Uwagi o stylu historycznym matematyki i rozwoju matematyki

Zbigniew Król

Instytut Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa

Ścisła formalizacja matematyki współczesnej tylko pozornie uodparnia ją na zależność od kontekstu historycznego. Zależność ta staje się jedynie mniej widoczna. Podobnie jest z apriorycznością matematyki. Matematyka jest *w pewnym sensie* nauką aprioryczną, chociaż ustalane przez nią zależności *nie zawsze* są bezwzględnie apodyktyczne[1]. Wyjaśnię to dokładniej poniżej. W obydwu przypadkach, aprioryczności i ścisłej formalizacji, matematyka jest dalej otwarta na pewne inne *ukryte* możliwości, a każdorazowa jej postać formalna lub wynik rozumowania apriorycznego są w rzeczywistości efektem pewnych niejawnych *wyborów* i formalnej ich kodyfikacji. Cały czas pewne inne możliwości teoretyczne są niewidoczne i nieaktywne w procesie kreacji wiedzy matematycznej. Odsłanianie ich istnienia wraz z następującą analizą odpowiadają za rozwój matematyki i stanowią wewnętrzny powód przesądzający o racjonalnym i intelektualnym charakterze tego procesu.

[1] Przedstawiona w tym tekście koncepcja różni się od poglądów I. Lakatosa, który odróżnił „matematykę euklidesową" od „matematyki quasi-empirycznej", chociaż może być traktowana jako wyjaśnienie wewnętrznych mechanizmów tworzenia wiedzy w matematyce quasi-empirycznej z uwzględnieniem analiz hermeneutyczno-fenomenologicznych; por. Lakatos, I., Renesans empiryzmu we współczesnej filozofii matematyki? W: R. Murawski. 2002. *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 215–243. Przeprowadzone analizy wskazują, iż matematyka euklidesowa posiada cechy, które wiążą ją ściśle z matematyką quasi-empiryczną. Czytelnik może jednak przyjąć teorię Lakatosa jako wygodny punkt wyjścia rozważań w zakresie pewnych rzeczowych ustaleń historycznych. W ten sposób postąpiłem np. w artykule: Król, Z. 2006. Intuicja i hermeneutyka: analiza intuicyjnego pojęcia wielościanu. *Zagadnienia Naukoznawstwa* **2** (168), 251–271.

Powody, dla których pewne nieaktywne dotychczas możliwości teoretyczne zostają rozpatrywane, są wrażliwe na szereg czynników społecznych i historycznych. Jednakże same możliwości teoretyczne mają charakter czysto intelektualny i aprioryczny. Każdorazowe sformułowanie jakiejś nowej teorii lub nawet tylko jednostkowego „wyniku" odbywa się w określonym polu racjonalnych możliwości oraz ukrytych racjonalnych zależności i odsłania równocześnie pewną nową strukturę kolejnych ukrytych zależności. Wiedza matematyczna posiada zatem dwie składowe: jawną (*explicite*) i ukrytą, niejawną (*implicite*, *tacit knowledge* itp.)[2]. W procesie kreacji matematyki tylko niektóre ukryte założenia (będące częścią wiedzy niejawnej) są aktywne i rzeczywiście dookreślają oraz wpływają na jawną postać tworzonej wiedzy. Większa ich część pozostaje jedynie *czysto logicznymi* możliwościami i od strony fenomenologicznej jest oderwana, tzn. nieaktywna, i bez rzeczywistego wpływu na przeprowadzane rozumowania. To fenomenologicznie i hermeneutycznie dane pole *racjonalnych* powiązań i zależności nazywam *horyzontem hermeneutycznym*. Intuicja matematyczna ujawnia się w tym horyzoncie, wyróżnia pewne jego obszary od innych, teoretycznie możliwych oraz jest intelektualną zdolnością „poruszania się" w jego obrębie.

Zwróćmy uwagę, że przekonanie o aprioryczności piątego postulatu Euklidesa, że na płaszczyźnie przez punkt nieleżący na danej prostej da się poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej, było wyróżnione jako *jedyna* racjonalna i apodyktyczna możliwość aprioryczna przez ponad dwa tysiące lat. Inne racjonalne możliwości były ukryte. Dlatego ich ujawnienie w procesie kreacji geometrii nieeuklidesowych było szokujące zarówno matematycznie, jak i filozoficznie. Takie miejsce w horyzoncie racjonalnych zależności i powiązań, gdzie pewna możliwość pojawia się jako apodyktycznie prawdziwa i „nieposiadająca alternatywy", przy równoczesnym istnieniu innych racjonalnych możliwości mogących być ujętymi intelektualnie, ale niewidocznych dla oka intuicji w danym momencie historycznym, nazywam „rozdwojeniem horyzontalnym".

Analiza rozdwojeń nie może polegać na „logicznej negacji" danego sformułowania przekonań intuicyjnych. Na przykład, samo sformułowanie negacji piątego postulatu Euklidesa – jak wiemy z analizy procesu historycznego powstania geometrii nieeuklidesowych[3] – nie wystarcza dla ujawnienia innych możliwości.

[2] Należy odróżnić także wiedzę ukrytą od wiedzy niezwerbalizowanej. Typologię różnych rodzajów *tacit knowledge* przedstawiam w pracy Król, Z. 2008. Towards The New Episteme: Basic Methodology for Knowledge and Tacit Knowledge. W: *Proceedings of the 9th International Symposium on Knowledge and Systems Sciences (KSS2008) Jointly with Knowledge Management in Asia Pacific (KMAP2008), Guangzhou, China, Dec. 11-12*, 279–287.

[3] Por. na przykład Rosenfeld, B.A. 1988. A history of non-Euclidean geometry: Evolution of the concept of a geometric space. *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences* **12**, Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg – London – Paris – Tokyo.

Konieczne jest stworzenie i ujawnienie szerszej struktury horyzontalnej, którą nazywam nowym „modelem intuicyjnym". Za apodyktycznością piątego postulatu stały inne, bardziej podstawowe ukryte *przekonania* oraz założenia i dopiero ich ujawnienie umożliwia budowę nowego modelu intuicyjnego dającego intuicyjne środowisko dla *rozumienia* negacji piątego postulatu. Rozdwojenia najczęściej nie posiadają binarnej struktury. Zwykle ukrytych możliwości jest znacznie więcej niż dwie.

W matematyce ściśle sformalizowanej działanie ukrytych przekonań intuicyjnych ujawnia się w wielu miejscach, szczególnie jednak w momencie formułowania i wybierania aksjomatów. Należy zwrócić w tym miejscu uwagę na fakt społecznego uwarunkowania takich wyborów, gdyż są one oparte na dziedzictwie intelektualnego dorobku poprzedników oraz są funkcją obecnego stanu wiedzy matematycznej. Dzisiaj wiemy już, na przykład, że użycie sytemu logiki klasycznej nie jest jedyną i apodyktyczną możliwością. Jednakże zawsze musimy dokonać pewnego wyboru, gdyż nie sposób analizować wszystkich możliwości jednocześnie. Wybór taki jest najczęściej pozaformalny, intuicyjny i oparty na przejęciu szeregu zwyczajów rozpowszechnionych w danym czasie lub epoce. Matematycy przejmują je i używają w sposób, który wydaje się apodyktyczny i aprioryczny, tj. nie posiadający alternatywy. W rzeczywistości *można* pomyśleć i uprawiać matematykę w inny sposób.

Celem niniejszego artykułu jest wskazanie *niektórych* ukrytych założeń określających *styl historyczny matematyki współczesnej*. Doprowadzi nas to określenia czym jest styl historyczny matematyki i do wskazania jego roli w rozwoju matematyki. Jako punkt wyjścia rozważań obiorę antynomię Russella.

1. Antynomia Russella

Ukryte założenia nie posiadają globalnie niesprzecznej struktury. Dlatego możliwy jest konflikt pomiędzy nimi, co tłumaczy dlaczego pewne samooczywiste prawdy aprioryczne prowadzą do antynomii. Nie chodzi tu o każdy możliwy konflikt (np. lokalną nieścisłość, sprzeczność, absurd, nielogiczność), ale o taki, który prowadzi do *kryzysu* w matematyce lub jest powodem powstania rewolucyjnej teorii. W sytuacji kryzysowej ujawniają się rzeczywiście istotne i obiektywne przed-założenia horyzontalne. W każdej epoce historycznej – jak się okazuje na podstawie badania specyfiki sytuacji kryzysowych – istnieje zespół intuicyjnych niejawnych przekonań horyzontalnych dotyczących natury badanych obiektów i natury samej matematyki. Dlatego możemy mówić o *intuicyjnych podstawach matematyki* w danej epoce lub nawet w krótszym okresie czasu. Gwałtowna zmiana horyzontalna w systemie intuicyjnych podstaw (zwykle spowodowana ujawnieniem się wprzód-określonej sprzeczności) jest podstawową przyczyną powstawania nowych, rewolucyjnych teorii w matematyce[4].

Przykładem ilustrującym powyższe stwierdzenia jest pierwsza sytuacja kryzysowa w matematyce związana z odkryciem wielkości niewspółmiernych. W starożytnym systemie intuicyjnych podstaw matematyki dominowało przekonanie, że „wszystko jest liczbą". Znano tylko liczby naturalne (bez zera). Jeśli wszystko ma naturę opisywalną i wyrażalną za pomocą liczb, to w szczególności powinno odnosić się to do matematyki samej, na przykład do tworów geometrycznych.

Tymczasem, dowód niewspółmierności na przykład przekazany przez Arystotelesa dla kwadratu i jego przekątnej[5] pokazywał, że jeśli bok kwadratu jest jakąś liczbą, to przekątna – jeśli jest liczbą – musiałaby równocześnie być liczbą parzystą i nieparzystą. Liczba zaś zawsze jest albo parzysta, albo nieparzysta. Tak więc, dowód niewspółmierności pokazywał, że *nie wszystko jest liczbą*. Okazało się, że intuicyjne przekonanie (hipoteza horyzontalna) o *jednorodnym* liczbowym charakterze rzeczywistości i matematyki jest fałszywe. Dowód niewspółmierności demonstrował, że w matematyce istnieją (co najmniej) *dwa* różne rodzaje wielkości: liczby (*arithmos*) i wielkości geometryczne (*megethos*). Odkrycie tego faktu spowodowało powstanie nowych, rewolucyjnych teorii (np. proporcji) w matematyce starożytnej Grecji. Grecy jednak nie odkryli, ani nie znali pojęcia liczby niewymiernej.

Zupełnie analogiczna sytuacja zaistniała w ostatnim, współczesnym kryzysie, dotyczącym podstaw matematyki w teorii zbiorów. Jeszcze zanim stwierdzono, że „wszystko jest zbiorem", przekonanie takie zawarte było w ukryty sposób w działaniach twórców teorii zbiorów: Fregego, Cantora i Dedekinda. Fałszywość takiego, niejawnego *wówczas*, horyzontalnego przekonania pokazuje właśnie antynomia Russella.

---

[4] Pojęcie intuicyjnej zmiany horyzontalnej omawiam w pracy Król, Z. 2007. The Emergence of New Concepts in Science. W: A. P. Wierzbicki, Y. Nakamori (eds.) *Creative Environments: Issues for Creativity Support for the Knowledge Civilization Age*. Chapter XVII, Springer Verlag, 415–442.

[5] "For all who effect an argument *per impossibile* infer syllogistically what is false, and prove the original conclusion hypothetically when something impossible results from the assumption of its contradictory; e.g. that the diagonal of the square is incommensurate with the side, because odd numbers are equal to evens if it is supposed to be commensurate. One infers syllogistically that odd numbers come out equal to evens, and one proves hypothetically the incommensurability of the diagonal, since a falsehood results through contradicting this. For this we found to be reasoning per impossibile, viz. proving something impossible by means of an hypothesis conceded at the beginning." Por. Arystoteles, *Analytica Priora* 41a, tł. ang. Jenkinson, A.J., Analytica Priora. W: A.J. Jenkinson (ed.) 1928. *Aristotle A.J. Jenkinson 12 v.*, Clarendon Press, Oxford.

Powodem trudności była formalizacja intuicyjnie oczywistej zasady, że zawsze możemy utworzyć zbiór, do którego należą (jedynie) wszystkie te elementy, które posiadają daną własność. Przekonanie to formalnie zapisywano w postaci tzw. (schematu) aksjomatu komprehensji:

A.1. $(\varphi)\forall x \exists z[x \in z \equiv \varphi(x)]$;

gdzie „(φ)" oznacza, że dla każdej własności $\varphi(x)$ mamy do czynienia z odpowiadającym jej aksjomatem. **A.1** jest więc schematem (nieskończonej ilości) aksjomatów. Zwróćmy uwagę, że **A.1** ma postać definicji, na mocy której możemy zastąpić oraz wyeliminować dowolną wypowiedź o własności (-ciach) sformułowaniem dotyczącym pewnego zbioru: posiadanie danej własności jest „tym samym", (tj. jest równoważne), co bycie elementem pewnego zbioru. „Wszystko jest więc *pewnym* zbiorem".

Matematyka zajmuje się własnościami matematycznymi. Stwierdzenie, że coś jest przestrzenią liniową jest równoważne stwierdzeniu, że to coś posiada pewne własności charakteryzujące obiekt zwany przestrzenią liniową. Na mocy **A.1** oznacza to, że dany obiekt należy do zbioru wszystkich tych elementów, które są przestrzeniami liniowymi, a więc które posiadają (koniunkcję) własności charakteryzujących każdą przestrzeń liniową. **A.1** opiera się zatem na przekonaniu, że każda własność może być traktowana jak zbiór, czyli że jest zbiorem.

Aksjomat komprehensji pojawił się pierwotnie w systemie logiki Fregego, gdzie wynikał logicznie z innych aksjomatów. Istotne jest tu jednak *ukryte* przekonanie[6] Fregego, że jego system dotyczy *wszystkich* własności, a więc nie tylko własności matematycznych. Możemy jednak skoncentrować się tylko na pewnych wybranych własnościach, na przykład *wszystkich* własnościach matematycznych lub *wszystkich* własnościach matematycznych pewnego szczególnego rodzaju. Jeśli bowiem pewna własność przysługuje wszystkim dowolnym obiektom, to w szczególności musi ona przysługiwać wszystkim obiektom pewnego szczególnego rodzaju.

Rozumując dokładnie jak w przypadku odkrycia niewspółmierności, stwierdzamy, że przekonanie, iż każdej własności odpowiada konkretny zbiór, powinno dotyczyć w szczególności wszystkich własności matematycznych, a jeszcze bardziej szczegółowo – wszystkich własności sformułowanych za pomocą pojęć: zbioru, elementu zbioru, relacji należenia do zbioru oraz identyczności zbiorów. Tak więc, dla dotyczącej zbiorów własności „nie bycia swoim własnym elemen-

[6] „Ukrytość" polega na istnieniu innych ukrytych i alternatywnych możliwości stojących za danym, sformułowanym często *explicite*, przekonaniem. Zatem samo przekonanie wyjściowe może być jawne, choć nie musi tak być zawsze. Od strony fenomenologicznej, niewidoczna jest inna możliwość, a formalna kodyfikacja „prześlizguje się" nad tymi innymi możliwościami. Por. także następny przypis.

tem", tj. własności $\varphi(x)$: $\sim(x \in x)$, na mocy **A.1**, powinien istnieć odpowiadający jej zbiór **Z** tych i tylko tych elementów, które mają własność φ, tj. które nie są swoimi własnymi elementami, **Z**$= \{x :\sim(x \in x)\}$.

O każdym zbiorze możemy zdecydować czy posiada daną własność, czy też jej nie posiada (1). W szczególności możemy sprawdzić czy zbiór **Z** posiada własność φ „nie bycia swoim własnym elementem". Jeśli **Z** posiada własność φ, to znaczy, że $\sim(Z \in Z)$, a zatem: $(Z \in Z) \equiv \sim(Z \in Z)$. Z kolei, jeśli **Z** nie posiada tej własności, czyli jeśli (2) $\sim(\sim(Z \in Z)) \equiv (Z \in Z)$, pociąga na mocy **A.1**, iż $(Z \in Z) \equiv \sim(Z \in Z)$. W obydwu wypadkach otrzymujemy sprzeczność. Jest to tak zwana „antynomia Russella", która pokazuje, że nie każda własność jest zbiorem *pewnego rodzaju*. Z jakim rodzajem zbiorów, określonych przez pewne niejawne przekonania mamy do czynienia, wyjaśnię w drugiej części. Pokażę tam, że możliwe są inne koncepcje intuicyjne zbiorów, gdzie „nasze" zbiory są jedynie pewnym ich szczególnym pod-rodzajem. Poniżej, w bieżącej sekcji, omówię tylko niektóre z nich.

Problem powstaje w wyniku posłużenia się w przedstawionym rozumowaniu szeregiem *ukrytych przed-założonień*. Założenia te znajdują swoją kodyfikację formalną, na przykład w systemie logiki Fregego lub – współcześnie – w teoriach pierwszego rzędu. Takim ukrytym *w czasach Fregego* „założeniem"[7] było *intuicyjne* wyróżnienie logiki klasycznej z prawem wyłączonego środka i podwójnej negacji; por. na przykład kroki (1) i (2) w rozumowaniu powyżej. Rzeczywiście *obecnie* możemy rozważyć użycie innej logiki. Nie zmienia to jednak w niczym *historycznego faktu*, że logika klasyczna została wyróżniona w sposób pozaformalny i intuicyjny na pewnym etapie rozwoju matematyki.

Sytuacja ta jest typowym przykładem rozdwojenia horyzontalnego. Z rzeczowego punktu widzenia, ukrytym założeniem aktywnym w *intuicyjnym* wyprowadzeniu antynomii Russella *było* przyjęcie dwuwartościowości logiki. Z historycznego punktu widzenia należy stwierdzić, że rzeczywiście później rozważono użycie logik wielowartościowych. Wiemy, że **A.1** jest sprzeczny z każdą skończenie wielowartościową logiką Łukasiewicza. Jednakże dalej nie wiemy, czy pełny schemat komprehensji jest niesprzeczny z nieskończenie wielowartościową logiką $L_{\aleph 0}$. Th. Skolem, opierając się na twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym pokazał, że aksjomat komprehensji obowiązuje w wielowartościowej logice Łukasiewicza $L_{\aleph 1}$ dla formuł bezkwantyfikatorowych ze zmiennymi wolnymi[8]. Następnie C.C. Chang uogólnił ten rezultat dla dowolnej formuły z jedną zmienną wolną[9].

[7] Założenie jest „ukryte" w tym sensie, że jest przyjmowane bez dyskusji innych możliwych rozwiązań i tak, jakby te inne możliwości nie istniały. „Ukryte" są więc te inne możliwości.

[8] Por. tenże, *Bemerkungen zum Komprehensionaxiom*, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 3, 1957, 1–17.

[9] Por. tenże. 1963. The axiom of comprehension in infinite valued logic. *Mathematica Scandi-*

Ukrytych założeń jest znacznie więcej. Niektóre z nich są obecnie jawne i zostały dokładnie zanalizowane. Jednakże inne w dalszym ciągu pozostają ukryte i aktywnie określają postać formalnej kodyfikacji matematyki. Do znanych, ale pierwotnie ukrytych przed-założeń – oprócz dwuwartościowości i „klasyczności" logiki (por. na przykład obecnie znane logiki intuicjonistyczne bez prawa wyłączonego środka i bez prawa podwójnej negacji) – należy pierwotne przekonanie, że system formalny ma tylko jedną wszechobejmującą dziedzinę aplikacji (tzw. model teorii; logika Fregego, wbrew intencjom i intuicjom, które kierowały jej tworzeniem, jest trywialnie prawdziwa w dziedzinie zawierającej tylko *jeden* obiekt). Kolejnym było przekonanie o *homogeniczności* dziedziny danej teorii, np. teorii zbiorów. Na przykład, (1) opiera się nie tylko na prawie wyłączonego środka, ale także na przekonaniu, że zbiór **Z** nie jest żadnym nowym rodzajem obiektu, lecz że jest zbiorem „tego samego rodzaju" co pozostałe zbiory. Dlatego można go traktować jako podlegający „tym samym prawom" co inne zbiory.

Obecnie wiadomo, że wyróżnienie różnych rodzajów obiektów (na przykład zbiorów i klas właściwych lub typów obiektów w teoriach typów; por. także tzw. *many-sorted logics*) pozwala uniknąć antynomii Russella w odniesieniu do jednego rodzaju (lub pewnych określonych rodzajów) tych obiektów.

Nie wszystkie alternatywne możliwości zostały jednak *w pełni* rozważone. Pewne *warianty zasady homogeniczności* dziedziny teorii są dalej ukryte i aktywne. Należy do nich:

Ukryte założenie 1. (UK.1) Istnieje tylko jedna *globalna* relacja należenia do zbioru.

Nie jest wcale oczywistym *a priori*, że nie może istnieć równocześnie w danej dziedzinie więcej relacji należenia do zbioru: $\in, \in_1, \ldots, \in_n$. Załóżmy, że zbiór tworzony przez daną własność nie musi być jednym z dotychczasowych obiektów oraz, że jego elementy mogą należeć do tego zbioru na mocy innej niż $\in$ relacji należenia do zbioru.

Możemy przyjąć następującą postać aksjomatu komprehensji:

A.1a. $(\varphi)\forall x \exists z [x \in_1 z \equiv \varphi(x)]$[10];

gdzie φ oznacza jak poprzednio dowolną własność sformułowaną przy pomocy pierwotnego standardowego języka L teorii zbiorów (tj. z relacją identyczności „=" i relacją „$\in$"). W rozszerzonym o $\in_1$ języku (L_1) nie ma możliwości sfor-

navica 13, 9–30. Twierdzenia Brouwera o punkcie stałym nie da się zastosować w przypadku logiki L_{NO}.

[10] Dla uproszczenia pomijam parametry i ewentualne inne zmienne wolne w φ.

mułowania antynomii Russella. Dla naszej starej własności $\varphi(x)$: $\sim (x \in x)$, otrzymujemy:

(3) $\forall x x \in_1 \mathbf{Z} \equiv \sim (x \in x)$. Podobnie dla negacji: $\forall x \sim (x \in_1 \mathbf{Z}) \equiv x \in x$. Dla zbioru **Z** mamy: $\mathbf{Z} \in_1 \mathbf{Z} \equiv \sim(\mathbf{Z} \in \mathbf{Z})$.

Zwróćmy także uwagę, że dla konkretnych zbiorów (określonych przez stałe parametry $X, Y, Z, \ldots$), aby uniknąć „cieni" w postaci podwójnych obiektów, możemy utożsamić zbiory określone przez $\in$ i $\in_1$, przyjmując następujące aksjomaty ekstensjonalności:

E.1. $\forall x[(x \in_1 Y \equiv x \in Z) \rightarrow Y = Z]$[11].
E.2. $\forall x \forall y \forall z[y = z \equiv (x \in_1 y \equiv x \in_1 z) \wedge (x \in y \equiv x \in z)]$.

Zdefiniujmy wyrażenia $\forall x \forall y \forall z[y =_{\in 1} z \equiv (x \in_1 y \equiv x \in_1 z)]$ (ekstensjonalność w sensie $\in_1$) oraz $\forall x \forall y \forall z[y =_{\in} z \equiv (x \in y \equiv x \in z)]$ (ekstensjonalność w sensie $\in$). Ekstensjonalność w sensie $\in$implikuje ekstensjonalność w sensie $\in_1$, jeśli zbiory w sensie $\in_1$nie posiadają żadnych innych specyficznych własności (określonych przez aksjomaty sformułowane bez użycia $\in$ i z użyciem „=" oraz „$\in_1$"), lecz są tworzone jedynie na mocy **A.1a**. Możemy wówczas w **A.1a** rozszerzyć zbiór prawidłowych wyrażeń określających własności, o własności wyrażone także przez wyrażenia z parametrami zawierające wyrażenia postaci „$x \in_1 Y$", czyli przez wyrażenia, z których można wyeliminować na podstawie podanych aksjomatów symbol $\in_1$.

Rozpatrywany system teorii zbiorów z dwoma relacjami można rozszerzać na wiele sposobów. Możemy dodać pewne aksjomaty specyficzne dla $\in_1$-zbiorów: sumy, zbioru potęgowego itp., wówczas zbiory te nie będą tworzone jedynie na podstawie **A.1a**. Jeśli dodamy aksjomat definicyjny określający klasy właściwe jako zbiory, które nie są $\in$-elementami, możemy wówczas zinterpretować system teorii zbiorów von Neumana-Bernaysa-Gödla (NBG) w naszym systemie (dziedzina takiej interpretacji w sensie Tarskiego[12] D istnieje na mocy naszego aksjomatu komprehensji i jest określona przez koniunkcję własności występujących w skończenie aksjomatyzowalnym NBG). NBG jest zatem szczególnym przypadkiem podanego systemu, dotyczącym obiektów spełniających (między innymi) aksjomat ufundowania. Można uogólnić przedstawioną teorię i dodawać kolej-

[11] Nie obowiązuje natomiast ogólna postać aksjomatu ekstensjonalności (znana np. z *double extensions set theories*) **E.3.** $\forall x \forall y \forall z[(x \in_1 y \equiv x \in z) \rightarrow y = z]$. W analizowanej przeze mnie teorii, **E.3** w oczywisty sposób prowadzi do antynomii. **E.3** jest aksjomatem ekstensjonalności w *double extensions set theories* (są tam rozważane także inne aksjomaty ekstensjonalności, np. aksjomat będący sumą logiczną warunków z **E.2** i **E.3**).

[12] Por. Tarski, A., Mostowski, A., Robinson, R. M. 1953. *Undecidable Theories*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, część I *A general method in proofs of undecidability*.

ne aksjomaty komprehensji postulujące istnienie większej ilości rodzajów relacji należenia do zbioru.

Powyżej stwierdziłem, że ukryte założenie 1 (**UK.1**) zostało jedynie częściowo rozpatrzone. W pierwotnej wersji sytemu NBG, w pracach Bernaysa występowało sformułowanie z użyciem dwóch relacji należenia do zbioru[13]. Rozróżnienie to okazało się jednak nieistotne, gdyż każda formuła z użyciem nowej relacji należenia może być, zgodnie z koncepcją von Neumana, zastąpiona przez formułę zawierającą zmienną odpowiadającą klasie w dwusortowym języku zawierającym dwa rodzaje zmiennych: dla zbiorów i dla klas. Zupełnie analogicznie możemy zinterpretować system Morse'a-Kelleya (MK) jako posługujący się dwoma relacjami należenia do zbioru, gdyż jedyna różnica pomiędzy NBG i MK polega na dopuszczeniu w MK w aksjomacie komprehensji kwantyfikacji nad dowolnymi obiektami (a więc i klasami właściwymi), co jest wykluczone w NBG. Różnica pomiędzy przedstawioną powyżej ideą teorii zbiorów a NBG i MK polega na tym, że posługuję się ogólniejszym aksjomatem ekstensjonalności oraz, że klasy – tak jak zbiory – mogą być elementami innych klas oraz nie muszą spełniać aksjomatu ufundowania.

Nieco inny wariant negacji zasady homogeniczności został rozpatrzony w ramach *double extensions set theories*[14]. W teoriach tych przyjmuje się dwie relacje należenia do zbioru, a zbiór posiada dwie ekstensje określone przez te relacje, przy czym jedna ekstensja powstaje w wyniku komprehensji formuł z użyciem drugiej relacji należenia i *vice versa*. Aksjomat komprehensji ma tam postać:

A.1b. $(\varphi)\forall x\exists z[x \in_1 z \equiv \varphi(x) \wedge x \in z \equiv \underline{\varphi}(x)]$,

gdzie φ jest formułą logiki predykatów pierwszego rzędu zawierającą tylko symbole „=" i „$\in$", a $\underline{\varphi}$ jest „dualną" formułą powstającą z φ przez zastąpienie każdego wystąpienia symbolu „$\in$" symbolem „$\in_1$"

Okazuje się, że z trzech wariantów *double extensions set theories* zaproponowanych przez A. Kisielewicza, tylko jeden jest niesprzeczny. Tak samo, część możliwych formalizacji przedstawionej powyżej teorii zbiorów jest sprzeczna. Ważne jest jednak stwierdzenie, że idea większej ilości relacji należenia do zbioru

[13] Por. Bernays, P. A system of axiomatic set theory. *Journal of Symbolic Logic* (7 części): **2** (1937), 65–77; **6** (1941), 1–17; **7** (1942), 65–89; **7** (1942), 133–145; **8** (1943), 89–106; **13** (1948), 65–79; **19** (1954), 81–96.

[14] Por. Hinnion, R. 2003. About the coexistence of *classical sets* with *non-classical* ones: a survey. *Logic and Logical Philosophy* **11**, 79–90, Randall Holmes, M. The structure of ordinals and the interpretation of ZF in double extension set theory. *Studia Logica* http://math.boisestate.edu/~holmes/, (w druku); Kisielewicz, A. 1989. Double extension set theory. *Reports on Mathematical Logic* **23**, 81–89; Kisielewicz, A. 1998. A very strong set theory? *Studia Logica* **61**, 171–178; etc.

posiada także niesprzeczne (relatywnie) sformułowania: NBG, MK, *double extensions set theories*.

Jest to istotne dla demonstracji tezy o istnieniu ukrytych założeń dookreślających kontekst, w którym pojawia się antynomia Russella. Widać bowiem teraz wyraźnie, iż intuicyjna (pozorna) apodyktyczność aksjomatu komprehensji powinna być zastąpiona przez sformułowanie pewnej *hipotezy horyzontalnej*: jeśli istnieje tylko jeden typ obiektów i tylko jedna globalna relacja należenia do zbioru, to czy *wówczas* aksjomat komprehensji jest prawdziwy? Antynomia Russella dostarcza negatywnej odpowiedzi na powyższe pytanie.

Intuicja matematyczna jest istotnym elementem tworzenia wiedzy matematycznej, gdyż wykrycie i sformułowanie *explicite* ukrytych założeń ujawnia zarazem, że rzeczywiście *coś jest aktywnie dane w aktach intuicji*, gdyż *intuicyjnie* wyróżniamy (od logicznie możliwego „tła") tylko jedną możliwość horyzontalną. Możliwość ta niekoniecznie *musi* być apodyktycznie prawdziwa. Nie wiemy tego apodyktycznie *a priori*, bez zbadania takiej możliwości. Apodyktyczność pojawia się natomiast w ściśle określonym i wyróżnionym kontekście, przy czym „określenie" tego kontekstu jest zarówno jawne, jak i niejawne.

Ukryte założenia jako dane w fenomenologiczno-hermeneutycznej strukturze horyzontu hermeneutycznego można analizować w dwojaki sposób: albo ujawniając „logicznie" (tak jak to czynię w niniejszym artykule) inne ukryte możliwości teoretyczne, albo przeprowadzając badanie fenomenologiczne dostępnych w świadomości *fenomenów hermeneutycznych*[15]. Bardziej neutralna teoretycznie jest metoda pierwsza, gdyż wiele osób nie jest w stanie dokonać nie tylko *czystej* analizy danych świadomości, ale też nie jest – w zasadzie – świadoma swojej własnej aktywności intelektualnej w zakresie tego, jak rzeczywiście się ona odbywa na poziomie fenomenologicznej epistemologii opisowej. Nie wszystkie istotne w tym względzie sprawy są jednak możliwe do wyjaśnienia przy pomocy metody „logicznej" i *bez* użycia metody fenomenologiczno-hermeneutycznej.

2. Różne sensy pojęcia „ekstensjonalności" a ekstensjonalność matematyki współczesnej

Pokażę teraz inne ukryte założenia odpowiedzialne za powstanie antynomii Russella, które pokażą, że jest ona nieapodyktyczną hipotezą horyzontalną. Dodatkową intencją tej demonstracji jest wskazanie na – wydaje się trywialną – prawdę, iż nawet najbardziej formalna wersja teorii matematycznej jest zawsze

[15] O fenomenach hermeneutycznych piszę więcej w książce *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, Wydawnictwo IFiS PAN, Warszawa 2006.

tylko próbą kodyfikacji pewnych *wybranych* możliwości teoretycznych, a więc pewnych intuicyjnych przekonań (hipotez horyzontalnych). Każda formalizacja ma pewną „postać" i jest jak użycie wybranej symboliki. Ten sam symbol, analogicznie jak formalizacja, może oznaczać i odnosić się do całkowicie różnych rzeczy. Nie chodzi tu jedynie o sformułowaną w teorii modeli i twierdzeniach limitacyjnych teoriomodelową nieokreśloność dziedziny aplikacji danej teorii sformalizowanej. Istnieje także *intensjonalna* nieokreśloność teorii: ten sam formalny zapis może być zinterpretowany w całkowicie różnych kontekstach, które nazywam *modelami intuicyjnymi*. Pojęcie modelu intuicyjnego wykracza poza intuicyjnie określoną dziedzinę *tego, co matematyczne* w danej epoce historycznej. Każda teoria niewątpliwie „przekracza" swoją własną dziedzinę aplikacji, jeśli potrafimy ją (czy też w niej) zinterpretować (w sensie np. Tarskiego) jakąś inną teorię. Możliwe jest jednak także „zastosowanie" danej sformalizowanej teorii matematycznej do opisu i analizy pewnych sytuacji, które uważane są za (dotychczas) „niematematyczne". Aksjomaty ZFC mogą być użyte do „zakodowania" – na przykład – jakiegoś przepisu kulinarnego.

Sytuacje tego rodzaju analizują, rozwijane od około trzech lat, tzw. *concept calculi* H. M. Friedmana[16]. Friedman zauważył, że można podać formalne teorie kodyfikujące własności dowolnych pojęć, w tym (dotychczas) niematematycznych, wziętych z języka potocznego. Na przykład istnieje możliwość sformułowania aksjomatów dla teorii opisującej własności pojęć „lepszy niż" i „dużo lepszy niż" (*better than*, *much better than*), tzw. teoria **T**. Okazuje się, że ZFC i **T** są wzajemnie interpretowalne. Tak więc, **T** jest niesprzeczna wtedy i tylko wtedy gdy ZFC jest niesprzeczna. Dowód takiej relatywnej niesprzeczności angażuje niezwykle słabe środki dowodowe, dopuszczalne w pierwotnym programie Hilberta. Friedman podaje więcej przykładów *concept calculus*. Można także uporządkować teorie matematyczne, biorąc pod uwagę relację „interpretowalności" (w sensie Tarskiego) jednej teorii w drugiej. W przypadku teorii zbudowanych z jednego zdania otrzymujemy strukturę podobną do tzw. *Turing degrees*[17].

Fakty te wskazują na *intensjonalną nieokreśloność* teorii sformalizowanych i są związane z analizą *modeli intuicyjnych* w matematyce[18]. Globalnie rozpatrywana nieokreśloność intensjonalna oznacza, że pewna intensjonalna struktura,

[16] Prace istnieją głównie w formie preprintów; por. http://osdir.com/ml/science.mathematics.fom/2006-07/msg00039.html.

[17] Struktury takie Friedman nazywa *unary Tarski degrees*; por. Friedman, H., Interpretations according to Tarski. (Interpretations of set theory in discrete mathematics and informal thinking. Lecture 1), zamieszczone na stronie internetowej H. M. Friedmana.

[18] Więcej o idei modelu intuicyjnego, zob. w Król. Z. „ Rozwój pojęcia zbioru" I oraz „Rozwój pojęcia zbioru II", opublikowane na stronie VIII Kongresu Filozofii Polskiej http://www.calculemus.org/zjazd-filoz2008/okr-stol/index.html.

„charakter" matematyki współczesnej, odpowiedzialny za jej styl historyczny, została wyróżniona intuicyjnie i pozaformalnie. Aby wskazać *niektóre* komponenty niejawnie wyróżnione przez styl historyczny matematyki współczesnej powrócę teraz do analizy ukrytych założeń skodyfikowanych formalnie przez aksjomat komprehensji **A.1** i aksjomat ekstensjonalności:

E. $\forall x \forall y \forall z[(x \in y \equiv x \in z) \rightarrow y = z]$.

W początkowym okresie rozwoju teorii zbiorów wydawało się, że własność „bycia zbiorem" da się scharakteryzować poprzez dwa aksjomaty, tworzące tzw. rachunek idealny K[19]:

Aksjomat 1 (ekstensjonalności)[20]: Dwa zbiory są identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

Aksjomat 2 (komprehensji): Dla każdej własności P istnieje zbiór złożony z tych i tylko tych elementów, które posiadają tę własność.

Problem 1: A.1 i **E** uważa się za poprawny formalny przekład powyższych intuicji. Czy jest tak w rzeczywistości?

Formalna wersja **E** intuicyjnego aksjomatu ekstensjonalności (tj. **Aksjomatu 1**) nie budzi specjalnych wątpliwości. W czasach Dedekinda, a nawet długo jeszcze po nim, wydawał się on czysto analityczną (i apodyktyczną) prawdą *a priori*. Aksjomat ten stwierdza, że z danych elementów możemy utworzyć tylko *jeden* zbiór. Nie możemy jednak uznać, że aksjomat ten jest apodyktyczną i analityczną prawdą *a priori*, gdyż obecnie wiemy, że możliwe są inne, nieekstensjonalne teorie zbiorów.

[19] Nazwa pochodzi od Hermesa i Scholz'a; por. Hermes, H., Scholz, H. 1952. Mathematische Logik. W: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. B.G. Teubner, neubearb. Band I. 1952.

[20] Aksjomat ten sformułował Dedekind w 1888 roku: „Es kommt sehr häufig vor, dass verschiedene Dinge a, b, c, ... aus irgend einer Veranlassung einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefasst, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, dass sie ein System S bilden; sie sind enthalten in S; umgekehrt besteht S aus diesen Elementen. Ein solches System S (oder ein Inbegriff, eine Mannigfaltigkeit, eine Gesammtheit) ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding; es ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von S ist oder nicht. Das System S daher dasselbe wie das System T, in Zeichen S = T, wenn jedes Element von S auch Element von T, und jedes Element von T auch Element von S ist. Für die Gleichförmigkeit der Ausdrucksweise ist es vortheilhaft, auch den besonderen Fall zuzulassen, daß ein System S aus einem einzigen (aus einem und nur einem) Element a besteht, d.h. dass das Ding a Element von S, aber jedes von a verschiedene Ding kein Element von S ist. Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten". Por. Dedekind, R. 1917. *Was sind und was sollen die Zahlen?* vierte Aufsgabe, Friedrich Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1–2. (Zachowałem pisownię oryginału).

Należy zwrócić uwagę na fakt *podwójnej* ekstensjonalności teorii matematycznych: logicznej i specyficznej (lub pozalogicznej). *Ekstensjonalność logiczna* oznacza inwariantność twierdzeń danej teorii względem podstawień za zmienne w WFF formułach (*well-formed formulae*) wyrażeń równoważnych logicznie. Równoważność taka jest określona przez aksjomaty logiczne teorii i zależy od użytego systemu logiki, a inwariantność formuł w stosunku do podstawień wyrażeń równoważnych można (najczęściej) udowodnić metasystemowo (samo twierdzenie jest wówczas tezą danej teorii). „Inwariantność" oznacza równoważność logiczną *w danym systemie* wyjściowego wyrażenia z wyrażeniem otrzymanym w wyniku podstawienia za pewne zmienne wolne wyrażeń równoważnych logicznie. Ekstensjonalność logiczna oznacza możliwość rozpatrywania wyrażeń posiadających inny „kształt", który jest związany z ich różnym znaczeniem (tu: intensją) jako wyrażeń identycznych logicznie (czyli równoważnych) w logice prawdziwościowej. Oznacza to także „abstrakcję od sensów" wyrażeń. Ekstensjonalność logiczna jest ściśle związana z identycznością pewnych obiektów w danej teorii. Identyczność jako relacja równoważności dookreśla kiedy mamy do czynienia z formułami równoważnymi logicznie. „Identyczność" przyjęło się traktować jako część aparatu logicznego teorii, wydaje się jednak, że ma ona wiele wspólnego z następnym rodzajem ekstensjonalności.

Drugi rodzaj ekstensjonalności dotyczy *ekstensjonalności specyficznej*, a polega na sformułowaniu, które obiekty specyficzne (pozalogiczne) uznajemy za identyczne (równoważne specyficznie). Takie identyczne obiekty możemy podstawiać wzajemnie (w określonych przez reguły podstawiania warunkach) w WFF, a otrzymane w wyniku podstawienia formuły uznajemy (na mocy pewnego aksjomatu) za równoważnie logicznie. Zadanie ekstensjonalności specyficznej, jako nie wynikającej z aksjomatów logicznych teorii, odbywa się najczęściej poprzez podanie oddzielnego aksjomatu ekstensjonalości, takiego jak na przykład **Aksjomat 1** w wersji **E**. Sformalizowana teoria matematyczna nie musi jednak posiadać aksjomatów ekstensjonalności specyficznej (por. arytmetykę Peano PA, gdzie dwa napisy uznajemy za „równe" (identyczne), gdy oznaczają tę samą liczbę), gdyż często są one zbędne, zwłaszcza jeśli występują tam aksjomaty identyczności. Oczywiście obecność aksjomatów identyczności nie przeszkadza wprowadzeniu do teorii ekstensjonalności specyficznej, jak to widać, na przykład, w ZFC.

W pewnych typach teorii, np. w *non-well-founded sets*[21], aksjomaty specyficzne narzucają bardzo mocne warunki ekstensjonalności specyficznej. Tak jest z *AFA* (*Anti-Foundation Axiom*), który stwierdza, że każdy *graf* ma tylko jedno zdobienie („rozwinięcie", *decoration*). Oprócz specyficznej treści, która postuluje

[21] Por. Aczel, P. 1988. Non-well-founded sets. *Lecture Notes Number* **14**, CSLI (Center for the Study of Language and Information), Leland Stanford Junior University U.S.A.

istnienie, poza „normalnymi" zbiorami, także zbiorów typu „$x \in x$", czy nieskończonych serii „$\ldots x \in y \in z \in u$" (i oczywiście wielu innych), doprowadza do identyfikacji szeregu struktur. Z *AFA* wynika, na przykład, że istnieje tylko jeden zbiór typu „$x \in x$" oraz że uniwersum *V* jest silnie ekstensjonalne[22].

W klasycznych teoriach zbiorów aksjomaty ekstensjonalności specyficznej można formułować w różny sposób i możliwości te są związane ze sposobem wprowadzenia relacji identyczności w danej teorii[23]. Oczywiście, w teoriach zbiorów z klasami (np. NBG[24]) należy modyfikować (w elementarny sposób) aksjomaty ekstensjonalności specyficznej dla zbiorów (czyli nasz **Aksjomat 1**), aby stwierdzały identyczność pewnych klas. Podobnie jest w ZFA (teorii zbiorów Zermelo-Fraenkela z atomami).

Matematyka współczesna jest prawie całkowicie ekstensjonalna z wielu powodów, które omawiam sukcesywnie poniżej. Na przykład jest ekstensjonalna dlatego, że może być wyrażona (zredukowana) w ekstensjonalnych teoriach zbiorów i kategorii. Każda klasyczna teoria matematyczna jest ekstensjonalna zarówno logicznie, jak i specyficznie. Tylko niektóre teorie matematyczne starają się uwzględniać – w bardzo ograniczonym zakresie – intensjonalność, a odbywa się to najczęściej przy tendencji do zachowania ekstensjonalności logicznej. Ewentualne zmiany i ograniczenia dotyczą przeważnie ekstensjonalności specyficznej[25]. Każdy z klasycznych systemów teorii zbiorów opisanych w [FBH-L 1973] jest ekstensjonalny logicznie i specyficznie.

Ekstensjonalna logicznie i specyficznie są teoria kategorii i kategorialne teorie mnogości. W teorii kategorii zbadano związki ekstensjonalności specyficznej z wewnętrzną logiką teorii. Wyjaśniono tam m.in., że każdy *well-pointed* (kategorialna wersja aksjomatu ekstensjonalności[26]) topos jest biwalentny, a jeśli jest *well-pointed*, to jest klasyczny, itd. Wyjaśniono także związki ekstensjonalności z aksjomatem wyboru (AC). Na przykład, wiemy, że jeśli topos jest boolowski (tj. klasyczny) i prawdziwa jest w nim kategorialna wersja aksjomatu wyboru,

[22] Por. Aczel, *op. cit.*, rozdział II, 19-31.

[23] Por. Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A. 1973. Foundations of set theory. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* **67**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London, dalej cytowane jako [FBH-L 1973], 22-30.

[24] Por. Jech, T. 1978. *Set Theory*, Academic Press, N. York, London, 76-77.

[25] Z prób podania intensjonalnych teorii zbiorów wymienić należy: Hinnion, R. 2006. Intensional Positive Set Theory. *Reports on Mathematical Logic* **40**, 107–125; Gilmore, P. C. 2001. An intensional type theory: motivation and cut-elimination. *Journal of Symbolic Logic* **66**, 283–400 oraz program matematyki intensjonalnej (por. Shapiro, S. (ed.) *Intensional Mathematics*, North Holland Publishing Company, New York 1984). Por. także Johnstone, P. T. 1983. The point of pointless topology. *Bulletin of the American Mathematical Society* **8** (1), 41–53.

[26] Istnieją różne i nierównoważne sformułowania.

to jest słabo ekstensjonalny oraz, że topos jest *well-pointed* wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasyczny, biwalentny i spełnia kategorialną wersję AC. Logika toposów, które w naturalny sposób są modelami dla logik wyższych rzędów, jest ściśle ekstensjonalna[27].

Historia zagadnienia konstrukcji języków sformalizowanych jest istotna dla ukonstytuowania się pewnych cech używanych obecnie języków sformalizowanych i teorii zbiorów. Pierwsza systematyczna praca (obok prac Boole'a[28]) poświęcona temu zagadnieniu (Frege 1879)[29] – chyba najważniejsza praca w dziejach logiki – opisuje budowę języka sformalizowanego wychodząc od analizy istniejących w języku potocznym, a więc zastanych, wyrażeń złożonych[30]. Bardziej formalnie przejawia się to w jednej z najważniejszych zasad filozofii Fregego: „sens wypowiedzi określa sens poszczególnych i mniejszych jej składników". Współcześnie budowę języka przeprowadza się „od dołu", tj. wychodząc od pewnych elementarnych wyrażeń, pokazuje się, jak z nich tworzyć wyrażenia złożone. Podejście Fregego jest doskonałym przykładem podejścia hermeneutycznego w matematyce, które polega na analizie pewnej *zastanej* sytuacji matematycznej. Każde naprawdę nowe i wielkie odkrycie w dziejach matematyki pojawia się właśnie na tej drodze. Po takim odkryciu można już *zapomnieć* o rzeczywistej drodze, na jakiej zostało ono uzyskane i dla potrzeb podręcznikowej jasności wystarczy podać wypreparowaną konstrukcję „logiczną", pomijając zbędne (intensjonalne) uzasadnienia.

Frege konsekwentnie abstrahuje od *sposobu* formułowania sensu wypowiedzi i pokazuje, że w logice (i matematyce) istotna jest jedynie prawdziwość lub fałszywość zdań. Formułując logikę jako logikę prawdziwościową, mógł stwierdzić, że z punktu widzenia logiki istnieją tylko dwa przedmioty: Prawda i Fałsz. Oznacza to, że logika zajmuje się tylko tymi wypowiedziami, o których możemy jednoznacznie stwierdzić, że są albo prawdziwe, albo fałszywe.

---

[27] Por. Fourman, M. P. Logic of topoi. W: J. Barwise (ed.) 1977. *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1053–1090.

[28] Por. Boole, G., An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, http://www.gutenberg.org/etext/15114.

[29] Frege, G. 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle a. S., Louis Nebert. (Tłumaczenie angielskie: S. Bauer-Mengelberg, Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic. W: J. van Heijenoort (ed.) 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard University Press; dalej cytowane jako Heijenoort 1967.

[30] Frege był wyraźnie świadomy tej różnicy: "I do not start from concepts in order to built up thoughts or propositions out of them; rather, I obtain the components of a thoughts by decomposition of the thought" (wypowiedź Fregego z 26 lipca 1919 roku; cytuję za Heijenoort 1967, 1). Przeciwnie postępuje Tarski, budując teorię prawdy w naukach dedukcyjnych.

To przekonanie, którego źródeł można doszukiwać się u B. Bolzano[31], miało kolosalny wpływ na całą pofregowską matematykę i logikę. Zdecydowało ono bowiem o *ekstensjonalnym* charakterze matematyki współczesnej. Logika zdań w ujęciu Fregego abstrahuje od (intensjonalnego) sensu wypowiedzi. Formalnie możemy dla niej zbudować zero-jedynkowe modele, lub dwuwartościowe tablice prawdziwościowe. Sprawa ta – niejako mimowolnie – przesądziła o ekstensjonalności także logiki predykatów. Wyrażenia równoważne logiczne traktuje się jako „mające to samo znaczenie" i dlatego zastąpienie (podstawienie) jednego z nich innym równoważnym, nie może wpływać na prawdziwość całego wyrażenia. We współczesnych wersjach logiki predykatów można bez trudu udowodnić twierdzenie o ekstensjonalności wyrażeń logicznych.

Ekstensjonalność była także jednym z filarów nośnych programu logicyzmu. Fiasko logicyzmu udowodniło z kolei, że na potrzeby rekonstrukcji matematyki nie wystarczą tylko logiczne podstawy i trzeba dołączyć do czystej logiki także pewne wypowiedzi mające jakieś (pozalogiczne) „znaczenie" (np. wyrażenia zawierające relację należenia do zbioru). Powstały nasze teorie pierwszego (i innych) rzędu, gdzie obok aksjomatów logicznych mamy aksjomaty specyficzne (prekursorami byli Hilbert i Gödel). Obecnie takie teorie traktuje się jako „dogodne narzędzia", zapominając o ogromnych wysiłkach, które pokazały, że jest to pewna konieczność matematyczna wynikająca z niemożliwości wyeliminowania wypowiedzi specyficznych, niosących pewną treść pozalogiczną.

Łatwo dostrzec, że aksjomat komprehensji (**Aksjomat 2** w wersji **A.1**) jest sprzeczny na mocy ekstensjonalności logicznej: w dowodzie sprzeczności tego aksjomatu nie korzystamy z ekstensjonalności specyficznej (**Aksjomat 1** w wersji **E**).

Wiadomo, że częściowe ograniczanie ekstensjonalności specyficznej nie pozwala na uniknięcie antynomii Russella[32]. Pokażę poniżej, że ograniczenie ekstensjonalności logicznej, a więc odróżnianie utożsamionych („sklejonych") na mocy praw identyczności obiektów różnych *intensjonalnie* pozwala na uniknięcie antynomii Russella[33].

Analiza ukrytych, intuicyjnych założeń i intuicyjnych modeli dla teorii zbiorów pozwala na podanie pewnego nowego modelu intuicyjnego. Kodyfikacja for-

[31] Por. Bolzano, B. 1963. Bernard Bolzano's Grundlegung der Logik. Ausgewählte Paragraphen aus der *Wissenschsftslehre*, Band i und Band II mit ergänzenden Textzusammenfassungen einer Einleitung und Registern herausgegeben von Friedrich Kambartel. *Philosophische Bibliothek Band* **259**, Felix Meiner, Hamburg.

[32] Por. Hinnion, R. 2006. Intensional Positive Set Theory. *Reports on Mathematical Logic* **40**, 107–125.

[33] Przykładem takiego sklejenia jest też użycie tylko jednej relacji należenia do zbioru $\in$.

malna takich intuicji doprowadza to teorii, w której możemy posługiwać się bardziej swobodnie aksjomatem komprehensji.

Możemy wyobrazić sobie zbiór jako obiekt (przedmiot) złożony z dwóch „warstw": elementów i otoczki. W ekstensjonalnych teoriach zbioru zakłada się, że z danych elementów możemy utworzyć tylko *jeden* zbiór. Istnieje więc wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zbiorem i jego elementami. Sposób „wiązania" elementów w zbiór lub „powód", dla którego elementy „trafiają" do danego zbioru, są całkowicie nieistotne. Zwykle jednak myślimy o pewnych przedmiotach, obdarzonych rzeczywistymi cechami. I chociaż zbiory „ludzi" oraz „osób na Ziemi" (lub zbiór rozwiązań równania z wielkiego twierdzenia Fermata i pewnej grupy – powiedzmy – dwumianów) są identyczne z ekstensjonalnego punktu widzenia, to tworzymy je z intensjonalnie innych powodów. Ich ekstensjonalne własności, takie jak równoliczność, są wtórne. W „nowej intuicji zbioru" zbiory są identyczne, gdy mają identyczne nie tylko elementy, ale i „otoczki". Oczywiście, rolę „otoczki" mogą spełniać własności i pojęcia. W języku pierwszego rzędu oznacza to konieczność indeksowania takich zbiorów poprzez wyraźne wskazanie formuły, która wiąże elementy w zbiór. Nie trzeba też z góry zakładać (choć można i nie prowadzi to do sprzeczności), że formułom logicznie równoważnym odpowiadają identyczne „otoczki"[34].

Matematyka współczesna jest ekstensjonalna nie tylko na podstawie dotychczas wskazanych cech. Kolejnym sensem, w jakim możemy mówić o jej ekstensjonalności, jest redukcja i utożsamianie szeregu intensjonalnie różnych obiektów do obiektów wybranych tylko typów. „Ekstensjonalność" może także oznaczać „nie-intensjonalność" w wielu szczegółowych znaczeniach. Po pierwsze (Przypadek 1), „ekstensjonalność" może oznaczać brak predykatów intensjonalnych. Na poziomie danej teorii, „predykat intensjonalny" często definiujemy jako „predykat nie-prawdziwościowy", tj. taki, którego wartość logiczna (np. prawdziwość lub fałszywość w logikach dwuwartościowych) nie jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości logiczne zdań składowych, na których działa ten predykat. Defini-

[34] W teoriach zbioru zwykle wprowadzamy różne obiekty, które nie są zbiorami (takie jak indywidua lub zbiór pusty). Robimy to na zasadzie konwencji lub uznając, że „zbiór" można zdefiniować podając odpowiednie operacje tworzenia zbiorów. Na przykład, w ZFC na mocy aksjomatów wyróżniania i nieskończoności (stwierdzającego istnienie przynajmniej jednego zbioru), istnieje zbiór pusty, który w intuicyjnym sensie nie jest zbiorem. Dodatkowo, w ZFA odróżniamy zbiór pusty od innych indywiduów. Zakładamy, że wynik każdej takiej operacji jest „zbiorem". Bardziej podstawowe od pojęcia zbioru jest pojęcie *obiektu* (nie należy tego rozumieć w sensie teorii kategorii), które pozwala zachować te odróżnienia. W „nowej intuicji zbioru" można rozważyć obiekty złożone z samych „otoczek". Na podstawie analizy odpowiednich modeli intuicyjnych można pokazać, że „nie wszystko jest zbiorem" w matematyce, a nawet w samej teorii zbiorów. Istnieje możliwość sformułowania *czystej teorii zbiorów* bez jakichkolwiek innych obiektów.

cja ta w sposób niejawny uwzględnia sens, znaczenie wyrażeń składowych, które mogą mieć taką samą wartość logiczną, przy całkowicie różnych znaczeniach.

Oczywiście matematyka współczesna analizuje i zna teorie intensjonalne „modelujące" różne predykaty intensjonalne. W każdym jednak wypadku, pełnokrwiste intensje (znaczenia) pojęć są wtłaczane i analizowane w ramach teorii ekstensjonalnych. Przykładami takich ekstensjonalnych analiz intensji są logiki modalne, epistemiczne, deontyczne, aletyczne, doksastyczne, czasowe i inne. W teorii zbiorów, ograniczamy ekstensjonalność specyficzną i tworzymy teorie nieekstensjonalne. Tworzymy intensjonalne teorie mnogości wzbogacając je o pewne nowe predykaty, np. epistemiczne (program Shapiro). (Ekstensjonalna) topologia Grothendicka okazuje się naturalnym środowiskiem dla opisu operatora modalnego „jest lokalnie prawdą, że ...", tzw. modalność geometryczna. Ogólnie mówiąc: wiele relacji intensjonalnych jest modelowanych w teorii toposów. Teorie takie jak *mereologia* Leśniewskiego, które nie powstają w zamierzonej zależności od ekstensjonalnych teorii zbiorów, posiadają kanoniczne *frame'y* teoriomnogościowe; por. związek struktur mereologicznych z zupełnymi kratami boolowskimi, czy związek struktur modalnych z ekstensjonalnymi strukturami topologicznymi. Waluacje w posetach, modele Kripkego uwzględniają i modelują czasową relatywność rozwoju wiedzy matematycznej wynikającą z uwzględniania roli podmiotu tworzącego matematykę. Każda jednak „żywa intensja" jest zanurzana i interpretowana w ramach całkowicie ekstensjonalnych teorii. Analizujemy nie intensje, lecz ich („punktowe" – por. niżej) substytuty.

2a. Czy A.1 jest adekwatnym zapisem intuicyjnego sformułowania aksjomatu komprehensji?

Możliwość ekstensjonalnego traktowania intensji jest zakodowana na poziomie pewnych ogólnie akceptowalnych konwencji określonych pozaformalnie i obowiązujących na mocy określonych ukrytych założeń. Pokażę ich istnienie, analizując adekwatność przekładu **Aksjomatu 2** na jego formalną wersję **A.1**. W wyniku otrzymamy drugi możliwy wariant, Przypadek 2, rozumienia pojęcia „ekstensjonalności matematyki współczesnej" w sensie „nie-intensjonalności", w którym uwzględniamy pewne ukryte przedzałożenia.

Intensje na poziomie notacji odpowiadają *zwykle* różnej postaci termów. Na przykład, funkcja $f_1(x) = x + x$ jest utożsamiana z funkcją $f_2(x) = 2x$. Obiekty $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są identyczne, a różna postać napisów, które je reprezentują w teorii zapisanej w danym języku odpowiada różności ich intensji. Z tego punktu widzenia ekstensjonalne utożsamienie tych intensjonalnie różnych obiektów wynika z ekstensjonalności logicznej i specyficznej danej teorii, a możliwość dokonania takiego utożsamienia jest zaletą, gdyż upraszcza pewne techniczne sprawy. Wydaje się także, że na potrzeby danej teorii wystarczy odróżnianie intensji przez różne napisy.

Dla ustalenia uwagi, ograniczmy się do języka $L_\in$ pierwszego rzędu standardowej teorii zbiorów ZFC. Możemy w nim rozważyć podzbiór WFF „własności formułowalnych w $L_\in$". Oznaczmy ten podzbiór przez L_c. Zgodnie z **A.1**, każdemu elementowi L_c odpowiada pewien zbiór. Z kolei, każdy konkretny zbiór A w T jest określony przez pewien element φ^* z L_c – φ^*: $x \in A$, gdyż $A = \{x : x \in A\}$. Nazwijmy φ^* „formułą podstawową danego zbioru A". **A.1** stwierdza, że każdy element L_c odpowiada własności określonej przez formułę podstawową pewnego zbioru. Od strony intuicyjnej antynomia Russella pokazuje, że nie każda własność z L_c może być użyta do konstrukcji zbiorów w T, gdyż istnieją takie φ, że nie istnieje równoważna im w T formuła podstawowa φ^*. Własności wyrażalnych w danym języku jest więcej niż zbiorów w danej teorii zbiorów sformułowanej w tym języku. W przeciwnym wypadku teoria jest sprzeczna.

Sprzeczność **A.1** sformułowanego w L_c jest oczywista z intuicyjnych powodów. W L_c możemy bowiem sformułować intensjonalną własność „x nie jest elementem żadnego zbioru", czyli $\varphi^p(x) \equiv\sim (\exists y.x \in y)$. Własności tej nie może odpowiadać *żaden* zbiór, a w szczególności zbiór postulowany przez **A.1**. Jeśli bowiem $x \in \mathbf{Z}$ i równocześnie $\sim (\exists y.x \in y)$, to otrzymujemy sprzeczność. Własność Russella jest szczególnym przypadkiem $\varphi^p(x)$ i wynika z niej. Niezależnie od zwykłego dowodu w logice pierwszego rzędu twierdzenia mówiącego, że żadna relacja dwuargumentowa (a więc i relacja „$\in$"), nie może być zdefiniowana przez pewną formułę w tej teorii, aksjomat komprehensji jest fałszywy w jednorodnym środowisku (tj. z jednym rodzajem relacji należenia) z czysto intuicyjnych (intensjonalnych) powodów. Zatem formalna kodyfikacja intuicyjnego przekonania o odpowiadaniu *pewnego* zbioru każdej własności *musi* być sformułowana w modelu niejednorodnym. Pokazuje to także jasno, że nie każda intensjonalna własność jest redukowalna do ekstensjonalnej wypowiedzi teoriomnogościowej, gdyż w języku teorii zbiorów można sformułować wypowiedź, że „nie wszystko jest elementem pewnego zbioru".

Zbiór wszystkich własności (intuicyjnie pojęty), które są równoważne (w T) formułom podstawowym danej teorii T, oznaczmy przez L_{Tc} (L_{Tc}= „zbiór cech użytych w T"). Oczywiście, $L_{Tc} \subseteq L_c$. T jest niesprzeczna wtw $L_{Tc} \neq L_c$. Aksjomat komprehensji **A.1** dołączony do dowolnej teorii T (oznaczmy powstającą teorię przez T*) narzuca jednak warunek, że $L_{T^*c} = L_c$, gdyż w sformułowaniu *schematu aksjomatów* **A.1** jako formalnego zapisu **Aksjomatu 2** wyrażenie „$\varphi(x)$" uznajemy za adekwatny zapis zwrotu „x posiada cechę φ". Ponadto, tworząc zbiór $y = \{x \colon \varphi(x)\}$, „$\varphi(x)$" traktujemy często jako równoważne (metajęzykowo) wyrażeniu „ $<< \varphi(x) >>$ jest prawdziwe".

Aby uniknąć antynomii, należy odróżnić tezy danej teorii wraz z użytymi cechami (elementami L_{Tc}) od stwierdzeń „x posiada cechę φ". Dlatego wprowadźmy nowy symbol oznaczający wyrażenie „x posiada cechę φ":${}_x[\varphi(x)]$. Dla każdego *zdania* $\underline{\varphi(x)}$ otrzymanego z $\varphi(x) \in L_{Tc}$, $\underline{\varphi(x)} \rightarrow_x [\varphi(x)]$. Jednakże nie jest prawdą, że ${}_x[\varphi(x)]$ implikuje, że $\varphi(x) \in L_{Tc}$ i $\underline{\varphi(x)} \in T$. Zatem z faktu, że stwierdzamy w danej teorii, że pewna własność zachodzi dla określonego (lub wszystkich) x wynika, że ten x posiada cechę φ. Ale z faktu, że rozważamy posiadanie cechy φ nie wynika, że zdanie angażujące $\varphi(x)$ jest tezą T. Oznacza to, że $\varphi(x)$ nie jest poprawnym zapisem operatora ${}_x[\varphi(x)]$, gdyż $\sim\{\forall x.(\varphi(x) \equiv_x[\varphi(x)])\}$. Gdyby było $\forall x.(\varphi(x) \equiv_x[\varphi(x)])$, wówczas **A.1** umożliwiałby podanie definicji prawdy w T.

Zwykłe reguły podstawiania (związane z ekstensjonalnością logiczną) są odpowiedzialne za kolejne przed-rozstrzygnięcia, które stają się widoczne, gdy zastanowimy się jakie „rozsądne" własności powinien posiadać operator ${}_x[\varphi(x)]$. Powinien, po pierwsze, określać zbiór $z_{[\varphi(x)]} = \{x\colon {}_x[\varphi(x)]\}$, czyli „zbiór tych x-ów, które posiadają cechę $\varphi(x)$". Aksjomat komprehensji powinien mieć więc postać:

AK. $(\varphi)\forall x\exists z_{[\varphi(x)]}\ (x \in z_{[\varphi(x)]} \equiv_x[\varphi(x)])$.

Identyczność zbiorów $z_{[\varphi(x)]}$ można zdefiniować trochę inaczej niż to czyni **E**:

AI. $(\varphi)(\psi)\forall x\{z_{[\varphi(x)]} = z_{[\psi(x)]} \equiv (\forall x \in z_{[\varphi(x)]}\exists y \in z_{[\psi(x)]}.x = y) \wedge (\forall y \in z_{[\psi(x)]}\exists x \in z_{[\varphi(x)]}.y = x)\}$.

Operator „${}_x[\varphi(x)]$" można dookreślić przez kilka własności operacyjnych (dla przejrzystości opuszczam kwantyfikatory):

W1. ${}_x[{}_x[\varphi(x)]] \equiv_x [\varphi(x)]$;
W2. ${}_x[\varphi(x)] \wedge_x [\psi(x)] \equiv_x [\varphi(x) \wedge \psi(x)]$;

analogicznie czynimy dla alternatywy **W3.** i implikacji **W4.**;

Nie możemy jednak sformułować analogicznej własności **W5.** dla negacji, gdyż z faktu, że $\sim ({}_x[\varphi(x)])$ nie wynika, że ${}_x[\sim \varphi(x)]$, ani na odwrót (bo x może posiadać wiele innych cech; por. też następny akapit).

W przypadku formuły Russella „$\varphi(x) \equiv\sim (x \in x)$" z **AK** otrzymujemy zbiór $\mathbf{Z}_{[\sim(x\in x)]}$. Pytanie „czy $\mathbf{Z}_{[\sim(x\in x)]} \in \mathbf{Z}_{[\sim(x\in x)]}$?" określa pewną własność, którą na mocy reguł podstawiania uznajemy za szczególny przypadek *jednej i tej samej własności* „$\sim (x \in x)$". Tymczasem, w ogólnym przypadku, formuła „$\psi(x) \equiv z_{[\varphi(x)]} \in z_{[\varphi(x)]}$" ma *inny sens (znaczenie)*, gdyż określa *inny zbiór* $z_{[\psi(x)]}$, i intuicyjnie, i na mocy **AI**, gdzie zbiory te są różne, co łatwo pokazać. „$\mathbf{Z}_{[\sim(x\in x)]} \in \mathbf{Z}_{[\sim(x\in x)]}$" jest szczególnym przypadkiem zarówno $\varphi(x)$ jak i $\psi(x)$ na podstawie reguł podstawiania i praw operowania kwantyfikatorami. Logika pierwszego rzędu dokonuje „sklejenia", czyli utożsamienia zbiorów $z_{[\varphi(x)]}$ oraz $z_{[\psi(x)]}$. Opis formy (kształtu) danego wyrażenia należy do metajęzykowych własności semantycznych, a obecna w logice pierwszego rzędu aparatura formalna przesądza o utożsamieniu różnych intensjonalnie wyrażeń. Jest to kolejny przypadek, kiedy możemy mówić o ekstensjonalności matematyki współczesnej.

W celu uniknięcia sklejania, należy uwzględnić różnice pomiędzy wyrażeniami typu „$_x[\varphi(x)]$" oraz „$_y[\varphi(x)]$"[35], „$_{z_{[\varphi(x)]}}[\varphi(x)]$", „$_{z_{[\psi(x)]}}[\varphi(x)]$" itp., gdyż własność dotycząca jakiegoś już określonego obiektu nie jest identyczna intensjonalnie z własnością obiektu dowolnego (w tym także już określonego) pomimo „posiadania tej samej formy (kształtu)". Nie będę jednak analizował tych możliwości w obecnej chwili. Ograniczę się do ogólnego spostrzeżenia, łatwego do sprawdzenia przez czytelnika, że antynomia Russella nie powstaje przy przyjętych założeniach dotyczących różnicy pomiędzy „$\varphi(x)$" i „$_x[\varphi(x)]$". Ekstensjonalność matematyki współczesnej polega zatem *także* na tym, że – co prawda – różnym napisom mogą być przypisane różne intensje, ale także tym samym napisom odpowiadają często różne intensje. W połączeniu z ekstensjonalnością logiczną prowadzi to do zamiany i „mylenia" intensjonalnie różnych obiektów.

Wracając do naszej intuicji zbioru intensjonalnego jako tworu określonego nie tylko przez elementy, ale także przez „otoczki", widzimy, że aksjomat komprehensji i zwykłe „czysto formalne" cechy użytej logiki w sposób niekontrolowany przesądzają o utożsamieniu mogących być odróżnionymi obiektów. „Zawartość" aktów intuicji wyróżnia więc *pewną* koncepcję zbiorów od innych możliwych teoretycznie lecz „niewidocznych". Jest to kolejny przykład rozdwojenia. Nawet jeśli rozpatrywana intuicyjna teoria prowadzi do sprzeczności, to nie jest to oczywiste *a priori*, a tak przesądzają sprawę aksjomat komprehensji, ekstensjonalności i logika.

2b. Ekstensjonalność a intuicyjne modele punktowe

Do pełniejszego ujęcia zjawiska ekstensjonalności matematyki współczesnej konieczne jest odróżnienie i analiza dwóch *modeli intuicyjnych* matematyki: ekstensjonalnego modelu punktowego i intensjonalnego modelu „przedmiotowego", gdzie obiektami *nie* są pozbawione realnych własności „punkty", lecz „pełnokrwiste" przedmioty – nośniki realnych cech. Wyjaśnię to na przykładzie systemu geometrii Euklidesowej płaszczyzny, podanym przez Tarskiego.

Teorie matematyczne, takie jak geometria Euklidesowa, posiadają pewne zamierzone interpretacje. W systemie Tarskiego zmienne przebiegają „punkty", u Hilberta punkty i pewne inne obiekty geometryczne, a w jeszcze innych for-

[35] Na przykład: „$_y[\varphi(x)]$" można utożsamić z „$\exists x \in z_{[\varphi(x)]}.\ x = y$".

malizacjach mogą dotyczyć kół (np. E.V. Huntington) lub innych obiektów. Dla planimetrii Tarskiego zachodzi twierdzenie o reprezentacji, które mówi, że jeśli jakaś struktura jest modelem dla tej teorii, to jest izomorficzna z pewną strukturą algebraiczną. Z powodu intensjonalnej nieokreśloności teorii matematycznych, zamiast o punktach możemy mówić o dowolnych innych *przedmiotach*, na przykład o „stołach, krzesłach i kuflach do piwa" (Hilbert).

Model nazywam *intuicyjnym*, jeśli posługujemy się dowolnymi *przedmiotami*, tj. takimi obiektami, które posiadają (przynajmniej niektóre) własności nie opisane *explicite* przez teorię, której model rozpatrujemy. Szczególną grupę takich modeli tworzą *intuicyjne modele matematyczne*, gdzie przedmiotami są obiekty definiowalne formalnie w innych teoriach matematycznych. Jeśli w geometrii Tarskiego zastąpimy „punkt" przestrzeni przez – powiedzmy – „przestrzeń liniową", to otrzymamy przykład ostatniego typu modeli intuicyjnych. Można wtedy rozważyć problem, czy dla każdego takiego podstawienia istnieje niesprzeczne i „intuicyjnie sensowne" z matematycznego punktu widzenia, rozszerzenie danej teorii[36].

Jeszcze węższą klasę matematycznych modeli intuicyjnych stanowią te, gdzie przedmiotami są obiekty, które posiadają definicje „wewnątrz" teorii, której model intuicyjny rozpatrujemy. Na przykład, jeśli w geometrii Tarskiego zastąpimy „punkt" przez „prostą". Okazuje się, że w tym ostatnim wypadku istnieją pewne ograniczenia.

Wyobraźmy sobie, że każdy punkt płaszczyzny spełniającej aksjomaty Tarskiego „zastąpiliśmy" przez prostą prostopadłą do tej płaszczyzny i przechodzącą przez dany punkt. Wszystkie aksjomaty Tarskiego, które w zamierzeniu dotyczyły punktów, będą prawdziwe w nowym (trójwymiarowym) modelu intuicyjnym, jeśli relacje „leżenia pomiędzy" i kongruencji (tj. pierwotne relacje u Tarskiego) dla nowych *przedmiotów* (prostych) zdefiniujemy następująco: prosta a leży pomię-

[36] Od strony formalnej, poszukujemy nowej teorii, która jest interpretacją teorii wyjściowej. W sprawie interpretacji, por. np. Montague, R. 1965. Interpretability in terms of models. *Indagationes Mathematicae* **27** (3), 467-476; Epstein, R., Szczerba, L. W. 1979. Relatedness and interpretability. *Philosophical Studies* **36**, 225-231; Pambuccian, V. 2005. Groups and plane geometry. *Studia Logica* **81**, 387–398; Van Benthem, J., Pearce, D. 1984. A mathematical characterization of interpretation between theories. *Studia Logica* **43** (3), 295–303; Farmer, W. M. 1993. Theory interpretation in simple type theory. *Lecture Notes In Computer Science* **816**, 96–123; Waszkiewicz, J. 1971. The notion of isomorphism and identity for many-valued relational structures. *Studia Logica* **27**, 93–98; etc. Pojęcie interpretacji pierwszy ściśle zdefiniował A. Tarski, chociaż, z historycznego punktu widzenia, było używane od dawna; por. Tarski, A. 1953. *Undecidable theories* (we współpracy z A. Mostowski, R. M. Robinson) Amsterdam, North Holland Publishing Company, 20–23. W sprawie zastępowania jednych obiektów matematycznych innymi, por. Semadeni, Z. 2007. Zjawisko zastępowania jednych obiektów matematycznych przez inne obiekty o tej samej nazwie. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Didactica Mathematicae* **30**, 1–39.

dzy prostymi b i c wtedy i tylko wtedy gdy odpowiadające tym prostym punkty (przed zamianą) spełniają tę relację. Analogicznie postępujemy z kongruencją. Dla takich prostych są prawdziwe wszystkie aksjomaty planimetrii Tarskiego. Nasz model jednak nie jest „płaski", lecz trójwymiarowy, pomimo że nowe przedmioty spełniają wszystkie aksjomaty planimetrii. Model będzie dwuwymiarowy tylko dla niektórych przedmiotów, na przykład dla pęków prostych na płaszczyźnie. Czy jednak istnieje model, który zastępuje dokładnie jeden punkt dokładnie jedną prostą i jest płaski?

Można udowodnić istnienie takiego modelu, korzystając z aksjomatu wyboru (np. wybierając po jednej prostej z każdego pęku prostych). Okazuje się jednak, że jeśli przedmiot(y), który podstawiamy za „obiekty zamierzone" modelu pierwotnego jest obiektem definiowalnym w teorii pierwotnej, to odpowiednie relacje nie mogą być zdefiniowane w teorii pierwotnej i na odwrót (wynika to z drugiego twierdzenia Gödla). Modele takie są „nieregularne" w tym sensie, że relacje „leżenia pomiędzy" i kongruencji są „niewyrażalne" w języku pierwotnej teorii. (W naszym przykładzie metoda wyboru prostej z pęku nie może być „uporządkowana", tzn. odbywać się według jakiejś zasady lub cechy wyróżniającej proste na płaszczyźnie, o której „da się opowiedzieć" w języku pierwotnej teorii, opisującej płaszczyznę). Można posłużyć się nowymi relacjami, analogicznie jak w teorii zbiorów z dwiema relacjami należenia do zbioru. Istnieje szereg dalszych prawidłowości, jakim podlega zmiana przedmiotów w modelu i przejście do innego modelu intuicyjnego.

Czytelnik z łatwością zauważy, że „rachunki pojęć" (*concept calculi*) Friedmana są związane z analizą modeli intuicyjnych i, często, są ich szczególnym przypadkiem. Podstawową cechą modeli intuicyjnych jest możliwość ich budowy i posługiwania się nimi bez uprzedniej formalizacji. Model intuicyjny dostarcza „intuicyjnej interpretacji" danej teorii. Dla danego typu przedmiotów istnieje wiele różnych modeli intuicyjnych; por. przykład z „prostą". Modele tego rodzaju są jedną z *platońskich* metod badania matematycznego[37]. Są one także istotne w matematyce głównie dlatego, że matematycy pracują zawsze w jakimś modelu intuicyjnym.

Z twierdzeń limitacyjnych wynika, że matematyka jest formalizowalna tylko *lokalnie*: dla każdej matematycznej struktury istnieje jej „zewnętrze", czyli inna formalna struktura z odpowiadającą jej formalną teorią[38]. Modele intuicyjne po-

---

[37] Są one „platońskie" w sensie platonizmu jako metody badania w matematyce; por. Król, Z. 2006. *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, Wyd. IFiS PAN, Warszawa. Należy także podkreślić dydaktyczną przydatność modeli intuicyjnych; por. Semadeni, Z., Zjawisko zastępowania jednych obiektów matematycznych ....

[38] Stosunkowo nowym jest – udowodnione przez J. Króla – ograniczenie w teoretycznej możliwości konstrukcji nieskończonego ciągu formalizacji: *klasyczny* język – *klasyczny* metajęzyk –

zwalają badać związki pomiędzy takimi różnymi teoriami w nieco inny niż w teorii kategorii sposób. Przykładami modeli intuicyjnych są „język" teorii (przedmiotami są tutaj symbole posiadające różny kształt, niezdefiniowany w danej teorii), arytmetyzacja składni, interpretacja logiki klasycznej i intuicjonistycznej w topologii, modele w toposach, itd. Geometrie nieeuklidesowe powstały *najpierw* jako pewne modele intuicyjne[39].

Analiza modeli intuicyjnych pozwala wykryć szereg *ukrytych założeń*, przyjmowanych bezwiednie w różnych formalnych teoriach. Wobec możliwości istnienia *częściowych* podstawień przedmiotów za „wyjściowe" obiekty danej teorii (tj. podstawień tylko za niektóre „punkty" lub podstawień różnych rodzajów przedmiotów za jednorodne „punkty") i tym samym *niejednorodnych modeli intuicyjnych*, widać, że takim założeniem jest przekonanie o *intensjonalnej jednorodności* dziedziny modelu.

Definicja prawdy Tarskiego jest kolejnym przykładem użycia modelu intuicyjnego: po odpowiednich „podstawieniach" dochodzimy do wniosku, że formułując tę teorię, pracowaliśmy w pewnym modelu intuicyjnym: „język", „spełnianie", „prawda", „metajęzyk", „model" itd., to pewne *przedmioty*, a *rzeczywiste* ich własności matematyczne dotyczą homomorfizmów pomiędzy bezjakościowymi „punktami" w sensie algebry abstrakcyjnej[40]. Dopiero algebraizacja teorii prawdy w języku „punktowej" algebry abstrakcyjnej ujawnia „przedmiotowy charakter" pojęć używanych w teorii prawdy typu Tarskiego (nazywam to *otoczką intensjonalną*). Teoria prawdy Tarskiego jest ekstensjonalna, gdyż „rdzeń logiczny" tej teorii opisany przez homomorfizm określonych algebr abstrakcyjnych dotyczy teorii prawdy tylko „przypadkowo" i może być użyty *także* do opisu zupełnie innych sytuacji matematycznych. Analogicznie jest w teorii kategorii, gdzie model i język okazują się pewnymi toposami, a „prawdziwość" to tylko pewne przekształcenie pomiędzy nimi.

Matematyka potrzebuje nowej teorii prawdy intensjonalnej[41].

klasyczny meta-metajęzyk itd., dla pewnych klasycznych obiektów matematycznych (np. gładkich rozmaitości różniczkowalnych): jeśli cały „kompleks" ma być niesprzeczny i całkowicie sformalizowany, musimy na pewnym poziomie przyjąć, że „meta-środowisko" jest intuicjonistyczne. Dowód tego faktu razem z niezmiernie interesującymi konsekwencjami, por. np. w Król, J. 2005. *Model-Theoretical Approach to Quantum Gravity*, PhD thesis, Instytut Fizyki Uniwersytetu Śląskiego.

[39] Na przykład, można zamienić „przestrzeń euklidesową" i „prostą euklidesową" przez „sferę" i „koło wielkie sfery" (geometria eliptyczna).

[40] Por. Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The mathematics of metamathematics*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

[41] Teoria prawdy Tarskiego opiera się na takiej intensjonalnej teorii, gdyż *prawdziwość* relacji *w modelu*, którym odpowiadają zdania atomowe, nie jest w niej *definiowana*. Dlatego, teoria Tarskiego jest trywialna w sensie, jaki nadaje temu wyrażeniu prof. A. Grzegorczyk: Tarski definiuje tylko jak *przyjętą* i *rozpoznaną* prawdziwość zdań atomowych przenieść na zdania złożone w ję-

Modele intuicyjne mają wielkie znaczenie w teorii zbiorów. Można podać szereg typów takich modeli dla teorii mnogości[42]. Dodatkowo, można za ich pomocą analizować *ściśle* wyobrażenia i intuicje, jakie – często jedynie *implicite* – towarzyszą pracy matematyków. Przykładem tego może być powiązanie *intuicji zbioru* w ZFC i innych *ekstensjonalnych* teoriach zbioru z intuicyjnym modelem geometrycznym, w którym elementy zbioru są punktami w pewnym obszarze geometrycznym. Identyczność elementów definiujemy jako „bycie w tym samym miejscu", a ich różność jako „bycie w innych miejscach". Można podać odpowiadający temu *concept calculus* opisujący te relacje. Zwykłe nasze wyobrażenia matematyczne, z jakich korzystamy przy czytaniu „tekstu" z teorii zbiorów czy teorii kategorii, dotyczą „kropek" w pewnej „lokalnej rozpostartości przestrzennej"; por. także użycie diagramów Venna[43]. Są to przedmioty, gdyż żadne własności takiego wyobrażenia, na przykład przestrzenne, nie są określone formalnie, a własności formalne są interpretowane w takim modelu intuicyjnym.

Istnieje wiele sytuacji, gdzie ze zdumieniem stwierdzamy istnienie głębokich związków pomiędzy (pozornie) całkowicie niezależnymi teoriami; por. hipotezę Maldaceny, zasadę holograficzną w mechanice kwantowej i tzw. *Ads/CFT correspondence*[44]. Są to skutki ekstensjonalności takich teorii.

Istnieją co najmniej dwie, fundamentalne cechy wspólne dla różnych formalnych koncepcji zbioru. Po pierwsze, wszystkie koncepcje zbioru – zarówno teoriomnogościowe jak, i kategorialne – dotyczą „punktów", a nie obdarzonych realnymi własnościami przedmiotów. Przyjmuje się, że każda struktura złożona z przedmiotów da się przedstawić w modelu „punktowym". Drugą własność można najlepiej scharakteryzować jako *ekstensjonalność w sensie kryterium nierozróżnialności Leibniza.*

---

zyku rachunku predykatów. Podobnie „trywialne" są inne waluacje, na przykład w toposach, czy semantyki Kripkego.

[42] Do podobnych wniosków doszedł R. McNaughton; por. McNaughton, R. 1954. Axiomatic systems, conceptual schemes, and the consistency of mathematical theories. *Philosophy of Science* **21**, 44–53 oraz tenże: 1957. Conceptual schemes in set theory. *Philosophical Review* **66**, 66–80.

[43] Przykładami prac, których wyniki formalne można wykorzystać do rekonstrukcji odpowiednich modeli intuicyjnych, prace A. Tarskiego *Sentential Calculus and Topology* i *Foundations of the Geometry of Solids*, (w: Woodger, J. H., Corcoran, J. (eds.) 1983. *Logic, Semantics, Metamathematics, Papers from 1923 to 1938 by Alfred Tarski.* Oxford University Press, 421–454, 24–29); por. także Epstein, R., Szczerba, L. W. 1979. Relatedness and interpretability. *Philosophical Studies* **36**, 225–231.

[44] "We show unexpected connection of Set Theoretical Forcing with Quantum Mechanical lattice of projections over some separable Hilbert space"; por. Król, J., Set Theoretical Forcing in Quantum Mechanics and AdS/CFT Correspondence, (http://www.springerlink.com/content/hp0u23u4p3280476/) oraz Król, J., Model Theory and the Ads/CFT Correspondance, (http://arxiv.org/abs/hep-th/0506003): "Renormalization in gravity-field theory limit of AdS/CFT correspondence is reformulated in terms of exotic R^4's" (!).

Muszę w tym miejscu dodać kilka dalszych wyjaśnień. Teorie te są „punktowe", dotyczy to także bezpunktowych topologii *locales* i innych tego typu, gdyż posiadanie danej własności przez element struktury, w której interpretujemy daną formalną teorię, modelowane jest w sposób konwencjonalny. Przy waluacjach w zbiorach „punkt" (element modelu) ma daną własność, jeśli należy do dziedziny danej relacji. „Sam z siebie" nie jest jednak nośnikiem żadnych „rzeczywistych" własności. Jedyne rzeczywiste jego własności – też relacyjne(!) – to „bycie identycznym z ..." i „bycie różnym od ..." innego punktu, co jest najczęściej interpretowane w „kropkowym" modelu intuicyjnym: każdy zbiór jest zbudowany z punktów lub z obiektów, które zawierają punkty.

Czy każdy model intuicyjny podlega formalizacji w języku „punktów"? Nie. Antynomię Russella można zinterpretować jako dowód tego faktu.

Powyższe krótkie wzmianki dotyczące ekstensjonalności matematyki współczesnej nie pozwalają na adekwatne ujęcie tego zjawiska w ramach obecnej pracy. Nie jest to jednak główny jej temat. Istotne dla głównego celu obecnej pracy jest stwierdzenie, że matematyka *nie musi* być ekstensjonalna.

3. Styl historyczny matematyki

Opis i analiza rozwoju matematyki wymaga użycia i wypracowania adekwatnych kategorii pojęciowych. Konieczność użycia kategorii „stylu historycznego matematyki" nie jest koniecznością aprioryczną, lecz opiera się na próbach opisu konkretnych form historycznych matematyki.

Pojęcie stylu historycznego matematyki ma służyć określeniu specyficznych cech matematyki charakteryzujących ją w różnych okresach rozwojowych. Powinno więc pozwalać na określenie różnic pomiędzy wiedzą matematyczną w czasie jej historycznych przemian, a tym samym umożliwić analizę jej rozwoju.

Pojęcie to zależy od koncepcji matematyki. Ogólnie mówiąc: koncepcje wyjaśniające, czym jest matematyka lub związane z opisem jej przemian historycznych możemy podzielić na „obiektywistyczne" i „kulturowo-socjologiczne". Jest to podział niedokładny, ale przyjmijmy konwencję, że możliwe „koncepcje mieszane" są także „obiektywistyczne". Koncepcje obiektywistyczne uznają pewną niezależność przemian matematyki od kontekstu socjologiczno-kulturowego, postulując istnienie czynników merytorycznych, apriorycznych, obiektywnych, intersubiektywnych itp. W skrócie: w koncepcjach obiektywistycznych rozumienie i tworzenie matematyki uwarunkowane jest istnieniem pewnego abstrakcyjnego sensu, który może być ujęty jako idealnie taki sam przez różne podmioty uprawiające matematykę w tej samej epoce lub w różnych epokach historycznych oraz przez jeden i ten sam podmiot w różnym czasie. W perspektywie historycznej pojawia się konieczność „rekonstrukcji", czyli ponownego odczytania dawnego sensu. Na przykład: jesteśmy w stanie rozumieć matematykę Euklidesa w ten sam sposób jak matematycy w starożytności, ale nie automatycznie. Także jeśli ktoś z nas tworzy jakąś teorię matematyczną lub przeczytał coś wczoraj, to może to odtworzyć później w dokładnie ten sam sposób.

W analogiczny sposób możemy wyróżnić dwa różne pojęcia „stylu historycznego matematyki". Według koncepcji pierwszej, styl historyczny matematyki to wszystko to, co jest przypadkowym, tj. „może być takie lub inne", uwarunkowanym historycznie i kulturowo sposobem budowania, wyrażania, zapisywania i przekazywania wiedzy matematycznej. Na przykład do stylu historycznego matematyki należą konkretny język, w którym jest zapisana dana teoria (greka, łacina, angielski), lub sposób, w jaki kończymy dowód (QED, kwadracik). Od razu widać, że w koncepcjach obiektywistycznych mamy do czynienia – by użyć terminologii Arystotelesa – z istotą, substancją matematyki (czyli jej światem sensów lub „rdzeniem logicznym") – oraz z jej „przypadłościami", tj. stylem historycznym. Nie ma jednak substancji czy czystej istoty bez przypadłości. W koncepcjach skrajnie kulturowo-socjologicznych matematyka to jej styl historyczny w danej epoce, kształtowany dowolnie jak na przykład utwór literacki.

Jeśli jednak spojrzymy na matematykę w różnych epokach historycznych, to próbując opisać matematykę w danej epoce, musimy – między innymi – określić czym się zajmowała i w jaki sposób, czyli opisać jej „przedmiot i metody". Czym innym bowiem zajmowała się matematyka starożytna, a czym innym Cantor i Frege. Z tego punktu widzenia, na styl historyczny matematyki składają się także jej pojęcia i metody, a przemiany matematyki są przemianami jej stylu historycznego. Określenie, które pojęcia i ukryte, nie wyrażone *explicite* przekonania były podstawowe w danej epoce prowadzi do rekonstrukcji intuicyjnych podstaw matematyki, a to z kolei pokazuje, że matematyka w perspektywie historycznej jest określona przez – często nieuświadomioną *explicite* – próbę odpowiedzi na pytanie o swoją naturę, czy istotę. Przemiany matematyki są przemianami jej podstaw, gdyż zmiana systemu intuicyjnych lub formalnych podstaw odpowiada z reguły rewolucyjnym zmianom w matematyce. Z drugiej strony, określenia w rodzaju „matematyka starożytnej Grecji" lub „matematyka francuska okresu Oświecenia" niekoniecznie muszą odpowiadać rzeczywiście istotnym postaciom historycznym matematyki, lecz są jedynie „wyjściowymi hasłami" w analizie procesów ewolucji wiedzy matematycznej, gdyż niekoniecznie istotna z punktu widzenia czystej historii zmiana epoki historycznej powoduje istotną zmianę w matematyce. Istotnie nowe idee matematyczne pojawiają się często w czasie trwania danej epoki historycznej i w czasie pewnej „historycznej stagnacji". Rozwój matematyki ma swój własny rytm, tylko częściowo zależny od historycznych przemian politycznych, gospodarczych, ekonomicznych itd. Preferuje to koncepcje obiektywistyczne.

Ontologia matematyki wyznacza klasę modeli jej rozwoju, które są zgodne z tą ontologią. Rozważania nad stylem historycznym pozwalają zatem sfalsyfikować wiele koncepcji matematyki, rozwoju matematyki, a nawet ontologii matematyki, np. jeśli pewne wersje platonizmu matematycznego są związane z liniowymi lub kumulatywnymi modelami rozwoju wiedzy matematycznej, to te modele można sfalsyfikować, co pośrednio falsyfikuje pewne wersje platonizmu. Tak samo falsyfikacji podlegają skrajne historyzmy i socjologizmy.

Można podać wiele innych, bardzo przydatnych określeń stylu historycznego matematyki, jak choćby pojęcie „stylu historycznego matematyki w danej epoce" lub innych służących do wyodrębnienia i opisu jej historycznej typologii, na przykład podziału na epoki rozwojowe, czym jednak nie będę się w tej chwili zajmował. Chciałbym natomiast skoncentrować się na pewnych cechach stylu historycznego matematyki współczesnej, w tym obecnej. Jeśli bowiem spróbujemy rozważyć hipotetyczną postać matematyki w przyszłości, to pewne cechy matematyki współczesnej, uważane zwykle za istotne, mogą okazać się czysto przypadkowymi, uwarunkowanymi historycznie jedynie i niekoniecznie obowiązującymi w matematyce przyszłej. Widać zatem, że inne określenie stylu historycznego może opierać się na odróżnieniu tego, co uwarunkowane historycznie od tego, co wynika z apriorycznej istoty rzeczy. Styl historyczny matematyki musi być określony i analizowany przy okazji analizy sporu aprioryzmu z aposterioryzmem. Rozważania nad stylem historycznym mogą być zatem związane z odkrywaniem całkowicie nowych dziedzin i problemów matematycznych, gdyż uświadamiają nam, że pewne rzeczy tkwiące głęboko i nieusuwalnie – jak się jedynie wydaje – mogą ulec eliminacji, zastąpieniu innymi. Dzięki rozważaniom nad stylem historycznym odsłaniają się nowe możliwości matematyczne. Starałem się to pokazać powyżej przy okazji analizy *niektórych* składowych stylu historycznego matematyki współczesnej.

Niewątpliwie, do nieistotnych postaci matematyki współczesnej należy jej paradygmat, czy postać globalnie teoriomnogościowa. Sposób myślenia o matematyce przez pryzmat teorii zbiorów – genialne i twórcze odkrycie – jest niekonieczną jej interpretacją. Można myśleć o matematyce i ją tworzyć bez teorii zbiorów. Jest tak z dwóch powodów. Po pierwsze, nie każda własność da się analizować jako odpowiadająca pewnemu zbiorowi.

Po drugie, ZFC jest wspaniałym, choć jedynie *historycznie* wyróżnionym punktem odniesienia w matematyce. Ogólnie można powiedzieć, że w matematyce nie mamy „wyróżnionego układu odniesienia". Moim zdaniem, dotyczy to także systemu podstaw matematyki. I dlatego istotna w odpowiedzi na pytanie o istotę matematyki jest perspektywa historyczna. Jedna z przemian stylu historycznego matematyki współczesnej dotyczy mozolnego odkrywania i uwzględniania tego faktu. Na przykład wiemy, że nie istnieje jeden wyróżniony język formalny dla „całej" matematyki i mówimy o „matematyce lokalnej". Lokalność matematyki wskazuje na zależność wiedzy matematycznej od kontekstu historycznego i jest kolejnym elementem stylu historycznego matematyki współczesnej.

Czy każda struktura matematyczna jest *nawet tylko lokalnie* zbiorem? Nie każda. Z drugiej strony użycie innych pojęć podstawowych, a zatem innego systemu podstaw matematyki, w teorii kategorii niekoniecznie prowadzi do rzeczywistego wyjścia poza kontekst teoriomnogościowy.

Równie zaskakującą jak antynomiczność aksjomatu komprehensji okazała się możliwość sformułowania aksjomatyki pojęcia zbioru *bez* użycia pojęcia elementu i relacji należenia[45]. Oczywiście musimy wtedy posłużyć się innymi pojęciami, definiowalnymi w języku teorii kategorii, na przykład pojęciem toposu. Zbiór w takiej teorii jest obiektem posiadającym pewne, określone „z zewnątrz" własności, tzn. punktowy (nie posiadający struktury wewnętrznej) obiekt okazuje się być zbiorem, jeśli podlega pewnym relacjom z innymi punktowymi obiektami. Relacja „należenia do zbioru" jest modelowana poprzez funkcje z innymi obiektami: „elementy" mogą być „na zewnątrz" zbioru. Zamiast mówić o elementach i ich należeniu do zbioru, charakteryzujemy najogólniejsze własności wszystkich możliwych funkcji pomiędzy zbiorami[46]. Funkcje takie (morfizmy w kategorii) w przypadku funkcji pomiędzy zbiorami mają specyficzne własności. Z dokładnością do „kategorialnego izomorfizmu" istnieje tylko jedna taka kategoria. Ponadto dla pewnych typów toposów, opisanych w języku pierwszego rzędu, istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy tranzytywnymi modelami ZFC a modelami w toposach (pewnych) elementarnych teorii toposów[47].

[45] Lawvere, F. W. 1964. An elementary theory of the category of sets. *Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A* **52**, 1506–1511.

[46] J. von Neumann chyba jako pierwszy (1925 r.), podał aksjomatykę pojęcia zbioru, gdzie pojęciem pierwotnym jest „funkcja", a nie „zbiór"; por. Von Neumann, J. 1967. An axiomatization of set theory. W: J. van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1951*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 393–413.

[47] Por. np. Osius, G. 1974. Categorical set theory: a characterization of the category of sets. *Journal of Pure and Applied Algebra* 4, 79–119. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy klasycznymi (teoriomnogościowymi) modelami systemu z i dobrze-punktowymi, częściowo tranzytywnymi toposami. z = ZF + Reg + TA + ATR: z = system logiki pierwszego rzędu z identycznością + aksjomaty ekstensjonalności, zbioru potęgowego, pustego, pary, jedności i ograniczonej separacji. Reg = aksjomat regularności, TA = aksjomat tranzytywności, ATR = aksjomat tranzytywnej reprezentowalności. ZF = z + inf + Reg + Rep, gdzie inf = aksjomat nieskończoności, Rep = aksjomat zastępowania. Aby skonstruować model w toposach wystarczy już system Z. Można przekształcić każdy model systemu Z w dobrze-punktowy topos. Równoważność modeli klasycznych i w toposach systemu Z, może być przekształcona w równoważność modeli dla

Wydaje się więc, że nasze *intensjonalne* pojęcia, intuicje i wyobrażenia są bez znaczenia dla charakterystyki *logicznego rdzenia* pewnych struktur matematycznych, a w tym pojęcia zbioru. Fakty tego rodzaju potwierdzają ekstensjonalność matematyki współczesnej.

Przykładów historycznych jest więcej. Na przykład wiemy, że własność „dobrego uporządkowania elementów" nie podaje istotnej charakterystyki pojęcia zbioru, chociaż wydaje się dość oczywiste, że możemy z dowolnego „worka" lub „otchłani" zawierającej nieznane przedmioty, „wyciągać" je kolejno, aż do wyczerpania. Oczywiście, zawsze jakiś przedmiot będzie wyjęty jako pierwszy, inny jako drugi, itd. Intuicje te przyświecały pierwotnym dowodom (Cantor, Zermelo) twierdzenia, że *każdy* zbiór można dobrze uporządkować. Obecnie wiemy, że procedura taka oparta jest na aksjomacie wyboru, który jest niezależny od innych aksjomatów ZF oraz, że istnieją struktury będące w intuicyjnym sensie zbiorami, których nie da się dobrze uporządkować.

Nasz sposób myślenia o zbiorach do czasu odkrycia kategorialnej teorii zbiorów był więc uwarunkowany i wyróżniony przez względy historyczne, a nie wynikał jedynie z apriorycznej konieczności. Alternatywna kategorialna teoria mnogości ujawnia intensjonalny styl (lub „charakter") klasycznie teoriomnogościowego ujęcia, gdyż wcześniej rewolucyjnie nowe ujęcie kategorialne było ukryte w przedstawionym w niniejszej pracy sensie.

Intelektualna przygoda z teorią kategorii wskazuje także, że styl matematyki współczesnej jest określony przez pewne własności matematyki leżące głębiej niż na poziomie pojęć zbioru i kategorii (bo opisy te są często równoważne). W ramach trwania stylu matematyki współczesnej można jednak wyróżnić podokresy stylu teoriomnogościowego i następnie stylu kategorialno-teoriomnogościowego. Wydaje się, sądząc po najbardziej twórczych pracach współczesnych w fizyce matematycznej dotyczących poszukiwania teorii opisującej kwantową grawitację, że ujęcie tradycyjne zostanie wyparte przez bardziej ogólne podejście w ramach teorii kategorii. W chwili obecnej jesteśmy jednak w okresie „schyłkowym" okresu mieszanego.

Co zatem charakteryzuje głębiej styl matematyki współczesnej, czyli co jest wspólne podejściu teoriomnogościowemu i kategorialnemu? Chodzi tu o pewien panujący *styl* formalizacji: obydwa opisy są całkowicie *ekstensjonalne*. Matematykę obecną charakteryzuje globalnie określony sposób modelowania i analizowania pełnokrwistych pojęć intensjonalnych. W teorii mnogości każde pojęcie jest modelowane przez określony zbiór, klasę itp. Pojęcia są identyczne, jeśli od-

systemu ZF (Zermelo-Fraenkela). Co więcej, istnieje też wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość modeli klasycznych ZC (Z + aksjomat wyboru) i dobrze-punktowych toposów spełniających ES (*epics splits* = kategorialna wersja AC; por. Freyd, P. 1980. The axiom of choice. *Journal of Pure and Applied Algebra* **19**, 103–125.

powiadające im zbiory są identyczne. Z drugiej strony, wyrażenia równoważne logiczne są intensjonalnie identyczne. W teorii kategorii sytuacja jest analogiczna, i to wcale nie dlatego, że możemy w niej sformułować kategorialne odpowiedniki aksjomatów komprehensji, ekstensjonalności etc. W teorii kategorii istnieją odpowiedniki teoriomnogościowych antynomii. Obydwie teorie modelują pełnokrwiste intensjonalnie pojęcia w ramach „punktowego modelu intuicyjnego", czyli posługują się modelami, gdzie przedmioty należące do dziedziny modelu są pozbawionymi realnych własności „punktami". Własności przysługujące punktom są orzekane konwencjonalnie. Rzeczywiste własności wyjściowe i dane intuicyjnie są redukowane do pewnych relacji definiowalnych w świecie punktów.

Z drugiej strony, posiadamy całą skarbnicę takich intuicyjnych pojęć matematycznych, jak: kontinuum, różne obiekty geometryczne, pojęcia ciągłości, liczby, ostatnio obliczalności itd. Starożytne pojęcie kontinuum jest nieredukowalne do naszych współczesnych, na przykład teoriomnogościowych koncepcji kontinuum, choćby dlatego, że punkty nie są jego częścią i nie ma intuicji metrycznych. Intuicyjne podstawy matematyki i potrzeba ich rekonstrukcji pojawiają się najpierw w perspektywie historycznej, gdyż aby zrozumieć matematykę dawną musimy zrekonstruować rzeczywistą sytuację badawczą i problemową w danej epoce, a nie jedynie „przetłumaczyć pojęcia" i zinterpretować je z użyciem matematyki współczesnej.

Konieczność rozważenia intuicyjnych podstaw matematyki współczesnej wynika z istnienia ukrytych założeń nawet w wersji ściśle sformalizowanej, gdyż określają one użycie formalizmu. To te ukryte założenia i inne, pozaformalne metody postępowania, na przykład intuicyjne utożsamianie, czy „zlepianie" obiektów, powodują powstawanie antynomii. Antynomii można uniknąć rekonstruując te ukryte operacje i założenia. Oprócz ukrytych założeń i operacji spotykamy się z ukrytymi zwyczajami, ukrytymi metodami postępowania. Na przykład, wszystkie pojęcia intensjonalne są zastępowane i interpretowane w ramach ekstensjonalnych pojęć zbioru i kategorii. Sposób modelowania intensji i typ ekstensjonalnego utożsamiania intensjonalnie różnych i możliwych do rozróżnienia obiektów określa styl historyczny matematyki współczesnej. Ten styl nie jest powierzchniowym zjawiskiem, lecz stanowi wewnętrzną cechę matematyki aktualnie uprawianej.

Inne składowe stylu historycznego matematyki współczesnej związane są z platonizmem matematyki współczesnej. Analizy historyczne i hermeneutyczne pokazują, że ta składowa wykrystalizowała się w wyniku wielowiekowego procesu. Obecnie platonizm ten przejawia się na poziomie platonizmu jako metody badania matematycznego.

Pojawia się konieczność analizy intuicyjnych podstaw matematyki współczesnej, które nie są redukowalne do obecnie znanych systemów podstaw matematyki. Analiza taka umożliwia tworzenie nowych teorii matematycznych. Teorie takie opierają się na nowym, rozszerzonym w stosunku do wiodącego obecnie, intuicyjnym pojęciu zbioru. Gödel myślał o podaniu takiej nowej, bardziej ogólnej intuicji zbioru. W podanej w tym tekście nowej intuicji zbioru hipoteza kontinuum jest fałszywa.

Konieczność analizy *rzeczywistych* (pragmatycznych) intuicyjnych podstaw matematyki współczesnej wynika z istnienia ukrytych założeń określających użycie formalizmu. Podane wstępne określenia stylu historycznego matematyki znajdują swoje naturalne dookreślenie w ramach hermeneutyki matematyki i wypracowanego tam pojęcia horyzontu hermeneutycznego. Postulowana analiza i rekonstrukcja intuicyjnych podstaw matematyki staje się koniecznością, jeśli uwzględnimy fakt ewolucji obecnego stylu matematyki. Matematyka starożytna nie była ani „platońska" we współczesnym sensie, ani sformalizowana, ani ekstensjonalna. Nie wszystko w matematyce jest jednak stylem historycznym. Co zatem jest i będzie stałe? Jaka będzie matematyka przyszłości?