

# Praca doktorska

Tomasz Łodygowski

GEOMETRYCZNIE NIELINIOWA ANALIZA  
SZTYWNO-PLASTYCZNYCH  
I SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH  
BELEK I RAM PŁASKICH

9 / 1982

P. 269

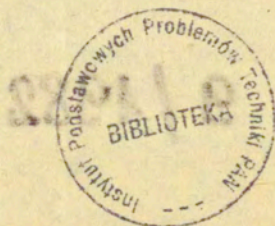


WARSZAWA 1982

Promotor: doc.dr hab.inż. Maria Duszek

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 lutego 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 9/1982



57065



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 150 egz. Ark. wyd. 6,75. Ark. druk. 9,5  
Oddano do drukarni w marcu 1982 r.  
Nr zamówienia 104/0/82 Z-97

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

Tomasz Łodygowski  
Zakład Wytrzymałości Materiałów  
Instytut Technologii i Konstrukcji Budowlanych  
Politechnika Poznańska

## GEOMETRYCZNIE NIELINIOWA ANALIZA SZTYWNO-PLASTYCZNYCH I SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH BELEK I RAM PŁASKICH

### 1. Uwagi wstępne

#### 1.1. Wprowadzenie i cel pracy

Typowymi elementami konstrukcyjnymi znajdującymi szerokie zastosowanie w budownictwie są belki i ramy. Ze względu na wymagania użytkowe konstrukcje te w stanie obciążonym wykazują niewielkie zmiany geometrii. Równowaga układu osiągnięta jest w konfiguracji nieznacznie odbiegającej od początkowego, nieobciążonego stanu konstrukcji. Dlatego analizując omawiane układy statyczne przyjmuje się zwykle założenie w postaci tzw. zasady zeszywnienia.

Wymagania praktyczne nowoczesnego budownictwa, przemysłu maszynowego i innych działów inżynierii doprowadziły do konieczności uwzględnienia w obliczeniach zarówno nieliniowości natury fizycznej jak i geometrycznej. Uwzględnienie tych efektów pozwala na dokładniejsze ocenienie zdolności konstrukcji do przeniesienia obciążeń.

W analizie tej wykorzystywane są modele materiałów sztywno-plastycznego bądź sprężysto-plastycznego przy użyciu nieliniowego opisu kinematyki procesu deformacji.

Geometrycznie liniowa analiza konstrukcji sztywno-plastycznych prowadzi do wyznaczenia nośności granicznej konstrukcji a więc takiej intensywności obciążenia, przy której rozpoczyna się proces deformacji plastycznych. Uwzględniając, w opisie kinematyki procesu deformacji, człony geometrycznie nieliniowe

można rozważyć charakter pozagranicznego zachowania się konstrukcji. Istotnym jest tutaj odpowiedź na pytanie czy konstrukcja w chwili osiągnięcia nośności granicznej zachowuje się statecznie.

Jeżeli deformacje sprężyste analizowanych konstrukcji są odpowiednio małe to uzasadnionym jest przyjęcie modelu sztywno-plastycznego. Model ten z wystarczającą dokładnością opisuje zachodzące w konstrukcji zmiany jakościowe. Wykorzystanie modelu sprężysto-plastycznego umożliwi natomiast przeprowadzenie analizy ilościowej. W tych przypadkach gdy już w stanie sprężystym występują w układzie istotne zmiany geometrii użycie modelu sztywno-plastycznego prowadzi do błędnego opisu pracy konstrukcji. Sztywno-plastyczny model materiału w zasadzie utworzony został z myślą o analizie granicznej i siłą rzeczy nie może służyć do precyzyjnego określania stanu przemieszczeń. Istnieją jednak metody, które opierając się na rozwiązaniach nośności granicznej, umożliwiają określenie charakteru zachodzących procesów w stanie pozagranicznym. Są one częścią niniejszego opracowania.

Niewiele jest prac dotyczących fizycznie i geometrycznie nieliniowej analizy konstrukcji ramowych i belkowych, które opierając się na ścisłych podstawach matematycznych prowadzą do efektywnych programów numerycznych. Niewiele jest także prac porównujących konsekwencje płynące z przyjęcia różnych modeli materiałów.

Obecne opracowanie poświęcone jest w szczególności zagadnieniom zmian geometrii konstrukcji belkowych i ramowych i związanym z tym problemem stateczności oraz współdziałania sił osiowych i momentów zginających. Praca dotyczy także weryfikacji przydatności powszechnie stosowanego modelu ciała sztywno-plastycznego w stosunku do materiału sprężysto-plastycznego, do analizy zachowania się wymienionych konstrukcji.

Szczególnie zwrócono uwagę w opracowaniu na następujące zagadnienia :

- 1) opracowanie metod analizy konstrukcji belkowych i ramowych w zakresie nieliniowych zmian geometrii (dużych przemieszczeń),
- 2) porównanie zachowania się tych samych konstrukcji przy przyjęciu różnych modeli materiałów.

W przedstawionych w pracy przykładach numerycznych ograniczono

się do rozwiązania prostych zadań. Ilustrują one zachowanie się konstrukcji przy zastosowaniu prezentowanych koncepcji rozwiązań. Nie ma jednak zasadniczych przeszkód by za pomocą proponowanych metod rozwiązywać problemy o znacznie większej liczbie stopni swobody.

## 1.2. Zakres pracy

Przedmiotem pracy są płaskie sztywno-plastyczne i sprężysto-plastyczne konstrukcje belkowe i ramowe obciążone siłami skupionymi w skończonej liczbie przekrojów. Rozpatrywane są zagadnienia quasistatyczne (efekty bezwładnościowe mogą być pominięte). Obciążenia są jednoparametrowe i zachowawcze.

Praca podzielona jest na siedem rozdziałów. Rozdział 2 zawiera definicje pojęć podstawowych, wykorzystywanych w pracy. Podano w nim omówienie przyjętych modeli praw fizycznych jako idealizacji rzeczywistego zachowania się materiałów. Przedyskutowano pojęcia stateczności zarówno materiałowej jak i stateczności konstrukcji. Wprowadzono pojęcie uogólnionych naprężeń i odkształceń. Definicje zawarte w tym rozdziale opierają się na pracach: R. HILLA [50], M.K. DUSZEK [33,34], B. STORÅKERSA [92], P.G. HODGE'A [58], W. OLSZAKA i in. [81], D.C. DRUCKERA [30], A. SAWCZUKA [90], W. PRAGERA [85].

Rozdziały 3 i 4 dotyczą analizy konstrukcji sztywno-plastycznych. Na podstawie prac [31], [33] w rozdz.3 podjęto próbę sformułowania kryteriów stateczności konstrukcji sztywno-plastycznej wyrażonych w uogólnionych naprężeniach i odkształceniach oraz ich prędkościach, przy określonych (z zadania nośności granicznej) polach statycznie i kinematycznie dopuszczalnych. Podano także kryteria stateczności regularnych, ortogonalnych ram wielonawowych i wielopiętrowych [71]. Przedstawione przykłady ram wykazują, iż o stateczności układów decydują znaki sił osiowych. Podobnie jak w nośności granicznej tak i przy badaniu stateczności posłużono się pojęciem uogólnionego przegubu plastycznego. Założono, że przeguby plastyczne występują w określonych przekrojach, reszta konstrukcji pozostaje idealnie sztywna.

Rozdz.4 zawiera analizę pozagranicznego zachowania się kons-

trukcji. Rozpatrzono różne warianty kinematyki procesów deformacji plastycznych a mianowicie : kinematyka zgodna z mechanizmem początkowym (tworzącym się w chwili osiągnięcia nośności granicznej) oraz kinematyka, w której występuje możliwość zmiany mechanizmu w wyniku zaawansowanych zmian geometrii występujących na skutek odkształceń plastycznych. Ten ostatni efekt analizowano przy zastosowaniu twierdzenia ekstremalnego cytowanego w rozdz.2.6 . Zaproponowano przyrostowo-minimalizacyjne procedury, zanalizowano efekty jakościowe polegające na możliwości wystąpienia zmian mechanizmów zniszczenia w procesie deformacji.

Na prostych przykładach zilustrowano również wpływ przyjętego warunku plastyczności (interakcje momentu zginającego i siły osiowej) na pozagraniczne zachowanie się konstrukcji. W rozdziale tym omawia się również pozagraniczną analizę belek obustronnie utwierdzonych z możliwością przemieszczania się podpór. Możliwość wystąpienia ruchu poziomego podpór zależy od intensywności sił osiowych występujących w belce. Stosując wspólne podejście przyrostowe rozważono następujące przypadki: sprężyste poddanie się podpory, ruch podpór przy stałej sile osiowej oraz przy sile tarcia, a także zachowanie się ramy portalowej przy wystąpieniu mechanizmu belkowego.

Istotną częścią pracy jest rozdz.5 dotyczący analizy konstrukcji sprężysto-plastycznych. Spośród publikowanych w literaturze metod geometrycznie i fizycznie nieliniowej analizy ram, dostępne w kraju są jedynie programy, zaproponowane przez M. SARANA [86], sformułowane w kategoriach programowania matematycznego. W niniejszej pracy zaproponowano odmienną metodę nieliniowej analizy ram wykorzystującą koncepcję warstwowego elementu skończonego [74]. Zaletą tego podejścia jest między innymi możliwość analizowania zasięgu stref plastycznych i lokalnego odciążania warstw w procesie narastających obciążeń. Warunki plastyczności formułowane są lokalnie dla warstw. Daje to możliwość analizy konstrukcji warstwowych lub zbrojonych. W tej części pracy zrezygnowano z często wykorzystywanej koncepcji uogólnionego przegubu plastycznego.

W rozdz.6 podano porównanie zachowania się wybranych kons-

trukcji sztywno-plastycznych i sprężysto-plastycznych. Porównań tych dokonano za pomocą wykresów obciążenie-przemieszczenie. Zakładając, że model sprężysto-plastyczny wierniej opisuje materiał rzeczywistych konstrukcji, oceniono przydatność analizy przy wykorzystaniu modelu sztywno-plastycznego. Sformułowano także uwagi końcowe i wnioski.

Rozdz.7 przedstawia spis pozycji bibliograficznych cytowanych w pracy. W dwóch dodatkach podano informacje o programach EPLDF i SFRP, za pomocą których analizowano prętowe konstrukcje sprężysto-plastyczne (wyniki numeryczne cytowane w rozdz.5).

### 1.3. Przegląd literatury problemu

Fundamentalne dzieła z teorii plastyczności wykorzystywane w niniejszym opracowaniu to monografie R. HILLA [50], W. OLSZAKA i in. [81], A. SAWCZUKA [90], L.M. KACZANOWA [63] zawierające m.in. podstawowe twierdzenia teorii plastycznego płynięcia oraz podstawy teorii nośności granicznej konstrukcji. Analiza konstrukcji plastycznych, ściśle związana z pojęciem nośności granicznej, wykorzystuje twierdzenia sformułowane w pracach A.A. GWOZDIEWA [45] i W. PRAGERA [84]. Uwzględnienie nieliniowych zmian geometrii pociąga za sobą konieczność użycia właściwych opisów kinematyki procesów deformacji oraz stosowania odpowiednich (sprzężonych) miar naprężeń i odkształceń. Wśród prac monograficznych nt. nieliniowej mechaniki, wykorzystywanych w pracy, należy wymienić: A.C. ERINGENA [37], Y.C. FUNGA [39], W. PRAGERA [85]. Pewne aspekty związane z nieliniową analizą konstrukcji zawarte są w przeglądowej pracy W. GUTKOWSKIEGO, J. OSIECKIEGO i A. SAWCZUKA [44]. Zagadnienia geometrycznie nieliniowej teorii plastyczności omawiane są w pracy M.K. DUSZEK [34], zaś wybrane problemy inżynierskie porusza praca W. JOHNSONA i P.B. MELLORA [61]. Wśród ogólnych uwag o literaturze problemu wymienić jeszcze należy dalsze znane pozycje monograficzne traktujące o podstawach metody elementów skończonych oraz budowie programów numerycznych tej metody, zwłaszcza dotyczących zagadnień fizycznie i geometrycznie nieliniowych. Szczególnie użyteczne okazały się prace K.J. BATHE

i E.L. WILSONA [14], C.S. DESAI'A, J. E. ABELA [27], R.H. GALLAGHERA [40], E. HINTONA i D.R.J. OWENA [57] oraz O.C. ZIENKIEWICZA [98].

Teorię nośności granicznej w zastosowaniu do ram płaskich prezentują m.in. prace A. SAWCZUKA [88], J. HEYMANA [48], P.G. HODGE'A [58], zaś podstawy projektowania ram J. BAKERA i J. HEYMANA [11]. Warunek plastyczności wyrażony w uogólnionych naprężeniach sprowadza się zwykle wyłącznie do działania momentu granicznego w przekroju. Uwzględnienie w warunku granicznym wpływu sił normalnych rozpatrywał m.in. P.G. HODGE w monografii [58]. Przy określaniu nośności granicznej wygodne okazuje się sformułowanie problemu w kategoriach programowania matematycznego, co znalazło wyraz w pracach A.A. CZYRASA [25], H. TANAKI [93], G. MAIERA [75], G. MAIERA, R. SPINIVASANA, M. SAVE'A [77], G. MAIERA, D.E. GRIERSONA, M.J. BESTA [76] oraz D.E. GRIERSONA, M.L. GLADWELLA [42]. Zagadnienia nośności granicznej i optymalizacji konstrukcji sztywno-plastycznych, przy wykorzystaniu programowania matematycznego są przedmiotem rozprawy A. BORKOWSKIEGO [17]. Metoda sztywno-plastycznych elementów skończonych zaproponowana przez A. BORKOWSKIEGO [18] wraz z wykorzystaniem metod programowania liniowego umożliwia rozwiązanie problemów nośności granicznej ram płaskich przedstawionych przez M. SARANA, A. BORKOWSKIEGO, [87]. W cytowanej pracy podano różne sposoby linearyzacji warunku granicznego uwzględniające wpływ sił osiowych na osiągnięcie stanu granicznego w przekroju. Zastosowanie programowania kwadratowego w dysertacji M. SARANA [86] umożliwiło uwzględnienie zmian geometrii i określenie ich wpływu na nośność graniczną ram płaskich. W pracy B. BONI i M. SARANA [16] wykorzystano bezpośrednio siły przekrojowe przy formułowaniu warunku plastyczności. Podobne sformułowanie problemów, opierające się na metodach programowania matematycznego, prezentują prace S.B. ABDEL-BASETA, D.E. GRIERSONA, N.C. LINDA [1], M.Z. COHNA i H. ABDEL-ROHMANA [23], M.Z. COHNA i A. FRANCHI'EGO [24]. Ta ostatnia przedstawia system programów (STRUPL) umożliwiających analizę graniczną konstrukcji sprężysto-plastycznych. Warto tutaj wspomnieć, że warunki graniczne zapisane dla przekroju opierają się na koncepcji uogólnionego



przegubu plastycznego. Zakłada się idealnie sprężystą lub sztywną pracę całego przekroju gdy aktualny stan uogólnionych naprężeń zawarty jest we wnętrzu obszaru granicznego, lub uplastycznienie całego przekroju gdy siły przekrojowe spełniają warunek plastyczności. Nie opisuje się sytuacji, w której uplastycznieniu podlega część przekroju, nie rozważa się również możliwości odciążenia przekroju lub jego części w wyniku występujących zmian geometrii. Zagadnienia te są uwzględnione w niniejszym opracowaniu.

Z punktu widzenia zastosowań inżynierskich istotne jest uwzględnienie obciążeń niejednoparametrowych oraz badanie przystosowania się konstrukcji do założonego programu obciążeń. Zagadnienia te były przedmiotem rozprawy J.A. KÖNIGA [68]. W aspekcie użytecznym do projektowania belek i ram zostały przedstawione w pracy J.A. KÖNIGA, A. SAWCZUKA i W. PAPROCKIEJ-GRABCZYŃSKIEJ [69].

Analiza układów ramowych w zaawansowanych stanach plastycznych związana jest z pojęciami stateczności i jednoznaczności rozwiązań tych problemów. Należy w tym miejscu wspomnieć o serii prac R. HILLA [51-55] opisujących dowolnie duże odkształcenia plastyczne poprzedzone sztywnym bądź sprężystym zachowaniem się konstrukcji. W pracach tych sformułowano kryteria jednoznaczności i stateczności, stanowiące podstawę wielu istniejących programów numerycznych. Podobnymi zagadnieniami zajmowali się także B. STORÅKERS [92] oraz M.K. DUSZEK np. [34], która odpowiednio warunki stateczności i jednoznaczności sformułowała w opisie Lagrange'a. Definicję stateczności materiałowej (postulat Druckera) sformułował D. C. DRUCKER [30]. Problemy stateczności konstrukcji sztywno-plastycznych w chwili osiągnięcia nośności granicznej były przedmiotem rozważań M.K. DUSZEK [31], a w szczególności określenie warunków stateczności konstrukcji ramowych podają prace M.K. DUSZEK i A. SAWCZUKA [35,36]. Wspecyfikowanie odpowiednich zależności dla ram ortogonalnych było przedmiotem pracy autora [71].

Pozagranicznym zachowaniem się konstrukcji sztywno-plastycznych zajmowali się między innymi S.S. GILL [41], A. GÜRKOK i H.G. HOPKINS [43], P.G. HODGE [59], E.T. ONAT [83], T.I.

CAMPBELL i T.M. CHARLTON [20] , R.M. HAYTHORNTHWAITE [47] , M. JANAS [60] , zaś układami optymalnymi Z. MRÓZ i A. GAWĘCKI [79] . W pracach tych na podstawie prostych przykładów belek i łuków analizowane są wpływy zmian geometrii na intensywność obciążenia towarzyszącego procesowi plastycznych deformacji. Za podstawę analizy w większości prac przyjmuje się założenie, iż w zakresie skończonych przemieszczeń realizuje się zawsze ten sam, początkowy mechanizm zniszczenia. W pracach [43] , [47] i [60] wprowadzając pojęcie "przegubów wędrujących" sugeruje się możliwość zmiany kinematyki układu. Zachowanie się sztywno-plastycznej ramy portalowej było przedmiotem zainteresowań autora [72], [73] . W pracy [73] na podstawie twierdzenia ekstremalnego [32] analizowano możliwość zmiany kinematyki realizującej się w procesie deformacji plastycznych, zaś w [72] przyjęto założenie o niezmienności mechanizmu początkowego.

Opis nieliniowej kinematyki w połączeniu z odpowiednimi miarami naprężeń i odkształceń przedstawił M. KLEIBER [65-67] proponując uogólniony opis Lagrange'a t.j. opis względem dowolnie ustalonej konfiguracji odniesienia. Prace te dotyczą nie tylko teoretycznego opisu kontinuum lecz także zastosowań numerycznych. Sformułowania problemów skończonych przemieszczeń i odkształceń dla ciał sprężysto-plastycznych zawarte są m.in. w pracach H.D. HIBBITA, P.V. MARCALA, I.R. RICE'A [49] , J.H. ARGYRISA i J.St. DOLTSINISA i M. KLEIBERA [5,6,7] a także J.B. HADDOWA i T. M. HRUDEY'A [46] czy E.H. LEE [70] . Sformułowania ogólne znalazły swe zastosowanie do rozwiązywania problemów ram płaskich i przestrzennych między innymi w pracach R.D. WOODA i O.C. ZIENKIEWICZA [97] , K.J. BATHE i S. BOLOURCHI'EGO [13] , T. BELYTSCHKI, L. SCHWERA i M.J. KLEINA [15] , J. BACKLUNDA [9] .

Prace W. BANDYSZEWSKIEGO i A. SAWCZUKA [12] , S. DOROSZA [28] czy S. DOROSZA i A. SAWCZUKA [29] dotyczą szacowania wielkości przemieszczeń sprężysto-plastycznych ram metodami przybliżonymi.

Sposób formułowania i rozwiązywania zagadnień geometrycznie i fizycznie nieliniowych można także prześledzić na przykładach prac K. DEMSA i M. KLEIBERA [26] , K.S. CHI i T.H. LINA [22] ,

S. KEMPNEGO [64], S.I. OHA i S. KOBAYASHI [80]. Zauważmy, że wiele z cytowanych prac posługuje się skomplikowanym elementem skończonym zaś dokładne rozwiązanie problemu brzegowego pociąga zwykle budowanie zadania o wielu stopniach swobody. Zastosowanie procedur przyrostowo-iteracyjnych wymaga wielokrotnego rozwiązywania układów równań liniowych o dużych wymiarach. Budzą się wówczas obawy dotyczące zbyt długiego czasu obliczeń na maszynach cyfrowych. Dlatego w pracy [74] autor zaproponował taką metodę analizy konstrukcji sprężysto-plastycznych (ram) by budując zadania o stosunkowo małej liczbie stopni swobody, możliwie wiernie opisać proces deformacji.

## 2. Podstawowe związki i definicje

Przedstawmy, niektóre znane z literatury, zależności i definicje, którymi posługiwać się będziemy w dalszej części pracy.

### 2.1 Sprzężone miary naprężeń i odkształceń

Oznaczmy przez  $\underline{x}$ ; układ współrzędnych przestrzennych zaś przez  $\underline{X}_K$  materialnych związanych z początkową konfiguracją ciała. Przy aksjomatach ciągłości materii w całym procesie deformacji wprowadzimy opis Lagrange'a i Eulera. Użycie jednego z tych opisów zależy od tego czy chcemy opisać stan określonej cząstki ciała  $\underline{X}$  w chwili  $t$  (opis Lagrange'a) lub opisać sytuację zachodzącą w punkcie przestrzeni fizycznej  $\underline{x}$  w chwili  $t$  (opis Eulera).

Zapiszmy wektory przemieszczeń w opisie Lagrange'a

$$(2.1) \quad \underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

i Eulera

$$(2.2) \quad \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{X}(\underline{x}, t).$$

Ich gradienty, materialny i przestrzenny, są odpowiednio postaci:

$$(2.3) \quad U_{K,L} = x_{i,L} \delta_{ik} - \delta_{KL}, \quad u_{i,j} = \delta_{ij} - X_{K,j} \delta_{Ki},$$

gdzie  $\delta_{..}$  jest symbolem Kroneckera zaś ", " oznacza różniczkowanie względem zmiennej danego opisu np.  $x_{i,L} = \frac{\partial x_i}{\partial X_L}$ . W zapisie stosuje się umowę sumacyjną.

Dla porządku zapiszmy znane reprezentacje tensorów odkształceń Greena i Almansi'ego w bazach związanych odpowiednio z konfiguracjami pierwotną i aktualną:

$$(2.4) \quad E_{KL} = \frac{1}{2} (U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}),$$

$$(2.5) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}).$$

oraz tensor prędkości deformacji  $\underline{d}$  zdefiniowanej jako symetryczna część gradientu prędkości odkształceń:

$$(2.6) \quad d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}).$$

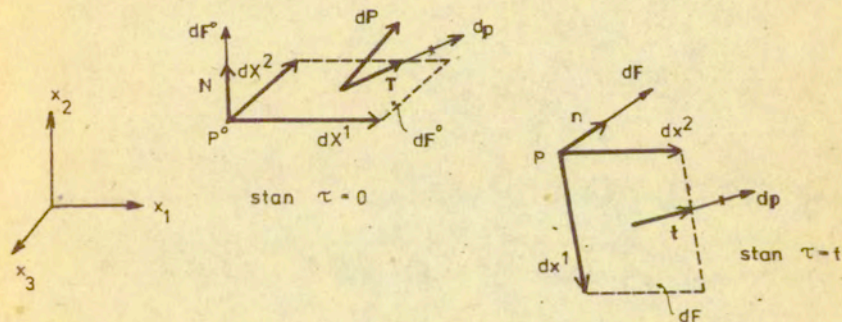
Łatwo można wykazać następującą zależność (patrz np. [85])

$$(2.7) \quad d_{ij} = \dot{E}_{KL} X_{K,i} X_{L,j},$$

gdzie przez kropkę oznaczono pochodną względem czasu.

Wprowadźmy teraz za W. PRAGEREM [85], Y. FUNGIEM [39] czy A.C. ERINGENEM [37] definicje podstawowych miar naprężeń. Naturalną koncepcją jest definiowanie tensora stanu naprężenia odniesionego do aktualnej konfiguracji ciała (Cauchy). Taka eulerowska definicja nadaje reprezentacji tego tensora prostą interpretację fizyczną. Z drugiej jednak strony biorąc pod uwagę kinematykę procesu deformacji należy zauważyć, że w wielu przypadkach łatwiej można zdefiniować miary deformacji opisujące ruch odniesione do konfiguracji pierwotnej. Wtedy należy wprowadzić miary naprężeń odniesione również do konfiguracji pierwotnej, które nie mają tak czytelnej interpretacji jak naprężenie Cauchy'ego, pozwalają jednak na zbudowanie spójnej teorii mechanicznej.

Rozpatrzmy dwa stany, początkowy  $\tau = 0$  oraz aktualny  $\tau = t$ , elementarnej powierzchni w przestrzeni  $\{x_i\}$  rys.2.1.



rys. 2.1

Analizowany punkt materialny zajmuje w chwili początkowej pozycję  $P^0$  zaś w chwili aktualnej pozycję  $P$ . Wektory elementarnych powierzchni oznaczymy odpowiednio przez  $dF^0$  i  $dF$ . Oznaczając jednostkowe wektory normalne do powierzchni w stanie początkowym i odkształconym przez  $\underline{N}$  i  $\underline{n}$  możemy zapisać:

$$(2.8) \quad dF_K^0 = dF^0 N_K, \quad dF_k = dF n_k.$$

Oznaczmy przez  $dp$  wektor siły działający na elementarną powierzchnię  $dF$ . Wektor  $\underline{t}$  (prawdziwych naprężeń) działający na jednostkową powierzchnię elementu spełnia równanie:

$$(2.9) \quad t_i = \frac{dp_i}{dF}$$

Wówczas tensor naprężeń Cauchy'ego  $\underline{\sigma}$  definiuje się w postaci:

$$(2.10) \quad dp_j = \sigma_{ij} dF_i \quad \text{lub} \quad t_j = \sigma_{ij} n_i.$$

W podobny sposób można zdefiniować tensor naprężeń  $\underline{T}$  odniesiony do konfiguracji początkowej

$$(2.11) \quad dp_j = T_{kj} dF_K^0 \quad \text{lub} \quad T_i = T_{ki} N_k,$$

gdzie wektor siły  $T_i$  odniesiony do konfiguracji pierwotnej spełnia równanie:

$$(2.12) \quad T_i = \frac{dp_i}{dF^0}.$$

$T_{ki}$  nosi nazwę nominalnego tensora naprężenia lub I tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa. Porównując  $(2.10)_1$  z  $(2.11)_1$ , oraz określając zmianę powierzchni przy uwzględnieniu zasady zachowania masy, tak jak to uczyniono np. w [34], w postaci:

$$(2.13) \quad dF_K^0 = \frac{\rho}{\rho^0} dF_i x_{i,K},$$

otrzymamy zależności łączące składowe wprowadzonych miar naprężeń w postaci:

$$(2.14) \quad T_{Ki} = \frac{\rho^0}{\rho} \sigma_{ij} X_{K,j} \quad \text{lub} \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho^0} T_{Ki} x_{j,K}$$

Z zależności (2.14) wynika, że reprezentacja I tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa nie jest symetryczna. Jest to przyczyna, dla której ta miara naprężeń nie jest dogodna w sformułowaniu praw konstytutywnych. Wprowadza się więc zwykle modyfikację tej miary w taki sposób, by tensor naprężeń w konfiguracji Lagrange'a był symetryczny. Podajmy więc wektor obciążenia  $dp$  takiej samej transformacji jakiej podlega zmiana wektora  $dx_i$  w  $dX_K$  (rys.2.1). Przez analogię więc, skoro  $dX_K = X_{K,i} dx_i$  można zapisać nowy wektor siły w postaci :

$$(2.15) \quad dP_K = X_{K,i} dp_i \dots$$

Składowe zmodyfikowanego tensora naprężenia  $\underline{S}$  są zdefiniowane zależnością :

$$(2.16) \quad dP_K = S_{KL} dF_L^0$$

$\underline{S}$  nazywany jest II tensorem naprężeń Pioli-Kirchhoffa. Badając relacje między odpowiednimi składowymi tensorów otrzymujemy :

$$(2.17) \quad S_{KL} = X_{K,i} T_{Li}$$

$$S_{KL} = \frac{\rho^0}{\rho} X_{K,i} X_{L,j} \sigma_{ij}$$

lub

$$(2.18) \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho^0} x_{i,K} x_{j,L} S_{KL}$$

Teoria ciał plastycznych uwzględniająca stany skończonych deformacji może być zapisana przy użyciu dowolnych sprzężonych (skoniugowanych) miar naprężeń, odkształceń i ich prędkości. Opisując proces skończonych przemieszczeń istotne jest by przyjęte do tego opisu miary naprężeń i odkształceń związane były z tą samą konfiguracją ciała. Zgodnie z definicją zaproponowaną przez R. HILLA [56] podstawą wyboru odpowiednich miar sprzężonych jest wyrażenie określające energię deformacji. Mówimy,

że miara naprężeń  $\underline{\tau}$  jest sprzężona z miarą odkształceń  $\underline{\epsilon}$  wtedy gdy infinitezymalny przyrost energii deformacji  $dW$  na jednostkę objętości w konfiguracji początkowej (lub nieodkształconej) wyraża się jako iloczyn skalarny  $\underline{\tau}$  i  $d\underline{\epsilon}$ .

$$(2.19) \quad dW = \underline{\tau} d\underline{\epsilon} \quad \text{lub} \quad \dot{W} = \underline{\tau} \dot{\underline{\epsilon}},$$

gdzie kropka oznacza pochodną względem czasu.

Jeżeli za miarę prędkości odkształceń przyjmiemy tensor przyrostu deformacji  $\underline{d}$  o składowych :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}),$$

to przyrost energii deformacji na jednostkę objętości w konfiguracji początkowej wyraża się zależnością :

$$(2.20) \quad \dot{W} = \sigma_{ij} d_{ij} \frac{dV}{dV^0} \quad \text{lub} \quad \dot{W} = \frac{\rho^0}{\rho} \sigma_{ij} d_{ij},$$

gdzie przez  $V$  i  $\rho$  oznaczono odpowiednio objętość i gęstość w konfiguracji aktualnej zaś indeks "0" oznacza konfigurację początkową.

Wprowadzając nową miarę naprężeń :

$$(2.21) \quad \underline{t} = \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\sigma},$$

nazywaną tensorem naprężeń Trefftza otrzymuje się sprzężoną parę  $\underline{t}$  i  $\underline{d}$ , która spełnia wymagania definicji HILLA (2.18). Są to miary, których reprezentacje  $t_{ij}$ ,  $d_{ij}$  odniesione do przestrzennego układu współrzędnych, są zmiennymi opisu przestrzennego (Eulera). Dla ciała nieściśliwego, np. materiału sztywnoplastycznego zachodzi :  $\rho = \rho^0$ . Wówczas miary naprężeń Trefftza i Cauchy'ego pokrywają się  $\underline{t} = \underline{\sigma}$ .

Określimy teraz za pracą [34] pary sprzężone zapisane w konfiguracji początkowej czyli wyrażone w zmiennych opisu materialnego (Lagrange'a).

Podstawmy do wzoru (2.20)  $t_{ij}$  i  $d_{ij}$  określone odpowiednio poprzez zależności (2.21) i (2.18), wówczas otrzymamy wobec (2.7) :



$$(2.22) \quad \dot{W} = S_{KL} x_{i,L} x_{j,K} \dot{E}_{MN} X_{M,i} X_{N,j} = S_{KL} \dot{E}_{KL}$$

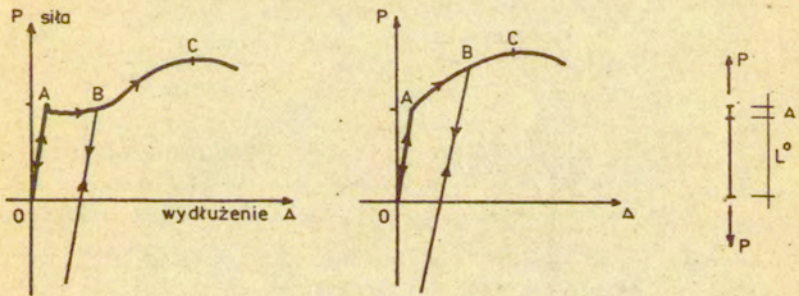
Podobnie wykorzystując (2.14) w (2.20)<sub>2</sub> otrzymamy :

$$(2.23) \quad \dot{W} = T_{ki} x_{j,K} \dot{d}_{ij} = T_{ki} v_{i,K}$$

Zależności (2.22) i (2.23) wskazują, że miary naprężeń i prędkości odkształceń  $S_{KL}$  i  $\dot{E}_{KL}$  oraz  $T_{ki}$  i  $v_{i,K}$  tworzą również pary sprzężone w sensie definicji HILLA.

## 2.2 Modele materiałów

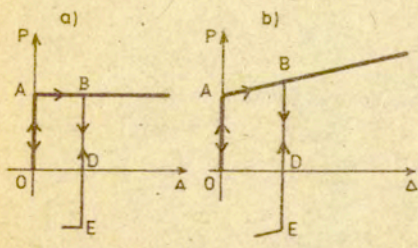
Teorie sprężystości i plastyczności opisują głównie zachowanie się metali. Właśnie dla tych materiałów obserwuje się zachowanie po części sprężyste, po części zaś plastyczne cechujące się nieodwracalnymi zmianami zachodzącymi w układzie. Obrazem zachowania się takich typowych materiałów jak miękka stal jest wykres obciążenie-wydłużenie rys.2.2, sporządzony dla próby jednoosiowego rozciągania pręta.



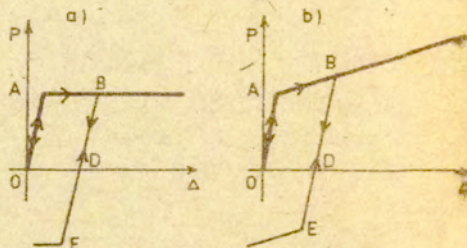
rys. 2.2

Nawet w uproszczonej postaci przedstawianej na rys.2.2 zależności te są zbyt skomplikowane by warto je było używać jako matematyczne modele materiałów. Wprowadza się więc liniowe

aproxymacje tych zależności tworząc modele materiałów sztywno-  
- plastyczne (rys.2.3) lub sprężysto-plastyczne (rys.2.4).



rys. 2.3



rys. 2.4

Mówimy, że materiał jest idealnie plastyczny gdy półprosta AB (rys.2.3a i rys.2.4a) jest pozioma. Rys.2.3b i 2.4b przedstawiają materiały ze wzmocnieniem. Gdy całkowite odkształcenia są dużo większe od odkształceń sprężystych te ostatnie mogą być pominięte. Otrzymuje się w ten sposób sztywno-plastyczny model materiału rys.2.3.

### 2.3. Warunek plastyczności

W teorii plastyczności wprowadza się założenie o istnieniu funkcji skalarnej  $\Theta$  o argumentach tensorowych, określającej stan, w którym materiał w danym punkcie (lokalnie) osiąga "próg" (granice plastyczności), od którego odkształca się on w sposób trwały. Ustalmy stan naprężenia jako punkt w dziewięciowymiarowej przestrzeni składowych tensora naprężenia  $\underline{\tau}$ . Dla danego stanu odkształceń plastycznych  $\underline{\epsilon}^p$  oraz wartości  $\eta$  parametru wzmocnienia równanie :

$$(2.24) \quad \Theta(\underline{\tau}, \underline{\epsilon}^p, \eta) = 0$$

przedstawia w tej przestrzeni powierzchnię zwaną powierzchnią plastyczności lub warunkiem plastyczności. Jak można zauważyć

z matematycznej postaci tego warunku wartość granicy plastyczności może się zmieniać w zależności od aktualnie osiągniętego stanu odkształceń plastycznych i wartości parametru wzmocnienia  $\eta$ . Mówimy wówczas o tzw. wzmocnieniu izotropowym kinematycznym lub mieszanym.

Zmiany plastyczne mogą zachodzić tylko wtedy gdy  $\Theta = 0$ . Warunkowi  $\Theta < 0$  odpowiada zachowanie się sztywne (dla modelu sztywno-plastycznego) lub sprężyste (dla modelu sprężysto-plastycznego). Sytuacja  $\Theta > 0$  nie opisuje żadnego z możliwych stanów.

Założmy, że dany punkt ciała znajduje się w stanie plastycznym, czyli spełnia  $\Theta = 0$ . Określmy pochodną względem czasu  $t$  (lub parametru monotonicznie zmiennego w czasie) funkcji plastyczności:

$$(2.25) \quad \dot{\Theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \dot{\tau} + \frac{\partial \Theta}{\partial \xi^P} \dot{\xi}^P + \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \dot{\eta}.$$

Nierówność  $\dot{\Theta} < 0$  przy spełnieniu warunku (2.24) prowadzi do stanu sztywnego lub sprężystego - następuje odciążenie. W tym stanie zachodzi więc  $\dot{\xi}^P = 0$  oraz  $\dot{\eta} = 0$ . Porównując to z (2.25) możemy zapisać kryterium odciążenia w postaci:

$$(2.26) \quad \Theta = 0 \quad ; \quad \dot{\Theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \dot{\tau} < 0.$$

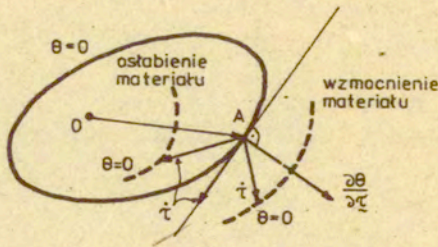
Warunki dociążenia ze stanu plastycznego materiału ze wzmocnieniem mają postać:

$$(2.27) \quad \Theta = 0, \quad \dot{\Theta} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \dot{\tau} > 0.$$

Kryterium stanu neutralnego dla materiału ze wzmocnieniem prezentują wzory:

$$(2.28) \quad \Theta = 0 \quad ; \quad \dot{\Theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \dot{\tau} = 0.$$

Ilustrację materiału wzmacniającego się lub osłabiającego przedstawiono na rys.2.5.



rys. 2.5

Warunek graniczny materiałów idealnie plastycznych przyjmuje postać :

$$(2.29) \quad \Theta(\underline{\tau}) - \Phi(\underline{\tau}) - k = 0 ,$$

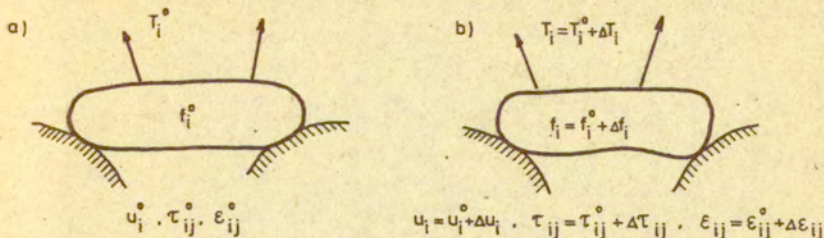
gdzie  $k$  jest określoną wielkością stałą (granica plastyczności).

Spośród kryteriów plastyczności na szczególną uwagę zasługują dwa warunki wykazujące dużą zgodność z wynikami eksperymentów. Są to warunki Hubera-Misesa-Hencky oraz Treski.

#### 2.4. Postulat Druckera i definicje stateczności materiałowej

Postulat zaproponowany przez Druckera w pracy [30] stanowi podstawową definicję wykorzystywaną w matematycznej teorii plastyczności. Wynikają z niego wprost warunki ortogonalności wektora prędkości odkształceń do powierzchni granicznej, wypukłości powierzchni granicznych oraz kryterium stateczności materiałowej.

Rozpatrzmy dwa stany równowagi ciała znajdującego się pod wpływem obciążeń zewnętrznych  $\underline{I}^0$  i  $\underline{I}$  oraz sił masowych  $\underline{f}^0$  i  $\underline{f}$ , (rys.2.6). Przejście ze stanu a) do b) pociąga za sobą wystąpienie zmian w wielkościach przemieszczeń  $\Delta \underline{u}$ . Zgodnie z definicją wprowadzoną przez Druckera [30]:



rys. 2.6

mówimy, że układ zachowuje się statecznie kiedy praca wykonana przez przyrosty obciążeń, na przemieszczeniach które te obciążenia wywołały, jest nieujemna bez względu na sposób zwiększenia tych obciążeń.

Definicja ta stanowi treść postulatu Druckera, który matematycznie można wyrazić w następującej postaci :

$$(2.30) \quad \Delta W = \iint_{F^0} (\tau_{ij} - \tau_{ij}^0) \Delta u_i \, dF^0 + \iiint_{V^0} \varrho^0 (f_i - f_i^0) \Delta u_i \, dV^0 \geq 0.$$

Zamieniając odpowiednie przyrosty przemieszczeń iloczynem prędkości i przyrostu czasu warunek ten wyrażamy również w postaci zależności :

$$(2.31) \quad \Delta W = \iint_{F^0 t_0} (\tau_{ij} - \tau_{ij}^0) v_i \, dt \, dF^0 + \iiint_{V^0 t_0} \varrho^0 (f_i - f_i^0) v_i \, dt \, dV^0 \geq 0.$$

Przez  $F^0$  i  $V^0$  oznaczono powierzchnię zewnętrzną i objętość ciała w chwili początkowej  $t_0$ . Wykorzystując wyprowadzone uprzednio zależności (2.11)<sub>2</sub> w wyrażeniu (2.31), po zastosowaniu twierdzenia Gaussa o zamianie całki powierzchniowej na objętościową otrzymujemy :

$$(2.32) \quad \Delta W = \int_{V^0 t_0}^t [(\tau_{ki} - \tau_{ki}^0) v_{i,k} + (\tau_{ki} - \tau_{ki}^0)_{,k} v_i + (f_i - f_i^0) \varrho^0 v_i] \, dV^0 \, dt \geq 0.$$

Wykorzystując równania równowagi powyższa zależność przyjmuje

postać :

$$(2.33) \quad \Delta W = \int_{V^0}^t \int_{t_0}^t (\tau_{ki} - \tau_{ki}^0) v_{i,k} dV^0 dt \geq 0.$$

W sytuacji gdy ciało znajduje się pod wpływem jednorodnego stanu naprężeń i odkształceń (np. próba jednoosiowego rozciągania pryzmatycznego pręta izotropowego) całkowanie po objętości można pominąć i w ten sposób zdefiniować klasę materiałów statecznych, dla których zachodzi :

$$(2.34) \quad \int_{t_0}^t (\tau_{ki} - \tau_{ki}^0) v_{i,k} dt \geq 0.$$

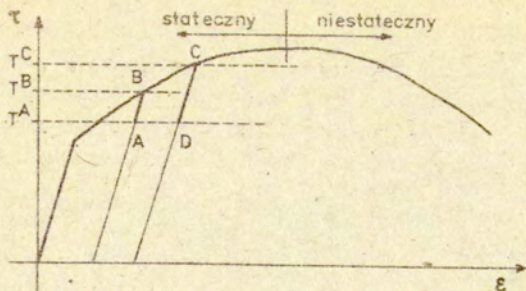
Zauważmy, że zastosowana tutaj para naprężenia  $\tau_{ki}$  i gradientu prędkości deformacji  $v_{i,k}$  są parą miar sprzężonych w sensie definicji R. HILLA [56]. W sytuacjach, gdy efekty sprężyste są pomijalnie małe w stosunku do plastycznych uwzględnić można tylko plastyczną część gradientu prędkości. Wówczas (2.34) zapiszemy w postaci :

$$(2.35) \quad \int_{t_0}^t (\tau_{ki} - \tau_{ki}^0) v_{i,k}^p dt \geq 0.$$

Wprowadzimy jeszcze za Druckerem [30] dwa pojęcia tzw. "stateczności w dużym" i "stateczności w małym". Jeśli w wyrażeniach (2.33-2.35) czas  $t$  nie jest ograniczony żadnym dodatkowym warunkiem i może być założony dowolnie duży wtedy mówi się o "stateczności w dużym". Gdy zaś czas  $t$  jest ograniczony do bliskiego sąsiedztwa chwili  $t_0$  otrzymujemy matematyczną postać warunku wyrażającego "stateczność w małym". Ograniczając się w dalszej części do "stateczności w małym", możemy rozwinąć (2.35) w szereg Taylora w otoczeniu punktu  $B$ , w którym osiągnięto stan plastyczny rys.2.7 otrzymując :

$$(2.36) \quad (\tau_{ki}^B - \tau_{ki}^0) v_{i,k}^p dt + \frac{1}{2} \left[ \dot{\tau}_{ki} \Big|_{\tau_{ki} = \tau_{ki}^B} v_{i,k}^p + (\tau_{ki}^B - \tau_{ki}^0) \dot{v}_{i,k}^p \right] dt^2 + \dots \geq 0.$$

Aby spełnić warunek (2.36) dla każdej drogi obciążenia, należy zapewnić dodatniość pierwszych wyrazów w rozwinięciu, czyli



rys. 2.7

spełnić następujące warunki :

$$(2.37) \quad (\tau_{ki}^B - \tau_{ki}^o) v_{i,k}^P \geq 0, \quad \dot{\tau}_{ki} v_{i,k}^P \geq 0.$$

Zależność (2.37)<sub>2</sub> jest warunkiem stateczności materiałowej w sensie Dručkera. Obraz statecznego bądź niestatecznego zachowania się materiału przedstawiono na rys.2.7

Przy założeniu małych odkształceń sprężystych poprzedzających stan plastyczny zależność (2.37) zapisać możemy dla dowolnej innej sprzężonej pary miar naprężeń i przyrostów odkształceń w ogólnej postaci :

$$(2.38) \quad (\underline{\tau}^B - \underline{\tau}^o) \underline{\dot{\epsilon}}^P \geq 0.$$

W szczególności dla reprezentacji wielkości w opisie Eulera  $\underline{t}$  i  $\underline{d}$  :

$$(2.39) \quad (t_{ij}^B - t_{ij}^o) d_{ij}^P \geq 0,$$

czy Lagrange'a  $\underline{s}, \underline{\dot{\epsilon}}$  :

$$(2.40) \quad (s_{KL}^B - s_{KL}^o) \dot{\epsilon}_{KL} \geq 0.$$

Niejemność iloczynu skalarnego (2.38) pociąga spełnienie warunku wypukłości powierzchni plastyczności w wektorowej przestrzeni naprężeń. Z faktu, że zależność ta ma być spełniona dla dowolnej drogi dojścia do stanu plastycznego wynika, że wektor  $\dot{\underline{\epsilon}}^P$  musi mieć kierunek normalnej do powierzchni granicznej.

Transformując warunek (2.37) do zmiennych symetrycznych opisu Lagrange'a otrzymujemy [34] :

$$(2.41) \quad \begin{aligned} \dot{T}_{ki} v_{i,k} = \\ = \dot{S}_{KL} \dot{E}_{KL} + S_{KL} v_{n,k} v_{n,l} \geq 0. \end{aligned}$$

Natomiast warunek stateczności materiałowej w sensie Druckera zapisany w zmiennych opisu przestrzennego ma postać :

$$(2.42) \quad (t_{kl})^{\nabla 0} d_{kl} + t_{kl} v_{n,k} v_{n,l} \geq 0,$$

lub

$$(2.43) \quad (t_{kl})^{\nabla Z-J} d_{kl} - t_{kl} v_{n,k} v_{n,l} \geq 0.$$

gdzie  $(t_{kl})^{\nabla 0}$ ,  $(t_{kl})^{\nabla Z-J}$  oznaczają odpowiednio pochodne Oldroyda i Zaremby-Jaumanns tensora naprężeń Trefftza.

W szczególności jeśli mamy do czynienia z ciałem plastycznie izotropowym, dla którego osie główne tensorów  $\underline{t}$  i  $\underline{d}$  pokrywają się, oraz pamiętając, że iloczyn skalarny tensorów symetrycznego  $\underline{d}$  i antysymetrycznego  $\underline{\omega}$  jest równy zeru, wówczas zależność (2.43) przepiszemy w postaci :

$$(2.44) \quad \dot{t}_{kl} d_{kl} - t_{kl} v_{n,k} v_{n,l} \geq 0.$$



Ze względu na fakt, iż postulat Druckera dotyczy małych odkształceń zwykle w literaturze podaje się związki :

$$(2.45) \quad \dot{t}_{kl} d_{kl} \geq 0 \quad \text{lub} \quad \dot{S}_{kl} \dot{E}_{kl} \geq 0 ,$$

jako warunki stateczności materiałowej w sensie Druckera. Żaden z tych warunków nie odpowiada jednak zależności (2.37) w przypadku gdy materiał wykazuje niewielkie wzmocnienie. Wykorzystywane są w literaturze problemu [33] , [34] nierówności konstytutywne zwane warunkami stateczności materiałowej w sensie Zaremby-Jaumanna :

$$(2.46) \quad (t_{kl})^{\nabla Z-J} d_{kl} \geq 0 ,$$

lub w sensie Oldroyda :

$$(2.47) \quad (t_{kl})^{\nabla 0} d_{kl} \geq 0 ,$$

który jest równoważny warunkowi :

$$(2.48) \quad \dot{S}_{kl} \dot{E}_{kl} \geq 0 .$$

Definiując materiał idealnie plastyczny jako neutralnie stateczny wprowadza się koncepcje materiału idealnie plastycznego w sensie Zaremby-Jaumanna gdy :

$$(2.49) \quad (t_{kl})^{\nabla Z-J} d_{kl} = 0 ,$$

oraz materiału idealnie plastycznego w sensie Oldroyda, dla którego zachodzi :

$$(2.50) \quad (t_{kl})^{\nabla 0} d_{kl} = 0 \quad \text{lub} \quad \dot{S}_{kl} \dot{E}_{kl} = 0 .$$

2.5. Stateczność konstrukcji sztywno-plastycznej

Rozważmy stateczność sztywno-plastycznej konstrukcji w chwili osiągnięcia stanu granicznego. Interesuje nas nachylenie wykresu siła-przemieszczenie na początku procesu deformacji plastycznej. Załóżmy, że na konstrukcję działa jednoparametrowe obciążenie, które można zapisać w postaci :

$$(2.51) \quad \underline{T}(\underline{X}, t) = \mu(t) \underline{T}^{\circ}(\underline{X}),$$

gdzie  $\underline{T}^{\circ}(\underline{X}) = \underline{T}(\underline{X}, t_0)$  charakteryzuje rozkład intensywności obciążenia granicznego, zaś  $\mu(t)$  jest mnożnikiem obciążenia.

Początek deformacji konstrukcji odpowiada chwili  $t_0$ , wówczas  $\mu(t_0) = 1$ . Przyrost obciążenia określimy za pomocą zależności :

$$(2.52) \quad \dot{\underline{T}}(\underline{X}, t) = \dot{\mu}(t) \underline{T}^{\circ}(\underline{X}),$$

[Zgodnie z pracą E.T.ONATA

[83] mówimy, że konstrukcja jest stateczna gdy quasistatyczna deformacja jest możliwa jedynie przy wzrastającym obciążeniu nominalnym co pociąga spełnienie warunku :

$$(2.53) \quad \dot{\mu}(t) > 0$$

i jest niestateczna gdy :

$$(2.54) \quad \dot{\mu}(t) < 0$$

Zachodzą więc związki (patrz np. [33]) :

$$(2.55) \quad \int_{F^{\circ}} T_K \dot{U}_K dF^{\circ} = \int_{V^{\circ}} S_{KL} \dot{E}_{KL} dV^{\circ}$$

i

$$(2.56) \quad \int_{F^{\circ}} \dot{T}_K U_K dF^{\circ} = \int_{V^{\circ}} (\dot{S}_{KL} \dot{E}_{KL} + S_{KL} \dot{U}_{M,K} \dot{U}_{M,L}) dV^{\circ}.$$

Podstawiając (2.52) do (2.56) otrzymujemy :

$$(2.57) \quad \dot{\mu}(t) = \frac{\int_{V^0} (\dot{S}_{KL} \dot{E}_{KL} + S_{KL} \dot{U}_{M,K} \dot{U}_{M,L}) dV^0}{\int_{F^0} T_K^0 \dot{U}_K dF^0}$$

Korzystając z definicji materiału idealnie plastycznego w sensie Oldroyda (2.50)  $\dot{S}_{KL} \dot{E}_{KL} = 0$  otrzymujemy :

$$(2.58) \quad \dot{\mu}(t) = \frac{\int_{V^0} S_{KL} \dot{U}_{M,K} \dot{U}_{M,L} dV^0}{\int_{F^0} T_K^0 \dot{U}_K dF^0}$$

Z warunku nieujemności mocy dysypowanej wynika iż mianownik  $\int_{F^0} T_K^0 \dot{U}_K dF^0 > 0$  stąd o stateczności konstrukcji decyduje jedynie znak licznika (funkcja aktualnego stanu naprężeń i zmian geometrii układu). Odpowiednie zależności pozwalające na analizę stateczności ram zostaną wyspecyfikowane w rozdz.3. Na koniec podkreślmy jeszcze, że nieuwzględnienie w analizie powyższej zmian geometrii prowadzi do określenia  $\dot{\mu}(t) = 0$  a więc stanu równowagi neutralnej. Klasyczne podejście stosowane w metodzie nośności granicznej, zakładające wyłącznie liniowe zmiany geometrii prowadzi właśnie do takiego rezultatu. Nie daje to odpowiedzi na zasadnicze pytanie, czy konstrukcja osiągnąca stan graniczny ma jeszcze możliwości przenoszenia obciążeń czy też zachowując się niestatecznie ulega natychmiastowemu zniszczeniu.

## 2.6. Uogólnienie twierdzeń nośności granicznej

Podamy tutaj bez dowodów twierdzenia, które posłużyły w dalszej części do wyznaczenia kinematyki procesu plastycznych deformacji układu w stanie pozagranicznym [32], [31].

Twierdzenie ekstremalne dla naprężeń i prędkości odkształceń głosi, że spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól

$$U_K^*, \dot{U}_K^*, \dot{E}_{KL}^*, S_{KL}^*,$$

aktualne pole minimalizuje następujący funkcjonał :

$$(2.59) \quad \mathcal{J}^* = \int_V S_{KL}^* \dot{E}_{KL}^* dV - \int_F T_K \dot{U}_K^* dF,$$

jeśli spełniona jest następująca nierówność :

$$(2.60) \quad \int_V S_{KL} \dot{U}_{K,M}^* (U_M - U_M^*)_{,L} dV \geq 0.$$

Wynika stąd, że jeśli znane jest aktualne pole przemieszczeń

$U_K$  oraz zakładamy, że  $U_K = U_K^*$  wówczas spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól  $\dot{U}_K^*, \dot{E}_{KL}^*, S_{KL}^*$  właściwe minimalizują funkcjonał (2.59).

Uogólnienie twierdzeń nośności granicznej na zakres skończonych odkształceń jest wygodnym narzędziem do oszacowania wielkości obciążenia jako funkcji czasu  $t$ . Przyjmuje się najczęściej, że parametrem monotonicznie zmiennym w czasie jest maksymalne (reprezentatywne) ugięcie.

Rozważmy więc konstrukcję, dla której intensywność obciążenia granicznego wynosi  $\underline{\Gamma}^0$ , poddaną dalszemu jednoparametrowemu obciążaniu w taki sposób, że aktualna wartość obciążenia wynosi  $\underline{\Gamma}$ . To znaczy :

$$(2.61) \quad \underline{\Gamma} = \lambda \underline{\Gamma}^0, \quad \lambda \geq 1,$$

gdzie  $\lambda$  jest mnożnikiem obciążenia.

Mnożnik statycznie dopuszczalny  $\lambda^s$  zapewnia istnienie statycznie dopuszczalnego pola naprężeń stowarzyszonego z obciążeniem granicznym :

$$(2.62) \quad \underline{T}^s = \lambda^s \underline{T}^o.$$

Mnożnik kinematycznie dopuszczalny  $\lambda^*$  jest zdefiniowany przez równanie mocy dla kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości odkształceń  $\dot{E}_{KL}^*$  i stowarzyszonego z nim przez prawo płynięcia pola naprężeń  $S_{KL}^*$  :

$$(2.63) \quad \int_F T_K^* \dot{U}_K^* dF = \int_V S_{KL}^* \dot{E}_{KL}^* dV,$$

gdzie

$$(2.64) \quad \underline{T}^* = \lambda^* \underline{T}^o$$

Twierdzenie o górnej granicy obciążenia mówi, że rzeczywistej intensywności obciążenia granicznego przy skończonych deformacjach odpowiada najmniejszy spośród kinematycznie dopuszczalnych mnożników obciążenia  $\lambda^*$  :

$$(2.65) \quad \lambda^* \geq \lambda$$

przy spełnieniu warunków (2.60). Mnożnik  $\lambda$  odpowiada intensywności koniecznej do kontynuowania procesu plastycznych deformacji.

### 3. Stateczność sztywno-plastycznych ram płaskich w chwili osiągnięcia nośności granicznej

Rozwiązanie problemu nośności granicznej, polegające na wyznaczeniu intensywności obciążenia uplastyczniającego, pola sił wewnętrznych towarzyszących temu obciążeniu oraz mechanizmu zniszczenia konstrukcji jest niezbędne do określenia stateczności układu w stanie granicznym. W klasycznych rozwiązaniach zadań nośności granicznej obok warunku stanu granicznego i prawa określającego ruch mechanizmu zniszczenia wykorzystywane są warunki równowagi w konfiguracji początkowej oraz związki geometryczne w postaci liniowej. Natomiast kryterium stateczności konstrukcji w chwili uplastycznienia może być wyprowadzone jedynie, jak to pokazano w rozdz.2, w oparciu o związki geometrycznie nieliniowe.

#### 3.1. Naprężenia i odkształcenia uogólnione

Analiza konstrukcji ramowych posługuje się raczej tzw. naprężeniami uogólnionymi tj. siłami przekrojowymi (momenty zginające, siły poprzeczne i normalne) aniżeli bezpośrednio składowymi tensorów naprężeń. Warunki plastyczności, zapisane zwykle w przestrzeni składowych tensora naprężeń, należy więc sformułować jako funkcje sił przekrojowych. Posługiwać się będziemy pojęciami uogólnionych naprężeń i odkształceń, które przedstawimy jako funkcje naprężeń i odkształceń odniesionych do konfiguracji pierwotnej. Niech  $Q = \{Q_i\}^T, i=1,2,\dots,n$  oznacza wektor uogólnionych naprężeń, na które składają się siły przekrojowe lub ich kombinacje liniowe. Wektor uogólnionych odkształceń  $q = \{q_i\}^T, i=1,2,\dots,n$  musi spełniać równania :

$$(3.1) \quad \int_V \underline{\underline{S}} \underline{\underline{E}} dV = Q^T \underline{\underline{q}},$$

oraz

$$(3.2) \quad Q^T \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{p}}^T \underline{\underline{w}},$$

gdzie  $\underline{\underline{p}}, \underline{\underline{w}}$  są uogólnionymi wektorami obciążeń i przemieszczeń.

Warunki powyższe wynikają z niezmienności energii wewnętrznej oraz spełnienia zasady pracy wirtualnej.

### 3.2. Warunek plastyczności i prawo płynięcia

Wprowadzimy warunek plastyczności zapisany w przestrzeni uogólnionych naprężeń w postaci :

$$(3.3) \quad \Theta(Q) = 0 .$$

W przypadku płaskich konstrukcji ramowych pole uogólnionych naprężeń jest określone w przekroju przez zadanie siły normalnej, poprzecznej i momentu zginającego. Mając na uwadze geometrię układów belkowych i ramowych, dla których wysokość przekroju jest wielokrotnie mniejsza od rozpiętości elementów, przyjmuje się zwykle założenie o płaskich przekrojach, uznając jednocześnie, że wpływ sił poprzecznych na osiągnięcie stanu granicznego jest mało istotny. Odpowiedni warunek plastyczności zapisać można wówczas w przestrzeni zaledwie dwuwymiarowej (momentu zginającego i siły osiowej) w postaci :

$$(3.4) \quad \Theta(N, M) = 0 .$$

Hiperpowierzchnia plastyczności jest wypukła i ze względu na przyjętą idealną plastyczność nie ulega zmianie w procesie plastycznych deformacji. Stan opisujący plastyczne płynięcie wyrażają zależności :

$$(3.5) \quad \Theta(Q) = 0 \quad , \quad \dot{\Theta} = 0 \quad ,$$

zaś odciążenie (proces deformacji plastycznej ulega zatrzymaniu i przekrój pozostaje sztywny) :

$$(3.6) \quad \Theta(Q) = 0 \quad , \quad \dot{\Theta} < 0 .$$

W przypadku, gdy skalarna funkcja warunku plastyczności  $\Theta(Q) < 0$  przekrój jest sztywny, zaś dla przyjętego modelu sytuacja gdy  $\Theta(Q) > 0$  jest niemożliwa. Jak to już powiedziano poprzednio (2.50) dla materiału idealnie plastycznego w sensie Oldroyda

zachodzi  $\dot{\underline{S}} \underline{\dot{E}} = 0$ .

Dla uogólnionych wielkości naprężeń i odkształceń można zapisać: (zależność ta zostanie wyprowadzona poniżej)

$$(3.7) \quad \dot{Q}_i \dot{q}_i = 0 \quad \text{przy} \quad \dot{q}_i \neq 0,$$

(dla układów belkowych  $i=2$ ,  $\dot{Q}_1 = \dot{N}$ ,  $\dot{Q}_2 = \dot{M}$  zaś  $\dot{q}_1 = \dot{\Lambda}$ ,  $\dot{q}_2 = \dot{\Phi}$ , gdzie  $\Phi$  i  $\Lambda$  oznaczają uogólnione odkształcenia-odpowiednio: kąt obrotu i wydłużenie osiowe w przegubie plastycznym.

Równanie (3.5)<sub>2</sub> możemy zapisać w postaci :

$$(3.8) \quad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial Q_i} \dot{Q}_i = 0.$$

Warunek ten opisuje ortogonalność wektorów gradientu powierzchni plastyczności  $\partial \Theta / \partial Q_i$  i prędkości zmian uogólnionych naprężeń  $\dot{Q}$  w przestrzeni wektorowej sił przekrojowych. Łatwo zauważyć z porównania zależności (3.7) i (3.8), że wektory  $\partial \Theta / \partial Q$  oraz  $\dot{q}$  są współliniowe, oba mają kierunek normalnej do powierzchni plastyczności i są zwrócone na zewnątrz tej powierzchni. Można więc zapisać :

$$(3.9) \quad \dot{q} = \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial Q},$$

gdzie  $\alpha$  jest nieujemnym mnożnikiem skalarnym. Zależność (3.9) wyraża stowarzyszone prawo płynięcia, które precyzuje, że powierzchnia graniczna  $\Theta(Q)$  jest potencjałem dla uogólnionych prędkości odkształceń  $\dot{q}$ . Powierzchnia plastyczności (3.5)<sub>1</sub> nie koniecznie musi mieć w każdym punkcie jednoznacznie określone pochodne  $\partial \Theta / \partial Q_i$ ; wówczas stosuje się tzw. uogólnione prawo płynięcia w postaci :

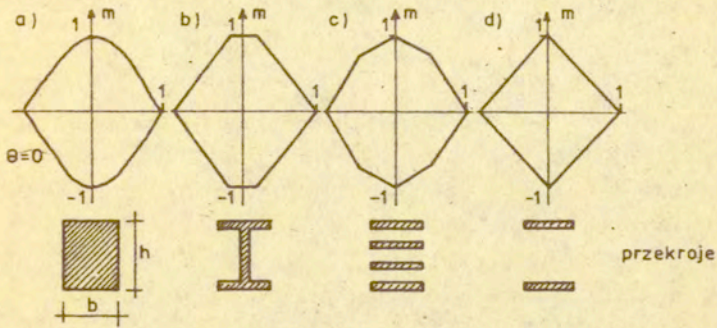
$$(3.10) \quad \dot{q}_i = \alpha_k \frac{\partial \Theta_k}{\partial Q_i},$$

gdzie indeks sumacyjny  $k$  przebiega wartości odpowiadające powierzchniom plastyczności przecinającym się w danym punkcie.

Przy rozwiązywaniu problemów nośności granicznej układów belkowych i ram stosowane są warunki plastyczności wyrażone w przestrzeni bezwymiarowych momentów zginających i sił normal-



nych (rys.3.1). Kształt ich zależy od geometrii przekroju rozważanej konstrukcji belkowej.



rys. 3.1

Warunek plastyczności dla izotropowego przekroju prostokątnego rys.3.1.a) podany np. w monografii HODGE'A [58] ma postać  $\Theta = m + \pi^2 - 1 = 0$ . Wprowadzono bezwymiarowe oznaczenia  $m = \frac{M}{M_0}$ ,  $\pi = \frac{N}{N_0}$ .  $M_0$  i  $N_0$  są odpowiednio wartościami momentu zginającego i siły osiowej w pełni uplastyczniającymi analizowany przekrój, definiowanymi dla przekroju prostokątnego w następujący sposób  $M_0 = S_{pl} \frac{bh^2}{4}$ ,  $N_0 = S_{pl} bh$ .  $S_{pl}$  jest wartością naprężenia granicznego przy jednoosiowym stanie obciążenia. Pozostałe, przedstawione na rys.3.1, warunki są linearyzacjami warunku a) opisującymi jednocześnie warunki graniczne przedstawionych przekrojów idealnych. Pomijając wpływ sił osiowych na uplastycznienie otrzymujemy warunek graniczny w postaci analitycznej:  $m = \pm 1$ . Warunek ten, zwykle stosowany w teorii nośności granicznej, będzie wykorzystywany w dalszej części pracy. Nieuwzględnianie wpływu sił osiowych na osiągnięcie stanu plastycznego w przekrojach układów ramowych prowadzić jednak może do określenia intensywności obciążeń granicznych przekraczających rzeczywiste wartości. Jak wykazał M. SARAN [86] takie uproszczenie może być dopuszczalne jedynie dla konstrukcji ramowych krępych (mała liczba kondygnacji). W konstrukcjach wysokich, w których wystę-

pują duże siły normalne w słupach, pominięcie ich wpływu na uplastycznienie przekrojów zawyża przewidywaną nośność nawet o kilkanaście procent.

### 3.3. Nośność graniczna ram płaskich

Podstawowe twierdzenia, którymi posługuje się teoria nośności granicznej zostały sformułowane przez A.A. GWOZDIEWA [45] i W. FRAGERA [84]. Rozwiązania ram płaskich z zastosowaniem twierdzeń o polach statycznie i (lub) kinematycznie dopuszczalnych oraz o dolnej i górnej granicy obciążenia plastycznego przedstawiono m.in. w pracach H. TANAKI [93] i A. SAWCZUKA [88].

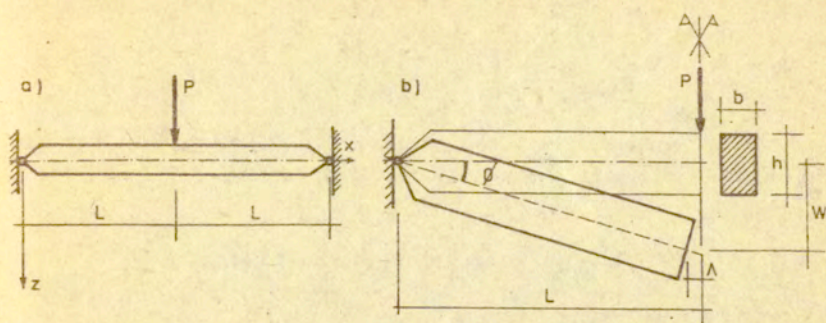
W pracy niniejszej wykorzystywać będziemy rozwiązania zupełne teorii nośności granicznej. Samo zagadnienie wyznaczania nośności granicznej nie jest przedmiotem naszych rozważań, jest tylko środkiem do osiągnięcia celu jakim jest określenie stateczności układów w chwili osiągnięcia tej intensywności obciążenia.

### 3.4. Warunki stateczności ram w wielkościach uogólnionych

Warunek stateczności konstrukcji dla materiału idealnie plastycznego w sensie Oldroyda, wzór (2.61), dotyczy ciągłych pól naprężeń, odkształceń i przemieszczeń oraz ich prędkości. Posługując się wielkościami uogólnionych naprężeń i zakładając koncentrację odkształceń plastycznych w charakterystycznych przekrojach, warunki stateczności układów belkowych i ramowych w stanie nośności granicznej zostały przedstawione w pracach [33], [36].

#### 3.4.1. Stateczność belki

Istotę problemu pokażemy na przykładzie belki sztywno-plastycznej o rozpiętości  $2L$ , podpartej przegubowo i obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości (rys.3.2). Zakładamy, że części belki obracają się jak sztywne ogniwa dookoła przegubów podporowych, zaś odkształcenia plastyczne (obroty



rys. 3.2

$\dot{\Phi}$  i wydłużenia osiowe  $\dot{\Lambda}$ ) koncentrują się wyłącznie w środkowym przekroju zwanym uogólnionym przegubem plastycznym (rys. 3.2b). Przy maksymalnym ugięciu  $W$  rzędu wysokości przekroju uproszczone zależności geometryczne zapisać można w postaci :

$$(3.11) \quad \dot{\Phi} = \frac{W}{L} \quad , \quad \dot{\Lambda} = \frac{W^2}{2L}$$

Prędkości ich zmian wynoszą odpowiednio :

$$(3.12) \quad \dot{\dot{\Phi}} = \frac{\dot{W}}{L} \quad , \quad \dot{\dot{\Lambda}} = \frac{W\dot{W}}{L}$$

Bilans mocy obciążeń zewnętrznych i mocy dysypowanej w przegubie plastycznym pozwala zapisać :

$$(3.13) \quad P\dot{W} = 2(N\dot{\Lambda} + M\dot{\Phi}) \quad ,$$

gdzie siły przekrojowe  $N$  i  $M$  związane są warunkiem granicznym typu  $\Theta(N, M) = 0$  np. w postaci jak na rys. 3.1a).

Przyjęcie materiału spełniającego warunek idealnej plastyczności w sensie Oldroyda,  $\dot{\underline{S}}\underline{E} = 0$  , <sup>pozwala</sup> przedstawić tę definicję w wielkościach uogólnionych. Przyjmując liniowy rozkład odkształceń na wysokości przekroju oraz hipotezę o płaskich normalnych przekrojach (stąd wynika, że odkształcenia postaciowe są równe zero) jedyną niezerową składową tensora odkształceń możemy zapisać w postaci :  $E_{xx} = \frac{\Delta}{L} + \frac{z\Phi}{L}$  , zaś po scałkowaniu

otrzymujemy :

$$(3.14) \quad \dot{M}\dot{\Phi} + \dot{N}\dot{\Lambda} = 0,$$

gdzie  $\dot{N} = \int_A \dot{S}_{xx} dA$ ,  $\dot{M} = \int_A \dot{S}_{xz} dA$ .

Określmy teraz przyrost obciążenia  $\dot{P}(X, t_0) = \dot{\lambda}(t_0) P^0(X)$  w punkcie nośności granicznej. W tym celu zróżniczkujemy (3.13) względem czasu :

$$(3.15) \quad \dot{P}\dot{W} + P\ddot{W} = 2(\dot{N}\dot{\Lambda} + \dot{M}\dot{\Phi}) + 2(N\ddot{\Lambda} + M\ddot{\Phi}).$$

Równanie równowagi

$$(3.16) \quad P = 2\left(N \frac{W}{L} + \frac{M}{L}\right)$$

mnóżąc obustronnie przez  $\ddot{W}$  i wykorzystując (3.12) możemy zapisać w postaci :

$$(3.17) \quad P\ddot{W} = 2N\ddot{\Lambda} + 2M\ddot{\Phi} - 2\frac{N\dot{W}^2}{L}.$$

Podstawiając (3.17) i (3.14) do (3.15) otrzymujemy :

$$(3.18) \quad \dot{P} = \dot{\lambda}P^0 = 2N\frac{\dot{W}}{L} \quad \text{lub} \quad \dot{P} = 2N\dot{\Phi}^2L,$$

gdzie przez  $P^0$  oznaczono graniczną intensywność obciążenia,  $P^0 = 2M_0/L$ , Prędkość zmiany intensywności obciążenia określa równanie :

$$(3.19) \quad \dot{\lambda} = \frac{2N\dot{W}}{P^0L}.$$

Równanie (3.18)<sub>1</sub> zapisać można w postaci :

$$(3.20) \quad \frac{dP}{dW} = 2\frac{N}{L},$$

pozwala to określić nachylenie wykresu P-W jedynie jako funkcję siły osiowej i geometrii układu. O stateczności decyduje znak siły osiowej N. W celu wykazania wpływu przyjętej definicji idealnej plastyczności w sensie Oldroyda na stateczność

konstrukcji, rozważmy obecnie analogiczny przykład belki wykonanej z materiału idealnie plastycznego w sensie Zaremy-Jaumanna, który w zmiennych opisu Lagrange'a jest postaci [33] :

$$\dot{S}_{KL} \dot{E}_{KL} + 2S_{KL} \dot{E}_{MK} \dot{E}_{ML} = 0.$$

Po podobnych jak poprzednio przekształceniach warunek ten wyrazić można w uogólnionych naprężeniach w postaci :

$$(3.21) \quad \dot{M}\dot{\Phi} + \dot{N}\dot{\Lambda} + 4M\dot{\Phi}\dot{\Lambda} + 2N\dot{\Lambda}^2 = 0.$$

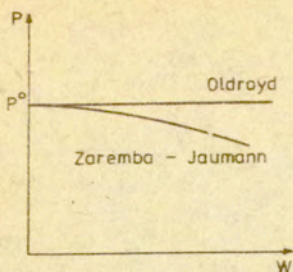
Podstawiając (3.17) i (3.21) do (3.15) otrzymamy zależność analogiczną do (3.18), w postaci :

$$(3.22) \quad \dot{P} = \dot{\lambda}P^0 = 2 \left( N \frac{\dot{W}}{L} - 4N \frac{W^2 \dot{W}}{L^3} - 8M \frac{W \dot{W}}{L^3} \right).$$

W tej sytuacji nachylenie stycznej do wykresu P-W obrazuje zależność :

$$(3.23) \quad \frac{dP}{dW} = \frac{2}{L} \left( N - 2N \frac{W^2}{L^2} - 4M \frac{W}{L^2} \right).$$

Z porównania zależności (3.20) z (3.23) wynika, że przyjęcie warunku idealnej plastyczności w postaci definicji Zaremy-Jaumanna i Oldroyda przy tych samych zależnościach geometrycznych prowadzi do różnych rezultatów. | Przeanalizujmy przypadek belki na podporach przesuwnych, dla której siła osiowa w całym procesie plastycznych deformacji jest równa zero ( $N=0$ ). Przyjęcie obu definicji idealnej plastyczności dla stanu granicznego, gdy  $N=0$  prowadzi do określenia tych samych intensywności obciążeń  $P^0$ . Z chwilą pojawienia się różnych od zera przemieszczeń  $W \neq 0$  konstrukcja wykazuje stateczność neutralną, przy przyjęciu definicji Oldroyda, oraz zachowuje się niestatecznie, przy przyjęciu definicji Zaremy-Jaumanna. Charakter zachowania się belki przy przyjęciu różnych definicji materiałów idealnie plastycznych przedstawia rys.3.3.



rys. 3.3

### 3.4.2. Stateczność ram

Zapiszmy równanie mocy obciążeń zewnętrznych i dysypowanej dla ram płaskich [36], w których, w chwili osiągnięcia stanu granicznego, występuje  $n$  uogólnionych przegubów plastycznych i  $m$  punktów przyłożenia skupionych obciążeń zewnętrznych:

$$(3.24) \quad \sum_{j=1}^m P_j \dot{W}_j = \sum_{i=1}^n (N_i \dot{\Lambda}_i + M_i \dot{\Phi}_i).$$

Różniczkując (3.24) względem czasu oraz przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak w przypadku belki, a także wykorzystując definicję idealnej plastyczności w sensie Oldroyda, otrzymujemy związek analogiczny do (3.18)<sub>1</sub>:

$$(3.25) \quad \dot{\lambda} \sum_{j=1}^m P_j^0 \dot{W}_j = \sum_{i=1}^n (N_i \ddot{\Lambda}_i + M_i \ddot{\Phi}_i) - \sum_{j=1}^m P_j \ddot{W}_j$$

Prędkość zmian intensywności obciążenia w chwili osiągnięcia stanu nośności granicznej wyraża zależność:

$$(3.26) \quad \dot{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n (N_i \ddot{\Lambda}_i + M_i \ddot{\Phi}_i) - \sum_{j=1}^m P_j \ddot{W}_j}{\sum_{j=1}^m P_j^0 \dot{W}_j},$$

lub analogicznie do (3.18)<sub>2</sub>:

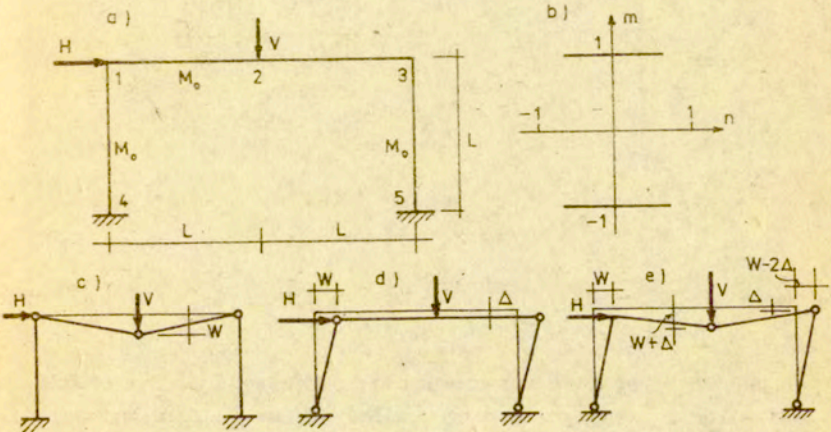
$$(3.27) \quad \dot{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^p N_k \dot{\varphi}_k L_k}{\sum_{j=1}^m P_j^0 \dot{W}_j},$$

gdzie przez  $p$  oznaczono liczbę prętów, które doznały obrotu,  $L_k$  jest długością tego pręta, zaś  $\dot{\varphi}_k$  prędkością kąta obrotu cięciwy pręta.

### 3.4.3. Przykłady ram portalowych

Łatwość korzystania z podanych warunków stateczności zależy od przyjętego sposobu rozwiązania problemu nośności granicznej. Jeśli rozwiązanie zadania granicznego jest osiągane przez kombinację liniową mechanizmów podstawowych wygodniej korzysta się z zależności w postaci (3.26). Wymaga się wówczas wprowadzenia współczynników decydujących o tym czy dany mechanizm podstawowy (belkowy, przesuwu) wchodzi do kombinacji realizującej się przy osiągnięciu stanu granicznego. W przypadkach, gdy rozwiązanie zadania nośności granicznej osiągnięte jest np. za pomocą metod programowania matematycznego wygodniejsza w zastosowaniu jest postać podana wzorem (3.27).

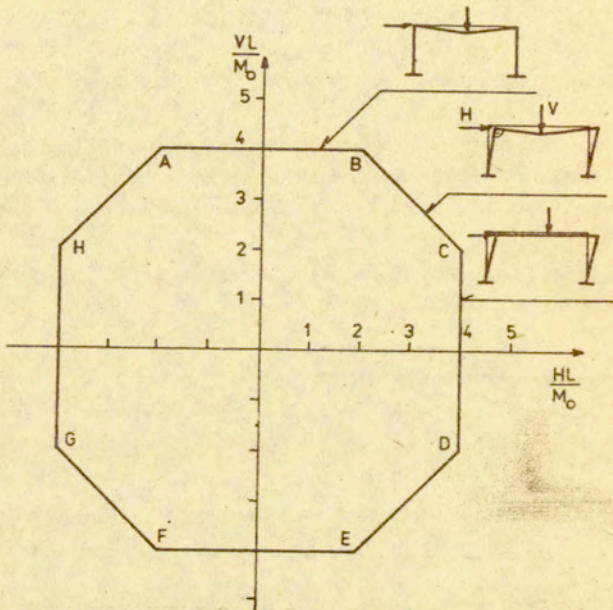
Dla zilustrowania zachowania się konstrukcji rozpatrzmy portalową ramę obciążoną dwiema siłami skupionymi utwierdzoną w podporach (rys.3.4) [36]. Przyjmijmy warunek graniczny w przestrzeni uogólnionych naprężeń w postaci:  $\Theta = m \pm 1 = 0$  rys. 3.4 b). W zależności od proporcji siły poziomej do pionowej



rys. 3.4

obciążających układ, w stanie granicznym mogą się realizować różne mechanizmy zniszczenia, rys.3.4 c) - e) (belkowy, przesuwu boczno lub łączony). Na rys.3.5 przedstawiono w przestrzeni bezwymiarowych sił obszar współdziałania obciążeń granicznych. Równania krawędzi ośmiokąta, stowarzyszone z poszczególnymi mechanizmami, są postaci:

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \pm \frac{VL}{M_0} &= 4, & \pm \frac{HL}{M_0} &= 4, \\ \pm \frac{VL}{M_0} \pm \frac{HL}{M_0} &= 6 \end{aligned}$$



rys. 3.5

Poszukiwana prędkość zmian mnożnika obciążenia  $\lambda$ , w chwili osiągnięcia stanu granicznego, zależy od mechanizmu zniszczenia ten zaś od stosunku sił obciążających  $H/V$ . Przedstawiając mechanizmy podstawowe, na rys.3.4 zaznaczono efekty wyższego rzędu -  $\Delta$ , których uwzględnienie w istotny sposób wpływa na badane zjawisko. Przedstawmy wektor obciążeń oraz wektor przemieszczeń punktów przyłożenia tych sił w postaci :



$$(3.29) \quad P_j = \{ H, V \}^0, \quad j=1,2, \dots$$

$$(3.30) \quad W_j = \left\{ k_1 \frac{H}{|H|} W + 2k_3 \Delta, k_2 \frac{V}{|V|} W + k_1 \Delta \right\}.$$

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami możemy zapisać związek :

$$(3.31) \quad \Delta = \frac{W^2}{2L}$$

zaś współczynniki  $k_i$  mechanizmów podstawowych przyjmują wartości :

$$(3.32) \quad \begin{aligned} k_1 &= \begin{cases} 1 & \text{dla mechanizmu belkowego,} \\ 0 & \text{dla pozostałych mechanizmów,} \end{cases} \\ k_2 &= \begin{cases} 1 & \text{dla mechanizmu słupowego,} \\ 0 & \text{dla pozostałych mechanizmów,} \end{cases} \\ k_3 &= \begin{cases} 1 & \text{dla mechanizmu łączonego gdy} \\ & \text{sign } H \neq \text{sign } V, \\ 0 & \text{dla pozostałych mechanizmów.} \end{cases} \end{aligned}$$

Składowe uogólnionych odkształceń w przegubach plastycznych wynoszą :

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \Phi_i &= c_i \frac{W}{L} + \frac{H}{|H|} \frac{W^2}{L^2} \{ k_3, 0, -k_4, k_3, -k_4 \}, \\ \Lambda_i &= \left\{ 0, \frac{W^2}{2L}, 0, 0, 0 \right\}, \end{aligned}$$

gdzie dodatkowo przyjęto  $c_i = \text{const}$  oraz oznaczono :

$$k_4 = \begin{cases} 1 & \text{dla mechanizmu łączonego gdy sign } H = \text{sign } V, \\ 0 & \text{dla pozostałych przypadków.} \end{cases}$$

Można teraz określić wszystkie potrzebne elementy składowe wzoru określającego kryterium stateczności (3.26). Prędkości i przyspieszenia punktów przyłożenia obciążeń mają postać :

$$(3.34) \quad \dot{W}_j = \left\{ k_1 \frac{H}{|H|} \dot{W} + 2k_3 \frac{W\dot{W}}{L}, k_2 \frac{V}{|V|} \dot{W} + k_1 \frac{W\dot{W}}{L} \right\},$$

$$\ddot{W}_j = \left\{ k_1 \frac{H}{|H|} \ddot{W} + 2k_3 \left( \frac{W\ddot{W}}{L} + \frac{\dot{W}^2}{L} \right), k_2 \frac{V}{|V|} \ddot{W} + k_1 \left( \frac{W\ddot{W}}{L} + \frac{\dot{W}^2}{L} \right) \right\},$$

zaś prędkości i przyspieszenia kątów obrotów w przegubach plastycznych wynoszą odpowiednio:

$$(3.35) \quad \dot{\Phi}_i = c_i \frac{\dot{W}}{L} + 2 \frac{H}{|H|} \frac{W\dot{W}}{L^2} \{ k_3, 0, -k_4, k_3, -k_4 \},$$

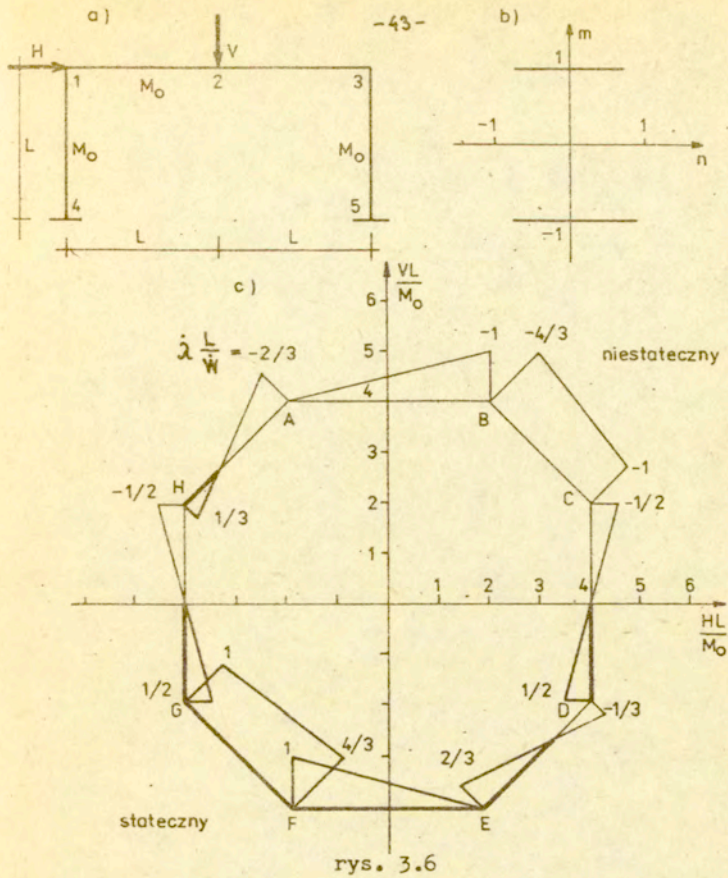
$$\ddot{\Phi}_i = c_i \frac{\ddot{W}}{L} + 2 \frac{H}{|H|} \left( \frac{\dot{W}^2}{L^2} + \frac{W\ddot{W}}{L^2} \right) \{ k_3, 0, -k_4, k_3, -k_4 \}.$$

Podstawiając powyższe zależności do (3.26), dla stanu nośności granicznej gdy  $W=0$ , prędkość zmian mnożnika obciążenia  $\dot{\lambda}$  otrzymamy w postaci:

$$(3.36) \quad \dot{\lambda}(W=0) = \frac{4 \frac{M_0}{L} \frac{H}{|H|} (k_3 - k_4) - 2Hk_3 - V k_1 + 2N(1 - k_1)}{|H| k_1 + |V| k_2} \cdot \frac{\dot{W}}{L}.$$

Zależność ta określa stateczność układu w stanie granicznym dla wszystkich możliwych mechanizmów zniszczenia (rys.3.5).

Na rys.3.6 oznaczono obszary statecznego (linia gruba) i niestatecznego zachowania się ramy w chwili osiągnięcia nośności granicznej. Okazuje się, że dla mechanizmów związanych z siłą pionową  $V > 0$  (zwrot w dół) układ na ogół jest niestateczny,  $\dot{\lambda} < 0$ , zaś dla  $V < 0$  na ogół stateczny. Wartości bezwymiarowego współczynnika  $\dot{\lambda}L/\dot{W}$  oznaczono na rys.3.6. Zauważmy jednak, że niektórym kombinacjom sił obciążających prowadzącym do łączonego mechanizmu zniszczenia (boki AH i DE wielokąta rys.3.6) towarzyszą interesujące efekty jakościowe. W obszarze generalnie statecznym układ może zachowywać się niestatecznie, strefa w okolicy punktu D, lub w obszarze niestatecznym statecznie, strefa w okolicy punktu H.

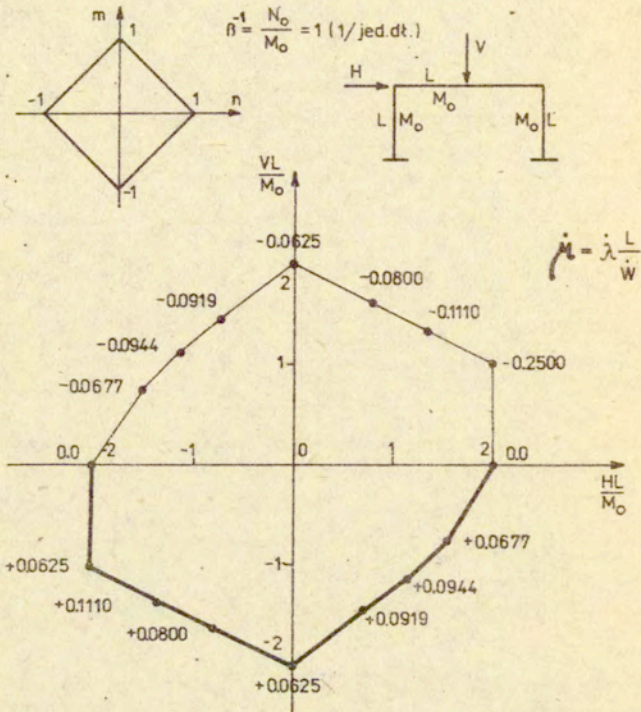


rys. 3.6

Rozważmy następnie identyczną ramę jak w poprzednim przykładzie wykorzystując jednak warunek graniczny dla przekroju uwzględniający interakcję momentu zginającego i siły osiowej. Obszar graniczny dla konstrukcji w przestrzeni bezwymiarowych obciążeń zewnętrznych ulega znacznym modyfikacjom (zmniejszeniu) rys.3.7 .

Wielkość tych modyfikacji jest miarą wpływu sił osiowych na osiągnięcie stanu granicznego. W prezentowanej poniżej grupie przykładów, rozwiązując problemy nośności granicznej, posługiwano się programem LPF-1 autorstwa M. SARANA [86] . Rozwiązano ramę o warunkach brzegowych jak na rys.3.8 z romboidalnym warunkiem plastyczności jak na rys.3.1 d) w postaci:

$$\pm m \pm n - 1 = 0 \text{ lub jeśli } \beta = \frac{M_0}{N_0} : \pm M \pm \beta N - M_0 = 0.$$



rys. 3.7

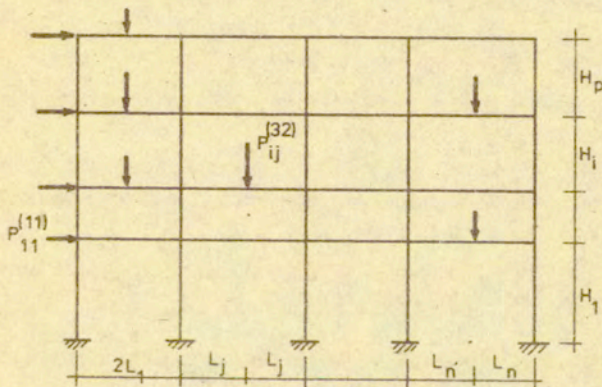
W wyniku rozwiązania nośności granicznej dla różnych kombinacji obciążeń, uzyskano odpowiednie pola prędkości przemieszczeń towarzyszące osiągnięciu stanu granicznego. Wykorzystanie zależności (3.27) umożliwiło określenie prędkości zmian obciążenia granicznego, więc określenie stateczności układu. Uzyskane rezultaty przedstawiono na rys.3.7.

Znaczne zmniejszenie obszaru nośności granicznej jest wynikiem uwzględnienia dużego wpływu sił normalnych na uplastycznienie

przekroju. W obliczeniach, których rezultaty zestawiono na rys. 3.7 przyjmowano  $\beta=1$  jedn.dł. Uwzględnienie sił osiowych eliminuje przedstawione w poprzednim przykładzie efekty niestateczności w obszarze generalnie statecznym i odwrotnie. Jak wynika z rys.3.7 uwzględnienie sił osiowych w warunku plastyczności powoduje wyraźne wydzielenie dwóch stref : niestatecznej dla  $V > 0$  oraz statecznej dla  $V < 0$ , wpływa także na zmianę kształtu obszaru granicznego przedstawionego w przestrzeni bezwymiarowych sił zewnętrznych (nie jest on symetryczny względem osi  $\frac{VL}{M_0}$  i  $\frac{HL}{M_0}$ ).

#### 3.4.4. Stateczność ram o siatce ortogonalnej [71]

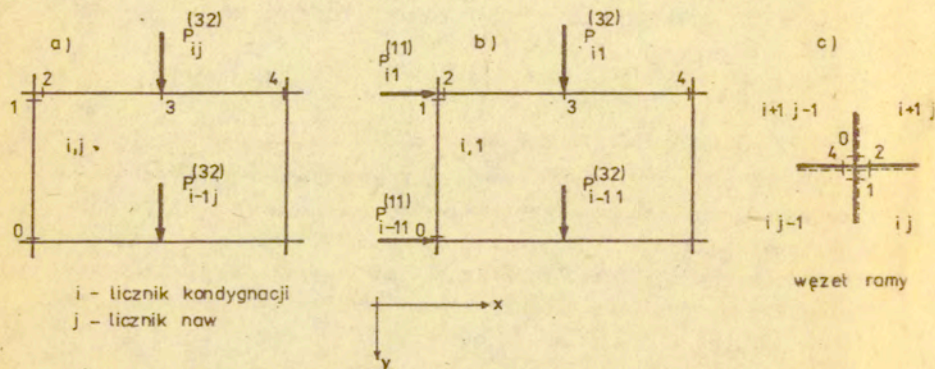
Proponowane przez autora [71] sformułowanie pozwalające na określenie stateczności wielonawowej ramy o siatce prostokątnej jest szczególnie użyteczne dla ram, w których intensywność obciążenia granicznego określona jest w wyniku kombinacji mechanizmów podstawowych. Analizujemy n-nawową i p-piętrową ramę rys.3.8, na którą działają obciążenia w postaci sił skupionych



rys. 3.8

przyłożonych w węzłach bądź środkach rozpiętości naw. Prze-

mieszczenia odpowiednich, charakterystycznych punktów ramy oznaczono przez  $W_{ij}^{(sk)}$  gdzie wskaźniki dolne  $i, j$  są odpowiednio licznikami pięter (kondygnacji) i naw  $i=1, 2, \dots, p$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ , wskaźniki górne zaś oznaczają odpowiednio:  $s$  - numer punktu w powtarzalnym elemencie ramy rys.3.9 a) i b),  $k$  - kierunek przemieszczenia tego punktu;  $k=1$  oznacza przemieszczenie poziome,  $k=2$  zaś pionowe.



rys. 3.9

W taki sam sposób indeksowane są siły  $P$  obciążające układ. Przemieszczenia i siły są dodatnie, gdy są zgodne z przyjętym układem współrzędnych rys.3.9.

Odpowiednie prędkości przemieszczeń wyznaczono stosując superpozycję mechanizmów podstawowych. Mechanizmy te opisano za pomocą następujących współczynników :

$$(3.37) \quad k_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{gdy istnieje przesuw kondygnacji } i \text{ w nawie } j, \\ 0 & \text{gdy nie istnieje,} \end{cases}$$

$$k_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{gdy istnieje mechanizm belkowy rygla na} \\ & \text{kondygnacji } i \text{ w nawie } j, \\ 0 & \text{gdy nie istnieje,} \end{cases}$$

$$k_{ij}^{(3)} = \begin{cases} 1 & \text{gdy istnieje obrót lewego górnego wężła} \\ & \text{powtarzalnego elementu ramy,} \\ 0 & \text{gdy nie istnieje,} \end{cases}$$

$$k_{ij}^{(4)} = \begin{cases} 1 & \text{gdy następuje załamanie rygla skrajnej nawy} \\ & \text{z poddaniem się słupa,} \\ 0 & \text{gdy nie występuje.} \end{cases}$$

Przemieszczenia punktów przyłożenia sił zewnętrznych wyrazić można; dla przemieszczeń poziomych w postaci :

$$(3.38) \quad W_{i1}^{(11)} = W \sum_{r=1}^i \frac{P_{r1}^{(11)}}{|P_{r1}^{(11)}|} k_{r1}^{(1)} + \frac{W^2}{L_1} \prod_{r=1}^i k_{r1}^{(4)} + \frac{P_{i1}^{(11)}}{|P_{i1}^{(11)}|} \frac{W^2}{2H_i} k_{i1}^{(1)} k_{i1}^{(2)},$$

oraz dla przemieszczeń pionowych :

$$(3.39) \quad W_{ij}^{(32)} = W \frac{L_j}{H_i} k_{ij}^{(2)} \frac{P_{ij}^{(32)}}{|P_{ij}^{(32)}|} + \frac{W^2}{2} \sum_{r=1}^i \frac{k_{rj}^{(1)}}{H_r},$$

gdzie  $\sum$  i  $\prod$  są symbolami sumowania i mnożenia. Wielkości kątów obrotów w przegubach plastycznych wyrażone jako funkcje charakterystycznych przemieszczeń przedstawić można w postaci :

$$(3.40) \quad \Phi_{ij}^{(1)} = - \frac{W}{H_i} \frac{P_{i1}^{(11)}}{|P_{i1}^{(11)}|} k_{ij}^{(1)} + \frac{W}{H_i} k_{i-1j}^{(3)} - \frac{P_{i1}^{(11)}}{|P_{i1}^{(11)}|} \frac{W^2}{2H_i^2} k_{ij}^{(1)} k_{ij}^{(2)} + \alpha$$

$$\text{gdzie } \alpha = - \frac{W^2}{L_1 H_i} \prod_{r=1}^i k_{r1}^{(4)} + \frac{W^2}{L_n H_i} \prod_{r=1}^i k_{rn}^{(4)},$$

gdzie rozciąganie włókien oznaczonych na rys.3.9 c) uznano za efekt działania dodatnich momentów zginających.

Tak jak poprzednio  $i, j$  oznaczają odpowiednie numery kondygnacji i naw, zaś indeks górny  $(o)$  oznacza miejsce rys.3.9 a) w elemencie powtarzalnym ramy. Pozostałe kąty obrotów wynoszą:

$$(3.41) \quad \Phi_{ij}^{(1)} = \frac{W}{H_i} \frac{P_{i1}^{(11)}}{|P_{i1}^{(11)}|} k_{ij}^{(1)} - \frac{W}{H_i} k_{ij}^{(3)} + \frac{P_{i1}^{(11)}}{|P_{i1}^{(11)}|} \frac{W^2}{2H_i^2} k_{ij}^{(1)} k_{ij}^{(2)} - \alpha,$$

$$(3.42) \quad \Phi_{ij}^{(2)} = - \frac{W}{H_i} \frac{P_{ij}^{(32)}}{|P_{ij}^{(32)}|} k_{ij}^{(2)} + \frac{W}{H_i} k_{ij}^{(3)},$$

$$(3.43) \quad \Phi_{ij}^{(3)} = 2 \frac{W}{H_i} \frac{P_{ij}^{(32)}}{|P_{ij}^{(32)}|} k_{ij}^{(2)},$$

$$(3.44) \quad \Phi_{ij}^{(4)} = -\frac{W}{H_i} \frac{P_{ij}^{(32)}}{|P_{ij}^{(32)}|} k_{ij}^{(2)} - \frac{W}{H_i} k_{i,j+1}^{(3)}.$$

Wydlużenia skoncentrowane w przegubach plastycznych rygli wynoszą :

$$(3.45) \quad \Lambda_{ij} = \frac{W^2}{H_i^2} L_j k_{ij}^{(2)},$$

oraz dla skrajnych górnych naw :

$$(3.46) \quad \Lambda_{pj} = \frac{W^2}{H_p^2} L_j k_{pj}^{(2)} (1 - k_{pj}^{(4)}) (1 - k_{pj}^{(1)}).$$

Wyznaczając odpowiednie pochodne z przytoczonych zależności geometrycznych oraz podstawiając do kryterium (3.26) otrzymujemy wyrażenie :

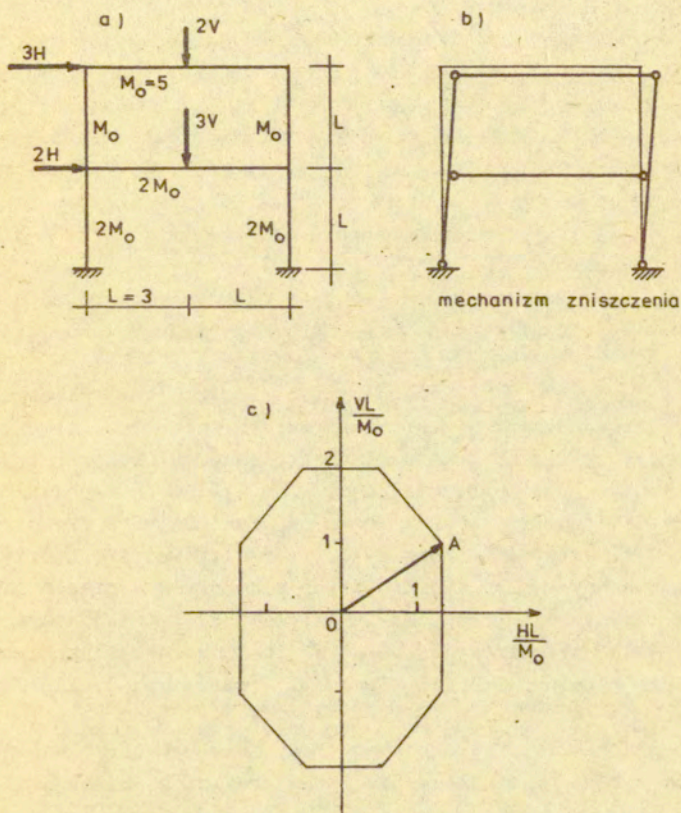
$$(3.47) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial \delta}; \quad \gamma &= 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \frac{N_{ij}^{(2)} L_j}{H_i^2} k_{ij}^{(2)} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{N_{pj}^{(2)} L_j}{H_p^2} k_{pj}^{(2)} (1 - k_{pj}^{(4)}) (1 - k_{pj}^{(1)}) - 4 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n+1} M_{ij}^{(5)} \left( \frac{\prod_{r=i}^p k_{rj}^{(4)}}{L_i H_i} - \frac{\prod_{r=i}^p k_{rj}^{(4)}}{L_n H_i} \right) - \\ &- 2 \sum_{i=1}^p \frac{P_{i1}^{(11)}}{L_1} \prod_{r=i}^p k_{r1}^{(4)} - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n P_{ij}^{(32)} \sum_{r=1}^i \frac{k_{rj}^{(1)}}{H_r} - \sum_{i=1}^p \frac{P_{i1}^{(11)}}{|P_{i1}^{(11)}|} \frac{k_{i1}^{(1)} k_{i1}^{(2)}}{H_i}, \\ \delta &= \sum_{i=1}^p |P_{i1}^{(11)}| \sum_{r=1}^i \frac{P_{r1}^{(11)}}{|P_{r1}^{(11)}|} k_{r1}^{(4)} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n |P_{ij}^{(32)}| \frac{L_j}{H_i} k_{ij}^{(2)} \frac{P_{ij}^{(32)}}{|P_{ij}^{(32)}|}. \end{aligned}$$



określające stateczność ramy spełniającej przedstawione powyżej założenia.

Przykład ramy dwukondygnacyjnej

Rozpatrzmy przykład ramy jak na rys.3.10 a), dla której rozwiązanie problemu nośności granicznej zaczerpnięto z pracy [35]. Obszar bezpiecznych obciążeń przedstawiono na rys.3.10 c).



rys. 3.10

Przyjmijmy program obciążeń oznaczony w przestrzeni sat wektorem  $\vec{OA}$ . W chwili osiągnięcia nośności granicznej wystąpi mechanizm przesuwu <sup>\*</sup> rys. 3.10 b) scharakteryzowany wartościami współczynników:  $k_{11}^{(1)} = k_{21}^{(1)} = k_{11}^{(3)} = -k_{12}^{(3)} = 1$ ,  $k_{ij}^{(2)} = k_{ij}^{(4)} = k_{21}^{(3)} = k_{22}^{(3)} = 0$ , przy intensywności obciążeń:

$$P_{11}^{(11)} = \frac{25}{6} P_0, P_{21}^{(11)} = \frac{25}{4} P_0, P_{11}^{(32)} = \frac{45}{8} P_0, P_{21}^{(32)} = \frac{15}{4} P_0.$$

Zależność (3.47) określa intensywność obciążenia w pkt. A. Otrzymujemy  $\lambda = -0,2625 \dot{W}$ , zatem konstrukcja jest niestateczna w chwili uplastycznienia.

W analizowanych przypadkach ram obciążonych w sposób najczęściej spotykany w praktyce inżynierskiej (siły pionowe skierowane w dół) obserwuje się powszechnie fakt iż zachowanie się układów w chwili osiągnięcia stanu granicznego jest niestateczne. Intensywność obciążenia granicznego powinna być wówczas traktowana w rzeczywistych konstrukcjach jako obciążenie niszczące. Podkreśla to wagę problemu badania stateczności układów sztywno-plastycznych.

Można się spodziewać iż informacja o ujemnych przyrostach obciążenia granicznego, podobnie jak ma to miejsce w analizie sprężystej, może być jednocześnie wskazówką o wrażliwości układu na imperfekcje. Informacja o stateczności jest przyczynkiem do określenia pozagranicznego charakteru zachowania się konstrukcji. Przy takich kombinacjach obciążeń, które przy tej samej intensywności  $\lambda$  dopuszczają kilka możliwych mechanizmów zniszczenia (punkty narożne obszarów granicznych w przestrzeni obciążeń), należy się spodziewać, iż realizować się będzie właśnie ten, który wymaga najmniejszych przyrostów obciążeń lub wykazuje największy spadek ich intensywności. I tutaj zauważyć można pewne analogie do zachowania się konstrukcji sprężystej w punkcie bifurkacji stanu równowagi, (patrz np. Z. WASZCZYŹYŃ [95]).

Należy podkreślić iż stateczność ramy może być określona jedynie wówczas gdy wyznaczony jest stan graniczny. Szczególnie trzeba mieć na uwadze uwzględnienie w warunku granicznym wpływu sił normalnych, które dla wysokich konstrukcji istotnie rzucają na wyznaczoną dopuszczalną intensywność obciążenia. Anali-

<sup>\*</sup> mechanizm ten jest bardziej niestateczny od mechanizmu bocznego przesuwu, który występuje przy tej samej intensywności obciążenia

zując stateczność dowolnych ram korzystnie jest posługiwać się zależnością (3.27) zaś dla wielonawowych i wielopiętrowych o siatce ortogonalnej (3.47). O ile nośność graniczna jest otrzymywana w wyniku rozwiązania zadania programowania matematycznego to wydaje się, iż badając stateczność najwygodniej jest posługiwać się zależnością (3.27).

Podsumowując rozważania niniejszego rozdziału należy zauważyć, że wyspecyfikowanie związków opisujących stateczność wielonawowych i wielopiętrowych ram o siatce ortogonalnej oraz uwzględnienie wpływu sił osiowych w warunkach granicznych dla przekrojów na zachowanie się konstrukcji w stanie osiągnięcia nośności granicznej są oryginalnymi problemami rozwiązanymi przez autora.

#### 4. Pozagraniczne zachowanie się belek i ram sztywno-plastycznych

W niniejszym rozdziale analizować będziemy wpływ zmian geometrii deformującego się plastycznie układu belkowego lub ramowego na charakter zmian mnożnika obciążenia  $\lambda$ . Zostaną rozpatrzone również przykłady belki wspornikowej pod obciążeniem niejednoparametrowym. Zakładamy, że plastyczne deformacje układu nie mają wpływu na postać warunku plastyczności i praw płynięcia wyrażonych w wielkościach uogólnionych. Przeanalizujemy możliwość wystąpienia zmian mechanizmów zniszczenia w procesie plastycznych deformacji. Obraz pozagranicznego zachowania się układów przedstawiony zostanie w postaci wykresów zależności P-W (obciążenie - reprezentatywne przemieszczenie), ilustrujących wpływ deformacji na intensywność obciążenia niezbędną do kontynuowania procesu odkształceń plastycznych.

U podstaw badania efektu P-W leży zwykle założenie, że proces plastycznych odkształceń, w całym zakresie przemieszczeń, związany jest zawsze z tym samym (początkowym) mechanizmem zniszczenia. Nie uwzględnia się wówczas możliwości wystąpienia zmian mechanizmu. W niektórych przypadkach, zwłaszcza dotyczących analizy belek, stan graniczny osiągnięty zostaje przy zerowych siłach osiowych, wyłącznie w wyniku działania momentów granicznych w przekrojach. Uwzględnienie w warunkach plastyczności wpływu sił osiowych daje znać o sobie dopiero w stanie pozagranicznym gdy wystąpią w układzie deformacje. Okazuje się, że uwzględnienie tych sił wpływa na istotną zmianę o charakterze jakościowym w zachowaniu się konstrukcji. Ponieważ efekty jakościowe są dobrze ilustrowane przykładami belek prostych zdecydowano się na przedstawienie wybranych analiz pozagranicznego zachowania się właśnie tych konstrukcji.

##### 4.1. Efekt obciążenie-przemieszczenie P-W

Zależność obciążenia niezbędnego do kontynuowania procesu deformacji plastycznych od zmiany geometrii układu jest zwana w literaturze "efektem P-W". Dla konstrukcji sztywno-plastycznej przez P rozumie się tu intensywność obciążenia gwarantującą

cą spełnienie warunków plastyczności dla niezbędnej liczby przekrojów, zaś  $W$  oznacza reprezentatywne przemieszczenie (zwykle przez  $W$  oznacza się największą ze składowych wektora przemieszczeń wywołaną efektami pierwszego rzędu).

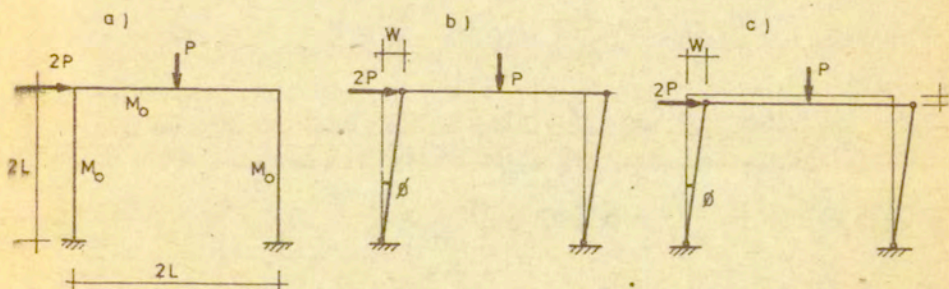
Proponowane w literaturze metody wyznaczania zależności obciążenie-ugięcie polegają na wykorzystaniu efektów wyższych rzędów (zwykle drugiego) w wyrażeniu na moc dysypowaną lub na zapisaniu warunków równowagi układu w konfiguracji zdeformowanej. Często nie uwzględnia się w warunkach plastyczności wpływu sił osiowych, co w niektórych przypadkach prowadzi do błędnych wyników.

Charakter zależności  $P-W$  jest zdeterminowany przyjmowanym zwykle założeniem o niezmienności mechanizmu zniszczenia. W myśl tego założenia mechanizm towarzyszący osiągnięciu stanu nośności granicznej realizuje się również w obszarze skończonych deformacji plastycznych. Charakterystyczne przekroje, które uległy uplastycznieniu w pierwszej chwili ruchu układu odkształcają się plastycznie w całym zakresie analizowanych deformacji konstrukcji.

Uwypuklając charakterystyczne cechy tego podejścia przeanalizujemy następujące przykłady konstrukcji.

#### 4.1.1. Ramy portalowe [72,73]

Rozpatrzmy ramę o geometrii i obciążeniu jak na rys.4.1 a).



rys. 4.1

Według rozwiązania teorii nośności granicznej, opierającej się na uproszczonym, nieuwzględniającym zmian geometrii, mechanizmie ruchu (rys.4.1 b) otrzymuje się graniczną intensywność obciążenia o wartości :

$$(4.1) \quad P^{\circ} = \frac{M_0}{L} .$$

Zakładając małe obroty w przegubach plastycznych można wyrazić kąt obrotu słupa w postaci :

$$(4.2) \quad \Phi \approx \frac{W}{2L} ,$$

zaś,przemieszczenie  $\Delta$  (rys.4.1 c) za pomocą związku :

$$(4.3) \quad \Delta = \frac{W^2}{4L} .$$

Zapisując równość mocy sił zewnętrznych i wewnętrznych przy pominięciu wpływu sił osiowych i założeniu momentów granicznych  $M_0$  w przegubach plastycznych otrzymujemy :

$$(4.4) \quad 4 M_0 \dot{\Phi} = 2P\dot{W} + P\dot{\Delta} ,$$

gdzie  $P$  oznacza intensywność obciążenia potrzebną do kontynuowania procesu deformacji plastycznych. Wyrażając odpowiednie prędkości w postaci :

$$(4.5) \quad \dot{\Phi} = \frac{\dot{W}}{2L} , \quad \dot{\Delta} = \frac{W\dot{W}}{2L} ,$$

otrzymamy po podstawieniu do (4.4) zależność między intensywnością obciążenia  $P$  potrzebnego do kontynuowania procesu plastycznych deformacji a przemieszczeniem  $W$  w postaci :

$$(4.6) \quad P = P^{\circ} \frac{1}{\left(1 + \frac{W}{4L}\right)} .$$

Opisując zależność  $P$ - $W$  przy zaawansowanych deformacjach ramy, gdy  $W = \alpha(L)$ , zależności geometryczne (4.2) i (4.3) należy przedstawić w formie dokładnej (nie ograniczając się, jak poprzednio, tylko do pierwszych wyrazów ich rozwinięcia w szereg

Taylora) w postaci :

$$(4.7) \quad \Phi = \arcsin \frac{W}{2L}$$

oraz

$$(4.8) \quad \Delta = L (1 - \cos \Phi) .$$

Odpowiednie prędkości analogiczne do (4.5) wyrażą się wówczas zależnościami :

$$(4.9) \quad \dot{\Phi} = \frac{\dot{W}}{2L \sqrt{1 - \left(\frac{W}{2L}\right)^2}} , \quad \dot{\Delta} = W \dot{\Phi} ,$$

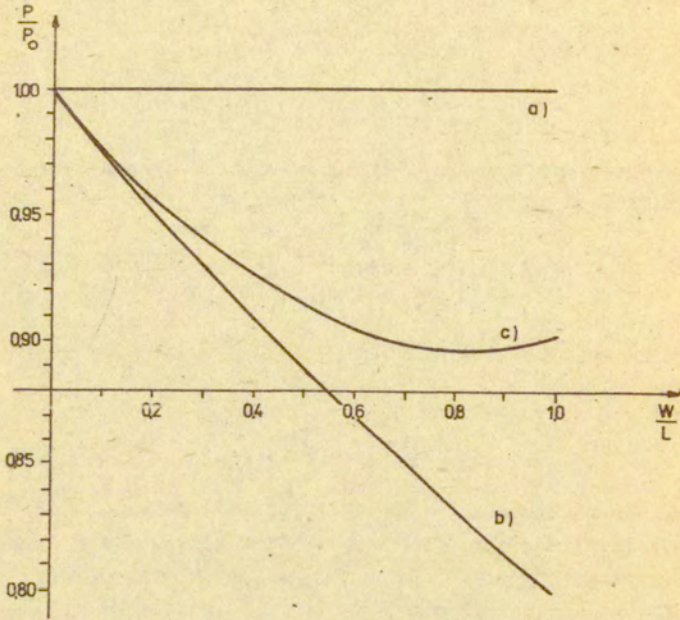
które po podstawieniu do (4.4) prowadzą do zależności :

$$(4.10) \quad P = P^{\circ} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{W}{2L}\right)^2} + \frac{W}{4L}} .$$

Charakter zależności P-W określonych wzorami (4.1), (4.6) i (4.10) ilustruje rys.4.2. Odpowiednie krzywe przedstawiają : a) rozwiązanie według teorii nośności granicznej wzór (4.1), b) rozwiązanie nieliniowe przy wykorzystaniu efektów II rzędu przy zmianach geometrii wg wzoru (4.6), c) rozwiązanie nieliniowe przy zastosowaniu dokładnych zależności geometrycznych wzór (4.10). Zauważmy, iż informacja dotycząca stateczności w chwili osiągnięcia nośności granicznej (rozdz.3, wzór (3.26) przy założeniach geometrycznych (4.2) i (4.3) prowadzi do określenia prędkości zmian mnożnika obciążenia w postaci :

$$(4.11) \quad \dot{\lambda} = - \frac{\dot{W}}{4L} , \quad \frac{dP}{dW} = - \frac{P^{\circ}}{4L} ,$$

co bezpośrednio wynika również z różniczkowania zależności (4.6) lub (4.10) przy  $W = 0$  . Podkreślmy, że w przypadku gdy interesuje nas zachowanie się układu w zakresie małych przemieszczeń, jedynie dopuszczalnych z punktu widzenia użytkowania,  $W \ll L$  , informacja o niestatecznym zachowaniu się konstrukcji przy  $W = 0$  i określenie nachylenia stycznej do wykresu P-W w tym punkcie



rys. 4.2

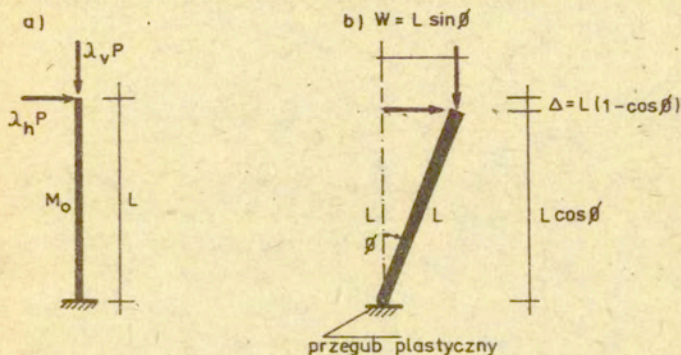
jest wystarczająco pełna. Dopuszczając umiarkowanie duże przemieszczenia  $W = \sigma(H)$  należy skorzystać z zależności (4.6), która w tym zakresie opisuje zachowanie się ramy dostatecznie dokładnie. Jeśli zaś interesujemy się dużymi deformacjami układu niezbędne jest uwzględnienie dokładnych wyrażeń opisujących geometrię układu-wzory (4.7) i (4.8). W takiej sytuacji wykorzystywanie w zależnościach geometrycznych tylko pierwszych wyrażen rozwinięć w szereg Taylora-wzory (4.2) i (4.3), nie opisuje właściwie przebiegu rzeczywistego wykresu P-W. Analizując zależności P-W zauważamy, że wykres c), który powstał przy przyjęciu dokładnych wyrażeń opisujących zmiany geometrii, ma swoje ekstremum dla wartości  $\frac{W}{L} \approx 0.8$ . Przy tym stanie przemieszczeń następuje zmiana jakościowa w zachowaniu się



konstrukcji i charakter zależności P-W staje się stateczny. Do dalszego kontynuowania procesu deformacji niezbędny jest przyrost obciążenia. Wykres zależności b) opierający się wyłącznie na pierwszych wyrazach rozwinięć w szereg dokładnych zależności geometrycznych ma wyłącznie charakter niestateczny.

#### 4.1.2. Belka wspornikowa pod obciążeniem niejednoparametrowym

Rozpatrzmy, dla zilustrowania problemu pozagranicznego zachowania się belek pod obciążeniem niejednoparametrowym, belkę wspornikową obciążoną dwiema siłami o ustalonych kierunkach rys. 4.3. Mnożniki sił  $\lambda_v$ ,  $\lambda_h$  mogą zmieniać się niezależnie od siebie. Założymy podobnie jak poprzednio, że na osiągnięciu stamu



rys. 4.3

plastycznego w przekroju belki wpływa jedynie zginanie. Zapiszemy równania równowagi statycznej układu w konfiguracji odkształconej zakładając, że w utwierdzeniu powstaje przegub plastyczny i występuje moment graniczny  $M_0$ . Graniczny mnożnik obciążenia poziomego  $\lambda_h$  towarzyszący rozpoczęciu procesu deformacji plastycznej układu określimy zapisując równanie równowagi w konfiguracji niezdeformowanej (pierwotnej) w postaci :

$$(4.12) \quad M_0 = \lambda_h^{\circ} PL \quad \Rightarrow \quad \lambda_h^{\circ} = \frac{M_0}{PL}$$

Równanie równowagi w konfiguracji odkształconej ma postać :

$$(4.13) \quad M_0 = PL (\lambda_h \cos \Phi + \lambda_v \sin \Phi).$$

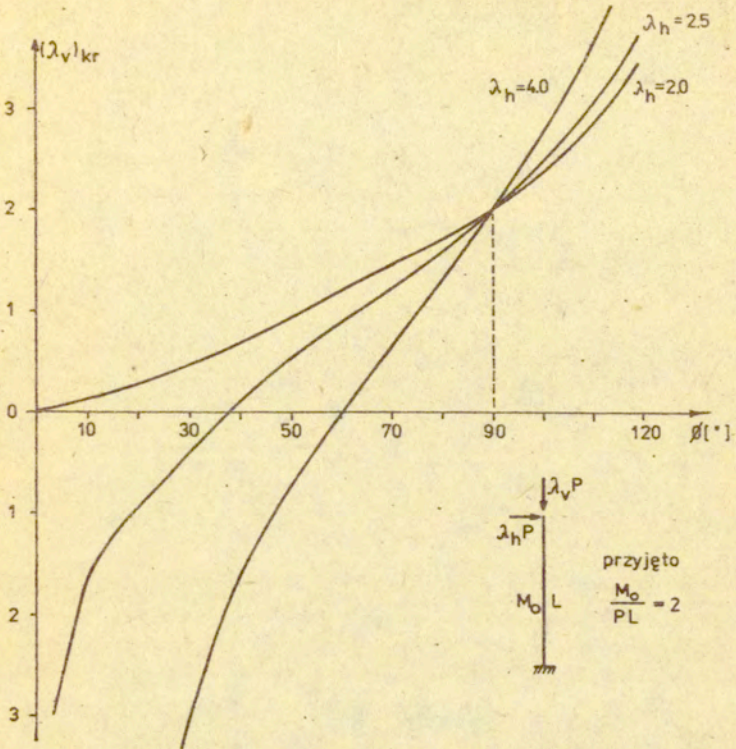
Aby w układzie wystąpił stan graniczny intensywność obciążenia poziomego  $\lambda_h$  musi osiągnąć wartość wyznaczoną wzorem (4.12). Określmy obecnie z warunku (4.13) związek określający zmiany intensywności  $\lambda_v$  przy zadanym  $\lambda_h$  (lub  $\lambda_h$  przy zadanym  $\lambda_v$ ). Intensywności obciążeń niezbędne do kontynuowania plastycznej deformacji przy ustalonym drugim mnożniku oznaczamy będziemy odpowiednio  $(\lambda_v)_{kr}$  lub  $(\lambda_h)_{kr}$ . Z równania równowagi otrzymujemy :

$$(4.14) \quad (\lambda_v)_{kr} = \frac{\lambda_h^0}{\sin \Phi} - \lambda_h \operatorname{ctg} \Phi, \quad \lambda_h \geq \lambda_h^0,$$

lub

$$(4.15) \quad (\lambda_h)_{kr} = \frac{\lambda_h^0}{\cos \Phi} - \lambda_v \operatorname{tg} \Phi.$$

Rezultaty powyższe najwygodniej zilustrować za pomocą wykresów. W analizowanym przypadku obciążeń dwuparametrowych wykresy zmian na rys.4.4 i 4.5 jednego z mnożników  $\lambda$  przy ustalonej intensywności drugiego z parametrów przedstawiono w funkcji kąta obrotu belki  $\Phi$ . Do sporządzenia obrazu graficznego przyjęto, że wartość granicznego mnożnika  $\lambda_h^0 = \frac{M_0}{PL} = 2$ . Wykresy te są ścieżkami równowagi układu. Rys.4.4 przedstawia zmianę intensywności obciążenia pionowego  $\lambda_v$  niezbędną do kontynuowania deformacji plastycznej belki przy ustalonej wartości drugiego parametru obciążenia ( $\lambda_h$ ). Przy założeniu, że w warunkach plastyczności ingeruje wyłącznie zginanie, osiągnięcie nośności granicznej jest związane z wystąpieniem intensywności obciążenia poziomego  $\lambda_h \geq \frac{M_0}{PL}$ . Można powiedzieć, że przy ustalonej intensywności  $\lambda_h$  deformacja plastyczna belki pociąga za sobą wzrost parametru obciążenia  $\lambda_v$ . W tym sensie rozpatrywany układ zachowuje się statecznie. Z innego typu zachowaniem się belki mamy do czynienia przy ustalonej wartości parametru  $\lambda_v$  (rys.4.5). Istnieje tutaj przypadek graniczny  $\lambda_v = M_0/PL = 2$ ,

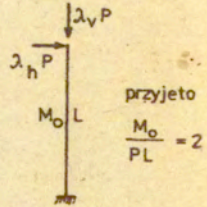
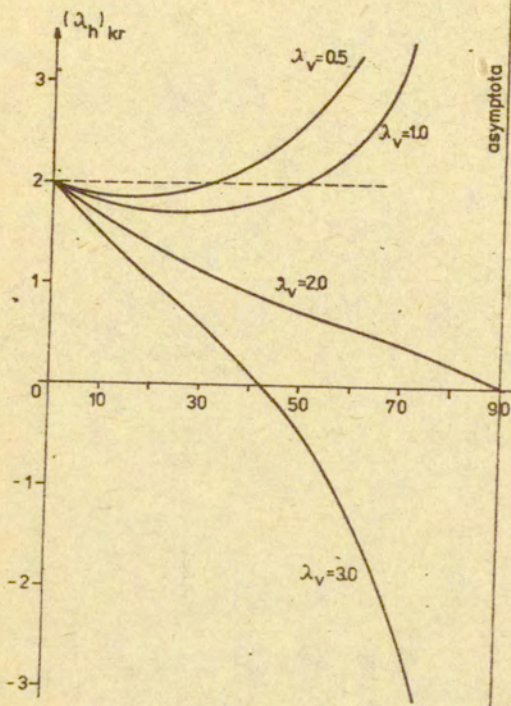


rys. 4.4

charakteryzujący się zachowaniem niestatecznym. Belki, dla których przyjęto  $\lambda_v > M_0/PL$  również zachowują się niestatecznie (deformacja plastyczna występuje przy malejących wartościach parametru  $\lambda_h$ ). Przypadki zadań, dla których przyjęto

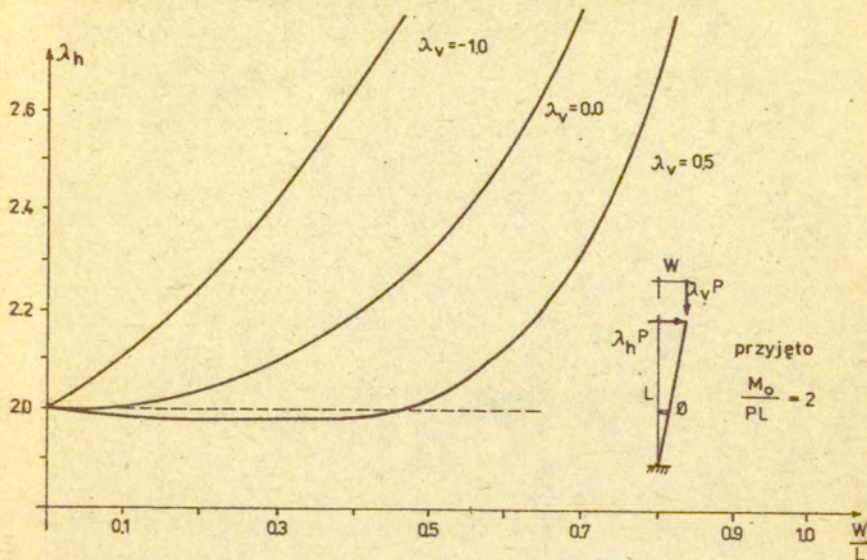
$0 < \lambda_v < M_0/PL$ , zachowują się początkowo niestatecznie.

W wyniku zmian geometrii układów ( $\lambda_v = 0.5, 1.0$ ) osiągnięte zostaje ekstremum intensywności ( $\lambda_h$ )<sub>kr</sub>. Dalej układy zachowują się statecznie. Dla przypadków  $\lambda_v \leq 0$  (zaznaczonych na rys.4.6) układy zawsze zachowują się statecznie.



rys. 4.5

Efekt P-W przedstawiony na rys.4.6 informuje, że intensywność obciążenia  $(\lambda_h)_{kr}$  zależy od przyjętego zwrotu siły pionowej. Rozciąganie  $\lambda_v < 0$  daje efekt stabilizujący. Dodatkowym efektem stabilizującym jest zmiana geometrii układu, np. dla  $\lambda_v = 0$  w chwili osiągnięcia nośności granicznej  $(\lambda_h)_{kr} = \lambda_h^0$  styczna do wykresu P-W  $(\lambda_h - W/L)$  jest pozioma. Jest to tzw. stan równowagi obojętnej. W tym przypadku efekt wzmocnienia (zachowanie się stateczne układu przy  $W \neq 0$ ) jest wyłącznie wynikiem zmian geometrii układu.



rys. 4.6

Efekt wyraźnej zmiany kształtu wykresu dla  $\lambda_v = 0,5$  z rys.4.6 w stosunku do rys.4.5 jest wynikiem zmiany skali osi poziomej.

#### 4.2. Wpływ warunku plastyczności na pozagraniczne zachowanie się belki wspornikowej

Prezentowane powyżej przykłady ograniczały się do zapisania warunku plastyczności dla przekroju w najprostszej formie jako funkcji wyłącznie momentu granicznego  $M_0$ . Obecnie przeanalizujemy wpływ siły osiowej przez uwzględnienie jej w funkcji stanu granicznego. Przedstawimy to na przykładzie belki wspornikowej o przekroju prostokątnym. Warunek graniczny wyrażony w uogólnionych naprężeniach ma wówczas postać [58] :

$$(4.16) \quad \sigma = \pm m + n^2 - 1 = 0$$

Gdzie  $m = \frac{M}{M_0}$ ,  $n = \frac{N}{N_0}$ ,  $M_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{pl} b dz$ ,  $N_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{pl} b dz$ .

$h$  jest wysokością przekroju belki.

Stowarzyszone z tym warunkiem plastyczności prawo płynięcia pozwala zapisać prędkości wydłużeń osiowych  $\dot{\Lambda}$  i kąta obrotu  $\dot{\Phi}$  w postaci :

$$(4.17) \quad \dot{\Lambda} = \mathcal{K} \frac{2N}{N_0^2}, \quad \dot{\Phi} = \pm \mathcal{K} \frac{1}{M_0}, \quad \text{sign } M = \text{sign } \dot{\Phi},$$

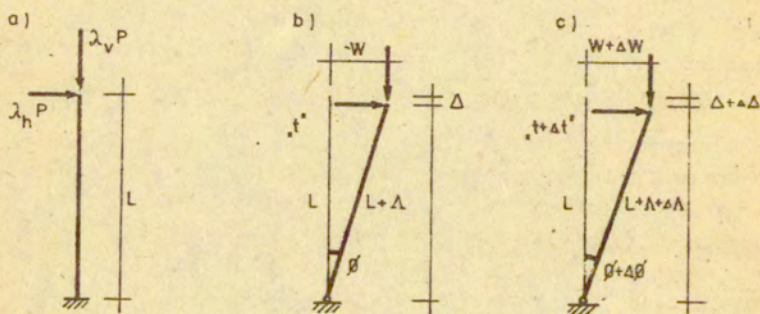
gdzie przez  $\mathcal{K}$  oznaczono nieujemny mnożnik skalarny. Można więc zapisać następujący związek między składowymi prędkości uogólnionych odkształceń :

$$(4.18) \quad \dot{\Phi} = \pm \frac{N_0^2}{2NM_0} \dot{\Lambda}, \quad \text{sign } M = \text{sign } \dot{\Phi}.$$

Równość mocy sił zewnętrznych i wewnętrznych dla belki wspornikowej rys.4.7 zapiszemy w postaci :

$$(4.19) \quad M\dot{\Phi} + N\dot{\Lambda} = \lambda_h P\dot{W} + \lambda_v P\dot{\Delta},$$

przy założeniu, że odkształcenia  $\Phi : \Lambda$  koncentrują się w uogólnionym przegubie plastycznym.



rys. 4.7

Uwzględniając wydłużenia osiowe  $\Lambda$ , związki geometryczne otrzymujemy w postaci :

$$(4.20) \quad \begin{aligned} W &= (L + \Lambda) \sin \Phi, \\ \Delta &= L - (L + \Lambda) \cos \Phi, \end{aligned}$$

zaś odpowiednie prędkości przemieszczeń wyrażają się równaniami:

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \dot{W} &= \dot{\Lambda} \sin \phi + (L + \Lambda) \dot{\phi} \cos \phi, \\ \dot{\Delta} &= -\dot{\Lambda} \cos \phi + (L + \Lambda) \dot{\phi} \sin \phi. \end{aligned}$$

Na podstawie zależności (4.19) możemy określić intensywność obciążenia  $P$  niezbędnego do kontynuowania procesu plastycznych deformacji w postaci :

$$(4.22) \quad P = \frac{M \dot{\phi} + N \dot{\Lambda}}{\lambda_v \dot{\Delta} + \lambda_h \dot{W}}.$$

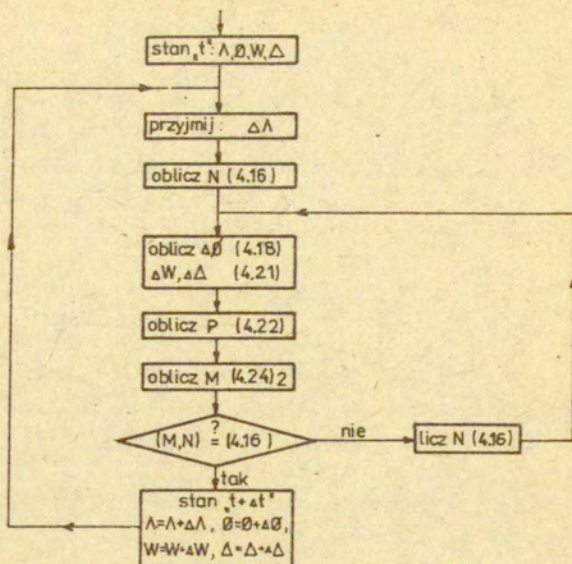
Chcąc przystosować niniejsze rozważania do praktycznych możliwości rozwiązania numerycznego, prędkości zmian przemieszczeń i odkształceń zastąpiono ich przyrostami. Rys.4.7 b) i c) przedstawiają sąsiednie stany równowagi układu sugerując przyrostową metodę rozwiązania problemu. Analiza pozagranicznego zachowania się belki wspornikowej dokonywana jest za pomocą przyrostowo-iteracyjnej procedury numerycznej. Znając konfigurację równowagi układu „ $t$ ” charakteryzującą się aktualnym stanem geometrii  $\phi, \Lambda, W, \Delta$  poszukuje się sąsiedniego, „ $t + \Delta t$ ”, różniącego się o przyrosty  $\Delta\phi, \Delta\Lambda, \Delta W, \Delta\Delta$ , stanu równowagi spełniającego warunek graniczny w postaci (4.16). Tok postępowania przedstawiono na schemacie rys.4.8. Warunkiem sprawdzającym poprawność wyznaczenia nowej konfiguracji jest spełnienie równań równowagi układu :

- dla konfiguracji aktualnej :

$$(4.23) \quad \begin{aligned} N &= \lambda_v P \sin \phi - \lambda_h P \cos \phi, \\ M &= \lambda_v P (L + \Lambda) \cos \phi + \lambda_h P (L + \Lambda) \sin \phi, \end{aligned}$$

- dla konfiguracji z przyrostem :

$$(4.24) \quad \begin{aligned} N &= \lambda_v P \sin (\phi + \Delta\phi) - \lambda_h P \cos (\phi + \Delta\phi) \\ M &= \lambda_v P (L + \Lambda + \Delta\Lambda) \cos (\phi + \Delta\phi) + \lambda_h P (L + \Lambda + \Delta\Lambda) \sin (\phi + \Delta\phi). \end{aligned}$$



rys. 4.8

Zależności siły bezwymiarowej  $PL/M_0$  od kąta ugięcia przedstawione są na rys.4.9 i 4.10 linią ciągłą.

W celu określenia wpływu różnych linearyzacji warunku plastyczności na pozagraniczne zachowanie się belki przyjmijmy obecnie zlinearyzowany warunek plastyczności opisany na rozważanym (4.16) np. w postaci jak na rys.3.1b).

W formie analitycznej warunek ten ma postać :

$$\Theta = m \pm 1 = 0 \quad \begin{cases} m < 0 \\ m > 0 \end{cases} \quad \text{przy } -\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{1}{2} ,$$

$$(4.25) \quad \Theta = m \pm 2n \mp 2 = 0 \quad \begin{cases} m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \quad \text{przy } \frac{1}{2} \leq n \leq 1 ,$$

$$\Theta = m \pm 2n \pm 2 = 0 \quad \begin{cases} m < 0 \\ m > 0 \end{cases} \quad \text{przy } -\frac{1}{2} \geq n \geq -1 .$$

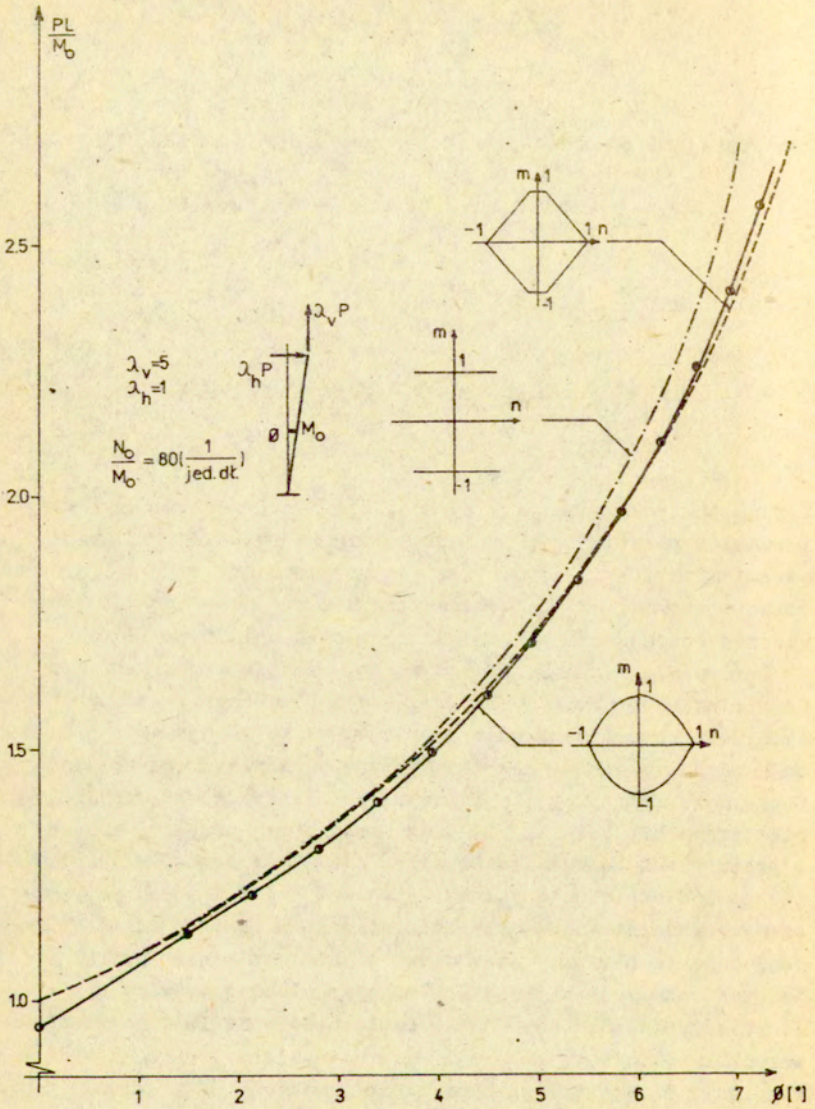


Odpowiadające mu prawo płynięcia wyraża się zależnościami :

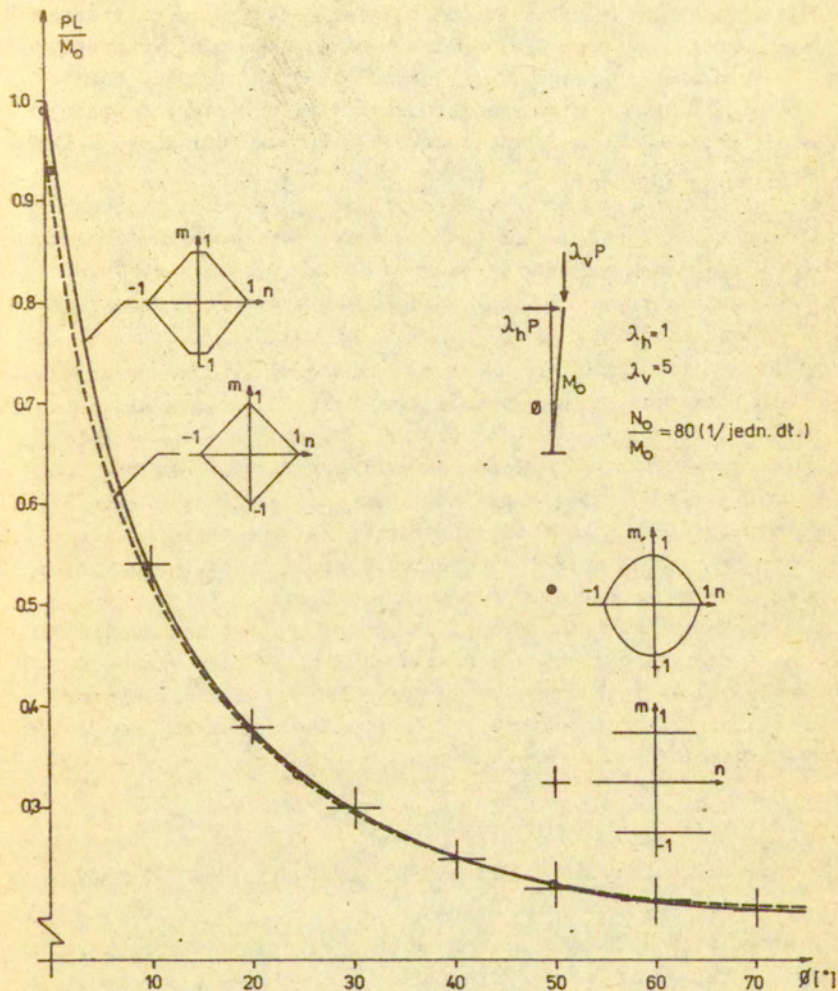
$$\begin{aligned}
 & \text{dla } -\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{1}{2} , \quad \dot{\Phi} = \kappa \frac{1}{M_0} , \quad \dot{\Lambda} = 0 \\
 (4.26) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \text{dla } \frac{1}{2} \leq n \leq 1 , \quad \dot{\Phi} = \kappa \frac{1}{M_0} , \quad \dot{\Lambda} = \pm \kappa \frac{2}{N_0} \\
 & \text{dla } -\frac{1}{2} \geq n \geq -1 , \quad \dot{\Phi} = \kappa \frac{1}{M_0} , \quad \dot{\Lambda} = \pm \kappa \frac{2}{N_0}
 \end{aligned} \right\} \dot{\Phi} = \pm \frac{N_0}{2M_0} \dot{\Lambda}
 \end{aligned}$$

Ogólny tok postępowania przy analizie belki ze zlinearyzowanym warunkiem plastyczności, przedstawiony na rys.4.8, pozostaje niezmienny. Wprowadzone zostają do procedury oczywiście dodatkowe warunki ustalające, na którym z odcinków krzywej granicznej zostaje osiągnięty aktualny stan uplastycznienia.

Porównanie pozagranicznego zachowania się sztywno-plastycznej belki wspornikowej dla przyjętych różnych krzywych granicznych zostało przedstawione na rys.4.9 i 4.10. Rys.4.9 prezentuje zachowanie się rozciąganego pręta (statecznego w stanie pozagranicznym) przy nieliniowym i zlinearyzowanym warunku plastyczności. Ścieżki równowagi statycznej przedstawione są w przestrzeni bezwymiarowej siły  $P^L/M_0$  i kąta obrotu  $\Phi$ . Przyjmując sposób obciążenia jak na rys.4.9, akcja membranowa (zniszczenie wyłącznie na skutek działania siły osiowej rozciągającej) pojawia się przy stosunkowo niewielkim kącie  $\Phi \approx 11^\circ 18'$ . Istotne różnice w wartościach siły granicznej występują w chwili uplastycznienia, gdyż już w chwili osiągnięcia tego stanu w warunku nieliniowym ingeruje siła osiowa, zaś w warunku zlinearyzowanym osiągnięty stan graniczny związany jest jedynie z działaniem momentu granicznego. Rozbieżności w określeniu siły granicznej dla dwóch analizowanych warunków plastyczności wynoszą około 2%. Zależność  $P^L/M_0 - \Phi$  prezentowana na rys.4.10



rys. 4.9



rys. 4.10

(przypadek niestateczny) przedstawiają porównanie zachowania się belki wspornikowej przy dwi zlinearyzowanych warunkach granicznych (wpisanym - romboidalnym i opisanym na warunku nieliniowym). Na tym rys. oznaczono również rozwiązania dotyczące zachowania się pręta przy nieliniowym warunku plastyczności. W prezentowanych przypadkach wartości sił granicznych różnią się w stosunku do rozwiązania z nieliniowym warunkiem plastyczności: o około 2% dla zlinearyzowanego warunku opisanego i około 5% dla zlinearyzowanego warunku wpisanego.

Linearyzacja warunku plastyczności pociąga za sobą zwiększenie nośności granicznej w przypadku warunku opisanego lub zmniejszenie w przypadku warunku wpisanego. Jak to wynika z rys. 4.9 i 4.10 zasada ta nie dotyczy przebiegu wykresu P-W w zakresie skończonych odkształceń.

Na koniec niniejszych rozważań zauważmy, że linearyzacja warunku plastyczności uwzględniająca efekty działania sił osiowych nie ma istotnego wpływu na przebieg zależności  $P-W$ . Największe różnice występują dla stanu nośności granicznej (max. 5%), później dla  $W \neq 0$  krzywe opisujące stan pozagraniczny prawie się pokrywają. Należy również stwierdzić, że wprowadzenie zależności zlinearyzowanych opisujących warunek plastyczności nie wpływa w zasadniczy sposób na uproszczenie obliczeń.

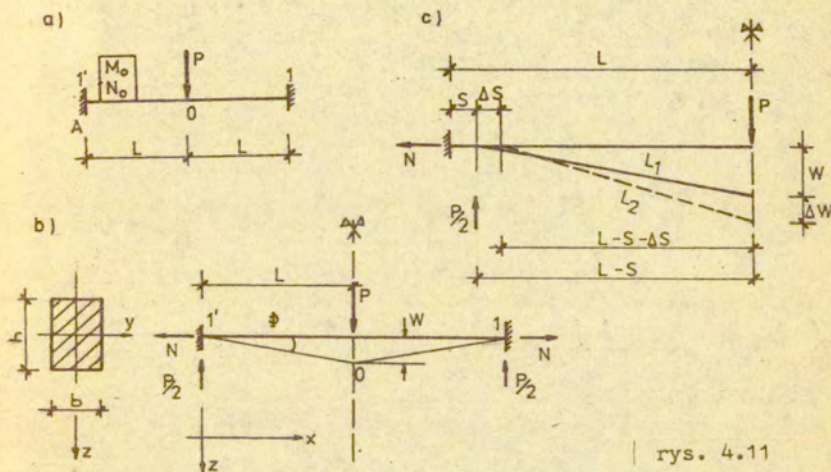
Znaczne uproszczenie analizy pozagranicznego zachowania się konstrukcji osiąga się wykorzystując warunek plastyczności uwzględniający wyłącznie wpływ zginania. Prowadzić to jednak może w bardziej skomplikowanych przypadkach do mało precyzyjnej oceny pozagranicznej pracy układu.

#### 4.3. Pozagraniczna analiza belek utwierdzonych z możliwością przemieszczania się podpór

Dotąd zajmowaliśmy się w niniejszym rozdziale przypadkami belek i ram wykazującymi duże zmiany geometrii w procesie plastycznych deformacji przy założeniu stałości mechanizmu zniszczenia. Spróbujemy teraz przedstawić przypadki belek, w których występować może zmiana mechanizmu, polegająca na możliwości przemieszczania się podpór.

Tylko nieliczne przykłady zadań, określających pozagraniczną analizę konstrukcji sztywno-plastycznych, są możliwe do rozwiązania na drodze analitycznej. Zwykle należy stosować podejście numeryczne. Niniejszy rozdział ukazuje możliwość rozwiązania grupy zadań z różnymi warunkami brzegowymi przy zastosowaniu jednego wspólnego sformułowania problemu. Zaletą proponowanego ujęcia przyrostowego w stosunku do klasycznego podejścia prędkościowego [20,43,59] jest możliwość jednolitego opisu całej klasy konstrukcji belkowych przy zróżnicowanych sposobach zamocowania.

Przyjmijmy pryzmatyczną i izotropową belkę o przekroju prostokątnym, obustronnie utwierdzoną i obciążoną w środku rozpiętości siłą skupioną  $P$ . (rys.4.11). Podpory te w procesie



rys. 4.11

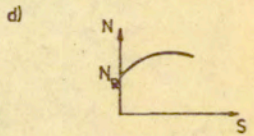
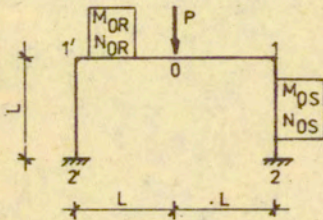
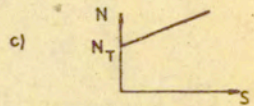
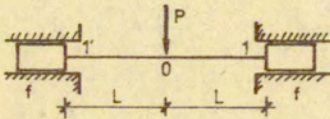
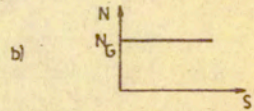
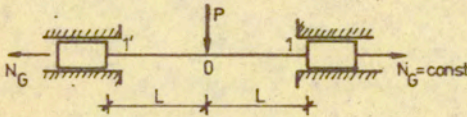
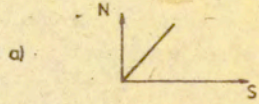
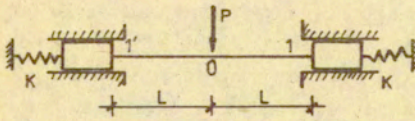
deformacji, powodującym wystąpienie w belce osiowych sił rozciągających, mogą ulegać przemieszczeniom poziomym. W zależności od relacji opisującej przemieszczenia podpór, jako funkcje siły osiowej, rozaptrznono następujące przypadki (rys.4.12) :

- podpora sprężysta (rys.4.12 a), przemieszczenie  $s$  jest proporcjonalne do aktualnej siły osiowej

$$(4.27) \quad N = ks ,$$

gdzie  $k$  jest sztywnością w kierunku poziomym konstrukcji, na której oparta jest belka,

- podpora przemieszczająca się od chwili wystąpienia w układzie odpowiednio dużych sił osiowych (o charakterze sił tarcia) rys.4.12 b,c ,



rys. 4.12

- podpora belki (rygła ramy portalowej) przemieszczająca się, dopiero od chwili uplastycznienia przekrojów podstawy słupa (rys.4.12 d).

Materiał belki jest sztywno-plastyczny o naprężeniu granicznym  $\sigma_{pl}$ . Warunek plastyczności wyrażony w uogólnionych naprężeniach przyjęto za HODGE'em [58] w postaci (4.16).

4.3.1. Belka utwierdzona z podporami nieprzesuwymi

Rozwiązanie belki sztywno-plastycznej z nieprzesuwymi podporami zostało przytoczone w poniższych rozważaniach w celu wyraźniejszego przedstawienia wpływu podatności podpór na pozagraniczne zachowanie się belki. Rozpatrywane rozwiązania belek porównuje się z przypadkiem belki o nieprzesuwnych podporach.

Analiza sztywno-plastycznej belki, uwzględniająca wpływ sił osiowych na uplastycznienie przekrojów, rozpoczyna się z chwilą osiągnięcia intensywności obciążenia granicznego. Do tego momentu rozkład sił wewnętrznych nie jest określony. W chwili gdy osiągnięta zostaje nośność graniczna siła osiowa równa jest zeru. Graniczna intensywność obciążenia dla belki obustronnie zamocowanej wynosi wówczas :

$$(4.28) \quad p^0 = \frac{4M_0}{L}$$

Zakładając, że deformacja belki przebiega symetrycznie (punkt zaczepienia siły  $P$  o reprezentatywnym przemieszczeniu  $W$  porusza się po osi symetrii belki) oraz, że siła osiowa  $N$  jest stałą na długości belki, można zapisać zasadę równości mocy sił zewnętrznych i wewnętrznych w postaci :

$$(4.29) \quad P\dot{W} = 4M\dot{\Phi} + 4N\dot{\Lambda}$$

gdzie  $\dot{\Phi}$  i  $\dot{\Lambda}$  oznaczają odpowiednio prędkości zmian kątów obrotów i wydłużeń skoncentrowanych w uogólnionych przegubach plastycznych. Odpowiednie wielkości sił przekrojowych  $M$  i  $N$  spełniają warunek plastyczności w postaci (4.16). Uproszczone zależności kinematyczne dla przemieszczeń  $W$  nie przekraczających wysokości przekroju  $h$  zapisać można w postaci :

$$(4.30) \quad \Lambda = \frac{W^2}{4L} \quad ; \quad \Phi = \frac{W}{L}$$

zaś ich pochodne względem czasu :

$$(4.31) \quad \begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \frac{W\dot{W}}{2L} \quad , \quad \dot{\Phi} = \frac{\dot{W}}{L} \quad , \\ \ddot{\Lambda} &= \frac{\dot{W}^2}{2L} + \frac{W\ddot{W}}{2L} \quad , \quad \ddot{\Phi} = \frac{\ddot{W}}{L} \quad . \end{aligned}$$

Przyjmijmy  $\dot{P}$  jako jednoparametrowe obciążenie w postaci :

$$(4.32) \quad \dot{P}(\underline{X}, t) = \lambda(t) \dot{P}^0(\underline{X})$$

gdzie  $\underline{X}$  jest współrzędną Lagrange'a charakteryzującą rozkład sił na konstrukcji,  $t$  - parametrem zmiennym proporcjonalnie do czasu. Po zróżniczkowaniu zależności (4.32) względem czasu otrzymujemy :

$$(4.33) \quad P\ddot{W} + \dot{P}\dot{W} = 4\dot{M}\dot{\Phi} + 4M\ddot{\Phi} + 4\dot{N}\dot{\Lambda} + 4N\ddot{\Lambda} .$$

Podstawiając do tego równania zależności geometryczne (4.34) i wykorzystując równanie równowagi w postaci :

$$(4.34) \quad P_L = 2NW + 4M ,$$

oraz definiując idealnie plastyczny materiał w uogólnionych naprężeniach w sensie Oldroyda [34] za pomocą związku (3.14) otrzymujemy analogicznie do (3.19) :

$$(4.35) \quad \dot{P} = \dot{\lambda}P^* = 2N \frac{\dot{W}}{L} .$$

Przyjmując prawo płynięcia, stowarzyszone z warunkiem granicznym (4.16), w postaci (4.17) otrzymano już poprzednio zależność między prędkościami uogólnionych odkształceń w postaci (4.18). Na podstawie (4.18) bezwymiarową siłę osiową można otrzymać jako funkcję prędkości odkształceń w postaci :

$$(4.36) \quad n = \frac{2}{h} \frac{\dot{\Lambda}}{\dot{\Phi}} ,$$

gdzie  $h$  jest wysokością przekroju.

Wykorzystując (4.31) w (4.36) otrzymujemy :

$$(4.37) \quad N = \frac{N_0^2}{4M_0} W ,$$

lub w postaci bezwymiarowej :

$$(4.38) \quad n = \frac{N}{N_0} = \frac{W}{h} .$$

Podstawiając (4.36) do równania (4.35) otrzymujemy :

$$(4.39) \quad \frac{dP}{dW} = 2 \frac{\sigma_{pl} b W}{L} .$$



Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego, przy wykorzystaniu warunku początkowego w postaci  $P=P^0 = \frac{4M_0}{L}$  dla  $W=0$ , prowadzi do określenia intensywności obciążenia towarzyszącego plastycznym deformacjom belki w znanej postaci [20], [59]:

$$(4.40) \quad P = P^0 + \sigma_{pl} b \frac{W^2}{L},$$

lub w postaci bezwymiarowej:

$$(4.41) \quad p = \frac{P}{P^0} = 1 + \left(\frac{W}{h}\right)^2.$$

Powyzsza zależność opisuje zachowanie się belki, gdy siła osiowa  $N \leq N_0$ , czyli na podstawie (4.38), gdy ugięcie środka belki  $W$  nie przekracza wysokości przekroju  $W/h \leq 1$ . Dla większych ugięć siła osiowa pozostaje stała i jest równa sile granicznej  $N_0$  - tzw. efekt ciągnowy. Deformacje plastyczne przekroju dokonują się wówczas wyłącznie na skutek działania siły osiowej. Zależność opisująca odpowiednią intensywność obciążenia przyjmuje postać:

$$(4.42) \quad p = 2 \frac{W}{h}.$$

Formuły (4.41) i (4.42) były wyprowadzone w literaturze problemu np. [20], [59] przy różniącym się nieco sposobie postępowania.

#### 4.3.2. Belki utwierdzone z podporami przesuwными

W rzeczywistych konstrukcjach trudno zrealizować idealne warunki podparcia. Przedmiotem dalszych rozważań są więc belki, których podpory ulegają poziomym przemieszczeniom  $s$  (rys. 4.11 c). Przyjęte warunki podparcia opisują charakter zależności  $N-s$ . Ze względu na możliwość jednolitego sformułowania zagadnienia deformacji belki przy różnych warunkach brzegowych, a zwłaszcza dla belki będącej ryglem ramy portalowej, wybrano przyrostowy opis kinematyki procesu. Specyfikując odpowiednie związki geometryczne rozpatruje się dwa sąsiednie stany równo-

wagi układu (rys.4.11 c). Przyjmijmy, że stan dla czasu  $\tau = t$  charakteryzuje się przemieszczeniem podpory o odcinek  $s$  od stanu początkowego. Odległość między przegubami plastycznymi (długość sztywnych części belek) wynosi  $L_1$ . Sąsiedni stan belki, dla czasu  $\tau = t + \Delta t$ , w którym nastąpiło dodatkowe przemieszczenie środka rozpiętości o  $\Delta W$  związany jest z dodatkowym ruchem podpory o  $\Delta s$ . Długość sztywnego odcinka belki wynosi wówczas  $L_2$ . Zakłada się, że całkowite odkształcenia plastyczne koncentrują się w przegubach. Dla ugięć rzędu wysokości przekroju  $W = o(h)$  oraz dla przyrostów przemieszczeń  $\Delta W \ll h$ , przyrosty odkształceń w uogólnionych przegubach plastycznych powstające przy przejściu z konfiguracji  $\tau = t$  do  $\tau = t + \Delta t$  wynoszą :

$$(4.43) \quad \Delta \Lambda = \frac{1}{2} (L_2 - L_1) \quad ; \quad \Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Wielkości powyższe określić można z zależności geometrycznych (rys.4.11 c) :

$$(4.44) \quad L_1^2 = (L-s)^2 + W^2, \quad L_2^2 = (L-s-\Delta s)^2 + (W+\Delta W)^2,$$

oraz

$$\Phi_1 = \frac{W}{L-s}, \quad \Phi_2 = \frac{W+\Delta W}{L-s-\Delta s}.$$

Pomijając wielkości wyższych rzędów w rozwinięciu w szereg Taylora możemy przyrosty uogólnionych odkształceń przedstawić w postaci :

$$(4.45) \quad \Delta \Lambda = \frac{1}{2} \left( \frac{W \Delta W}{L-s-\Delta s} - \Delta s \right),$$

$$\Delta \Phi = \frac{\Delta W}{L-s-\Delta s}.$$

Jeżeli prędkości odpowiednich odkształceń przybliżymy ich przyrostami, to zależność opisująca siłę osiową otrzymaną z prawa płynięcia (4.36) ma postać :

$$(4.46) \quad \eta = \frac{1}{h} \left( -\frac{\Delta s}{\Delta W} + \frac{W}{L-s-\Delta s} \right) (L-s-\Delta s).$$

Związek opisujący przyrost przemieszczenia podpory  $\Delta s$  jako funkcję aktualnego stanu deformacji otrzymać można rozwiązując powyższe równanie względem  $\Delta s$ . Po pominięciu składowych wyższych rzędów otrzymujemy:

$$(4.47) \quad \Delta s = \frac{\Delta W}{L-s} (W - \pi h).$$

Wykorzystując warunek plastyczności (4.16), warunek równowagi w aktualnej konfiguracji w postaci:

$$(4.48) \quad P(L-s) = 4M + 2NW,$$

możemy wartość siły  $P$  potrzebnej do kontynuowania procesu deformacji plastycznych wyrazić wzorem:

$$(4.49) \quad P = \frac{2}{L-s} [2M_0(1-\pi^2) + \pi WN_0],$$

lub w postaci bezwymiarowej:

$$(4.50) \quad p = \frac{P}{P_0} = \frac{L}{L-s} \left(1 - \pi^2 + 2\pi \frac{W}{h}\right).$$

Powyzsza zależność opisuje zachowanie się belki w zakresie sił osiowych  $\pi \leq 1$ . Przy podatności podpory  $k \rightarrow \infty$  (pełne utwierdzenie), przemieszczenia podpory  $s \rightarrow 0$  zaś na mocy (4.46)  $\pi \rightarrow \frac{W}{h}$  wówczas wzór (4.50) przyjmuje określoną poprzednio postać (4.41).

Przedstawione zależności stały się podstawą procedury przyrostowej określającej pozagraniczne zachowanie się układu (wykres obciążenie-przemieszczenie). Parametrami danymi są właściwości podpór (zależność  $\pi-s$ ) geometria układu i granica plastyczności materiału belki. Parametrem sterującym procesem przyrostowym jest przyrost przemieszczenia  $\Delta W$ . Za pomocą równania (4.47) określa się wartości przyrostu przemieszczenia podpory  $\Delta s$ . Wyznacza się całkowite przemieszczenia  $W$  i  $s$  oraz nową wartość siły osiowej, zaś na podstawie (4.50) odpowiednią intensywność obciążenia  $p$ .

Zapiszmy teraz zależności opisujące właściwości podpór.

#### 4.3.2.1. Sprężyste poddanie się podpory

Problem pozagranicznej analizy belki sztywno-plastycznej przegubowo podpartej na sprężystych podporach w sformułowaniu prędkościowym był przedmiotem rozważań P.G. HODGE'a [59]. Zakładają się, iż wielkość przemieszczenia poziomego podpór jest związana z siłą osiową zależnością liniową (rys.4.15 a) w postaci :

$$(4.51) \quad \pi = k \cdot s.$$

Podstawiając (4.51) do (4.50) otrzymujemy związek :

$$(4.52) \quad p = \frac{L}{L-s} \left[ 1 - (ks)^2 + 2ks \frac{W}{h} \right],$$

który opisuje zachowanie się belek na sprężystych podporach przy różnych parametrach sprężystości podpór  $k$ . Związek ten przedstawiono graficznie na rys.4.13.

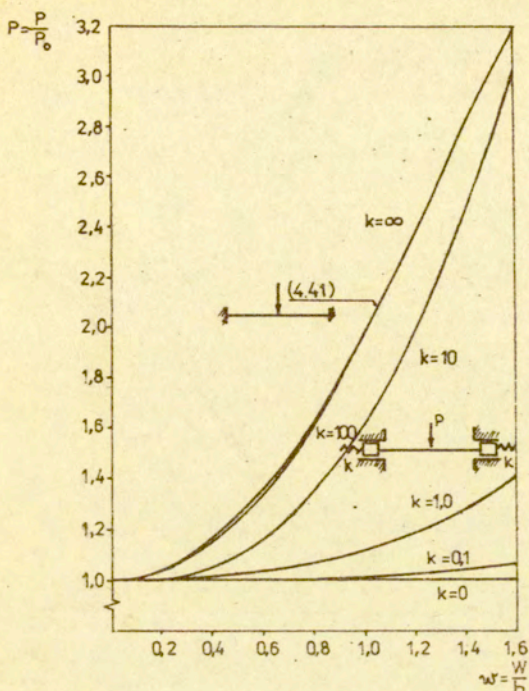
Zauważyć warto, że we wszystkich przypadkach gdy  $k > 0$  belka zachowuje się statecznie (wznoszący charakter zależności  $p - \frac{W}{h}$ ). Przemieszczenie podpór zachodzi już od chwili osiągnięcia stanu nośności granicznej belki, czyli od momentu wystąpienia różnego od zera przemieszczenia  $W$ . Dla większych wartości parametru  $k$  określającego sprężystość podpory uzyskuje się większe wzmocnienie konstrukcji. Przy zerowej sztywności podpór belka wykazuje stan neutralnej stateczności, zaś przy  $k \rightarrow \infty$  (zamocowanie), belka zachowuje się zgodnie z rozwiązaniem (4.41), (4.42).

#### 4.3.2.2. Ruch podpory przy stałej sile osiowej

Rozważmy przypadek, w którym ruch podpór rozpoczyna się dopiero z chwilą osiągnięcia w układzie siły poziomej równej pewnej wielkości granicznej  $N_G$ . Założmy także, że podpory przenosić mogą, stałą w procesie deformacji plastycznej belki, zadaną siłę poziomą (równą sile osiowej) rys.4.13 b). Do chwili osiągnięcia w belce siły osiowej, równej sile granicznej dla ruchu podpór  $N_G$ , deformacja plastyczna belki opisana jest zależnością (4.41) i odbywa się przy nieruchomych podporach. Osiągnięcie stanu granicznego dla ruchu podpór w postaci :

$$(4.53) \quad \pi = \pi_G = \frac{N_G}{N_0} = \text{const},$$

powoduje przemieszczanie się podpory zgodne z



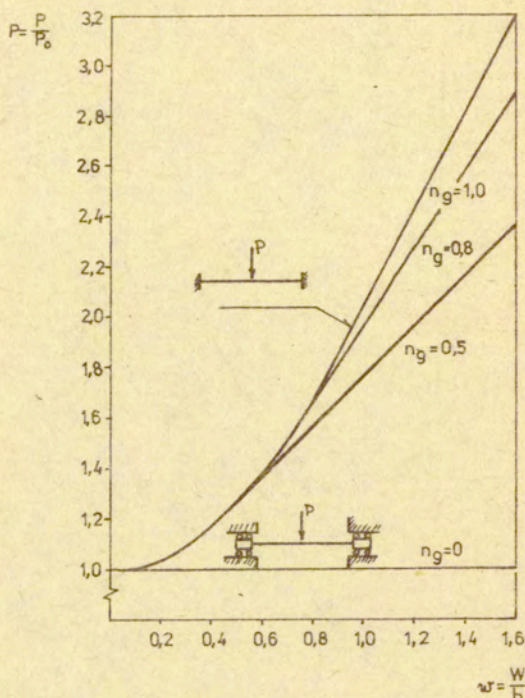
rys. 4.13

(4.47). Intensywność obciążenia  $p$  towarzyszącą dalszemu procesowi deformacji plastycznej belki otrzymamy podstawiając (4.53) do równania (4.50)

$$(4.54) \quad p = \frac{L}{L-s} \left( 1 - n_G^2 + 2n_G \frac{W}{h} \right).$$

Obrazem zachowania się układu otrzymanym w wyniku analizy za pomocą procedury przyrostowej jest rys.4.14. Przejściem granicznym jest przypadek  $n_G = 1$ , dla którego ruch podpór rozpocząć się może z chwilą osiągnięcia siły osiowej powodującej pełne uplastycznienie przekroju, więc równej sile membranowej. Krzywe opisujące zachowanie się belek przy możliwości przeniesienia stałej siły osiowej mają część wspólną z krzywą dla bel-

ki zamocowanej (4.41). Część ta jest tym mniejsza, im mniejsza jest siła graniczna  $n_g$ . Dla przypadku gdy  $n_g = 0$  redukuje



rys. 4.14

się do punktu. Części rozłączne krzywych zbliżone są do linii prostych. Położenie charakterystycznego punktu rozgałęzienia wykresów krzywych wyznacza się z porównania (4.53) z (4.38) w efekcie otrzymując, że  $W = W_0 = n_g h$ .

#### 4.3.2.3. Ruch podpory przy sile tarcia (liniowo zmiennej sile osiowej)

Warunkiem przemieszczania się poziomego podpór jest osiągnięcie przez siłę osiową wartości siły tarcia. Siła ta wyzna-

czona jest przez iloczyn nacisku na podporę  $\frac{P}{2}$  i współczynnika tarcia  $\xi$ .

Graniczną wartość siły osiowej, przy której występuje przemieszczanie się podpory zapiszmy zatem w postaci :

$$(4.55) \quad n = n_T = \frac{P}{2N_0} \xi, \quad n_T = \frac{N_T}{N_0}.$$

Podstawiając (4.55) do (4.49) i dzieląc obustronnie przez wartość obciążenia granicznego (4.28), bezwymiarowe obciążenie otrzymamy w postaci :

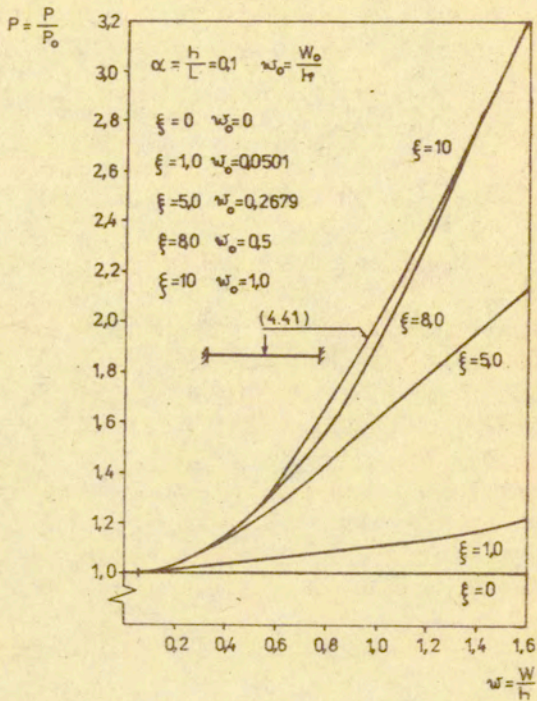
$$(4.56) \quad p = \frac{L}{L-s} \left[ 1 - \left( \frac{P}{2N_0} \xi \right)^2 + \frac{P W}{N_0 h} \right].$$

Zauważmy, że zwiększenie obciążenia  $P$  powoduje wzrost siły nacisku na podporę a tym samym wzrasta siła osiowa możliwa do przeniesienia przez podporę. W przypadku, gdy siła osiowa jest mniejsza od określonej wzorem (4.55), belka deformuje się przy nieruchomych podporach zgodnie ze wzorem (4.41). Obrazem zachowania się tego modelu są wykresy przedstawione na rys.4.15 będące ilustracją równania (4.56).

Charakterystyczne punkty rozdzielenia się wykresów opisujących zachowanie się belek o nieprzesuwnych podporach i układów analizowanych wyznacza się z porównania (4.55) i (4.37). Ugięcie belki  $W = W_0$ , przy którym rozpoczyna się ruch podpór wyznaczamy z zależności :

$$(4.57) \quad W = W_0 = \frac{L}{\xi} - \frac{L}{\xi} \sqrt{1 - \left( \xi \frac{h}{L} \right)^2}.$$

Zależność ta wynika z porównania sił osiowych występujących przy nieprzesuwnych podporach wzór (4.38), z wartością sił osiowych, przy których następuje osiągnięcie granicznych sił tarcia, wzór (4.55). Powyższy związek określa współrzędną punktu rozdzielenia wykresów rys.4.15 i jest zapisany z dokładnością do drugiego wyrazu rozwinięcia w szereg Taylora. Okazuje się, że przy odpowiednio dużej wartości współczynnika  $\xi \geq \frac{L}{h}$  w ogóle nie nastąpi przesunięcie podpory (wartość siły granicznej potrzebnej do wywołania ruchu podpory w całym procesie deformacji



rys. 4.15

belki przewyższa wartość maksymalnej (siły osiowej). Wówczas zachowanie się układu opisuje wzór (4.41). Z taką sytuacją mamy do czynienia dla przypadku gdy  $\xi = 1,0$  rys.4.15. Możliwa jest także sytuacja, że proces przemieszczania się podpory ulegnie zatrzymaniu wtedy gdy siła osiowa osiągnie wartość graniczną  $N_0$  (wówczas  $n = n_T = 1$ ). Deformacja plastyczna belki odbywa się wówczas bez dalszego przemieszczania się podpór wyłącznie na skutek efektu ciągnowego. Przypadek ten przedstawiony jest na rys.4.15 dla przyjętego współczynnika tarcia  $\xi = 8,0$ . Przyjęcie większych współczynników tarcia  $\xi$  pociąga większe wzmocnienie geometryczne w stanie pozagranicznym belki.



#### 4.3.2.4. Praca rygła ramy portalowej

Kolejny przypadek opisuje proces deformacji sztywno-plastycznej ramy portalowej. Przedmiotem zainteresowania są te przypadki, w których w chwili osiągnięcia nośności granicznej tworzą się mechanizmy załamania rygła (belkowe). Deformacja plastyczna rygła pociąga za sobą występowanie coraz to większych sił osiowych w tym elemencie. Te z kolei zwiększają wartość momentu zginającego u podstawy słupa ramy w przekrojach 2 i 2' rys. 4.16 doprowadzając w efekcie do ich uplastycznienia. Obrót słupów w przegubach plastycznych 2 i 2' powoduje ruch węzłów 1 i 1' ramy (dla rygła są to podpory). Proces tworzenia się mechanizmu przedstawia rys. 4.16 .

Wykorzystując warunek plastyczności (4.16) i równanie równowagi zapisane dla podstawy słupów w postaci :

$$(4.58) \quad N_R L + M_R + \frac{P}{2} s = M_s ,$$

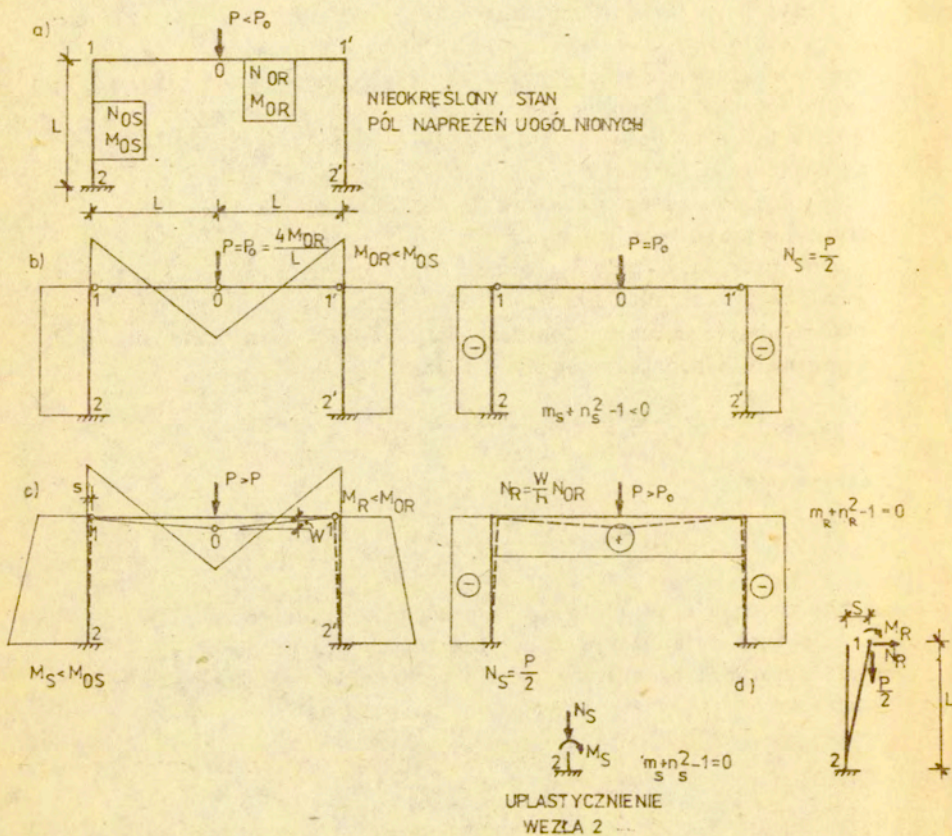
otrzymujemy :

$$(4.59) \quad N_R L + M_R + \frac{P}{2} s = M_{os} \left[ 1 - \left( \frac{P}{2N_{os}} \right)^2 \right] ,$$

gdzie zgodnie z rys. 4.16  $N_R$  i  $M_R$  oznaczają odpowiednio siłę osiową i moment zginający w uplastycznionych przekrojach rygła 1 i 1' . Warunek plastyczności dla przekrojów rygła spełnia równanie :

$$(4.60) \quad M_R = M_{oR} \left[ 1 - \left( \frac{N_R}{N_{oR}} \right)^2 \right] .$$

Przez  $N_{oR}$ ,  $M_{oR}$  oraz  $N_{os}$ ,  $M_{os}$  oznaczono odpowiednie wartości przekrojowych sił granicznych dla rygła i słupa. W zależności (4.59) przyjęto, że siła osiowa w słupie jest równa w przybliżeniu połowie siły obciążającej (małe kąty obrotu słupa).



rys. 4.16

Przyrosty przemieszczeń poziomych  $\Delta S$  węzłów 1 i 1' ramy otrzymamy z równania (4.47) wyznaczając siłę osiową w ryglu z równania (4.58) zapisanego w postaci :

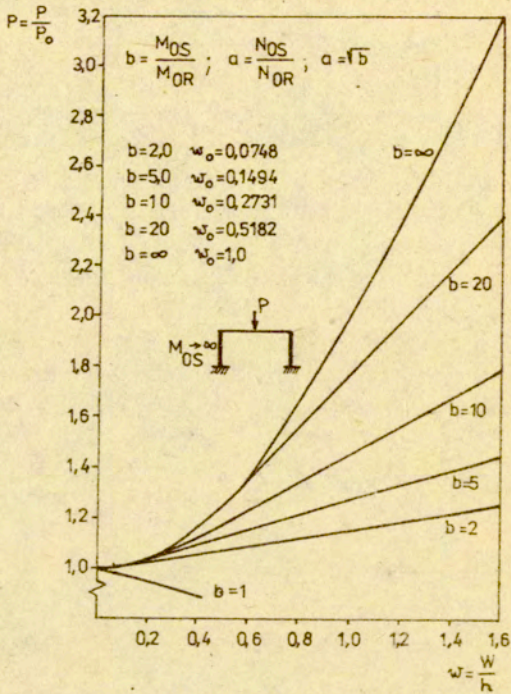
$$(4.61) \quad \pi_R = \frac{N_R}{N_{OR}} = \frac{1}{N_{OR} L} \left( M_S - M_R - \frac{P}{2} s \right).$$

Do chwili wystąpienia uplastycznienia przekrojów podstaw słupów analiza zachowania się układu przebiega jak dla obustronnie utwierdzonej belki. Przemieszczenie  $w = W/h$  środka rozpiętości rygla, przy którym następuje uplastycznienie podstaw słupów wyznaczmy przyjmując siłę osiową w ryglu w postaci (4.37), obciążenie  $P$  w postaci (4.40), oraz pamiętając, że momenty zginające  $M_S$  i  $M_R$  muszą spełniać warunki plastyczności (4.59) i (4.60). Wówczas otrzymujemy :

$$(4.62) \quad w^4 + \left( 2 + \frac{4a^2}{b\alpha^2} \right) w^2 + \frac{16a^2}{b\alpha^3} w + 1 - \frac{4a^2}{\alpha^2} - \frac{4a^2}{b\alpha^2} = 0,$$

gdzie :  $a = N_{OS}/N_{OR}$ ,  $b = M_{OS}/M_{OR}$  i  $\alpha = h/L$ .

Miejsca zerowe powyższego równania przy określonych parametrach geometrycznych wyznaczano numerycznie. Wyniki obliczeń dla różnych parametrów ram  $b \geq 1$  przedstawiono na rys.4.17. Przyjęcie innych proporcji, takich że sztywności rygli są większe lub równe sztywnościom słupów  $b \leq 1$  prowadzi do niestatecznego zachowania się konstrukcji w stanie pozagranicznym. W sytuacji gdy  $b=1$  powstanie przegubu plastycznego w pkt.1 (rys.4.16) powoduje natychmiastowe uplastycznienie podstawy słupa, w którym to przekroju oprócz działania momentu granicznego  $M_S = M_{OS}$  wystąpi siła osiowa  $N_S = P/2$ . Deformacja plastyczna ramy odbywa się wówczas przy zerowej sile osiowej w ryglu i przy ściskaniu słupów. Taki układ już w chwili osiągnięcia stanu nośności granicznej zachowuje się niestatecznie, [36]. Można stąd wnioskować, że przy bardziej skomplikowanych konstrukcjach ramowych operując



rys. 4.17

odpowiednio stosunkami sztywności słupów do rygli można uniknąć mechanizmów prowadzących do katastrofального zniszczenia konstrukcji (uniknąć niestateczności w stanie pozagranicznym). Jak widać, z taką sytuacją mamy do czynienia już dla ramy portalowej, gdy sztywność słupów jest większa od sztywności rygli.

#### 4.4. Zmiana mechanizmu zniszczenia przy dużych przemieszczeniach Analiza ramy portalowej [73]

W analizowanych dotąd przykładach pozagranicznego zachowania

się konstrukcji sztywno-plastycznej opierano się na założeniu o niezmienności mechanizmu zniszczenia. Przyjmowano, że tworzący się w chwili osiągnięcia stanu granicznego mechanizm realizuje się w procesie deformacji również gdy układ doznaje skończonych przemieszczeń. Jedynym jak dotąd odstępstwem od powyższego założenia była przeanalizowana możliwość wystąpienia przesunięcia przekrojów podporowych belek na skutek działania sił osiowych, lub uplastycznienia słupów ramy przy mechanizmach belkowych.

Na podstawie twierdzenia ekstremalnego oraz uogólnienia twierdzeń nośności granicznej na zakres skończonych deformacji (rozdz.2.6) przeanalizujemy zachowanie się sztywno-plastycznego układu ramowego rys.4.18 a) przy jednoczesnym pominięciu wymienionego ograniczenia.

Rozpatrzmy portalową ramę rys.4.18 a) obciążoną dwiema siłami skupionymi. Przyjmijmy warunek plastyczności w postaci nieuwzględniającej wpływu sił osiowych na osiągnięcie stanu granicznego przekroju :

$$(4.63) \quad \pm m - 1 = 0, \quad m = \frac{M}{M_0}.$$

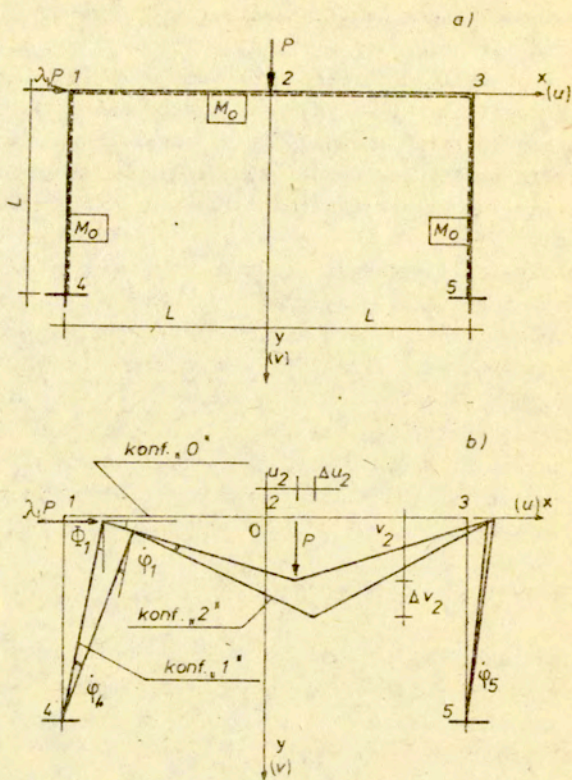
Przyjmijmy także, że przeguby plastyczne wystąpić mogą tylko w charakterystycznych przekrojach i nie będą przemieszczały się wzdłuż elementów ramy (model połączenia sztywnych elementów ramy przegubami ciemnymi).

Przyjmijmy układ ramowy  $\alpha$  krotnie statycznie niewyznaczalny  $\alpha \geq 0$ .

W układzie tym wyróżniamy  $\beta > \alpha$  charakterystycznych przekrojów (przegubów ciemnych), w których ujawnić się mogą przeguby plastyczne. Deformacja plastyczna układu jest możliwa, jeśli lokalnie lub globalnie zmieni się on w mechanizm o co najmniej jednym stopniu kinematycznej swobody. Załóżmy, że układ jest obciążony siłami skupionymi  $P$ , które wzrastając proporcjonalnie do parametru  $\lambda$  powodują osiągnięcie stanu nośności granicznej. Przyjmujemy, że przeguby plastyczne mogą powstać we wszystkich  $\beta$  przekrojach, w wyniku czego wytworzyć się może mechanizm o  $\beta - \alpha$  stopniach kinematycznej swobody. To, w których

\*)

Ta uproszczona postać warunku plastyczności podyktowana jest dużymi trudnościami jakie sprawia przyjęcie warunków uwzględniającego wpływ działania siły osiowej.



rys. 4.18

przekrojach istotnie powstaną uplastycznienia i czy realizować się będzie mechanizm o wielu stopniach kinematycznej swobody wyniknie z procesu minimalizacji funkcjonału wyrażonego w wielkościach uogólnionych.

Zapisując więc dysypację energii podczas przejścia ze stanu równowagi (konfiguracja 1 rys.4.18 b) do sąsiedniej konfiguracji 2 otrzymujemy :

$$(4.64) \quad d = \sum_i M_0 \dot{\Phi}_i > 0 ,$$

gdzie  $\mathcal{K}; M_0$  oznacza moment graniczny w przekroju „i” zaś  $\dot{\Phi}_i$  jest prędkością zmiany kąta obrotu w tym przekroju. W zależności od aktualnego stanu deformacji układu, składowe wektora  $\{\dot{\Phi}_i\}$  są funkcjami składowych pewnego uogólnionego wektora przemieszczeń  $\{\Delta_j\}$  oraz jego prędkości  $\{\dot{\Delta}_j\}$  o  $\beta-\alpha$  składowych (maksymalna liczba stopni swobody mechanizmu). Moc sił zewnętrznych, na przejściu od jednego do drugiego położenia równowagi, można zapisać w postaci :

$$(4.65) \quad l = \mu_i P \delta_i ,$$

gdzie  $\mu; P$  jest siłą zewnętrzną (porównawczą) przyłożoną w punkcie „i” zaś  $\delta_i$  jest prędkością przemieszczania się tej siły w kierunku jej działania. I w tym przypadku prędkości  $\{\delta_r\}$  są funkcjami składowych wektora niezależnych przemieszczeń  $\{\Delta_j\}$  i jego prędkości  $\{\dot{\Delta}_j\}$ . Funkcje  $\{\dot{\Phi}_i\} = f\{\Delta_j, \dot{\Delta}_j\}$  oraz  $\{\delta_r\} = g\{\Delta_j, \dot{\Delta}_j\}$  są równaniami zgodności odkształceń ramy. Zapisując równanie mocy wirtualnej sił zewnętrznych i wewnętrznych w wielkościach uogólnionych naprężeń  $\{\mathcal{K}; M_0$  i prędkości odkształceń  $\{\dot{\Phi}\}$  otrzymujemy :

$$(4.66) \quad \lambda P^0 \{\mu\}^T \{\dot{\delta}\} = M_0 \{\mathcal{K}\}^T \{\dot{\Phi}\} .$$

Stosując twierdzenie o górnej granicy obciążenia (rozd.2.6), problem sprowadza się do zminimalizowania funkcji w postaci :

$$(4.67) \quad \lambda P^0 = \frac{M_0 \{\mathcal{K}\}^T \{\dot{\Phi}\}}{\{\mu\}^T \{\dot{\delta}\}} .$$

Powróćmy więc do przykładu ramy rys.4.18. Poszukując rozwiązania problemu wyróżniono dwie sąsiednie konfiguracje równowagi rys.4.18 b). Kinematyka ramy jest określona za pomocą składowych wektora opisującego aktualne położenie węzła 2, w przyjętym układzie współrzędnych  $xOy$ , oraz prędkości zmian tego położenia. Układ analizowany w przypadku wystąpienia przegubów plastycznych we wszystkich charakterystycznych przekrojach ma dwa stopnie kinematycznej swobody. Zastępując prędkości skończonymi, lecz małymi przyrostami, można przyrosty kątów obrotów  $\Delta\Phi$  oraz przy-

rosty przemieszczeń  $\Delta\delta$  uzależnić od współrzędnych aktualnego położenia  $\{A_j\} = \{u_2, v_2\}$  punktu 2 oraz przyrostów przemieszczeń

$$\{\Delta A_j\} = \{\Delta u_2, \Delta v_2\}.$$

Przedstawimy w jawnej postaci wyrażenia określające poszczególne składowe wektorów  $\{\Delta\Phi\} \approx \{\dot{\Phi}\}^{\Delta t}$  oraz  $\{\Delta\delta\} \approx \{\dot{\delta}\}^{\Delta t}$  dla analizowanego przypadku ramy portalowej. Założmy, że przemieszczenie punktu 2 ramy jest określone, we współrzędnych bezwymiarowych, przez parę  $\frac{u_2}{L}, \frac{v_2}{L}$  (konfiguracja „1”). Zakładając, że we wszystkich charakterystycznych punktach 1-5 rys.4.18 powstają przeguby plastyczne, zaś pręty ulegają obrotom w tych przegubach, położenie pozostałych punktów określić można zależnościami:

- dla punktu 1

$$(4.68) \quad \frac{v_1}{L} = \frac{\dot{u}}{m\dot{i}}, \quad \dot{u} = 1 - \frac{1 - \frac{v_2}{L}}{1 + \frac{u_2}{L}} \left[ \frac{\left(\frac{u_2}{L}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{L}\right)^2 + 2\frac{u_2}{L}}{2(1 + \frac{u_2}{L})} \right] - \left\{ 1 - \frac{1 - \frac{v_2}{L}}{1 + \frac{u_2}{L}} \cdot \left[ \frac{\left(\frac{v_2}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{L}\right)^2 + 2\frac{u_2}{L}}{1 + \frac{u_2}{L}} \right] - \left[ \frac{\left(\frac{u_2}{L}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{L}\right)^2 + 2\frac{u_2}{L}}{2(1 + \frac{u_2}{L})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$m\dot{i} = \left[ \frac{1 - \frac{v_2}{L}}{1 + \frac{u_2}{L}} \right]^2 + 1, \quad \frac{u_1}{L} = \frac{v_1}{L} \frac{1 - \frac{v_2}{L}}{1 + \frac{u_2}{L}} + \frac{\left(\frac{u_2}{L}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{L}\right)^2 - 2}{2(1 + \frac{u_2}{L})} + 1,$$

- dla punktu 3

$$(4.69) \quad \frac{v_3}{L} = \frac{lk}{mk}, \quad lk = 1 - \frac{1 - \frac{v_2}{L}}{\frac{u_2}{L} - 1} \left[ \frac{\left(\frac{u_2}{L}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{L}\right)^2 - 2\frac{u_2}{L}}{2\left(\frac{u_2}{L} - 1\right)} \right] - \left\{ 1 - \frac{1 - \frac{v_2}{L}}{\frac{u_2}{L} - 1} \cdot \left[ \frac{\left(\frac{u_2}{L}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{L}\right)^2 - 2\frac{u_2}{L}}{u_2/L - 1} \right] - \left[ \frac{\left(\frac{u_2}{L}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{L}\right)^2 - 2\frac{u_2}{L}}{2\left(\frac{u_2}{L} - 1\right)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$mk = \left[ \frac{1 - \frac{v_2}{L}}{\frac{u_2}{L} - 1} \right]^2 + 1, \quad \frac{u_3}{L} = \frac{v_3}{L} \frac{1 - \frac{v_2}{L}}{\frac{u_2}{L} - 1} + \frac{\left(\frac{u_2}{L}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{L}\right)^2 - 2}{2\left(\frac{u_2}{L} - 1\right)} - 1.$$

Położenie punktów 4 i 5 w całym procesie deformacji jest scharakteryzowane, co wynika z warunków brzegowych zadania, wzorami w postaci:

$$(4.70) \quad \frac{u_4}{L} = \frac{v_4}{L} = \frac{u_5}{L} = \frac{v_5}{L} = 0,$$

gdzie przez  $u_i, v_i$  oznaczono poziome i pionowe przemieszczenie punktu „i” mierzone od konfiguracji „0”, zaś  $L$  jest długością elementu.



Kąty obrotów w przegubach plastycznych ramy mierzone od konfiguracji „0<sup>a</sup>”, dla układu charakteryzującego się określonymi powyżej przemieszczeniami, wynoszą odpowiednio :

w przegubie 1 :

$$(4.71) \quad \Phi_1 = \arcsin \frac{u_1}{L} - \arcsin \frac{v_2 - v_1}{L} ,$$

w przegubie 2 :

$$(4.72) \quad \Phi_2 = \arcsin \frac{v_2 - v_1}{L} + \arcsin \frac{v_2 - v_3}{L} ,$$

w przegubie 3 :

$$(4.73) \quad \Phi_3 = \arcsin \frac{v_2 - v_3}{L} + \arcsin \frac{u_3}{L} ,$$

w przegubie 4 :

$$(4.74) \quad \Phi_4 = \arcsin \frac{u_1}{L} ,$$

i w przegubie 5 :

$$(4.75) \quad \Phi_5 = \arcsin \frac{u_3}{L} .$$

Stan układu ramowego w konfiguracji „2<sup>a</sup>” określimy na podstawie zależności (4.68) - (4.75) po zwiększeniu przemieszczeń węzła 2 o przyrosty tak by :

$$(4.76) \quad \frac{u_2^*}{L} = \frac{u_2}{L} + \frac{\Delta u_2}{L} , \quad \frac{v_2^*}{L} = \frac{v_2}{L} + \frac{\Delta v_2}{L} \quad \text{gdzie } \{\Delta \Delta\} = \{\Delta u_2, \Delta v_2\} .$$

Obliczając różnice między stanem przemieszczeń układu w konfiguracji „1<sup>a</sup>” a stanem przemieszczeń w konfiguracji „2<sup>a</sup>” otrzymamy niezbędne składowe wektorów kątów obrotów w przegubach plastycznych oraz przemieszczeń punktów zaczepienia obciążeń zewnętrznych :

$$(4.77) \quad \{\Delta\Phi\} = \{\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \Delta\Phi_3, \Delta\Phi_4, \Delta\Phi_5\}^T,$$

gdzie :

$$\Delta\Phi_i = \Delta\Phi_i^* - \Delta\Phi_i,$$

oraz

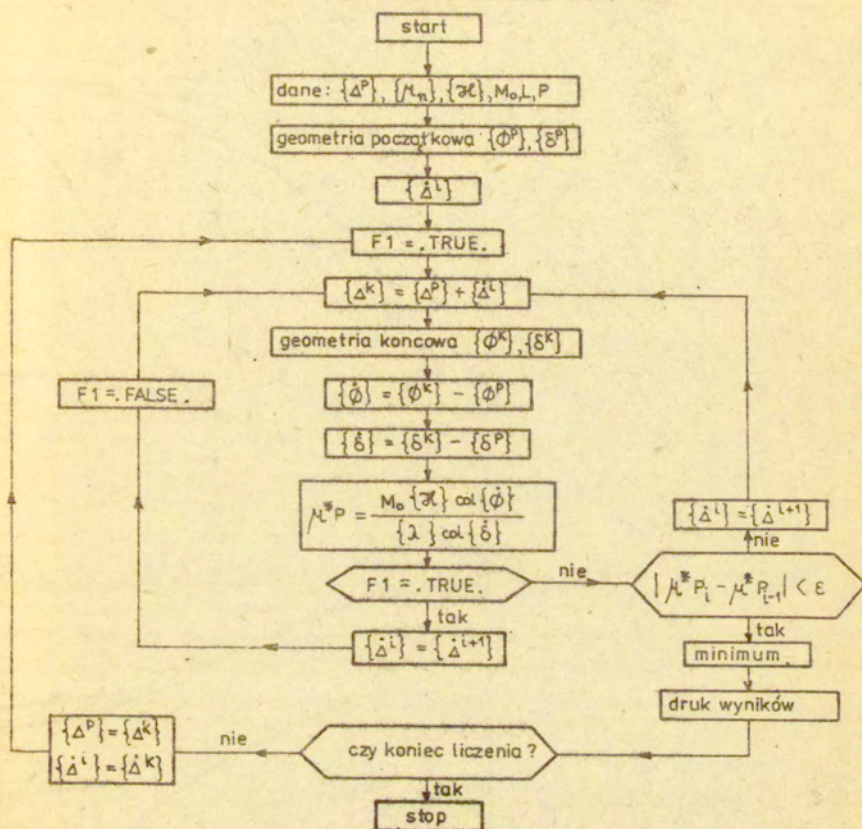
$$(4.78) \quad \{\Delta\delta\} = \{\Delta u_1, \Delta v_2\},$$

gdzie

$$\Delta u_1 = u_1^* - u_1, \quad \Delta v_2 = v_2^* - v_2.$$

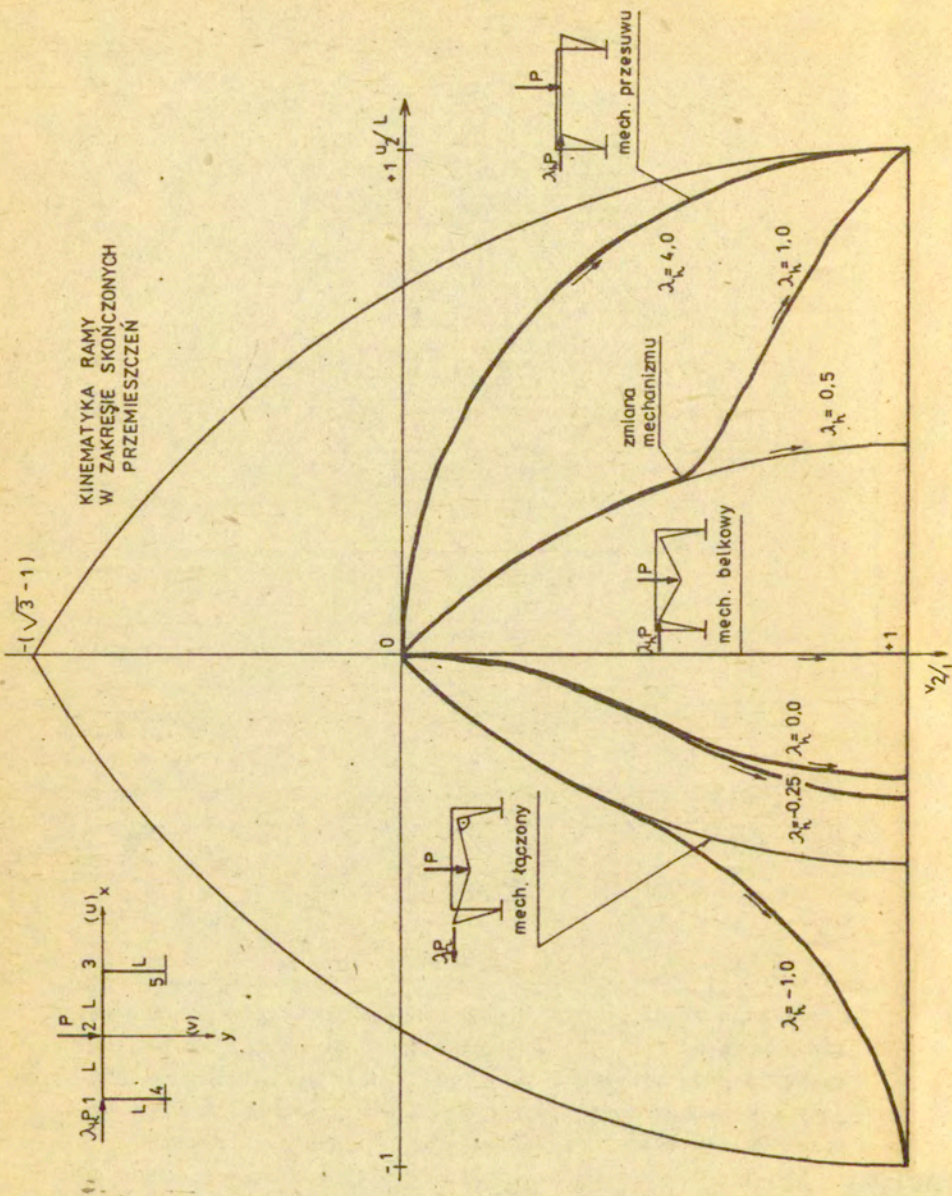
Przy rozwiązywaniu przykładów numerycznych zastosowano tok postępowania przedstawiony na rys.4.19 . Parametrem sterującym procesem były przyrosty tych składowych wektora  $\{\Delta\Delta\}$  , które w procesie plastycznych deformacji układu podlegały najszybszym zmianom. Proponowane przyrostowo-minimalizacyjne podejście wymaga określenia wektora przyrostów przemieszczeń  $\{\Delta\Delta\}$  minimalizującego wyrażenie (4.67).

Analizując wyniki rozwiązanych przykładów można stwierdzić, że zawsze w procesie plastycznych deformacji układu ramowego realizuje się mechanizm o jednym stopniu kinematycznej swobody. Kinematyka ramy w zakresie skończonych przemieszczeń przy różnych obciążeniach została przedstawiona na rys.4.20, w postaci trajektorii, po których przemieszcza się charakterystyczny punkt konstrukcji, ( pkt 2) . Analizując zestawione na tym rys. wyniki należy zauważyć, że np. w przypadku gdy  $\lambda_k = 4.0$  , w zakresie dużych przemieszczeń, występuje wyłącznie mechanizm boczno przesuwny z przegubami plastycznymi w punktach 1,3 oraz 4 i 5. Mechanizm ten tworzy się w chwili osiągnięcia nośności granicznej. Znacznie ciekawsza sytuacja ma miejsce dla przypadku gdy  $\lambda_k = 1.0$  . Tutaj w procesie zaawansowanych przemieszczeń występuje zjawisko zmiany mechanizmu zniszczenia. Początkowo realizuje się mechanizm tzw. łączony z przegubami plastycznymi w pkt. 2-5, później zaś tworzy się nowy przegub plastyczny w pkt.1 oraz usztywnia się przekrój 2 ramy i dalej realizuje się mechanizm przesuwny boczny. Moment zmiany mecha-



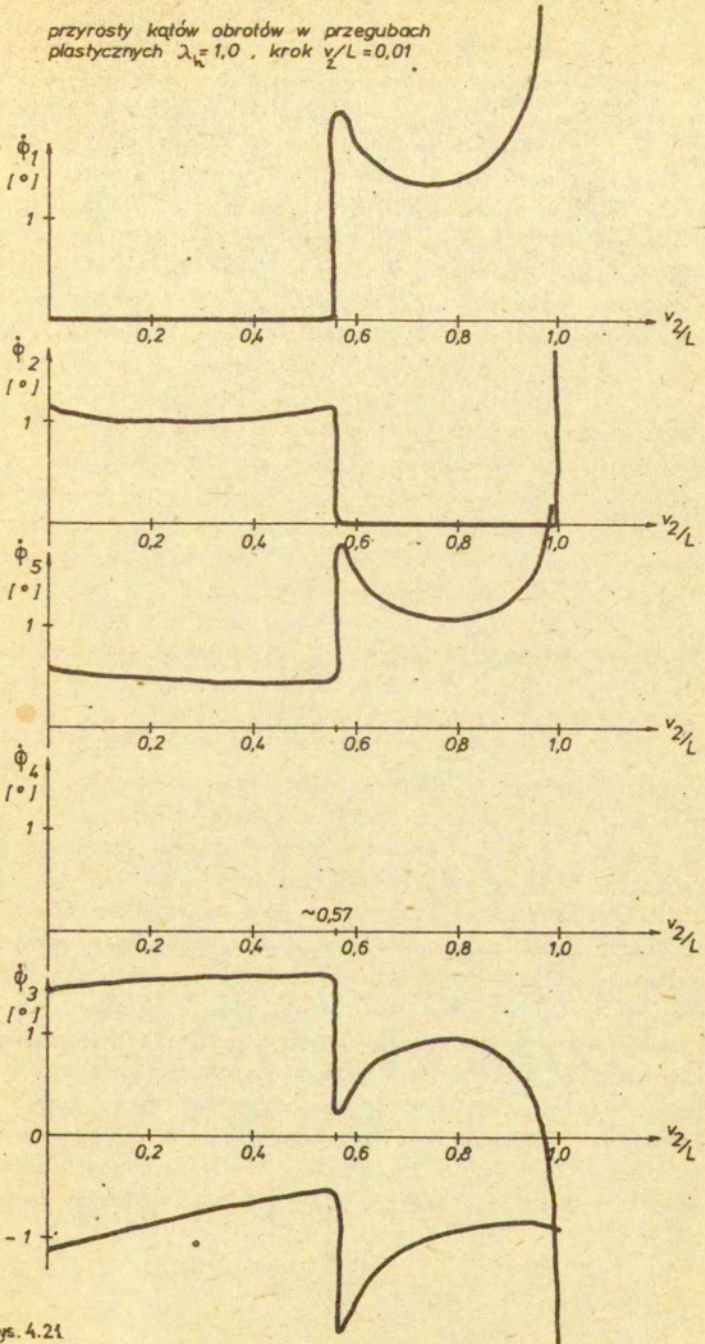
rys. 4.19

nizmu zniszczenia ramy przy zaawansowanym stanie przemieszczeń zaznaczono na rys.4.21 . Podobne zjawisko zmiany mechanizmu występuje dla przypadku  $\lambda_n = -1.0$  , gdzie początkowo realizujący się mechanizm łączony zmienił się w mechanizm bocznego przesuwu. Interesująca sytuacja ma miejsce dla przypadku gdy  $\lambda_n = 0.0$  . Okazuje się, że w zakresie skończonych przemieszczeń symetrycznie obciążonego układu realizuje się



rys. 4.20

przyrosty kątów obrotów w przegubach  
plastycznych  $\lambda_k = 1,0$ , krok  $v/L = 0,01$ .

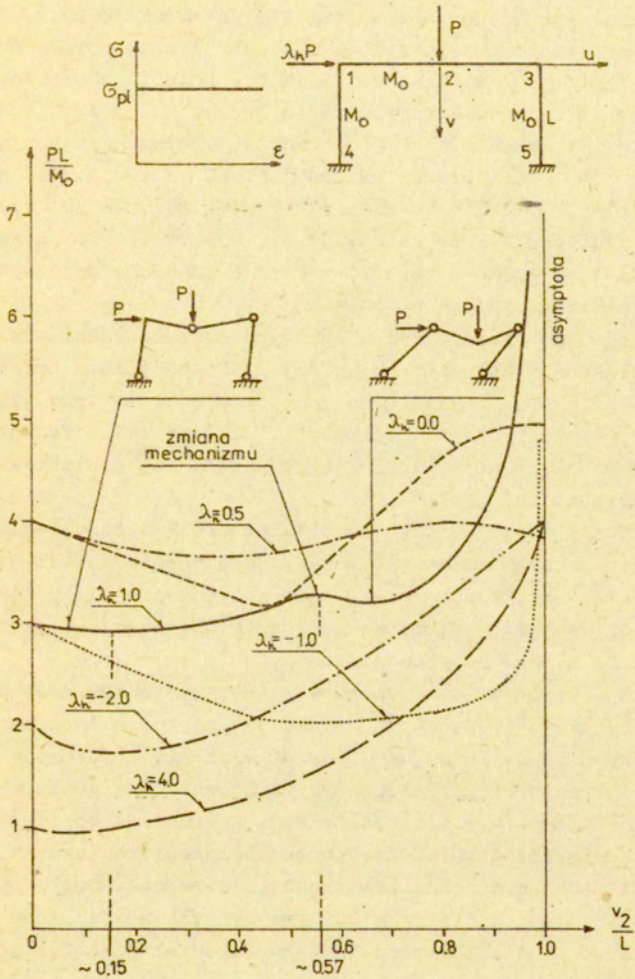


rys. 4.21

niesymetryczna kinematyka.

Istnieje tutaj pewna analogia do analizy stateczności sprężystej ram. Układy te przy podobnych symetrycznych obciążeniach, w dużej liczbie przypadków, wykazują niesymetryczne postaci równowagi po osiągnięciu punktu bifurkacji. Na rys. 4.20 zaznaczono trajektorię  $\lambda_n = 0$  tylko z jednej strony osi  $v_2/L$ . Należy zaznaczyć, że równie prawdopodobna jest ścieżka symetryczna względem osi pionowej  $v_2/L$ . Rys. przedstawia wykresy przyrostów kątów obrotów dla przypadku  $\lambda_n = 1.0$  w charakterystycznych przekrojach ramy. Tym samym pokazuje przekroje, w których powstają przeguby plastyczne. W analizowanym przykładzie parametrem sterowania w obliczeniach numerycznych był przyrost przemieszczenia pionowego punktu 2 ustalony w wartości  $\Delta v_2/L = 0.01$ . Zauważmy, że przemieszczeniom pionowym  $v_2/L < 0.57$  towarzyszą niezerowe przyrosty (rzędu  $1^\circ$ ) kątów obrotów w przekrojach 2-5. W przekroju 1 występuje sztywny węzeł  $\dot{\phi}_1 = 0$ . Przy stanie przemieszczeń  $v_2/L = 0.57$  następuje istotna zmiana jakościowa. W układzie odnotowujemy taką redystrybucję sił wewnętrznych, że w punkcie 1 pojawiają się niezerowe przyrosty kątów obrotów (tworzy się przegub plastyczny) oraz zanikają jednocześnie przyrosty w przekroju 2. Przyrosty kątów obrotów  $\dot{\phi}_i$  w innych przekrojach ulegają gwałtownym zmianom. Tworzy się więc inny od początkowego mechanizm zniszczenia. Następuje zjawisko, którego nie odnotowuje się w zakresie małych przemieszczeń, kiedy to w analizach plastycznych zakłada się wręcz niemożliwość wystąpienia zmiany położenia przegubów plastycznych w procesie dochodzenia do stanu nośności granicznej.

Wykresy zależności obciążenia jako funkcje przemieszczenia pionowego pktu 2 przedstawia rys. 4.22. Wszystkie rozpatrywane przypadki (siła pionowa zwrócona w dół) wykazują niestateczne zachowanie się układu w chwili osiągnięcia nośności granicznej. Zachodzące zmiany geometrii układu w procesie zaawansowanych przemieszczeń są przyczyną zmiany charakteru zachowania z niestatecznego na stateczny. Typowe przykłady takich zmian można zilustrować wykresami, np. otrzymanymi dla  $\lambda_n = -2.0$  lub  $4.0$ , opisującymi zachowanie się układów nie wykazujących zmian mechanizmów w procesie deformacji plastycznych. Omawiany przypadek



rys. 4.22

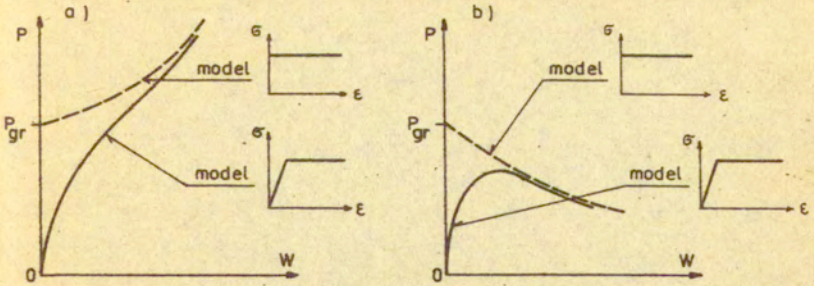
zmiany mechanizmu zniszczenia ma miejsce dla  $\lambda_n = 1.0$ . Nośność graniczna zostaje osiągnięta przy intensywności  $PL/M_0 = 3.0$ . W tym momencie układ zachowuje się niestatecznie, by w wyniku deformacji plastycznych i zmian geometrii przy przemieszczeniach  $v_2/L \approx 0.15$  osiągnąć lokalne minimum i zmienić charakter zachowania na stateczny, nie zmieniając jednak mechanizmu zniszczenia. Dla przemieszczeń  $v_2/L \approx 0.57$  następuje zmiana mechanizmu zniszczenia, którą przedstawiono już np. na rys.4.21, związana z wystąpieniem lokalnego maksimum (rys.4.22). Po zmianie mechanizmu układ początkowo zachowuje się niestatecznie jednak w wyniku dalszych zmian geometrii wykazuje ponownie możliwości przenoszenia większych obciążeń.

Szczególnym przypadkiem powyższych rozważań jest analiza przedstawiona przez autora w pracy [72], dotycząca przebiegu zależności P-W w zakresie dużych przemieszczeń przy wymuszonej kinematyce plastycznych deformacji. Zakłada się w tej pracy, że w całym procesie deformacji występuje ten sam początkowy mechanizm zniszczenia.

Zastanówmy się jeszcze nad przydatnością i celowością zajmowania się modelem ciała sztywno-plastycznego w chwili gdy istnieją przecież możliwości sprężysto-plastycznej analizy konstrukcji wykorzystujące efektywne narzędzia obliczeniowe jakim jest np. metoda elementów skończonych.

Uważa się, że analiza układów z wykorzystaniem modelu sztywno-plastycznego prowadzi do uzyskania istotnych informacji natury jakościowej. Za najważniejsze uważa się informacje określające charakter pozagranicznego zachowania się konstrukcji. Stateczne zachowanie się konstrukcji gwarantuje możliwość przenoszenia obciążeń większych od obciążeń granicznych. W takich przypadkach analiza konstrukcji za pomocą modelu sprężysto-plastycznego, w którym efekt sprężystych odkształceń można potraktować jako efekt początkowych imperfekcji materiałowych, prowadzi do jakościowo tych samych rezultatów (rys.4.23). Uwaga ta dotyczy określenia intensywności obciążenia granicznego i stateczności w stanie pozagranicznym. Niestateczne zachowanie się modelu sztywno-plastycznego w stanie pozagranicznym informuje, że w rzeczywistej konstrukcji sprężysto-plastycznej nale-





rys. 4.23

ży liczyć się z istotnymi różnicami przy określaniu intensywności obciążeń granicznych (rys.4.23 b). Niestateczne zachowanie się konstrukcji sztywno-plastycznej wypukła duże znaczenie efektów sprężystych na pracę układu po uplastycznieniu. Uwagi te dotyczą sytuacji gdy dla obu modeli realizują się te same mechanizmy zniszczenia.

Precyzyjna ilościowa analiza konstrukcji może być jednak dokonana wyłącznie przy uwzględnieniu materiału w postaci modelu sprężysto-plastycznego.

## 5. Sprężysto-plastyczna analiza belek i ram przy uwzględnieniu zmian geometrii [74]

Weryfikując przydatność modelu sztywno-plastycznego ciała do opisu charakteru zachowania się konstrukcji plastycznej, przyjęto bardziej zbliżony do rzeczywistych właściwości materiału, model sprężysto-plastyczny. Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie efektywnych programów numerycznej analizy konstrukcji, fizycznie i geometrycznie nieliniowej, opierającej się na metodzie elementów skończonych.

Istniejące na świecie systemy komputerowej analizy konstrukcji (m.in. ASKA, NORSAM, STRUPL) umożliwiają rozwiązywanie dużej klasy nieliniowych problemów mechaniki. Możliwości korzystania z tych programów są jednak poważnie ograniczone. Systemy programów przeznaczone są raczej do analizy problemów o dużej liczbie stopni swobody dlatego zdarza się iż nie najlepiej nadają się do rozwiązywania zadań, w których istota polega na jak najwierniejszym odwzorowaniu zachowania się konstrukcji szczególnego typu.

Względy oszczędnego projektowania narzucają konieczność opracowania programów sprężysto-plastycznej analizy układów ramowych w zakresie nieliniowych zmian geometrii. Jakkolwiek, z punktu widzenia użytkownika, rzeczywista konstrukcja nie powinna wykazywać zbyt dużych przemieszczeń to jednak wprowadzenie nieliniowych efektów geometrycznych jest celowe by właściwie ocenić pracę konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym.

W rozdziale niniejszym rozważa się płaskie układy belkowe i ramowe obciążone w płaszczyźnie w wybranych punktach (węzłach) siłami lub momentami skupionymi. Obciążenia działają zachowawczo wzrastając proporcjonalnie do parametru  $\lambda$ . Są więc obciążeniami jednoparametrowymi (rys.5.1 a). Materiał elementów konstrukcji ma cechy sprężysto-plastyczne; przyjęto odcinkowo-liniowe prawo fizyczne.

W klasycznym podejściu, jak to określono poprzednio, nośność graniczna wiąże się z taką intensywnością obciążenia, przy której konstrukcja zmienia się w mechanizm. Osiągnięcie stanu gra-

nicznego przy prezentowanym w tym rozdziale podejściu związane jest z wystąpieniem znacznych przyrostów przemieszczeń towarzyszących małym przyrostom obciążeń. Zachowanie się konstrukcji ilustrowane jest w postaci wykresów  $P-W$  lub  $\lambda-W$ . Na charakter tych wykresów mają wpływ nieliniowe zależności geometryczne i występujące uplastycznienia przekrojów konstrukcji. W rzeczywistych konstrukcjach oba wpływy nakładają się i trudno wyodrębnić wpływ każdego z nich z osobna na osłabienie lub wzmocnienie układu. Dlatego w wybranych przykładach numerycznych skoncentrowano się na takich zadaniach, w których nieliniowy charakter wykresów  $P-W$  był głównie wynikiem bądź efektu nieliniowości geometrycznej bądź też fizycznej.

### 5.1. Koncepcja sprężysto-plastycznej analizy przyrostowej

Rozwiązanie problemu związane jest z opracowaniem elementu skończonego, z którego można zbudować dowolną płaską konstrukcję ramową lub belkową, rys.5.1 a).

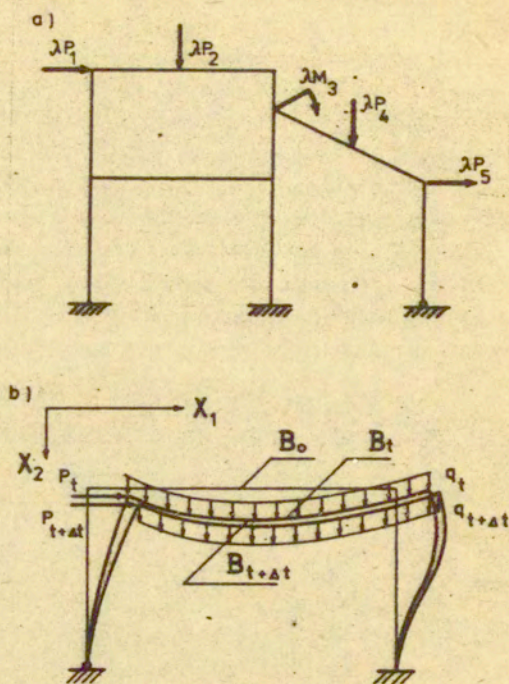
Prezentując element skończony omówimy kolejno podstawowe zależności geometryczne i fizyczne posługując się układami współrzędnych lokalnym i globalnym. Przedstawimy także przyrostowo-iteracyjny algorytm obliczania konstrukcji.

#### 5.1.1. Konfiguracja odniesienia

Stosowany jest tzw. uaktualniony opis Lagrange'a. Zakłada się, że w chwili  $\tau=0$  (stan nieobciążony, konfiguracja początkowa) konstrukcja zajmuje położenie  $B_0$ . W wyniku działania jednoparametrowego obciążenia, w chwili  $\tau=t$  osiąga położenie równowagi  $B_t$  (rys.5.1 b). Proces przyrostowy polega na określeniu konfiguracji  $B_{t+\Delta t}$  układu w chwili  $\tau=t+\Delta t$ , który to stan wystąpi w wyniku proporcjonalnego zwiększenia obciążeń.

#### 5.1.2. Założenia dotyczące elementu

Rozpatrując element belkowy przyjęto następujące założenia:



rys. 5.1

- elementem skończonym jest odcinek belki o dwóch węzłach, w którym przekrój aproksymowany jest wieloma warstwami związanymi ze sobą więzami kinematycznymi. Więzy te są wynikiem przyjęcia hipotezy płaskich przekrojów,
- w węzłach elementów określone są trzy stopnie kinematycznej swobody,
- krzywizny elementów są małe i zmieniają się liniowo na długości elementu,
- obciążenia w postaci sił i momentów skupionych przyłożone są wyłącznie w węzłach oraz mają charakter zachowawczy i jedno-parametrowy,

- elementy są prętami pryzmatycznymi zaś ich przekroje są symetryczne względem płaszczyzny obciążenia,
- materiał poszczególnych warstw ma charakter sprężysto-plastyczny (odcinkowo-liniowy) i może mieć różne właściwości fizyczne dla różnych warstw.

### 5.1.3. Macierz sztywności elementu w układzie lokalnym

Przyjmijmy lokalny układ współrzędnych ortogonalnych.

Jedna z osi tego układu obraca się wraz z kierunkiem cięciwy elementu (układ współobrotowy). Rozpatrzmy dwa sąsiednie położenia równowagi sprowadzone do ustalonego kierunku cięciwy (rys.5.2 a). Wektory  $\Delta^{(e)}P$  i  $\Delta^{(e)}T$  opisują odpowiednio przyrosty uogólnionych naprężeń i odkształceń określone w węźle ; (symbol  $^{(e)}$  oznacza wielkości odnoszące się do elementu a definiowane w lokalnym układzie współrzędnych) :

$$(5.1) \quad \Delta^{(e)}P = \{ \Delta M_1, \Delta M_2, \Delta N \}^T,$$

zaś

$$(5.2) \quad \Delta^{(e)}T = \{ \Delta \varphi_1, \Delta \varphi_2, \Delta n \}^T,$$

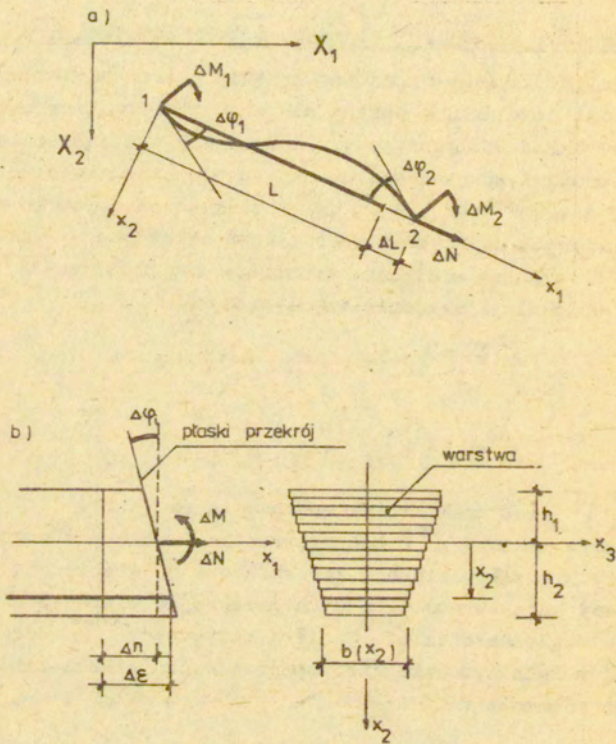
gdzie  $\{ \}^T$  jest znakiem transponowania macierzy.

Składowe wektora  $\Delta^{(e)}P$  są przyrostami węzłowych momentów zginających i siły osiowej, zaś składowe  $\Delta^{(e)}T$  obrazują odpowiednio zmiany kąta obrotu skrajnych przekrojów elementu oraz wydłużenie względne cięciwy. Macierz sztywności  $^{(e)}K$  elementu wyrażona w lokalnym układzie współrzędnych pozwala zapisać następujące równanie :

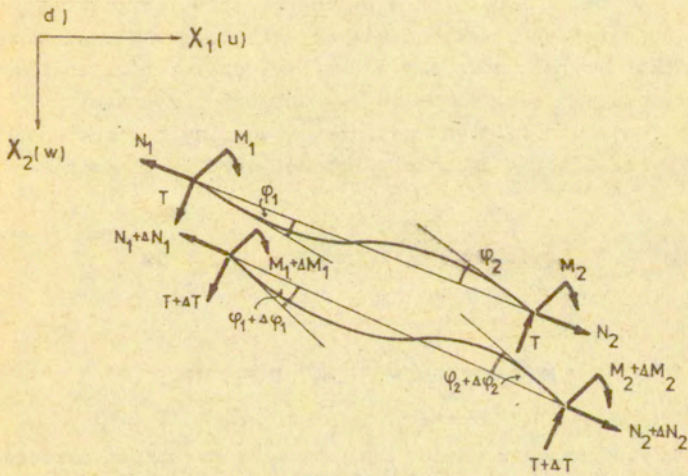
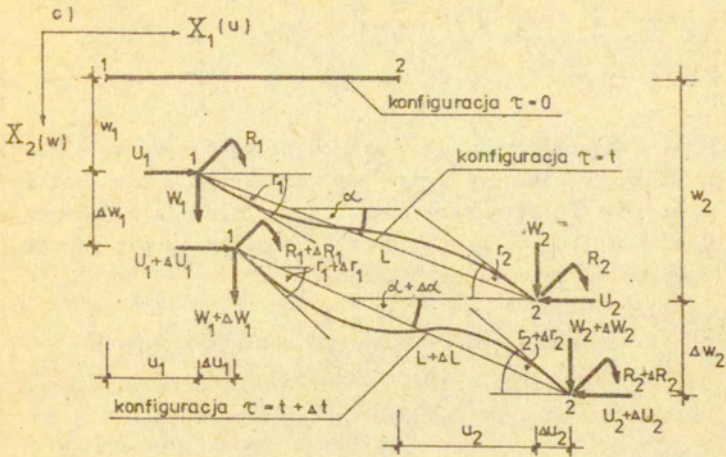
$$(5.3) \quad \Delta^{(e)}P = ^{(e)}K \Delta^{(e)}T.$$

Opisując za pomocą wektora  $\Delta^{(e)}\pi = \{ \Delta M(x_1), \Delta N(x_1) \}^T$  wartości momentu zginającego i siły osiowej w dowolnym przekroju identyfikowanym położeniem  $x_1$  przy ustalonym poziomie sił przekrojowych  $\Delta^{(e)}P$  można zapisać :

$$(5.4) \quad \Delta^{(e)}\pi = C \Delta^{(e)}P,$$



rys. 5.2



rys. 5.2

gdzie macierz  $C$  jest postaci :

$$(5.5) \quad C = \begin{bmatrix} 1 - x_1/L & -x_1/L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

przez  $L$  oznaczono aktualną dla  $\tau = t$  długość cięciwy elementu. Wprowadzimy podział przekroju poprzecznego elementu belkowego na skończoną liczbę warstw (rys. 5.2 b). Zgodnie z przyjętym założeniem (hipoteza płaskich przekrojów), przyrost odkształcenia warstwy wyrazić można zależnością :

$$(5.6) \quad \Delta \varepsilon(x_1, x_2) = x_2 \Delta \varphi(x_1) + \Delta \eta(x_1).$$

Przyjmując, że każda warstwa podlega jednoosiowemu stanowi naprężenia przyrost naprężeń wyraża się w postaci :

$$(5.7) \quad \Delta \sigma(x_1, x_2) = E_t \Delta \varepsilon(x_1, x_2),$$

gdzie przez  $E_t$  oznaczono aktualną wartość modułu stycznego materiału warstwy. Moduł ten w ogólności może być dowolną funkcją stanu odkształceń i wzmocnienia materiałowego. W analizowanych przypadkach ograniczono się jednak wyłącznie do materiału scharakteryzowanego odcinkowo-liniowym prawem fizycznym.

Przyrosty uogólnionych naprężeń w dowolnych przekrojach elementu wyrazić można zgodnie z ich definicją w postaci :

$$(5.8) \quad \Delta M(x_1) = \int_{-h_1}^{h_2} \Delta \sigma(x_1, x_2) x_2 b(x_2) dx_2,$$

$$(5.9) \quad \Delta N(x_1) = \int_{-h_1}^{h_2} \Delta \sigma(x_1, x_2) b(x_2) dx_2.$$

W przytoczonych wzorach  $b(x_2)$  oznacza szerokość poszczególnych warstw zaś  $h_1$  i  $h_2$  odległości do skrajnych włókien przekroju. Szerokość  $b$  warstw elementu jest zmienna w procesie deformacji a jej aktualny wymiar zależy od stanu odkształceń podłużnych oraz liczby Poissona  $\nu$ . W przypadku gdy warstwa



pracuje w stanie plastycznym przyjmuje się iż materiał jest nieściśliwy  $\nu = 0,5$ . Podstawiając do (5.8) i (5.9) związki (5.6) i (5.7) otrzymujemy :

$$(5.10) \quad \Delta M(x_1) = \int_{-h_1}^{h_2} [ E_t b x_2^2, E_t b x_2 ] dx_2 \begin{bmatrix} \Delta \varphi(x_1) \\ \Delta n(x_1) \end{bmatrix},$$

$$(5.11) \quad \Delta N(x_1) = \int_{-h_1}^{h_2} [ E_t b x_2, E_t b ] dx_2 \begin{bmatrix} \Delta \varphi(x_1) \\ \Delta n(x_1) \end{bmatrix}.$$

Wprowadzając oznaczenie :

$$(5.12) \quad \Delta \mathcal{Q}^{(e)} = \{ \Delta \varphi(x_1), \Delta n(x_1) \}^T,$$

możemy zapisać :

$$(5.13) \quad \Delta \Pi^{(e)} = F \Delta \mathcal{Q}^{(e)}, \dots$$

gdzie  $F$  jest macierzą sztywności stycznej przekroju elementu i wyraża się w postaci :

$$(5.14) \quad F = \int_{-h_1}^{h_2} \begin{bmatrix} E_t b x_2^2 & E_t b x_2 \\ E_t b x_2 & E_t b \end{bmatrix} dx_2.$$

Macierz podatności przekroju elementu  $f$  jest odwrotnością macierzy  $F$  i spełnia równość :

$$(5.15) \quad \Delta \mathcal{Q}^{(e)} = f \Delta \Pi^{(e)}$$

Obroty i całkowite wydłużenia elementu wynikają wprost z całkowania krzywizn i odkształceń osiowych po długości elementu :

$$(5.16) \quad \Delta \mathcal{T}^{(e)} = \int_0^L C^T \Delta \mathcal{Q}^{(e)} dx_2.$$

Wykorzystując poprzednio ustalone zależności otrzymujemy :

$$(5.17) \quad \Delta \tau^{(e)} = \int_0^L C^T f \Delta \pi \, dx_2 = \int_0^L C^T f C \Delta P \, dx_2 = \int_0^L (C^T f C) dx_2 \Delta P^{(e)}$$

Macierz podatności elementu  $\mathbf{k}$  ( $3 \times 3$ ) w układzie lokalnym ma więc postać :

$$(5.18) \quad \mathbf{k}^{(e)} = \int_0^L C^T f C \, dx_2$$

Macierze sztywności stycznnej  $\mathbf{K}^{(e)}$  i podatności elementu  $\mathbf{k}^{(e)}$  wyrażone w lokalnym układzie współrzędnych spełniają zatem równania :

$$(5.19) \quad \Delta \tau^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \Delta P^{(e)}, \quad \Delta P^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \Delta \tau^{(e)}$$

#### 5.1.4. Macierz sztywności elementu w układzie globalnym

Przyjmijmy globalny układ współrzędnych  $X_i$  prostokątnych niezmienny w procesie opisywanych deformacji. Rozpatrzmy kinematykę elementu belkowego oraz stan sił węzłowych w dwóch sąsiednich konfiguracjach : aktualnej  $\tau = t$  oraz  $\tau = t + \Delta t$  (rys. 5.2 c). Wielkości przyrostów przemieszczeń węzłów elementu oraz przyrostów obciążeń, odniesionych do globalnego układu współrzędnych, oznaczamy odpowiednio przez  $\Delta^{(g)} \tau$  i  $\Delta^{(g)} P$  gdzie (rys. 5.2c):

$$(5.20) \quad \Delta^{(g)} \tau = \left\{ \Delta \tau_1, \Delta \tau_2, \Delta w_1, \Delta w_2, \Delta u_1, \Delta u_2 \right\}^T,$$

oraz

$$(5.21) \quad \Delta^{(g)} P = \left\{ \Delta R_1, \Delta R_2, \Delta W_1, \Delta W_2, \Delta U_1, \Delta U_2 \right\}^T.$$

W konfiguracji aktualnej  $\tau = t$  długość cięciwy łączącej węzły elementu wynosi  $L$ . W wyniku nałożenia na układ dodatkowych obciążeń element przyjmuje konfigurację  $\tau = t + \Delta t$  i długość cięciwy wynosi teraz  $L + \Delta L$ . Wyrażając względny przyrost długości cięciwy  $\Delta n$  w odniesieniu do konfiguracji  $\tau = t$  otrzymujemy :

$$(5.22) \quad \Delta \pi = (\Delta w_2 - \Delta w_1) \sin(\alpha + \Delta\alpha) + (\Delta u_2 - \Delta u_1) \cos(\alpha + \Delta\alpha) - L(1 - \cos\alpha).$$

Przyrost kąta obrotu cięciwy  $\Delta\alpha$  wyraża się w postaci :

$$(5.23) \quad \Delta\alpha = \frac{1}{L} \left[ (\Delta w_2 - \Delta w_1) \cos\alpha - (\Delta u_2 - \Delta u_1) \sin\alpha \right],$$

zaś przyrosty obrotów przekrojów węzłowych elementu w postaci :

$$(5.24) \quad \Delta\varphi_1 = \Delta\tau_1 - \Delta\alpha, \quad \Delta\varphi_2 = \Delta\tau_2 - \Delta\alpha.$$

Rozpatrzmy sąsiednie konfiguracje elementu wraz z węzłowymi obciążeniami odniesionymi do lokalnego układu współrzędnych (rys.5.2 d). Wektor przyrostów przemieszczeń wyrażonych w układzie lokalnym przedstawić można jako funkcję odpowiedniego wektora z układu globalnego :

$$(5.25) \quad \Delta^{(e)} \tau = T \Delta^{(g)} \tau,$$

gdzie macierz transformacji  $T$  jest postaci :

$$(5.26) \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c/L & -c/L & -s/L & s/L \\ 0 & 1 & c/L & -c/L & -s/L & s/L \\ 0 & 0 & -s & s & -c & c \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} s = \sin\alpha, \\ c = \cos\alpha. \end{matrix}$$

Wyraźmy teraz przyrosty obciążeń z układu globalnego  $\Delta^{(g)} P$  jako funkcje analogicznych przyrostów z układu lokalnego  $\Delta^{(e)} P$ .

W konfiguracji początkowej na danym kroku  $\tau = t$  mamy :

$$(5.27) \quad \begin{aligned} R_1 &= M_1, & W_2 &= N_2 \sin\alpha - T \cos\alpha, \\ R_2 &= M_2, & U_1 &= -N_1 \cos\alpha - T \sin\alpha, \\ W_1 &= -N_1 \sin\alpha + T \cos\alpha, & U_2 &= N_2 \cos\alpha + T \sin\alpha. \end{aligned}$$

W chwili  $\tau = t + \Delta t$  analogiczne równości mają postać :

$$\begin{aligned}
 R_1 + \Delta R_1 &= M_1 + \Delta M_1, \\
 R_2 + \Delta R_2 &= M_2 + \Delta M_2, \\
 (5.28) \quad W_1 + \Delta W_1 &= -(N_1 + \Delta N_1) \sin(\alpha + \Delta\alpha) + (T + \Delta T) \cos(\alpha + \Delta\alpha), \\
 W_2 + \Delta W_2 &= (N_2 + \Delta N_2) \sin(\alpha + \Delta\alpha) - (T + \Delta T) \cos(\alpha + \Delta\alpha), \\
 U_1 + \Delta U_1 &= -(N_1 + \Delta N_1) \cos(\alpha + \Delta\alpha) - (T + \Delta T) \sin(\alpha + \Delta\alpha), \\
 U_2 + \Delta U_2 &= (N_2 + \Delta N_2) \cos(\alpha + \Delta\alpha) + (T + \Delta T) \sin(\alpha + \Delta\alpha).
 \end{aligned}$$

Załóżmy, że siła osiowa jest stała a jej kierunek pokrywa się z kierunkiem cięciwy wówczas  $N_1 = N_2 = N$ . Siła poprzeczna obliczona z zależności:

$$(5.29) \quad T = \frac{M_1 + M_2}{L}$$

jest więc stała na długości elementu. Odpowiednie przyrosty wektora  $\Delta^{(g)}P$  otrzymamy odejmując (5.27) od (5.28). Uwzględniając powyższe założenia oraz przybliżone zależności trygonometryczne (prawdziwe dla małych przyrostów  $\Delta\alpha$ ) w postaci:

$$\begin{aligned}
 (5.30) \quad \sin(\alpha + \Delta\alpha) &\approx \sin\alpha + \Delta\alpha \cos\alpha, \\
 \cos(\alpha + \Delta\alpha) &\approx \cos\alpha - \Delta\alpha \sin\alpha,
 \end{aligned}$$

po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$(5.31) \quad \Delta^{(g)}P = T^T \Delta^{(e)}P + \Delta^{(g)}P_{\sigma}$$

Wektor

$$(5.32) \quad \Delta^{(g)}P_{\sigma} = \{ 0, 0, -Ts - Nc, Ts + Nc, -Tc + Ns, Tc - Ns \}^T,$$

obrazuje wpływ sił działających na element w konfiguracji  $T=t$  na sztywność elementu (wpływ naprężeń początkowych). Uznając iż wpływ sił osiowych na sztywność elementu jest zdecydowanie większy od wpływu sił poprzecznych, co jest powszechnie przyjmowane w literaturze, pominięto udział tych ostatnich w zależności (5.32).

Korzystając teraz z (5.23) otrzymano :

$$(5.33) \quad \Delta P_{\sigma}^{(g)} = K_{\sigma}^{(g)} \Delta \tau^{(g)},$$

gdzie tzw. macierz naprężeń początkowych  $K_{\sigma}^{(g)}$  wyrażona w globalnym układzie współrzędnych zapisana jest w postaci :

$$(5.34) \quad K_{\sigma}^{(g)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & Nc^2 & -Nc^2 & -Nsc & Nsc \\ & & & Nc^2 & Nsc & -Nsc \\ \text{symetria} & & & & NS^2 & -NS^2 \\ & & & & & NS^2 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności stycznej elementu belkowego w układzie globalnym  $K^{(g)}$  spełnia równanie :

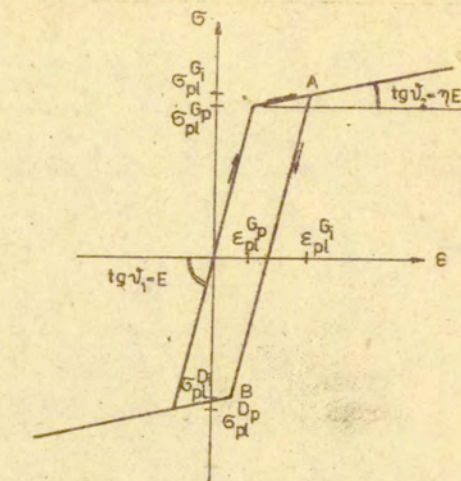
$$(5.35) \quad \Delta P = K \Delta \tau.$$

Macierz tę po wykorzystaniu zależności (5.17), (5.25), (5.31) (5.35) oraz (5.33) zapisać można w postaci :

$$(5.36) \quad K = T^T K_I + K_{\sigma}$$

### 5.1.5. Prawo fizyczne

Podstawą koncepcji warstwowego elementu belkowego jest założenie, że o uplastycznieniu każdej z warstw decyduje wyłącznie osiągnięcie granicy plastyczności w wyniku wystąpienia jednoosiowego stanu naprężenia (rozciąganie bądź ściskanie warstwy). Odcinkowo-liniowe prawo konstytutywne (rys.5.3) zapisane jest w składowych miar naprężeń i odkształceń odniesionych do konfiguracji aktualnej. Model materiału cechuje się parametrem wzmocnienia  $\eta$ . Ustalono początkowe granice plastyczności oraz



rys. 5.3

odpowiadające im odkształcenia przy rozciąganiu i ścisnaniu w wartościach odpowiednio:  $\sigma_{pl}^{Gp}$ ,  $\sigma_{pl}^{Dp}$  oraz  $\epsilon_{pl}^{Gp}$ ,  $\epsilon_{pl}^{Dp}$ . Przekroczenie wartości początkowej granicy plastyczności np.  $\sigma_{pl}^{Gp}$  w wyniku rozciągania warstwy powoduje podniesienie aktualnej granicy plastyczności do wartości  $\sigma_{pl}^{Gi} > \sigma_{pl}^{Gp}$  (pkt. A rys. 5.3). Zgodnie z ideą wzmocnienia kinematycznego (zjawisko Bauschinger), podniesienie górnej granicy plastyczności spowoduje zmianę wartości granicy plastyczności, przy ścisnaniu do poziomu  $\sigma_{pl}^{Dp} > \sigma_{pl}^{Dp}$ . Zmiana ta ma istotne znaczenie w procesie odciążania warstwy, który wystąpić może jako zjawisko lokalne w wyniku kontynuowania programu obciążania konstrukcji. Proces odciążania warstwy wytężonej do poziomu  $\sigma_{pl}^{Gi}$  (pkt. A rys. 5.3) przebiega po prostej AB scharakteryzowanej modułem stycznym równym modułowi sprężystości. Stan odkształceń odpowiadający konfiguracji  $T=t+\Delta t$  jest wynikiem kumulacji odkształceń z konfiguracji  $T=t$  i właściwego przyrostu  $\Delta \epsilon$  (wzór (5.6)). Aktualny stan naprężeń  $\sigma_i$  wyznaczyć więc można na podstawie znanego odkształcenia  $\epsilon_i$  warstwy z zależności:

- dla odkształceń sprężystych  $\epsilon_{pl}^{Dp} \leq \epsilon_i \leq \epsilon_{pl}^{Gp}$

$$(5.37) \quad \sigma_i = \frac{\frac{Dp}{\sigma_{pl}^{Dp}} - \frac{Gp}{\sigma_{pl}^{Gp}}}{\frac{Gp}{\epsilon_{pl}^{Dp}} - \frac{Dp}{\epsilon_{pl}^{Gp}}} (\epsilon_i - \epsilon_{pl}^{Dp}) + \sigma_{pl}^{Gp},$$

- dla stanu odkształceń wykraczającego poza aktualną granicę plastyczności na rozciąganie  $\epsilon_i > \epsilon_{pl}^{Gp}$

$$(5.38) \quad \sigma_i = \eta E \epsilon_i + \sigma_{pl}^{Gp} (1 - \eta),$$

przy czym aktualna granica plastyczności na rozciąganie zostaje zmodyfikowana do stanu :

$$(5.39) \quad \sigma_{pl}^{Ga} = \sigma_i;$$

zaś na ściskanie :

$$(5.40) \quad \sigma_{pl}^{Da} = \sigma_{pl}^{Dp} + \sigma_{pl}^{Ga} - \sigma_{pl}^{Gp}.$$

Indeksy „a” oznaczają aktualnie osiągnięty stan naprężeń. Towarzyszące tym zmodyfikowanym naprężeniom plastycznym wartości odkształceń wynoszą :

$$(5.41) \quad \epsilon_{pl}^{Ga} = \epsilon_i,$$

oraz

$$(5.42) \quad \epsilon_{pl}^{Da} = \frac{\sigma_{pl}^{Dp}}{E} - \frac{\sigma_{pl}^{Gp}}{E} + \epsilon_{pl}^{Ga}.$$

Analogiczne zależności (5.38) - (5.42) zapisać można dla przypadku przekroczenia granicy plastyczności przy ściskaniu warstwy czyli dla sytuacji gdy  $\epsilon_i < \epsilon_{pl}^{Dp}$ .

Należy zaznaczyć, że osiągnięcie uplastycznienia warstwy pociąga konieczność dokonania uaktualnienia wartości granic plastyczności w przypadku przyjęcia modelu ze wzmocnieniem. Uproszczenie otrzymuje się z chwilą przyjęcia modelu idealnie plastycznego  $\eta = 0$ , gdyż wartość granicy plastyczności nie ulega zmianie.

nie w procesie plastycznej pracy warstwy.

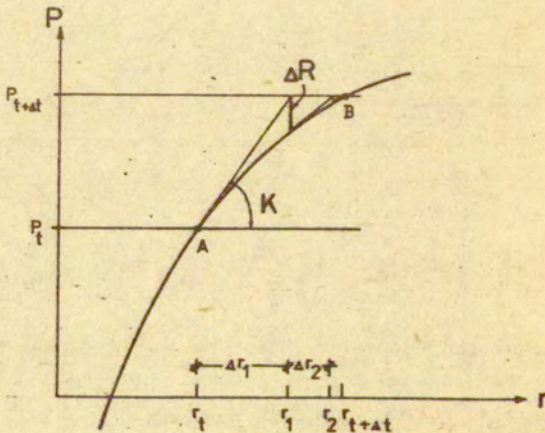
### 5.1.6. Iteracyjny sposób poszukiwania konfiguracji równowagi

Układ równań liniowych metody elementów skończonych przyjmuje następującą postać :

$$(5.43) \quad \Delta P = K \Delta r$$

gdzie  $K$  jest globalną macierzą sztywności konstrukcji utworzoną w klasyczny sposób, np. [98] z macierzy  ${}^{(e)}K$  poszczególnych elementów. Wymiar macierzy  $K$  jest równy liczbie stopni swobody układu, w naszym przypadku potrojonej liczbie węzłów.

Jednokrotne rozwiązanie układu równań liniowych (5.43) nie gwarantuje wyznaczenia położenia równowagi statycznej konstrukcji odkształconej. W celu precyzyjnego wyznaczenia położenia równowagi zastosowano procedurę iteracyjną. Interpretację geometryczną idei dla jednowymiarowego przypadku ukazuje rys.5.4.



rys. 5.4

Założmy, że znany jest stan równowagi układu w chwili  $\tau = t$ . Układ obciążony siłą  $P_t$  przyjmuje położenie  $r_t$ , pkt.A rys.5.4 Właściwym obrazem zachowania się konstrukcji pod wpływem jedno-



parametrowo wzrastającego obciążenia jest krzywoliniowa zależność  $P-\tau$ . W chwili  $\tau=t$  układ ma pewną sztywność, którą na rys.5.4 obrazuje styczna do wykresu  $P-\tau$  wyznaczona w pkt.A. Poszukuje się punktu B, równowagi układu pod wpływem działania obciążenia  $P_{t+\Delta t}$ . W pierwszym przybliżeniu oblicza się przyrost przemieszczeń  $\Delta\tau$  oraz ich aktualny stan  $\tau_1 = \tau + \Delta\tau$ . Wyznaczonemu stanowi przemieszczeń  $\tau_1$  odpowiada pewien stan odkształceń konstrukcji, z niego zaś przez prawo konstytutywne i zależności (5.8) i (5.9) określić można aktualny stan uogólnionych naprężeń przywęzłowych ("odpowiedź" układu na osiągnięty stan deformacji). Aktualny stan obciążeń zewnętrznych  $P_{t+\Delta t}$  powinien być w równowadze z siłami węzłowymi wynikającymi ze sprężysto-plastycznej "odpowiedzi" układu.

Niech wektor  $Q$  o wymiarze liczby stopni swobody układu opisuje siły działające na węzły w globalnym układzie współrzędnych, a obliczone z "odpowiedzi" układu. Obciążenia niezrównoważone (rezydualne)  $\Delta R$  w węzłach konstrukcji wyznaczmy z zależności:

$$(5.44) \quad \Delta R = P - Q$$

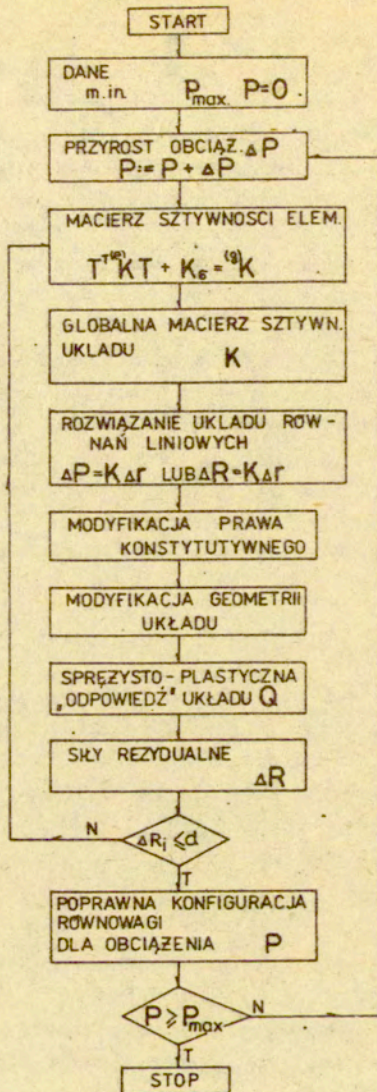
Jeśli składowe wektora sił rezydualnych  $\Delta R$  są wystarczająco małe ( $R_i < d$ , gdzie  $d$  jest założoną dokładnością wyznaczenia stanu równowagi), położenie  $\tau_1$  uznać można za wyznaczony stan równowagi. Gdy zaś błąd niezrównoważenia jest zbyt duży

$R_i > d$ , ponownie poszukujemy przyrostów przemieszczeń tym razem z równania w postaci:

$$(5.45) \quad \Delta R = K \Delta\tau$$

Teraz macierz sztywności stycznej wyznaczona jest jako funkcja nowej konfiguracji  $\tau_1$ . Przyjmując macierz  $K$  zmienną w procesie iteracji decydujemy się na tzw. metodę zmiennej sztywności. Ogólny schemat logiczny wykorzystywany przy układaniu programów przedstawiono na rys.5.5.

Szczególny nacisk położono na takie sformułowanie zadania, by przy możliwie małych wymiarach zadania (niewielka liczba stopni swobody),  $\dim K$  jest rzędu 10, poprawnie opisać



rys. 5.5

zjawiska zachodzące w konstrukcji. Ze względu na małe wymiary macierzy sztywności oraz dużą szybkość działania procedur zdecydowano się właśnie na zastosowanie metody zmiennej sztywności.

## 5.2. Przykłady numeryczne

Opierając się na przedstawionym powyżej postępowaniu, przy obliczaniu sprężysto-plastycznych deformacji konstrukcji złożonej z warstwowych elementów belkowych zbudowano programy o nazwach EPLDF i SPRP. W dodatkach D1 i D2 załączonych na końcu opracowania zawarto informacje o tych programach.

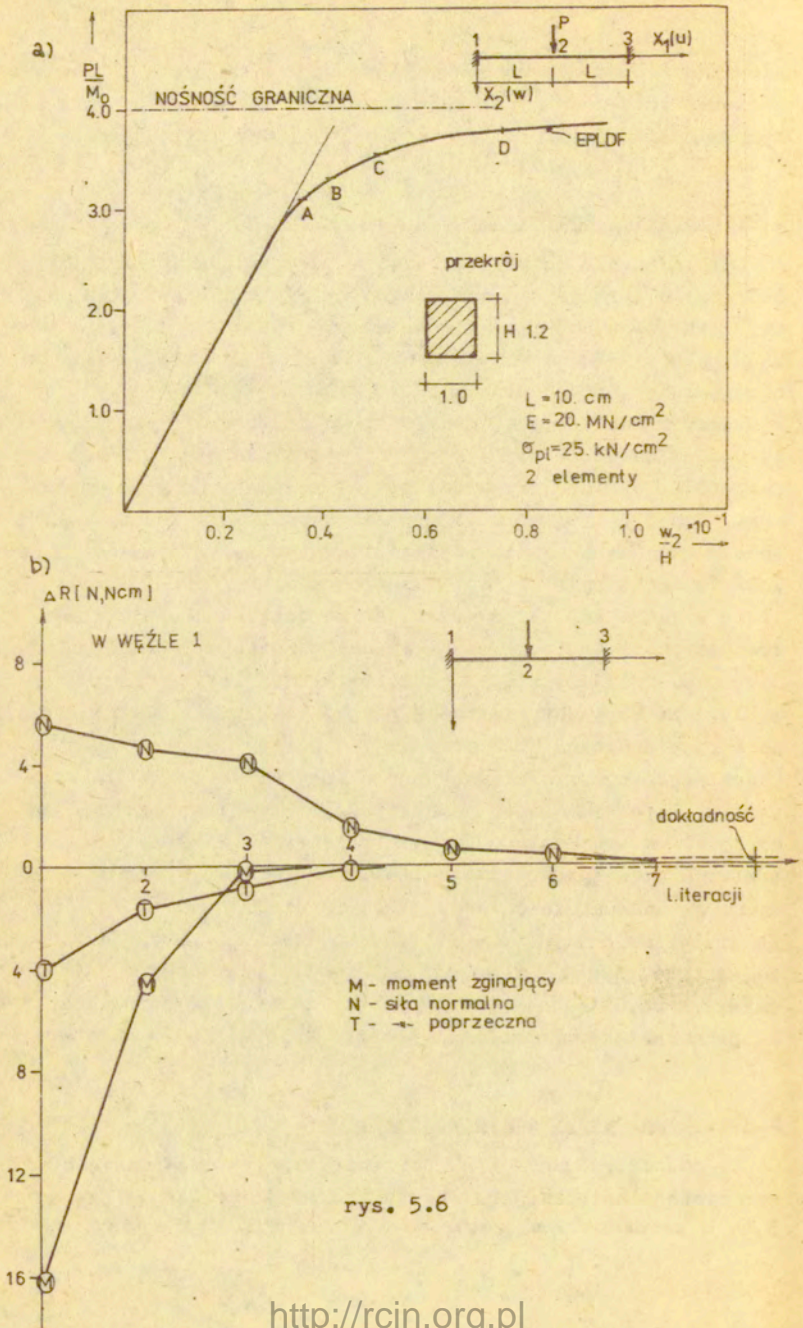
Pierwszy z nich dotyczy szczególnego przypadku prawa konstytutywnego; mianowicie ciała sprężysto-idealnie plastycznego. Drugi, rozpatruje ogólniejszy model sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem. Ponadto program SPRP dopuszcza możliwość wystąpienia warstw o różnych właściwościach fizycznych. Pozwala to na modelowanie zachowania się np. konstrukcji zbrojonych.

Ze względu na liniową zmianę krzywizny na długości elementu zdecydowano się w programach na całkowanie trzypunktowe metodą Simpsona. Przyjęty sposób całkowania umożliwia analizowanie zasięgu stref plastycznych na długości elementu z dokładnością do połowy długości elementu. Zakres stref plastycznych na wysokości przekroju analizowany jest z dokładnością do grubości warstwy. Nie zmienia to jednak postaci rzeczy, że rezultaty całkowań po wysokości wybranych przekrojów i po długości są dokładne więc i zbudowane macierze sztywności elementu wyznaczone są adekwatnie do przyjętych założeń.

Za kryterium osiągnięcia zbieżności iteracji przyjęto warunek by wartość każdej składowej wektora sił resztkowych  $\Delta R$  była mniejsza od ustalonej liczby  $d$ . W przedstawianych poniżej przykładach zastosowano podział przekroju belki na 20 warstw.

### 5.2.1. Belki obustronnie podparte

Za pomocą programu EPLDF przeanalizowano zachowanie się idealnie sprężysto-plastycznej belki utwierdzonej obciążonej jak na rys. 5.6, o prostokątnym, jednorodnym przekroju. Stałe fizyczne przy-



rys. 5.6

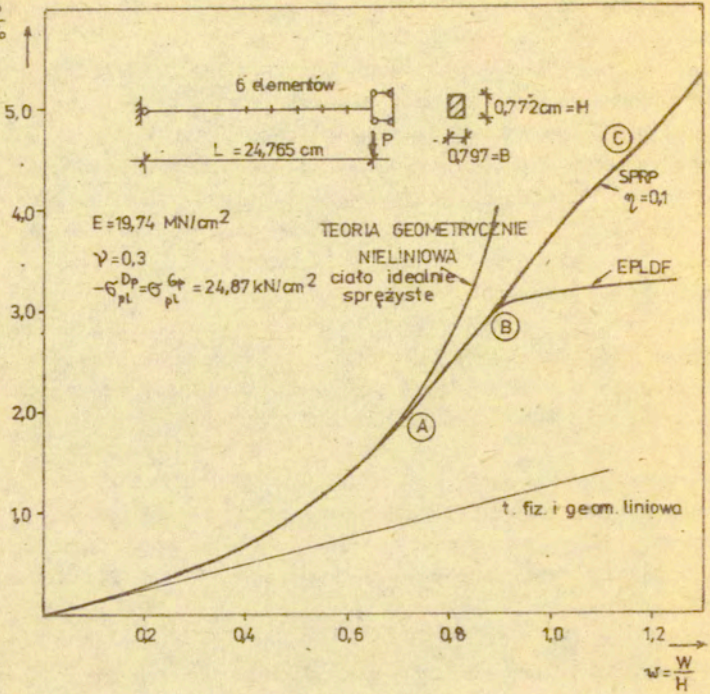
jęto o wartościach  $E = 200 \text{ GN/m}^2$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_{pl}^{Gp} = -\sigma_{pl}^{Dp} = 250 \text{ MN/m}^2$ . Zachowanie się konstrukcji, w postaci wykresu bezwymiarowego obciążenia  $PL/M_0$  do bezwymiarowego przemieszczenia  $w^2/L$ , przedstawia rys.5.6 a). Ze względu na małe zmiany geometrii warto zwrócić uwagę, że zakrzywianie się wykresu jest wynikiem osłabienia konstrukcji na skutek uplastyczniania poszczególnych warstw. Jest to więc w decydującej mierze efekt nieliniowości fizycznej. Proces zbieżności iteracji prezentuje rys.5.6 b). Przedstawiono na nim zmianę wartości sił resztkowych w węzle 1 belki, pozostających po każdej z iteracji, przy określaniu konfiguracji równowagi w pkt.D rys.5.6 a).

Na rys.5.7 przedstawiono rozwiązanie belki (przegubowo podpartej i obciążonej w środku rozpiętości siłą skupioną) za pomocą programów SPRP (model sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem) dla  $\eta = 0,1$ , oraz EPLDF (model idealnie sprężysto-plastyczny).

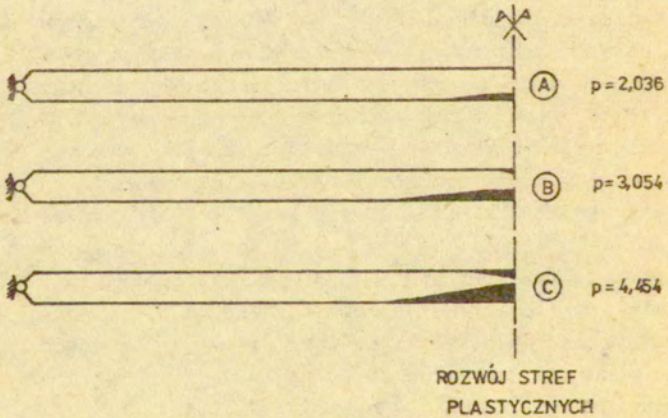
Wyniki obliczeń rys.5.7 a)

porównano z zachowaniem się analogicznej belki z materiału idealnie sprężystego przy zachowaniu związków geometrycznie nieliniowych (rozwiązanie znane analitycznie). Ze względu na symetrię zadania dyskretyzowano tylko połowę belki. Rozwiązujący problem prezentuje sytuację jednoczesnego występowania efektów geometrycznej i fizycznej nieliniowości. Do chwili wystąpienia odkształceń plastycznych w skrajnych warstwach środkowego przekroju pkt.A rys.5.7 a) krzywoliniowość wykresu  $p-w$  jest wyłącznie wynikiem zmian geometrii. Wystąpienie odkształceń plastycznych osłabia konstrukcję. Rozwiązanie według programu EPLDF, zakładające zerową sztywność uplastycznionej warstwy, dąży do określenia nośności granicznej, zaś według programu SPRP zachowuje się nadal statecznie. Rozwój stref plastycznych dla różnych intensywności obciążenia belki a otrzymany w wyniku działania programu SPRP przedstawia rys.5.7 b). Nierównomierne pojawianie się stref plastycznych na rozciąganie (warstwy dolne) i ściskanie (warstwy górne) jest wynikiem uwzględnienia zmian geometrii układu. Przy jeszcze bardziej zaawansowanym stanie przemieszczeń uplastycznione warstwy górne ulegają odciążeniu dążąc podobnie jak dolne do osiągnięcia granicy plastyczności na rozciąganie (efekt ciągnowy).

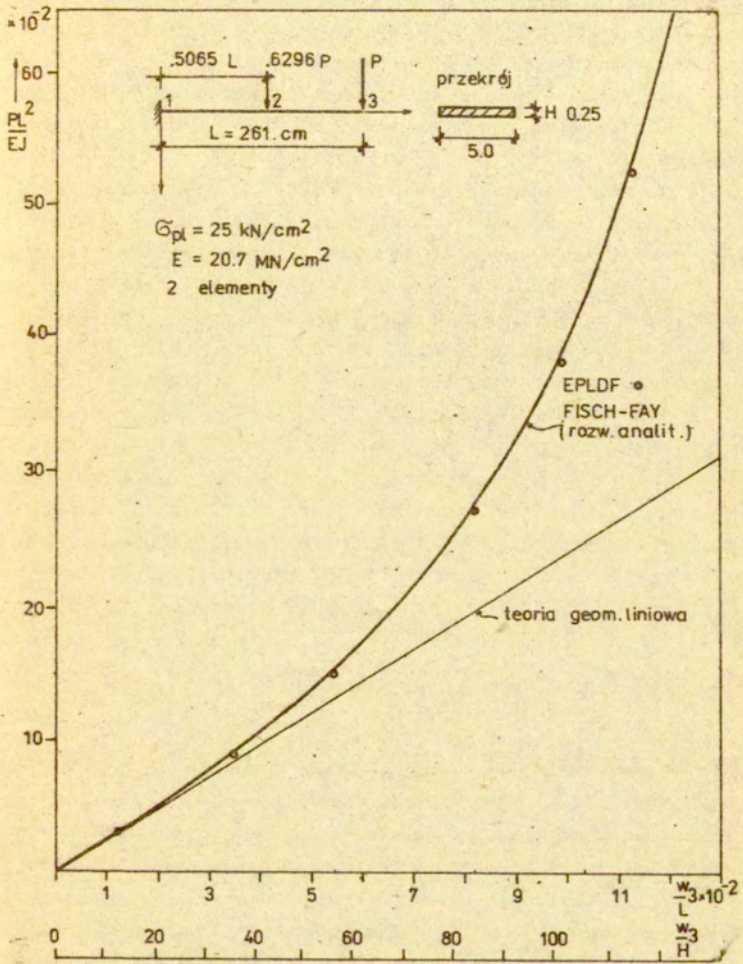
a)  $P = \frac{P}{P_0}$



b)



rys. 5.7



rys. 5.8

### 5.2.2. Belki wspornikowe

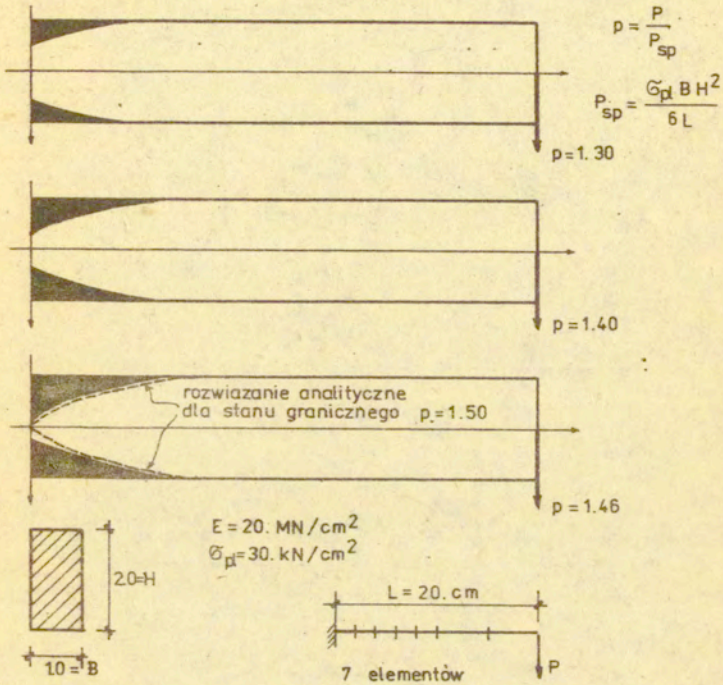
Testując dokładność metody i możliwości zastosowania prezentowanych programów, rozwiązano przykład belki wspornikowej (rys. 5.8). Znane rozwiązanie analityczne (linia ciągła) porównano z kolejno wyznaczanymi stanami równowagi według programu EPLDF. Warunek zbieżności iteracji narzucał na każdą ze składowych wektora sił resztkowych spełnienie równań równowagi z założoną dokładnością.

Rozwiązanie wspornika (rys. 5.9) ma na celu ukazanie możliwości analizowania za pomocą prezentowanych programów również zasięgu stref plastycznych towarzyszących określonym intensywnościom obciążeń. Jakkolwiek trudno porównać te wyniki z innymi rozważaniami numerycznymi (np. M. KLEIBER [66] rozwiązywał podobny wspornik używając jednak innych elementów i procedur umożliwiających analizę stateczności układu) to na uwagę zasługuje fakt iż rozwiązywany układ, dyskretyzowany był tylko siedmioma elementami skończonymi i miał zaledwie 24 stopnie swobody. Dyskretyzacja rzeczywistej konstrukcji układem o tak małej liczbie stopni swobody jest istotną zaletą przy rozwiązywaniu problemów nieliniowych formułowanych przyrostowo, wymagających wielokrotnego tworzenia macierzy sztywności i rozwiązywania układu równań liniowych. Wyniki obliczeń (rys. 5.9) porównano ze znanym rozwiązaniem analitycznym otrzymanym dla granicznej intensywności obciążenia.

### 5.2.3. Ramy płaskie

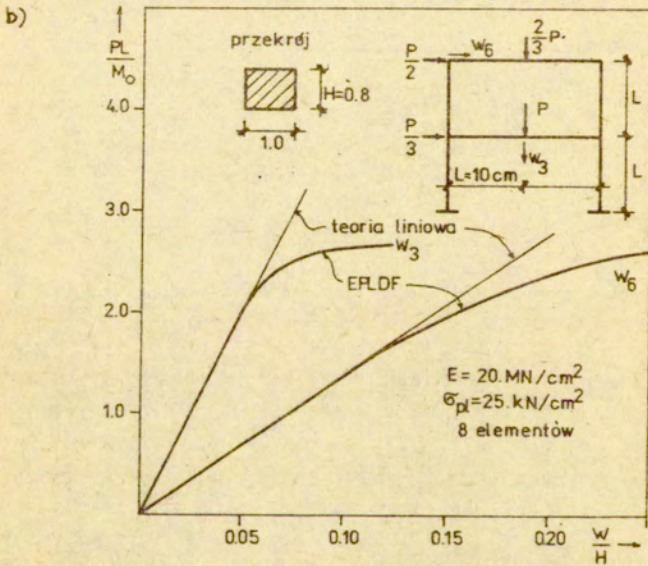
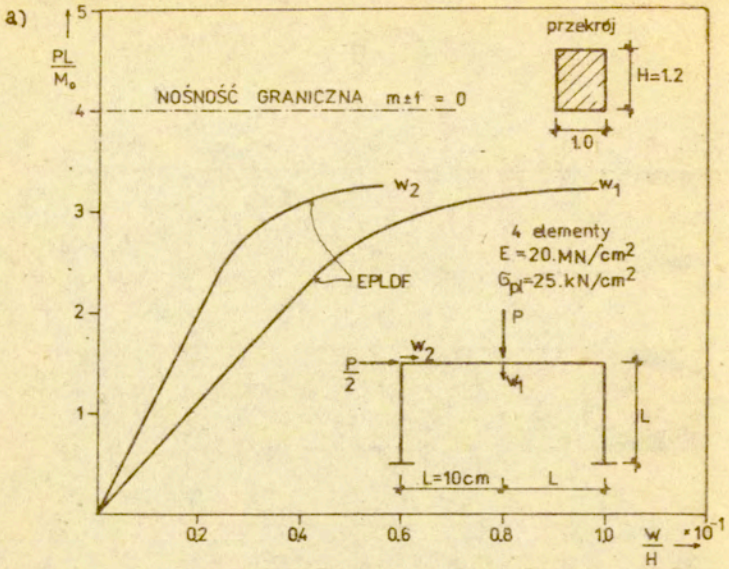
Z punktu widzenia zastosowań praktycznych interesujące są wykresy  $P-r$  opisujące zachowanie się układów ramowych. W rzeczywistych konstrukcjach ram krępych uwzględnienie efektów geometrycznie nieliniowych nie prowadzi do zmian w określaniu intensywności obciążenia granicznego. Istotniejszy wpływ daje uwzględnienie w warunkach plastyczności dla przekroju, interakcji momentu zginającego i siły osiowej. Nośność graniczna zaznaczona na rys. 5.10 a) obliczona została przy przyjęciu założenia, że stan graniczny przekroju wystąpi w wyniku osiągnięcia





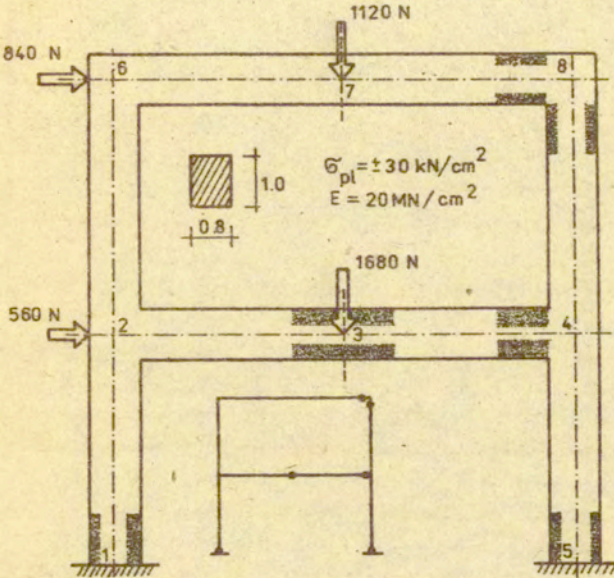
rys. 5.9

wyłącznie momentu plastycznego. Uwzględnienie wpływu sił osiowych w warunkach plastyczności w istotny sposób obniżyłoby intensywność obciążenia granicznego, określając ją jako intensywność otrzymaną za pomocą programu EPLDF. Dodatkową zaletą stosowania programu jest możliwość uzyskiwania ciągłego charakteru P-W, więc także dokładniejszego określenia aktualnych przemieszczeń. W prezentowanych na rys.5.10 przykładach ram celowo przyjęto duże sztywności elementów by w stanie



rys. 5.10

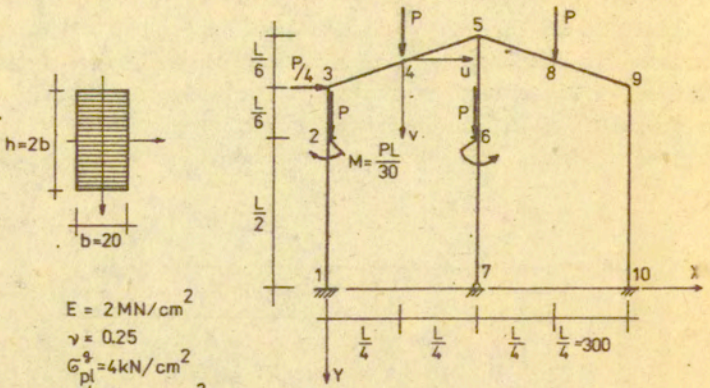
pracy sprężystej mało istotne były zmiany geometrii układu. Osłabienie konstrukcji jest wynikiem przede wszystkim uplastycznienia się poszczególnych warstw elementów. Sytuacja taka ma miejsce w większości rzeczywistych układów ramowych. Rys.5.11 przedstawia stan uplastycznienia analizowanej rami dwukondygnacyjnej o siatce ortogonalnej. Pokazano na nim również mechanizm



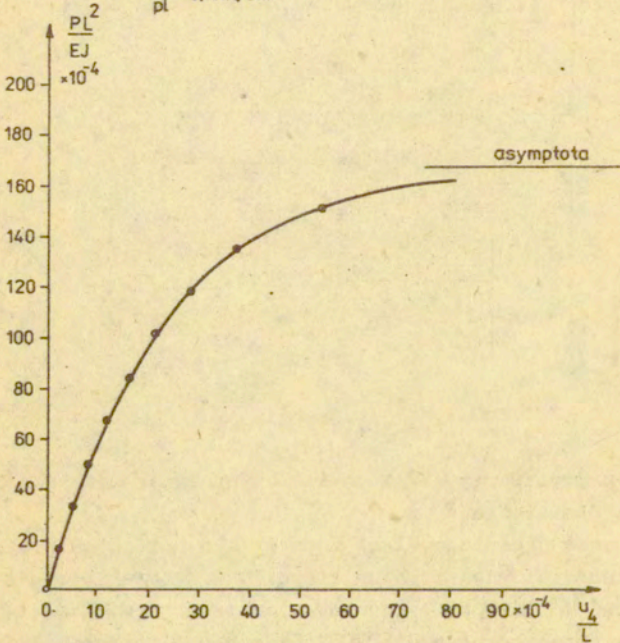
rys. 5.11

niszczenia, który tworzy się z chwilą osiągnięcia granicznej intensywności obciążenia.

Przypadek rami nieortogonalnej z materiału o różnych granicach plastyczności górnej i dolnej (rys.5.12) został przedstawiony by ukazać możliwości prezentowanych programów. Ramę tę rozwiązano za pomocą programu EPLDF. Dane geometryczne oraz obciążenie oznaczono na rysunku.



$E = 2 \text{ MN/cm}^2$   
 $\nu = 0.25$   
 $G_{pl}^2 = 4 \text{ kN/cm}^2$   
 $G_{pl}^4 = -0.4 \text{ kN/cm}^2$



rys. 5.12

Przedstawione przykłady uzupełnijmy jeszcze kilkoma uwagami.

1. Procedura jest szybciej zbieżna gdy na danym kroku przyrostowym następują tylko zmiany geometrii niż w sytuacjach, gdy kolejne konfiguracje znacznie różnią się zakresem i liczbą uplastycznionych warstw. W analizowanych przypadkach, gdy wykres zależności P-W w mało istotny sposób różni się od wykresu zbudowanego przy wykorzystaniu związków teorii liniowej, dokładność założona spełniona jest w pierwszych dwóch krokach iteracyjnych. Z chwilą pojawienia się zasadniczych zmian geometrii układu liczba potrzebnych iteracji do wyznaczenia stanu równowagi układu wzrasta do kilku. Istotne zmiany fizyczne (propagacja stref plastycznych) wymagają kilkunastu, a w stanach poprzedzających nośność graniczną lub efekty ciągnowe nawet kilkudziesięciu iteracji. Nie zauważono by liczba iteracji ulegała zasadniczym zmianom przy innej dyskretyzacji tego samego problemu.
2. Czas obliczeń jednego cyklu, na który składa się :
  - budowa macierzy sztywności  $K$ ,
  - rozwiązanie układu równań (obliczanie przemieszczeń),

$$\Delta P = K \Delta r,$$

- znalezienie sprężysto-plastycznej "odpowiedzi układu" czyli wyznaczenie sił przywęzłowych, w układzie lokalnym elementów,
- obliczenie wypadkowej sił w węzłach  $Q$ ,
- sprawdzenie warunku dokładności wyznaczenia stanu równowagi

$$\Delta R = P - Q, \quad \Delta R_i \leq d,$$

dla układu o dwudziestu czterech stopniach swobody wynosi około 2,4 s.

Dla przykładu można podać, że czas obliczeń ramy rys.5.10 wynosił 4 min 42 s. Programy uruchomione zostały w języku FORTRAN na maszynie cyfrowej ODRA 1305 w systemie GEORGE 3.

## 6. Uwagi końcowe i wnioski

Przedmiotem rozważań rozdz.3 była analiza stateczności układów sztywno-plastycznych w chwili osiągnięcia nośności granicznej. Przedstawiono w nim obraz zachowania się konstrukcji dla warunków plastyczności, które uwzględniały bądź nieuwzględniały wpływ sił osiowych na osiągnięcie stanu granicznego przekroju. Okazało się, że uwzględnienie sił osiowych dzieli obszar graniczny, przedstawiony w przestrzeni obciążeń, na dwie strefy: stateczną i niestateczną. Dla typowych przypadków obciążeń ram budowlanych należy liczyć się z niestatecznym mechanizmem granicznym co jest równoznaczne ze zniszczeniem konstrukcji. W rozdziale tym sformułowano także warunki stateczności ram wielonawowych i wielopiętrowych, regularnych, ortogonalnych. Wyprowadzone zależności są m.in. funkcjami mechanizmów podstawowych wchodzących w skład tworzącej się w stanie granicznym kinematyki zniszczenia.

Pozagraniczna analiza konstrukcji sztywno-plastycznych była treścią rozdz.4. Analizując efekt obciążenie-przemieszczenie przyjmowano wyrażenia opisujące zmiany geometrii z różną dokładnością (liczba wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora) w zależności od analizowanej skali przemieszczeń. Przedstawiono również przykład belki wspornikowej pod obciążeniem niejedno-parametrowym. Ustalono obszary zmienności parametrów obciążenia, przy których układ zachowuje się statecznie bądź niestatecznie. Na przykładzie belki wspornikowej analizowano wpływ różnych linearyzacji warunku plastyczności na pozagraniczne zachowanie się konstrukcji.

W dalszej części podjęto próbę numerycznego rozwiązania problemów pozagranicznego zachowania się układów przy założeniu możliwości zmiany mechanizmu zniszczenia. Stosując podejście przyrostowe rozwiązano klasę belek utwierdzonych z możliwością poziomego przemieszczania się podpór. W zdecydowanej większości przypad-

ków zachowanie się belek w stanie pozagranicznym było stateczne. Analiza belek dotyczyła zakresu przemieszczeń  $W = o(h)$ . Stosując twierdzenie ekstremalne przeanalizowano zachowanie się ramy portalowej w zakresie dużych przemieszczeń. Wykazano możliwość zmiany mechanizmu zniszczenia polegającą na pojawianiu się nowych przegubów plastycznych oraz usztywnianiu się przekrojów, w których poprzednio występowały deformacje plastyczne. Znamienny jest fakt, że w zakresie dużych przemieszczeń zawsze realizował się mechanizm o jednym stopniu kinematycznej swobody.

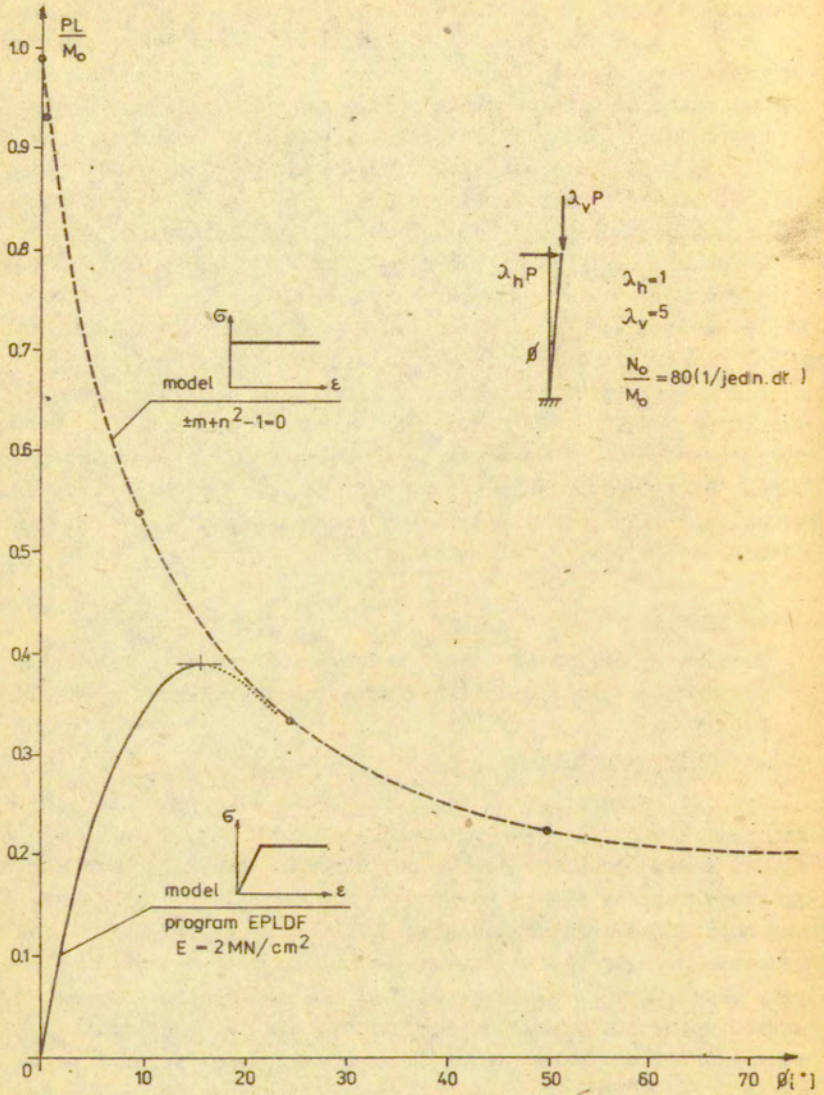
W rozdz.5 opracowano metodę nieliniowej geometrycznie analizy ram sprężysto-plastycznych opierającą się na koncepcji warstwowego elementu skończonego. W proponowanym podejściu uwzględniono możliwość analizowania zasięgu stref plastycznych oraz lokalnego odciążenia warstw w procesie narastających obciążeń. Opracowanie takiego elementu skończonego umożliwiło dyskretyzację konstrukcji modelami o niewielkiej liczbie stopni swobody. Ma to duże znaczenie szczególnie w przypadku zadań geometrycznie i fizycznie nieliniowych rozwiązywanych z wykorzystaniem procesów przyrostowo-iteracyjnych.

## 6.1. Porównanie

Porównajmy otrzymane wyniki analiz tych samych konstrukcji przyjmując modele materiałów sztywno-plastyczny i sprężysto-plastyczny

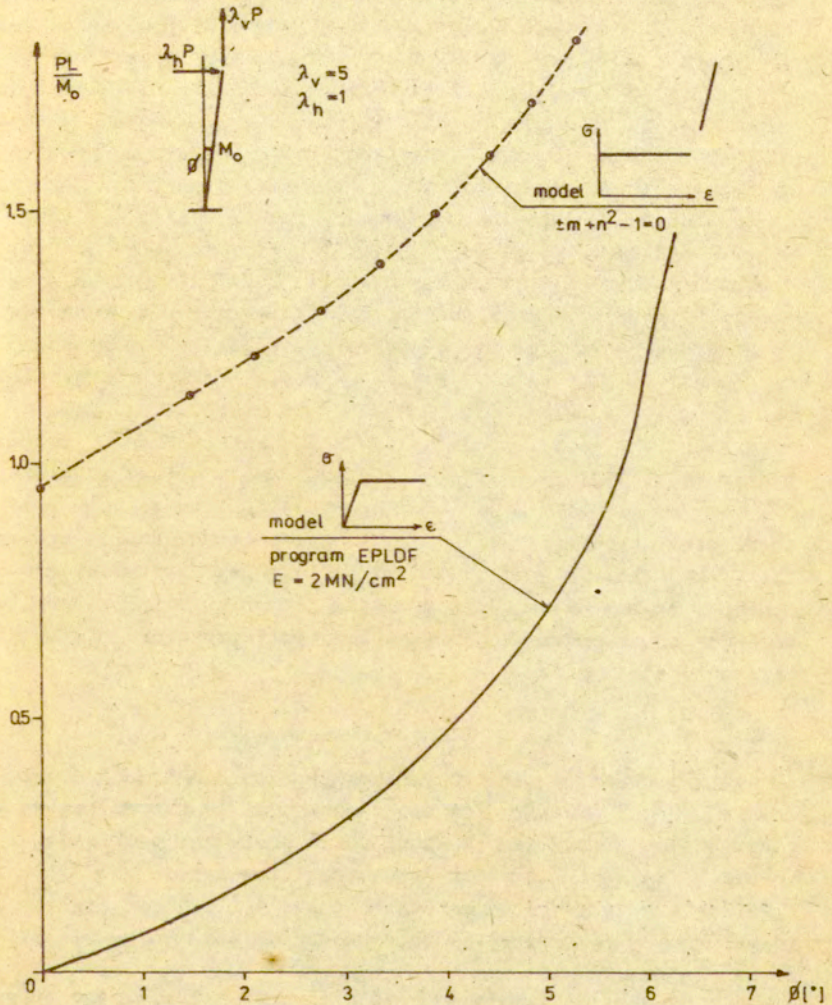
### 6.1.1. Belki wspornikowe

Rys.6.1 przedstawia w postaci wykresu siła-przemieszczenie zachowanie się belki wspornikowej obciążonej dwiema siłami, (jedna z nich powoduje osiowe ściskanie). Przyjęcie modelu ciała sztywno-idealnie plastycznego daje niestateczny charakter zachowania się układu od początku deformacji (krzywa przerywana). Użycie modelu sprężysto-idealnie plastycznego (program EPLDF) przy określonym module sprężystości  $E$  opisało zachowanie się układu w postaci przedstawionej krzywą ciągłą. Maksymalna intensywność obciążenia, którą układ może w tym przypadku przemieścić ( $P^L/M_0 \approx 0,38$ ) znacznie odbiega od intensywności wyznaczonej przy przyjęciu modelu sztywno-plastycznego. Linia kropkowaną



rys. 6.1





rys. 6.2

przedstawiono przypuszczalną postać wykresu  $P-\Phi$  w stanie pozagranicznym. Jak to już podkreślono w rozdz.5, za pomocą programu EPLDF można analizować wyłącznie stateczne zachowanie się konstrukcji (sterowanie przyrostem wektora sił), dlatego analiza kończy się w chwili gdy wartość wyznacznika macierzy sztywności konstrukcji dąży do zera. Przedstawiony na rys.6.1 wykres, obrazujący zachowanie się belki wspornikowej, przypomina w swym charakterze wykres z rys.4.26. Przedstawiał on wpływ początkowych imperfekcji geometrycznych układu idealnie sprężystego na wartość obciążeń krytycznych. Zauważyć można analogię między wpływem początkowych geometrycznych imperfekcji na wartość obciążenia krytycznego (w układach idealnie sprężystych) a wpływem początkowych odkształceń sprężystych na nośność graniczną.

Sugestię tę potwierdza również przykład belki wspornikowej przedstawiony na rys.6.2. W tym przypadku, ze względu na siłę osiową rozciągającą, układ zachowuje się statecznie. Linia przerywaną (rys.6.2) przedstawiono zachowanie się belki sztywno-plastycznej, ciągłą zaś sprężysto-plastycznej. Obydwa rozwiązania dążą do stanu membranowego, który osiągnięty zostaje przy kącie obrotu pręta około  $11^{\circ}18'$ . W tym przypadku można stwierdzić, że jakkolwiek przemieszczenia dla modelu sztywno-plastycznego są szacowane z dużym błędem to możliwość przenoszenia obciążeń przez konstrukcję wyznaczona przy przyjęciu obu modeli materiałów jest podobna.

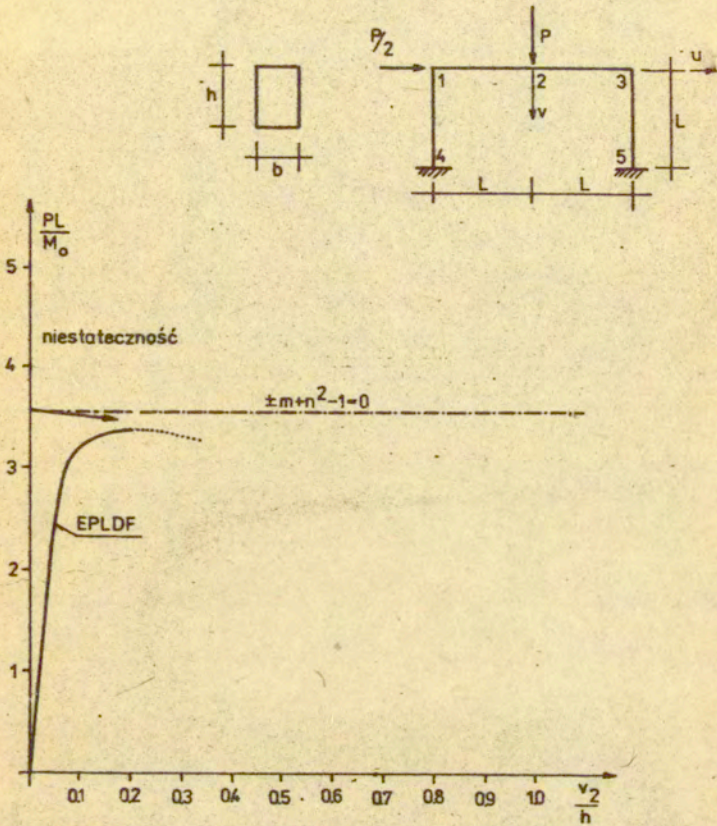
#### 6.1.2. Rama portalowa i belka utwierdzona

W wielu praktycznych przypadkach jest rzeczą trudną sporządzenie wykresów pozagranicznego zachowania się układu sztywno-plastycznego. Można jednak zanalizować stateczność układu w chwili osiągnięcia nośności granicznej (rozdz.3).

W zakresie przemieszczeń istotnych z punktu widzenia praktyki inżynierskiej informacja o stateczności układu wydaje się być wystarczająca.

Rys.6.3 przedstawia intensywność obciążenia granicznego przy przyjęciu warunku plastyczności uwzględniającego wpływ siły osiowej. Zaznaczono niestateczne zachowanie się układu w chwili osiągnięcia nośności granicznej.

Wyniki analizy układu przeprowadzonej z wykorzystaniem programu

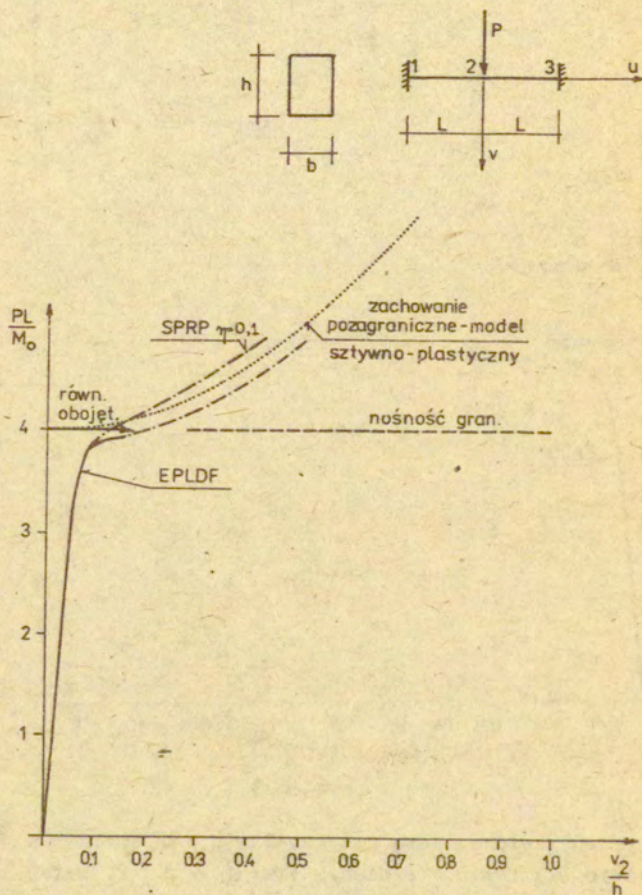


rys. 6.3

EPLDF przedstawiono linią ciągłą. Dla przemieszczenia  $v_2/L \approx 0.2$  osiągnięto ekstremum obciążenia ( $\det K \rightarrow 0$ ). Dalej linią kropkowaną przedstawiono przewidywany kształt wykresu siła-przemieszczenie. Pod względem zjawisk opisywanych przykład ten jest podobny do prezentowanego na rys.6.1. Mniejszy wpływ efektów sprężystych przypisywać można dużej wartości przyjętego

w analizie sprężysto-plastycznej (EPLDF) modułu Younga  $E=20MN/cm^2$ .  
W przykładzie rys.6.1 moduł ten był dziesięciokrotnie mniejszy.

Belka obustronnie utwierdzona z materiału sztywno-plastycznego (rys.6.4) osiąga nośność graniczną przy zerowych siłach osio-



rys. 6.4

wych. W chwili osiągnięcia granicznej intensywności obciążenia zachowuje się obojętnie. Pozagraniczne zachowanie się układu obrazuje krzywa kropkowana. Rozwiązanie to zostało osiągnięte przy przyjęciu koncepcji uogólnionych przegubów plastycznych (uwzględnienie sił osiowych w stanie pozagranicznym), zaś wyniki były cytowane w rozdz.4 (wzór 4.41).

W analizowanym przykładzie (EPLDF) przyjęto takie parametry geometryczne i fizyczne układu, że uplastycznienie wszystkich warstw przekrojów nastąpiło przy małych zmianach geometrii konstrukcji. Sytuacja ta uniemożliwiła wystąpienie lokalnych odciążeń w uplastycznionych przekrojach. Dlatego część wykresu jako przewidywaną zaznaczono linią przerywaną. Przyjęcie modelu materiału ze wzmocnieniem (program SPRP) określa konstrukcję stateczną. Nie należy jednak wyników zachowania się pozagranicznego modelu sztywno-plastycznego porównywać z wynikami otrzymanymi z programu SPRP.

## 6.2. Wnioski

W pracy posługiwano się dwoma modelami materiałów stosując różne podejścia w sformułowaniu warunków granicznych. Dla modelu sztywno-plastycznego warunki plastyczności wyrażane były w wielkościach uogólnionych jako interakcje odpowiednich sił przekrojowych. W tym przypadku uznawano, że osiągnięcie określonej kombinacji sił powoduje uplastycznienie całego przekroju belki (ramy). W sytuacji przeciwnej przekrój był idealnie sztywny. W modelu sprężysto-plastycznym warunki plastyczności formułowano w naprężeniach występujących w warstwach elementów. Umożliwiało to uwzględnienie : częściowego uplastycznienia przekrojów, analizowania zasięgu stref uplastycznionych w kierunku osi prętów a także lokalnych odciążeń warstw.

Porównując wyniki analiz konstrukcji sztywno-plastycznych i sprężysto-plastycznych przy wyżej wymienionych różnicach w sformułowaniach warunków granicznych, przedstawić można następujące uwagi końcowe :

1. Analiza ilościowa opisująca wiernie zachowanie się rzeczywistych konstrukcji może być dokonana wyłącznie przy zastosowaniu sprężysto-plastycznego modelu materiału z uwzględnie-

niem zmian geometrii układu w procesie deformacji.

2. Posługiwanie się sztywno-plastycznym modelem materiału prowadzi do uzyskania efektów jakościowych opisujących charakter zachowania się konstrukcji. Uwzględnienie związków geometrycznie nieliniowych pozwala na analizę stateczności układu w chwili osiągnięcia nośności granicznej, bądź o ile nie wystąpi w procesie deformacji zmiana mechanizmu zniszczenia, pozwala również szacować przemieszczenia w stanie pozagranicznym. Pozwala to wnioskować o rzeczywistych możliwościach przenoszenia obciążeń przez konstrukcję. Przy niestatecznym zachowaniu się konstrukcji w chwili osiągnięcia nośności granicznej należy liczyć się w rzeczywistości z sytuacją, że już przy mniejszych obciążeniach konstrukcja utraci swą zdolność do przenoszenia obciążeń. Stateczne zachowanie się układu ramowego bądź belkowego gwarantuje, że właściwa intensywność obciążeń granicznych, otrzymywana przy użyciu modelu sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem zmian geometrii, nie wiele odbiegać będzie od intensywności obciążeń wyznaczonej dla konstrukcji sztywno-plastycznej.

Formułując niniejsze uwagi posłużono się analogią do badania stateczności układów idealnie sprężystych traktując konstrukcję z materiału sztywno-plastycznego jako model idealny, zaś z materiału sprężysto-plastycznego jako model z początkowymi imperfekcjami.

W zależności od zakresu analizowanych przemieszczeń kinematyka pozagranicznego zachowania się konstrukcji powinna być zapisana z odpowiednią dokładnością. W przypadku umiarkowanie dużych przemieszczeń, których wielkość jest rzędu wysokości przekrojów wystarczy uwzględnienie w zależnościach geometrycznych tylko pierwszych wyrazów rozwinąć w szereg Taylora. W przypadkach zaś, gdy rozważania dotyczą zakresu przemieszczeń rzędu długości elementów należy koniecznie wyznaczać związki geometryczne uwzględniając wszystkie człony nieliniowe. Opisanie geometrii z niewłaściwą dokładnością pociąga za sobą nieścisłości nawet przy określeniu jakości zjawisk (rys.4.2).

3. Wykorzystując model sztywno-plastyczny wskazano na możliwość wystąpienia lokalnych odciążeń a w konsekwencji zmiany mechanizmów zniszczenia konstrukcji ramowych. W analizowanym przykładzie zmiana mechanizmu zniszczenia zachodziła przy bardzo dużych przemieszczeniach. Można jednak sądzić, że dla bardziej skomplikowanych ram będą istniały możliwości wystąpienia zmian mechanizmów zniszczenia przy znacznie mniejszych przemieszczeniach mieszczących się w zakresie ważnym, z punktu widzenia użytkowania konstrukcji.

Przeanalizowane przykłady ram wykazują niestateczny charakter zachowania się w chwili osiągnięcia nośności granicznej. Występujące zmiany geometrii prowadzą we wszystkich przypadkach do osiągnięcia minimum wykresu  $\varphi$ - $w$ , dalej zaś wzmocnienia geometrycznego. Zmiana mechanizmu, występująca w punkcie lokalnego max. wykresu  $\varphi$ - $w$  powoduje początkowo osłabienie układu. Później jednak, w wyniku dalszych zmian geometrii, uwidacznia się ponownie efekt wzmocnienia (rys.4.22). Interesujący jest również fakt, że symetrycznemu obciążeniu układu towarzyszy niesymetryczna zmiana geometrii w stanie pozagranicznym (rys.4.20). Istnieje również tutaj pewna analogia do zjawisk stateczności sprężystej ram, które to układy przy symetrycznych obciążeniach częstokroć osiągają niesymetryczne postaci równowagi po osiągnięciu obciążenia krytycznego (punktu bifurkacji).

4. Analiza wspornikowych belek sztywno-plastycznych wykazała, że w zakresie skończonych przemieszczeń nie można sformułować twierdzenia o górnym lub dolnym oszacowaniu obciążenia jako funkcji warunku granicznego wpisanego lub opisanego na danym. O ile w stanie granicznym  $w=0$  można twierdzić, że np. dla warunku granicznego opisanego wartość obciążenia granicznego jest większa o tyle w zakresie przemieszczeń  $w \neq 0$  twierdzenie takie nie jest prawdziwe.

5. Metoda przyrostowej analizy belek sztywno-plastycznych z możliwościami przemieszczania się podpór umożliwiła w konsekwencji rozwiązanie przypadku ramy przy belkowym mechanizmie granicznym. W przypadkach gdy sztywności słupów były większe od sztywności rygli, w stanie pozagranicznym, ramy zachowywały się statecznie. Istnieją więc możliwości wpływania na charakter pozagranicznego zachowania się konstrukcji przez odpowiednie kształtowanie jej elementów.
6. Opracowana metoda rozwiązywania belek i ram uwzględniająca zmiany geometrii układu i wykorzystująca odcinkowo-liniowy model materiału sprężysto-plastycznego jest efektywnym narzędziem analizy tych układów. Pozwala na dyskretyzację układów modelami o małej liczbie stopni swobody a tym samym na uzyskanie rezultatów przyrostowo-iteracyjnych analiz numerycznych w stosunkowo krótkim czasie.
7. Uwzględnienie w modelu sprężysto-plastycznym efektów lokalnego odciążenia jest szczególnie ważne przy rozpatrywaniu przypadków zaawansowanych stanów deformacji (np. stany membranowe belek). Dla analizowanych przypadków ram w zakresie badanych przemieszczeń (uzasadnionych z punktu widzenia użytkownika konstrukcji) nie zaobserwowano zjawiska lokalnego odciążenia się przekrojów.  
W przekonaniu autora ważniejsze elementy zawarte w pracy to:
  - opracowanie elementu skończonego i uruchomienie iteracyjno-przyrostowych algorytmów numerycznej analizy układów ramowych w zakresie odkształceń sprężystych i plastycznych przy nieliniowych zmianach geometrii układu,
  - opracowanie przyrostowo minimalizacyjnych procedur do analizy sztywno-plastycznych konstrukcji w zakresie dużych przemieszczeń belek i ram,
  - zanalizowanie wielu oryginalnych przykładów numerycznych przy przyjęciu modeli materiałów sztywno-plastycznego i sprężysto-plastycznego oraz zweryfikowanie modelu sztywno-plastycznego powszechnie stosowanego w analizie granicznej.



Wyniki przeprowadzonych analiz ukazują możliwość podjęcia w przyszłości następujących problemów :

1. Badanie stateczności układów ramowych w zakresie pracy sprężysto-plastycznej i numeryczna analiza pozakrytycznego zachowania się konstrukcji.
2. Analiza konstrukcji wielospójnych (np. żelbetowych) przez wprowadzenie innego od odcinkowo-liniowego prawa fizycznego oraz analiza układów o zmiennej wysokości przekrojów na długości elementów.
3. Opracowanie koncepcji przegubu plastycznego umożliwiającego wykorzystanie modelu sztywno-plastycznego do właściwego szacowania przemieszczeń w zakresie dużych odkształceń.
4. Analiza konstrukcji na przystosowanie przez wprowadzenie odpowiedniego programu obciążeń.
5. Optymalizacja konstrukcji prętowych z uwzględnieniem charakteru pozagranicznego zachowania się układów.

Pragnę wyrazić głęboką wdzięczność  
Pani doc. dr hab. inż. Marii Duszek  
za wiele cennych sugestii przekazanych  
mi w trakcie przygotowywania rozprawy

## 7. Bibliografia

- [1] - S.B. ABDEL-BASET, D.E. GRIERSON, N.C. LIND, Second order collapse load analysis LP approach, Journ.Str.Div. ASCE ST 11, Nov 1973, pp 2215-2228
- [2] - M. ARCISZ, J. RYCHLEWSKI, Plane plastic flow in material description, Arch.Mech.Stos., 2, 22, 1970, pp 233-249
- [3] - J.H. ARGYRIS, Metrix analysis of three dimensional elastic media small and large displacement, AIAA Journ., 3, 1, 1965, pp 45-51
- [4] - J.H. ARGYRIS, Elasto-plastic metrix displacement analysis of three dimensional continua, Journ.Roy.Aeorn.Soc., 69, 1965, pp 633-635
- [5] - J.H. ARGYRIS, J.St. DOLTSINIS, On large strain inelastic analysis in natural formulation part I : Quasistatic problems, Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., 20, 1979 pp 213-251
- [6] - J.H. ARGYRIS, J.St. DOLTSINIS, M. KLEIBER, Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity natural approach. Part II, Comp.Meth. Appl.Mech.Eng., 14, 2, 1978, pp 259-294
- [7] - J.H. ARGYRIS, M. KLEIBER, Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity natural approach. Part I, Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., 11, 2, 1977, pp 215-247
- [8] - J.H. ARGYRIS, D.W. SHARPF, Methods of elasto-plastic analysis, Journ.Appl.Math.-Phys (ZAMP), 23, 4, 1972, pp 517-551
- [9] - J. BÄCKLUND, Large deflection analysis of elasto-plastic beams and frames, Int.Journ.Mech.Sci., 18, 1976, pp 269-277
- [10] - D.K. BAGCHI, Inelastic bending of beam including transverse shear, Int.Journ.Num.Meth.Eng., 14, 1979, pp 1323-1333

- [11] - J. BAKER, J. HEYMAN, Plastic design of frames. 1 Fundamentals, Combridge Univ.Press, 1969
- [12] - W. BANDYSZEWSKI, A. SAWCZUK, Przybliżona metoda obliczania przemieszczeń belek i ram sprężysto-plastycznych, Arch.Inż.Łąd., 20, 1, 1974, ss.63-80
- [13] - K.J. BATHE, S. BOLOURCHI, Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, Int.Journ.Num.Meth. Eng., 14, 1979, pp 961-986
- [14] - K.J. BATHE, E.L. WILSON, Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall Inc., 1976
- [15] - T. BELYTSCHKO, L. SCHWER, M.J. KLEIN, Large displacement, transient analysis of space frames, Int.Journ.Num.Meth. Eng., 11, 1977, pp 65-84
- [16] - B. BONI, M. SARAN, Numerical plastic analysis of plane frames with axial forces taken into account, Arch.Inż. Łąd., 24, 4, 1978, pp 629-643
- [17] - A. BORKOWSKI, Programowanie matematyczne w zagadnieniach nieliniowej statyki, Prace IPPT 36-1978
- [18] - A. BORKOWSKI, Metoda sztywno-plastycznych elementów skończonych w analizie i optymalizacji ram, Mech. i Komp., 1, 1978, ss 125-138
- [19] - E.H. BROWN, The failure of frames, Proc.Roy.Soc.Lond., A.319, 1970, pp 405-434
- [20] - T.I. CAMPBELL, T.M. CHARLTON, Finite deformation of a fully fixed beam comprised of a non-linear material, Int.Journ.Mech.Sci., 45, 1973, pp 415-428
- [21] - J. CHAKRABARTY, On uniqueness and stability in rigid-plastic Solids, Int.Journ.Mech.Sci., 11, 1969, pp 659-666
- [22] - K.S. CHI, T.H. LIN, Slope-deflection method for elastic-plastic multistorey frames, Int.Journ.Solids & Struct., 13, 2, 1977, pp 125-135
- [23] - M.Z. COHN, M. ABDEL-ROHMAN, Analysis up to collapse of elasto-plastic arches, Comp. & Struct., 6, 1976, pp 511-

- [24] - M.Z. COHN, A. FRANCHI, Structural plasticity computer system STRUPL, Journ.Str.Div. ASCE, St4, 1979, pp 789-804
- [25] - A.A. CZYRAS, Metody liniowego programowania pri raszczotie uprugoplastycznych sistem, Stroizdat, 1969
- [26] - K. DEMS, M. KLEIBER, Physically and geometrically nonlinear analysis of structures using one and two dimensional finite elements, Rozp.Inż., 24, 4, 1976, pp 771-786
- [27] - C.S. DESAI, J.F. ABEL, Introduction to the finite element method. A numerical method for engineering analysis, Van Nostrand Reinhold Co., 1972
- [28] - S. DOROSZ, Obliczanie ugięć konstrukcji sprężysto-plastycznych, Konf.Nauk. Krynica 1979, ss 65-71, tom I
- [29] - S. DOROSZ, A. SAWCZUK, Deflexions of elastic-plastic beams at finite spread of plastic zones, IUTAM Symposium, May 27-30, 1980, Springer-Verlag 1981, pp 65-73
- [30] - D.C. DRUCKER, A definition of stable inelastic material, Journ.Appl.Mech., 3, 1959, pp 101-106
- [31] - M.K. DUSZEK, On stability of rigid-plastic structure at the yield-point load, Bull. L'acad.Polon.Sci., 21, 2, 1973, pp 79-87
- [32] - M.K. DUSZEK, On minimum principles in finite plasticity, Bull. L'acad.Polon.Sci., 21, 2, 1973, pp 89-96
- [33] - M.K. DUSZEK, Geometryczna nieliniowa teoria konstrukcji sztywno-plastycznych, Prace IPPT, 42-1975
- [34] - M.K. DUSZEK, Problems of geometrically non-linear theory of plasticity, Ruhr-Univ. Bohum, 21-1980
- [35] - M.K. DUSZEK, A. SAWCZUK, Unstable limit analysis solution for multistorey frames, Stav.Cas., 23, 9, Veda, Bratisl., 1975, pp 638-649
- [36] - M.K. DUSZEK, A. SAWCZUK, Stable and unstable states of rigid-plastic frames at the yield-point load, Journ. Struc.Mech., 4, 1, 1976, pp 33-47

- [37] - A.G. ERINGEN, Nonlinear theory of continuous media, Mc Graw-Hill Co., 1962
- [38] - R. FRISCH-FAY, Flexible bars, Butterworths, London 1962
- [39] - Y.C. FUNG, Foundations of solid-mechanics, Englewood Cliffs, 1965
- [40] - R.H. GALLAGHER, Finite-element analysis, Springer-Verlag, 1976
- [41] - S.S. GILL, Effect of deflection on the plastic collapse of beams with distributed load, Int.Journ.Mech.Sci., 15, 6, 1973, pp 465-471
- [42] - D.E. GRIERSON, M.L. GLADWELL, Collapse load analysis using linear programming, ASCE, Journ.Str.Div., 97, 5, 1971
- [43] - A. GURKOK, H.G. HOPKINS, The effect of geometry changes on the load carrying capacity of beams under transverse load, SIAM, 25, 1973, pp 500-521
- [44] - W. GUTKOWSKI, J. OSIECKI, A. SAWCZUK, Nieliniowe zagadnienia mechaniki konstrukcji, Arch.Inż.Ląd., 19, 4, 1973, ss 577-595
- [45] - A.A. Gwozdiew, Opriedielenie wielicziny razgrazajuszczrej nagruzki dla statycznych nieopregelimych sistiem, Projekt Standart, 8, 3, 1934, ss 10-16
- [46] - J.B. HADDOW, T.M. HRUDEY, A finite strain theory for elastic-plastic deformation, Int.Journ. Non-linear Mech., 6, 1971, pp 435-450
- [47] - R.M. HAYTHORNTHWAITTE, Mode change during the plastic collapse of beams and plates, Devel. in Mech., 1, NY, 1961, pp 203-215
- [48] - J. HEYMAN, Plastic design of portal frames, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1957
- [49] - H.D. HIBBIT, P.V. MARCAL, I.R. RICE, A finite element formulation for problems of large strain and large displacement, Int.Journ.Solid & Struc., 6, 1970, pp 1069-

1086

- [50] - R. HILL, The Mathematical theory of plasticity, Oxford at the Clarendon Press, 1950
- [51] - R. HILL, Stability of rigid-plastic solids, Journ.Mech. Phys.Solids, 6, 1, 1957, pp 1-8
- [52] - R. HILL, On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid II, Journ.Mech.Phys.Solids, 5, 1954, pp. 1-8
- [53] - R. HILL, On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic Solid III, Journ.Mech.Phys.Solids, 5, 1957, pp 153-161
- [54] - R. HILL, On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid IV, Journ.Mech.Phys.Solids. 5, 1957, pp 302-307
- [55] - R. HILL, A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, Journ.Mech.Phys.Solids, 6, 1958, pp 236-249
- [56] - R. HILL, On constitutive inequalities for single materials I and II, Journ.Mech.Phys.Solids, 16, 1968, pp 229
- [57] - E. HINTON, D.R.J. OWEN, Finite element programming, Academic Press, 1977
- [58] - P.G. HODGE jr , Plastic analysis of structures, Mc Graw-Hill Co., 1959
- [59] - P.G. HODGE jr , Post yield behaviour of a beam with partial end fixity, Int.Journ.Mech.Sci., 16, 1974, pp 385-388
- [60] - M. JANAS, Zmiany mechanizmu zniszczenia w stanie pozagranicznym konstrukcji prętowych, Prace IPPT 48 - 1978
- [61] - W. JOHNSON, P.B. MELLOR, Engineering plasticity, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1973
- [62] - N. Jones, Review of the plastic behaviour of beams and plates, Int.Shipbuild. Progress, 19, 218, 1972, pp 313-327
- [63] - L.M. KACZANOW, Osnovy teorii płasticznosti, Gos.Izdat. Tich., Moskwa 1956

- [64] - S. KEMPNY, Podstawy komputerowej analizy stateczności pozasprężystej płaskich układów prętowych, Arch.Inż.Łąd., 24, 4, 1978, ss 605-617
- [65] - M. KLEIBER, Teoria dużych odkształceń sprężysto-plastycznych, Ossolineum 1975 w tomie "Zagadnienia peizania i plastyczności"
- [66] - M. KLEIBER, Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych, teoria i numeryczna analiza konstrukcji, Prace IPPT 13 - 1978
- [67] - M. KLEIBER, Numeryczne aspekty analizy ciał i konstrukcji sprężysto-plastycznych, Mech. i Komp., 3, 1980, ss 19-56
- [68] - J.A. KONIG, Projektowanie konstrukcji sprężysto-plastycznych przy obciążeniach zmiennych, prace IPPT, 24/1974
- [69] - J.A. KONIG, A. SAWCZUK, W. PAPROCKA-GRABCZYŃSKA, Obliczanie ram i belek na przystosowanie, Zesz.Probl. "Mostostal" Nr 5, 1974
- [70] - E.H. LEE, Elastic plastic deformation at finite strains, Journ.Appl.Mech., 36, 1969
- [71] - T. ŁODYGOWSKI, Stateczność ortogonalnej ramy w chwili osiągnięcia nośności granicznej, IV Konf. "Metody komputerowe w mechanice konstrukcji" Koszalin 1979 tom II, ss 297-303
- [72] - T. ŁODYGOWSKI, Pokrytyczne zachowanie się konstrukcji sztywno-plastycznej. Pierwsze przybliżenie, Konf. Uczelniana "Metody i środki modelowania cyfrowego w budownictwie", Poznań 1980, ss 59-64
- [73] - T. ŁODYGOWSKI, Analiza skończonych przemieszczeń płaskich, sztywno-plastycznych układów prętowych, III Konf.Nauk, WBL PP, Prace Inst.Tech. i Konstr.Bud., tom I, Poznań 1980, ss 95-100
- [74] - T. ŁODYGOWSKI, Sprężysto-plastyczna analiza belek i ram przy uwzględnieniu zmian geometrii, Arch.Inż.Łąd.(w druku)

- [75] - G. MAIER, Metody programowania matematycznego w analizie konstrukcji sprężysto-plastycznych, Arch.Inż.Ląd., 21, 1975
- [76] - G. MAIER, D.E. GRIERSON, M. BEST, Mathematical programming methods for deformation analysis at plastic collapse, Comp & Str., 7, 1977, pp 599-612
- [77] - G. MAIER, R. SRINIVASAN, M. SAVE, On limit design of frames using linear programming, Journ.Str.Mech., 4, 4, 1976, pp 349-378
- [78] - H. MATTHIES, G. STRANG, The solution of nonlinear finite element equations, Int.Journ.Num.Meth.Eng., 14, 1979, pp 1613-1626
- [79] - Z. MRÓZ, A. GAWĘCKI, Optimization in structural design, IUTAM Symposium, Springer-Verlag, Warszawa 1973
- [80] - S.I. OH, S. KOBAYASHI, Finite element analysis of plane-strain sheet bending, Int.Journ.Mech.Sci., 22, 1980, pp 583-594
- [81] - W. OLSZAK i inni, Teoria plastyczności, Warszawa 1965, Bibl.Mech.Stos.
- [82] - E.T. ONAT, On certain second-order effects in the limit design of frames, Journ.Aero.Sci., 22, 1955, pp 681-684
- [83] - E.T. ONAT, The influence of geometry changes on the load deformation behaviour of plastic solids, Plasticity E.H. Lee, P.S. Symonds eds., Perg.Press, Oxford 1961, pp 225-238
- [84] - W. PRAGER, General theory of limit design, Proc. 8th Int. Congr.Appl.Mech., Istambul 1956, 2, pp 65-72
- [85] - W. PRAGER, Introduction to mechanics of continua, Ginn Co., 1961
- [86] - M. SARAN, Analiza sprężysto-plastycznych ram w zakresie małych i dużych przemieszczeń, Prace IPPT 63-1979
- [87] - M. SARAN, A. BORKOWSKI, Nośność graniczna ram w ujęciu komputerowym, Arch.Inż.Ląd., 24, No 4, 1978, ss 645-657



- [88] - A. SAWCZUK, Nośność graniczna ram płaskich, Bibl.Inż. i Bud., 7, 1964, Warszawa
- [89] - A. SAWCZUK, Inżynierskie metody analizy konstrukcji sprężysto-plastycznych, Mech.Teor. i Stos., 20, 2, 1972, ss 309-327
- [90] - A. SAWCZUK, Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych, Prace Instytutu Inż.Ląd. Pol.Wrocł., 27/7/78
- [91] - H. STOLARSKI, Zasada ekstremalna dla oceny przemieszczeń dynamicznie obciążonej konstrukcji sztywno-plastycznej, Prace IPPT, 22-1979
- [92] - B. STORÅKERS, On uniqueness and stability of elastic-plastic deformation, Arch.Mech.Stos., 27, 5-6, 1975, pp 821-839
- [93] - H. TANAKA, Automatic analysis and design of plastic frames, Report I.I.S. Tokyo, 12, 3, 1962
- [94] - S.P. TIMOSHENKO, J.M. GERE, Teoria stateczności sprężystej, Arkady, Warszawa, 1963
- [95] - Z. WASZCZYŻYŃ, Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych, Kurs szkoleniowy nt. Stateczności konstrukcji, Janowiec 1980
- [96] - V.B. WATWOOD, Mechanism generation for limit analysis of frames, Journ.Str.Div. ASCE, St1, 1979, pp 1-16
- [97] - R.D. WOOD, O.C. ZIENKIEWICZ, Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells, Comp. Struc., 7, 1975, pp 725-735
- [98] - O.C. ZIENKIEWICZ, Metoda elementów skończonych, Arkady 1972, Warszawa

Dodatek D1 - Program EPLDF

Program EPLDF służy do analizowania pozasprężystej pracy płaskich układów belkowych i ramowych, z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych. Przyjęto w nim fizyczny model ciała sprężysto-idealnieplastycznego. Analiza przyrostowa kontynuowana jest do momentu utraty stateczności, więc do chwili gdy wartość wyznacznika globalnej macierzy sztywności konstrukcji dąży do zera.

MASTER EPLD

REAL L, N, NI

DIMENSION F1M(3, 3), FID(2, 2), SZERB(20, 30), SIGMA(20, 30), FIM(2, 2)

DIMENSION F1D(3, 3), ALFA(10), L(10), NN(10), T(33, 6), TT(6, 3), FG(6, 6)

DIMENSION FGPOM(6, 3), PSI(66, 6), FGPO(6, 6), ZET(21, 30), MPWE(10, 2)

DIMENSION FT(30, 30), DELP(30), DELPE(30), IWARB(30), WOPPRZ(30)

DIMENSION DELPEM(30), REAK(30), WYN(6), DEMX(3), EPSCAL(20, 30), QQ(6)

DIMENSION Q(330), WW(10, 2), Z(21), B(20), PE(30)

DIMENSION PECAL(30), PEMCAL(30), R(30)

```

C*****
C * PROCEDURA CZYTA NAJWAZNIEJSZE DANE BAZOWE , DRUKUJE NAGLOWEK *
C * PPROGRAMU I STERUJE PODPROGRAMAMI *
C*****
C * AUTOR T.LODYGOWSKI ZAKLAD WYTRZYMALOSCI MATERIALOW POZNAN *
C*****

```

GLOWNE INFORMACJE O PROGRAMIE EPLD PRZEZNACZONEGO DO GEOMETRYCZNE I FIZYCZNE NIELINIOWEJ ANALIZY PŁASKICH SPREZYSTO-PLASTYCZNYCH UKLADOW RAMOWYCH

PROGRAM SKŁADA SIĘ Z NASTĘPUJĄCYCH CZĘŚCI

0.- SEGMENT MASTER EPLD

I PODPROGRAMY

- 1.- CZYDAN CZYTANIE DANYCH
- 2.- PRYDAN PRZYGOTOWANIE DANYCH
- 3.- MMASZEL MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU
- 4.- MASZUK MACIERZ SZTYWNOŚCI UKŁADU
- 5.- ROZUKR ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ
- 6.- EFEKT
- 7.- WYNIK

NAZWY GŁÓWNYCH WIELKOŚCI STERUJĄCYCH I TABLIC STOSOWANE W PROGRAMIE

NAZWA	WYMIAR	O P I S
MWE		LICZBA WEZŁÓW UKŁADU
MELEM		LICZBA ELEMENTÓW UKŁADU
LWYJ		LICZBA WYJĄTKOWYCH KLAS PRĘTÓW
MPWE	(MELEM, 2)	MACIERZ POŁĄCZEN WEZŁÓW
WW	(MWE, 2)	WSPÓLRZĘDNE WEZŁÓW UKŁADU
IWARB	(3*MWE)	WEKTOR ISTNIEJĄCYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH
WOPPRZ	(3*MWE)	WEKTOR OPISANYCH PRZEMIESZCZEN
ZET	(21)	GRANICE WARSTW PRZEKROJU POPRZECZNEGO (KLASA ZASADNICZ)
SZERB	(20)	SZEROKOŚCI TYCH WARSTW
E		MODUL YOUNGA

C	NI		LICZBA POISSONA
C	SIGG		GRANICA PLASTYCZNOSCI GORNA
C	SIGD		DOLNA
C	MKROK		LICZBA KROKOW ANALIZY PRZYROST.
C	PE	(3*MWE)	KONCOWE WARTOSCI OBCIAZEN
C	BL		DOPUSZCZALNY BLAG ITERACJI
C	EPSCAL	(3*MELEM, 20)	CAKLOWITE ODKSZTALCENIA
C	SIGMA	(3*MELEM, 20)	CAKLOWITE NAPREZENIA
C	N	(MELEM)	SILA OSIOWA
C	L	(MELEM)	DLUGOSC ELEMENTU (AKTUALNA)
C	ALFA	(MELEM)	KAT NACHYLENIA CIECIWY
C	DELPE	(3*MWE)	PRZYROST SIL NA KROKU
C	PECAL	(3*MWE)	CAKLOWITA SILA PO DANYM KROKU
C	PEMCAL	(3*MWE)	CAKLOWITE PRZEMIESZCZENIA W UKLA-
C		(6*6)	DZIE GLOBALNYM
C	FG		MACIERZ SZTYWNOSCI ELEMENTU
C		(3*MWE, 3*MWE)	W UKLADZIE GLOBALNYM
C	FT		MACIERZ SZTYWNOSCI UKLADU
C	REAK	(3*MWE)	REAKCJE DLA OPISANYCH PRZEMIESZ.
C	QQ		WYPADKOWE SILY Z ELEMENTOW
C	R	(3*MWE)	OBCIAZENIA RESIDUALNE

C\*\*\*\*\*

PRZYGOTOWANIE DANYCH DO PROBLEMU (OPIS KART)

C\*\*\*\*\*

KARTY STERUJACE :

KARTA 1 (2I5) LICZBA WEZLOW I ELEMENTOW

KOL.01-05 MWE  
KOL.06-10 MELEM

KARTY WLASCIWYCH DANYCH :

KARTA 3 (2I5) POLACZENIA WEZLOW

KOL.01-05 MPWE (I,1) NUMER WEZLA LEWEGO  
KOL.06-10 MPWE (I,2) PRAWEGO

I=1, MELEM

KARTA 4 (2E12.6) WSPOLRZEDNE WEZLOW

KOL.01-12 WW (I,1) X-OWA  
KOL.13-24 WW (I,2) Y-OWA  
I=1, MWE

KARTA 5 (I2) WARUNKI BRZEGOWE

KOL.01-05 IWARE (I) 0 GDY ISTNIEJE SWOBODA PRZESUWU  
1 GDY NIE ISTNIEJE  
U: I=1, 3\*MWE

KARTA 6 (E12.66) OPISANE PRZEMIESZCZENIA

KOL.01-12 WOPRZ(I) 0 GDY NIOPIISANE  
WARTOSC GDY OPISANE  
U: I=1, 3\*MWE



Dodatek D2 - Program SPRP

Program SPRP służy do analizowania zachowania się płaskich sprężysto-plastycznych konstrukcji uwzględniając geometryczną nieliniowość i odcinkowo-liniowe prawo fizyczne. Możliwość programu są rozszerzeniem programu EPLDF. W programie SPRP przyjęto możliwość wystąpienia różnych właściwości fizycznych poszczególnych warstw elementu. Zakłada się model ciała sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem. Za pomocą tego programu analizuje się konstrukcje do chwili utraty stateczności (zwykle poza obszar nośności granicznej).

Zasady znakowania sił, numeracji węzłów i elementów są podobne do zasad zawartych w programie EPLDF.

Przygotowanie danych do zadania zawiera następujące informacje:

- 1) dane sterujące : liczba węzłów, elementów, przekrojów w elemencie (do całkowania), warstw w przekroju elementu, klas fizycznych, klas geometrycznych,  
(Informacja o klasach fizycznych opisuje własności fizyczne materiału warstwy, zaś informacja o klasach geometrycznych opisuje geometrię przekroju elementu),
- 2) macierz połączeń węzłów,
- 3) współrzędne węzłów układu,
- 4) wektor zdefiniowanych warunków brzegowych,
- 5) wektor opisanych przemieszczeń brzegowych,
- 6) tablicę granic warstw w przekroju elementu
- 7) tablicę szerokości warstw w przekroju elementu,
- 8) tablicę klas fizycznych  
(dane te opisują granice plastyczności i towarzyszące im odkształcenia, moduł Younga, parametr wzmocnienia i liczbę Poissona),
- 9) liczbę kroków przyrostowych i błąd iteracji,
- 10) końcowe wartości obciążeń skupionych w węzłach,
- 11) tablicę numerów klas geometrycznych elementów,
- 12) tablicę numerów klas fizycznych warstw.

## Spis treści

1. Uwagi wstępne . . . . .	3
1.1. Wprowadzenie i cel pracy . . . . .	3
1.2. Zakres pracy . . . . .	5
1.3. Przegląd literatury problemu . . . . .	7
2. Definicje pojęć podstawowych . . . . .	12
2.1. Sprężone miary naprężeń i odkształceń . . . . .	12
2.2. Modele materiałów . . . . .	17
2.3. Warunek plastyczności . . . . .	18
2.4. Postulat Druckera i definicje stateczności materiału . . . . .	20
2.5. Stateczność konstrukcji sztywno-plastycznej . . . . .	26
2.6. Uogólnienie twierdzeń nośności granicznej . . . . .	28
3. Stateczność sztywno-plastycznych ram płaskich w chwili osiągnięcia nośności granicznej . . . . .	30
3.1. Naprężenia i odkształcenia uogólnione . . . . .	30
3.2. Warunek plastyczności i prawo płynięcia . . . . .	31
3.3. Nośność graniczna ram płaskich . . . . .	34
3.4. Warunki stateczności ram w wielkościach uogólnionych . . . . .	34
3.4.1. Stateczność belki . . . . .	34
3.4.2. Stateczność ram . . . . .	38
3.4.3. Przykłady ram portalowych . . . . .	39
3.4.4. Stateczność ram o siatce ortogonalnej . . . . .	45
4. Pozagraniczne zachowanie się belek i ram sztywno-plastycznych . . . . .	52
4.1. Efekt obciążenie-przemieszczenie P-W . . . . .	52
4.1.1. Ramy portalowe . . . . .	53
4.1.2. Belka wspornikowa pod obciążeniem niejedno-parametrowym . . . . .	57
4.2. Wpływ warunku plastyczności na pozagraniczne zachowanie się belki wspornikowej . . . . .	61
4.3. Pozagraniczna analiza belek utwierdzonych z możliwością przemieszczania się podpór . . . . .	68

4.3.1.	Belka utwierdzona z podporami nieprzesuwnymi . . . . .	71
4.3.2.	Belki utwierdzone z podporami przesuwными . . . . .	73
4.3.2.1.	Sprężyste poddanie się podpory . . . . .	76
4.3.2.2.	Ruch podpory przy stałej sile osiowej. . . . .	76
4.3.2.3.	Ruch podpory przy sile tarcia (liniowo zmiennej sile osiowej). . . . .	78
4.3.2.4.	Praca rygla ramy portalowej. . . . .	81
4.4.	Zmiana mechanizmu zniszczenia przy dużych przemieszczeniach . . . . .	84
5.	Sprężysto-plastyczna analiza belek i ram przy uwzględnieniu zmian geometrii (mes). . . . .	98
5.1.	Koncepcja sprężysto-plastycznej analizy przyrostowej	
5.1.1.	Konfiguracja odniesienia. . . . .	99
5.1.2.	Założenia dotyczące elementu . . . . .	99
5.1.3.	Macierz sztywności elementu w układzie lokalnym . . . . .	101
5.1.4.	Macierz sztywności elementu w układzie globalnym . . . . .	106
5.1.5.	Prawo fizyczne. . . . .	109
5.1.6.	Iteracyjny sposób poszukiwania konfiguracji równowagi . . . . .	112
5.2.	Przykłady numeryczne . . . . .	115
5.2.1.	Belki obustronnie podparte . . . . .	115
5.2.2.	Belki wspornikowe . . . . .	120
5.2.3.	Ramy płaskie . . . . .	120
6.	Uwagi końcowe i wnioski . . . . .	126
6.1.	Porównanie . . . . .	127
6.1.1.	Belki wspornikowe . . . . .	127
6.1.2.	Rama portalowa i belka utwierdzona . . . . .	130
6.2.	Wnioski . . . . .	133
	Dodatek D1 Program EPLDF . . . . .	146
	Dodatek D2 Program SPRP . . . . .	149
7.	Bibliografia . . . . .	138