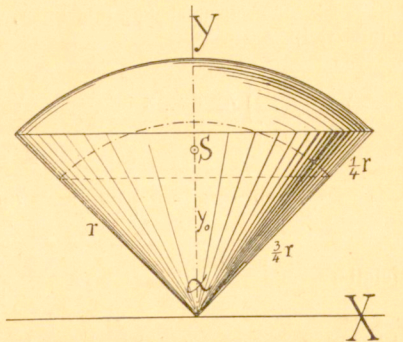
14. Aufg. Bestimme den Schwerpunkt eines Kugelsektors oder Kugelkegels.

Wir denken uns hier die Kugelkappe mosaikartig in unendlich kleine Flächenelemente geteilt und deren Eckpunkte mit dem Kugelmittelpunkt durch gerade Linien verbunden. Dadurch wird der Kugelsektor in unendlich viele unendlich schmale Pyramiden zerlegt. Der Schwerpunkt einer jeden solchen Nadelpyramide liegt im Abstand $\frac{3}{4}r$ vom Mittelpunkt. Die Kugelkappe vom Radius $\frac{3}{4}r$ ist also der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Nadelpyramiden, welche zusammen den Kugelsektor ausmachen. Der Schwerpunkt dieser Kugelkappe vom Radius $\frac{3}{4}r$ muß also der Schwerpunkt des Kugelsektors vom Radius r sein. Er liegt auf der Achse des Kugelsektors und sein Abstand vom Kugelmittelpunkt ist (Siehe Seite 118, 10. Aufg.).

$$y_0 = \frac{3}{4}r \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}r - \frac{3}{4}r \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{3}{8}r \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$y_0 = \frac{3}{8}(2r - h). \quad \text{Für die Halbkugel ist } \frac{\alpha}{2} = 90^\circ \text{ und somit } y_0' = \frac{3}{8}r.$$

Fig. 92.



15. Aufg. Bestimme den Schwerpunkt eines Kugelsegments.

Fig. 93.

Es sei die X-Achse zugleich die Achse des Kugelabschnitts, h dessen Höhe, r der Kugelradius und ρ der Radius des Schnittkreises, dann ist nach Seite 78 (6) das Volumen dieses Abschnitts

$$V_s = \frac{\pi}{3}(3r - h)h^2 = \frac{\pi}{6}(3\rho^2 + h^2) \cdot h$$

und die Momentengleichung lautet, wenn wir das Kugelsegment in Lamellen normal zur X-Achse geteilt denken und wenn x_1 den Abstand der Schnittfläche vom Kugelmittelpunkt bezeichnet,

$$V_s \cdot x_0 = \int_{x_1}^r \pi y^2 dx \cdot x = \pi \int_{x_1}^r (r^2 - x^2)x \cdot dx$$

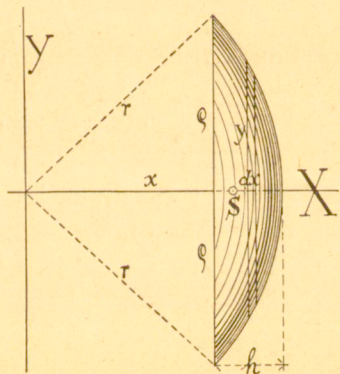
$$= \pi \left(r^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x_1}^r = \pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^2 x_1^2}{2} + \frac{x_1^4}{4} \right)$$

$$\text{Also } \frac{\pi}{3}(3r - h)h^2 \cdot x_0 = \frac{\pi}{4}(r^2 - x_1^2)^2 = \frac{\pi}{4}(2r - h)^2 \cdot h^2, \quad \text{da } x_1 = r - h.$$

$$\text{Folglich } x_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho^4}{(3\rho^2 + h^2) \cdot h},$$

$$\text{wenn wir beachten, daß } \rho^2 = h(2r - h), \quad \text{also } r = \frac{\rho^2 + h^2}{2h}.$$

$$\text{Für die Halbkugel wird } h = \rho = r \text{ und wir erhalten } x_0' = \frac{3}{8}r.$$



16. Aufg. Schwerpunkt eines Rotationsparaboloids.

$y^2 = px$ Gleichung des Meridians. (Siehe Fig. 71.)

Die Momentengleichung lautet hier, nachdem mit dem spezifischen Gewicht γ dividiert ist,

$$V \cdot x_0 = \int_0^a \pi y^2 dx \cdot x \qquad V = \frac{1}{2} \pi ab^2 \quad \text{Siehe S. 96, 8. Aufg.}$$

$$\frac{1}{2} \pi ab^2 \cdot x_0 = \pi \int_a^0 px^2 dx = \pi p \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \pi p \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} \pi a^2 b^2$$

folglich
$$\underline{x_0 = \frac{2}{3} a.} \quad \text{Siehe Fig. 71, S.}$$

17. Aufg. Schwerpunkt eines halben Rotationsellipsoids.

Es sei die große Achse $2a$, die kleine $2b$, also die Gleichung der Meridianellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ist x_0 die Abszisse des Schwerpunkts, der ja auf der Rotationsachse liegen muß, so ist

$$V \cdot x_0 = \int_0^a \pi y^2 dx \cdot x = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) x dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{4}$$

Nach Seite 96 (7) ist $V = \frac{2}{3} \pi ab^2$, also $\frac{2}{3} \pi ab^2 \cdot x_0 = \pi b^2 \frac{a^2}{4}$,

woraus $\underline{x_0 = \frac{3}{8} a.}$ (Siehe S. 96, Fig. 70, S.); (für die Halbkugel ist $x_0 = \frac{3}{8} r$).

Ableitung der Guldin'schen Regel.

Fig. 94.

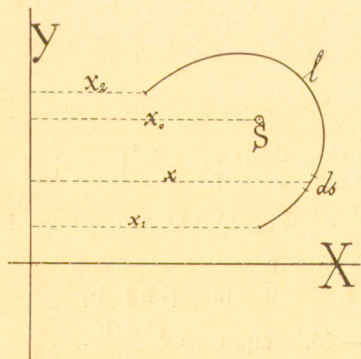
Es sei S der Schwerpunkt eines Kurvenstückes l , dann ist

$$\int_{x_1}^{x_2} x \cdot ds = l \cdot x_0$$

Multiplizieren wir beiderseits mit 2π , so erhalten wir

$$\int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot ds = l \cdot 2\pi x_0$$

Zurück steht nun augenscheinlich der Inhalt der Rotationsfläche, welche das Kurvenstück l beschreibt, wenn es um die Y -Achse eine volle Umdrehung macht, d. h.



1. Der Inhalt einer Rotationsfläche ist gleich dem Produkt aus der Länge der rotierenden Kurve und dem Weg ihres Schwerpunktes.

Es sei ferner F der Inhalt einer begrenzten Fläche, x_0 die Abzisse ihres Schwerpunktes, dann ist

$$\int_{x_2}^{x_1} dF \cdot x = F \cdot x_0$$

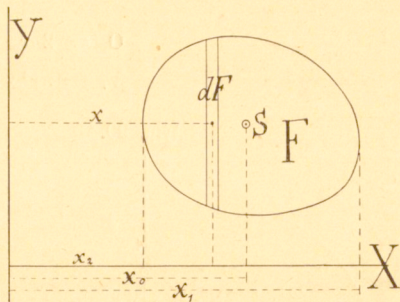
Multiplizieren wir beiderseits mit 2π , so ergibt sich

$$\int_{x_2}^{x_1} dF \cdot 2\pi x = F \cdot 2\pi x_0$$

Das Integral linkerhand stellt ersichtlich den Rauminhalt des Rotationskörpers vor, welchen die Fläche F bei ihrer Drehung um die Y -Achse beschreibt. Die letzte Gleichung sagt also aus:

2. Der Rauminhalt eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der rotierenden Fläche (dem Querschnitt) und dem Weg ihres Schwerpunktes.

Fig. 95.



Beispiele.

1. Kreiskegel: Rotierende Linie und Fläche = Hypotenuse und Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks.

$$M = s \cdot 2\pi \frac{r}{2} = \underline{\underline{\pi r s}}$$

$$V = \frac{1}{2} r h \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi r^2 h}}$$

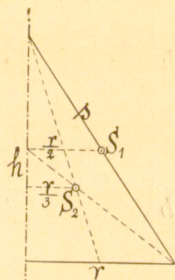


Fig. 96.

2. Kugel: Rotierende Linie und Fläche ein Halbkreis.

$$\text{Schwerpunkt der Halbkreislinie } S_1 \dots x_0 = \frac{2}{\pi} \cdot r.$$

$$\text{Schwerpunkt der Halbkreisfläche } S_2 \dots x'_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

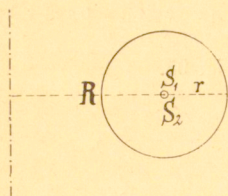
$$O_k = \pi r \cdot 2\pi x_0 = \pi r \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} r = \underline{\underline{4\pi r^2}}$$

$$V_k = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot 2\pi x'_0 = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi r^3}}$$

Fig. 97.



Fig. 98.



3. Ring mit Kreisquerschnitt:

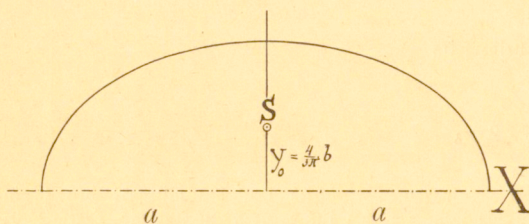
Rotierende Linie und Fläche ein Kreis vom Radius r . In beiden Fällen S Schwerpunkt.

$$x_0 = R.$$

$$O_r = 2\pi r \cdot 2\pi x_0 = \underline{4\pi^2 R \cdot r}$$

$$V_r = \pi r^2 \cdot 2\pi x_0 = \underline{2\pi^2 R \cdot r^2} \quad \text{Vgl. S. 79 (13).}$$

Fig. 99.



4. Rotationsellipsoid:

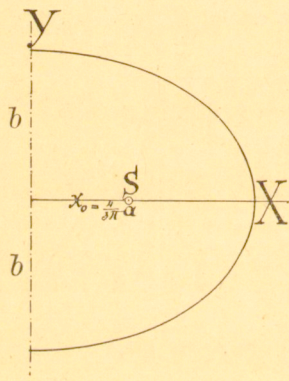
S Schwerpunkt der Fläche der halben Ellipse:

$$y_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot b.$$

X sei Rotationsachse.

$$V_e = \frac{1}{2} \pi ab \cdot 2\pi y_0 = \frac{1}{2} \pi ab \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3\pi} b = \underline{\frac{4}{3} \pi ab^2}.$$

Fig. 100.



5. Sphäroid:

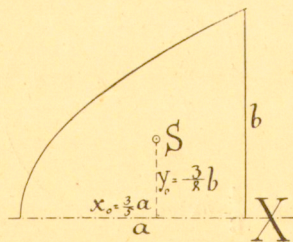
S Schwerpunkt der Fläche der halben Ellipse: $x_0 = \frac{4}{3\pi} a.$

Y sei Rotationsachse.

$$V_s = \frac{1}{2} \pi ab \cdot 2\pi y_0 = \frac{1}{2} \pi ab \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3\pi} a$$

$$= \underline{\frac{4}{3} \pi a^2 b} \quad \text{Vgl. S. 96 (7).}$$

Fig. 101.



6. Rotationsparaboloid:

Der Schwerpunkt der rotierenden Fläche

ist $S \dots y_0 = \frac{3}{8} b$; $F = \frac{2}{3} ab.$

$$V = F \cdot 2\pi y_0 = \frac{2}{3} ab \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{8} b$$

$$= \underline{\frac{1}{2} \pi ab^2}.$$

Vergl. S. 96 (8).

Größe und Angriffspunkt der Resultante des Seitendruckes einer Flüssigkeit.

In der Hydrostatik erfahren wir experimentell folgenden Satz: Der Druck, welchen ein Flächenelement (Kreis, Rechteck) im Innern der Flüssigkeit in normaler Richtung zur Fläche erleidet, ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeitssäule, welche dieses Flächenelement zur Grundfläche und den Abstand seines Mittelpunktes vom Flüssigkeitsspiegel zur Höhe hat, welche Richtung das Flächenelement an dieser Stelle auch haben mag.

Bezeichnet γ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist der Druck, der auf die horizontale Lamelle df der Seitenwand trifft:

$$dD = \int_0^x dx \, dy \cdot \gamma \cdot y = \gamma \, y \, dy \int_0^x dx,$$

da für diese Lamelle y und dy konstante Größen sind. Dieser Druck ist also

$$dD = \gamma \cdot x \, dy \cdot y = \gamma \, df \cdot y.$$

Der Druck, welcher auf die Fläche f der Seitenwand trifft, ist nun

$$D = \int_{y_1}^{y_2} \gamma \cdot df \cdot y = \gamma \int_{y_1}^{y_2} df \cdot y$$

Bezeichnet y_0 den Abstand des Schwerpunktes S der Fläche f vom Flüssigkeitsspiegel, so ist nach der Momenten-Gleichung

$$D = \gamma \int_{y_1}^{y_2} df \cdot y = \gamma \cdot f \cdot y_0 \quad *)$$

d. h. der gesamte Druck D , welchen irgend ein Flächenstück f der Seitenwand eines Gefäßes von der Flüssigkeit erfährt, ist gleich dem Gewicht einer senkrechten Flüssigkeitssäule, welche die Fläche f zur Grundfläche und den Abstand y_0 ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel zur Höhe hat.

Der Gesamtdruck, der sich (von oben nach unten pro qcm größer werdend) auf die ganze Fläche f verteilt, kann durch eine resultierende Kraft D ersetzt werden, wenn es auf die Gesamtwirkung ankommt.

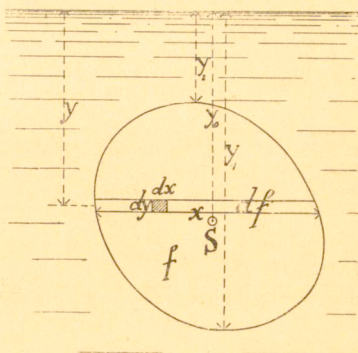
Bei der Bestimmung des Angriffspunktes dieser Resultante wollen wir uns auf drei einfache Fälle, die praktisch am häufigsten vorkommen, beschränken.

*) Die beiden Integrationen, welche wir hier nacheinander durchgeführt haben, pflegen wir auch formell durch das folgende Doppelintegral anzudeuten:

$$D = \int_{y_1}^{y_2} \int_0^x \gamma \cdot dx \cdot dy \cdot y$$

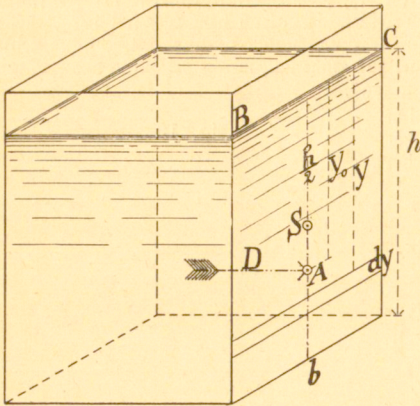
An diesem einfachen Beispiel lernen wir wieder, wie ein derartiges Doppelintegral mit 2 Variablen zu behandeln ist. Es ist gleichgültig, ob wir zuerst in horizontaler oder in vertikaler Lamelle integrieren.

Fig. 102.



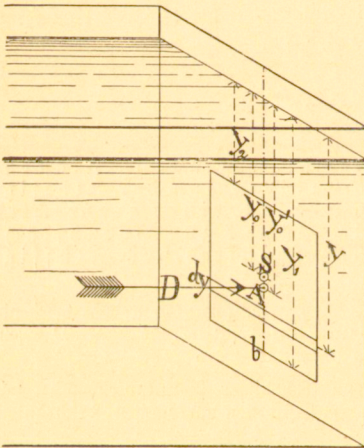
a) Die Seitenfläche f sei ein Rechteck, das sich vom Flüssigkeitsspiegel abwärts erstreckt (Schleusentor).

Fig. 103.



$$\text{Also } \gamma \cdot bh \cdot \frac{h}{2} \cdot y_0 = \gamma b \frac{h^3}{3}; \quad \text{folglich } y_0 = \frac{2}{3} h.$$

Fig. 104.



b) Die Seitenfläche f sei ein Rechteck, das unter dem Flüssigkeitsspiegel liegt und zwei horizontale Seiten B hat.

Nach der aus der Fig. 104 ersichtlichen Bezeichnung ist der Druck D , den die Flüssigkeit auf die rechteckige Fläche ausübt,

$B D = \gamma \cdot f \cdot y_0 = \gamma \cdot b \cdot (y_1 - y_2) \cdot y_0$ und zur Bestimmung des Angriffspunktes A der Resultante dient uns die auf BC als Achse bezogene Momentengleichung:

$$D \cdot y_0' = \int_{y_2}^{y_1} \gamma b \, dy \cdot y^2$$

$$= \gamma b \int_{y_2}^{y_1} y^2 \, dy = \gamma b \left. \frac{y^3}{3} \right|_{y_2}^{y_1}$$

$$\text{Also } \gamma b (y_1 - y_2) y_0 \cdot y_0' = \gamma b \frac{y_1^3}{3} - \frac{y_2^3}{3} \quad \text{oder } (y_1 - y_2) \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot y_0' = \frac{1}{3} (y_1^3 - y_2^3)$$

$$y_0' = \frac{2}{3} \cdot \frac{y_1^3 - y_2^3}{y_1 - y_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{y_1 + y_2}$$

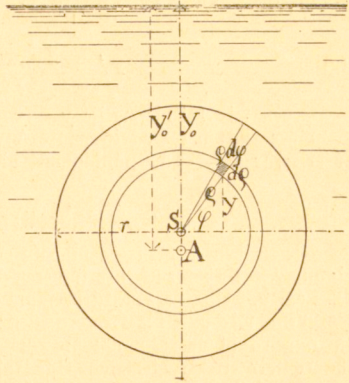
Bei Fig. 104 ist an die Ecke der Rückseite C zu setzen.

Fig. 105

c) Die Seitenfläche f sei eine Kreisfläche vom Radius r .

Hier ist der Flüssigkeitsdruck auf die Kreisfläche $D = \gamma \cdot \pi r^2 y_0$.

Stellen wir zur Bestimmung des Angriffspunktes A der Druckresultante D die Momentengleichung wie in den zwei vorhergehenden Fällen auf, so reichen die uns bis jetzt bekannten Integrationsgleichungen nicht aus um das Integral auszuwerten. Wir gelangen aber zum Ziele, wenn wir statt der rechtwinkligen Koordinaten Polarkoordinaten wählen und uns eines Doppelintegrals bedienen.



$$D \cdot y_0' = 2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=+\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \gamma \cdot \rho d\rho \cdot d\varphi \cdot (y_0 - \rho \sin \varphi)^2$$

Wir führen nun die Integration in der Weise aus, daß wir das Integral zunächst den Kreisring vom Radius ρ und der Dicke $d\rho$ entlang führen. Dabei spielen ρ und $d\rho$ die Rolle von Konstanten.

$$\begin{aligned} D \cdot y_0' &= 2\gamma \cdot \int_0^r \rho d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (y_0^2 - 2y_0\rho \sin \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) d\varphi \\ &= 2\gamma \cdot \int_0^r \rho d\rho \left[y_0^2 \varphi + 2y_0\rho \cos \varphi + \rho^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \right] \\ &= 2\gamma \cdot \int_0^r \rho d\rho \left[y_0^2 \varphi + 2y_0\rho \cos \varphi + \frac{\rho^2}{2} \varphi - \frac{\rho^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \cdot d(2\varphi) \right] \\ &= 2\gamma \cdot \int_0^r \rho d\rho \left[y_0^2 \cdot \varphi + 2y_0\rho \cos \varphi + \frac{\rho^2}{2} \varphi - \frac{\rho^2}{4} \sin 2\varphi \right] \\ &= 2\gamma \cdot \int_0^r \rho d\rho \left(y_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + y_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2\gamma\pi \int_0^r \rho d\rho \left(y_0^2 + \frac{1}{2}\rho^2 \right) \end{aligned}$$

Nun haben wir die Integration noch über alle Kreisringe von $\rho=0$ bis $\rho=r$ auszudehnen.

$$D \cdot y_0' = 2\gamma\pi \left[y_0^2 \frac{\rho^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^4}{4} \right] r \quad \text{oder} \quad \gamma\pi r^2 y_0 \cdot y_0' = \gamma\pi \left(y_0^2 r^2 + \frac{r^4}{4} \right)$$

Folglich

$$\underline{y_0' = \frac{y_0^2 + \frac{r^2}{4}}{y_0} = y_0 + \frac{r^2}{4y_0}}$$

Setzen wir beispielsweise $y_0 = r$. So wird $y_0' = \frac{5}{4}r$. Je größer y_0 wird, desto näher rückt der Angriffspunkt A an den Mittelpunkt des Kreises; er fällt aber erst für $y_0 = \infty$ vollständig mit diesem zusammen.

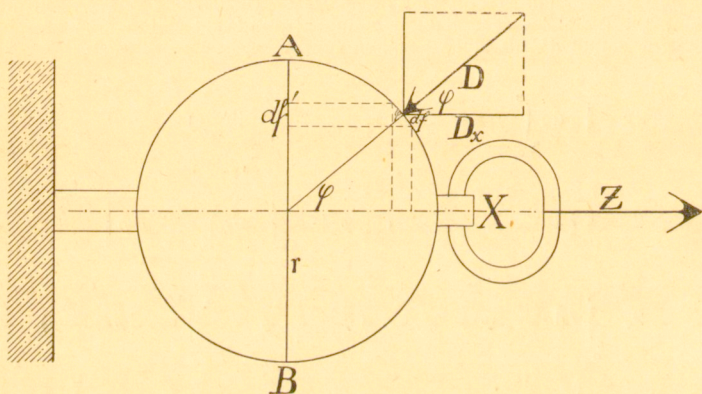
Die „Magdeburger Halbkugeln“.

Die beiden hohlen Halbkugeln liegen längs des Randes AB luftdicht aneinander. Der Druck der äußeren Luft sei B, der der Luft in der Hohlkugel noch b, beide in Quecksilberfäule gemessen.

Wenn wir nun die Frage stellen: welche Kraft Z muß in axialer Richtung angewandt werden um die eine Halbkugel von der andern loszureißen, so haben wir ein Problem, das eine Infinitesimalbetrachtung erfordert, zu lösen. Wir haben den Gesamtdruck der Luft zu berechnen, der die eine Halbkugel an die andere anpreßt. Dieser ist beim Abreißen zu überwinden.

Wir denken uns die Halbkugel rechter Hand mosaik- oder facettenartig in unendlich kleine Flächenelemente df geteilt.

Fig. 106.



Der Druck der äußeren Luft ist pro qcm $P = 1 \cdot B \cdot 13,596$ (g),
(B in cm gemessen).

Der Druck der inneren Luft beträgt pro qcm $p = 1 \cdot b \cdot 13,569$ (g).

Der von außen radial nach innen wirkende Überdruck also

$$P - p = (B - b) 13,596$$
 (g)

und der auf ein Flächenelement df treffende Überdruck ist

$$D = df \cdot (B - b) \cdot 13,596$$
 (g).

zerlegen wir diese nach dem Kugelmittelpunkt gerichtete Kraft D in 2 Komponenten parallel und normal zur X-Achse gerichtet, so ist die zur X-Achse parallele Komponente $D_x = D \cos \varphi$.

Nur diese Komponenten D_x kommen hier in Frage. Ihre Summe preßt die eine Halbkugel an die andere.

Die Kraft Z muß die Summe dieser Komponenten überwinden, wenn sie die Halbkugel rechterhand losreißen soll. Also muß mindestens

$$Z = \sum D_x = \int df \cdot \cos \varphi (B - b) \cdot 13,596 \text{ (g)}.$$

Dieses Integral erstreckt sich auf die ganze rechteitige Halbkugel. Der Neigungswinkel des Flächenelementes df gegen die zur X-Achse normale Ebene AB ist ersichtlich $= \varphi$.

Folglich ist die Projektion des Flächenelementes df auf diese Ebene

$$df' = df \cdot \cos \varphi. \quad \text{Siehe S. 39.}$$

$$\text{Nun ist} \quad Z = (B - b) \cdot 13,596 \int df'.$$

Dieses Integral stellt die Projektion der Halbkugeloberfläche auf die Ebene dar, ist also der Flächeninhalt des kreisförmigen Querschnitts vom Radius r und es ist schließlich $Z = \pi r^2 \cdot (B - b) \cdot 13,596 \text{ (g)}$

wenn r , B und b in cm ausgedrückt sind.

Die Kraft Z hat den Luftdruck zu überwinden, der auf die Querschnittsfläche der Kugel, auf die Fläche eines größten Kreises der Kugel, trifft.

Bei dem berühmten Experiment, das der geniale Bürgermeister von Magdeburg, Otto von Guericke, gelegentlich des Reichstages von Regensburg im Jahre 1654 vor dem Kaiser Ferdinand III. und den Reichsfürsten ausführte, betrug der Durchmesser der Halbkugeln $\frac{2}{3}$ Ellen, der Querschnitt der Kugel ungefähr 200 Quadratfuß und bei nahezu vollständig ausgepumpter Luft der äußere Luftdruck, der eine Halbkugel an die andere anpreßte, $200 \cdot 14 \text{ Pfd.} = 2800 \text{ Pfd.}$ Die 16 Pferde (auf jeder Seite 4 Paar) sollen alle Mühe gehabt haben die Halbkugeln auseinander zu reißen, was schließlich mit einem gewaltigen Knall erfolgte. Es traf also auf jedes Pferd eine Zugkraft von mindestens 350 Pfd.

Rechnen wir das in unseren Maßen nach und nehmen den äußeren Luftdruck zu 72 cm, den Innendruck nach dem Auspumpen der Luft noch zu 2 cm, so finden wir für $Z = 3,1416 \cdot 22^2 (72 - 2) \cdot 13,596 \text{ (g)} = 1448 \text{ Kg}$ (1 Elle = 0,66 m) und für die aufgewendete Zugkraft pro Pferd 181 Kg. Das wäre noch keine übermäßige Kraftentwicklung für ein mittleres Pferd. Wir müssen uns eben vergegenwärtigen, daß es nicht sofort gelingt 16 Pferde zum gleichmäßigen Anziehen zu bringen.

Der Versuch erschien natürlich imposanter, wenn auf jeder Seite 4 Paar Pferde anzogen. Ein Blick auf unsere Fig. 106 belehrt uns aber, daß die 4 Gespanne der einen Seite durch einen Baumstamm, der durch starke Wurzeln gut in der Erde verankert ist, oder durch eine solid fundierte Mauer, an der wir die Kugel mit der einen Seite befestigen, ersetzt werden können.

Weitere Anwendungen unserer drei Integrale finden wir bei der

Berechnung der Trägheitsmomente von einfachen Linien, Flächen und Körpern.

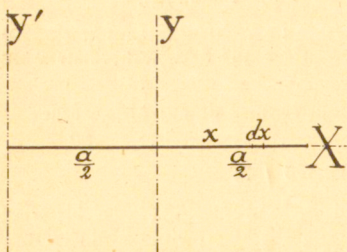
Wenn wir die Bewegungen von Körpern, welche um Achsen rotieren oder schwingen (Pendel), studieren, so stoßen wir auf Integrale von folgender Form:

$\int dm \cdot r^2$; worin dm die „Masse“ eines unendlich kleinen Körpers (eines materiellen Punktes) und r seinen Abstand von der Rotations- oder Schwingungsachse bezeichnet. Den Wert dieses Integrals heißen wir das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die gegebene Achse. Wir können darunter auch die auf den Radius 1 reduzierte Masse verstehen, d. h. jene Masse, welche im Abstand 1 von der Achse angebracht (gedacht) dieselbe Massenwirkung besitzt, wie die Masse des gegebenen oder angenommenen Körpers.

1. Aufg. Trägheitsmomente einer geraden Strecke.

Fig. 107.

Wir denken uns dieselbe aus sehr feinem, geradem Draht. Die Masse der Längeneinheit sei μ , dann ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Mittellotrechte Y als Achse



$$T_0 = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \mu dx \cdot x^2 = 2\mu \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx$$

$$= 2\mu \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{a}{2}} = 2\mu \cdot \frac{a^3}{24} = \frac{1}{12} \mu a^3.$$

Und wenn wir die Masse M der Strecke einsetzen, so ist $\mu \cdot a = M$, also

$$\underline{T_0 = \frac{1}{12} M a^2.}$$

Das Trägheitsmoment derselben Drahtstrecke in bezug auf eine durch ihren Anfangspunkt gehende senkrechte Achse Y' ist

$$T = \int_0^a \mu dx \cdot x^2 = \mu \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{1}{3} \mu a^3 = \frac{1}{3} M a^2.$$

2. Aufg. Trägheitsmoment einer materiellen Kreislinie.

Fig. 108.

a) Die Achse Z stehe im Mittelpunkt auf der Ebene des Kreises senkrecht. (Z -Achse).

$$T_z = \int_0^{2\pi} \mu \cdot r d\varphi \cdot r^2 = \mu r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \mu \cdot 2\pi r^3 = \underline{M r^2.}$$

b) Die Achse sei ein Durchmesser, etwa die X -Achse.

$$T_x = 2 \int_0^{\pi} \mu \cdot r d\varphi (r \sin \varphi)^2$$

$$= 2\mu r^3 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi$$

Wir substituieren $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ und $d\varphi = \frac{1}{2} d(2\varphi)$, dann wird

$$T_x = \frac{1}{2} \mu r^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d(2\varphi) = \frac{1}{4} \mu r^3 [2\varphi - \sin 2\varphi]_0^{\pi} = \frac{1}{4} \mu r^3 \cdot 2\pi = \underline{\frac{1}{2} M r^2.}$$

3. Aufg. Trägheitsmoment einer Rechtecksfläche.

Die Masse der Flächeneinheit sei μ . Wir stellen uns eine Fläche aus sehr dünnem Blech hergestellt vor.

a) Die Achse (X-Achse) geht durch den Schwerpunkt und ist parallel zu zwei Seiten.

$$T_x = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \int_0^b \mu \cdot dx \, dy \cdot y^2.$$

Wir integrieren hier zunächst längs der zur X-Achse parallelen Lamelle.

$$T_x = 2\mu \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \, dy \int_0^b dx = 2\mu \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \, dy \cdot b.$$

Wir hätten die letzte Form gleich von vorne herein ansetzen können.

$$T_x = 2\mu b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \, dy = 2\mu b \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^{\frac{h}{2}} = 2\mu b \cdot \frac{h^3}{24} = \frac{1}{12} \mu b h^3 = \frac{1}{12} M h^2$$

wenn $M = \mu b h$ die Masse des Rechtecks bezeichnet.

b) Das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse X' ist

$$T_{x'} = \mu b \int_0^h y^2 \, dy = \mu b \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^h = \frac{1}{3} \mu b h^3 = \frac{1}{3} M h^2.$$

Dem Integral $\int df \cdot y^2$ begegnen wir auch in der Festigkeitslehre. Der Form wegen heißen wir auch diesen Ausdruck, der dort eine große Rolle spielt, „Trägheitsmoment“, obwohl der Massenfaktor μ darin nicht auftritt und es sich auch nicht um eine Bewegung handelt (Mathematisches Trägheitsmoment). Wir sprechen dort vom Trägheitsmoment des Querschnitts eines Trägers. Von seinem Wert hängt die Tragfähigkeit des Trägers ab. (Genauer gesagt: vom sogen. „Widerstandsmoment“ $W_x = T: \frac{1}{2} h = \frac{1}{6} b h^2$). Das Trägheitsmoment des Querschnitts eines horizontalen Balkens in bezug auf die horizontale Mittelachse dieses rechteckigen Querschnitts ist also

$$T_x = \frac{1}{12} b h^3.$$

4. Aufg. Trägheitsmoment einer Kreisfläche.

a) Die Achse Z steht im Mittelpunkt senkrecht zur Kreisfläche.

$$T_z = 4 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \mu \rho \, d\varphi \cdot d\rho \cdot \rho^2.$$

Wir integrieren hier zunächst den Kreisring entlang, wobei ρ die Rolle einer Konstanten spielt.

$$T_z = 4\mu \int_0^r \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Fig. 109.

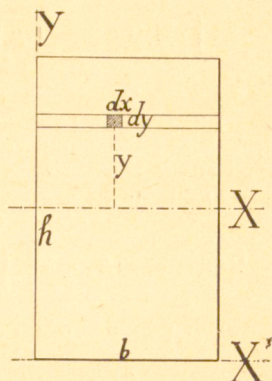
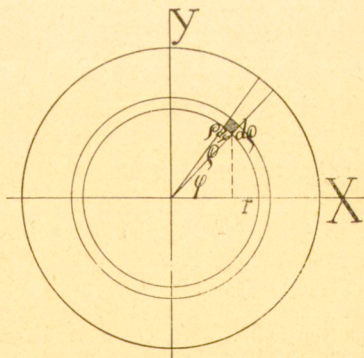


Fig. 110.



$$= 4\mu \int_0^r \varrho^2 d\varrho \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi\mu \int_0^r \varrho^3 d\varrho = 2\pi\mu \frac{\varrho^4}{4} \Big|_0^r = \frac{1}{2} \pi \mu r^4 = \underline{\underline{\frac{1}{2} Mr^2}},$$

wenn $M = \pi r^2 \cdot \mu$.

Wir sehen leicht ein, daß wir dasselbe Resultat erhalten, wenn wir die Reihenfolge der Integrationen umkehren, wenn wir zuerst nach ϱ integrieren, wobei dem φ vorerst die Rolle einer Konstanten zufällt, und dann erst nach φ .

b) Die Achse sei ein Durchmesser, etwa die X-Achse.

$$\text{In diesem Fall ist } T_x = 4 \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu \cdot \varrho d\varphi \cdot d\varrho \cdot (\varrho \sin \varphi)^2 = 4\mu \int_0^r \varrho^3 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Wir nehmen hier dieselbe Substitution wie bei Aufg. (2) vor und erhalten

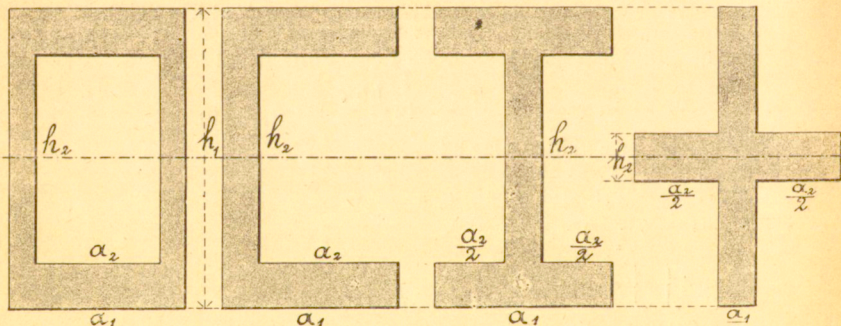
$$\begin{aligned} T_x &= 4\mu \int_0^r \varrho^3 d\varrho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{4} d(2\varphi) = \mu \int_0^r \varrho^3 d\varrho \cdot \left[2\varphi - \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \mu \int_0^r \varrho^3 d\varrho \pi = \mu \pi \int_0^r \varrho^3 d\varrho = \pi\mu \cdot \frac{\varrho^4}{4} \Big|_0^r = \frac{1}{4} \mu \cdot \pi r^4 = \underline{\underline{\frac{1}{4} Mr^2}}. \end{aligned}$$

Ist der Querschnitt eines Trägers ein Kreis, so ist das mathematische Trägheitsmoment dieses Trägerquerschnitts in bezug auf die Mittelachse des Querschnitts

$$\underline{\underline{T_x = \frac{1}{4} \pi r^4}}.$$

5. Aufg. Bestimme das Trägheitsmoment von Querschnittsformen, die sich aus Rechtecken zusammensetzen lassen, wie Fig. 111 einige zeigt!

Fig. 111.



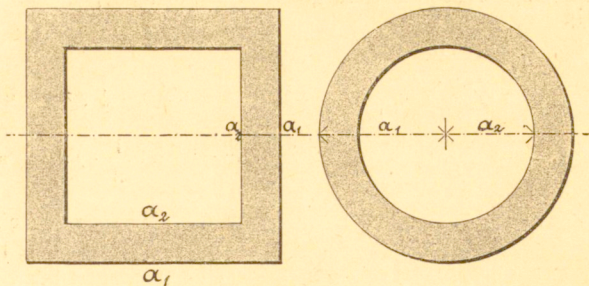
$$T = \frac{1}{12} (a_1 h_1^3 - a_2 h_2^3).$$

$$T = \frac{1}{12} (a_1 h_1^3 + a_2 h_2^3).$$

Nach der Formel für das Trägheitsmoment ist ohne weiteres klar, daß das Trägheitsmoment eines hohlen Querschnitts gleich der Differenz zwischen dem T des vollen Querschnitts (Rechtecks) und dem Trägheitsmoment der fehlenden Flächen ist. Wir können dazu auch noch die am Schlusse dieses Abschnitts entwickelte Gleichung ($T_x = T_0 + Fa^2$) benötigen.

6. Aufg. Bestimme auch noch das Trägheitsmoment eines Kreistrings!

Fig. 112.



$$T = \frac{1}{12} (a_1^4 - a_2^4)$$

$$T = \frac{1}{4} \pi (a_1^4 - a_2^4).$$

Fig. 113.

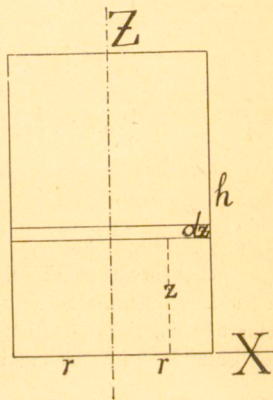
7. Aufg. Trägheitsmoment eines senkrechten Kreiszylinders in bezug auf seine Achse.

Es bezeichne μ die Masse der Volumeneinheit. Denken wir uns den Zylinder durch parallele Ebenen, welche auf seiner Achse senkrecht stehen, in unendlich dünne Lamellen zerschnitten, so ist das Trägheitsmoment einer solchen Lamelle nach Aufg. 4, a

$$dT_z = \frac{1}{2} \mu \pi r^4 dz.$$

$$\text{Also } T_z = \int_0^h \frac{1}{2} \mu \pi r^4 dz = \frac{1}{2} \mu \pi r^4 h = \frac{1}{2} M r^2,$$

wenn M die Masse des Zylinders bezeichnet.



8. Aufg. Trägheitsmoment eines senkrechten Kreiskegels in bezug auf seine Achse Z.

Fig. 114.

Das Trägheitsmoment einer unendlich dünnen, zur Z-Achse senkrechten Lamelle ist

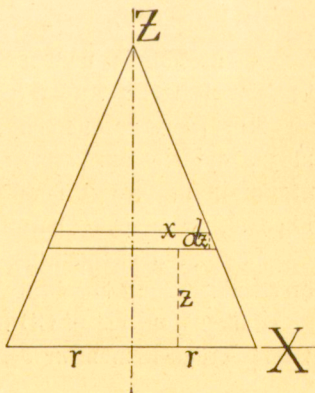
$$dT_z = \frac{1}{2} \mu \pi x^4 dz.$$

$$\text{Also } T_z = \int_0^r \frac{1}{2} \mu \pi x^4 dz = \frac{1}{2} \mu \pi \int_0^r x^4 dz.$$

Es verhält sich $dz : dx = h : r$,

$$\text{hieraus } dz = \frac{h}{r} dx.$$

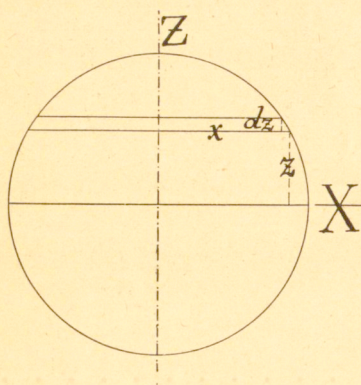
$$\begin{aligned} \text{Also } T_z &= \frac{1}{2} \mu \pi \frac{h}{r} \int_0^r x^4 dx = \frac{1}{2} \mu \pi \frac{h}{r} \cdot \frac{r^5}{5} \\ &= \frac{1}{10} \mu \pi r^4 h = \frac{3}{10} M r^2. \end{aligned}$$



9. Aufg. Trägheitsmoment einer Kugel in bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse.

Das Trägheitsmoment einer zur Z-Achse senkrechten, unendlich dünnen Lamelle ist

Fig. 115.



$$dT_z = \frac{1}{2} \mu \pi x^4 \cdot dz.$$

$$\text{Also } T_z = \frac{1}{2} \cdot \mu \pi \int_{-r}^r x^4 dz.$$

$$\text{Nun ist } x^2 + z^2 = r^2,$$

$$\text{also } x^4 = (r^2 - z^2)^2.$$

Dies substituiert gibt

$$T_z = \frac{1}{2} \mu \pi \int_{-r}^r (r^4 - 2r^2 z^2 + z^4) dz$$

$$= \frac{1}{2} \mu \pi \left[r^4 z - \frac{2}{3} r^2 z^3 + \frac{z^5}{5} \right]_{-r}^r$$

$$= \frac{1}{2} \mu \pi \cdot 2 \left(r^5 - \frac{2}{3} r^5 + \frac{r^5}{5} \right) = \mu \pi \cdot \frac{8}{15} r^5 = \underline{\underline{\frac{2}{5} Mr^2}}.$$

Aufgaben :

Berechne das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders, einer Hohlkugel, einer Kugelfläche, eines Ringes (wenn der Querschnitt ein Rechteck, ein Kreis, eine Ellipse), eines Rotationsellipsoids, eines Sphäroids, eines Paraboloids — in jedem Fall in bezug auf die Rotationsachse des Umdrehungskörpers.

Zum Schlusse wollen wir noch einen Satz anführen, der bei der Lösung vieler Aufgaben mit Vorteil verwendet werden kann.

Wir setzen voraus, daß das Trägheitsmoment T_0 einer Fläche in bezug auf eine durch ihren Schwerpunkt gehende Achse bereits bekannt ist und fragen nach dem Trägheitsmoment in bezug auf eine Achse, welche zu jener parallel ist und von ihr den Abstand a hat.

Das Trägheitsmoment der Fläche F in bezug auf die durch ihren Schwerpunkt S gehende Achse CD sei $T_0 = \int df \cdot y^2$.

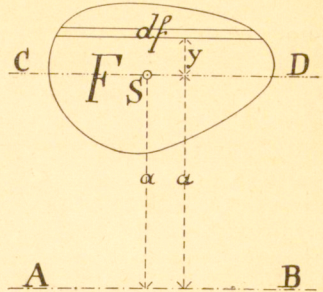
In bezug auf die zu CD im Abstand a gelegte parallele Achse AB ist das Trägheitsmoment derselben Fläche

Fig. 116.

$$\begin{aligned}
 T &= \int df \cdot (a + y)^2 \\
 &= \int df \cdot a^2 + \int df \cdot 2ay + \int df \cdot y^2 \\
 &= a^2 \int df + 2a \int df \cdot y + \int df \cdot y^2 \\
 &= \underline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^2} + \underline{\mathbf{T}_0};
 \end{aligned}$$

denn $\int df \cdot y = F \cdot y_0$, wenn y_0 den Abstand des Schwerpunktes der Fläche F von der Achse CD bezeichnet.

Nun ist nach unserer Voraussetzung $y_0 = 0$, also ist auch $\int df \cdot y = 0$.



Wir ersehen aus den bisher gelösten Aufgaben, daß wir in den drei Integralen:

$$\int_b^a x^n dx = \frac{x^n}{n} \Big|_b^a, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \quad \int \sin \varphi d\varphi = -\cos \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

einen Mechanismus besitzen, der eine größere Zahl von Aufgaben — und ihre Zahl kann leicht noch vermehrt werden — aus den verschiedenen Gebieten der Mathematik, Physik, Mechanik und Technik zu lösen gestattet.

Sonthofen, Herbstferien 1909.

Dr. Gottlieb Herting,

R. Gymnasialprofessor und Diplom-Ingenieur.



GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

Druckfehlerberichtigung:

S. 7 Zeile 8 v. v. linkerhand soll heißen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

S. 53 Zeile 8 v. u. die Formel für $\frac{d}{2}$ gehört zu Fig. 42; für Fig. 41 ist $h' = 0$ zu setzen.

S. 135 Zeile 8 v. u. linkerhand soll lauten:

$$\int_b^a x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_b^a$$

