

Praca doktorska

Marek Kujath

ROZWIĘCIE METODY  
FUNKCJI MODULUJĄCEJ  
DO IDENTYFIKACJI  
SILNIE NIELINIOWYCH  
UKŁADÓW MECHANICZNYCH

2 / 1980

P. 269



WARSZAWA 1980

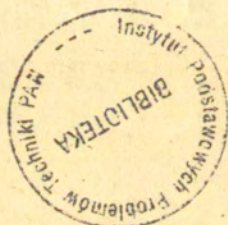
Rezprawa doktorska

Promotor: doc.dr hab.inż. Jerzy Wicher

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 lutego 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 2/1980

57141



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd.5,8. Ark.druk.8,75 .

Oddano do drukarni w lutym 1980 r.

Nr zamówienia 90/80

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

Marek Kujath

Zakład Układów Mechanicznych IPPT PAN

ROZWINIĘCIE METODY FUNKCJI  
MODULUJĄCEJ DO IDENTYFIKACJI SILNIE NIELINIOWYCH  
UKŁADÓW MECHANICZNYCH

1. Wstęp

1.1. Cel pracy

Tematem pracy jest rozwinięcie metody funkcji modulującej do identyfikacji własności dynamicznych silnie nieliniowych układów mechanicznych. Przez układ silnie nieliniowy rozumiemy układ, przy modelowaniu którego, przyjęcie modelu liniowego prowadzi do zbyt dużych uproszczeń i pominięcia wielu istotnych zjawisk, a tym samym prowadzi, przy zastosowaniu w identyfikacji, do zbyt dużych błędów. Do tego typu układów należą układy zawierające nieliniowości typu "luz"; "suche tarcie". Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że funkcja opisująca nieliniowość typu "luz" jest nieliniowa ze względu na parametr reprezentujący wartość "luzu" /rozd.4:2/.

Celem rozprawy jest opracowanie efektywnej metody identyfikacji, która pozwoliłaby na wyznaczenie wartości parametrów modeli matematycznych, opisujących silnie nieliniowe układy mechaniczne. Pod pojęciem parametru modelu matematycznego będą rozumiane współczynniki równań różniczkowych, opisujących ruch układu mechanicznego.

Opracowany sposób postępowania oparty jest na mało znanej metodzie funkcji modulującej [10], która była dotychczas stosowana do identyfikacji układów, opisanych równania-

mi różniczkowymi liniowymi ze względu na współczynniki. Efektywne rozwiązania uzyskano dla układu o jednym stopniu swobody w przypadku, gdy sygnał wejściowy /wymuszenie/ był zdeterminowany.

W pracy przedstawiono metodę identyfikacji takich układów, których ruch może być opisany nieliniowymi równaniami różniczkowymi, w tym również nieliniowymi ze względu na współczynniki. Przykładem równania różniczkowego nieliniowego ze względu na współczynniki może być równanie:

$$\ddot{X} + (X - Q)^3 = U$$

gdzie:  $U = u(t)$  - sygnał wejściowy /wymuszenie/,  
 $X = x(t)$  - sygnał wyjściowy /odpowiedź/,  
 $Q$  - stały współczynnik.

Do grupy takich układów należy zaliczyć wymienione wyżej układy, zawierające nieliniowości typu "luz".

Przy opracowaniu metody przyjęto następujące założenia, rozszerzające dotychczasowe możliwości funkcji modulującej:

1. równanie różniczkowe będą nieliniowe również ze względu na współczynniki,
2. możliwe będzie identyfikacja układów wielomasowych,
3. sygnały wejściowe będą mogły być funkcjami losowymi, w ogólnym przypadku niestacjonarnymi.

Większość znanych metod identyfikacji opracowano dla układów liniowych lub słabo nieliniowych, gdzie wykorzystuje się ideę linearyzacji. Brak jest efektywnych metod, które nadają się do identyfikacji układów silnie nieliniowych, gdzie linearyzacja prowadzi do zbyt dużych uproszczeń. Należy tu wymienić między innymi układy mechaniczne z "luzami" i "tarcie suche". Dlatego celowym jest poszukiwanie metod, które pozwoliłyby na identyfikację takich układów. Przykładem może być metoda przedstawiona w niniejszej pracy. Ponadto warto zwrócić uwagę na fakt, że metody identyfikacji dotyczą realnych układów, które można opisać przy pomocy

modeli bardziej złożonych niż model jednomasowy oraz, że przy realizacji procesu identyfikacji korzysta się z pomiarów wielkości, które bardzo często mają charakter funkcji losowych. Dlatego przyjęcie założeń wymienionych wyżej w punktach 2 i 3 wydaje się również uzasadnione.

## 1.2. Nieliniowości w systemach mechanicznych

Znajomość procesów dynamicznych, zachodzących w systemach mechanicznych, umożliwia postęp w budowie nowoczesnych urządzeń, odznaczających się dużą wydajnością, dokładnością, a także znacznym stopniem niezawodności i automatyzacji. Dotyczy to wszystkich systemów mechanicznych. W celu bliższego omówienia tego zagadnienia, posłużymy się pewnym konkretnym systemem, a mianowicie systemem wytwórczym, jakim jest obrabiarka. [12,13]

Dokładne określenie dynamicznego zachowania się całej obrabiarki bądź jej zespołów już na etapie projektowania przedstawia obecnie jeszcze poważny problem. Wynika to z małej dokładności metod, stosowanych do wyznaczenia sztywności i dysypację energii w układzie. Buduje się więc prototyp i podaje się go badaniom. Jeśli wyniki badań doświadczalnych prototypu urządzenia są mało zadowalające, to konieczna jest modyfikacja jego własności dynamicznych. Aby taka modyfikacja prowadziła do pożądaných wyników, należy, w przypadku wykorzystania modelu matematycznego, dążyć do tego, by model ten możliwie dokładnie opisywał właściwości prototypu. Uzyskanie poprawnego modelu jest możliwe poprzez przeprowadzenie identyfikacji, w której wykorzystuje się wyniki pomiarów prototypu.

Podjęcie automatycznego projektowania przy użyciu ETO związane jest również z koniecznością umiejętności budowy adekwatnych modeli matematycznych. Modele takie mogą powstać w wyniku zastosowania właściwych metod identyfikacji. Ponadto, z chwilą pojawienia się obrabiarek automatycznych, sterowanych programowo i numerycznie, wynika konieczność dostatecznie pełnej znajomości zagadnień dynamiki

tych obrabiarek w celu opracowania takich programów i takiej konstrukcji samych obrabiarek, które zapewniłyby optymalną ich pracę.

Podstawowym problemem, który występuje w badaniu własności dynamicznych obrabiarek, jest adekwatność modelu matematycznego do układu rzeczywistego. W pracach wcześniejszych, dotyczących tego tematu, posługiwano się głównie prostymi modelami liniowymi.

Rzeczywiste charakterystyki sztywności oraz tłumienia w obrabiarce są nieliniowe. Wynika to m.in. ze zmiennej sztywności łożysk i kół zębatych, sztywności połączeń stykowych, luzów, oraz z występujących w napędach z przekładniami zębatymi związków geometryczno siłowych między kątowymi i postępowymi przemieszczeniami rozpatrywanych połączeń. Rozpraszanie energii w strukturach obrabiarkowych ma również charakter nieliniowy.

Omówmy bliżej zjawisko luzów obwodowych, występujących w napędzie głównym obrabiarki. W wielu przypadkach amplitudy sił i momentów w napędzie są mniejsze od stałego napięcia napędu, wywołanego średnią wartością siły skrawania i momentu silnika napędzającego, w związku z czym nie zachodzi "odkrywanie luzów". Kiedy amplituda siły i momentu siły jest większa od stałego napięcia wówczas luzy są odkrywane. Takie warunki pracy spotyka się w czasie rozruchu i hamowania napędu pracującego w ruchu jałowym oraz w przypadku bardzo małego stałego napięcia w czasie pracy napędu. W napędzie głównym luzy występują najczęściej w:

- połączeniach ruchomych - łożyska, sprzęgła,
- połączeniach stałych - połączenie wielowypustowe, sprzęgła zębate,
- przekładniach zębatych,
- przekładniach śrubowych.

Wartości luzów zależne są od błędów wykonania i montażu elementów par kinematycznych i połączeń oraz od charakteru ich współpracy. W skutek zużywania się elementów par kinematycznych i odkształceń plastycznych elementów połączeń stałych wartości luzów powiększają się.

Rozpraszanie energii w strukturach obrabiarkowych ma również charakter nieliniowy. W celu zwiększenia stabilności pracy obrabiarki dąży się do zwiększenia tłumienia. Najefektywniejszy wzrost tłumienia osiąga się przez zastosowanie specjalnych tłumików. Do tłumienia drgań skrętnych i poprzecznych stosuje się tłumiki cierne. Zjawisko tarcia z natury swej silnie nieliniowe, występuje we wszystkich zespołach przesuwnych i nie można go pominąć.

Innym przykładem urządzenia mechanicznego, w którym występują zamierzone silne nieliniowości jest pojazd. Konstruktorzy pojazdów stosują do zawiesznień, ze względu na komfort i bezpieczeństwo jazdy, amortyzatory o charakterystykach silnie nieliniowych i niesymetrycznych. Wynika to między innymi stąd, że amortyzator ma pracować inaczej przy przejeździe koła przez występ, a inaczej przy przejeździe przez wgłębienie.

Wobec powyższego widać, że uwzględnienie nieliniowości i to bardzo silnych nieliniowości ma kapitalne znaczenie w badaniu dynamiki układów mechanicznych. Brakuje obecnie efektywnych metod identyfikacji silnie nieliniowych układów, stąd dokonuje się dużych uproszczeń i traktuje się omawiane układy jako liniowe. W ranej pracy została zaproponowana efektywna metoda identyfikacji silnie nieliniowych układów z uwzględnieniem nieliniowości. Przedstawiony wyżej opis udawania, że w przypadku układów mechanicznych często występują nieliniowości typu "luz" i "tarcie suche", a więc nie dające się linearyzować. Dlatego między innymi autor wykaże przydatność nowej metody do identyfikacji układów z tego typu nieliniowościami.

### 1.3. Zawartość pracy

Praca składa się z 10 rozdziałów i 5 dodatków. W rozdz. 2 został przeprowadzony przegląd prac dotyczących tematu. Najpierw przeprowadzono pewną klasyfikację metod identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych, a następnie zgodnie z nią przeprowadzono analizę dotychczasowych prac. Następnie zaprezentowano, w oparciu o literaturę, metodę funkcji modulującej

oraz jej miejsce pośród innych metod identyfikacji.

W rozdz. 3 zostało zaproponowane pewne przekształcenie funkcji, zarówno zdeterminowanej jak i losowej, wywodzące się z idei metody funkcji modulującej i nazwane przekształceniem modulującym. Przekształcenie to jest podstawą opracowanej metody.

W rozdziale 4 zostały zdefiniowane podstawowe pojęcia jak m.in. model, proces identyfikacji, wykorzystywane w niniejszej pracy. Wprowadzono i omówiono tu też pojęcie modelu odwrotnego sygnalizowane w literaturze. Następnie ten mało znany i prawie wcale nie stosowany model został użyty do podstawowego, dla opracowanej metody, schematu procesu identyfikacji. Metoda funkcji modulującej, jak wynika z literatury, była dotychczas stosowana tylko do identyfikacji układów pobudzanych sygnałem zdeterminowanym. W omawianym rozdziale metoda ta, poprzez zastosowanie przekształcenia modulacyjnego, zostanie zastosowana również do przypadku, gdy sygnałem wejściowym układu jest sygnał losowy. W opisanych w literaturze metodach identyfikacji stosuje się przede wszystkim stacjonarne funkcje losowe. Prezentowana w tej pracy metoda nie wymaga takiego założenia. Dotychczas stosowane metody przekształcania równań losowych w zdeterminowane wymagają w przypadku układów nieliniowych uprzedniej linearyzacji tych równań. W omawianym rozdziale zostanie podana metoda przekształcania równań losowych w zdeterminowane bez uprzedniej linearyzacji.

W rozdziale 5 podana jest metoda realizacji procesu identyfikacji poprzez minimalizację funkcji jakości. Następnie są omówione i porównane metody minimalizacji funkcji jakości w przypadku zastosowania przekształcenia modulacyjnego.

W rozdziale 7 jest zaproponowany sposób zastosowania metody funkcji modulującej, poprzez przekształcenie modulacyjne do identyfikacji wielomasowych układów mechanicznych.

W rozdziale 8 omówione są typy nieliniowości, jakie mogą być brane pod uwagę. Prezentacja typu nieliniowości jest poprzedzona wprowadzeniem. Przy czym cały rozdział podzielony jest na część dotyczącą przypadku zdeterminowanego i część



dotyczącą przypadku losowego.

Praca ta ma charakter teoretyczny z aspektem praktycznym. W związku z tym, po opracowaniu metody identyfikacji, został zbudowany dla wybranego silnie nieliniowego układu mechanicznego konkretny program identyfikacji, opierający się na tej metodzie /rozd. 9/; sprawdzenie tego programu identyfikacji zostało przeprowadzone za pomocą maszyny matematycznej Odra 1204. W związku z ograniczeniami pomiarowymi tj. brakiem aparatury koniecznej do przeprowadzenia pomiarów, rejestracji i przetworzenia danych, został przeprowadzony tylko eksperyment numeryczny. Eksperyment ten polegał na symulacji procesów dynamicznych, zachodzących w danym układzie mechanicznym. Dokonano tego na maszynie cyfrowej Odra 1204 za pomocą języka SYMUD 1. Następnie na podstawie uzyskanych tą drogą danych został sprawdzony program identyfikacji.

Wnioski oraz uwagi końcowe dotyczące całej pracy zawarte są w rozdziale 10.

Ponieważ pojęcie dystrybucji oraz ich własności nie są powszechnie znane, a są wykorzystywane w niniejszej pracy, więc zagadnienie to jest krótko omówione w dodatku A. Podobnie krótko zostały zebrane w dodatku B niektóre ważne dla pracy własności i definicje funkcji losowych. Natomiast w dodatku C doprowadzono równania, reprezentujące ogólnie typ nieliniowego modelu, branego w niniejszej pracy pod uwagę, do postaci obliczeniowej. Dodatek D zawiera dane odnośnie zastosowanej w pracy symulacji, a dodatek E dane odnośnie numerycznego programu obliczeniowego oraz treść tego programu.

## 2. Przegląd literatury

### 2.1. Wstęp

W rozdziale tym zostanie najpierw dokonana pewna klasyfikacja metod identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych, a następnie zgodnie z tą klasyfikacją zostaną omówione prace dotyczące tego zagadnienia /rozd.2.2/. W dalszej kolejności, w oparciu o literaturę, zostanie przedstawiona metoda funkcji modulującej oraz jej miejsce pośród innych metod identyfikacji /rozd.2.3 /.

### 2.2. Przegląd metod identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych

Stosowane do identyfikacji silnie nieliniowych układów mechanicznych metody, można podzielić na 3 zasadnicze grupy:

1. metody korzystające z różnego rodzaju linearyzacji,
2. metody korzystające z różnego rodzaju rozwinięć w szeregi,
3. inne metody.

Metodom identyfikacji poświęcono wiele opracowań monograficznych. Można tu wymienić prace: P. Eykhoffa [4], D. Graupe [6]. Większość opisanych tam metod dotyczy układów liniowych. Metody te można stosować do układów nieliniowych /zazwyczaj tzw. "słabo nieliniowych"/, korzystając z idei linearyzacji równań różniczkowych, polegającej na zastąpieniu nieliniowego równania różniczkowego, opisującego układ, przybliżonym liniowym równaniem różniczkowym, odzwierciedlającym wystarczająco dobrze istotną zależność pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym, w zbiorze praktycznie możliwych wartości tych sygnałów.

Przykładowo równanie nieliniowe postaci:

$$a_1 \ddot{x} + \Psi(x, a_2) = u$$

gdzie:  $\Psi$  - nieliniowa funkcja;  $u = u(t)$ ,  $x = x(t)$  - sygnały: wejściowy, wyjściowy;  $a_1, a_2$  - stałe współczynniki, można zlinearyzować, biorąc np. pierwszy wyraz rozwinięcia w szereg potęgowy względem  $x$ , do postaci:

$$a_1 \ddot{x} + bx = u \quad \text{gdzie: } b \text{ - stały współczynnik.}$$

Inną metodą linearyzacji, wykorzystywaną w identyfikacji układów mechanicznych, jest linearyzacja stochastyczna [21, 28]. Metoda ta polega na zastąpieniu nieliniowego równania różniczkowego, opisującego układ, takim równaniem liniowym, które w sensie statystycznym równoważne jest danemu równaniu nieliniowemu. Zagadnienie statystycznej równoważności można rozwiązać różnymi sposobami. I. E. Kozakow [21] zaproponował, żeby dwa równania różniczkowe uważać za stochastyczne równoważne, gdy będą miały równe momenty statystyczne pierwszego i drugiego rzędu.

Przykładowo niech losowe różniczkowe równanie nieliniowe ma postać:

$$/2:1/ \quad a_1 \ddot{X} + \Psi(X, a_2) = U$$

gdzie:  $\ddot{X}, X, U$  - stacjonarne funkcje losowe

niech:

$$\Psi(X, a_2) = Y$$

Funkcję losową  $Y$  zastąpimy funkcją losową  $Z$  taką że:

$$Z = k_0 m_X + k_1 (X - m_X)$$

gdzie:  $m_X$  - moment pierwszego rzędu funkcji losowej  $X$  tzw. wartość średnia,

$k_0, k_1$  - współczynniki linearyzacji.

W metodzie tej zakładamy, że momenty pierwszego i drugiego rzędu funkcji losowych  $Y$  i  $Z$  są równe, więc:

$$/2.2a/ \quad m_Y = m_Z \quad i \quad W_Z = W_Y$$

gdzie:  $W_Z$  - moment drugiego rzędu funkcji losowej  $Z$   
tzw. wariancja.

Wartość oczekiwana i wariancja funkcji losowej  $Z$  wyrażają się wzorami:

$$/2.2b/ \quad m_Z = k_0 m_X \quad , \quad W_Z = k_1^2 W_X$$

Porównując /2.2a/ i /2.2b/, otrzymamy:

$$k_0 = \frac{m_Y}{m_X} \quad k_1 = \pm \sqrt{\frac{W_Y}{W_X}}$$

Zatem równanie /2.1/ poddane linearyzacji stochastycznej przybierze postać:

$$a_1 \ddot{X} + k_0 m_X + k_1 (X - m_X) = U$$

Mając daną postać funkcji nieliniowej  $\Psi$  i funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa funkcji losowej, można obliczyć występujące we wzorach na współczynniki linearyzacji  $k_0$  i  $k_1$  wartość średnią i wariancję funkcji losowej  $Y$  [21]. A mając jeszcze zmierzone wartość średnią i wariancję funkcji losowej  $X$  można obliczyć wartość współczynników linearyzacji. W pracy [26] J. Wicher podaje doświadczalną metodę wyznaczania współczynników linearyzacji statystycznej/nie wymagającą znajomości nieliniowości a priori/na podstawie pomiarów realizacji funkcji losowych na wejściu i wyjściu elementu nieliniowego. Zakłada się przy tym, że sygnał wejściowy układu jest stacjonarną funkcją losową. Współczynniki linearyzacji statystycznej wyznacza się tu bezpośrednio na podstawie przebiegów realizacji funkcji losowych, bez konieczności uprzedniego wyznaczenia

charakterystyk statystycznych.

Metoda identyfikacji, opierająca się na linearyzacji statystycznej, daje najlepsze rezultaty w przypadku słabych nielineowości, ale może też być stosowana w przypadku silnych nielineowości jak na rys.4.3 z tym oczywiście, że błąd linearyzacji będzie w tym wypadku dużo większy [9].

Inną metodą linearyzacji, zastosowaną do identyfikacji, jest linearyzacja harmoniczna. W pracy [19] S. Piesiak podaje metodę identyfikacji, opartą na tej właśnie linearyzacji przy zastosowaniu bilansu harmonicznego. Obliczeń dokonuje się na podstawie pomierzonej charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej podstawowej składowej harmonicznej sygnału wyjściowego.

Przykładowo niech równanie różniczkowe opisujące ruch układu ma postać:

$$/2.3/ \quad \ddot{x} + \Psi(x, \underline{k}) = F \cos \omega t$$

gdzie:  $\underline{k}$  - zbiór parametrów

zakłada się, że ustalony sygnał wyjściowy ma postać:

$$x = a \cos(\omega t - \Phi)$$

po wstawieniu tej zależności do równania /2.3/i dokonaniu bilansu harmonicznego dla podstawowej składowej harmonicznej, otrzymamy układ równań, z którego można wyznaczyć amplitudę tej składowej:

$$a = a(\underline{k})$$

Zależność  $a = a(\omega)$  otrzymamy z pomiarów, więc minimalizując funkcję:

$$J(\underline{k}) = \int_{\omega} (a(\omega) - a(\omega, \underline{k}))^2 d\omega$$

znajdziemy parametry  $\underline{k}$ .

Metody identyfikacji, opierające się na idei linearyzacji, dla układów silnie nieliniowych, zawierających nieliniowość typu "luz, suche tarcie", są zbyt mało dokładne i mogą służyć raczej w tym przypadku do wstępnej analizy [4].

Zajmiemy się teraz grupą metod identyfikacji, korzystających z rozwinięć w szeregi. Model układu mechanicznego zawierający człony typu "luz", jak już wspomnieliśmy, jest nieliniowy ze względu na parametry /rozd. 4.2/. Wiele metod identyfikacji wymaga jedynie liniowości modelu ze względu na parametry [4]. W celu uzyskania modelu o takiej zależności od parametrów, z modelu, który jest nieliniowy ze względu na parametry, można zastosować rozwinięcie w szereg potęgowy.

Przykładowo, niech równanie opisujące układ ma postać:

$$/2.4/ \quad \ddot{x} + \Psi(x, \underline{k}) = U$$

gdzie:  $\underline{k}$  - zbiór parametrów

Rozwijamy funkcję  $\Psi$  w szereg potęgowy względem  $x$

$$/2.5/ \quad \Psi(x, k) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

otrzymamy wtedy:

$$\ddot{x} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = U$$

Równanie to jest już liniowe ze względu na parametry /tu współczynniki rozwinięcia w szereg/. Stosując jedną z metod identyfikacji układów opisanych modelami liniowymi ze względu na parametry, można znaleźć współczynniki szeregu /2.5/.

Podamy teraz metody identyfikacji, które w specyficzny

sposób wykorzystują rozwinięcia w szeregi. W pracy [20] S. Piesiak podaje metodę identyfikacji, wykorzystującą rozwinięcie sygnału wyjściowego układu w szereg nadharmonicznych względem sygnału wejściowego układu, którym jest sygnał harmoniczny. Identyfikację przeprowadza się metodą bilansu harmonicznych, a obliczeń dokonuje się na podstawie pomierzonych charakterystyk amplitudowo częstotliwościowych sygnału wyjściowego dla poszczególnych składowych harmonicznych.

Przykładowo niech równanie różniczkowe opisujące układ ma postać:

$$/2.6/ \quad \ddot{x} + \Psi(x, \underline{k}) = F \cos(\omega t)$$

gdzie:  $\underline{k}$  - zbiór parametrów

Zakłada się, że ustalony sygnał wyjściowy układu ma postać:

$$/2.7/ \quad x = \sum_{i=1}^p X_i$$

gdzie:  $X_i = a_i \cos(i\omega t - \phi_i)$

Po wstawieniu tej zależności do /2.6/ i dokonaniu bilansu harmonicznych, występujących po obu stronach otrzymanego równania, otrzymamy układ równań, z którego można wyznaczyć amplitudy poszczególnych harmonicznych  $a_i$ :

$$a_i = a_i(\underline{k})$$

zależność  $a_i = a_i(\omega)$  otrzymamy z pomiarów, więc minimalizując funkcję:

$$J(\underline{k}) = \int_{\omega} \sum_{i=1}^p (a_i(\omega) - a_i(\omega, \underline{k}))^2 d\omega$$

znajdziemy szukane parametry  $\underline{k}$ .

I. Dobias w pracy [3] zaproponował metodę identyfikacji, wykorzystującą rozwinięcie sygnału wyjściowego z elementu

nieliniowego układu mechanicznego w szereg potęgowy względem sygnału wejściowego tego elementu, zastosował przy tym ideę linearyzacji statystycznej. W metodzie tej jako sygnał wejściowy układu stosuje się stacjonarną funkcję losową o rozkładzie normalnym, a podstawą obliczeń są pomiary wartości średniej i wariancji sygnału wyjściowego układu oraz ich pochodnych w funkcji wartości średniej i wariancji sygnału wejściowego.

Przykładowo niech losowe równanie różniczkowe ma postać:

$$/2.8/ \quad a\ddot{X} + \Psi(X) = U$$

gdzie:  $\Psi(X)$  aproksymuje się szeregiem potęgowym:

$$/2.9/ \quad \Psi(X) = C_1 X + C_2 X^2 + \dots$$

a całe równanie /2.8/ aproksymuje się równaniem:

$$/2.10/ \quad a\ddot{X} + m_x k_0(m_x, W_{xx}) \Big|_{W_{xx}=\text{const}} + (X-m_x) k_1(m_x, W_{xx}) \Big|_{m_x=\text{const}} = U$$

gdzie współczynniki linearyzacji  $k_0$  i  $k_1$  aproksymuje się wielomianowymi równaniami regresji:

$$/2.11/ \quad \begin{aligned} k_0 \Big|_{W_{xx}=\text{const}} &= k_{00} + k_{01} m_x + k_{02} m_x^2 + \dots \\ k_1 \Big|_{m_x=\text{const}} &= k_{10} + k_{11} W_{xx} + k_{12} W_{xx}^2 + \dots \end{aligned}$$

Zależności:  $k_0 \Big|_{W_{xx}=\text{const}}$  oraz  $k_1 \Big|_{m_x=\text{const}}$

wyznacza się na podstawie pomiarów eksperymentalnych :

$W_{xx}$ ,  $W_{\dot{x}\dot{x}}$ ,  $W_{\ddot{x}\ddot{x}}$  w funkcji  $W_{uu}$  dla  $m_x = \text{const}$  oraz  $m_x$ ,  $m_{\dot{x}}$ ,  $m_{\ddot{x}}$  w funkcji  $m_u$  dla  $W_{xx} = \text{const}$ .

Następnie oblicza się współczynniki  $k_{0i}$  i  $k_{1i}$  równań regresji 2.11/. Dalsze, dość skomplikowane w przypadku ogólnym, postępowanie polega na wyznaczeniu współczynników  $C_k$  szeregu /2.9/ w oparciu o udowodnioną jednoznaczność zależności między tymi współczynnikami a współczynnikami równań regresji /2.11/. Znając współczynniki  $C_k$  szeregu /2.9/



można przy pomocy maszyny cyfrowej wyznaczyć charakterystykę nieliniowego członu  $\Psi(X)$ .

W metodach identyfikacji, w których stosuje się rozwinięcia w szeregi, korzysta się ze skończonej, możliwie małej ze względów praktycznych liczby wyrazów szeregu. Im mniej tych wyrazów weźmie się pod uwagę, tym mniejszą uzyska się dokładność. Nie mniej metody te są o wiele dokładniejsze od metod identyfikacji wykorzystujących linearyzację.

Do metod identyfikacji, nie korzystających z linearyzacji ani z rozwinięć w szeregi i opartych na modelu nieliniowym ze względu na parametry, należy cała grupa metod zwanych iteracyjnymi. Można tu wymienić takie metody jak: metody szukania losowego opisane w pracach D. Graupe [6] i S. Masri [11], metoda quasilinearyzacji prezentowana w pracy P. Eykhoffa [4], czy metoda gradientowa prezentowana w pracach P. Eykhoffa [4] i J. Wichra [28]. Nazwy tych metod pochodzą w zasadzie od nazw zastosowanych algorytmów szukania minimum funkcji jakości, będącej miarą adekwatności modelu do układu /rozd. 4.2, 5.1/. Dokładniej, funkcja ta jest pewną miarą różnicy sygnału wyjściowego układu i sygnału wyjściowego modelu /rys. 4.5a/. Do jej budowy potrzebna jest więc funkcja, będąca rozwiązaniem równania różniczkowego, opisującego badany układ, gdyż funkcja ta reprezentuje sygnał wyjściowy modelu.

Opiszemy teraz w skrócie istotę metod iteracyjnych. Traktując parametry modelu badanego układu jako zmienne, można z nich zbudować przestrzeń. Każdy punkt takiej przestrzeni odpowiada jakiemuś zbiorowi wartości parametrów, czyli jakiemuś modelowi. Na podstawie wiedzy apriorycznej można określić obszar w tej przestrzeni, w którym prawdopodobnie mogą się znajdować szukane wartości parametrów. Następnie w obszarze tym wybiera się punkt, który jest punktem startowym procedury szukania minimum funkcji jakości. Ustalenie następnych punktów odbywa się różnie, w zależności od procedury. Wspólne jest to tylko, że szuka się takich punktów, które minimalizują funkcję jakości. Przykładowo, w metodzie szukania losowego następny punkt w przestrzeni

parametrów wybiera się losowo z otoczenia poprzedniego punktu, porównuje się wartości funkcji jakości dla obu punktów i do następnego kroku bierze się jako punkt początkowy ten punkt, dla którego funkcja jakości jest mniejsza. Metoda gradientowa jest nieco bardziej skomplikowana, gdyż następny punkt, w przestrzeni parametrów oblicza się według wzoru:

$$a_{i+1} = a_i + \Gamma_i \nabla_a J(a_i)$$

gdzie:  $a_i$  - parametr modelu po i-tym kroku,  
 $\Gamma_i$  - współczynnik regulujący "szybkość zbieżności",  
 $J(a_i)$  - wartość funkcji jakości w punkcie  $a_i$ ,  
 $\nabla_a$  - operator wyznaczania gradientu:

$$\nabla_a J(a) = \left[ \frac{\partial J(a)}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial J(a)}{\partial a_n} \right]$$

Jak widać, w metodach iteracyjnych przy wyborze następnego punktu w przestrzeni parametrów, należy zawsze zbudować funkcję jakości. Jak już wcześniej powiedzieliśmy, budowa funkcji jakości związana jest z rozwiązaniem równania różniczkowego opisującego badany układ. Zatem w każdym kroku procedury należy rozwiązać równanie różniczkowe. Na maszynach cyfrowych dokonuje się tego za pomocą specjalnych iteracyjnych algorytmów.

Inną grupę metod stanowią metody opierające się na równaniach wrażliwości. W pracy [23] E.S. Stanczew i N.D. Minczew stosują taką metodę do identyfikacji silnie nieliniowego układu mechanicznego. Nie wnikając w szczegóły, metoda ta polega na tym, że przy danym sygnale wejściowym układu oraz danym układzie mierzy się sygnał wyjściowy, który zwie się sygnałem bazowym. Następnie przy tym samym sygnale wejściowym oraz przy tym samym układzie, lecz o zmienionym jednym jego parametrze /np. masie/, mierzy się zmieniony sygnał wyjściowy. W dalszej kolej-

ności należy obliczyć pierwszą i drugą pochodną sygnału bazowego oraz sygnału zmienionego. Wartości tych dwu sygnałów oraz ich 2 pochodnych, dla jednej chwili czasowej, wstawia się do równania powstałego z równania wrażliwości. Powstałe w ten sposób równanie jest równaniem algebraicznym względem szukanych parametrów. Budując takie równanie, dla tylu chwil czasowych ile jest niewiadomych, otrzymamy układ równań, którego rozwiązaniem są szukane wartości parametrów. Równanie wrażliwości buduje się, różniczkując równanie różniczkowe, opisujące badany układ, względem tego parametru, który ulega zmianie w drugim z powyższych pomiarów, przy czym wszystkie zmienne zależne tego równania traktowane są jako funkcje parametrów. W metodzie tej nie mierzy się sygnału wejściowego układu, lecz dwa różne sygnały wyjściowe - bazowy i zmieniony. Należy przy tym zapewnić, a jest to dość trudne, by pomiar tych sygnałów odbywał się dokładnie w tych samych chwilach czasowych względem sygnału wejściowego. Dodatkową wadą tej metody jest fakt, że należy obliczać wartości pierwszej i drugiej pochodnej zmierzonych sygnałów.

Literatura, dotycząca identyfikacji, w ogólności jest obszerna. Prac poświęconych identyfikacji układów mechanicznych jest niewiele, w tym poświęconych identyfikacji układów silnie nieliniowych, zawierających człony typu "luz", "suche tarcie", jeszcze mniej. Powyżej został dokonany przegląd jedynie literatury, podającej takie metody identyfikacji, które zostały opracowane dla układów nieliniowych.

Z rozdziału 1.2 wynika, że istnieje potrzeba identyfikacji własności dynamicznych silnie nieliniowych układów mechanicznych, zawierających człony typu "luz", "suche tarcie" ze względów praktycznych jak i naukowo poznawczych. Z tego rozdziału wynika, że brakuje efektywnych metod identyfikacji układów mechanicznych omawianego typu. Znane, opracowane do tego celu metody, mają pewne wady: albo są z założenia metodami przybliżonymi /np. metody opierające się na linearyzacji/, albo wymagają konieczności rozwiązywania równania różniczkowego w każdym kroku procedury szukania optymalnych parametrów modelu /np. metody iteracyjne, bądź wymagają konieczności obliczania pochod-

nych sygnałów wyjściowych /np. metody opierające się na równaniach wrażliwości/.

W związku z potrzebą identyfikacji silnie nieliniowych układów dynamicznych oraz brakiem efektywnych metod identyfikacji takich układów, celowym wydaje się podejmowanie prób opracowywania takich metod. Metoda taka nie powinna posiadać części wad, które posiadają znane i możliwe do stosowania, w tym przypadku, metody identyfikacji. Nie powinna również być metodą z zasady swojej przybliżoną. Powinna być możliwa do stosowania: w przypadku losowym i deterministycznym, gdy model układu jest wielomasowy oraz, gdy występują zakłócenia układu. W celu spełnienia tych warunków w niniejszej pracy zostanie zastosowana idea metody funkcji modulującej.

### 2.3: Metoda funkcji modulującej

W pracy [4] P. Eykhoff sygnalizuje, że M. Shinbrot /1957/ zastosował pewną funkcję czasu, przez którą mnoży się równanie ruchu układu, w celu przeprowadzenia jego analizy. Funkcja ta została nazwana "modulującą", ze względu na jej niezależność od sygnału wejściowego i wyjściowego układu. Ponadto autor wprowadza pewien sposób identyfikacji parametrów polegający na:

- mnożeniu równań ruchu układu przez wybraną "funkcję modulującą",
- całkowaniu przekształconych równań w określonych przedziałach,
- rozwiązaniu powstałych równań algebraicznych z nieznanymi parametrami.

Celem zastosowania, w powyższym sposobie identyfikacji, funkcji modulującej jest sprowadzenie równań ruchu do takiej postaci, w której nie ma pochodnych zmiennych zależnych.

I. Loeb i G. Cahen [10] /1963/ wprowadzili pojęcie "metody funkcji modulującej" dla takiego sposobu identyfikacji, w którym funkcja modulująca, oznaczona symbolem  $\Phi$ , spełnia następujące warunki: jest ciągła, ograniczona oraz co najmniej  $n$ -krotnie różniczkowalna, gdzie  $n$  jest rzędem przekształcanego równania róż-

niczkowego. Ponadto, funkcja  $\Phi$  oraz jej wszystkie pochodne aż do rzędu  $n-1$  przybierają wartość zero na krańcach przedziału całkowania  $[T^1, T^2]$ .

$$\begin{aligned} \Phi(T^1) &= \Phi(T^2) = 0 \\ /2.12/ \quad \dot{\Phi}(T^1) &= \dot{\Phi}(T^2) = 0 \\ &\vdots \\ \Phi^{(n-1)}(T^1) &= \Phi^{(n-1)}(T^2) = 0 \end{aligned}$$

Metodę tę omówimy, za autorami, na przykładzie układu dynamicznego opisanego równaniem:

$$/2.13/ \quad a_1 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_3 x = u$$

gdzie:  $x = x(t)$  - współrzędne układu /wyjście/,  
 $u = u(t)$  - wymuszenie /wejście/,  
 $a_i$  - stałe współczynniki.

Współczynniki  $a_i$  są nieznane - należy je wyznaczyć.

Zgodnie z metodą zaproponowaną w pracy [10], mnożymy obie strony równania /2.13/ przez funkcję  $\Phi(t)$ , zwaną funkcją modulującą, oraz całkujemy obie strony równania w przedziale  $[T^1, T^2]$ , otrzymujemy wtedy:

$$/2.14/ \quad a_1 \ddot{x}\Phi + a_2 \dot{x}\Phi + a_3 x\Phi = u\Phi$$

a następnie:

$$/2.15/ \quad a_1 \int_{T^1}^{T^2} \ddot{x}\Phi dt + a_2 \int_{T^1}^{T^2} \dot{x}\Phi dt + a_3 \int_{T^1}^{T^2} x\Phi dt = \int_{T^1}^{T^2} u\Phi dt$$

Całkując równanie /2.15/ przez części otrzymamy:

$$/2.17/ \quad a_1 \left[ \int_{T^1}^{T^2} \dot{x} \dot{\phi} dt - [x\dot{\phi}]_{T^1}^{T^2} + [\dot{x}\phi]_{T^1}^{T^2} \right] + a_2 \left[ - \int_{T^1}^{T^2} x \ddot{\phi} dt + [x\ddot{\phi}]_{T^1}^{T^2} \right] + a_3 \left[ \int_{T^1}^{T^2} x \phi dt \right] = \int_{T^1}^{T^2} u \phi dt$$

Dla uproszczenia zapisu, wprowadzono tu  $\phi(t) = \Phi$ . Ze względu na własności funkcji  $\Phi$  /warunki /2.12// wyrażenia w nawiasach kwadratowych znikają i otrzymujemy:

$$/2.18/ \quad a_1 \int_{T^1}^{T^2} \dot{\Phi}^2 x dt - a_2 \int_{T^1}^{T^2} \ddot{\Phi} x dt + a_3 \int_{T^1}^{T^2} \Phi x dt = \int_{T^1}^{T^2} \Phi u dt$$

Znając analityczną postać funkcji  $\Phi$  oraz znając sygnały  $x(t)$  i  $u(t)$  w przedziale  $[T^1, T^2]$ , można obliczyć wartość całek występujących w równaniu /2.18/. Zwróćmy uwagę, że w równaniu tym, w porównaniu z równaniem /2.13/ nie występują już pochodne sygnału  $x$ ; fakt ten jest główną zaletą zastosowania funkcji modulującej. Po obliczeniu całek w równaniu /2.18/, otrzymamy równanie na parametry:

$$/2.19/ \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = B$$

$$\text{gdzie:} \quad A_i = \int_{T^1}^{T^2} \Phi^{(3-i)} x dt \quad i=1,2,3$$

$$B = \int_{T^1}^{T^2} \Phi u dt$$

$$\Phi^{(0)} = \Phi$$

Do obliczenia wartości współczynników  $A_1, A_2, A_3$  potrzebne są 3 równania typu równania /2.19/. Należy więc wykonać 3 operacje tego rodzaju, tj. obliczyć wartości całek dla trzech dowolnych przedziałów na osi czasu, do których dobrane są 3 różne funkcje modulujące.

Wyżej przedstawiona metoda została opracowana dla układu dynamicznego o jednym stopniu swobody, którego sygnał wejściowy jest zdeterminowany i którego model jest liniowy

ze względu na parametry. W niniejszej pracy metoda ta zostanie zmodyfikowana w celu identyfikacji układów o wielu stopniach swobody /wielomasowych/, których sygnały wejściowe są zdeterminowane bądź losowe i których modele są nieliniowe ze względu na parametry.

### 3. Przekształcenie modulacyjne funkcji zdeterminowanej i losowej.

#### 3.1. Wstęp

Zaproponowane w tym rozdziale przekształcenie funkcji zdeterminowanej /3.2/ i losowej /3.1/ ma zasadnicze znaczenie dla opracowanej metody identyfikacji.

#### 3.2 Przekształcenie modulacyjne funkcji zdeterminowanej.

Przekształcenie to zostało wprowadzone w oparciu o pojęcie i własności "dystrybucji Schwartza" [32]/Niektóre definicje i własności tych dystrybucji, wykorzystywane w niniejszej pracy, podane są w Dodatku A/.

Jeśli funkcja  $f(t)$  spełnia warunki 3.1/:

1.  $f(t) = 0$  dla  $t < 0$

/3.1a/

2.  $f(t)$  - jest lokalnie całkowna,

funkcja  $\varphi(t, s)$  należy do przestrzeni funkcyjnej  $\mathcal{D}_m$

/Dodatek A/ tj. spełnia warunki:

1.  $\varphi(t, s)$  oraz każda z jej pochodnych  $\varphi^{(i)}(t, s) = \frac{d^i \varphi(t, s)}{dt^i}$  aż do rzędu  $m$  włącznie są wszędzie ciągłe,

/3.1b/ 2. Każda funkcja  $\varphi(t, s)$  jest równa zero na zewnątrz pewnego skończonego przedziału  $T_s$ ,

3. Parametr  $s$  jest dodatni:

to przekształcenie modulacyjne  $\mathbb{D}$  jest operacją, która przyporządkowuje funkcję  $f(s)$  każdej funkcji  $f(t)$ , spełniającej warunki /3.1a/. Przekształcenie  $\mathbb{D}$  jest zdefiniowane przez:

/3.2/  $\mathbb{D}[f(t)] = f(s) = \langle f(t), \varphi(t, s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t, s) dt$

w przypadku, gdy argument  $t$  funkcji  $f(t)$  jest dwuwymiarowy tj.  $t = (t_1, t_2)$  wtedy argument  $s$  funkcji  $f(s)$  jest też dwuwymiarowy tj.  $s = (s_1, s_2)$ . Przekształcenie  $\mathbb{D}$  jest definiowa-



ne wtedy następująco:

$$D[f(t_1, t_2)] = f(s_1, s_2) = \langle f(t_1, t_2), \varphi(t_1, s_1; t_2, s_2) \rangle$$

Oznaczmy przekształconą pochodną funkcji  $f(t)$  następująco:

$$D\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = f^{(n)}(s) = \left\langle \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \varphi(t, s) \right\rangle$$

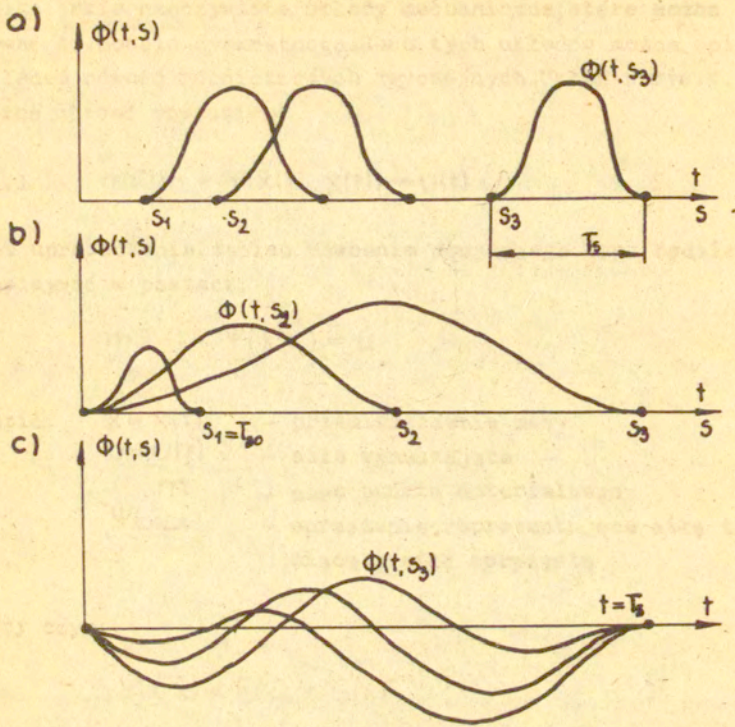
Podstawową własnością przekształcenia modulacyjnego jest:

$$\left\langle \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \varphi(t, s) \right\rangle = \left\langle f(t), (-1)^n \frac{d^n \varphi(t, s)}{dt^n} \right\rangle$$

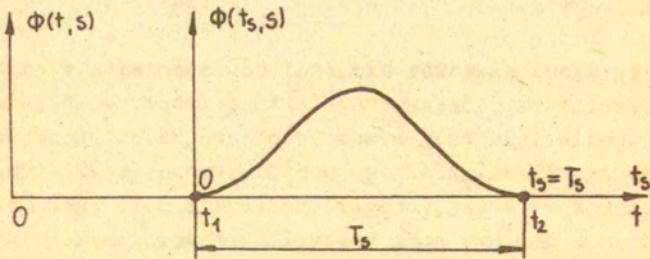
gdzie warunki /3.1b/ spełnione są dla  $m \geq n-1$ .

Po lewej stronie powyższej równości funkcja  $f(t)$  poddana jest operacji różniczkowania:  $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ , natomiast po prawej stronie operacja ta nie działa już na funkcję  $f(t)$ , lecz na funkcję  $\varphi(t)$ . Własność tę będziemy wykorzystywali do przekształcenia równań różniczkowych, opisujących badane układy mechaniczne, do postaci, w której występuje jak najmniej pochodnych zmiennych zależnych, reprezentujących sygnały wyjściowe układu. Z powyższej własności wynika ponadto, że do przekształcenia zwyczajnego równania różniczkowego  $n$ -tego rzędu, funkcja  $\varphi$  musi spełniać warunki /3.1b/ dla  $m \geq n-1$ .

Przykładem funkcji  $\varphi(t, s)$ , która "ślizga się" wzdłuż osi czasu  $t$  wraz ze wzrostem parametru  $s$ , gdzie parametrem tym jest chwila odpowiadająca początkowi przedziału  $t_s$ , poza którym  $\varphi=0$ , dla nieskończenie wielkiego  $m$  z warunku /3.1b/, jest funkcja /rys:3.1a/ :



Rys.3.1 Przykłady funkcji podstawowych przekształcenia modulacyjnego.



Rys.3.2 Zmiana układu współrzędnych.

$$/3.3/ \quad \varphi(t,s) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(t-s)(t-s-T_3)}} & \text{dla } t \in (s, s+T_3) \\ 0 & \text{dla } t \notin (s, s+T_3) \end{cases} \quad T_3 = \text{const}$$

Innym przykładem  $\varphi(t,s)$  może być funkcja  $\varphi(t)$ , "zaczepiona" w początku osi czasu i "rozciągająca" się wzdłuż tej osi w miarę wzrostu parametru  $s$  /rys.3.1b/:

$$/3.4/ \quad \varphi(t,s) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t(t-s-T_{30})}} & \text{dla } t \in (0, s) \\ 0 & \text{dla } t \notin (0, s) \end{cases}$$

gdzie:  $T_{30}$  - początkowa długość przedziału  $T_3$ ,  $s \geq T_{30}$

Jeszcze innym przykładem  $\varphi(t,s)$  może być taka  $\varphi(t)$ , która jest "oparta" na stałym, dowolnie dużym przedziale czasowym  $T_3$  i wraz ze wzrostem parametru  $s$  zmienia swój kształt np. /rys.3.1c/:

$$/3.5/ \quad \varphi(t,s) = \begin{cases} -[(t-s)(t-s-c)] e^{-\frac{1}{t(t-T_3)}} & \text{dla } t \in (0, T_3) \\ 0 & \text{dla } t \notin (0, T_3) \end{cases}$$

gdzie:  $c$  - stała,  $0 < c < T_3$   
 $0 < s < T_3 - c$

### 3.3. Przekształcenie modulacyjne funkcji losowej

Jeśli  $X(t)$  jest funkcją losową, to jej przekształcenie modulacyjne jest również funkcją losową, gdyż zgodnie z definicją przekształcenia modulacyjnego mamy:

$$/3.6/ \quad X(s) = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \varphi(t,s) dt$$

a wyrażenie po prawej stronie jest [21] definicją funkcji losowej, będącej całką innej funkcji losowej.

Wyznaczmy czemu równa się wariancja przekształconej funkcji losowej  $X(s)$ . W tym celu przekształćmy powyższe równania do nieco innej postaci. Rozpatrzmy w tym celu funkcję  $\Phi(t, s)$  dla jednej, ustalonej wartości parametru  $s$ .

Oznaczmy przedział poza którym funkcja  $\Phi$  jest z definicji równa zero, przez  $T_s$ . Następnie zmienimy układ współrzędnych  $(\Phi(t), t)$  na  $(\Phi(t_s), t_s)$  w/g rys. 3.2. Zgodnie z tym możemy napisać:

$$/3.7/ \quad D[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{X}(t) \Phi(t, s) dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{X}(t) \Phi(t, s) dt = \int_0^{T_s} \dot{X}(t_s) \Phi(t_s, s) dt_s$$

dla  $s = \text{const}$

Ostatnia całka zgodnie z [1] jest funkcją losową argumentu  $T_s$  czyli:

$$/3.8/ \quad \int_0^{T_s} \dot{X}(t_s) \Phi(t_s, s) dt_s = X(T_s) \quad \text{dla } s = \text{const}$$

z powyższego wynika, że dla ustalonej wartości parametru  $s$  argumentem przekształconej funkcji losowej jest długość przedziału całkowania  $T_s$  czyli przedziału poza którym funkcja  $\Phi$  jest z definicji równa zero. Teraz pokażemy czemu równa się wartość średnia i funkcja korelacji własnej funkcji losowej  $X(T_s)$ :

$$/3.9/ \quad m_x(T_s) = \int_0^{T_s} m_x(t_s) \Phi(t_s, s) dt_s$$

funkcja korelacji własnej:

$$/3.10/ \quad K_{xx}(T_s^1, T_s^2) = \int_0^{T_s^1} \int_0^{T_s^2} K_{xx}(t_s^1, t_s^2) dt_s^1 dt_s^2$$

Z powyższego wzoru dla  $T_s^1 = T_s^2 = T_s$  otrzymamy wzór na wariancję:

$$/3.11/ \quad \sigma^2(T_s) = W_{xx}(T_s, T_s) = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} K_{xx}(t_s^1, t_s^2) dt_s^1 dt_s^2$$

Dla przypadku, gdy przekształcana funkcja losowa jest stacjonarną funkcją losową, o ograniczonej wariancji i wartości średniej równej zero, wariancja przekształconej funkcji losowej  $X(T_s)$  jest proporcjonalna do  $T_s$  [10] :

$$/3.12/ \quad \sigma_x^2(T_s) = b_x(s) T_s$$

gdzie:  $b_x(s)$ -współczynnik proporcjonalności.

Wynika stąd, że wariancja przekształconej funkcji losowej  $X(T_s)$  rośnie wraz ze wzrostem przedziału, poza którym funkcja  $\Phi$  jest z definicji równa zero /wraz ze wzrostem "szerokości" funkcji  $\Phi$ /. Własność ta zostanie uwzględniona przy przekształcaniu równań, opisujących układy, na które działają losowe zakłócenia /rozd. 6/ oraz zostanie wzięta pod uwagę w przeprowadzonym eksperymencie /rozd. 9/.

#### 4. Schemat procesu identyfikacji

##### 3.1. Wstęp

W rozdziale tym zostaną najpierw krótko omówione podstawowe pojęcia związane z identyfikacją układów mechanicznych oraz zostanie określona klasa modeli stosowanych w niniejszej pracy./rozd.4.2/ Następnie zostaną przedstawione schematy procesów identyfikacji przy zastosowaniu przekształcenia modułowego dla przypadku zdeterminowanego /rozd.4.3/ i losowego /4.4/

##### 4.2. Zagadnienie układu, modelu i identyfikacji.

W rozdziale tym zostaną krótko sformułowane/głównie na podstawie prac J.Osieckiego [16], J.Wichra [28] i S.Ziemby [36] podstawowe pojęcia dotyczące identyfikacji układów mechanicznych oraz zostanie określona klasa modeli, jakimi będziemy się zajmować w niniejszej pracy.

Zadaniem analizy dynamicznej układów mechanicznych jest badanie ruchu poszczególnych członów układu oraz wyznaczanie sił przenoszonych przez te człony. W celu wyprowadzenia związków opisujących ruch poszczególnych członów oraz wyznaczenia wartości sił działających między tymi członami buduje się uproszczony model rzeczywistego układu mechanicznego. Budowa modelu zależy od rozwiązania konstrukcyjnego układu mechanicznego, jego specyfiki pracy i od postawionych pytań.

Na początku zdefiniujemy pojęcie modelu: "Przez model rozumie się taki dający się pomyśleć lub materialnie zrealizować układ, który odzwierciedlając lub odtwarzając przedmiot badania zdolny jest zastępować go tak, że jego badanie dostarcza nam nowej informacji o tym przedmiocie" [28].

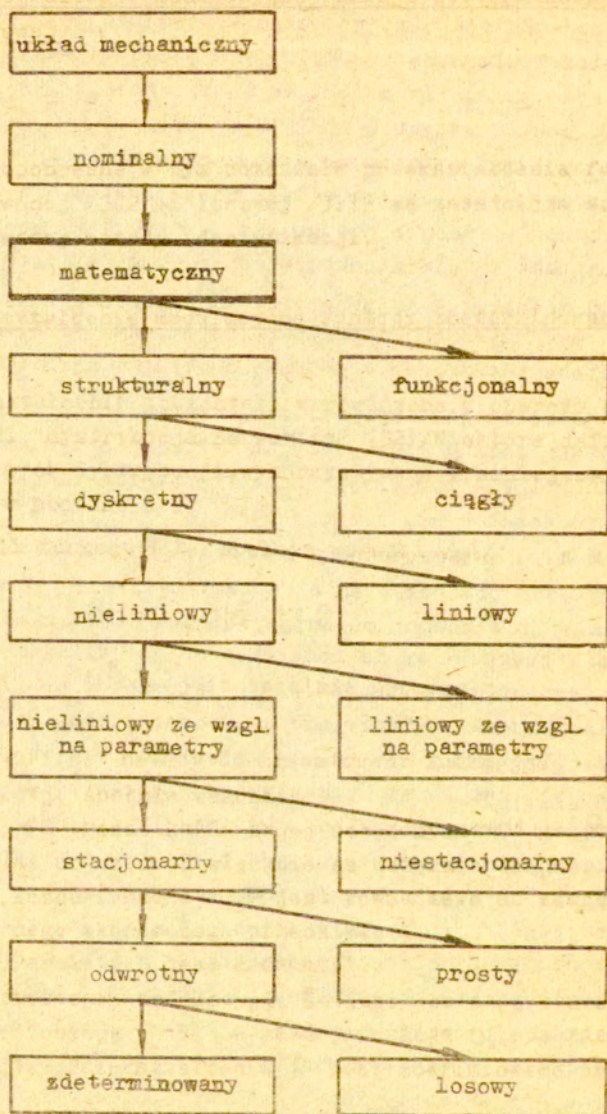
Budowa modelu zawiera etap, w którym przeprowadza się myślową idealizację struktury modelu i procesów w nim zachodzących. Rezultatem tego etapu jest tzw. model nominalny.

Analityczny opis modelu nominalnego nazywa się modelem matematycznym. Model matematyczny układu mechanicznego, opisujący procesy dynamiczne w nim zachodzące, przyjmuje najczęściej

postać tzw. równań ruchu, które można wprowadzić na podstawie praw dynamiki Newtona. Na rys. 4.1 jest podany schemat jednego z możliwych podziałów modeli matematycznych, z wyróżnieniem modeli zastosowanych w niniejszej pracy.

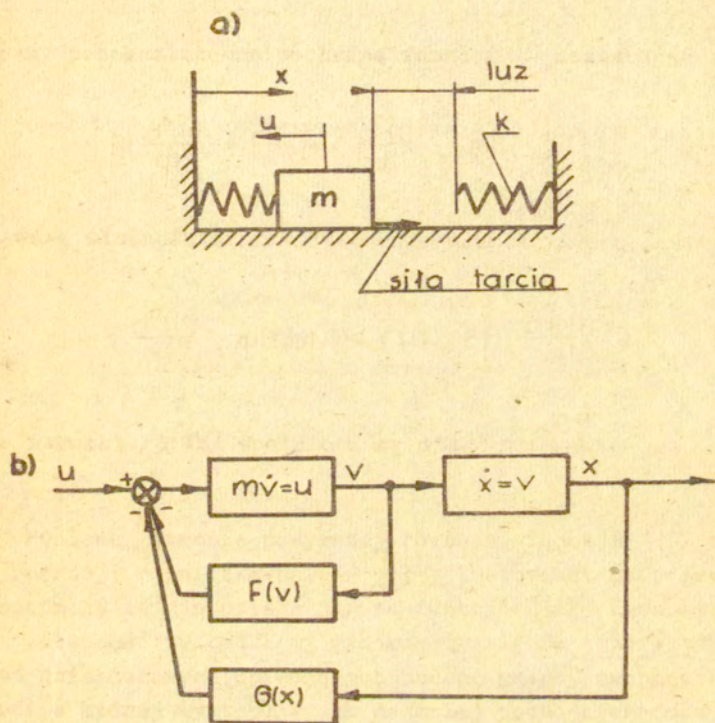
Podamy teraz podstawowe cechy poszczególnych rodzajów modeli układów mechanicznych. Modele funkcjonalne - są to modele, przy budowie których nie wnikamy w strukturę wewnętrzną układu. Natomiast modele strukturalne, są to modele których organizacja wewnętrzna podobna jest do organizacji wewnętrznej układu mechanicznego i zachodzi odpowiedniość elementów modelu i elementów układu. W przypadku układów mechanicznych, gdzie często celem jest optymalizacja własności dynamicznych układu poprzez zmiany konstrukcyjne, bardziej przydatne są modele strukturalne. W tym przypadku, na podstawie posiadanej wiedzy i procesach w nim zachodzących, przyjmujemy określoną strukturę modelu matematycznego o nieznanach wartościach parametrów, przy czym pod pojęciem struktury będziemy rozumieli postać równań różniczkowych opisujących ruch układu mechanicznego.

Modele ciągłe - są to modele opisujące własności układów mechanicznych, które traktuje się jako zbiór brył odkształcalnych. Dla układów mechanicznych, w których można wyodrębnić nieodkształcalne bryły lub punkty materialne, w których zaśrodkowana jest masa oraz bezmasowe odkształcalne elementy łączące te bryły lub punkty - budujemy modele dyskretne. Istnieje szeroka klasa układów mechanicznych, które można opisać modelem dyskretnym /rys. 4.2b/ skończonej liczbie punktów materialnych  $m$ , reprezentujących masy układu, połączonych sprzężeniami  $\Psi$ , reprezentującymi elementy oddziałujące siłami na te masy oraz, gdzie punkty materialne poddane są działaniu sił wymuszających  $U$ , będących jawnymi funkcjami czasu. Charakterystyki sprzężeń oraz masy punktów materialnych powinny być tak dobrane, aby przyjęty model dyskretny odtwarzał z wystarczającym przybliżeniem ruch, odpowiadający ruchowi poszczególnych członów rzeczywistego układu mechanicznego, a siły działające na punkty materialne odpowiadały siłom występującym w rzeczywistym układzie mechanicznym. Rozpatrywane będą dalej



Rys:4.1 Schemat podziału modeli matematycznych układów mechanicznych.





Rys.4.2 Sposoby przedstawiania modeli jednomasowego układu mechanicznego z "luzem" i "tarciem suchym": a-model nominalny, b-schemat blokowy.

tylko takie rzeczywiste układy mechaniczne, które można zredukować do modelu dyskretnego. Ruch tych układów można opisać układem równań różniczkowych zwyczajnych. Układ z rys. 4.2a można opisać równaniem:

$$/4.1/ \quad m\ddot{x}(t) + \Psi(\dot{x}(t), x(t)) = u(t)$$

Dla uproszczenia zapisu równania powyższego typu będziemy zapisywać w postaci:

$$m\ddot{x} + \Psi(\dot{x}, x) = u$$

gdzie:  $x = x(t)$  - przemieszczenie masy  
 $u = u(t)$  - siła wymuszająca  
 $m$  - masa punktu materialnego  
 $\Psi(\dot{x}, x)$  - sprzężenie reprezentujące siłę tłumiającą i siłę sprężystą

przy czym:

$$\Psi(\dot{x}, x) = F(\dot{x}) + G(x)$$

gdzie:  $F(\dot{x})$  - człon reprezentujący siłę tłumiającą /tarcie/,  
 $G(x)$  - człon reprezentujący siłę sprężystą i "luz".

Dalej, w zależności od tego czy równania ruchu są liniowe czy nieliniowe, model będzie liniowy bądź nieliniowy. Równanie różniczkowe, opisujące ruch układu jest nieliniowe, jeśli charakterystyki elementów układu są nieliniowe. Powyższe nieliniowości mogą mieć charakter fizyczny, geometryczny lub strukturalny. Nieliniowości fizyczne mogą wynikać z nieliniowości charakterystyk materiałowych /nieliniowe charakterystyki sprężyste/. Nieliniowości geometryczne mogą być powodowane zmianą charakteru połączenia elementów /np. zmiana przeło-

żenia/.Do grupy nieliniowości strukturalnych można zaliczyć luzy w połączeniach par kinematycznych.Modele nieliniowe można podzielić na modele liniowe ze względu na parametry i modele nieliniowe ze względu na parametry.Poniżej podane są przykładowe równania różniczkowe reprezentujące powyższe dwa modele nieliniowe:

nieliniowe równanie różniczkowe, nieliniowe ze względu na współczynniki:

$$/4.2/ \quad a_1 \ddot{x} + a_2 [x]^{\frac{4}{3}} = u$$

nieliniowe równanie różniczkowe, liniowe ze względu na współczynniki:

$$/4.3/ \quad a_1 \ddot{x} + [a_2 - x]^{\frac{4}{3}} = u$$

Ponieważ wiele członów układów mechanicznych jest nieliniowych ze względu na parametry /np.element sprężysty zawierający luz mechaniczny/,my będziemy zajmowali się takimi układami nieliniowymi,których modele są również nieliniowe ze względu na parametry.

Jeśli struktura układu lub parametry są zmienne w czasie model jest niestacjonarny.W przeciwnym wypadku tj.gdy struktura i parametry nie ulegają zmianom w czasie - model jest stacjonarny.Poniżej będą rozpatrywane tylko takie układy,dla których można przyjąć, że struktura układu pozostaje niezmienną w rozpatrywanym przedziale czasu, a parametry są stałe.

Często będziemy posługiwali się schematami strukturalno-funkcjonalnymi układu i modelu tzw.schematami blokowymi /rys.4.2b/: W tym wypadku siła wymuszająca  $u = u(t)$  zwie się sygnałem wejściowym układu /modelu/lub krótko wejściem, a przemieszczenie  $x = x(t)$  sygnałem wyjściowym układu /mo-

delu/ lub krótko wyjściem. Schemat taki, w przypadku złożonych układów, uwidacznia kolejność i kierunki operacji realizowanych przez zespoły mechanizmów ujęte w poszczególne bloki oraz ukazuje wzajemne powiązania funkcjonalne poszczególnych bloków.

Na rys.4.2b jest przedstawiony taki złożony schemat blokowy. Reprezentuje on ten sam układ co schemat z rys.4.2a, z tym że schemat z rys.4.2b jest "rozbity" na poszczególne człony. Nieliniowe człony  $F(v)$  i  $G(x)$  są członami, w których skokowa zmiana sygnału wejściowego powoduje natychmiastową skokową zmianę sygnału wyjściowego czyli wartość sygnału wyjściowego w danej chwili  $t$  zależy tylko od wartości sygnału wejściowego w tej chwili. Członami te będziemy nazywali nieliniowymi, bezinercyjnymi członami funkcyjnymi. Pozostałe człony ze schematu z rys.4.2b będziemy nazywali liniowymi członami inercyjnymi. Odpowiadające im bloki są opisane równaniami różniczkowymi. Wartość sygnału wyjściowego z takiego członu w danej chwili  $t$  zależy nie tylko od wartości sygnału wejściowego w tej chwili, ale również od wartości sygnału wyjściowego w poprzednich momentach. W niniejszej pracy będziemy się zajmowali takimi układami mechanicznymi, których model można zbudować z liniowych członów inercyjnych i nieliniowych członów bezinercyjnych.

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy operator  $\mathbb{N}$ , będący nieliniowym operatorem różniczkowym. Stosując ten operator, równanie różniczkowe, opisujące nieliniowy układ dynamiczny, pobudzany sygnałem wejściowym  $U$  i generujący sygnał wyjściowy  $X$ , można zapisać następująco:

$$/4.3/ \quad \mathbb{N}(x) = U$$

Dla podkreślenia zależności modelu od parametrów ze zbioru "a" będziemy używali zapisu:

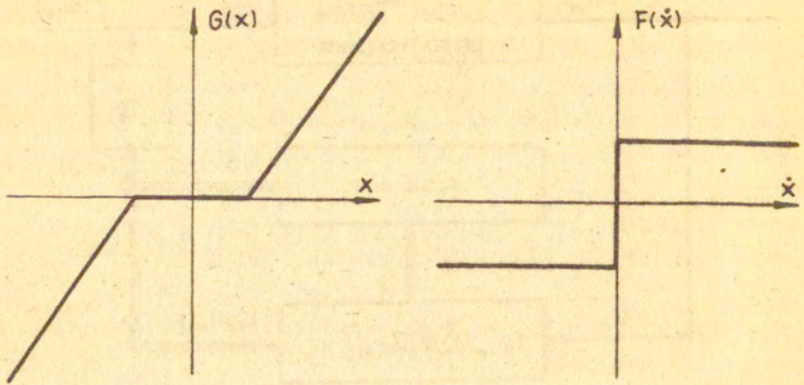
$$/4.4/ \quad \mathbb{N}(x, \underline{a}) = U$$

Dokonyamy teraz jeszcze jednego podziału modeli. Model, o którym była mowa powyżej nazwiemy za [4] modelem prostym. Z matematycznego punktu widzenia sygnał wyjściowy  $\hat{x}$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego /4.3/ opisanego operatorem  $\mathcal{N}$ . Schemat blokowy tego modelu przedstawiono na rys. 4.4a.

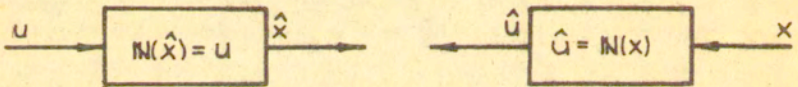
Modelem odwrotnym będziemy nazywali taki model, w którym role sygnałów są odwrócone w stosunku do modelu prostego tj. sygnał  $x$  jest sygnałem wejściowym, a sygnał  $\hat{u}$  jest sygnałem wyjściowym rys. 4.4b. Z matematycznego punktu widzenia, w tym przypadku sygnał wyjściowy  $\hat{u}$  jest funkcją w zwykłym sensie, której argumentem jest sygnał wejściowy  $x$ . Operator  $\mathcal{N}$ , chociaż formalnie niczym się nie różni od operatora  $\mathcal{N}$  z modelu prostego, jest tutaj rozumiany jako operator funkcyjny - przypisuje teraz każdej wartości  $x$  jakąś wartość  $\hat{u}$ .

Podamy teraz definicję identyfikacji w naszym rozumieniu. Przez identyfikację układu dynamicznego za J. Wichrem [28], będziemy rozumieli proces, w wyniku którego powstaje model matematyczny tego układu uznany zgodnie z przyjętym kryterium jakości za wystarczająco dobrze opisujący zachowanie się układu i z drugiej strony na tyle prosty, że możliwa jest jego wszechstronna analiza aktualnie dostępnymi środkami.

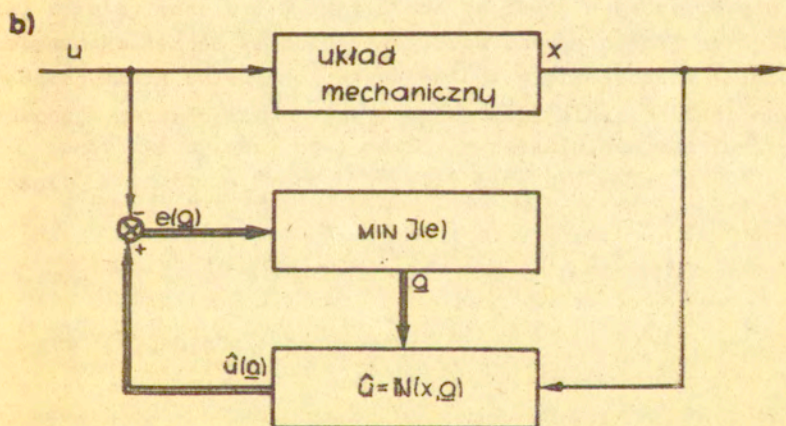
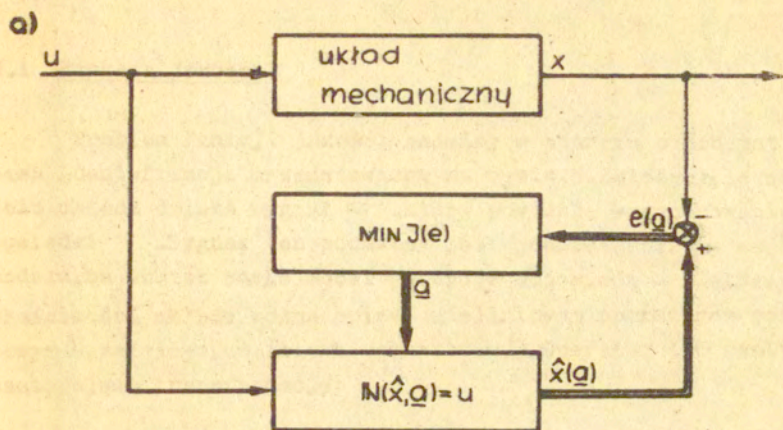
Na rys. 4.5 podane są dwa schematy procesów identyfikacji: z wykorzystaniem modelu prostego i modelu odwrotnego. W obu przypadkach sygnały wejściowe i wyjściowe z układu  $u$  i  $x$  uzyskuje się z pomiarów. Również w obu przypadkach zastosowany jest odpowiedni algorytm identyfikacji wykorzystujący pewną funkcję jakości  $J$ , minimalizującą błąd  $e$ . Minimalizacja błędu odbywa się poprzez zmianę wartości parametrów modelu ze zbioru  $\mathcal{Q}$ . Wartości parametrów, które będzie miał model przy minimalnym błędzie  $e$  w sensie funkcji jakości  $J$ , będą szukanymi wartościami. Zbiór tych wartości oznaczymy symbolem  $\mathcal{Q}^*$ . Identyfikacja układu dynamicznego przy pomocy modelu prostego /rys. 4.4a/ polega na znalezieniu takiego modelu, który pobudzamy jest takim samym sygnałem wejściowym  $u$ , co



Rys.4.3 Charakterystyka członu reprezentującego: a-siły sprężyste i "luz", b-siłę tarcia.



Rys.4.4 Schematy blokowe modelu: a-prostego, b-odwrotnego  
N - nieliniowy operator różniczkowy



Rys.4.5 Schemat procesu identyfikacji z zastosowaniem modelu: a-prostego, b-odwrotnego.  
MIN J - procedura minimalizacji funkcji jakości J

obiekt i który generuje wyjście  $\hat{x}$  możliwie bliskie wyjścia obiektu  $x$ . W tym przypadku pierwotne role sygnałów nie są odwrócone.

W przypadku zastosowania modelu odwrotnego, identyfikacja układu dynamicznego polega na szukaniu takiego modelu, który generując takie samo wyjście  $x$  co obiekt, jest pobudzany wymuszeniem  $\hat{u}$ , możliwie bliskim wymuszeniu obiektu  $u$ . Takie postawienie problemu powoduje, że praktycznie zostają w modelu odwrócone pierwotne role sygnałów: sygnał wejściowy obiektu staje się sygnałem wyjściowym modelu, a sygnał wyjściowy obiektu staje się sygnałem wejściowym modelu.

Pojęcie modelu prostego i odwrotnego jest zasygnalizowane przez Eykhoffa [4] jednakże zarówno ten autor jak i inni opisują szeroko metody identyfikacji oparte prawie wyłącznie na modelach prostych. Gdy zdarzy się, że w masie metod opartych na modelach prostych wzmiankuje się o metodach, które opierają się w swojej istocie na modelu odwrotnym, to nie podaje się tego explicite i nie wyciąga wniosków z tego faktu wynikających. Dopiero na podstawie analizy danej metody pod tym kątem można stwierdzić, że został zastosowany model odwrotny np. metody: aproksymacji różniczkowej [4], bezpośrednia [8] i także metoda funkcji modulującej. Poza tym te, sygnalizowane tylko, metody są słabo opracowane, przez co zakres ich zastosowań jest pod wieloma względami ograniczony. Na przykład stosowalność ich ogranicza się prawie wyłącznie do układów liniowych i to do układów, w których nie występują zakłócenia. W związku z przedstawioną sytuacją i wobec zastosowania modelu odwrotnego w niniejszej pracy została podjęta próba scharakteryzowania konsekwencji wynikających z faktu stosowania takiego modelu.

Dokonyamy jeszcze ostatniego podziału modeli. Jeśli elementy układu są opisane funkcjami losowymi, to model jest losowy, jeśli elementy te są opisane funkcjami zdeterminowanymi mamy model zdeterminowany.

Funkcją losową  $X(t)$  będziemy nazywali [24] taką funkcją argumentu  $t$ , której wartość przy dowolnej wartości  $t$  jest



zmienną losową. Argument ten jest wielkością nielosową.

Funkcję losową nazywamy normalną /gaussowską/, jeśli jej wszystkie wielowymiarowe funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa są normalne.

Funkcję losową nazywamy stacjonarną /w wąskim sensie/ jeśli jej wszystkie wielowymiarowe funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zależą tylko od wzajemnej odległości chwil, a nie zależą natomiast od nich samych.

Jak już to zostało zaznaczone, zajmujemy się układami stacjonarnymi. Jeśli sygnał wejściowy takiego układu jest normalną funkcją losową, to w ogólnym przypadku sygnał wyjściowy nie będzie normalną funkcją losową. Wcześniej zostało zaznaczone, że układy którymi się zajmujemy, składają się z bezinercyjnych członów nieliniowych i liniowych członów inercyjnych. Losowe funkcje wyjściowe z liniowych członów inercyjnych, zawartych w układzie, zwykle normalizują się tj. ich funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa stają się bardziej bliskie funkcjom gęstości rozkładu normalnego niż funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa funkcji losowych podawanych na ich wejścia. Normalizacja losowej funkcji wyjściowej z inercyjnego członu liniowego jest tym większa im bardziej funkcja ta jest wąskopasma [9]. Funkcja wąskopasmowa, określona z punktu widzenia gęstości widmowej, jest to taka funkcja losowa, której gęstość widmowa ma wartości pomijalnie małe wszędzie za wyjątkiem wąskiego pasma częstotliwości /stąd nazwa/. Nawet w zupełnie ogólnym przypadku układu dynamicznego przy normalnej funkcji losowej na wejściu całego układu jest dostatecznie uzasadnione traktowanie losowej funkcji wejściowej na człon nieliniowy jako funkcję losową bliską losowej funkcji normalnej [9]. W niniejszej pracy zakładamy, że mamy do czynienia z normalnymi funkcjami losowymi, które w ogólnym przypadku są niestacjonarnymi funkcjami.

Jeśli na wejściu układu dynamicznego poda się stacjonarną funkcję losową, to na jego wyjściu uzyska się w ogólnym przypadku niestacjonarną funkcję losową [17]. Jednakże w wielu przypadkach, gdy w chwili dostatecznie oddalonych od chwili

li początkowej procesy przejściowe w układzie można uważać za zakończone, a przebieg pracy układu za ustalający się, funkcję losową na wyjściu układu można uważać za stacjonarną. Warunkiem na to, by losowa funkcja wyjściowa z układu dynamicznego była stacjonarna w powyższym sensie, jest stacjonarność funkcji wejściowej, stacjonarność samego układu rozumiana w sensie niezmienności w czasie jego struktury i parametrów. W dalszym ciągu mówiąc o stacjonarności funkcji losowej będziemy rozumieli ją w powyższym sensie.

Do badania układów w których występują funkcje losowe korzysta się z pewnych zdeterminowanych charakterystyk tych funkcji, a mianowicie momentów statystycznych różnych rzędów. Dla pełnej charakterystyki normalnych funkcji losowych, a takimi zajmujemy się wystarczy znajomość momentów pierwszego i drugiego rzędu. Dla naszych celów będziemy korzystali z momentów statystycznych uzyskanych na podstawie pomiarów.

Na koniec można zreassumować ten rozdział stwierdzając, że w niniejszej pracy będziemy się posługiwali modelami matematycznymi, które są strukturalne, dyskretne, nieliniowe, nieliniowo zależne od parametrów, stacjonarne, odwrotne, zdeterminowane lub losowe.

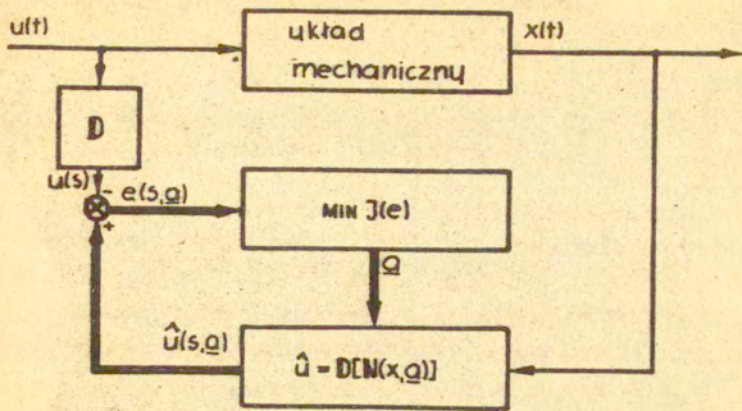
#### 4.3. Schemat procesu identyfikacji z zastosowaniem przekształcenia modulacyjnego i modelu zdeterminowanego

Identyfikację badanego układu będziemy przeprowadzać wg schematu z rys.4.6. Identyfikacja układu dynamicznego będzie polegała, ogólnie rzecz biorąc, na znalezieniu takiego operatora  $\hat{N}$ , który będzie minimalizował błąd  $e(s, \underline{\alpha})$ , będący różnicą przekształconych sygnałów: wejściowego układu  $U$  i wyjściowego modelu  $\hat{U}$ : Zadanie to jest realizowane poprzez budowę i minimalizację funkcji jakości  $J$  /rozd.5:1/:

Błąd  $e$  definiowany jest następująco :

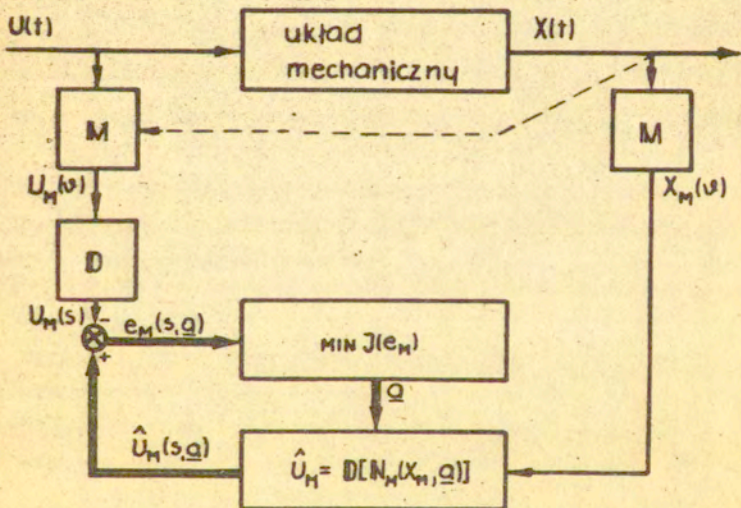
$$e(s, \underline{\alpha}) = u(s) - \hat{U}(s, \underline{\alpha})$$

gdzie:  $u(s) = \mathcal{D}[u(t)]$



Rys.4.6 Schemat procesu identyfikacji /przypadek deterministyczny/

$D$  - operator przekształcenia modulatoryjnego,  $N$  - nieliniowy operator różniczkowy,  $\text{MIN } J(e)$  - algorytm minimalizacji funkcji jakości  $J$  :



Rys.4.7 Schemat procesu identyfikacji /przypadek losowy/.

$M$  - operator momentu statystycznego funkcji losowej,  $N_M$  - operator nieliniowego losowego równania różniczkowego poddany operacji wyznaczania momentu statystycznego.

$$\hat{U}(s, \Omega) = D[N(x, \Omega)]$$

W tym przypadku nie porównujemy już sygnałów  $u(t)$  i  $\hat{U}(t)$ , lecz przekształcone ich postacie a mianowicie  $u(s)$  i  $\hat{U}(s)$ .

#### 4.4. Schemat procesu identyfikacji z zastosowaniem przekształcenia modulacyjnego i modelu losowego.

Metoda funkcji modulującej nie była dotychczas stosowana do identyfikacji układów mechanicznych, będących pod działaniem sygnałów losowych. W niniejszej pracy został zaproponowany sposób zastosowania metody funkcji modulującej, poprzez użycie przekształcenia modulacyjnego, do identyfikacji takich właśnie układów.

Zastosowanie modelu losowego wymaga przekształcenia równania opisującego ten model do postaci zdeterminowanej, celem uzyskania możliwości przeprowadzania obliczeń. W literaturze opisane są metody doprowadzania różniczkowego równania losowego do algebraicznego równania zdeterminowanego, poprzez wykorzystanie funkcji korelacyjnej oraz przekształcenie Laplace'a bądź Fouriera. Metody te dotyczą oczywiście układów liniowych. Dla układów nieliniowych stosuje się dodatkowo różne metody linearyzacji problemu. Nie opracowano jeszcze metod dla przypadku losowego, w których nie stosowano by doprowadzenia losowego nieliniowego równania różniczkowego, opisującego model układu do prostszej formy i dopiero w tej formie przekształcono to równanie do postaci zdeterminowanej. W niniejszej pracy jest podjęta próba nie upraszczania nieliniowego losowego modelu. W tym celu różniczkowe równanie losowe przekształcimy w różniczkowe równanie zdeterminowane. Dokonamy tego za pomocą operacji wyznaczania momentów statystycznych pierwszego i drugiego rzędu, a następnie dokonamy przekształcenia modulacyjnego. Opisane w literaturze metody przekształcania równań losowych dotyczą stacjonarnych funkcji losowych. Natomiast opracowana w niniejszej

pracy metoda dotyczy w ogólnym przypadku niestacjonarnych funkcji losowych.

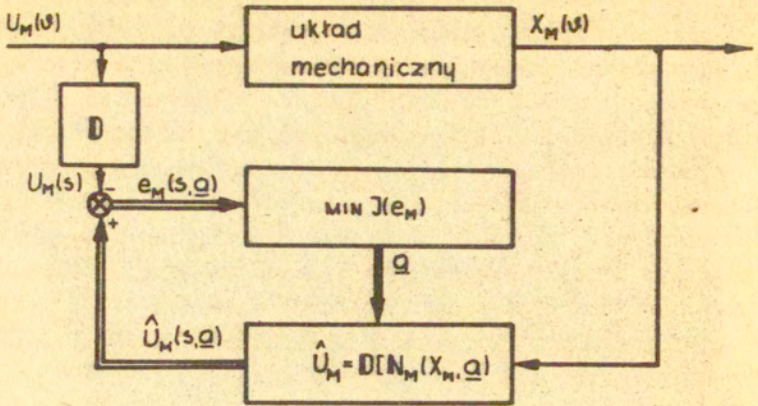
Jak już było to powiedziane w rozdz.4.2, jako sygnały losowe będą użyte normalne funkcje losowe, opisane momentami statystycznymi pierwszego i drugiego rzędu. Moment pierwszego rzędu zależy od jednego argumentu, natomiast moment drugiego rzędu zależy od dwu argumentów. Dla uproszczenia zapisu potraktujemy moment drugiego rzędu jako zależny od jednego ale dwuwymiarowego argumentu. Argument momentu oznaczymy  $\vartheta$ . Symbolem  $M$  oznaczymy operator wyznaczania danego momentu, a sam moment funkcji losowej  $X(t)$  oznaczymy  $X_M(\vartheta)$ . Zatem:

$$M\{X(t)\} = X_M(\vartheta)$$

losowe modele układów dynamicznych, jakimi zajmiemy się w niniejszej pracy, są opisane losowymi zwyczajnymi równaniami różniczkowymi. Jeśli losowe zwyczajne równanie różniczkowe poddamy operacji wyznaczania momentu, to operator  $N$  losowego równania różniczkowego działający na funkcji losowej ulegnie przekształceniu w inny operator  $N_M$ , będący również operatorem równania różniczkowego w ogólnym przypadku cząstkowego, ale już nie losowego i działającym nie na funkcji losowej ale na momencie tej funkcji losowej.

Na rys.4.7 przedstawiony jest schemat identyfikacji układu dynamicznego pobudzonego funkcją losową  $U(t)$ . Przerwaną linią narysowane jest "połączenie" wykorzystywane do obliczania momentu wzajemnego.

Schemat ten można uprościć. Wyobraźmy sobie, że układ dynamiczny pobudzony jest sygnałem w postaci momentu funkcji losowej i generuje sygnał wyjściowy również w postaci odpowiedniego momentu. Zostało to zobrazowane na rys.4.8. Zauważymy, że schemat ten jest identyczny ze schematem z rys.4.6, dotyczącym przypadku zdeterminowanego. Dlatego w dalszym ciągu będziemy mówili głównie o przypadku zdeterminowanym, a o przypadku losowym będziemy wspominać gdy wystąpią różnice.



rys.4.8 Uproszczony schemat procesu identyfikacji /przypadek losowy/

## 5. Realizacja procesu identyfikacji

### 5.1 Funkcja jakości.

Problem funkcji jakości omówimy w oparciu o schemat procesu identyfikacji przedstawiony na rys.4.5. Założymy, że na wejściu układu działa sygnał  $u$ , który powoduje wygenerowanie odpowiedzi  $X$ . Sygnał ten podawany jest jednocześnie na wejście modelu, na skutek czego model generuje odpowiedź  $\hat{u}$ . Załóżmy, że właściwości układu można opisać nieliniowym operatorem różniczkowym  $N$ , zależnym od zbioru parametrów  $Q$ . Operator ten realizuje następującą transformację:

$$/5.1/ \quad \hat{u} = N(x, Q)$$

Ponieważ model matematyczny jest zawsze przybliżonym opisem układu, więc sygnał  $\hat{u}$  zawsze różni się od sygnału  $u$ . Wartość tej różnicy może być wykorzystana do oceny jakości modelu matematycznego. Jakość tę można ocenić za pomocą pewnej normy  $\|\hat{u} - u\|$ , będącej miarą odległości sygnałów  $\hat{u}, u$  w przestrzeni  $R$ . Rodzaj operacji matematycznych jak i wybór konkretnej postaci normy  $\|\cdot\|$  może być opisany przy pomocy wyrażenia, zwanego funkcją jakości  $J$ . Postacie funkcji jakości mogą być różne np:

$$/5.2a/ \quad J = \|\hat{u} - u\|^2$$

często przyjmuje się po prostu:

$$/5.2b/ \quad J = (\hat{u} - u)^2$$

Jeśli sygnały są obserwowane w dyskretnych chwilach, to po oznaczeniu kolejnych obserwacji indeksem  $i / i=1, 2, \dots, N /$  możemy powyższą zależność zapisać w postaci:

$$/5.2c/ \quad J = \sum_{i=1}^N (\hat{u}_i - u_i)^2$$

Wprowadzenie funkcji jakości ułatwia nie tylko ocenę adekwatności modelu matematycznego, ale umożliwia również realizację procesu poszukiwania modelu najlepszego w określonym sensie. Optymalizacja może dotyczyć zarówno struktury jak i parametrów. W przypadku układów mechanicznych struktura modelu matematycznego odpowiada postaci równań ruchu. Postać tę można najczęściej przyjąć na podstawie informacji apriorycznych i problem poszukiwania optymalnego modelu sprowadzić do wyznaczenia optymalnego zbioru parametrów  $Q^*$  tzn. takiego zbioru, który minimalizuje odległość między zbiorami  $\hat{U}$  i  $U$ . Sprowadza się to do minimalizacji funkcji jakości  $J$ , tzn.

$$/5.3/ \quad J(Q^*) = \min_Q J(Q)$$

Biorąc pod uwagę /5.1/ można wyrażenie /5.2a/ zapisać w następujący sposób:

$$/5.4/ \quad J = \|N(x, Q) - u\|^2 = J(Q)$$

tzn. przedstawić funkcję jakości w postaci zależnej w sposób jawny od parametrów  $Q$ .

Problem postaci funkcji jakości i jej minimalizacji jest szeroko opisany w literaturze np. w pracy P. Eykhoffa [4]. Tutaj ograniczymy się do krótkiego przedstawienia metod minimalizacji funkcji jakości przy stosowaniu przekształcenia modulacyjnego. /rozd.5.2/ Następnie metody te zostaną porównane i w związku z tym zostaną podane pewne kryteria doboru przekształcenia modulacyjnego i wartości argumentu  $S$  /rozd.5.3/ W rozdz.5.4 zostaną omówione pewne aspekty zastosowania przedstawionych metod w przypadku losowym.

## 5.2 Metody szukania minimum funkcji jakości.

Metody poszukiwania minimum funkcji jakości można podzielić na analityczne i iteracyjne [28]. Jednakże w przypadku ukła-



dów silnie nieliniowych, przy zastosowaniu metod analitycznych, zachodzi konieczność rozwiązania problemów nieliniowych, których najczęściej nie da się jednak rozwiązać analitycznie. Konieczne wtedy jest zastosowanie iteracyjnych metod numerycznych. Wydaje się więc, że w przypadku minimalizacji funkcji jakości w algorytmach identyfikacji układów silnie nieliniowych można mówić tylko o metodach iteracyjnych sensu stricto, wywodzących się z metod analitycznych bądź iteracyjnych stosowanych do układów liniowych.

W rozdziale tym przedstawimy dwie metody minimalizacji funkcji jakości, wywodzące się z metod analitycznych i jako trzecią podamy ogólnie metodę, wywodzącą się z metod iteracyjnych. Zwróćmy teraz na krótko uwagę na problem wartości szukanych parametrów. Na podstawie wiedzy apriorycznej wiemy w jakim obszarze mogą znajdować się szukane wartości parametrów. Przykładowo wiemy, że parametr reprezentujący masę nie może być ujemny, że nie może on przekraczać wartości jaką ma masa całego identyfikowanego urządzenia i. t. p. Zatem istnieją pewne ograniczenia, które określają obszar wartości, jakie te szukane parametry mogą przyjmować. Wartości parametrów, znalezione poprzez minimalizację funkcji jakości, muszą znajdować się, w tym obszarze. W przeciwnym przypadku, należy się spodziewać, że został popełniony jakiś błąd np. błąd w obliczeniowej procedurze minimalizacji, błąd w wyborze modelu badanego układu, bądź zaistniały zbyt duże błędy pomiarowe. W celu uzyskania poprawnych wyników należy przyczynę tych błędów zlokalizować i usunąć.

Ze względu na nieliniowość funkcja jakości może, w dopuszczalnym, powiększonym obszarze, posiadać wiele minimów tzn. może, oprócz nas interesującego minimum globalnego, posiadać minima lokalne. Znajdując wtedy jakiś zbiór wartości minimalizujący funkcje jakości nie wiemy, bez dodatkowych informacji, czy zbiór ten odpowiada minimum globalnemu, czy minimum lokalnemu. Gdyby znaleźć resztę ewentualnych minimów i wszystkie je porównać, miałyby się odpowiedź. Jest to jednak praktycznie bardzo trudne, a czasami wręcz niemożliwe do zrealizowania. Dlatego, przede wszystkim na podstawie wiedzy apriorycznej o badanym

układzie, należy tak dobrać wartości początkowe procedury optymalizacji, by był on możliwie bliski zbiorowi wartości optymalnych. Poza tym można porównać niektóre ze znalezionych wartości parametrów z wartościami wyznaczonymi z bezpośrednich pomiarów /np. bezpośredniego pomiaru masy czy sztywności/.

W przypadku, gdy funkcja jakości ma oprócz minimum globalnego minima lokalne, może się zdarzyć, że przy nieodpowiednim doborze wartości początkowych procedury optymalizacji, procedura ta będzie "zmierzać" poza obszar dopuszczalny parametrów, w kierunku znajdującego się tam minimum lokalnego. Należy wtedy zmienić wartości początkowe procedury. Można też zastosować tzw. procedury optymalizacji z ograniczeniami. Procedury te zapewniają to, że znaleziony zbiór wartości minimalizujących funkcję jakości znajduje się wewnątrz dopuszczalnego obszaru.

W dalszym ciągu posłużymy się oznaczeniami ze schematu procesu identyfikacji z rysunku 4.6, wykorzystującym już przekształcenie modulatoryjne  $D$  .

### 5.2.1 Metoda pierwsza

W metodzie tej zakłada się , że minimalna wartość funkcji jakości wynosi zero :

$$\min_{\underline{q}} J(\underline{q}) = \min_{\underline{q}} J(e(s, \underline{q})) = 0$$

Warunkiem koniecznym na istnienie takiego minimum jest :

$$e(s, \underline{q}) = \hat{u}(s, \underline{q}) - u(s) = 0$$

czyli:  $\hat{u}(s, \underline{q}) = u(s)$

gdzie:  $\hat{u}(s, \underline{q}) = D[N(x, \underline{q})]$

stąd otrzymujemy równanie:

$$/5.5/ \quad D[N(x, \underline{a})] = u(s)$$

Oznaczmy symbolem  $D_i$  operator  $D$ , odpowiadający konkretnej wartości argumentu  $s = s_i$ ; oraz założmy, że liczba szukanych parametrów modelu wynosi  $n$ . Biorąc równanie /5.5/ dla różnych  $n$  wartości argumentu  $s$ , można zbudować następujący układ równań, którego rozwiązaniem będą szukane wartości parametrów:

$$\begin{cases} D_1[N(x, \underline{a})] = u(s_1) \\ \vdots \\ D_n[N(x, \underline{a})] = u(s_n) \end{cases} \longrightarrow \underline{a} = \underline{a}^*$$

### 5.2.2 Metoda druga

Ponieważ funkcje jakości omawianego typu są dwukrotnie różniczkowalne /5.2a/, więc minimum funkcji jakości można znaleźć wychodząc z następujących warunków:

$$/5.6a/ \quad \frac{\partial J(\underline{a})}{\partial a_k} = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

$$/5.6b/ \quad \left. \frac{\partial^2 J(\underline{a})}{\partial a_k^2} \right|_{\underline{a} = \underline{a}^*} > 0$$

Przyjmijmy funkcję jakości w postaci /5.2c/:

$$J(\underline{a}) = \sum_{i=1}^m [\hat{u}(s_i, \underline{a}) - u(s_i)]^2$$

Wtedy równanie /5.6a/ przybierze postać:

$$/5.7/ \quad \frac{\partial J(\underline{a})}{\partial a_k} = +2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{u}(s_i, \underline{a})}{\partial a_k} [\hat{u}(s_i, \underline{a}) - u(s_i)]$$

Biorąc to równanie dla tylu wartości argumentu  $s$  ile wynosi liczba  $n$ /szukanych wartości parametrów, otrzymamy układ równań, którego rozwiązaniem są te szukane wartości

$$/5.8/ \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{u}(s_i, \underline{a})}{\partial a_1} [\hat{u}(s_i, \underline{a}) - u(s_i)] = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{u}(s_i, \underline{a})}{\partial a_n} [\hat{u}(s_i, \underline{a}) - u(s_i)] = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{a} = \underline{a}^*$$

### 5.2.3 Trzecia metoda

W metodzie tej nie buduje się układu równań, którego rozwiązaniem są wartości szukanych parametrów. Wartości tych szuka się za pomocą procedury iteracyjnej, którą można przedstawić wzorem:

$$\underline{a}^{(i+1)} = \Pi(\underline{a}^{(i)}, \underline{a}^{(i-1)}, \dots, \underline{a}^{(i-k)})$$

gdzie  $\Pi$  oznacza operację, którą należy wykonać na  $k+1$  kolejno wyznaczonych wartościach  $\underline{a}$ . Operacja ta zawiera w sobie obliczenie wartości funkcji jakości, przy czym:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a^{(i)} = a^*$$

### 5.3 Uwagi o metodach minimalizacji funkcji jakości

Zasadnicza różnica w szukaniu minimum funkcji jakości, przy wykorzystaniu przekształcenia modulacyjnego i bez niego,

polega na tym, że w tym ostatnim przypadku w każdej iteracji należy znaleźć rozwiązanie nieliniowego równania różniczkowego, potrzebne do następnej iteracji. W przypadku zastosowania funkcji modulującej unikamy tego kłopotliwego ze względu na obliczenia momentu /rozdż.4.2/.

Teoretycznie rzecz biorąc, w opracowanej metodzie, argument  $S$  może zmieniać się w sposób ciągły w pewnym skończonym przedziale. Jednakże w przypadku obliczeń numerycznych bierzemy skończoną liczbę wartości tego argumentu. Im więcej weźmiemy tych wartości, tym bardziej "wygładzimy" błędy, lecz tym więcej będziemy mieli obliczeń. Wynika to z faktu, że dane z pomiarów obarczone są błędami przypadkowymi. Błędy te różnią się co do wartości i co do znaku. Zastosowanie większej ilości pomiarów powoduje, że wpływ poszczególnych błędów znoszą się. Mówimy wtedy o wygładzeniu [4].

Powyższe trzy metody różnią się również pod względem konieczności i celowości doboru rodzaju przekształcenia modulacyjnego  $D$  oraz wartości argumentu  $S$ . Doboru tego dokonuje się w momencie, gdy dysponujemy już konkretnymi przebiegami  $x(t)$  i  $u(t)$  bądź charakterystykami losowymi np.  $K_{xx}(\tau)$  i  $K_{xu}(\tau)$ . Nie można sformułować ogólnych reguł doboru rodzaju przekształcenia modulacyjnego  $D$  oraz wyboru wartości argumentu  $S$ . Rzecz tak się ma nawet dla przypadku, gdy badany układ jest liniowy [10]. Można natomiast sformułować pewne kryteria doboru. Omówimy je na przykładzie pierwszej metody minimalizacji funkcji jakości, przedstawionej w rozdz.5.2.1. W metodzie tej buduje się układ równań, każde z równań tego układu przedstawia sobą hiperpowierzchnię w przestrzeni parametrów. Ze względu na dokładność rozwiązania tego układu równań, hiperpowierzchnie opisane tymi równaniami powinny w szukanym punkcie wspólnym /wyznaczającym szukane wartości/ przecinać się pod kątem jak najbardziej zbliżonym do kąta prostego. Z analitycznego punktu widzenia odpowiada

to sytuacji, w której wyrazy na diagonalu jacobianu układu równań, w punkcie będącym szukanym rozwiązaniem układu, mają jak największą wartość w stosunku do reszty wyrazów jacobianu w danym wierszu. Poza tym oczywiście, w celu zapewnienia istnienia rozwiązań wartość jacobianu w punkcie będącym szukanym rozwiązaniem musi być różna od zera. W celu spełnienia powyższych warunków w metodzie pierwszej koniecznym jest dobór zarówno rodzaju przekształcenia modulacyjnego jak i wartości argumentu  $S$ . W metodzie drugiej i trzeciej brana jest pod uwagę większa liczba wartości argumentu  $S$ , niż w metodzie pierwszej. W celu porównania pod rozpatrywanym względem tych metod z metodą pierwszą przyjmijmy, że każdej wartości argumentu  $S$  w tych metodach odpowiada inne równanie tego typu, jakie jest w metodzie pierwszej. Z kombinacji tych równań można utworzyć wiele układów równań, typu układu równań z metody pierwszej. W tej sytuacji zwiększa się prawdopodobieństwo, że chociaż jeden z takich układów spełnia przedstawione wyżej warunki. Ponieważ liczba możliwych do zbudowania układów równań rośnie z liczbą branych pod uwagę wartości argumentu  $S$ , więc również z ich liczbą spada stopień konieczności precyzyjnego doboru przekształcenia modulacyjnego  $D$  i wartości argumentu  $S$ .

#### 5.4 Przypadek losowy

Omówimy teraz pewne aspekty zastosowania metod minimalizacji funkcji jakości w przypadku losowym. Jak już wcześniej pisaliśmy, problem losowy dzięki zastosowaniu operatorów wyznaczania momentów funkcji losowych zostaje sprowadzony do problemu zdeterminowanego /rys.4.4 /Jeśli momenty generowane przez  $k$ -ty operator  $M_k$  nie są wartością stałą, to biorąc pod uwagę tylko ten jeden operator  $M_k$ , metody identyfikacji będą identyczne jak dla przypadku zdeterminowanego. Ponadto metoda pierwsza i druga z rozdziału 5.2 mogą być obecnie nieco rozszerzone. Możemy mianowicie posłużyć się różnymi momenta-

mi generowanymi przez różne operatory  $M$ , przy czym wartości argumentu  $S$  przekształcenia  $D$  dla momentów wygenerowanych przez różne przekształcenia  $M_k$ , nie muszą być różne /muszą być oczywiście różne dla momentów generowanych przez to samo przekształcenie  $M_k$ . Możemy tutaj też wziąć momenty, które są wartościami stałymi. Wzięcie samych momentów, będących wartościami stałymi nie wystarcza do identyfikacji wszystkich parametrów /gdyż pochodne funkcji stałej równa się zero/, dlatego należy wziąć pod uwagę co najmniej tyle momentów, nie będących wartościami stałymi, ile parametrów układu nie można zidentyfikować za pomocą momentów, będącymi wartościami stałymi.

## 6. Identyfikacja układu mechanicznego w przypadku występowania zakłóceń.

### 6.1 Wstęp.

Obecnie zajmujemy się takimi układami mechanicznymi, w których występują niemierzalne zakłócenia /t.j. takie których nie potrafimy zmierzyć/. Będziemy zakładali, że zakłócenia te mają charakter stacjonarnych funkcji losowych, których wariancje są ograniczone, a wartości średnie równe zero. Poza tym zakładamy, że zakłócenia te nie są skolerowane ani z sygnałami, które zakłócają, ani między sobą. Będziemy zakładali również, że sygnały zakłócające dodawane są do sygnału wejściowego i wyjściowego układu /rys. 6.1/. Zwróćmy uwagę, że w przypadku zakłóceń mierzone są inne sygnały /rys. 6.1 - Z i U / niż rzeczywiście podawane lub odbierane sygnały z układu bądź modelu /  $u$ ,  $x$  /. Fakt ten jest powodem powstawania w niektórych sytuacjach dodatkowych trudności. Szczegółowiej będzie o tym mowa w rozdz. 6.2.

W literaturze, dotyczącej identyfikacji do potrzeb regulacji automatycznej, obszernie są omawiane metody identyfikacji tego typu układów, lecz dotyczą one w zasadzie tylko przypadku zastosowania modeli prostych [4, 6] . W związku z tym w rozdz. 6.2, autor przeprowadził próbę porównania problemów występujących w identyfikacji układów, w przypadku występowania zakłóceń, przy pomocy: mało znanego modelu odwrotnego i powszechnie stosowanego modelu prostego. W rozdziale 6.3 zostanie przedstawiony i omówiony schemat identyfikacji układu mechanicznego, w przypadku występowania zakłóceń, przy zastosowaniu przekształcenia modulacyjnego.

W rozdz. 6.4 dokonamy podsumowania dotychczasowego materiału pod kątem czynności, jakie należy wykonać, stosując opracowaną metodę.

### 6.2 Model prosty i odwrotny, a zakłócenie układu mechanicznego.

W przypadku identyfikacji układu, w którym występują za-



kłócenia, można wyróżnić dwie typowe sytuacje, którym odpowiadają dwie zasadniczo różne postacie sygnałów wejściowych modelu. Ma to miejsce bez względu na to czy stosowany model jest prosty czy odwrotny.

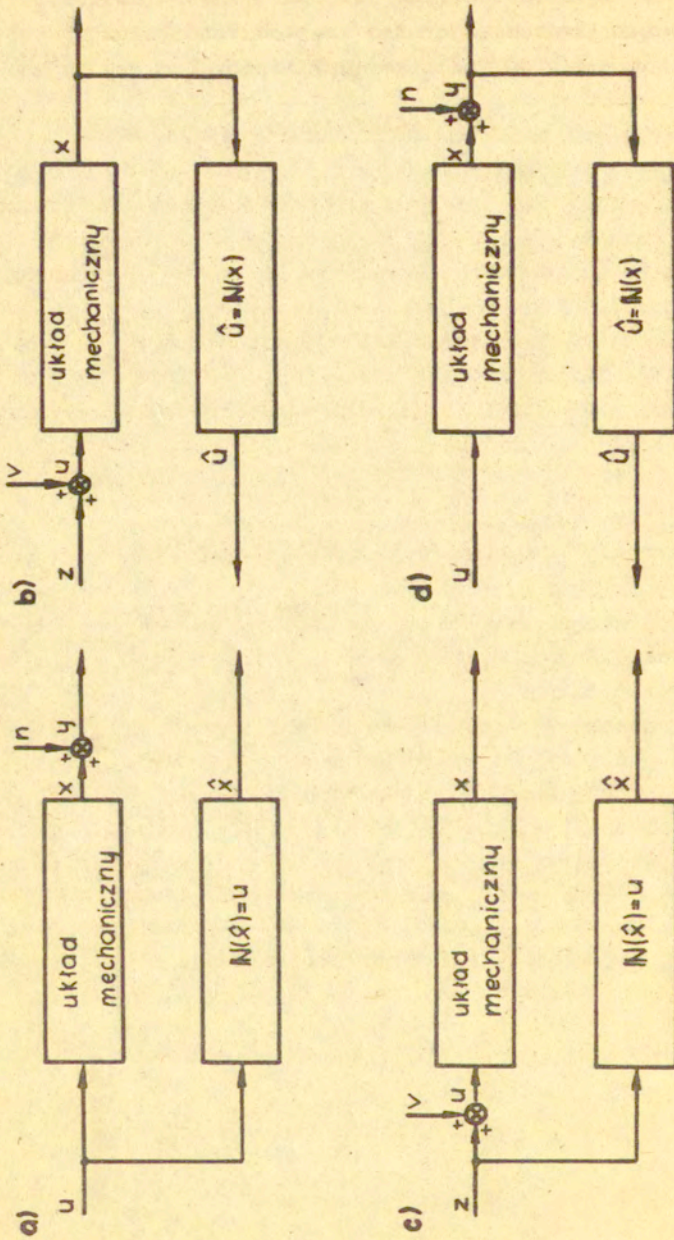
Pierwszy przypadek to taki, w którym sygnał wejściowy modelu nie jest zakłócany /Rys.6.1a, b/. Algorytm identyfikacji mało różni się wtedy od algorytmu dla sytuacji, gdy nie występują zakłócenia /rozd.6.3.1/.

Drugi ze spotykanych przypadków to taki, w którym sygnał wejściowy modelu ulega zakłóceniom /Rys.6.1c, d/. Cechą algorytmu identyfikacji będzie teraz to, że oprócz szukania takiego modelu, który będzie najbardziej adekwatny do układu, algorytm ten musi zawierać szukanie takiego sygnału wejściowego modelu, który będzie najbardziej zbliżony do odpowiedniego sygnału układu:

model prosty - sygnału wejściowego układu  $U$  ,  
model odwrotny - sygnału wyjściowego układu  $X$  .

Zatem algorytm identyfikacji różni się znacznie od algorytmu identyfikacji układu, nie poddanego zakłóceniom. Podobnie ma się rzecz, gdy zakłócany jest zarówno sygnał wejściowy i wyjściowy układu /rozd.6.3.2/.

Z powyższego wynika, że w celu uniknięcia komplikacji należy zapewnić, aby sygnał wejściowy modelu był niezakłócany. Zatem model prosty należy stosować, gdy zakłócany jest sygnał wyjściowy układu /rys.6.1a/, a model odwrotny, gdy zakłócany jest sygnał wejściowy układu /rys.6.1 b/.



Rys. 6.1 Postać sygnału wejściowego modelu  
- sygnał niezakłócony: a-model prosty, b-model odwrotny,  
- sygnał zakłócony: c-model prosty, d-model odwrotny,

### 6.3 Schemat identyfikacji układu w przypadku występowania zakłóceń.

Obecnie przedstawimy schematy identyfikacji dla dwu postaci sygnału wejściowego modelu: sygnału niezakłóconego i sygnału zakłóconego, co w przypadku stosowania modelu odwrotnego odpowiada odpowiednio sytuacji zakłócania sygnału wejściowego układu i sytuacja zakłócania sygnału wyjściowego układu bądź wyjściowego i wejściowego jednocześnie /rozd.6.2/

#### 6.3.1 Schemat identyfikacji, gdy zakłócany jest sygnał wejściowy układu.

Zajmijmy się sytuacją przedstawioną na rys.6.1.b. Schemat identyfikacji z zastosowaniem przekształcenia modulacyjnego, odpowiadający temu przypadkowi zakłócania, jest przedstawiony na rys.6.2. Błąd  $e_v(s, Q)$  określamy następująco:

$$e_v(s, Q) = \hat{u}(s, Q) - u(s)$$

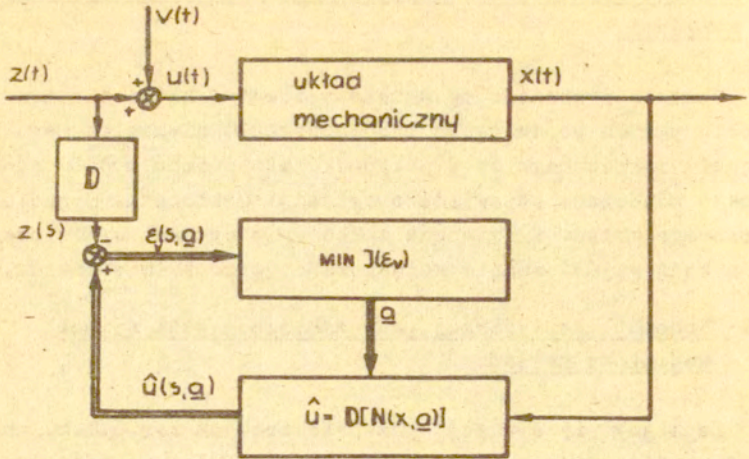
gdzie:  $u(s) = z(s) + v(s)$

stąd mamy:

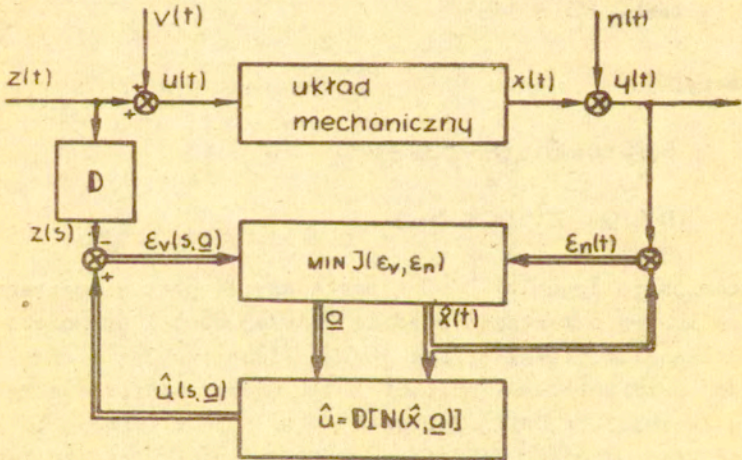
$$/6.1/ \quad e_v(s, Q) = \hat{u}(s, Q) - z(s) - v(s)$$

gdzie:  $\hat{u}(s, Q) - z(s) = \varepsilon(s, Q)$

Przypomnijmy: o sygnale  $v(t)$  zakładamy, że jest stacjonarną funkcją losową o wartości średniej równej zero i ograniczonej wariancji. Ponieważ sygnał  $v(t)$  jest funkcją losową, więc jej przekształcona postać  $v(s)$  jest również funkcją losową /rozd.3.3/. Dalej, ponieważ  $v(s)$  jest funkcją losową, więc błąd  $e_v(s, Q)$  jest także funkcją losową. Podajmy teraz równanie /6.1/ operacji wyznaczania wartości średniej kwadratowej:



Rys.6.2 Schemat procesu identyfikacji gdy zakłócony jest sygnał wejściowy układu.  
 $v(t)$  - niemierzalny sygnał zakłócający,  $z(t)$  - mierzony sygnał wejściowy,  $u(t)$  - rzeczywisty sygnał wejściowy układu.



Rys.6.3 Schemat procesu identyfikacji gdy zakłócony jest sygnał wejściowy i wyjściowy układu.  
 $v(t)$  i  $n(t)$  - niemierzalne sygnały zakłócające,  $z(t)$  i  $y(t)$  - mierzone sygnały układu,  $u(t)$  i  $x(t)$  - rzeczywiste sygnały układu.

$$E[e_v^2] = E[(\hat{U} - z - v)^2]$$

gdzie:  $E$  operator wartości średniej.

Stąd po uwzględnieniu /3.9/ i /3.12/ mamy:

$$E[e_v^2] - b_v T_s = (\hat{U} - z)^2 = \varepsilon_v^2$$

gdzie:  $b_v = b_v(s)$  - współczynnik proporcjonalności  
 $T_s$  - długość przedziału, poza którym funkcja  $\varphi$   
przekształcenia modulacyjnego  $D$   
równa się zero.

Oznaczając:  $E[e_v^2] - b_v T_s = \bar{\varepsilon}_v^2 T_s$ , mamy:

$$/6.2/ \quad \bar{\varepsilon}_v = T_s^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_v = T_s^{-\frac{1}{2}} (\hat{U} - z)$$

Uwzględniając w powyższym równaniu zależność  $\bar{\varepsilon}_v$  od zbioru parametrów  $\underline{Q}$  i biorąc je dla  $S = S_i$ , można zbudować funkcję jakości postaci:

$$/6.3/ \quad J(\underline{Q}) = \sum_{i=1}^m \bar{\varepsilon}_v^2(s_i, \underline{Q}) = \sum_{i=1}^m T_{s_i} [u(s_i, \underline{Q}) - z(s_i)]^2$$

Funkcja jakości ma tu podobną budowę jak w przypadku, gdy nie występowały zakłócenia /rozd.5.2.3/. Ponieważ błąd  $e_v$  zawiera błąd  $b_v T_s$ , powstały od zakłócającego sygnału losowego, więc funkcja jakości nie osiąga minimum w punkcie, gdzie  $J(\underline{Q}) = 0$  tylko gdy  $J(\underline{Q}) \geq 0$ . Zatem do minimalizacji jej nie można stosować pierwszej metody minimalizacji /rodz.5.2.1/, tylko dwie następne /rozd.5.2.2. i 5.2.3/.

### 6.3.2 Schemat identyfikacji, gdy zakłócanie są sygnały wejściowy i wyjściowy układu.

Zajmijmy się sytuacją przedstawioną na rys.6.1.b i

6.1.d. Schemat identyfikacji, z zastosowaniem przekształcenia modulacyjnego, odpowiadający temu przypadkowi jest przedstawiony na rys. 6.3. Błąd  $e_v(s, \underline{q})$  określimy następująco:

$$e_v(s, \underline{q}) = \hat{u}(s, \underline{q}) - u(s)$$

gdzie:  $u(s) = z(s) + v(s)$

stąd mamy:

/6.4/  $e_v(s, \underline{q}) = \hat{u}(s, \underline{q}) - z(s) - v(s)$

gdzie:  $\hat{u}(s, \underline{q}) - z(s) = \varepsilon(s, \underline{q})$

oraz:

$$e_n(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

gdzie:  $x(t) = y(t) - n(t)$

stąd mamy:

/6.5/  $e_n(t) = \hat{x}(t) - y(t) + n(t)$

gdzie:  $\hat{x}(t) - y(t) = \varepsilon_n(t)$

Przypomnijmy, że sygnały  $v(t)$  i  $n(t)$  (zgodnie z założeniami, są stacjonarnymi funkcjami losowymi o wartości średniej równej zero i ograniczonej wariancji. Poddamy teraz równanie /6.5/ operacji wyznaczania wartości średniej kwadratowej:

$$E[e_n^2] = E[(\hat{x} - y + n)^2]$$

stąd po uwzględnieniu założeń odnośnie  $n$  mamy:

$$E[e_n^2] - E[n^2] = (\hat{x} - y)^2 = \varepsilon_n^2$$

stąd oznaczając:  $\bar{e}_n^2 = E[e_n^2] - E[n^2]$ , mamy:

$$/6.6/ \quad \bar{e}_n = \varepsilon_n = \hat{x} - y$$

Uwzględniając fakt, że równanie /6.3/ nie różni się od równania /6.1/, zatem zgodnie z /6.2/ dla  $s = s_i$  mamy:

$$/6.7/ \quad \bar{e}_v = T_s^{-1/2} (\hat{u} - z)$$

Uwzględniając w równaniu /6.7/ zależność od parametrów  $\underline{Q}$  oraz biorąc to równanie dla  $s = s_i$ , a równanie /6.6/ dla  $t = t_j$ , możemy funkcję jakości zbudować następująco:

$$/6.8/ \quad J(\underline{Q}, x(t)) = \sum_{i=1}^m \bar{e}_v^2(s_i, \underline{Q}) + \sum_{j=1}^p \bar{e}_n^2(t_j) = \\ = \sum_{i=1}^m T_{s_i}^{-1} [\hat{u}(s_i, \underline{Q})]^2 + \sum_{j=1}^p [\hat{x}(t_j) - y(t_j)]^2$$

Funkcja ta znacznie różni się od funkcji jakości dla przypadku bez zakłóceń ze względu na problem optymalizacji sygnału  $x(t)$ . Do minimalizacji tej funkcji jakości należy użyć trzeciej z przedstawionych metod minimalizacji /rozdz.5.2.3/.

Problem jest trudny do rozwiązania, bo do zbioru szukanych parametrów  $\underline{Q}$  dochodzi zbiór szukanych wartości sygnału  $x(t_j)$ ,  $j=1, \dots, p$ , gdzie  $p$  liczba wartości  $t_j$  branych pod uwagę.

#### 6.4 Podsumowanie

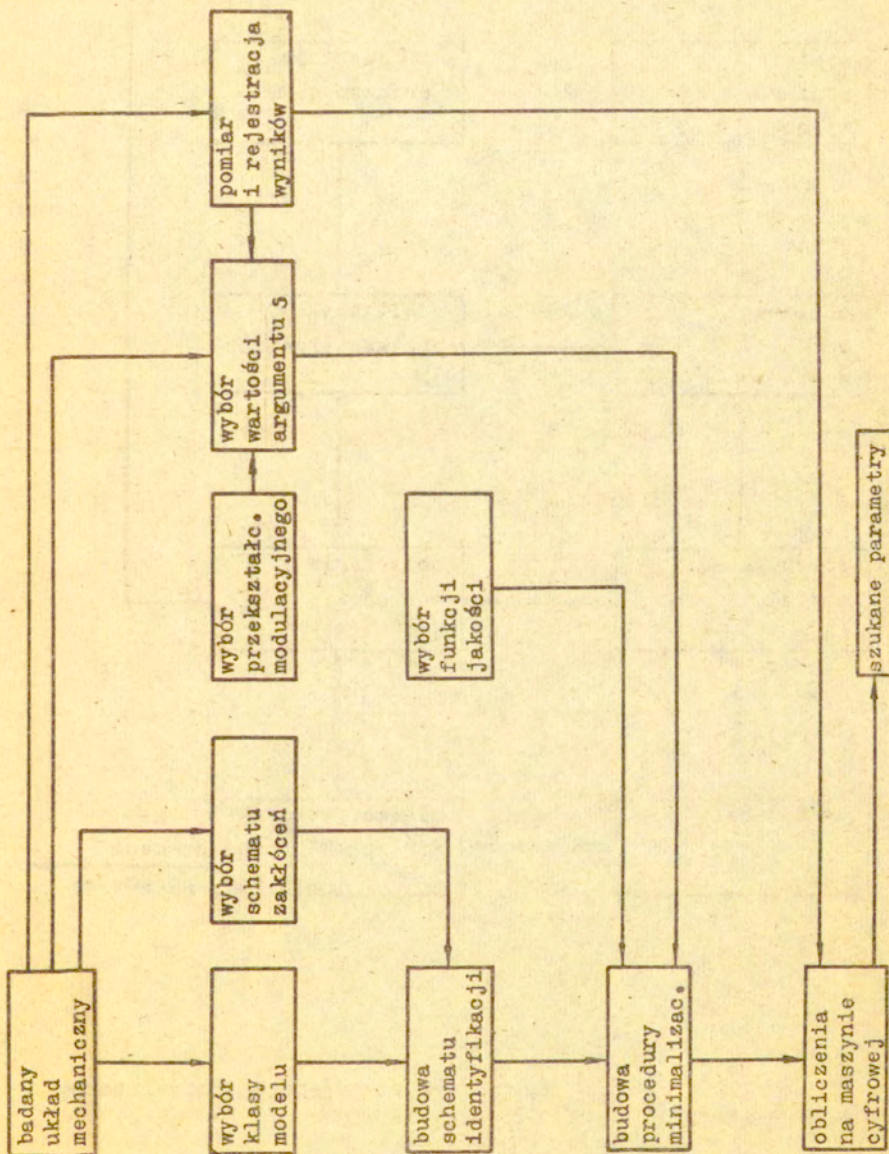
Dokonyamy teraz krótkiego podsumowania dotychczasowego materiału pod kątem czynności, jakie należy wykonać w celu znalezienia szukanych wartości parametrów modelu, w oparciu o opracowaną metodę identyfikacji /rozdz.4.3 i 4.4/, za pomocą maszyny cyfrowej. W tym celu założymy, że mamy zarejestrowane sygnały wejściowy i wyjściowy układu w postaci numerycznej /ciągi cyfr/. Poniżej zestawimy w punktach czynności, które należy wykonać przed przystąpieniem do obliczeń:

- 1 - wybór klasy modelu matematycznego badanego układu na podstawie wiedzy apriorycznej/rozdz.4:2 i 5:1/
- 2 - dokonanie założeń odnośnie wpływu zakłóceń na badany układ na podstawie wiedzy a priori oraz wybór schematu zakłócania układu /rozdz.6.2/
- 3 - wybór rodzaju przekształcenia modulacyjnego D /rozdz.3.2/
- 4 - wybór wartości argumentu  $s$  przekształconych funkcji /rozdz.5.3/
- 5 - budowa schematu identyfikacji /rozdz.4.3,4.4,6.3/
- 6 - wybór funkcji jakości przy uwzględnieniu pozycji 2 oraz metody jej minimalizacji /rozdz.5.2,5.3,6.3/
- 7 - budowa na podstawie pozycji od 1 do 5 numerycznego programu realizującego minimalizację funkcji jakości /rys.6.5/

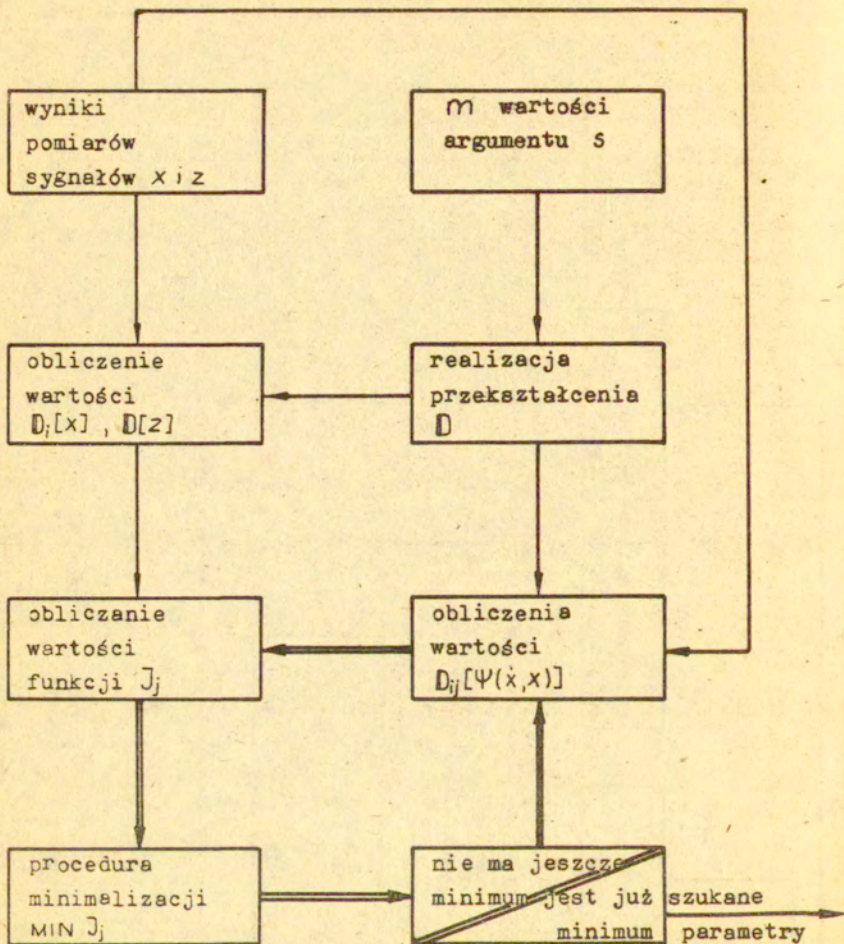
Po wykonaniu przedstawionych wyżej czynności można na podstawie zarejestrowanych sygnałów i za pomocą zbudowanego programu znaleźć szukane wartości. W sposób schematyczny zostało to pokazane na rys.6.4. Schemat programu realizującego minimalizację funkcji jakości dla przypadku, gdy zakłóceniom  $v$  podlega sygnał wejściowy mechanicznego układu, lub gdy brak zakłóceń /  $v=0$  /przedstawiono na rys.6.5. Danymi do realizacji takiego programu są wyniki pomiarów sygnałów układu oraz ustalone na ich podstawie wartości argumentu  $s$  /tj. argumentu przekształconych funkcji/. Liczba tych wartości  $m$  jest większa lub równa liczbie nieznanych parametrów  $n$  czyli  $i=1,2,\dots, m \geq n$ . Główna pętla obliczeń /rysunek 6.5-pogrubione linie/realizuje się poprzez: obliczenie w każdym  $j$ -tym kroku wartości funkcji jakości  $J_j$ ; wprowadzenie jej do procedury minimalizacji funkcji jakości  $\text{MIN } J_j$ , sprawdzenie czy osiągnięto minimum, jeśli tak to przerwanie obliczeń. Jeśli nie, to obliczenie nowej wartości funkcji jakości itd. Do obliczeń wartości funkcji jakości posługujemy się modelem matematycznym układu mechanicznego postaci:

$$a_1 \ddot{x} + \psi(\dot{x}, x) = Z + v$$





Rys. 6.4 Schemat czynności prowadzących do wyliczenia szukanych parametrów.



Rys.6.5 Schemat programu realizującego minimalizację funkcji jakości

oblicza się na podstawie  $m$  wartości przekształconych członów  $D_i[\dot{x}]$ ,  $D_i[z]$ ,  $D[\Psi(\dot{x}, x)]$ , przy czym obliczanie wartości  $D_i[\dot{x}]$  oraz  $D_i[z]$  nie znajduje się w głównej pętli, więc odbywa się tylko raz przed pierwszym krokiem w głównej pętli. Natomiast obliczenie  $D_{ij}[\Psi(\dot{x}, x)]$  znajduje się w głównej pętli i oblicza się w każdym jej kroku. Wynika to z uwzględnianej w tej pracy nieliniowej zależności członu  $\Psi$  od parametrów.

W oparciu o wyżej przedstawiony sposób postępowania w rozdziale 9 zostały przeprowadzone obliczenia:

## 7. Identyfikacja wielomasowych nieliniowych układów mechanicznych.

### 7.1 Wstęp

Dotychczas, w celu jasnego pokazania idei pracy, zajmowaliśmy się jednomasowymi układami mechanicznymi. Obecnie zajmujemy się układami wielomasowymi. Metodę postępowania przy identyfikacji takich układów omówimy na układzie, którego sygnały wejściowe są zakłócone niemierzalnymi sygnałami, będącymi stacjonarnymi funkcjami losowymi o wartościach średnich równych zero i o ograniczonych wariancjach. Ponadto o sygnałach tych będziemy zakładali, że nie są skolerowane ani z sygnałami zakłócanymi, ani między sobą.

Typ układów jakimi się zajmujemy, został bliżej określony w rozdz. 7.2. W rozdz. 7.3 zostały podane omówione dwa różne schematy identyfikacji układów wielomasowych.

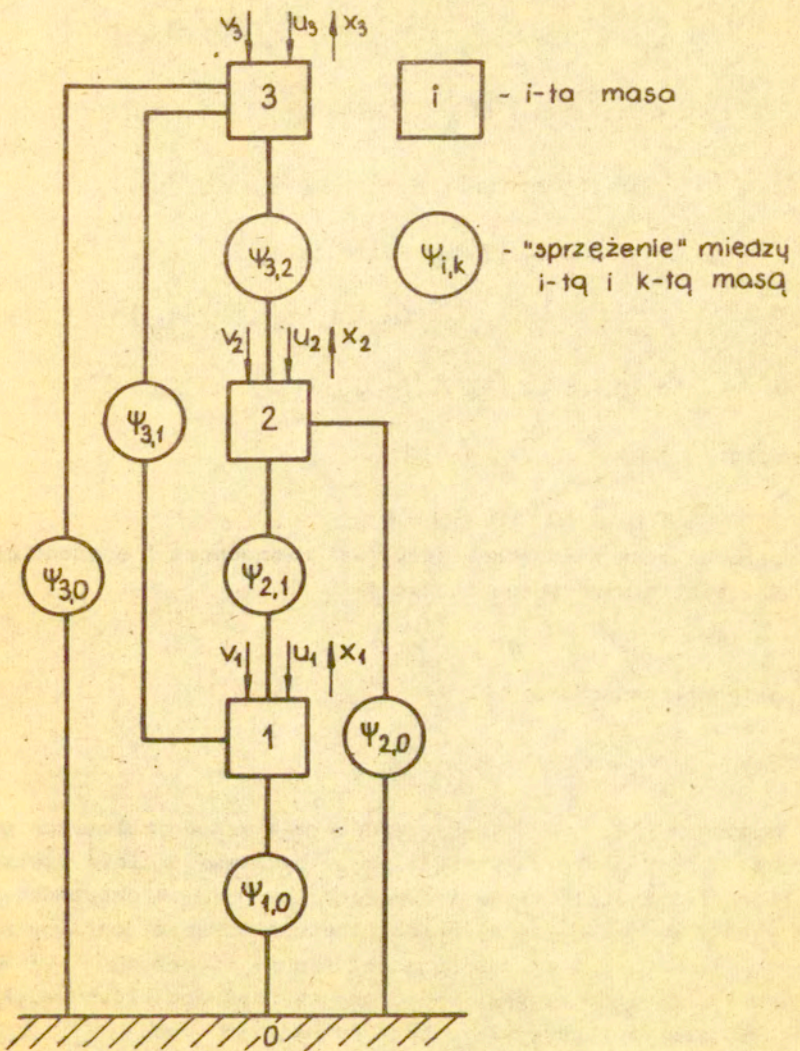
### 7.2 Wprowadzenie

Niech układ wielowymiarowy składa się z mas połączonych między sobą /sprzężonych/ za pomocą nieliniowych członów postaci:

$$/7.1/ \quad \Psi_{ij} = \Psi ([\dot{x}_i - x_j], [x_i - x_j])$$

gdzie:  $x_i = x_i(t)$

Na rysunku 7:1 pokazany jest schemat trójmasowego układu omawianego typu: W naszych rozważaniach zakładamy, że masa z indeksem "0" ma nieskończoną wielkość i jest nieruchoma. Masa ta stanowi układ odniesienia do pomiaru przemieszczeń  $X_i$  innych mas. Nazwiemy ją podstawą. Napiszmy równania opisujące ruch poszczególnych mas:



Rys 7.1 Schemat układu trójmasowego

$$\begin{aligned} /7.2/ \quad a_{11} \ddot{x}_1 + \Psi_{10}(\dot{x}_1, x_1) + \Psi_{12}(-[\dot{x}_2 - \dot{x}_1], -[x_2 - x_1]) + \\ + \Psi_{13}(-[\dot{x}_3 - \dot{x}_1], -[x_3 - x_1]) = u_1 + v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} /7.3/ \quad a_{22} \ddot{x}_2 + \Psi_{20}(\dot{x}_2, x_2) + \Psi_{21}([\dot{x}_2 - \dot{x}_1], [x_2 - x_1]) + \\ + \Psi_{23}(-[\dot{x}_3 - \dot{x}_2], -[x_3 - x_2]) = u_2 + v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} /7.4/ \quad a_{33} \ddot{x}_3 + \Psi_{30}(\dot{x}_3, x_3) + \Psi_{32}([\dot{x}_3 - \dot{x}_2], [x_3 - x_2]) + \\ + \Psi_{31}([\dot{x}_3 - \dot{x}_1], [x_3 - x_1]) = u_3 + v_3 \end{aligned}$$

gdzie:  $x = x(t)$  ;  $u = u(t)$

$a_{ii}$  - i-ta masa

ponieważ masa z indeksem zero jest nieruchoma i stanowi układ odniesienia, więc można zapisać:

$$\ddot{x}_0 = 0 \quad ; \quad \dot{x}_0 = 0 \quad ; \quad x_0 = 0$$

Następnie oznaczmy:

$$/7.5/ \quad x_{ik} = x_i - x_k$$

Nazywając  $x_i = x_i(t)$  i-tym wyjściem z układu, możemy na podstawie równania /7.5/ powiedzieć, że będziemy, ogólnie rzecz biorąc, korzystać z różnic wyjść  $x_{ik} = x_i - x_k$ . W przypadku, gdy sygnały wejściowe są sygnałami zdeterminowanymi, różnicę wyjść  $x_i$  i  $x_k$  uzyskamy odejmując od siebie zmierzone  $x_i$  i  $x_k$ . W przypadku, gdy sygnały wejściowe są funkcjami losowymi, nie korzystamy bezpośrednio z tych funkcji losowych  $x_i$  i  $x_k$ , lecz z ich momentów statystycznych; Gdy dysponujemy oddzielnymi momentami statyst.  $X_i$  i  $X_k$ , to dla uzyskania momentu drugiego rzędu różnicy  $x_{ik}$  oprócz momentów własnych  $X_i$  i  $X_k$  potrzebne są dwa momenty wzajemne:  $X_i$  względem  $X_k$  i  $X_k$  względem

dem  $\underline{X}_i$ . Oznaczamy zbiór sygnałów  $x_{1k}$  /7.5/ wchodzących w skład i-tego równania opisującego układ mechaniczny przez  $\underline{X}_i$ , analogicznie oznaczamy zbiór parametrów występujących w i-tym równaniu przez  $\underline{Q}_i$ . Wprowadzając nieliniowy operator równania różniczkowego  $\underline{N}$ , i-te równanie opisujące układ będzie można zapisać w postaci:

$$/7.6/ \quad \underline{N}_i(\underline{Q}_i, \underline{X}_i) = \underline{u}_i + \underline{v}_i$$

Dalej oznaczając zbiór sygnałów  $\underline{X}_i$  i parametrów  $\underline{Q}_i$  występujących we wszystkich równaniach przez odpowiednio  $\underline{X}$  i  $\underline{Q}$  oraz:

$$\underline{N} = \text{col} [\underline{N}_i]$$

$$\underline{u} = \text{col} [\underline{u}_i]$$

$$\underline{v} = \text{col} [\underline{v}_i]$$

otrzymamy:

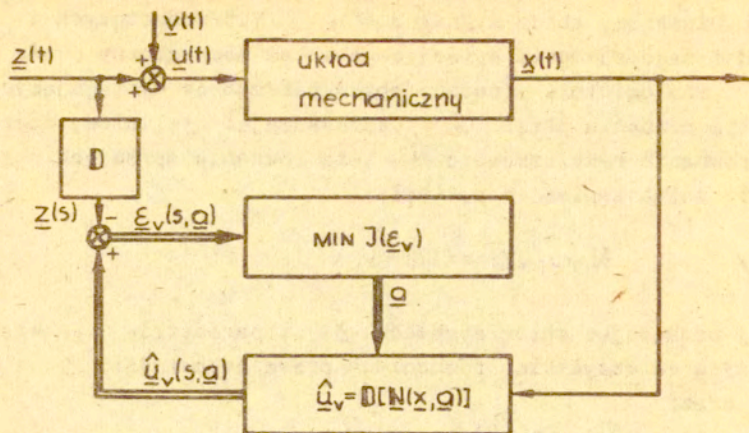
$$/7.7/ \quad \underline{N}(\underline{X}, \underline{Q}) = \underline{u} + \underline{v}$$

### 7.3 Schemat procesu identyfikacji

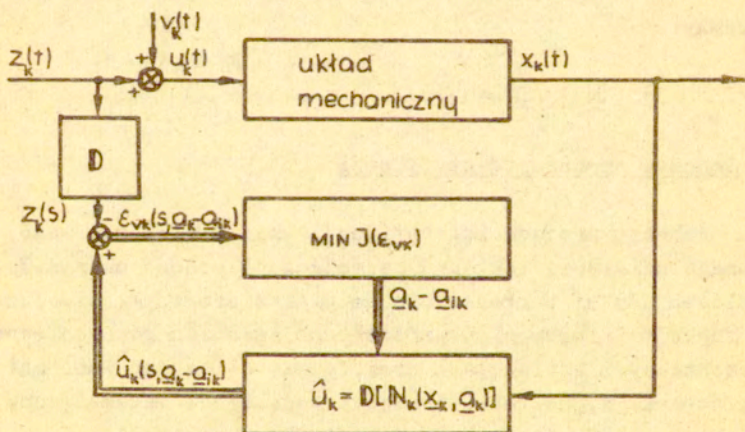
Schemat procesu identyfikacji układu wielomasowego, poddanego działaniu zakłóceń na wejściach podano na rys.7.2. O zakłóceniami  $\underline{V}$  zakładamy, że są nieskolerowanymi, stacjonarnymi funkcjami losowymi o wartościach średnich równych zero i o skończonych wariancjach oraz, że nie są skolerowane ani z zakłóconymi sygnałami, ani między sobą. Model matematyczny omawianego układu zapiszemy równaniem wektorowym:

$$/7.8/ \quad \underline{N}(\underline{X}, \underline{Q}) = \underline{u} + \underline{v}$$

Znaczenie symboli występujących w powyższym wzorze podano



Rys.7.2 Schemat procesu identyfikacji układu wielomasowego.



Rys.7.3 Schemat jednego etapu szczególnego procesu identyfikacji układu wielomasowego.

$a_k - a_{ik}$  - zbiór parametrów związanych z k-tą masą pomniejszony o znaleziony poprzednio zbiór parametrów "sprzężenia" między k-tą i i-tą masą.



w rozdz.7.1 .Błąd  $\underline{e}_v$  określimy następująco:

$$\underline{e}_v = \hat{\underline{u}} - \underline{u}$$

gdzie:  $\underline{u} = \underline{z} + \underline{v}$

stąd:

/7.9/  $\underline{e}_v = \hat{\underline{u}} - \underline{z} - \underline{v}$

gdzie:  $\hat{\underline{u}} - \underline{z} = \underline{\varepsilon}_v$

Poddamy i-ty wiersz powyższego równania wektorowego operacji wyznaczanie wartości średniej kwadratowej. Zauważmy przy tym, że przekształcony sygnał  $\underline{v} = \underline{v}(s)$  zgodnie z rozdz.6.3 jest funkcją losową. Mamy zatem:

$$\mathbb{E}[e_{vi}^2] = \mathbb{E}[(\hat{u}_i - z_i - v_i)^2]$$

a uwzględniając /3.9/ i /3.12/ mamy:

$$\mathbb{E}[e_{vi}^2] - b_{vi} T_s = (\hat{u}_i - z_i)^2$$

gdzie:  $b_{vi} = b_{vi}(s) T_s$  - współczynnik proporcjonalności  
 $T_s$  - długość przedziału, poza którym funkcja  $\Phi$  przekształcenia modulacyjnego  $\mathbb{D}$  równa się zero.

stąd oznaczając:  $\mathbb{E}[e_{vi}^2] - b_{vi} T_s = \bar{e}_{vi}^2 T_s$

/7.10/  $\bar{e}_{vi}^2 = T_s^{-1} \mathbb{E}[e_{vi}^2] = T_s^{-1} (\hat{u}_i - z_i)^2$

Określmy w następujący sposób funkcję jakości:

/7.11/  $J(\underline{a}) = \sum_{j=1}^m \bar{\underline{e}}_v^T(s_j) \bar{\underline{e}}(s_j)$

otrzymamy wtedy:

$$/7.12/ \quad J(\underline{a}) = \sum_{j=1}^m T_{s_j} [\hat{u}(s_j) - \underline{z}(s_j)]^T [\hat{u}(s_j) - \underline{z}(s_j)]$$

Ponieważ parametry występujące w każdym członie sprzęgającym wchodzi w skład dwu różnych równań, parametry całego układu można znaleźć w inny sposób, niż to było przedstawione wyżej. Sposób ten polega na znalezieniu najpierw wszystkich parametrów związanych z jedną masą "i" [8], na którą działa wymuszenie  $U_i$ , przez znalezienie parametrów równania różniczkowego opisującego ruch tej masy. Następnie szukamy parametrów związanych z inną masą "k". Jeśli masa ta jest sprzężona z poprzednią masą "i" to znanych jest już część parametrów wchodzących w skład równania opisującego ruch masy "k" /rys.7.3/. Przechodząc tak od masy do masy, znajdziemy po kolei wszystkie parametry układu wielowymiarowego, nie prowadząc identyfikacji jednocześnie wszystkich parametrów całego układu, lecz identyfikując kolejno niezidentyfikowane parametry związane z kolejnymi masami.

W celu przystąpienia do obliczeń według podanych wyżej schematów identyfikacji, przy zastosowaniu opracowanej metody, należy wykonać czynności opisane w rozdz.6.4 i zestawione na schemacie na rys.64.

## 8. Typ nieliniowości

### 8.1. Wstęp

W rozdziale tym zostaną przedstawione typy nieliniowych równań różniczkowych opisujących układ, jakie mogą być brane pod uwagę przy stosowaniu opracowanej metody.

Rozdział 8.2 jest wprowadzeniem do zagadnienia. Rozdział 8.3 będzie dotyczył przypadku zdeterminowanego. Najpierw zostaną wprowadzone oznaczenia /rozd.8.3.1/, następnie zostanie zaprezentowany typ nieliniowego równania różniczkowego /rozd.8.3.2/ Rozdział 8.4 będzie dotyczył przypadku losowego. Najpierw zostanie przedstawiona metoda postępowania przy doprowadzaniu losowych równań różniczkowych do zdeterminowanych równań różniczkowych /rozd.8.4.1/. Następnie zostanie zaprezentowany typ nieliniowości, jaki jest brany pod uwagę. /8.4.2/

W dodatku C zostaną wyprowadzone, z zaprezentowanych typów równań, równania o postaci dogodnej do stosowania.

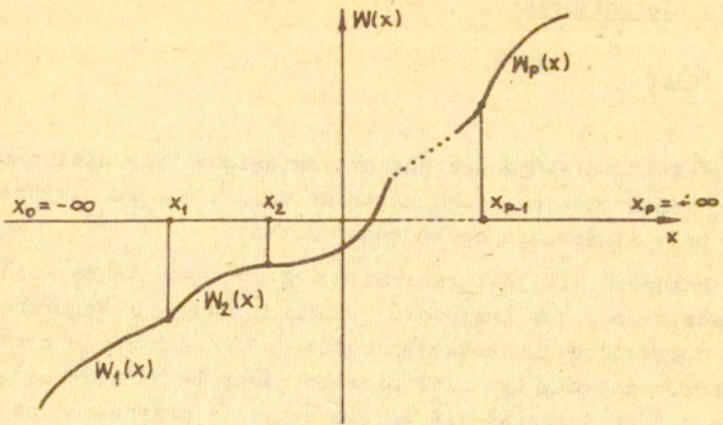
### 8.2. Wprowadzenie

W wielu przypadkach można przedstawić nieliniową zależność człomu układu od pewnej wielkości  $x$  jako funkcję, będącą odcinkami wielomianem/rys:8:1/:

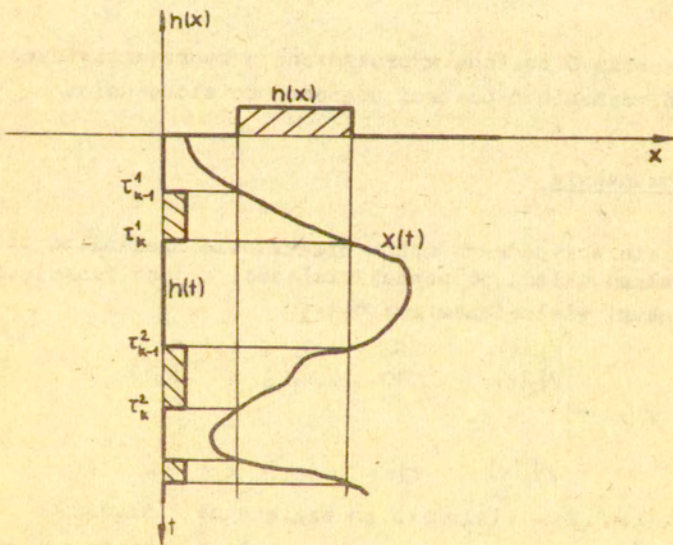
$$/8.1/ \quad W(x) = \begin{cases} W_1(x) & \text{dla } x_0 \leq x \leq x_1 \\ W_2(x) & \text{dla } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ W_p(x) & \text{dla } x_{p-1} \leq x \leq x_p \end{cases}$$

gdzie:  $W_k(x) = W_k(x, \underline{a})$  - wielomian ze względu na wielkość  $x$   
 $k=1..p$  z parametrami o stałych wartościach, należącymi do zbioru  $\underline{a} = [a_1, a_2 \dots a_n]$

$x_k = x_k(\underline{a})$  - stała, będąca funkcją stałych parametrów  
 $k=1..p-1$



Rys.8.1 Funkcja będąca odcinkami wielomianem.



Rys.8.2 Zależność między funkcjami  $h(t)$  i  $h(x)$

wielomianów  $W_k$  i  $W_{k+1}$   
oraz:  $x_0 = -\infty$ ,  $x_p = +\infty$ ,  $W_k(x_k) = W_{k+1}(x_k)$

Ponieważ wiele nieliniowości /np. typu "luz", "suche tarcie"/ można opisać funkcjami powyższego typu, w dalszym ciągu będziemy brali takie funkcje pod uwagę.

### 8.3. Przypadek zdeterminowany

#### 8.3.1 Wprowadzenie oznaczeń

Wprowadzimy najpierw pewne oznaczenia, ułatwiające zapis. Wielomian /8.1/ można zapisać nieco inaczej, posługując się funkcją jednostkową  $\mathcal{U}(x)$

$$/8.2/ \quad W(x) = \sum_{k=1}^p W_k(x) \cdot \mathcal{U}(x - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^p W_k(x) \cdot \mathcal{U}(x - x_k)$$

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$/8.3/ \quad h_k(x) = \mathcal{U}(x - x_{k-1}) - \mathcal{U}(x - x_k)$$

można zapis funkcji  $W(x)$  uprościć jeszcze bardziej:

$$/8.4/ \quad W(x) = \sum_{k=1}^p W_k(x) \cdot h_k(x)$$

Chcąc podkreślić, że wielomian  $W(x)$  zależy od parametrów ze zbioru  $\underline{a} = [a_1 \dots a_n]$ , możemy zapisać:

$$/8.5/ \quad W(x) = W(x, \underline{a})$$

Ponieważ  $x = x(t)$  jest funkcją czasu, więc i  $h(x)$  jest jego funkcją. Zobrazowano to na rys.8.2

Przedziałowi  $(X_{k-1}, X_k)$  na osi  $X = X(t)$  odpowiadają przedziały  $(\tau_{k-1}^i, \tau_k^i)$  na osi  $t$ . Przedziały te są wyznaczone przez przecięcie się przebiegu  $X(t)$  z liniami odpowiadającymi

$$X = X_{k-1} \quad \text{i} \quad X = X_k$$

Funkcję  $h(t)$  można zapisać jako:

$$/8.6/ \quad h_k(t) = \mathbb{1}(t - \tau_{k-1}^i) - \mathbb{1}(t - \tau_k^i) = \mathbb{1}(X(t) - X_{k-1}) - \mathbb{1}(X(t) - X_k) = h_k(X(t))$$

$$\text{gdzie:} \quad \tau_{k-1}^i = t: (X(t) = X_{k-1}, \dot{X}(t) \geq 0) \cup (X(t) = X_k, \dot{X}(t) \leq 0)$$

$$\tau_k^i = t: (X(t) = X_k, \dot{X}(t) \leq 0) \cup (X(t) = X_{k-1}, \dot{X}(t) \geq 0)$$

Można mówić o równości funkcji  $h_k(t)$  i  $h_k(X(t))$ , gdyż w tych samych chwilach  $t$  przyjmują one te same wartości.

Zatem zależność /8.5/ można zapisać dla  $X = X(t)$  następująco:

$$/8.7/ \quad W(X, \underline{a}) = \sum_{k=1}^P W_k(X, \underline{a}) h_k(t, \underline{a})$$

gdzie:  $h_k(t, \underline{a})$  jest zdefiniowana wzorem /8.6/

W przypadku, gdy funkcja  $W(X)$  będzie składała się z samych wielomianów stopnia pierwszego będziemy ją oznaczali  $L(X)$

$$/8.8/ \quad L(X, \underline{a}) = \sum_{k=1}^P L_k(X, \underline{a}) h_k(t, \underline{a})$$

gdzie:  $L_k(X, \underline{a})$  - jednomian ze względu na  $X$  o stałych parametrach należących do zbioru  $\underline{a}$

Wprowadzone tutaj oznaczenia zastosujemy w następnych rozdziałach przy określaniu typu nieliniowości.

### 8.3.2 Określenie typu nieliniowości

W przypadku **zdeteterminowanym** będziemy zajmowali się układem dynamicznym opisanym następującymi równaniami:

$$/8.9/ \quad a_1 \ddot{x} + \Psi(\dot{x}, x) = u$$

$$/8.10/ \quad \text{gdzie: } \Psi(\dot{x}, x) = \sum_{i=1}^5 L^i(\dot{x}, \underline{q}) \cdot W^i(x, \underline{q})$$

oraz  $u = u(t)$  - sygnał wejściowy

$x = x(t)$  - sygnał wyjściowy

$L^i(\dot{x}, \underline{q})$  - funkcja składająca się z odcinków jednomianów względem  $\dot{x}$  o parametrach należących do zbioru  $\underline{q} = [q_1 \dots q_n]$  gdzie  $n$  - liczba parametrów w równaniu

$W^i(x, \underline{q})$  - funkcja składająca się z odcinków wielomianów względem  $x$  o parametrach  $\underline{q}$ .

$a_1$  - stała

W dodatku C.1 powyższe równanie jest doprowadzone do dogodnej do stosowania postaci.

Taka postać równania została wybrana jako pewien kompromis między próbą objęcia możliwie szerokiej klasy silnie nieliniowych układów mechanicznych i zapewnieniem możliwie jak najlepszego wykorzystania podstawowej zalety przekształcenia modulacyjnego tj. doprowadzenia przekształconych równań do postaci, w której nie występują pochodne sygnału wejściowego układu.

## 8.4 Przypadek losowy

### 8.4.1 Metoda postępowania

W tym podrozdziale podamy na przykładowym losowym równaniu różniczkowym metodę przekształcania takiego równania w różniczkowe równania zdeterminowane. Następnie dokonamy przekształcenia modulacyjnego.

Niech losowe równanie różniczkowe, opisujące układ ma postać:

$$/8.11/ \quad a_1 \ddot{X}(t) + a_2 \dot{X}(t) + \Psi(X(t), \underline{q}) = U(t)$$

gdzie:  $a_1, a_2$  - parametry o wartościach stałych  
 $\Psi(X(t), \underline{q})$  - nieliniowa funkcja argumentu  $X(t)$  i pa-

parametrów ze zbioru  $\underline{a} = [a_1 \dots a_n]$

$X(t), U(t)$  - funkcje losowe

Każdy człon powyższego równania, dla ustalonej chwili  $t=t_k$  jest zmienną losową, zatem równanie to można poddać operacji wyznaczania wartości średniej. Niech symbol  $E$  oznacza operację wyznaczenia wartości średniej. Działając na obie strony równania /8.11/ operatorem  $E$  otrzymamy:

$$E[a_1 \ddot{X}(t) + a_2 \dot{X}(t) + \Psi(X(t), \underline{a})] = E[U(t)]$$

$$a_1 E[\ddot{X}(t)] + a_2 E[\dot{X}(t)] + E[\Psi(X(t), \underline{a})] = E[U(t)]$$

Przyjmując następujące oznaczenie na wartość średnią funkcji losowej  $F(t)$

$$E[F(t)] = m_F(t) = m_F$$

otrzymamy:

$$/8.12/ \quad a_1 m_{\ddot{x}} + a_2 m_{\dot{x}} + m_{\psi} = m_u$$

a po wykorzystaniu własności pochodnej funkcji losowej /dodatek B.3/ otrzymamy:

$$/8.13/ \quad a_1 \ddot{m}_x + a_2 \dot{m}_x + m_{\psi} = m_u$$

gdzie:  $m_x$  i  $m_u$  - wartość średnia funkcji losowej  $X(t)$  i  $U(t)$

$m_{\psi}$  - wartość średnia funkcji losowej  $\Psi(X(t), \underline{a})$

ponieważ wartości średnie nie są już zmiennymi losowymi, lecz zmiennymi mającymi charakter deterministyczny, zatem powyższe



równanie nie jest już losowe, lecz zdeterminowane. Występująca w nim wartość średnia  $m_\psi$  jest nieliniowa ze względu na parametry  $\underline{Q}$ :

Dokonując na równaniu /8.13/ przekształcenia modulującego, otrzymamy:

$$\mathbb{D}[a_1 \ddot{m}_x + a_2 \dot{m}_x + m_\psi] = \mathbb{D}[m_U]$$

i wreszcie:

$$/8.14/ \quad a_1 \ddot{m}_x(s) + a_2 \dot{m}_x(s) + m_\psi(s) = m(s)$$

gdzie:

$$\ddot{m}_x(s) = \mathbb{D}[\ddot{m}_x(t)] = \langle m_x(t), \ddot{\phi}(t,s) \rangle$$

$$\dot{m}_x(s) = \mathbb{D}[\dot{m}_x(t)] = \langle m_x(t), \dot{\phi}(t,s) \rangle$$

$$m_\psi(s) = \mathbb{D}[m_\psi(t, \underline{Q})] = \langle m_\psi(t, \underline{Q}), \phi(t,s) \rangle$$

Dla ustalonego argumentu  $s = s_k$  równanie /8.14/ jest zwykłym równaniem przestępnym:

$$a_1 \ddot{m}_x(s_k) + a_2 \dot{m}_x(s_k) + m_\psi(s_k, \underline{Q}) = m_U(s_k)$$

gdzie:-  $\ddot{m}_x(s_k), \dot{m}_x(s_k), m_U(s_k)$  są liczbami /wartościami funkcji  $\ddot{m}_x(s), \dot{m}_x(s), m_U(s)$  w punkcie  $s = s_k$

-  $m_\psi(s_k, \underline{Q})$  jest nieliniową funkcją parametrów ze zbioru  $\underline{Q}$

Do obliczenia nieliniowej funkcji  $m_\psi(s_k, \underline{Q})$  parametrów  $\underline{Q} = [a_1, \dots, a_n]$ , będziemy się posługiwali współczynnikiem  $C_0$  /B.3/, stosowanym do obliczenia wartości średniej  $m_\psi(t, \underline{Q})$

ponieważ:  $m_{\psi}(t, \underline{a}) = c_0(m_x(t), \delta_x(t), \underline{a})$

więc:  $m_{\psi}(s, \underline{a}) = D[m_{\psi}(t, \underline{a})] = D[c_0]$

W pracy [9] podane są wzory na wyznaczanie współczynników  $C_0$  za pomocą funkcji Gaussa  $\Phi(u)$  i jej pochodnych.

Zajmiemy się teraz operacjami wyznaczania momentów drugiego rzędu. Operacje te uszeregujemy ze względu na rodzaj momentu powstającego po prawej stronie przekształcanego równania losowego. Weźmiemy więc kolejno pod uwagę operacje, które po prawej stronie przekształcanego równania losowego dają:

$K_{XU}(t_1, t_2)$  - funkcję korelacji wzajemnej

$W_{XU}(t_1, t_2)$  - wariancję wzajemną

$K_{UU}(t_1, t_2)$  - funkcję korelacji własnej

$W_{UU}(t_1, t_2)$  - wariancję własną

By zbudować równanie z funkcją korelacji własnej z prawej jego strony, odejmiemy od równania /8.11/ równanie /8.13/.

W otrzymanej różnicy dwu równań ustalmy chwilę  $t = t_2$ . Następnie pomnożmy lewostronnie obie strony tej różnicy przez wyrażenie  $X(t_1) - m_x(t_1)$  i tak otrzymane równanie poddajmy operacji wyznaczania wartości średniej.

Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} /8.15/ \quad & E[(X_1 - m_{x1})a_1(\ddot{X}_2 - \ddot{m}_{x2})] + E[(X_1 - m_{x1})a_2(\dot{X}_2 - \dot{m}_{x2})] + \\ & + E[(X_1 - m_{x1})(\Psi(X_2, \underline{a}) - m_{\psi2})] = E[(X_1 - m_{x1})(U_2 - m_{u2})] \\ & X_i = X(t_i) \quad ; \quad m_{xi} = m_x(t_i) \end{aligned}$$

Z definicji funkcji korelacji własnej funkcji losowych  $F(t)$  i  $G(t)$  mamy:

$$K_{FG} = K_{FG}(t_1, t_2) = E[(F_1 - m_{F1})(G_2 - m_{F2})]$$

wobec powyższego równanie /8.15/ można zapisać w postaci:

$$/8.16/ \quad a_1 K_{X\ddot{X}} + a_2 K_{X\dot{X}} + K_{X\psi} = K_{XU}$$

Korzystając z własności pochodnej /dodatek B3/ funkcji losowej otrzymany w dalszym ciągu:

$$a_1 \frac{d^2 K_{XX}(t_1, t_2)}{dt_2^2} + a_2 \frac{dK_{XX}(t_1, t_2)}{dt_2} + K_{X\psi}(t_1, t_2) = K_{XU}(t_1, t_2)$$

ustalając  $t_1$  możemy powyższe równanie zapisać:

$$/8.17/ \quad a_1 \ddot{K}_{XX} + a_2 \dot{K}_{XX} + K_{X\psi} = K_{XU} \quad t_1 = \text{const}$$

gdzie:  $\ddot{K}_{XX} = \frac{d^2 K_{XX}(t_1, t_2)}{dt_2^2} = K_{XX}''(t_1, t_2)$

Dla uzyskania równania z wariancją wzajemną, weźmy równanie

$$/8.17/ \quad \text{dla } t_2 = t_1 = t :$$

oznaczając:

$$K_{XX}(t, t) = W_{XX}(t, t) = W_{XX}$$

$$K_{XU}(t, t) = W_{XU}(t, t) = W_{XU}$$

mamy:

$$/8.18/ \quad a_1 \ddot{W}_{XX} + a_2 \dot{W}_{XX} + W_{X\psi} = W_{XU}(t, t)$$

Do wyznaczenia funkcji korelacji wzajemnej funkcji losowych

$X(t)$  i  $\psi(X(t))$ , w zależności od funkcji korelacji własnej

$K_{XX}(t_1, t_2)$  posłużymy się wzorem /B.5/ i współczynnikiem wyznaczonym wg wzoru /B.3/

$$/8.19/ \quad K_{X\psi} = - \frac{c_1(m_X, \sigma_X)}{\sigma_X} \Big|_{t=t_2} \cdot K_{XX}$$

analogicznie postępujemy z  $W_{X\psi}(t, t)$  mamy:

$$W_{X\psi} = - \frac{c_1(m_X, \sigma_X)}{\sigma_X} W_{XX}$$

Dokonując przekształcenia modulacyjnego na równaniu /8.17/ otrzymamy:

$$/8.20/ \quad a_1 \ddot{K}_{XX}(s) + a_2 \dot{K}_{XX}(s) + K_{X\psi}(s) = K_{XU}(s)$$

gdzie:

$$\ddot{K}_{xx}(s) = \mathbb{D}[\ddot{K}_{xx}] \Big|_{t_1 = \text{const}}$$

$$\dot{K}_{xx}(s) = \mathbb{D}[\dot{K}_{xx}] \Big|_{t_1 = \text{const}}$$

$$K_{x\psi}(s) = \mathbb{D}[K_{x\psi}] \Big|_{t_1 = \text{const}}$$

$$K_{xu}(s) = \mathbb{D}[K_{xu}] \Big|_{t_1 = \text{const}}$$

Analogiczne równanie otrzymamy przekształcając równanie /8.18/

Zbudujemy teraz równanie z funkcją korelacji własnej po prawej jego stronie, w tym celu od równania /8.11/ odejmujemy równanie /8.13/ i w otrzymanej różnicy równań ustalamy chwilę  $t = t_1$ . Analogicznie robimy dla chwili  $t = t_2$ , a następnie obie różnice równań mnożymy przez siebie i otrzymane równanie podajemy operacji wyznaczania wartości średniej.

Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} /8.21/ \quad & a_1^2 K_{\ddot{x}\ddot{x}} + a_2 a_1 K_{\dot{x}\ddot{x}} + a_1 a_2 K_{\ddot{x}\dot{x}} + a_2^2 K_{\dot{x}\dot{x}} + a_1 K_{\dot{x}\psi} + a_1 K_{\psi\dot{x}} + a_2 K_{\dot{x}\psi} + a_2 K_{\psi\dot{x}} \\ & + K_{\psi\psi} = K_{uu} \end{aligned}$$

korzystając z /B.9/, otrzymamy:

$$\begin{aligned} /8.22/ \quad & a_1^2 \frac{\partial^4 K_{xx}}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} + a_1 a_2 \frac{\partial^3 K_{xx}}{\partial t_1^2 \partial t_2} + a_2 a_1 \frac{\partial^3 K_{xx}}{\partial t_1 \partial t_2^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 K_{xx}}{\partial t_1 \partial t_2} + a_1 \frac{\partial^2 K_{x\psi}}{\partial t_1^2} \\ & + a_1 \frac{\partial^2 K_{\psi x}}{\partial t_2^2} + a_2 \frac{\partial K_{x\psi}}{\partial t_1} + a_2 \frac{\partial K_{\psi x}}{\partial t_2} + K_{\psi\psi} = K_{uu} \end{aligned}$$

Powyższe równanie jest równaniem różniczkowym cząstkowym ze względu na  $t_1$  i  $t_2$ . Człony typu  $K_{x\psi}$  oblicza się zgodnie z /B.5/ wg wzoru:

$$/8.23/ \quad K_{x\psi} = - \frac{c_1 [m_x, \delta_x]}{\delta_x} \Big|_{t=t_2} \cdot K_{xx}$$

natomiast  $K_{\psi\psi}$  wyraża się wzorem:

$$/8.24/ \quad K_{\psi\psi}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n[m_x(t_1), \delta_x(t_1)] c_n[m_x(t_2), \delta(t_2)] \cdot \frac{r_{xx}^n(t_1, t_2)}{n!}$$

lub inaczej

$$/8.25/ \quad K_{\psi\psi}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n[t_1] c_n[t_2] \cdot \frac{r_{xx}^n(t_1, t_2)}{n!}$$

gdzie:  $r_{xx}(t_1, t_2) = \frac{K_{xx}(t_1, t_2)}{\delta_x(t_1)\delta_x(t_2)}$  - unormowana funkcja korelacyjna  
 $c_n$  - współczynnik ze wzoru /B.3/

W przypadku gdy  $t_2 = t_1 = t$  z równania /8.22/ otrzymamy równanie na wariancje  $W_{xx}(t, t)$ . Podając równanie /8.22/ przekształceniu modulatoryjnego otrzymamy:

$$/8.26/ \quad a_1^2 \frac{\partial^4 K_{xx}(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} + a_1 a_2 \frac{\partial^3 K_{xx}(s_1, s_2)}{\partial s_1^2 \partial s_2} + a_2 a_1 \frac{\partial^3 K_{xx}(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2^2} +$$

$$a_2^2 \frac{\partial^2 K_{xx}(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} + a_1 \frac{\partial^2 K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial s_1^2} + a_1 \frac{\partial^2 K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial s_2^2} +$$

$$a_2 \frac{\partial K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial s_1} + a_2 \frac{\partial K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial s_2} + K_{\psi\psi}(s_1, s_2) = K_{UU}(s_1, s_2)$$

gdzie:

$$\frac{\partial^{n+m} K_{xx}(s_1, s_2)}{\partial s_1^n \partial s_2^m} = \mathbb{D} \left[ \frac{\partial^{n+m} K_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m} \right] \quad n, m = 1, 2$$

$$\frac{\partial^n K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial t_i^n} = \mathbb{D} \left[ \frac{\partial^n K_{\psi\psi}(t_1, t_2)}{\partial t_i^n} \right] \quad i, n = 1, 2$$

/8.27/

$$K_{\psi\psi}(s_1, s_2) = \mathbb{D}[K_{\psi\psi}(t_1, t_2)]$$

$$K_{UU}(s_1, s_2) = \mathbb{D}[K_{UU}(t_1, t_2)]$$

Gdy funkcje losowe  $X(t)$  i  $U(t)$  są stacjonarnymi funkcjami losowymi równania /8.14/ /8.20/ /8.24/ przybiorą odpo-

wiednio postać:

$$/8.28/ \quad m_{\psi} = m_U$$

$$\text{gd}y\acute{z}: \quad m_{\ddot{x}} = m_{\dot{x}} = 0$$

$$/8.29/ \quad a_1 \ddot{K}_{xx}(s) + a_2 \dot{K}_{xx}(s) + K_{x\psi}(s) = K_{xU}(s)$$

$$\text{gdzie:} \quad \ddot{K}_{xx}(s) = \mathbb{D}[\ddot{K}_{xx}(\tau)]$$

$$\dot{K}_{xx}(s) = \mathbb{D}[\dot{K}_{xx}(\tau)]$$

$$K_{x\psi}(s) = \mathbb{D}[K_{x\psi}(\tau)]$$

$$K_{xU}(s) = \mathbb{D}[K_{xU}(\tau)]$$

gd}y\acute{z} dla stacjonarnej funkcji losowej:

$$K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(t_2 - t_1) = K_{xx}(\tau) \quad t_2 - t_1 = \tau$$

$$/8.30/ \quad a_1^2 K_{xx}^{(4)}(s) + a_2^2 (-\ddot{K}_{xx}(s)) + a_1 \ddot{K}_{x\psi}(s) + a_1 \ddot{K}_{\psi x}(s) +$$

$$+ a_2 (-\dot{K}_{x\psi}(s)) + a_2 \dot{K}_{\psi x}(s) + K_{\psi\psi}(s) = K_{UU}(s)$$

$$\text{gdzie:} \quad K_{xx}^{(4)}(s) = \mathbb{D}[K_{xx}^{(4)}(\tau)]$$

$$\ddot{K}_{xx}(s) = \mathbb{D}[\ddot{K}_{xx}(\tau)]$$

$$\dot{K}_{xx}(s) = \mathbb{D}[\dot{K}_{xx}(\tau)]$$

$$K_{x\psi}(s) = \mathbb{D}[K_{x\psi}(\tau)]$$

$$K_{\psi\psi}(s) = \mathbb{D}[K_{\psi\psi}(\tau)]$$

$$K_{UU}(s) = \mathbb{D}[K_{UU}(\tau)]$$

oraz gdyż:

$$K_{xx}(t_1 - t_2) = K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(\tau) \quad t_2 - t_1 = \tau$$

i wtedy:

$$\frac{\partial K_{xx}}{\partial t_1} = \frac{-dK_{xx}(\tau)}{d\tau}$$

$$\frac{\partial K_{xx}}{\partial t_2} = \frac{dK_{xx}(\tau)}{d\tau}$$

$$\frac{\partial^2 K_{xx}}{\partial t_1^2 \partial t_2} = \frac{-\partial^2 K_{xx}}{\partial t_1 \partial t_2}$$

W równaniu /8.22/ występuje człon z  $K_{\psi\psi}$ , który wyznacza się w przypadku ogólnym z nieskończonej sumy /9.2/. Jednakże w wielu przypadkach [9] suma ta okazuje się skończoną, gdyż współczynniki  $c_n$ ,  $n > n_0$  dla pewnego skończonego  $n_0$ , są równe zero. Tak na przykład dla nieliniowości w kształcie paraboli

$c_n = 0$  dla  $n > 3$ . Poza tym, dla przypadku niestacjonarnego, celowym jest korzystanie z równania na wariancję  $K_{UU}(t, t) = W_{UU}(t, t)$  zamiast równania na funkcję korelacyjną  $K_{UU}(t_1, t_2)$ , gdyż w pierwszym przypadku człon z  $K_{\psi\psi}(t, t) = W_{\psi\psi}(t, t)$  obliczyć można nie posługując się w ogóle sumą nieskończoną. Wzory na obliczenie  $W_{\psi\psi}(t, t)$  dla wielu funkcji nieliniowych są podane w pracy [9].

#### 8.4.2. określenie typu nieliniowości

Będziemy się zajmowali układami dynamicznymi dającymi się opisać następującym losowym równaniem różniczkowym:

$$/8.31/ \quad a_1 \ddot{X} + \Psi(\dot{X}, X) = U$$

$$/8.32/ \quad \text{gdzie: } \Psi(\dot{X}, X) = \sum_{i=1}^k F_i(\dot{X}) \cdot G_i(X)$$

oraz:  $X = X(t)$  - normalna funkcja losowa uzyskana na wyjściu z układu /w ogólnym przypadku niestacjonarna/

$U=U(t)$  - normalna funkcja losowa podana na wejściu układu /w ogólnym przypadku niestacjonarna/

$\ddot{X}, \dot{X}$  - pochodne funkcji losowej  $X(t)$

$F_i(\dot{X}), G_i(X)$  - funkcje argumentów odpowiednio  $\dot{X}$  i  $X$  będące w ogólnym przypadku odciwkami wielomianowymi.

$Q_1$  - stała

Funkcje  $F_i$  i  $G_i$  są zależne od parametrów  $Q$  należących do zbioru:  $Q=[Q_1, \dots, Q_n]$ ,  $n$ -liczba parametrów w równaniu /8.31/

W dodatku C doprowadzono to losowe równanie różniczkowe do zdeterminowanego, a następnie doprowadzono je do postaci dogodnej do obliczeń.

Przy wyborze postaci powyższego równania kierowano się identycznymi względami, jak przy określaniu typu nieliniowości w przypadku zdeterminowanym, a więc próbą ujęcia możliwie szerokiej klasy silnie nieliniowych układów i możliwościami przekształcenia modulacyjnego.

Jak wynika z dotychczasowych rozważań, opracowana metoda może być zastosowana do silnie nieliniowych układów, które mogą być opisane równaniami /8.9/, /8.31/. Przy praktycznym zastosowaniu tej metody interesujące byłoby uzyskanie odpowiedzi na pytanie: jaki wpływ mają niemierzalne zakłócenia sygnału wejściowego badanego układu? Ponadto należałoby sprawdzić jaki wpływ, dla różnych zakłóceń, ma rodzaj stosowanego przekształcenia modulacyjnego  $D$  /rodzaj funkcji modulującej  $\Phi$  /oraz wartości nowego argumentu  $s$  i brana pod uwagę liczba tych wartości. Dlatego w dalszej części pracy zostaną przeprowadzone eksperymenty, które dadzą odpowiedź na postawione wyżej zagadnienia.



## 9. Badania eksperymentalne.

### 9.1 Wstęp

Program badań eksperymentalnych podporządkowano konkluzjom, które sformułowano na zakończenie części teoretycznej pracy /rozd.8/.

Na początku dokonano wyboru silnie nieliniowego układu mechanicznego, zawierającego często występujące w praktyce nieliniowe elementy typu "luz", "suche tarcie" /rozd.9.2/. Sygnał wejściowy i wyjściowy wybranego układu, uzyskano drogą symulacji numerycznej za pomocą języka SYMUD 1 [14]. Po zbudowaniu numerycznego programu identyfikacji została przeprowadzona identyfikacja parametrów na podstawie uzyskanych uprzednio sygnałów wejściowego i wyjściowego /rozd.9.3/. Na koniec uzyskane wyniki zostały poddane analizie i opracowane /rozd.9.4,9.5/

### 9.2. Wybór układu

W celu uzyskania odpowiedzi na postawione wyżej zagadnienia, należało przeprowadzić odpowiednie eksperymenty numeryczne i przebadać możliwie dużo wariantów, zmieniając odpowiednio warunki obliczeń. Aby niepotrzebnie nie komplikować i tak już złożonych obliczeń, należało przyjąć możliwie prosty model matematyczny, ale jednocześnie taki, który posiadałby wszystkie potrzebne cechy układów, należących do rozpatrywanej klasy. Dlatego obliczenia numeryczne przeprowadzono dla silnie nieliniowego, jedno-masowego układu /rys.9.1/, którego model matematyczny ma postać równania:

$$/9.1/ \quad a_1 \ddot{x} + a_2 \text{sign}(\dot{x}) + a_3 f(x, a_4) = u$$

gdzie:

$$f(x, a_4) = \begin{cases} x - a_4 & \text{dla } a_4 < x \\ 0 & \text{dla } -a_4 \leq x \leq a_4 \\ x + a_4 & \text{dla } x < -a_4 \end{cases}$$

Ponieważ, jak to już pokazano w rozdz.1.2, wiele układów me-

chanicznych zawiera takie nie dające się pominąć nieliniowe elementy, jak "luz" i "suche tarcie", więc do badań algorytmu identyfikacji, opartego na metodzie opracowanej dla silnie nieliniowych układów mechanicznych, zastosowano układ zawierający te właśnie elementy. Jako parametry układu przyjęto następujące wartości:

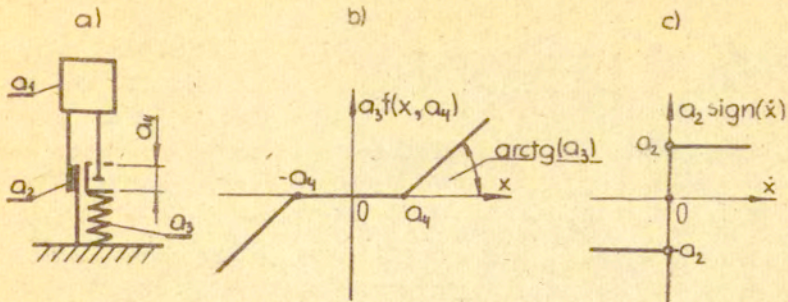
masa	$Q_1 = 1$
siła tarcia	$Q_2 = 100$
stała sprężystości	$Q_3 = 3600$
wielkość "luzu"	$Q_4 = 0.1$

Jako sygnał wejściowy układu wybrano sygnał, składający się z sumy sygnałów sinusoidalnych o częstościach 43, 63, 163, 263 oraz o odpowiednich amplitudach 50, 150, 300, 200. Spowodowało to wygenerowanie sygnału wypadkowego, którego przebieg i kształt, odpowiadał pojedynczej realizacji typowego sygnału losowego, przy czym wzięto pod uwagę następujące przypadki:

- gdy nie ma zakłóceń sygnału wejściowego badanego układu  $\Delta t_j$ : odchylenie standardowe sygnału zakłócającego jest równe zero,
- gdy występują zakłócenia sygnału wejściowego i odchylenie standardowe sygnału zakłócającego, będącego normalnym sygnałem losowym, wynosi 5% oraz 30% maksymalnej obserwowanej wartości niezakłóconego sygnału wejściowego.

Do badań uzyskano po 450 skwantyfikowanych wartości mierzalnych sygnałów wejściowych i wyjściowych dla każdego z trzech powyższych przypadków. Uzyskano je z eksperymentu numerycznego. Wykorzystano tu język SYMUD 1 opracowany w Zakładzie Systemów Automatyki Przemysłowej PAN [14]. Taki sposób postępowania ma tę zaletę, że znane są dokładnie wartości parametrów układu, więc można dokładnie określić wpływ na identyfikację: zakłóceń, rodzaju przekształcenia modulacyjnego, wartości argumentu  $S$  itp. Natomiast wadą tego postępowania jest niemożliwość sprawdzenia, jak metoda jest wrażliwa na niezgodność struktury modelu ze strukturą układu, mającą zawsze miejsce przy badaniu układów realnych, a wynikającą z faktu, że model odpowiada rzeczywistości tylko z pewnym przybliżeniem.

W Dodatku C zestawiono dane odnośnie przeprowadzonej symulacji.



Rys.9.1 Wybrany układ mechaniczny:  
 a-model nominalny; Charakterystyki: b - czionu sprężystego z "luzem", c-czionu reprezentującego "suche tarcie"

### 9.3 Obliczenia

Program numeryczny, realizujący procedurę identyfikacji /na podstawie sygnałów wejściowego i wyjściowego układu, podanych w skwantyfikowanej postaci/ został ułożony zgodnie ze schematem z rys.6.5 i prezentowany jest wraz z krótkim omówieniem w dodatku E.

Do badań został wybrany typ funkcji modulującej o następującej postaci analitycznej i kształcie:

$$/9.2/ \quad \varphi(t, s) = \begin{cases} (t-s)^2 (t-s-T_s)^2 & \text{dla } t \in (s, s+T_s) \\ 0 & \text{dla } t \notin (s, s+T_s) \end{cases}$$

W rozdziale 5.3 zasygnalizowano na podstawie rozważań teoretycznych, problem wpływu na rezultat identyfikacji: rodzaju przekształcenia modulacyjnego  $\mathbb{D}$ , wartości  $S$  i uwzględnianej liczby tych wartości. W rozdziale 9.5 zostaną omówione wyniki badań eksperymetalnych w tym zakresie. Do badań wpływu rodzaju przekształcenia modulacyjnego na rezultat identyfikacji zastosowano 3 różne pod względem "szerokości" funkcje  $\Phi$

/9.2/, posiadające następujące długości przedziału, poza którym tożsamościowo równe są zero: 5, 17, 67 jednostek kroku próbkowania /długość przedziałów rejestracji sygnałów wejściowego i wyjściowego wynosiła 449 jednostek kroku próbkowania/. Do badania wpływu uwzględnianej liczby  $m$  kolejnych wartości argumentu  $s$ , w stosunku do liczby szukanych parametrów, zastosowano dwie jej wartości: 4 i 12 /liczba szukanych parametrów modelu wynosi 4 - rozdz. 9.2/. W rozdziale 5.3 pisaliśmy, że wybór samej wartości argumentu ma znaczenie dla wyniku identyfikacji, gdy brana pod uwagę liczba tych wartości jest mała np. równa liczbie szukanych parametrów modelu.

Do zbadania tego zagadnienia zastosowano dwa warianty: raz dobierano tak 4 wartości argumentu  $s$ , by były spełnione warunki, o których mowa niżej, a raz nie. Zgodnie z rozdziałem 5.3, przy wyborze wartości argumentu  $s$  w celu zapewnienia jak największej dokładności, należy zróżniczkować lewe strony równania, będącego modelem matematycznym badanego układu, względem poszczególnych szukanych parametrów i należy tak kierować się wyborem wartości argumentu  $s$ , by dla różnych wartości tego argumentu, różne z wyznaczonych pochodnych miały możliwie największą wartość w stosunku do reszty pochodnych. Zakładamy przy tym, że szukane parametry mają swą wartość optymalną. W naszym przypadku, po zróżniczkowaniu lewej strony przekształconego modulacyjnie równania /9.1/ względem poszczególnych jego parametrów otrzymamy:

$$\frac{\partial D[N(x, a)]}{\partial a_1} = D[\ddot{x}] = \int_s^{s+T_s} \varphi \ddot{x} dt$$

$$\frac{\partial D[N(x, a)]}{\partial a_2} = D[\text{sign}(\dot{x})] = \int_s^{s+T_s} \varphi \text{sign}(\dot{x}) dt$$

$$\frac{\partial D[N(x, a)]}{\partial a_3} = D[f(x, a_4)] = \int_s^{s+T_s} \varphi f(x, a_4) dt$$

$$\frac{\partial D[N(x, a)]}{\partial a_4} = D[a_3 \cdot \frac{df(x, a_4)}{da_4}] = \int_s^{s+T_s} \varphi a_3 \frac{df(x, a_4)}{da_4} dt$$

Dla funkcji  $\varphi$  postaci /9.2/, pochodne te będą miały różne bezwzględne wartości/w zależności od charakteru modulowanego przebiegu  $x$ , zawartego w przedziale  $/s, s+T_s /$  //w następujący sposób:

- pierwsza będzie miała dużą wartość, gdy krzywizna przebiegu  $x$  będzie duża, a małą, gdy przeciwnie,
- druga będzie miała dużą wartość, gdy przebieg  $x$  nie będzie miał ekstremum, a małą, gdy będzie ekstremum po środku przedziału  $/s, s+T_s /$ ,
- trzecia będzie miała dużą wartość, gdy przebieg będzie osiągał duże wartości bezwzględne, a małą, gdy przeciwnie,
- czwarta będzie miała dużą wartość, gdy bezwzględna wartość przebiegu będzie bliska szukanej wartości parametru  $Q_4$ , a małą, gdy przeciwnie.

Mówiąc więc o doborze wartości argumentu  $\theta$ , będziemy mieli na myśli dążenie do spełnienia powyższych warunków.

#### 9.4 Opracowanie wyników badań

Obliczeń dokonano na maszynie matematycznej Odra 1204, przy pomocy programu opisanego w dodatku E. Rezultaty tych obliczeń, w postaci wartości czterech szukanych parametrów dla 16 różnych warunków, zestawiono w tabeli 9.1/gdzie warunki te zostały opisane w kolumnach od drugiej do piątej/. W celu porównania rezultatów poszczególnych obliczeń między sobą odnieśmy znalezione wartości parametrów do zadanych wartości parametrów symulacji, które wynoszą:

masa	$Q_1 = 1$
siła tarcia	$Q_2 = 100$
stała sprężystość	$Q_3 = 3600$
wielkość "luzu"	$Q_4 = 0.1$

Zwróćmy przy tym uwagę na fakt, że symulacja też nie jest procesem idealnie dokładnym i dlatego uzyskane z niej sygnały, podobnie jak to ma miejsce przy pomiarach, odbiegają zawsze nieco od sygnałów idealnych. Nie mniej jednak, można zadane wartości parametrów symulacji potraktować jako wartości opty-

lp	$\delta$	$T_s$	m	dob	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
1	30	67	4		.8735 <sub>a</sub> 0	.1792 <sub>a</sub> 3	.3794 <sub>a</sub> 4	.1061 <sub>a</sub> 0
2	30	17	4		.1123 <sub>a</sub> 1	.2488 <sub>a</sub> 2	.3920 <sub>a</sub> 4	.1041 <sub>a</sub> 0
3	30	5	4		.8699 <sub>a</sub> 0	.0996 <sub>a</sub> 2	.2915 <sub>a</sub> 4	.9608 <sub>a</sub> -1
4	30	67	4	+	.1072 <sub>a</sub> 1	.8656 <sub>a</sub> 2	.3773 <sub>a</sub> 4	.9376 <sub>a</sub> -1
5	30	17	4	+	.1054 <sub>a</sub> 1	.9491 <sub>a</sub> 2	.3723 <sub>a</sub> 4	.9614 <sub>a</sub> -1
6	30	5	4	+	.8933 <sub>a</sub> 0	.1249 <sub>a</sub> 3	.3177 <sub>a</sub> 4	.1000 <sub>a</sub> 0
7	6	67	4	+	.1027 <sub>a</sub> 1	.1010 <sub>a</sub> 3	.3701 <sub>a</sub> 4	.9792 <sub>a</sub> -1
8	6	17	4	+	.9007 <sub>a</sub> 0	.9758 <sub>a</sub> 2	.3590 <sub>a</sub> 4	.1001 <sub>a</sub> 0
9	6	5	4	+	.1012 <sub>a</sub> 1	.9128 <sub>a</sub> 2	.3613 <sub>a</sub> 4	.9775 <sub>a</sub> -1
10	0	67	4	+	.1010 <sub>a</sub> 1	.9724 <sub>a</sub> 2	.3615 <sub>a</sub> 4	.9886 <sub>a</sub> -1
11	0	17	4	+	.1001 <sub>a</sub> 1	.1000 <sub>a</sub> 3	.3594 <sub>a</sub> 4	.9994 <sub>a</sub> -1
12	0	5	4	+	.1010 <sub>a</sub> 1	.9743 <sub>a</sub> 2	.3586 <sub>a</sub> 4	.9998 <sub>a</sub> -1
13	30	67	12		.9959 <sub>a</sub> 0	.1028 <sub>a</sub> 3	.3596 <sub>a</sub> 4	.9902 <sub>a</sub> -1
14	30	17	12		.9928 <sub>a</sub> 0	.1013 <sub>a</sub> 3	.3611 <sub>a</sub> 4	.1003 <sub>a</sub> 0
15	0	67	12		.1003 <sub>a</sub> 1	.9900 <sub>a</sub> 2	.3602 <sub>a</sub> 4	.9973 <sub>a</sub> -1
16	0	17	12		.9996 <sub>a</sub> 0	.9988 <sub>a</sub> 2	.3599 <sub>a</sub> 4	.9997 <sub>a</sub> -1

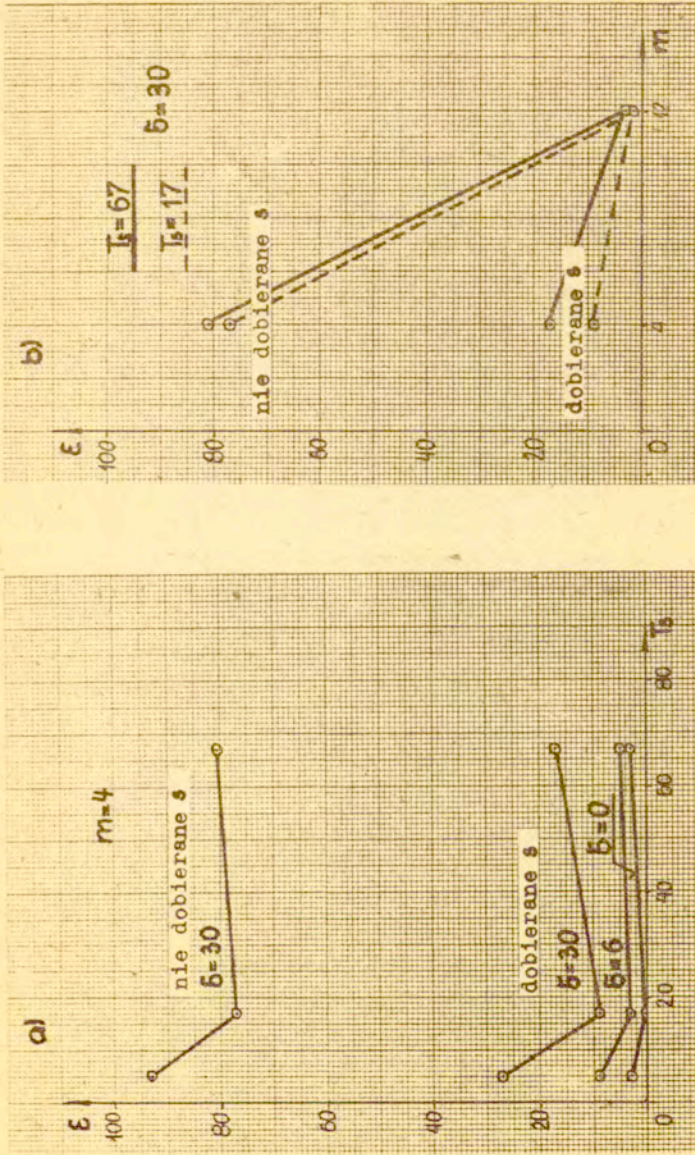
Tabela 9.1 Zestawienie wyników.

$\delta$  - odchylenie standardowe zakłócenia /w procentach maksymalnej obserwowanej bezwzględnej, wartości sygnału wejściowego/  
 $T_s$  - przedział, poza którym funkcja  $\Phi = 0$ , m - liczba wartości argumentu  $\delta$ , brana pod uwagę, dob - dobierano +/- wartość argumentu  $\delta$  lub nie,  $a_i$  - znalezione wartości parametrów modelu.

lp	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_3 $	$ e_4 $	$\varepsilon$
1	12.65	79.20	0.54	6.10	80.44
2	12.30	75.12	8.89	4.11	76.75
3	13.01	90.04	19.03	3.92	92.99
4	7.20	13.44	4.81	6.24	17.16
5	5.40	5.09	3.42	3.86	8.92
6	0.67	24.90	11.75	0.00	27.54
7	2.70	1.00	2.81	2.08	4.54
8	0.93	2.42	0.28	0.10	2.61
9	1.20	8.72	0.36	2.25	9.10
10	1.00	2.76	0.42	1.14	3.18
11	0.10	0.00	0.16	0.06	0.22
12	1.00	2.57	0.39	0.02	2.79
13	0.41	2.80	0.12	0.98	2.97
14	0.72	1.30	0.31	0.30	1.54
15	0.30	1.00	0.06	0.27	1.08
16	0.04	0.12	0.09	0.03	0.16

Tabela 9.2. Dokładność identyfikacji w procentach.

$e_i$  - względny błąd obliczenia  $i$  - tego parametru,  $\varepsilon$  - sumaryczny, względny błąd obliczenia wszystkich parametrów danej realizacji procesu identyfikacji.



Rys. 9.2 Wyniki obliczeń

$\epsilon$  -- sumaryczny, względny błąd obliczenia wszystkich parametrów danej realizacji procesu identyfikacji,  $T_s$  -- przedział poza którym funkcja  $\varphi=0$  / w jednostkach kroku próbkowania /,  $m$  - liczba wartości argumentu  $S$ , brana pod uwagę,  $S$  - odchylenie standardowe zakłócenia w procencie maksymalnej, bezwzględnej wartości niezakłóconego sygnału wejściowego/.



malne parametrów modelu, gdyż są one najbliższe wartościom idealnym. Oznaczamy je symbolem  $Q_i^*$ .

W celu uzyskania porównywalności między rezultatami obliczeń tego samego parametru oraz między rezultatami obliczeń poszczególnych parametrów, wyznaczmy względny błąd identyfikacji  $i$  - tego parametru:

$$/9.3/ \quad e_i = \frac{Q_i - Q_i^*}{Q_i^*} 100\%$$

Następnie w celu uzyskania porównywalności między poszczególnymi realizacjami procesu identyfikacji, dla różnych warunków, wyznaczmy sumaryczny, względny, średnio kwadratowy błąd identyfikacji wszystkich parametrów danej realizacji:

$$/9.4/ \quad \varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^4 e_i^2}$$

Błąd ten jest pewną miarą odległości znalezionej rozwiązania w znormalizowanej przestrzeni parametrów /znormalizowanej poprzez podzielenie we wzorze /9.3/ różnicy  $Q_i - Q_i^*$  przez wartość optymalną  $Q_i^*$  /od rozwiązania optymalnego.

Rezultaty tych obliczeń zostały zestawione w tabeli 9.2 /odpowiednio kolejno jak w tabeli 9.1/ oraz umieszczone na wykresach z rys. 9.2a i b. W kolumnach od drugiej do piątej tabeli 9.2 podane są bezwzględne wartości względnych błędów  $|e_i|$  obliczenia poszczególnych parametrów badanego układu, a w ostatniej szóstej kolumnie sumaryczny, względny błąd  $\varepsilon$  obliczenia wszystkich parametrów danej realizacji procesu identyfikacji. Na wykresach z rys. 9.2 na osi rzędnych umieszczono wartości tego sumarycznego błędu  $\varepsilon$ , a na osi odciętych: na rys. 9.2a - wielkość przedziału  $\bar{I}_s$ , poza którym funkcja  $\Phi \equiv 0$ , na rys. 9.2b - liczbę wartości argumentu  $S$ , braną pod uwagę. Poza tym na wykresach tych oznaczono zmieniające warunki identyfikacji.

## 9.5 Wnioski

Na podstawie wyników umieszczonych w tabelach 9.1 i

9.2 oraz wykresów z rys.9.2 można sformułować następujące spostrzeżenia:

- istnieje możliwość uzyskania poprawnej identyfikacji silnie nieliniowych układów mechanicznych, gdyż przy braku zakłóceń  $b=0$  uzyskano wynik, którego sumaryczny błąd nie przekroczył 0.2%, a przy dużych zakłóceniach /rzędu 30% sygnału niezakłóconego/ błąd ten nie przekroczył 2% /w tabelach pozycje 16 i 14/,
  - można przypuszczać, że opracowana metoda będzie mało czuła na zakłócenia, gdyż nawet przy zakłóceniach losowych o odchyleniu standartowym rzędu 30% sygnału niezakłócanego, co odpowiada dużym typowym wartościom zakłóceń występującym w czasie pomiaru, uzyskano wynik identyfikacji, którego sumaryczny błąd nie przekraczał 2% /w tabelach pozycja 14/,
  - istnieje pewna optymalna ze względu na błąd identyfikacji "szerokość" funkcji  $\varphi$ , gdyż na wykresie 9.2 widać, że dla przedziału  $T_s$  /poza którym funkcja  $\varphi=0$  /równym tu około 20 jednostek kroku próbkowania, sumaryczny błąd identyfikacji  $\varepsilon$  osiąga minimum dla wszystkich badanych przypadków zakłóceń. Wynika to z faktu, że wpływ zakłóceń na wzrost błędów maleje proporcjonalnie do malenia  $\sqrt{T_s}$  /rozd.3.3/ natomiast rośnie wtedy szkodliwy wpływ faktu, że numeryczna reprezentacja funkcji przy stałym kroku próbkowania staje się coraz mniej gładka,
  - korzystny wpływ na rezultat identyfikacji ma wzięcie pod uwagę większej liczby kolejnych wartości argumentu  $S$  od liczby szukanых parametrów /tu 4/ Na wykresie 9.3b widać, że dla dużych zakłóceń /rzędu 30% sygnału niezakłóconego/ wraz ze wzrostem liczby kolejnych wartości argumentu  $S$  z 4 do 12, spada wartość błędów identyfikacji z kilkadziesiąt procent /w tabelach pozycje 1 i 2/ do 2%+3% /w tabelach pozycje 13 i 14/.
- Potwierdzone zostały więc teoretyczne rozważania z rozdz. 5.3, gdzie zwrócono uwagę na fakt, że każdej wartości argumentu  $S$  odpowiada jedna hiperpowierzchnia w przestrzeni parametrów, opisana równaniem przestępnym powstałym, po-

przez przekształcenie modulacyjne, z różniczkowego równania opisującego badany układ. Hiperpowierzchnie te dla przypadku idealnego przecinają się w jednym punkcie, którego współrzędne określają szukane parametry. Ponieważ w rzeczywistości hiperpowierzchnie te odpowiadają rzeczywistemu układowi tylko z pewnym przybliżeniem, gdyż zawierają w sobie błędy powstałe: z wyboru określonego modelu, z pomiarów, z zakłóceń układu, z obliczeń itp., więc nie wyznaczają jednego punktu, lecz cały ich szereg, z których każdy powstał z przecięcia się tylu hiperpowierzchni, ile wynosi wymiar przestrzeni parametrów i z których każdy jest pewnym, obciążonym błędem rozwiązaniem zagadnienia. Zakłada się przy tym, że ze względu na przypadkowy charakter części źródeł błędów, błędy te są różne co do kierunku i wartości. Algorytm optymalizacji, zawarty w procesie identyfikacji, wybiera pewne pośrednie rozwiązanie, odpowiadające tym bardziej rozwiązaniu idealnemu im więcej będzie rozwiązań/s więc więcej wartości argumentu  $S$ , na których opiera się ten wybór. Eksperyment wykazał, że dla dużych zakłóceń rezultat jest wtedy lepszy od rezultatu, jaki osiąga się przez pracochłonny odpowiedni dobór wartości argumentu  $S$  przy małej liczbie tych wartości, gdyż błąd identyfikacji w tym przypadku osiągnął rząd kilkunastu procent /w tabelach pozycje 4 i 5/. Natomiast gdy zakłócenia są pomijalnie małe, uzyskano dla obu omawianych przypadków wyniki obciążone błędem tego samego rzędu 0.2% /w tabelach pozycje 11 i 16/. Sam dobór wartości argumentu  $S$  ma na celu zapewnienie przecinania się powyższych hiperpowierzchni pod możliwie prostym kątem, celem zmniejszenia wartości błędu do minimum. /Szczegółowe kryteria tego doboru dla omawianego eksperymentu są omówione w rozdziale 9.3./

Dla dokładniejszej analizy możliwości zastosowania opracowanej metody, zarówno dla założonych warunków jak i dla innych /np. innych: przekształceń modulacyjnych, układów mechanicznych, innych sygnałów zakłócających itp./ należałoby przeprowadzić dalsze obliczenia numeryczne, jednak wykroczyłoby to poza ramy niniejszej pracy, gdyż dotychczasowy czas obliczeń/w celu uzys-

kania danych z symulacji, a następnie w celu dopracowania numerycznego programu realizującego identyfikację i wreszcie w celu przeprowadzenia 16-krotnej identyfikacji dla różnych przedstawionych wyżej warunków/wydłużył się ze względu na stosowaną, jedynie dostępną maszynę cyfrową Odra 1204 i wyniósł około 60 godzin.

Wprawdzie uzyskano wyniki z ograniczonej liczby eksperymentów numerycznych, które nie upoważniają do wyciągania wniosków ogólnych, nie mniej jednak, przyjęto do analizy typowy układ nieliniowy oraz zapewniono odpowiednie przeciętne warunki eksperymentu, których należy się spodziewać w przypadku identyfikacji układów realnych. Uzyskane pozytywne wyniki eksperymentu pozwalają przypuszczać, że metoda będzie efektywna również w przypadku badania układów realnych.

## 10. Uwagi i końcowe wnioski.

Rzeczywiste układy mechaniczne, ogólnie rzecz biorąc, są nieliniowe. W wielu przypadkach identyfikacji, nieliniowości tej nie można pominąć bez wprowadzenia dużych uproszczeń, a co za tym idzie dużych błędów. Ma to szczególnie miejsce, gdy w układzie występują silnie nieliniowe człony typu "luz", "suche tarcie" i w związku z tym model układu jest nieliniowy ze względu na parametry. Ponieważ istnieje niewiele sposobów identyfikacji, opracowanych dla takich modeli, celowym jest poszukiwanie nowych metod.

W pracy podjęto próbę opracowania, w oparciu o metodę funkcji modulującej, sposobu identyfikacji, spełniającego powyższe wymagania. Zaproponowany sposób identyfikacji pozwala wykorzystać różne algorytmy minimalizacji funkcji jakości /rozd. 5.2/. Rozszerza to możliwości takiego wyboru postępowania, które dla danej klasy układów daje najlepsze wyniki.

Opracowany sposób identyfikacji, dzięki zastosowaniu modelu odwrotnego, ma tę zaletę w stosunku do powszechnie znanych analogicznych metod, stosujących model prosty, że nie wymaga rozwiązywania nieliniowego równania różniczkowego w każdym kroku procedury minimalizacji funkcji jakości /rozd. 4.3/

Większość znanych metod identyfikacji, w przypadku, gdy sygnał wejściowy układu jest losowy, wymaga stacjonarności tego sygnału. W rozważaniach pracy brano pod uwagę stacjonarne jak i niestacjonarne sygnały wejściowe, co rozszerza przedział stosowalności metody.

Często sprowadza się losowe równania różniczkowe do równań zdeterminowanych, wykorzystując momenty statystyczne funkcji losowych. W przypadku układów nieliniowych to przekształcenie poprzedzane jest linearyzacją. W niniejszej pracy wykorzystano możliwość przekształcania nieliniowego różniczkowego równania losowego do postaci zdeterminowanej bez uprzedniej linearyzacji /rozd. 4.4/. Poza tym, w większości metod stosuje się tylko momenty drugiego

rzędu, natomiast w pracy wykorzystano wszystkie możliwe momenty pierwszego i drugiego rzędu /rozdz.8.4/

W pracy zastosowano tzw.model odwrotny.W związku z tym,porównano go z powszechnie stosowanym tzw.modelem prostym /rozdz.6.2/.Z przeprowadzonego porównania wynika, że gdy zakłócany jest sygnał wejściowy układu,to należy stosować model odwrotny,a jeśli zakłócany jest sygnał wyjściowy układu,to należy stosować model prosty.W przeciwnym przypadku powstanie konieczność identyfikowania zarówno parametrów jak i jednego z tych sygnałów.Sytuacja taka ma też miejsce,gdy zakłócany jest zarówno sygnał wejściowy jak i wyjściowy układu.

W celu zastosowania metody funkcji modulującej do identyfikacji silnie nieliniowych układów wprowadzono pewne przekształcenie funkcji zarówno zdeterminowanej jak i losowej /rozdz.3/ Poprzez zastosowanie tego przekształcania rozszerzona została możliwość wykorzystania metody funkcji modulującej na przypadki,gdy stosowany model jest losowy,wielomasowy i nieliniowo zależny od parametrów.

Metoda funkcji modulującej wymaga,w przypadku stosowania minimalnej liczby kolejnych wartości argumentu  $S$ , odpowiedniego doboru tych wartości /rozdz.3/.W rozprawie /rozdz.5.3,9.3,9.5/ została podjęta próba sformułowania i uzasadnienia kryteriów tego doboru.

W pracy przeprowadzono badania dla silnie nieliniowego układu mechanicznego /rozdz.9.2/,zawierającego elementy typu "luz","suche tarcie".Na podstawie otrzymanych wyników można sformułować następujące wnioski:

- metoda umożliwiła efektywną identyfikację takiego układu, ponieważ przy braku zakłóceń uzyskano wynik,którego sumaryczny błąd nie przekraczał 0.2%,a przy dużych zakłóceniach losowych rzędu 30% sygnału niezakłóconego błąd ten nie przekroczył 2%,
- stwierdzono małą wrażliwość na zakłócenia,gdyż nawet przy zakłóceniach rzędu 30% sygnału niezakłóconego,co odpowiada dużym typowym wartościom zakłóceń w czasie po-

miaru, uzyskano wynik, który był obarczony sumarycznym błędem nie przekraczającym 2%,

- istnieje pewna optymalna, ze względu na błąd identyfikacji, "szerokość" wybranej funkcji  $\Phi$ , dla której błąd ten osiąga minimum,
  - potwierdzone zostały teoretyczne rozważania /rozd.5.3/, dotyczące pozytywnego wpływu na wynik identyfikacji dużej liczby kolejnych wartości argumentu  $S$  /rozd.3/.
- W celu zastosowania opracowanej metody do identyfikacji silnie nieliniowych układów mechanicznych, należy wykonać następujące czynności:
- wybór z określonej w rozdz.8.3.2 i 8.4.2 klasy odpowiedniego modelu matematycznego. Model ten powinien z dostatecznym przybliżeniem odzwierciedlać istotne dla nas własności układu,
  - dokonanie analitycznego przekształcenia modulacyjnego równania różniczkowego, opisującego układ i wykorzystanie właściwości tego przekształcenia do doprowadzenia tego równania do postaci, w której nie będzie już pochodnych sygnałów układu /rozd.3/. W przypadku losowym powyższe przekształcenie musi być poprzedzone operacją, doprowadzającą losowe równanie różniczkowe do postaci zdeterminowanej /rozd.8.4.1/,
  - zapisanie na taśmie perforowanej w skwantowanej postaci sygnału wejściowego i wyjściowego. Jeżeli sygnał wejściowy jest funkcją losową, to należy zapisać przebieg jego momentów statystycznych /metoda opracowana jest dla sygnałów losowych o postaci normalnej/,
  - wybór jak najprostszej analitycznej postaci funkcji  $\Phi$  przekształcenia modulacyjnego np. o stałym przedziale  $T_5$  poza którym funkcja  $\Phi \equiv 0$  / jak w omawianym w pracy eksperymencie-rozd.9.3/ oraz wyznaczenie analitycznej postaci pierwszej i drugiej pochodnej tej funkcji,
  - dokonanie, o ile to możliwe, bezpośrednich pomiarów wartości niektórych szukanych parametrów np: masy, celem zmniejszenia liczby identyfikowanych parametrów,

- wyznaczenie:

- długości przedziału  $T_5$ , poza którym funkcja  $\Phi \equiv 0$ ,
- liczby kolejnych wartości argumentu  $S$ . Liczba ta powinna być kilkakrotnie większa od liczby szukanych parametrów,
- kolejnych wartości argumentu  $S$ . Dla stosowanych w pracy funkcji modulujących przyjmowano takie, że  $S_{i+1} = S_i + T_5$ ,
- budowa numerycznego programu zgodnie ze schematem 6.5, w którym zawarte będą w postaci wzorów: funkcja  $\Phi$  i jej dwie pierwsze pochodne, człony przekształconego równania różniczkowego, opisującego układ oraz wybrana postać funkcji jakości. Ponadto program będzie zawierał standardowe procedury numerycznego obliczenia całki i minimalizacji funkcji jakości,
- podstawowymi danymi do tego programu będą: skwantowane sygnały wejściowe i wyjściowe układu /w przypadku losowym momenty statystyczne tych sygnałów /oraz wartości argumentu  $S$  i długość przedziału  $T_5$ .

Opracowany sposób identyfikacji nie jest pozbawiony pewnych wad i może nastroczać kłopoty przy praktycznej jego realizacji. Wynika to z faktu że:

- pojęcie funkcji modulującej nie jest szeroko rozpowszechnione w literaturze,
- w celu dobrania odpowiedniej funkcji modulującej, a szczególnie wartości argumentu  $S$ , potrzebne jest już pewne doświadczenie,
- w przypadku występowania niestacjonarnych sygnałów losowych pojawiają się duże problemy pomiarowe.

Przeprowadzone numeryczne badania były bardzo czasochłonne ze względu na konieczność adaptacji i korygowania programów numerycznych oraz z faktu, że z reguły obliczenia optymalizacyjne wymagają dużego czasu pracy maszyny matematycznej. Dlatego w pracy tej badania ograniczono do jednego wybranego układu nieliniowego i do jednego wybranego typu przekształcenia modulacyjnego. Interesującym byłoby przeprowadzenie takich badań dla innych układów i przekształceń mo-



dulacyjnych dla sygnałów zdeterminowanych i losowych. Również w swej części teoretycznej praca niniejsza nie wyczerpuje wszystkich problemów, związanych z zastosowaniem przekształcenia modulacyjnego do identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych. Przykładowo wiadomo, że losowe mogą być trzy grupy wielkości fizycznych: sygnały wejściowe, parametry układu lub warunki początkowe. W pracy rozpatrzono tylko takie układy, w których losowe są sygnały wejściowe. Należałoby zatem przebadać przypadki, gdy spełnione są inne założenia od powyższych.

Dodatek A. Dystrybucje

Wprowadzimy na podstawie pracy [32] tzw. "dystrybucje Schwartza":

Dystrybucją jest każdy ciągły, liniowy funkcjonal określony w przestrzeni funkcyjnej  $\mathcal{D}$ , zwanej podstawową.

Istnieje wiele rodzajów dystrybucji w zależności od przestrzeni podstawowej  $\mathcal{D}$ , na której elementach działają dystrybucje. Dla naszych celów, będziemy się posługiwać przestrzenią podstawową  $\mathcal{D}_m$ , składającą się z funkcji  $\varphi(t)$  rzeczywistego argumentu  $t$ , mających następujące własności:

1. Każda funkcja  $\varphi(t)$  i każda z jej pochodnych aż do rzędu  $m$  włącznie są wszędzie ciągłe.
2. Każda funkcja  $\varphi(t)$  jest równa zero na zewnątrz pewnego skończonego przedziału. Funkcja  $\varphi(t)$  nazywa się funkcją podstawową.

Oznaczając funkcjonal przez symbol  $f$ , oznaczmy liczbę, którą  $f$  przyporządkowuje danej funkcji  $\varphi$  przez  $\langle f, \varphi \rangle$ .

Będziemy korzystali z tak zwanych regularnych dystrybucji. Jeśli  $f(t)$  jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a w każdym skończonym przedziale, to przez regularną dystrybucję, generowaną z  $f(t)$  będziemy rozumieli zbieżną całkę:

$$\text{/A.1/} \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt \quad \varphi(t) \in \mathcal{D}_m$$

Argument  $t$  może być rozumiany jak punkt w przestrzeni o współrzędnych  $t_1$  i  $t_2$  czyli  $t = t(t_1, t_2)$  wtedy:

$$\text{/A.2/} \quad \langle f, \varphi \rangle = \langle f(t_1, t_2), \varphi(t_1, t_2) \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad \varphi(t_1, t_2) \in \mathcal{D}_m$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia dla uproszczenia zapisu:

$$\varphi(t) = \varphi$$

$$f(t) = f$$

$$\Psi(t) = \Psi$$

$$g(t) = g$$

W niniejszej pracy korzystamy z następujących własności dystrybucji:

$$/A.3/ \quad \langle f+g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle$$

$$/A.4/ \quad \langle \alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha \varphi \rangle = \alpha \langle f, \varphi \rangle$$

$$/A.5/ \quad \langle f(t-\tau), \varphi \rangle = \langle f, \varphi(t+\tau) \rangle$$

Jeśli funkcja  $\Psi$  ma ciągłe pochodne aż do rzędu  $m$  włącznie wtedy:

$$/A.6/ \quad \langle \Psi f, \varphi \rangle = \langle f, \Psi \varphi \rangle$$

W niniejszej pracy korzystamy z następujących własności pochodnej dystrybucji:

$$/A.7/ \quad \langle \frac{d}{dt} f, \varphi \rangle = \langle f, -\frac{d}{dt} \varphi \rangle \quad m \geq 0$$

$$/A.8/ \quad \langle \frac{\partial}{\partial t_i} f, \varphi \rangle = \langle f, -\frac{\partial}{\partial t_i} \varphi \rangle \quad t = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_n), \quad m \geq 0$$

$$/A.9/ \quad \langle \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_k} f, \varphi \rangle = \langle \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_i} f, \varphi \rangle \quad t = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_k, \dots, t_n), \quad m \geq 1$$

definiując ogólnie operator różniczkowania:

$$D^k = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{k_i}$$

$$\hat{k} = \sum_{i=1}^n k_i$$

mamy:

$$/A.10/ \quad \langle D^k f, \varphi \rangle = \langle f, (-1)^{\hat{k}} D^k \varphi \rangle \quad m \geq \hat{k} - 1$$

Niekiedy korzystamy z dystrybucji osobliwych, tj. nie da-  
jących się zdefiniować równaniem /A.1/. Taką dystrybucją jest  
 $\delta$  - funkcja.

$\delta$  - funkcja jest definiowana następująco:

$$/A.11/ \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Jeśli zdefiniujemy funkcję skoku jednostkowego

$$/A.12/ \quad \vartheta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

to:

$$/A.13/ \quad \left\langle \frac{d}{dt} \vartheta(t), \varphi \right\rangle = \langle \delta(t), \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Ponadto:

$$/A.14/ \quad \left\langle \frac{d^k}{dt^k} \delta, \varphi \right\rangle = \langle \delta, (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi \rangle = (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi \Big|_{t=0} \quad m \geq k - 1$$

Dodatek B. Niektóre definicje i własności funkcji losowych

B.1 Wstęp

W dodatku tym zostanie najpierw przedstawiony sposób wyznaczania charakterystyk funkcji losowych, będących sygnałami wyjściowymi z członów nieliniowych. Na końcu zostaną zestawione niektóre własności funkcji losowych, wykorzystywane w niniejszej pracy.

B.2 Wyznaczanie charakterystyk funkcji losowych, będących sygnałami wyjściowymi z członów nieliniowych.

Na rys. B.1 podany jest schemat członu nieliniowego. Zakładamy /rozdz.4.2/, że sygnał wejściowy na człon nieliniowy jest normalną funkcją losową. Funkcje losowe i ich charakterystyki w chwili  $t_k$  będziemy oznaczali indeksem  $k$  np. wartość średnią funkcji losowej  $X(t)$  w chwili  $t_k$  oznaczymy:

$$m(X(t_k)) = m_{Xk}$$

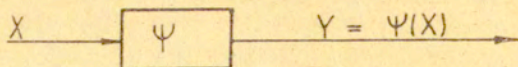
Dwuwymiarową funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa normalnej funkcji losowej  $f(\xi_1, \xi_2)$  można przedstawić jako nieskończoną sumę potęg współczynnika korelacji  $r_{XX}(t_1, t_2)$  [21]:

$$\text{/B.1/} \quad f(\xi_1, \xi_2) = \sum_0^{\infty} \frac{r_{XX}^n}{n!} \Phi^{(n)}(\xi_1) \Phi^{(n)}(\xi_2)$$

$$\text{gdzie:} \quad \xi_i = \frac{X_i - m_{Xi}}{\sigma_{Xi}} \quad i = 1, 2$$

$$r_{XX} = \frac{K_{XX}(t_1, t_2)}{\sigma_{X1} \cdot \sigma_{X2}}$$

$$\Phi(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi_i^2} \quad i = 1, 2$$



Rys.B.1 Schemat członu nieliniowego:

$X$  - sygnał wejściowy - normalna funkcja losowa,  
 $Y = \Psi(X)$  - sygnał wyjściowy,  $\Psi$  - nieliniowy operator:

$m_x$  - moment pierwszego rzędu /wartość średnia/

$K_{xx}$  - funkcja korelacji własnej

$\sigma_x$  - odchylenie standardowe

Funkcję korelacji własnej funkcji losowej  $\Psi(X(t))$  można przedstawić, stosując /B.1/, następująco:

$$/B.2/ \quad K_{\Psi\Psi}(t_1, t_2) = \sum_0^{\infty} c_n(m_{x1}, \sigma_{x1}) c_n(m_{x2}, \sigma_{x2}) \frac{f_{xx}^n(t_1, t_2)}{n!}$$

gdzie:

$$/B.3/ \quad c_n(m_{xi}, \sigma_{xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(m_{xi} + \sigma_{xi} \xi_i) \Phi(\xi_i) d\xi_i \quad i=1,2$$

wartość średnia funkcji losowej  $\Psi(X(t))$  wynosi:

$$/B.4/ \quad m_{\Psi}(t) = c_0(m_x, \sigma_x)$$

funkcja korelacji wzajemnej  $X(t)$  i  $\Psi(X(t))$  wyraża się wzorem:

$$/B.5/ \quad K_{X\Psi}(t_1, t_2) = - \frac{c_1(m_{x2}, \sigma_{x2})}{\sigma_{x2}} \cdot K_{XX}(t_1, t_2)$$

Jeśli funkcja  $\Psi(X(t))$  zależy od parametrów ze zbioru  $\underline{Q} = (a_1, \dots, a_n)$  to będziemy to podkreślać przez oznaczenie:

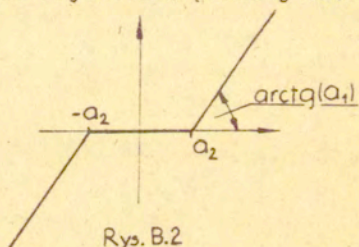
$$\Psi(X(t)) = \Psi(X(t), \underline{Q})$$

Dla wielu funkcji  $\Psi$ , będących, ogólnie rzecz biorąc, odcinkami wielomianami zależnymi od parametrów  $\underline{Q}$ , zostały w pracy [21] wyznaczone współczynniki  $C_n$ . Do wyznaczenia ich, posłużono się funkcją Gaussa  $\Phi$ . Oczywiście współczynniki  $C_n$  zależą od parametrów  $\underline{Q}$ :

$$c_n(m_x, \delta_x) = c_n(m_x, \delta_x, \underline{Q})$$

Podamy teraz przykładowo wzory na współczynniki dla nieliniowości przedstawionej na /rys.B.2/i podanej wzorem:

$$G(x) = a_1 \begin{cases} (x + a_2) & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ (x - a_2) & a \leq x \end{cases}$$



Rys. B.2

$$n=0 \quad c_0 = a_1 \left\{ m_x - \frac{1}{2} \left[ (a_2 + m_x) \Phi\left(\frac{a_2 + m_x}{\delta_x}\right) - (a_2 - m_x) \Phi\left(\frac{a_2 - m_x}{\delta_x}\right) \right] - \delta_x \left[ \varphi\left(\frac{a_2 + m_x}{\delta_x}\right) \right] \right\}$$

$$n=1 \quad c_1 = a_1 \delta_x \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{a_2 + m_x}{\delta_x}\right) - \Phi\left(\frac{a_2 - m_x}{\delta_x}\right) \right] \right\}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n \geq 2 \quad c_n = a_1 \delta_x \left\{ -\varphi\left(\frac{-a_2 - m_x}{\delta_x}\right) + \varphi\left(\frac{a_2 - m_x}{\delta_x}\right) \right\}$$

W szczególnym przypadku gdy mamy  $m_x = 0$  otrzymujemy:

$$n=0 \quad c_0 = 0$$

$$n=1 \quad c_1 = -\alpha_1 \sigma_x \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x}\right) \right]$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n \geq 2 \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 2l \\ 2\alpha_l \sigma_x \varphi^{(2l-1)}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x}\right) & \text{dla } n = 2l+1 \end{cases} \quad l=1, 2, \dots$$

gdzie:

funkcja Gaussa: 
$$\Phi(u) = 2 \int_0^u \varphi(u) du$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \quad \varphi^{(n)}(u) = \frac{d^n \varphi(u)}{d^n u}$$

### B.3 Niektóre własności funkcji losowych

Operacja wyznaczania wartości średniej funkcji losowej jest operacją liniową, zatem wartość średnia z operatora liniowego  $L$ , działającego na funkcji losowej  $X=X(t)$ , równa się operatorowi liniowemu, działającemu na wartości średniej z tej funkcji losowej:

$$/B.6/ \quad E[EX] = LE[X]$$

gdzie:  $E$  - operator wartości średniej.

Gdy dwie zmienne  $X$  i  $Y$  są nieskolerowane, to:

$$/B.7/ \quad E[F(Y) \cdot G(X)] = E[F(Y)] \cdot E[G(X)]$$

Niektóre własności pochodnej  $\frac{dX}{dt} = \dot{X}$  funkcji losowej  $X=X(t)$ :



$$\text{/B.8/} \quad m_{\dot{x}} = \frac{dm_x}{dt} = \dot{m}_x$$

$$\text{/B.9/} \quad K_{x\ddot{x}} = \frac{\partial K_{xx}}{\partial t_2}$$

dla stacjonarnych funkcji losowych  $X$  i  $\dot{X}$  mamy:

$$\text{/B.10/} \quad m_{\ddot{x}} = 0$$

$$\text{/B.11/} \quad K_{x\ddot{x}} = \frac{dK_{xx}}{d\tau} \quad \tau = t_2 - t_1$$

oraz ponieważ  $K_{xx}$  jest funkcją parzystą, mamy:

$$\text{/B.12/} \quad K_{x\ddot{x}} = -K_{\ddot{x}x}$$

$$\text{/B.13/} \quad K_{\ddot{x}\dot{x}} = -K_{\dot{x}\ddot{x}}$$

$$\text{/B.14/} \quad K_{\ddot{x}x} = K_{x\ddot{x}}$$

Jeśli funkcja losowa  $X$  jest normalna, to jej pochodna  $\dot{X}$  jest również normalną funkcją losową, a jeśli jest stacjonarna, to jej pochodna jest również funkcją stacjonarną.

Dodatek C Wyprowadzenie równań obliczeniowych dla zaprezentowanego typu nieliniowości.

C.1 Wstęp

W rozdziałach 8.3.2 i 8.4.2 zostały zaprezentowane typy nieliniowości jakie mogą być brane pod uwagę. Obecnie równania opisujące te nieliniowości zostaną doprowadzone do postaci ułatwiającej obliczenia.

C.2 Przypadek zdeterminowany

Będziemy przekształcać równanie /8.9/ przypomnijmy jego postać:

$$/C.1/ \quad a_1 \ddot{x} + \Psi(x, \dot{x}) = u$$

$$/C.2/ \quad \text{gdzie: } \Psi(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^5 L^i(\dot{x}, \underline{a}) W^i(x, \underline{a})$$

Równanie /C.1/ można, stosując /8.5/ i /8.8/, zapisać:

$$/C.3/ \quad a_1 \ddot{x} + \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{p_i} L^i_k(\dot{x}, \underline{a}) \cdot h^i_k(\dot{x}, \underline{a}) \cdot \sum_{j=1}^{p_i} W^i_j(x, \underline{a}) h^i_j(x, \underline{a}) = u$$

oznaczymy:  $h_k(\dot{x}, \underline{a}) = h_k$

$$h_j(x, \underline{a}) = h_j$$

$$L^i_k(\dot{x}, \underline{a}) = L^i_k$$

$$W^i_j(\dot{x}, \underline{a}) = W^i_j$$

wtedy:

$$/C.4/ \quad a_1 \ddot{x} + \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{p_i} L^i_k W^i_j h^i_k h^i_j = u$$

zważmy, że:  $L_k^i = a_k^i \dot{x} + b_k$

gdzie:  $a_k^i$  i  $b_k^i$  należą do zbioru parametrów  $\underline{a}$  więc:

$$a_1 \ddot{x} + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{p_i} a_k^i \dot{x} W_j^i h_k^i h_j^i + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{p_i} b_k^i W_j^i h_k^i h_j^i = u$$

oznaczając:  $\dot{\omega}_j^i = \dot{x} W_j^i$

gdzie:  $\omega_j^i = \int_0^x W_j^i dx$

otrzymamy:

$$/C.5/ \quad a_1 \ddot{x} + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{p_i} a_k^i \dot{\omega}_j^i h_k^i h_j^i + b_k^i W_j^i h_k^i h_j^i = u$$

Przy poddawaniu tego równania przekształceniu modulacyjnemu, będzie można skorzystać z upraszczających zależności:

Z definicji pochodnej iloczynu trzech funkcji mamy:

$$/6.6/ \quad \dot{\omega}_j^i \cdot h_k^i h_j^i = \frac{d}{dt} (\omega_j^i h_k^i h_j^i) - \omega_j^i \dot{h}_k^i h_j^i - \omega_j^i h_k^i \dot{h}_j^i$$

$$\text{gdzie:} \quad \dot{h}_k^i = \frac{dh_k^i}{dt} \quad \dot{h}_j^i = \frac{dh_j^i}{dt}$$

oraz z /A.7/ mamy:

$$\mathbb{D}[\dot{f}] = \langle f, -\dot{\phi} \rangle$$

### C.3 Przypadek losowy

Będziemy przekształcać równanie /8.31/ przypomnijmy jego postać:

$$/C.7/ \quad a_1 \ddot{X} + \Psi(\dot{X}, X) = U$$

$$/C.8/ \quad \text{gdzie:} \quad \Psi(\dot{X}, X) = \sum_{k=i=1}^s F_i(\dot{X}) G_k(X)$$

Funkcje  $F_i$  i  $G_k$  są zależne od parametrów  $\underline{a}$ , należących do zbioru  $\underline{Q}$

W dalszym ciągu, dla podkreślenia zależności jakiejś wielkości od parametrów  $\underline{a}$ , tj. od elementów zbioru " $\underline{a}$ ", będziemy umieszczali literę " $\underline{a}$ " w nawiasie za tą wielkością np.  $C_0'[\underline{a}]$  - oznacza, że  $C_0$  zależy od elementów zbioru  $\underline{Q}$ .

Współczynniki  $C_n$  /B.3/ obliczone dla  $F_i(\tilde{X})$  i  $G_k(\tilde{X})$  dla niestacjonarnej funkcji losowej  $X$  będziemy oznaczali:

$$C_n^i[t, \underline{a}] = C_n \text{ dla takiego } \Psi \text{ z wzoru /B.3/, że } \Psi = F_i,$$

$$C_n^k[t, \underline{a}] = C_n \text{ dla takiego } \Psi \text{ z wzoru /B.3/, że } \Psi = G_k.$$

Dla stacjonarnej funkcji losowej  $X$  otrzymamy odpowiednio:

$$C_n^i[\underline{a}] = C_n \text{ dla takiego } \Psi \text{ z wzoru /B.3/ że } \Psi = F_i,$$

$$C_n^k[\underline{a}] = C_n \text{ dla takiego } \Psi \text{ z wzoru /B.3/ że } \Psi = G_k.$$

Przeprowadzimy analogiczne przekształcenie jak w rozdz.8.3.1. Równanie /C.1/ podejmy operacji wyznaczanie wartości średniej i otrzymujemy:

$$/C.9/ \quad E[a, \tilde{X}] + E[\Psi(\tilde{X}, X)] = E[U]$$

co można zapisać, na podstawie własności pochodnej funkcji losowej, następująco:

$$/C.10/ \quad a_1 \ddot{m}_X + m_\Psi = m_U$$

gdzie:  $\ddot{m}_X$  - pochodna wartości średniej funkcji losowej  $X$ ,

$m_\Psi$  - wartość średnia funkcji losowej  $\Psi(\tilde{X}, X)$ ,

$m_U$  - wartość średnia funkcji losowej  $U$ .

Jeśli w równaniach /C.7/ i /6.9/ ustalimy dowolną chwilę  $t_1$ , a następnie od równania /C.7/ odejmiemy równanie /6.9/, pdczym, otrzymaną różnicę równań dla chwili  $t_1$  pomnożymy przez różnicę równań dla chwili  $t_2$ , to otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 /C.11/ \quad & (a_1 \bar{x}_1 - a_1 \bar{m}_{x1}) (a_1 \bar{x}_2 - a_1 \bar{m}_{x2}) + (a_1 \bar{x}_1 - a_1 \bar{m}_{x1}) (\Psi_2 - m_{\Psi_2}) + \\
 & (\Psi_1 - m_{\Psi_1}) (a_1 \bar{x}_2 - a_1 \bar{m}_{x2}) + (\Psi_1 - m_{\Psi_1}) (\Psi_2 - m_{\Psi_2}) = \\
 & = (U_1 - m_{U1}) (U_2 - m_{U2})
 \end{aligned}$$

Po poddaniu powyższego równania operacji wyznaczania wartości średniej, otrzymamy:

$$/C.12/ \quad a_1^2 K_{\bar{x}\bar{x}} + a_1 K_{\bar{x}\Psi} + a_1 K_{\Psi\bar{x}} + K_{\Psi\Psi} = K_{UU}$$

Stosując własność pochodnej funkcji losowej, otrzymamy:

$$/C.13/ \quad a_1^2 \frac{\partial^4 K_{XX}}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} + a_1 \frac{\partial^2 K_{X\Psi}}{\partial t_1^2} + a_1 \frac{\partial^2 K_{\Psi X}}{\partial t_2^2} + K_{\Psi\Psi} = K_{UU}$$

Jest to równanie różniczkowe cząstkowe ze względu na  $t_1$  i  $t_2$ .

Następnie w równaniu /C.7/ i /C.9/ ustalamy dowolną chwilę  $t_2$  i od równania /C.7/ odejmijmy równanie /C.9/. Różnicę tych dwóch równań mnożymy przez  $X - m_X$  dla  $t = t_1$  i otrzymane równanie poddajemy operacji wyznaczania wartości średniej:

$$\begin{aligned}
 /C.14/ \quad & E[(X_1 - m_{X1}) (a_1 \bar{X}_2 - a_1 \bar{m}_{x2}) + (X_1 - m_{X1}) (\Psi_2 - m_{\Psi_2})] = \\
 & = E[(X_1 - m_{X1}) (U_2 - m_{U2})]
 \end{aligned}$$

Powyższe równanie przedstawia zależność między funkcjami korelacyjnymi:

$$/C.15/ \quad a_1 \ddot{K}_{xx} + K_{x\psi} = K_{x\ddot{x}}$$

dla ustalonego  $t_1$ , gdzie:  $\ddot{K}_{xx}|_{t_1 = \text{const}} = K_{x\ddot{x}}$

Będzie nam zależało na doprowadzeniu członów nieliniowych powyższych równań do takiej postaci, w której będą występowały tylko jak najprostsze momenty losowe pierwszego i drugiego rzędu.

W dalszym ciągu będziemy przekształcali równania /C.9/ /C.12/ i /C.15/ przy założeniu, że funkcje losowe  $X$  i  $U$  są niestacjonarne. Najpierw równanie /C.9/. W równaniu tym wyrażamy  $m_\psi$  za pomocą definicji wartości średniej i wzoru na  $\psi$  /C.8/:

$$/C.16/ \quad m_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^s F_i(\ddot{x}) G_k(x) \cdot f(x) d\ddot{x} dx$$

niech:  $\xi = \frac{X_2 - m_{x2}}{\sigma_{x2}}$ ,  $\eta = \frac{\ddot{X}_1 - m_{\ddot{x}1}}{\sigma_{\ddot{x}1}}$ ,  $\varphi(\xi) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $\varphi(\eta) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\eta^2}}{\sqrt{2\pi}}$

zgodnie z /B.1/:

$$/C.17/ \quad f(\eta, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{\ddot{x}x}^n}{n!} \varphi^{(n)}(\eta) \varphi^{(n)}(\xi)$$

zgodnie z /B.5/ mamy:

$$/C.18/ \quad m_\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{\ddot{x}x}^n}{n!} \sum_{i=k+1}^s c_n^i c_n^k \quad t_2 - t_1$$

Podkreślając zależność współczynników  $c_n^i$  i  $c_n^k$  od parametrów  $\underline{Q}$ , można napisać:

$$/C.19/ \quad m_\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{\tilde{x}x}^n}{n!} \sum_{i=k=1}^s c_n^i[t, \underline{a}] c_n^k[t, \underline{a}]$$

Zatem równanie /C.10/ przekształci się do postaci:

$$/C.20/ \quad a_1 \ddot{m}_x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{\tilde{x}x}^n}{n!} \sum_{i=k=1}^s c_n^i[t, \underline{a}] c_n^k[t, \underline{a}] = m_u$$

Przekształćmy teraz równanie /C.12/. Pisaliśmy już /rozd. 8.3.1//, że celowym jest, w przypadku niestacjonarnym, korzystanie z wariancji  $W_{UU}(t_1, t_2)$  zamiast funkcji korelacyjnej  $K_{UU}(t_1, t_2)$ , ze względu na uproszczenie się obliczeń. Weźmy zatem równanie /C.12/ dla chwili  $t = t_2 = t_1$  :

$$/C.21/ \quad a_1^2 W_{\tilde{x}\tilde{x}} + a_1 W_{\tilde{x}\psi} + a_1 W_{\psi\tilde{x}} + W_{\psi\psi} = W_{UU}$$

gdzie wariancja:  $W_{xx}(t, t) = K_{xx}(t, t)$

ponieważ:  $W_{\tilde{x}\psi} = W_{\psi\tilde{x}}$       otrzymamy:

$$/C.22/ \quad a_1^2 W_{\tilde{x}\tilde{x}} + 2a_1 W_{\tilde{x}\psi} + W_{\psi\psi} = W_{UU}$$

Zajmijmy się najpierw wyrazem  $W_{\psi\tilde{x}}$ :

$$W_{\psi\tilde{x}} = E[\Psi \tilde{x}] - m_\psi m_{\tilde{x}} = E\left[\sum_{k=1}^s F_k(\tilde{x}) \cdot \tilde{x} \cdot G_k(x)\right] - m_\psi m_{\tilde{x}}$$

oznaczając:

$$\frac{d\hat{F}_i(\dot{X})}{dt} = F_i(\dot{X}) \cdot \ddot{X}$$

otrzymamy:

$$W_{\psi\ddot{x}} = \frac{d}{dt_1} E \left[ \sum_{i=k=1}^s \hat{F}_i(\dot{X}_1) \cdot G(X_2) \right]_{t_2=t_1} - m_{\psi} m_{\ddot{x}}$$

Wyraz w kwadratowym nawiasie jest analogiczny do wyrazu w zależności /C.16/, więc oznaczymy go  $\hat{\Psi}$ :

$$\hat{\Psi} = \sum_{i=k=1}^s \hat{F}_i(X_1) \cdot G_k(X_2) \quad t_2=t_1$$

zatem:

$$W_{\psi\ddot{x}} = \frac{d}{dt_1} m_{\hat{\Psi}} - m_{\psi} m_{\ddot{x}}$$

Stosując wzór /C.19/na  $m_{\psi}$  i oznaczając:

$$\hat{C}_n^i = C_n: \text{ we wzorze /B.3/ } \psi = \int_0^{\dot{X}} F_i(u) du$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} /C.23/ \quad W_{\psi\ddot{x}} &= \frac{d}{dt_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=k=1}^s \hat{C}_m^i C_n^k \frac{r_{\dot{x}\dot{x}}^n}{n!} + \\ &- m_{\ddot{x}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^i C_n^k \frac{r_{\dot{x}\dot{x}}^n}{n!} \end{aligned}$$



Zajmijmy się teraz wyrazem  $W_{\psi\psi}$  z równania /C.22/:

$$W_{\psi\psi} = E[\psi^2] - m^2\psi$$

uwzględniając /C.8/:

$$W_{\psi\psi} = E\left[\sum_{\substack{i=k=1 \\ j=l=1}}^s F_i(\dot{X}) F_j(\dot{X}) G_k(X) G_l(X)\right] - m^2\psi$$

oznaczając:

$$F_{ij}(\dot{X}) = F_i(\dot{X}) F_j(\dot{X}) \quad G_{kl}(X) = G_k(X) G_l(X)$$

otrzymamy:

$$W_{\psi\psi} = E\left[\sum_{\substack{i=k=1 \\ j=l=1}}^s F_{ij} \cdot G_{kl}\right] - m^2\psi$$

Wyraz w nawiasie kwadratowym jest analogiczny do wyrazu w równaniu /C.16/, więc oznaczmy go  $\tilde{\Psi}$ :

$$\tilde{\Psi} = \sum_{\substack{i=k=1 \\ j=l=1}}^s F_{ij} \cdot G_{kl}$$

więc:  $W_{\psi\psi} = m\tilde{\Psi} - m^2\psi$

Stosując równanie /C.19/ do powyższego równania, otrzymamy:

$$/C.24/ \quad W_{\psi\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i=k=1 \\ j=l=1}}^s c_n^{ij} c_n^{kl} \frac{r_{\dot{X}\dot{X}}^n}{n!} - \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=k=1}^s c_n^i c_n^k \frac{r_{\dot{X}\dot{X}}^n}{n!} \right\}^2$$

Na podstawie /C.12/, /C.13/ i /C.24/, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 /C.25/ \quad & a_1^2 W_{\ddot{x}\ddot{x}} + 2a_1 \frac{d}{dt_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=k=1}^s \hat{c}_n^i c_n^k \frac{r_{\ddot{x}\ddot{x}}^n}{n!} \Big|_{t_1=t_2} + \\
 & + 2a_1 \ddot{m}_x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=k=1}^s c_n^i c_n^k \frac{r_{\ddot{x}\ddot{x}}^n}{n!} + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i=k=1 \\ j=l=1}}^s c_n^{ij} c_n^{kl} \frac{r_{\ddot{x}\ddot{x}}^n}{n!} + \\
 & + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=k=1}^s \hat{c}_n^i c_n^k \frac{r_{\ddot{x}\ddot{x}}^n}{n!} \right\}^2 = W_{uu}
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_n^i = c_n & : \text{ we wzorze /B.3/ } \quad \psi = \int^{\dot{x}} F_i(u) du, \\
 \hat{c}_n^{\dot{i}} = c_n & : \text{ we wzorze /B.3/ } \quad \psi = {}^0 F_i(\dot{x}) F_j(\dot{x}), \\
 \hat{c}_n^{ik} = c_n & : \text{ we wzorze /B.3/ } \quad \psi = G_k(x) G_l(x).
 \end{aligned}$$

Przekształćmy teraz równanie /C.25/. Podobnie jak w wypadku równania /C.12/, wygodniej będzie posługiwać się, przy niestacjonarnym  $X$ , wariancją  $W_{XU}$  zamiast funkcją korelacyjną  $K_{XU}$ . Równanie /C.15/ przybierze więc postać:

$$/C.26/ \quad a_1 W_{X\ddot{x}} + W_{X\psi} = W_{XU}$$

Zajmijmy się wyrazem  $W_{X\psi}$  z powyższego równania:

$$W_{X\psi} = E[X \cdot \psi] - m_x m_\psi$$

uwzględniając /C.8/:

$$W_{X\psi} = E \left[ \sum_{i=k=1}^s F_i \cdot G_k \right] - m_x m_\psi$$

oznaczając:

$$\bar{G}_k(x) = G(x) X$$

mamy:

$$W_{X\psi} = E \left[ \sum_{i=k=1}^s F_i(\dot{X}) \cdot \bar{G}_k(X) \right] - m_x m_\psi$$

oznaczymy wyraz w nawiasie kwadratowym  $\bar{\Psi}$  przez analogię do /C.16/.

$$\bar{\Psi} = \sum_{i=k=1}^s F_i(\dot{X}) \cdot \bar{G}_k(X)$$

wtedy:

$$/C.27/ \quad W_{X\psi} = m_{\bar{\Psi}} - m_x m_\psi$$

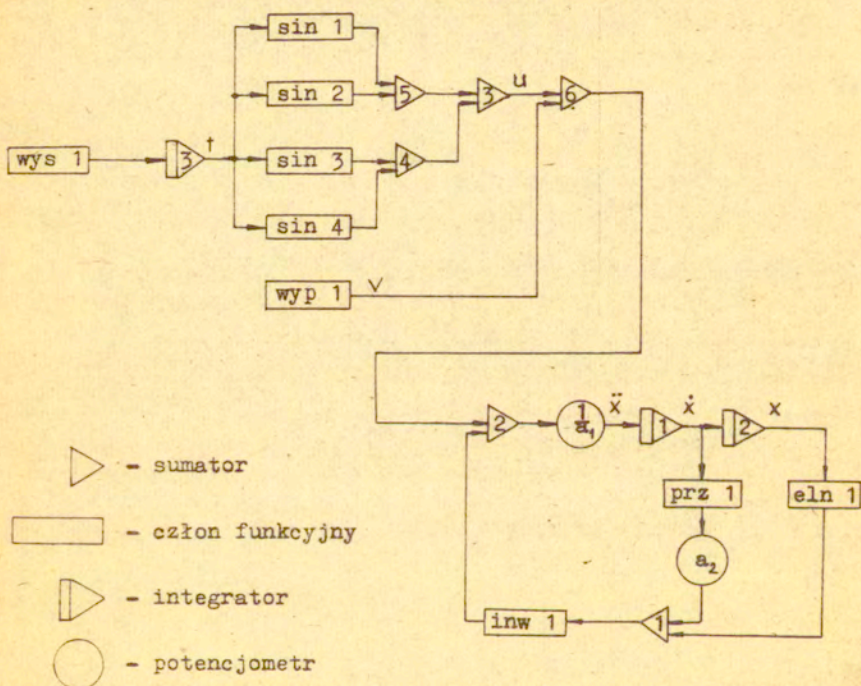
Na podstawie równań /C.19/, /C.26/ i /C.27/ otrzymamy:

$$/C.28/ \quad a_1 W_{X\ddot{x}} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=k=1}^s c_n^i \bar{c}_n^k \frac{r_{\ddot{x}x}^n}{n!} - \\ - m_x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=k=1}^s c_n^i c_n^k \frac{r_{\ddot{x}x}^n}{n!} = W_{Xu}$$

gdzie:  $\bar{c}_n^k = c_n$ : we wzorze /B.3/  $\psi = G_k(X) X$

Dodatek D. Symulacja

Symulacji dokonano za pomocą "specjalizowanego języka do symulacji układów na maszynie cyfrowej Odra 1204" SYMUD1, opracowanego przez K. Miśniakiewicza w Zakładach Systemów Automatyki Kompleksowej PAN w Gliwicach [14]. Język ten wymaga ułożenia, dla symulowanego układu, schematu "analogowego", a następnie na podstawie tego schematu, buduje się prosty program symulacyjny. Wybrany nieliniowy układ mechaniczny, przedstawiony na rys. 9.1, symulowano według schematu z rys. D.1



Rys. D.1 Schemat symulacji.

wys - wymuszenie skokowe, sin - przekształtnik sinusoidalny,  
wyp - wymuszenie losowe, prz - przerzutnik, eln - element nieliniowy/ z "luzem"/, inw - inwertor;

Dodatek E. Program numeryczny

Załączony numeryczny program, umożliwiający identyfikację parametrów wybranego w rozdz. 9.2 układu mechanicznego, został zbudowany zgodnie ze schematem umieszczonym na rys. 6.5. W budowie programu zastosowane są inne oznaczenia na symbole z równania /9.1/, a mianowicie:

$$X[1]z + X[2]\text{sign}(z) + X[3]f(z, X[4]) = y$$

W programie zastosowano standardową procedurę optymalizacyjną /opartą na metodzie Fletchera, Powela, Davidsona/, która narzuca budowę całego programu /rys. E.1/. Parametrem formalnym tej procedury jest procedura FCN, której jednym z parametrów formalnych jest wartość funkcji jakości. Funkcję jakości oblicza się za pomocą procedury J, której parametrem są bierzące wartości szukanych parametrów modelu /tu oznaczone X/. W skład procedury J wchodzi:

- pomocnicza procedura do obliczania  $D[\text{sign}(x)] = B$ ,
- pomocnicza procedura ff do obliczania wartości funkcji jakości,
- procedura D do obliczania  $D[f(z, X[4])]$
- blok iflag = 1, który działa tylko raz na początku obliczeń /jest więc poza główną pętlą obliczeń - rys. 6.5/ i, w którym czyta się dany sygnał wejściowy z i wyjściowy y, a następnie wysyła na bęben /by dane te nie zajmowały pamięci operacyjnej/, następnie po ściągnięciu potrzebnych danych z tegoż bębna, oblicza się  $M = D[z]$ ,  $B = D[\text{sign}(z)]$  oraz  $Y = D[y]$ .

Poniżej zestawimy znaczenie pozostałych zmiennych, użytych w programie, w kolejności ich występowania:

- N[1] - liczba szukanych parametrów
- N[2] - liczba wartości argumentu s
- N[3] - N[3] + 4 - liczba próbek z i y
- N[4] - liczba wczytywanych jednorazowo próbek z i y
- N[5] - liczba kolejnych wczytań z i y
- I, K, L - zmienne pomocnicze

Program

```
procedure FCN /..f../
```

```
real procedure J /X/
```

```
real procedure CFI
```

```
real procedure ff
```

```
if iflag = 1
```

```
czytanie wszystkich danych i wysłanie na bęben
```

```
ściągnięcie potrzebnych danych bębna
```

```
obliczenie  $M=D[Z]$ ,  $B=D[\text{sign}(Z)]$ ,  $Y=D[y]$ 
```

```
ściągnięcie potrzebnych danych z bębna
```

```
f:=J/X/
```

```
procedura optymalizacyjna
```

Rys.E.1 Schemat programu.

C,t,b,d,j - zmienne pomocnicze  
delta - wartość kroku próbkowania  
z,y - wyjściowy i wejściowy sygnał badanego układu  
h,s,i,g - zmienne pomocnicze  
Z,E - zmienne do kontrolnych wydruków  
xw - warunki początkowe  
P,R,S,DE - zmienne pomocnicze  
M,N - wartość argumentu s oraz wartość  $s + T_s$   
npar,G,f,X,iflag - zmienne procedury FCN

Treść programu:

```
.....
begin'.....
  integer array N[1:5];
  begin
    read(N);
    begin'
      integer I,K,L;
      real C,delta,t,b,d,j;
      array z,y[-3:N[3]],M,B,Y,H,s,1,g,Z,E[1:N[2]],xw[1:N[1]],
      ..... P,R,S[1:5],DE[1:2];
      integer array m,n[1:N[2]];
      ..... begin
        procedure FCN(npar,G,f,X,iflag);
          value npar,iflag;
          integer npar,iflag;
          real f;
          array G,X;
          *A6:begin'.....
            real procedure J(X);
              array X;
          A6:begin
            real procedure CFI;
              CFI := 2*(t**5-5**5)-.5*s[L]*(t**4-b**4)+.33333333*
                (2.0*s[L]+s[L]*s[L])*(t**3-b**3)-1[L]*s[L]
                *(t*t-b*b)+1[L]*1[L]*(t-b);
            .....
            real procedure ff(X,k);
              value k;
              integer k;
              array X;
              ff:=X[1]*M[k]+X[2]*B[k]+X[3]*D(X[4],k)-Y[k];
            .....
            real procedure D(a,L);
              value a,L;
              real a;
              integer L;
              ..... begin
                integer I,K;
                a:=0.0;
                for I:=1,2,3,4 do
                  begin
                    K:=4+I;
                    t:=K*delta;
                    if abs(z[K])-a gt 0 then S[I]:=sign(z[K])*(abs(z[K])-a)
                                                                *(t*t-s[L]*t+1[L])*2
                                                                .....
                                                                else S[I]:=0;
                  end;
                end;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;
```



```

... ..
for I:=1 step 1 until n[L]-m[L] do
  begin
    t:=I*delta;
    ..
    if abs(z[I])-a gt 0
    then S[5]:=sign(z[I])*((abs(z[I])-a)*(t-t-s[L]*t+1[L]))*32
    else S[5]:=0;
d:=d+delta*(.348611111*S[5]+.897222222*S[4]-.366666666*S[3]
+.147222222*S[2]-.026388888*S[1]);
    S[1]:=S[2];
    S[2]:=S[3];
    S[3]:=S[4];
    S[4]:=S[5];
    end;
    ..D:=d;
  end;
..
if iflag=1 then begin
  read(delta,m,n,xw);
  line(1);
  fbrmat(-1.23456789117+123');
  for I:=0 step 1 until N[5]-1 do begin
    for K:=1 step 1 until N[4] do read(z[K],y[K]);
    drumplace:=I*2*N[4]+1;
    todrum(N[4],z[1]);
    drumplace:=I*2*N[4]+5001;
    todrum(N[4],y[1]);
    print(z[1],y[1]);
    line(1);
    print(z[N[4]],y[N[4]]);
    ..line(2);
  end;
  ..line(4);
  for L:=1 step 1 until N[2] do
    begin
      s[L]:=(n[L]-m[L])*delta;
      i[L]:=0;
      g[L]:=-12.0*s[L];
      H[L]:=2.0*(2.0*i[L]+s[L]*s[L]);
      drumplace:=2*(m[L]-3)-1;
      fromdrum(n[L]-m[L]+4,z[-3]);
      drumplace:=2*(m[L]-3)+5000-1;
      fromdrum(n[L]-m[L]+4,y[-3]);
      format(-1.23456789117+123000');
      print(z[0],y[0]);
      line(1);
      print(z[n[L]-m[L]],y[n[L]-m[L]]);
      line(2);
      M[L]:=0;
      Y[L]:=0;
    end;
  end;

```

```

...
for K:=1,2,3,4 do
  begin
I:=K-4;
t:=I*delta;
P[K]:=z[I]*(12.0*t*t+g[L]*t+H[L]);
R[K]:=y[I]*(t*t-s[L]*t+i[L])**2;
...
end;
for I:=1 step 1 until n[L]-m[L] do
  begin
t:=I*delta;
P[5]:=z[I]*(12.0*t*t+g[L]*t+H[L]);
R[5]:=y[I]*(t*t-s[L]*t+i[L])**2;
M[L]:=M[L]+delta*(.34861111*P[5]+.89722222*P[4]-.36666666*
P[3]+.14722222*P[2]-.02638888*P[1]);
Y[L]:=Y[L]+delta*(.34861111*R[5]+.89722222*R[4]-.36666666*
R[3]+.14722222*R[2]-.02638888*R[1]);
P[1]:=P[2];
P[2]:=P[3];
P[3]:=P[4];
P[4]:=P[5];
R[1]:=R[2];
R[2]:=R[3];
R[3]:=R[4];
...R[4]:=R[5];
end;

B[L]:=0;
b:=0;
K:=0;
...I:=0;
for I:=1 step 1 until n[L]-m[L]-1 do
  if sign(z[I+1]-z[I-1]) ne 0
  then begin
    if sign(z[I+1]-z[I-1])+sign(z[I]-z[I-2])=0
    then begin
t:=(I-1)*delta;
B[L]:=B[L]+sign(z[I]-z[I-2])*CFI;
b:=I*delta;
K:=I;
I:=I+1;
...
end;
end;
E:=((n[L]-m[L])*delta;
B[L]:=B[L]+sign(z[n[L]-m[L]]-z[n[L]-m[L]-2])*CFI;
if I+0.5 lt 2 and K=(n[L]-m[L]+1)2 then B[L]:=0;
E[L]:=CF(XW,L);
Z[L]:=D(yw[4],L);
format('M[1]0=0-1.123456^'-1200B[1]0=0-1.123456^'-1200Z[1]0=
0-1.123456^'-1200Y[1]0=0-1.123456^'-1200E[1]0=0-1.123456
-1200');
print(L,M[L],L,B[L],L,Z[L],L,Y[L],L,E[L]);

```

```
line(1);
end;
fprintf('fxw[1]=-1.12345^L67');
for L:=1 step 1 until N[1] do print(L,xw[L]);
line(1);
end;
J:=0;
for L:=1 step 1 until N[2] do
  begin
    drumplace:=2*(m[L]-3)-1;
    fromdrum(n[L]-m[L]+4,z[-3]);
    drumplace:=2*(m[L]-3)+5000-1;
    fromdrum(n[L]-m[L]+4,y[-3]);
    j:=j+ff(X,L)**2;
  end;
  J:=j;
end;
rr:=J(X);
Bo:=end;
.....
procedure MINCON20(FCN);
procedure FCN;
drum;
MINCON20(FCN);
  end
  end
  end
end;
```

### Literatura

1. Antoniewicz J., Automatyka, WNT, Warszawa, 1973.
2. Bendat J.S., Piersol A.G., Measurement and analysis of random data, N.York, Wiley, 1966.
3. Dobiáš I., Identyfikacja krivoj nieliniejnosti na osnovie eksperimentalno ustanovlennych koefficientov statističeskoj linearizacii, X Konferencja Dynamiki Maszyn, Referaty, WPW, Warszawa, 1976.
4. Eykhoff P., System identification, Wiley, London, 1974.
5. Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, 1977.
6. Graupe D., Identification of Systems, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
7. Hayashi Ch., Drgania nieliniowe w układach fizycznych, WNT, Warszawa 1968.
8. Kamiński E., Identyfikacja układów mechanicznych o członach lepkosprężystych, Rozprawy Inżynierskie, t. 21, 3, 1973.
9. Livašyc N.A., Pugačev, W.N., Verojatnostnyj analiz sistem avtomatičeskogo upravlenia, Tom 2, Sovetskoe Radio, Moskva, 1963.
10. Loeb J., Cahen G., Extraction, a partir des enregistrements de mesures, des parametres dynamiques d'un systeme, Automatisme, No 12, Decembre, 1963.
11. Masri S.F., G.A. Bekey, F.B. Safford, An adaptive random search method for identification of large scale nonlinear systems, Preprint, IV IFAC Symposium, Tibilisi, 1976.
12. Koch J., krzyżanowski J., Problemy identyfikacji struktur obrabiarek w aspekcie wykorzystania analizy dynamicznej w konstruowaniu, Materiały II konferencji naukowej "Dynamika obrabiarek i obróbki skrawaniem", Szczecin 1973, Politechnika Szczecińska.

13. Olszak W., Marchelek K., Stan i tendencje rozwoju dynamiki obrabiarek i obróbki skrawaniem, Mat. z konf. "Dynamika obrabiarek i obróbki skrawaniem", Wrocław 1977, Polit. Wrocław.
14. Miśniakiewicz K., Język specjalizowany do symulacji układów dynamicznych na maszynie cyfrowej odra 1204, Prace ZSAK-PAN, z.9, Gliwice, 1973.
15. Osiecki J., Ziemba S., Podstawy pomiarów drgań mechanicznych, PWN, 1968.
16. Osiecki J., Elementy modelowania w dynamice maszyn, Dynamika maszyn, PAN, Ossolineum, 1974.
17. Papulis A., Probability, random variables and stochastic processes, McGraw-Hill, 1965.
18. Piszczek K., Metody probabilistyczne w teorii drgań nieliniowych, WPP, Poznań, 1974.
19. Piesiak S.- Identyfikacja własności mechanicznych układu o  $n$  - stopniach swobody metodą bilansu harmonicznego, Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1973.
20. Piesiak S.- Identyfikacja własności mechanicznych o  $n$  - stopniach swobody z uwzględnieniem wyższych harmonicznych, metodą bilansu harmonicznego, Komunikaty Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1974.
21. Pugaczew W.S., Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego, MON, Warszawa, 1960.
22. Shinbort M., On the analysis of linear and nonlinear systems, Trans. ASME 79, 1957.
23. Stanchev E.S., Minchev N.D., Identification of the parameters in the nonlinear elastodynamics of machine aggregates, IX-th Conference on Dynamics of Machines, Smolnice, 1974.

24. Swiesznikow A.A., Podstawowe metody funkcji losowych, PWN, Warszawa 1965
25. Węgrzyn S., Modele matematyczne i identyfikacja procesów, wyd. PAN, Zakład Systemów Automatyki Kompleksowej, Warszawa, 1974.
26. Wicher J., Modyfikacja metody linearyzacji statystycznej do doświadczalnego badania własności dynamicznych nieliniowych układów mechanicznych., Warszawa, 1969, Praca doktorska.
27. Wicher J. - Identyfikacja nieliniowego układu mechanicznego o wielu stopniach swobody znajdującego się pod działaniem wymuszeń przypadkowych, Mat. Sympozjum "Metody statystyczne w mechanice", Szczyrk, Gliwice, 1970.
28. Wicher J., Problemy identyfikacji systemów technicznych ze szczególnym uwzględnieniem układów mechanicznych, Prace IPPT, 67, 1975.
29. Wicher J. Doświadczalna metoda gęstości widmowych do wyznaczania charakterystyk dynamicznych układu mechanicznego, Prace IPPT, 25, 1972.
30. Wicher J. Modelowanie systemu technicznego jako proces optymalizacyjny, Prace IPPT, 39, 1974.
31. Wicher J. Identyfikacja parametrów tłumienia i sztywności układu o wymuszeniach stochastycznych, Zag. Drgań Nieliniowych, 1975.
32. Zemanian A.H., Distribution theory and transform analysis, Mc Graw-Hill, 1965.
33. Ziemia S., Lenkiewicz W., Rzeczywiste obciążenia dynamiczne elementów maszyn, Przegląd Mechaniczny, 12, 1965.
34. Ziemia S., Obciążenia dynamiczne maszyn i konstrukcji jako procesy stochastyczne, Zeszyty naukowe AGH, z. 16, Nr. 115, 1966.

335. Ziemba S., Solski P., Zużycie elementów maszyn spowodowane tarciem, PWN, Warszawa 1970.
336. Ziemba S., Modele i modelowanie, wykł. Wszechnicy PAN, Warszawa, 1975.
337. Ziemba S., Niektóre elementy podstaw inżynierii systemów. I Inżynieria systemów, Politechnika Poznańska, Poznań 1977.
338. Ziemba S. Rola diagnostyki technicznej, Diagnostyka Urządzeń Mechanicznych, Ossolineum, 1977.
339. Zembrzuski E., Jarzymowski W., Identyfikacja parametrów modeli matematycznych obiektów regulacji metodą funkcji modulującej, Podstawy Sterowania, t. 5, z. 1, 1975.

Spis treści

	strona
1. Wstęp.....	3
1.1. Cel pracy.....	3
1.2. Nieliniowości w systemach mechanicznych.....	5
1.3. Zawartość pracy.....	7
2. Przegląd literatury.....	10
2.1. Wstęp.....	10
2.2. Metody identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych.....	10
2.3. Metoda funkcji modulacyjnej.....	20
3. Przekształcenie modulacyjne funkcji.....	24
3.1. Wstęp.....	24
3.2. Przekształcenie modulacyjne funkcji zdeterminowanej.....	24
3.3. Przekształcenie modulacyjne funkcji losowej..	27
4. Schemat procesu identyfikacji.....	30
4.1. Wstęp.....	30
4.2. Zagadnienie układu, modelu, identyfikacji.....	30
4.3. Schemat procesu identyfikacji z zastosowaniem przekształcenia modulacyjnego i modelu zdeterminowanego.....	42
4.4. Schemat procesu identyfikacji z zastosowaniem przekształcenia modulacyjnego i modelu losowego.....	44
5. Realizacja procesu identyfikacji/układów mechanicznych przy zastosowaniu przekształcenia modulacyjnego/.....	47
5.1. Funkcja jakości.....	47
5.2. Metody szukania minimum funkcji jakości.....	48
5.2.1. Metoda pierwsza.....	50
5.2.2. Metoda druga.....	51
5.2.3. Metoda trzecia.....	52



5.3. Uwagi o metodach minimalizacji funkcji jakości.....	52
5.4. Przypadek losowy.....	54
6. Identyfikacja układu dynamicznego w przypadku występowania zakłóceń.....	56
6.1. Wstęp.....	56
6.2. Model prosty i odwrotny , a zakłócenia układu mechanicznego.....	56
6.3. Schemat identyfikacji układu w przypadku występowania zakłóceń.....	59
6.3.1. Schemat identyfikacji gdy zakłócony jest sygnał wejściowy układu.....	59
6.3.2. Schemat identyfikacji gdy zakłócone są sygnały wejściowy i wyjściowy układu.....	61
6.4. Podsumowanie.....	63
7. Identyfikacja układów wielomasowych.....	68
7.1. Wstęp.....	68
7.2. Wprowadzenie.....	68
7.3. Schemat identyfikacji układu wielomasowego..	71
8. Typ nieliniowości.....	75
8.1. Wstęp.....	75
8.2. Wprowadzenie.....	75
8.3. Przypadek zdeterminowany.....	77
8.3.1. Wprowadzenie oznaczeń.....	77
8.3.2. Określenie typu nieliniowości.....	78
8.4. Przypadek losowy.....	79
8.4.1. Metoda postępowania.....	79
8.4.2. Określenie typu nieliniowości.....	87
9. Badania eksperymentalne.....	89
9.1. Wstęp.....	89
9.2. Wybór układu.....	89
9.3. Obliczenia.....	91
9.4. Opracowanie wyników badań.....	93
9.5. Wnioski.....	95

10. Uwagi końcowe i wnioski.....	101
Dodatki:	
A. Dystrybucje i ich niektóre własności.....	106
B. Niektóre własności i definicje funkcji losowych.	109
B.1. Wstęp.....	109
B.2. Wyznaczenie charakterystyk funkcji losowych będących sygnałami wyjściowymi z członów nieliniowych.....	109
B.3. Niektóre własności funkcji losowych.....	112
C. Wyprowadzenie równań obliczeniowych dla zaproponowanego typu nieliniowości.....	114
C.1. Wstęp.....	114
C.2. Przypadek zdeterminowany.....	114
C.3. Przypadek losowy.....	115
D. Symulacja.....	124
E. Program numeryczny.....	125
Literatura.....	132