

1.1.8. – inne metody obliczeniowe

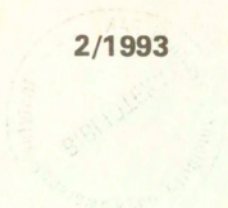
5.1.9. – metody obliczeniowe

Z. Iwanow, J. Bauer, J. Rońda

SPLINE'Y W ZAGADNIENIACH

DWUWYMIAROWYCH

2/1993

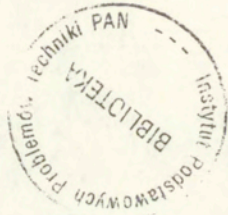


P. 269



WARSZAWA 1993

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 stycznia 1993 r.



56688



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 1,85 Ark.druk. 2,0
Oddano do drukarni w styczniu 1993 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

Zdzisław Iwanow
Jacek Bauer
Zakład Teorii Konstrukcji IPPT PAN
Jacek Rońda
Department of Applied Mathematics
University of Cape Town

SPLINE'Y W ZAGADNIENIACH DWUWYMIAROWYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono zastosowanie spline'ów do wyznaczania pierwszych pochodnych funkcji odwzorowujących obszar wyjściowy w prostokąt względem zmiennych niezależnych układu wyjściowego.

Ponieważ określenie transformacji obszaru wyjściowego w prostokąt jest w wielu przypadkach dość trudne w realizacji ograniczono się do znalezienia transformacji prostokąta w obszar wyjściowy traktując ją jako niejawnie przedstawienie transformacji odwrotnej (obszaru w prostokąt). Odpowiednie pochodne wyznaczono jak dla funkcji uwikłanej. Poprawność i efektywność numeryczną przedstawionego algorytmu zilustrowano dla przypadków w których znana jest postać analityczna odwzorowania prostego i odwrotnego, a w związku z tym również odpowiednich pochodnych tych odwzorowań. Porównano wartości uzyskane na drodze analitycznej z wartościami uzyskanymi numerycznie przy zastosowaniu powyższego algorytmu.

1. Wstęp

W mechanice ciała stałego zagadnienia początkowo-brzegowe, opisujące proces deformacji ciała, w większości przypadków sformułowane są w obszarach o złożonym kształcie.

W takich obszarach postępowanie numeryczne jest utrudnione.

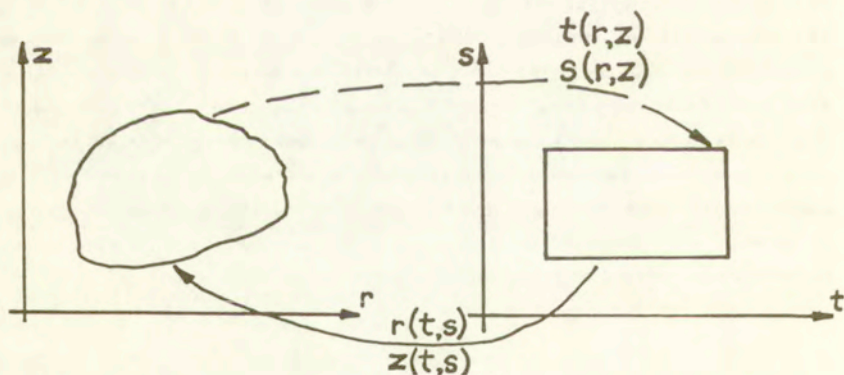
Na przykład dla metody różnic skończonych operatory różnicowe dla siatek nieregularnych są bardziej złożone, niż w przypadku siatek prostokątnych.

Stąd dążenie wielu autorów do zastąpienia zadania wyjściowego problemem sformułowanym w obszarze prostokątnym.

W metodzie elementów skończonych znane jest postępowanie związane z odwzorowaniem elementu izoparametrycznego w element standardowy [3].

Dowolny układ równań różniczkowych można zastąpić równoważnym układem równań pierwszego rzędu. Z tego względu transformacja problemu wyjściowego do obszaru prostokątnego jest określona jeśli znamy pierwsze pochodne funkcji odwzorowujących obszar wyjściowy w prostokąt $t(r,z)$, $s(r,z)$ względem zmiennych niezależnych układu wyjściowego: $\frac{\partial t}{\partial r}$, $\frac{\partial t}{\partial z}$, $\frac{\partial s}{\partial r}$, $\frac{\partial s}{\partial z}$ (rys.1).

W pracy podano algorytm wyznaczania powyższych wielkości bez określania w postaci jawnej odwzorowania obszaru fizycznego w prostokąt (linia przerywana), korzystając jedynie z odwzorowania obszaru prostokątnego w fizyczny (linia ciągła).



Rys. 1

Opis procedury wyznaczania powyższych pochodnych przedstawiono w rozdziale 3.

Zaproponowano pewną metodykę wykorzystującą spline'y (funkcje sklepane [5]) dla określenia powyższych pochodnych odwzorowania obszaru wyjściowego w prostokąt.

2. Spline - wiadomości podstawowe.

Ze względu na zawartość pracy podane zostaną podstawowe wiadomości dotyczące spline'ów wykorzystywane w sposób istotny we właściwej części niniejszej pracy. Zaczerpnięte one zostały z [1].

2.1. Spline trzeciego stopnia.

Rozpatrzmy odcinek $\langle a, b \rangle$ oraz jego podział:

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (1)$$

Niech dany będzie ciąg wartości:

$$Y: y_0, y_1, \dots, y_N \quad (2)$$

Należy znaleźć funkcję $S_{\Delta Y}(x)$ określoną w przedziale $[a, b]$ spełniającą następujące warunki:

- 1^o. jest ciągła wraz z pierwszą i drugą pochodną na odcinku $[a, b]$ tzn. klasy $C^2 [a, b]$,
- 2^o. na każdym z podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, \dots, N-1$ jest wielomianem trzeciego stopnia,
- 3^o. $S_{\Delta Y}(x_j) = y_j$; $j=0, \dots, N$.

W dalszym ciągu ograniczymy rozważanie do przypadku gdy:

$$h_j = x_j - x_{j-1} = \text{const} = h; \quad j=1, \dots, N \quad (3)$$

tj. do podziału odcinka $[a, b]$ na podprzedziały równej długości.

Zadaną funkcję, jak pokazano w [1] można przedstawić w postaci:

$$S_{\Delta Y}(x) := M_{j-1} \frac{(x - x_j)^3}{6h} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1} h^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h} + \left(y_j - \frac{M_j h^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h} \quad \text{dla } x \in [x_{j-1}, x_j]. \quad (4)$$

Parametry M_j ($j=0, \dots, N$) otrzymujemy z układu równań (warunki ciągłości oraz brzegowe):

$$\Delta M = d \quad (5)$$

gdzie:

6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix};$$

$$d_0 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0' \right),$$

$$d_i = 6 \frac{\frac{1}{h_{j+1}} (y_{j+1} - y_j) - \frac{1}{h_j} (y_j - y_{j-1})}{h_j + h_{j+1}},$$

⋮
⋮

$$d_N = \frac{6}{h_N} \left(y_N' - \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} \right).$$

Parametry y_0' , y_N' odpowiadają pochodnym w punktach $x=a$ oraz $x=b$.
Macierz odwrotna spełnia ([1] str.42) warunki:

$$A_{ij}^{-1} = A_{ji}^{-1} \quad 0 < i, j < N \quad (6)$$

$$A_{ij}^{-1} = A_{N-i, N-j}^{-1} \quad \text{pozostałe pary } (i, j).$$

Wykorzystując (6) wyznaczamy elementy macierzy A^{-1} z zależności:

$$A_{ij}^{-1} = \frac{\sigma^{j-1} (1 + \sigma^{2i}) (1 + \sigma^{2N-2j})}{(2 + \sigma) (1 - \sigma^{2N})} \quad 0 < i \leq j \leq N$$

$$A_{iN}^{-1} = \frac{\sigma^{N-i} (1 + \sigma^{2i})}{(2 + \sigma) (1 - \sigma^{2N})} \quad 0 < i \leq N \quad (7)$$

$$A_{0j}^{-1} = \frac{2\sigma^j (1 + \sigma^{2N-2j})}{(2 + \sigma) (1 - \sigma^{2N})} \quad 0 < j < N$$

$$A_{0N}^{-1} = \frac{2\sigma^N}{(2 + \sigma) (1 - \sigma^{2N})}$$

gdzie $\sigma := -(2 - \sqrt{3})$.

Parametry M_i wyznaczamy z zależności:

$$M_i = A_{i0}^{-1} \left(d_0 + \frac{\delta}{h^2} (y_0 - y_1) \right) - \frac{18}{h^2} \sum_{j=0}^N A_{ij}^{-1} y_j + \frac{\delta}{h^2} y_L + A_{iN}^{-1} \left(d_N + \frac{\sigma}{h^2} (y_N - y_{N-1}) \right) \quad (8)$$

2.2. Spline'y bazowe.

W przestrzeni spline'ów trzeciego stopnia opisanych wyżej można określić układ $N+3$ niezależnych spline'ów tworzących bazę [1].

Oznaczmy je w następujący sposób:

$$A_{\Delta,k}(x); \quad (k=0,1,\dots,N), \quad (9)$$

$$B_{\Delta,k}(x); \quad (k=0,N)$$

Konieczne do ich wyznaczenia parametry określa się w następujący sposób:

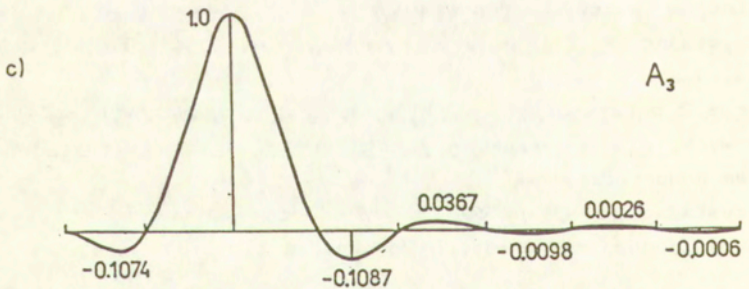
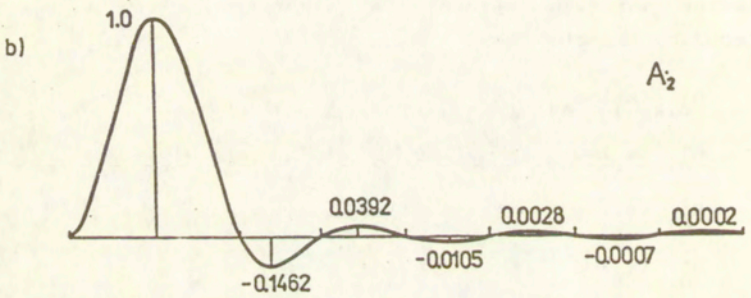
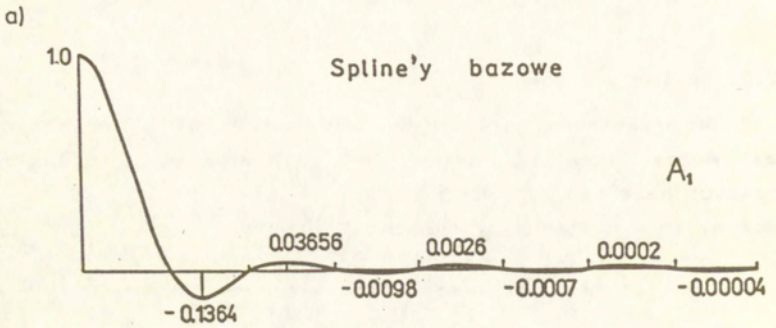
$$\begin{aligned} A_{\Delta,k}(x_j) &= \delta_{kj} & (j=0,1,\dots,N), \\ A_{\Delta,k}^*(x_i) &= 0 & (i=0,N; \quad k=0,1,\dots,N) \\ B_{\Delta,k}(x_j) &= 0 & (j=0,1,\dots,N), \\ B_{\Delta,k}^*(x_i) &= \delta_{ki} & (i=0,N; \quad k=0,N). \end{aligned} \quad (10)$$

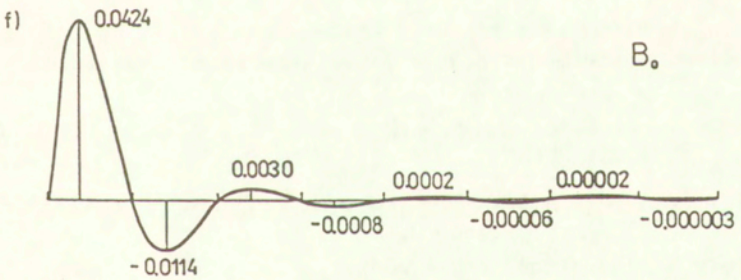
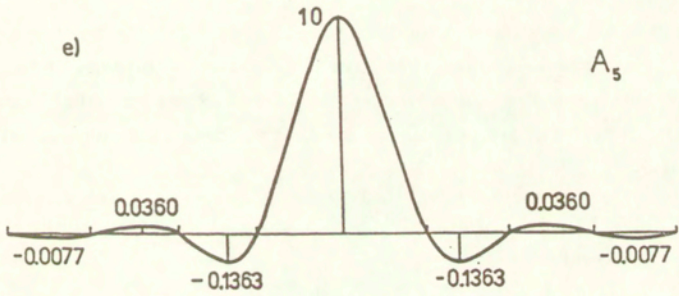
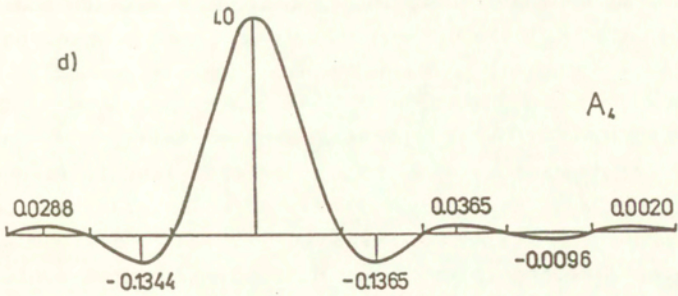
Stąd, z zależności podanych w 2.1 znajdujemy dla każdego ze spline'ów bazowych odpowiadające mu parametry M_i , a więc korzystając z (4) możemy wyznaczyć wartość dla dowolnego $x \in [a,b]$.

Na rys.2 pokazano wykresy kilku charakterystycznych spline'ów bazowych, dla przypadku gdy odcinek $[a,b]$ podzielony jest na osiem podprzedziałów.

Korzystając ze spline'ów bazowych można aproksymować dowolną funkcję jednej zmiennej ich kombinacją liniową:

$$S_{\Delta y}(x) := \sum_{j=0}^N A_{\Delta,j}(x) y(x_j) + y^*(a) B_{\Delta,0}(x) + y^*(b) B_{\Delta,N}(x) \quad (11)$$





Rys. 2

Jest to bardzo wygodne, z praktycznego punktu widzenia, przedstawienie spline'u aproksymującego daną funkcję.

Użyteczność polega na tym, że współczynnikami kombinacji liniowej są wartości funkcji w odpowiednich węzłach podziału i jej pochodne na brzegu. Występują one tutaj jawnie. Gdybyśmy natomiast chcieli bezpośrednio skonstruować spline aproksymujący daną funkcję z zależności podanych w 2.1 to wartości tej funkcji określałyby parametry M_i niejako niejawnie, poprzez zależność (5) i dalsze. Jest to niewygodne, gdy aproksymację tę chcemy wykorzystać do rozwiązania równania różniczkowego. Wtedy korzystając z (11) oraz równania, rozwiązania którego poszukujemy otrzymujemy bezpośrednio układ równań algebraicznych dla odpowiednich wartości szukanej funkcji.

W przypadku jedynie aproksymacji, gdy dotyczy ona wielu funkcji przedstawienie (11) jest również wygodne. Nie wymaga bowiem znajdowania parametrów M_i dla każdej z nich oraz dla różnych przedziałów $[a, b]$ oddzielnie, chociaż wymaga większej pamięci.

2.3. Spline'y dwuwymiarowe, aproksymacja funkcji dwu zmiennych.

W ślad za [1] (str. 237) podane zostaną zależności pozwalające aproksymować funkcję $f(t, s)$ dwu zmiennych w obszarze prostokątnym:

$$D := \{(t, s) : a \leq t \leq b; \quad c \leq s \leq d\}. \quad (12)$$

Określamy odpowiednie podziały odcinków $[a, b]$ oraz $[c, d]$.

$$\begin{aligned} \Delta_t &: a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \\ \Delta_s &: c = s_0 < s_1 < \dots < s_M = d \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{Oznaczmy: } \Pi := \Delta_t \times \Delta_s \quad (14)$$

oraz: $S_{\pi f}(t, s)$ -spline aproksymujący funkcję f w obszarze D przy siatce Π .

Zgodnie z [1] spline ten ma postać:

$$\begin{aligned} S_{\pi f}(t, s) := & \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M f(t_i, s_j) A_i(t) \bar{A}_j(s) + \sum_{j=0}^M \frac{\partial f(t_0, s_j)}{\partial t} B_0(t) \bar{A}_j(s) + \\ & + \sum_{j=0}^M \frac{\partial f(t_N, s_j)}{\partial t} B_N(t) \bar{A}_j(s) + \sum_{i=0}^N \frac{\partial f(t_i, s_0)}{\partial s} A_i(t) \bar{B}_0(s) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^N \frac{\partial f(t_i, s)}{\partial s} A_i(t) \bar{B}_M(s) + \frac{\partial^2 f(t_0, s_0)}{\partial s \partial t} B_0(t) \bar{B}_0(s) + \\
& + \frac{\partial^2 f(t_N, s_0)}{\partial s \partial t} B_N(t) \bar{B}_0(s) + \frac{\partial^2 f(t_0, s_M)}{\partial s \partial t} B_0(t) \bar{B}_M(s) + \\
& + \frac{\partial^2 f(t_N, s_N)}{\partial s \partial t} B_N(t) \bar{B}_M(s) \quad (15)
\end{aligned}$$

gdzie: $A_j(t)$, $B_j(t)$ oraz $\bar{A}_i(s)$, $\bar{B}_j(s)$ odpowiednie spliny' y bazowe (11) na odcinkach $[a, b]$ oraz $[c, d]$ (odpowiednio) przy podziałach Δ_t , Δ_s .

Jak widać z (15) w przypadku dwuwymiarowym bazę tworzą odpowiednie iloczyny spliny'ów z baz jednowymiarowych, współczynnikami kombinacji liniowej są odpowiednie wartości funkcji oraz jej pochodnych.

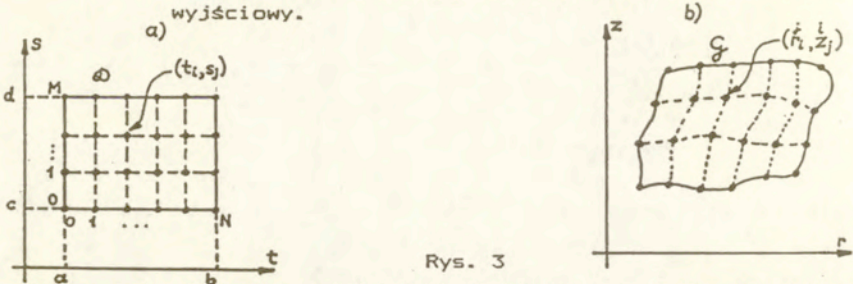
3. Aproksymacja odwzorowań obszarów.

Realne, fizyczne obszary, w których rozwiązujemy zadanie mechaniki, rzadko mają postać prostokąta. Stąd dążenie wielu autorów [2] do zastąpienia problemu wyjściowego określonego na dowolnym obszarze problemem sformułowanym na obszarze prostokątnym, co ułatwia postępowanie numeryczne.

Dla przeprowadzenia tego procesu trzeba jednak znać odpowiednie pochodne odwzorowania danego obszaru w prostokąt. Uwagę naszą zwrócił fakt, że w praktyce realizowano aproksymację obu przekształceń tzn. prostokąt w obszar i odwrotnie.

Istotą niniejszej pracy stała się obserwacja, że nie jest konieczne określenie transformacji obszaru w prostokąt, która jednocześnie jest trudniejsza w realizacji. Można ograniczyć się do znalezienia transformacji prostokąta w obszar, traktując ją jako niejawne przedstawienie transformacji odwrotnej - (obszaru w prostokąt) i wyznaczyć odpowiednie pochodne odwzorowania jak dla funkcji uwikłanej.

3.1. Aproxymacja odwzorowania obszaru prostokątnego w wyjściowy.



Rys. 3

W obszarze prostokątnym D określamy siatkę prostokątną (t_i, s_j) ($i=0, \dots, N$; $j=0, \dots, M$) (rys.3a). Określa ona podziały Δ_t oraz Δ_s .

W obszarze G określamy siatkę czworokątną $\begin{pmatrix} j & i \\ r_i & z_j \end{pmatrix}$

($i=0, \dots, N$; $j=0, \dots, M$) (rys.3b).

Aproxymację odwzorowania obszaru D w obszar G określamy w ten sposób, by punkt (t_i, s_j) w płaszczyźnie (t, s) przechodził

w punkt $\begin{pmatrix} j & i \\ r_i & z_j \end{pmatrix}$ (te same indeksy) w płaszczyźnie (r, z) , czyli:

$$z(t_i, s_j) := z_j^i \quad (16)$$

$$r(t_i, s_j) := r_i^j$$

obie funkcje aproksymujące: $z(t, s)$ oraz $r(t, s)$ określone zostaną zgodnie z zależnością określającą spline dwuwymiarowy (15). Zwróćmy uwagę, że do wykorzystania zależności (15) należy znać również odpowiednie pochodne aproksymowanej funkcji w punktach brzegowych. Pochodne te aproksymujemy różnicami skończonymi. przy tym dla pierwszych pochodnych są to różnice w przód lub w tył, natomiast dla pochodnych mieszanych w narożach odpowiednie kombinacje wartości funkcji w czterech narożnych punktach np. dla wierzchołka $(0,0)$ będą to punkty: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ (wg. rys.3a).

Spline aproksymujący funkcję $z(t, s)$ dla pochodnych określonych w ten sposób przyjmuje postać:

$$z(t, s) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M z_j^i A_i(t) \bar{A}_j(s) + \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^M \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ z_j & z_j \end{pmatrix} B_0(t) + \begin{pmatrix} N-1 \\ z_j & z_j \end{pmatrix} B_N(t) \right\} \bar{A}_j(s) + \\
& + \frac{d-c}{M} \sum_{i=0}^N \left\{ \begin{pmatrix} i & -i \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} \bar{B}_0(s) + \begin{pmatrix} i & -i \\ z_M & z_{M-1} \end{pmatrix} \bar{B}_M(s) \right\} A_i(t) + \\
& + \frac{2NM}{(b-a)(d-c)} \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & +1 \\ z_0 & z_0 & z_1 & z_1 \end{pmatrix} B_0(t) - \begin{pmatrix} N & -N-1 & -N & +N-1 \\ z_0 & z_0 & z_1 & z_1 \end{pmatrix} B_N(t) \right] \bar{B}_0(s) + \right. \\
& \left. + \left[- \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & +1 \\ z_M & z_M & z_{M-1} & z_{M-1} \end{pmatrix} B_0(t) + \begin{pmatrix} N & -N-1 & -N & +N-1 \\ z_M & z_M & z_{M-1} & z_{M-1} \end{pmatrix} B_N(t) \right] \bar{B}_M(s) \right\}.
\end{aligned}$$

Analogiczne wyrażenie otrzymujemy dla $r(t,s)$ (w (17) należy

zastąpić $\begin{matrix} i \\ z_j \end{matrix}$ przez $\begin{matrix} j \\ r_i \end{matrix}$). Zwróćmy uwagę na fakt, że w obszarze prostokątnym zakładamy siatkę w każdym z kierunków równomierną. Nie przeszkadza to jednak jej zagęszczeniu w obszarze G w tych jego rejonach, gdzie może to być ze względów fizycznych celowe.

3.2. Wyznaczenie pochodnych aproksymacji odwzorowania odwrotnego - obszaru G w prostokąt D .

Wyrażenie (17) dla funkcji $z(t,s)$ oraz analogiczne dla funkcji $r(t,s)$ możemy traktować jako przedstawienie w postaci uwikłanej aproksymacji odwzorowania obszaru G w prostokąt D , tzn. odwzorowanie postaci:

$$\begin{aligned}
t &= f_1(r, z) \\
s &= f_2(r, z)
\end{aligned} \tag{18}$$

Pochodne $\frac{\partial t}{\partial z}$, $\frac{\partial t}{\partial r}$, $\frac{\partial s}{\partial z}$, $\frac{\partial s}{\partial r}$ wyznaczamy, korzystając z odpowiedniej procedury dla funkcji uwikłanych.

Zapiszemy (17) oraz analogicznie dla $r(s,t)$ w postaci:

$$\begin{aligned}
z &= z(s, t) \\
r &= r(s, t)
\end{aligned} \tag{19}$$

Traktując (19) jako uwikłane przedstawienie zależności (18) oraz różniczkując obie równości względem z otrzymujemy:

$$1 = \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z},$$

$$0 = \frac{\partial r(s,t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial r(s,t)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (20)$$

Traktując powyższe zależności jako układ równań dla $\frac{\partial t}{\partial z}$ oraz $\frac{\partial s}{\partial z}$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\frac{\partial r(s,t)}{\partial s}}{\delta}; \quad \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\frac{\partial r(s,t)}{\partial t}}{\delta}; \quad (21)$$

$$\text{gdzie: } \delta = \frac{\partial z(s,t)}{\partial t} \frac{\partial r(s,t)}{\partial s} - \frac{\partial r(s,t)}{\partial t} \frac{\partial z(s,t)}{\partial s}.$$

Podobnie, różniczkując zależności (19) względem r po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}}{\delta}; \quad \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}}{\delta}; \quad (22)$$

Powtarzając powyższe postępowanie, tzn. różniczkując (20) ponownie po z , lub podobne równania prowadzące do (22) po r można wyznaczyć wszystkie drugie pochodne (w otrzymanych równaniach pierwsze pochodne traktujemy jako już znane). Odpowiednich zależności nie podajemy ze względu na ich obszerność, przy czym otrzymanie ich jest zabiegiem polegającym na czysto mechanicznym powtórzeniu przedstawionego wyżej i znanego postępowania.

Pochodne typu $\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}$ itd. występujące w otrzymanych zależnościach uzyskujemy przeprowadzając różniczkowanie wyrażenia (17) (analogicznie w wyrażeniu dla $r(s,t)$). Pochodne występujących tam spline'ów wyrażają się przez te same parametry M_i , przez które wyrażają się same spline'y. Otrzymujemy je natychmiast z równania (4).

4. Przykłady liczbowe.

Poprawność przedstawionego powyżej algorytmu oraz jego efektywność numeryczną zilustrowano dla wybranych przypadków, dla których znamy postać analityczną odwzorowania prostego i odwrotnego, a co za tym idzie również odpowiednich pochodnych tych odwzorowań. W tym celu wykorzystano dwa przypadki odwzorowań konforemnych. Obliczenia wykonano na emc RIAD z pojedynczą precyzją (dokładność ok. 7 cyfr dziesiętnych). Odwzorowanie pierwsze dotyczy transformacji obszaru prostokątnego w obszar jednospójny, który jest częścią pierścienia kołowego ([6] str. 220). Opisana jest ona następującymi zależnościami:

$$r = e^t \cos(s), \quad z = e^t \sin(s) \quad (23)$$

Natomiast pochodne odwzorowania odwrotnego przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial r} &= \frac{\cos(s)}{e^t}; & \frac{\partial s}{\partial r} &= -\frac{\sin(s)}{e^t} \\ \frac{\partial t}{\partial z} &= \frac{\sin(s)}{e^t}; & \frac{\partial s}{\partial z} &= \frac{\cos(s)}{e^t} \end{aligned} \quad (24)$$

Dla tej transformacji rozpatrzono dwa przypadki szczególne. Pierwszy z nich przedstawiony na rys.4 dotyczy wycinka pierścienia kołowego o kącie rozwarcia mniejszym od $\pi/2$, który otrzymujemy z obszaru prostokątnego $t \in [2.0; 4.0]$, $s \in [1.0; 2.0]$. Porównano wartości współrzędnych (r, z) dla punktów międzywęziowych otrzymane na drodze analitycznej (A)-równ. (23) z wartościami uzyskanymi numerycznie (N) przy wykorzystaniu aproksymacji spline'owej - pkt.3.1, równ. (17). Zestawienie wyników dla wybranej linii L-N ($t=2.875$, rys.4) przedstawiono w tabl. 1. Zestawienie rezultatów uzyskanych na drodze analitycznej i numerycznej przy siatkach podziału $N=4$, $M=4$ i $N=8$, $M=12$ dla odpowiednich pierwszych pochodnych odwzorowania odwrotnego przeprowadzono dla punktów narożnych (A, B, C, D) oraz dla punktów węziowych położonych wzdłuż linii I-I (H-F) oraz II-II (E-G). Przedstawiono je odpowiednio w tabl. 2, 3, 4. Przypomnijmy, że porównujemy wartości obliczeniowe na podstawie zależności (24) z wartościami uzyskanymi na podstawie przedstawionego w pracy algorytmu, a opisywane równ. (21) i (22). Przy opisie wyników liczbowych

wprowadzono następujące oznaczenia:

$$TR: = -\frac{\partial t}{\partial r}; \quad TZ: = -\frac{\partial t}{\partial z};$$

$$SR: = -\frac{\partial s}{\partial r}; \quad SZ: = -\frac{\partial s}{\partial z}.$$

Podobne porównanie wyników otrzymanych ze wzorów (23), (24) z rezultatami otrzymanymi na podstawie aproksymacji spline'owej (N) przedstawiono również dla drugiego przypadku transformacji (23). W wyniku tej transformacji prostokąt $t \in [2.0, 4.0]$, $s \in [0, \pi]$ odwzorowuje się na połówkę pierścienia kołowego (rys.5). Odpowiednie zestawienie wyników liczbowych dla tego przypadku przedstawiono w: tabl.- 5 porównanie aproksymacji odwzorowania wzdłuż linii $t=3.125$, tabl.- 6 porównanie pochodnych TR, TZ, SR, SZ w punktach narożnych, tabl.- 7 porównanie pochodnych Tr, SR wzdłuż linii I-I (K-L, $t=3.0$), tabl.- 8 porównanie pochodnych TR, SR wzdłuż linii II-II (H-G, $s=\pi/2$).

Drugi przypadek odwzorowania konforemego, który wykorzystano przy testowaniu przedstawionego algorytmu dotyczy transformacji obszaru prostokątnego w obszar dwuspójny (rys.6).

Transformacja opisana jest następującymi zależnościami ([6], str.223):

$$r = \frac{1 - e^{2t}}{2e^t \cos(s) - e^{2t} - 1}, \quad z = \frac{2e^t \sin(s)}{2e^t \cos(s) - e^{2t} - 1} \quad (25)$$

Podobnie jak w testach poprzednich porównano wyniki dla wartości współrzędnych (r,z) w punktach międzywęziowych wzdłuż linii I-I ($s=1.767147$) - tabl.9, linii II-II ($t=0.171875$) - tabl.10, pochodnych w punktach narożnych - tabl.11, wzdłuż linii III-III ($t=0.15$), pochodnych SR, SZ - tabl.12, pochodnych TR, TZ - tabl.13, wzdłuż linii IV-IV ($s=-\pi$), pochodnych TR, TZ - tabl.14, pochodnych SR, SZ - tabl.15.

5. Wnioski.

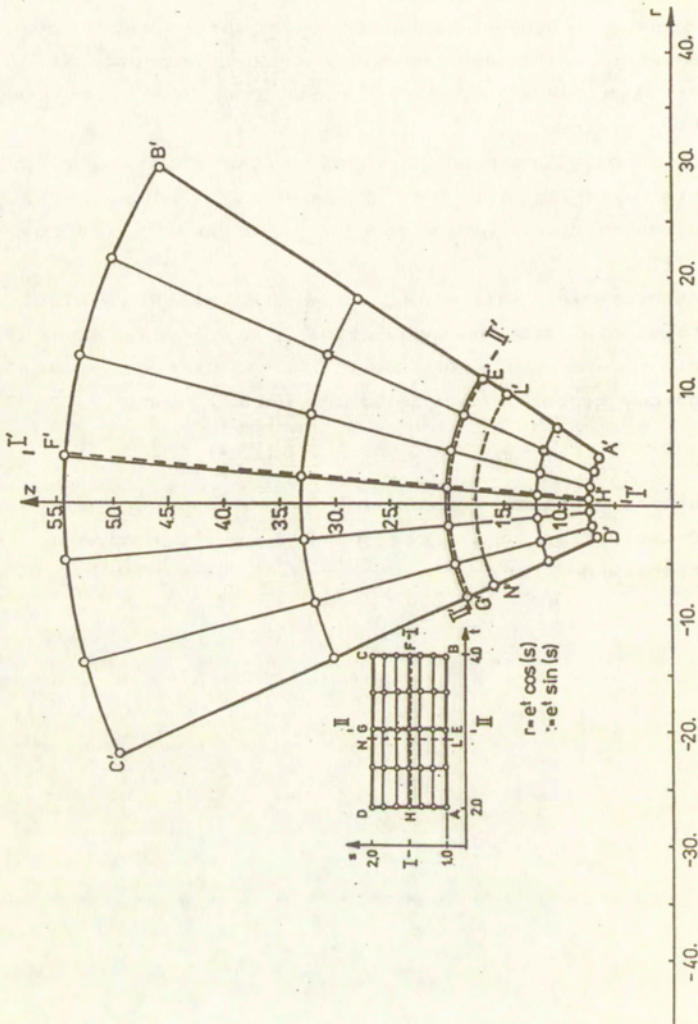
Z pokazanych przykładów wynika, że proponowana metoda zapewnia dużą dokładność aproksymacji odwzorowania prostokąta w obszar o złożonym kształcie oraz aproksymacji pochodnych odwzorowania odwrotnego-dowolnego obszaru w prostokąt.

Przy tym dokładność ta osiągana jest już przy stosunkowo rzadkiej siatce.

Dokładność aproksymacji można zwiększyć stosując spline'y stopnia wyższego niż trzy i zwiększając rząd aproksymacji odpowiednich pochodnych w narożach oraz na brzegach obszarów - wzór (15).

Zastosowanie spline'ów bazowych zwiększa elastyczność wykorzystania proponowanej metody. Nie wymaga bowiem przy zmianie odwzorowania szukania odwzorowującego spline'u, co wymagałoby każdorazowo rozwiązania układu równań.

Autorzy pragną serdecznie podziękować p. mgr Jadwidze Kupść-Zawidzkiej za istotną pomoc przy uruchamianiu programu obliczeniowego.



Rys. 4

TABLICA 1

Aproksymacja odwzorowania punktów
międzywęzłowych linii L-N /rys. 4/

$$t = 2.875$$

s	Met. obl.	r	z
1.0	A	9.5771	14.9154
	N /8x12/	9.5772	14.9156
1.083333	A	8.3023	15.6608
	N	8.3024	15.6610
1.166667	A	6.9699	16.2975
	N	6.9701	16.2976
1.249999	A	5.5892	16.8211
	N	5.5893	16.8212
1.333333	A	4.1697	17.2280
	N	4.1697	17.2280
1.416667	A	2.7212	17.5153
	N	2.7212	17.5154
1.5	A	1.2538	17.6810
	N	1.2539	17.6811

TABLICA 2

Pochodne odwzorowania odwrotnego
punktów narożnych /rys. 4/

t, s	Poch.	N /4x4/	N /8x12/	Analit.
t=2.0 s=1.0 p.A	TR	0.045349	0.060184	0.073122
	TZ	0.094855	0.102921	0.113880
	SR	-0.115076	-0.114013	-0.113880
	SZ	0.073890	0.073207	0.073122
t=2.0 s=2.0 p.D	TR	-0.031490	-0.045058	-0.056319
	TZ	0.100302	0.110384	0.123060
	SR	-0.124351	-0.123202	-0.123060
	SZ	-0.056910	-0.056384	-0.056319
t=4.0 s=1.0 p.B	TR	0.010114	0.010459	0.009895
	TZ	0.021165	0.017885	0.015412
	SR	-0.015574	-0.015430	-0.015412
	SZ	0.009999	0.009907	0.009895
t=4.0 s=2.0 p.C	TR	-0.007026	-0.007830	-0.007622
	TZ	0.022381	0.019182	0.016654
	SR	-0.016829	-0.016674	-0.016654
	SZ	-0.007702	-0.007631	-0.007622

TABLICA 3

Pochodne odwzorowania odwrotnego TR i SR
punktów linii I-I /rys. 4/

$$s = 1.5$$

TR	A	0.009573	0.005806	0.003522
	$\frac{N}{8 \times 12}$	0.008425	0.005772	0.003526
	$\frac{N}{4 \times 4}$	0.007378	0.005996	0.003645
		2.0	2.5	3.0 → t
SR	$\frac{N}{4 \times 4}$	-0.134032	-0.081295	-0.049308
	$\frac{N}{8 \times 12}$	-0.134994	-0.081878	-0.049662
	A	-0.134996	-0.081879	-0.049662

TR	A	0.002136	0.001296
	$\frac{N}{8 \times 12}$	0.002165	0.001464
	$\frac{N}{4 \times 4}$	0.001955	0.001646
		3.5	4.0 → t
SR	$\frac{N}{4 \times 4}$	-0.029907	-0.018140
	$\frac{N}{8 \times 12}$	-0.030121	-0.018270
	A	-0.030122	-0.018270

TABLICA 4

Pochodne odwzorowania · odwrotnego TR i SR
punktów linii II-II /rys. 4/

$$t = 3.0$$

TR		s	SR	
A	-0.020719		-0.045271	A
N /8x12/	-0.018859	2.0	-0.045323	N
A	-0.008874	-0.048990	A	
N	-0.008926	1.75	-0.048998	N
A	+0.003522	-0.049662	A	
N	0.003526	1.5	-0.049662	N
A	0.015699	-0.047247	A	
N	0.015757	1.25	-0.047246	N
A	0.026900	-0.041894	A	
N	0.025189	1.0	-0.041943	N

TABLICA 5

Aproksymacja odwzorowania punktów
linii $t = 3.125$ /rys. 5/

s	Met. obl.	r	z
0.0	A	22.760	0.0
	N /8x12/	22.755	-0.76 E-06
0.2618	A	21.9843	5.8907
	N	21.9796	5.8894
0.5236	A	19.7106	11.3799
	N	19.7064	11.3775
0.7854	A	16.0936	16.0936
	N	16.0902	16.0902
1.0472	A	11.3798	19.7106
	N	11.3775	19.7063
1.3090	A	5.8906	21.9843
	N	5.8893	21.9796
$\frac{\pi}{2}$	A	0.0	22.7598
	N	-0.58 E-04	22.7550

TABLICA 6

Pochodne odwzorowania odwrotnego
punktów narożnych /rys. 5/

t, s	Poch.	Num. /8x12/	Analit.
t=2.0	TR	0.119122	0.135335
s=0.0	TZ	0.015833	0.0
p.A	SR	-0.34 E-08	0.0
	SZ	0.136894	0.135335
t=2.0	TR	-0.119123	-0.135335
s=π	TZ	0.015682	0.0
p.D	SR	0.56 E-06	0.0
	SZ	-0.136894	-0.135335
t=4.0	TR	0.020700	0.018316
s=0.0	TZ	0.002725	0.0
p.B	SR	-0.47 E-09	0.0
	SZ	0.018527	0.018316
t=4.0	TR	-0.020700	-0.018316
s=π	TZ	0.002725	0.0
p.C	SR	0.76 E-07	0.0
	SZ	-0.018527	-0.018316

TABLICA 7

Pochodne odwzorowania odwrotnego TR i SR
linii I-I /rys. 5/

$$t = 3.0$$

TR		S π	SR	
A			0.0	A
N /8x12/	-0.049787		0.26 E-06	N /8x12/
	-0.049856			
	-0.043117	2.6180	-0.024894	
	-0.042966		-0.024796	
	-0.024894	2.0944	-0.043117	
	-0.024911		-0.043094	
	0.0	$\frac{\pi}{2}$	-0.049787	
	0.16 E-06		-0.049784	
	0.024894	1.0472	-0.043117	
	0.024911		-0.043094	
	0.043117	0.5236	-0.024894	
	0.042966		-0.024796	
	0.049787	0.0	0.0	
	0.049856		0.16 E-08	

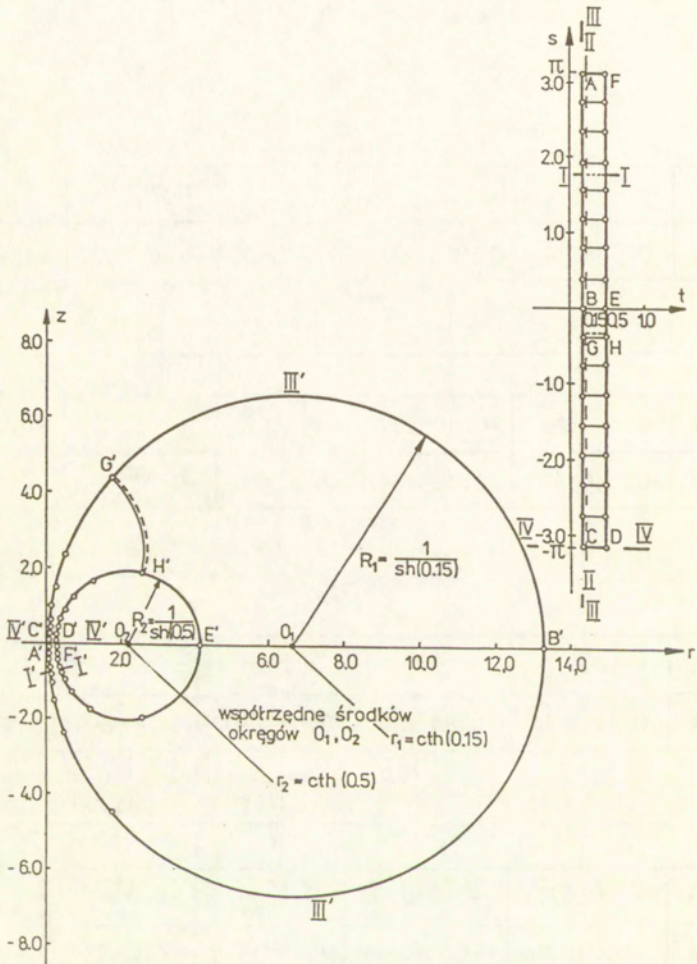
TABLICA 8

Pochodne odwzorowania odwrotnego TR i SR
punktów linii II-II /rys. 5/

$$s = \frac{\pi}{2}$$

TR	A	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	N	0.58 E-06	0.31 E-06	0.36 E-06	0.26 E-06	0.16 E-06
		2.0	2.25	2.5	2.75	3.0 t
SR	N	-0.135326	-0.105392	-0.08208	-0.063923	-0.049784
	A	-0.135335	-0.105399	-0.08208	-0.063928	-0.049787

TR	A	0.0	0.0	0.0	0.0
	N	0.14 E-06	0.81 E-07	0.68 E-07	0.68 E-07
		3.25	3.5	3.75	4.0 t
SR	N	-0.038771	-0.030195	-0.023516	-0.018314
	A	-0.038774	-0.030197	-0.023517	-0.018315



Rys. 6

TABLICA 9

Aproksymacja odwzorowania punktów
linii I-I /rys. 6/

$$s = 1.767147$$

t	Met. obl.	r	z
0.171875	A	0.142768	-0.810705
	N 8x16	0.160814	-0.798907
0.215625	A	0.178356	-0.805028
	N	0.188993	-0.795362
0.259375	A	0.213449	-0.798157
	N	0.219829	-0.790381
0.303125	A	0.247956	-0.790139
	N	0.251522	-0.784086
0.346875	A	0.281797	-0.781034
	N	0.283630	-0.776434
0.390625	A	0.314896	-0.770903
	N	0.315659	-0.767482
0.434375	A	0.347188	-0.759816
	N	0.347353	-0.757356
0.478125	A	0.378612	-0.747845
	N	0.378363	-0.746003

TABLICA 10

Aproksymacja odwzorowania punktów
międzywęzłowych linii II-II /rys. 6/

$$t = 0.171875$$

s	Met. obl.	r	z
2.945244	A	0.086552	-0.097764
	N /8x16/	0.086837	-0.098290
2.552545	A	0.093553	-0.300932
	N	0.094662	-0.299968
2.159846	A	0.109991	-0.529509
	N	0.105140	-0.532533
1.767147	A	0.142768	-0.810705
	N	0.160814	-0.798907
-1.767147	A	0.142721	0.810376
	N	0.160785	0.798663
-2.159846	A	0.109968	0.529254
	N	0.105112	0.532258
-2.552545	A	0.093541	0.300715
	N	0.094651	0.299758
-2.945244	A	0.086549	0.097563
	N	0.086833	0.098087

TABLICA 11

Pochodne odwzorowania odwrotnego
punktów narożnych /rys. 6/

t, s	Poch.	N /4x8/	N /8x16/	Analit.
t=0.15	TR	2.01916	2.01488	2.01127
s= π	TZ	0.062595	0.030004	-0.76 E-06
p.A	SR	0.11 E-05	0.73 E-06	0.76 E-05
	SZ	1.90864	1.98580	2.01127
t=0.5	TR	2.10617	2.11659	2.12763
s= π	TZ	0.213673	0.103119	-0.26 E-05
p.F	SR	0.19 E-05	0.20 E-05	0.26 E-05
	SZ	2.03788	2.10520	2.12763
t=0.15	TR	2.01915	2.01488	2.01127
s=- π	TZ	-0.062547	-0.029942	0.61 E-06
p.C	SR	-0.75 E-06	-0.69 E-06	-0.61 E-06
	SZ	1.90879	1.98588	2.01127
t=0.5	TR	2.10619	2.11658	2.12762
s=- π	TZ	-0.213455	-0.102907	0.000212
p.D	SR	-0.000185	-0.000201	-0.000212
	SZ	2.03803	2.10528	2.12763

TABLICA 12

Pochodne odwzorowania odwrotnego SR i SZ
punktów linii III-III /rys. 6/

$t = 0.15$

SR		s	SZ	
A	0.76 E-06		π	2.01127
N 8x16	0.73 E-06		1.98580	N 8x16
A	-0.106469	2.356194	1.71504	A
N	-0.119232		1.67698	N
A	-0.150563	1.570796	0.999903	A
N	-0.151384		0.867577	N
A	-0.106449	0.785398	0.284818	A
N	-0.104392		0.241552	N
A	0.000030	0.0	-0.011271	A
N	0.000150		-0.063528	N
A	0.106494	-0.785398	0.285105	A
N	0.105019		0.243152	N

TABLICA 13

Pochodne odwzorowania odwrotnego TR i TZ
punktów linii III-III /rys. 6/

$$t = 0.15$$

TR		s ↑ π	TZ	
A	2.01127		-0.76 E-06	A
N 8x16	2.01488	0.030004	N 8x16	
		2.356194		
A	1.71504		0.106469	A
N	1.72418	0.030197	N	
		1.570796		
A	0.999903		0.150563	A
N	1.06404	-0.197737	N	
		0.785398		
A	0.284818		0.106449	A
N	0.474731	-0.322617	N	
		0.0		
A	-0.011271		-0.30 E-04	A
N	-0.014567	-0.54 E-05	N	
		-0.785398		
A	0.285105		-0.106491	A
N	0.476154	0.325472	N	

TABLICA 14

Pochodne odwzorowania odwrotnego TR i TZ
punktów linii IV-IV /rys. 6/

$$s = -\pi$$

	A	2.01127	2.02833	2.05328
TR	N 8x16	2.01488	2.02860	2.05325
	N 4x8	2.01127	2.02657	2.05244
		0.15	0.2375	0.325
		→ t		
	N 4x8	-0.062547	-0.099117	-0.136809
TZ	N 8x16	-0.029942	-0.047597	-0.065657
	A	0.000061	0.000097	0.000134

	A	2.08629	2.12762
TR	N 8x16	2.08551	2.11658
	N 4x8	2.09176	2.10619
		0.4125	0.5
		→ t	
	N 4x8	-0.176033	-0.213455
TZ	N 8x16	-0.084197	-0.102907
	A	0.000172	0.000212

TABLICA 15

Pochodne odwzorowania odwrotnego SR i SZ
punktów linii IV-IV /rys. 6/

$$s = -\pi$$

	A	-0.000061	-0.000097	-0.000134
SR	N 8x16	-0.000069	-0.000097	-0.000133
	N 4x8	-0.000075	-0.000088	-0.000127
		0.15	0.2375	0.325
		→ t		
	N 4x8	1.90879	1.92775	1.95546
SZ	N 8x16	1.98588	2.00339	2.02899
	A	2.01127	2.02833	2.05328

	A	-0.000173	-0.000212
SR	N 8x16	-0.000170	-0.000201
	N 4x8	-0.000168	-0.000185
		0.4125	0.5
		→ t	
	N 4x8	1.99212	2.03803
SZ	N 8x16	2.06287	2.10528
	A	2.08629	2.12763

Spis cytowanej literatury.

1. J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, I.L. Walsh,
"The theory of splines and their applications", Academic
Press, New York, 1967,
"Teorija spłajnow i jeje priłożenija", Mir Moskwa, 1972,
2. "Numerical grid generation techniques", Proceedings of a
workshop held at NASA Langley Research Center, Hampton,
Virginia, October 6-7, 1980,
3. A.R. Mithel, R. Wait, "The finite element method in partial
differential equations", J. Wiley, Chichester, 1977,
4. Carl de Boor, "A practical guide to splines", Applied
Mathematical Sciences, Vol. 27, Springer-Verlag, 1978,
5. J. i M. Jankowscy, "Przegląd metod i algorytmów
numerycznych" cz.1, WNT, Warszawa 1981,
6. G. Korn, T. Korn "Sprawocnik po matematykje", Nauka,
Moskwa, 1977.

Spis treści

	str.
Streszczenie.....	3
1. Wstęp.....	4
2. Spline - wiadomości podstawowe.....	5
2.1. Spline trzeciego stopnia.....	5
2.2. Spline'y bazowe.....	7
2.3. Spline'y dwuwymiarowe, aproksymacja funkcji dwu zmiennych.....	10
3. Aproksymacja odwzorowań obszarów.....	11
3.1. Aproksymacja odwzorowania obszaru prostokątnego w wyjściowy.....	12
3.2. Wyznaczenie pochodnych aproksymacji odwzorowania odwrotnego - obszaru G w prostokąt D	13
4. Przykłady liczbowe.....	15
5. Wnioski.....	17
Rysunki, tablice.....	18-35
Spis cytowanej literatury.....	36