ZUR GESCHICHTE DER PRINZIPIEN DER INFINITESIMALRECHNUNG.

DIE KRITIKER DER „THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES" VON LAGRANGE

VON

S. DICKSTEIN
IN WARSCHAU.

Sonderabdruck aus Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. IX.
Druck u. Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Die Grundlagen der höheren Analysis nach den verschiedenen Auffassungen von Leibniz, Newton, Euler und d'Alembert schienen den nach Klarheit der Prinzipien strebenden Mathematikern des XVIII. Jahrhunderts von der Strenge der Alten sehr entfernt und in eine dunkle Metaphysik eingehüllt zu sein.[1]) Man suchte eine Methode und glaubte eine solche finden zu können, welche von Infinitesimal- oder Grenzbetrachtungen ganz frei wäre, und die Grundlagen der höheren Analysis auf dieselbe Weise entwickele, wie die gewöhnliche Analysis ihre Sätze über endliche Gröfsen.[2])

Den ersten Gedanken zu einer solchen Umbildung erfafste Lagrange in einer Abhandlung, die in den Memoiren der Berliner Akademie unter d. Titel: *„Sur une nouvelle espèce du calcul relatif à la différentiation et l'intégration des quantités variables“* im Jahre 1772[3]) erschien. Hier giebt Lagrange einen neuen, rein formalen Beweis für die Taylor'sche Reihe[4]),

1) S. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III. B. 1898. p. 714—718; M. Simon, Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung in den „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“ VIII. Heft. 1898. — Lagrange bespricht in der Einleitung zu seiner *„Théorie des fonctions analytiques“* die oben genannten Methoden und auch Landen's *„Residual Analysis“* und sagt: *„Ces variations dans la manière d'établir et de présenter les principes du calcul différentiel et même la dénomination de ce calcul montrent, ce me semble, qu'on n'avait pas saisi la véritable théorie quoiqu'on eût trouvé d'abord les règles les plus simples et les plus commodes pour le mécanisme des opérations“* (3. ed. 1847. p. 4. 5). Vgl. auch Lagrange's *„Leçons sur le calcul des fonctions, Leçon première“* (Ausgabe vom J. 1806. p. 1—3).

2) S. *Calcul des fonctions* S. 5

3) *Oeuvres.* t. VII, p. 324—328.

4) Der Beweis besteht in der Annahme, dafs, wenn u eine Funktion von x ist, dann:

$$u\,(x+\xi) = u\,(x) + p\xi + p'\,\xi^2 + \cdots$$

Setzt man erstens $x+\omega$ an Stelle von x, zweitens $\omega+\xi$ an Stelle von ξ, so erhält man zwei Entwickelungen für $u\,(x+\xi+\omega)$. Der Vergleich derselben führt zu Relationen zwischen den Coefficienten der Reihe für $u\,(x+\xi)$, aus welchen sich die erwünschte Form ergiebt. Vgl. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen 1889. p. 150.

und macht die Bemerkung, daſs dieselbe zur Grundlage einer neuen Methode der Infinitesimalrechnung gemacht werden könne.[5])

Die Ausführung dieses Gedankens schien damals so wichtig, daſs mehrere Mathematiker durch diese Bemerkung von Lagrange angeregt oder vielleicht auch unabhängig von ihm, dieses Ziel zu erreichen bestrebt waren. Bekannt sind die bezüglichen Versuche von Condorcet[6]), Arbogast[7]), Pasquich[8]),

---

5) *„Le calcul différentiel considéré dans toute sa généralité consiste à trouver directement et par des procédés simples et faciles les fonctions* $p, p' \, p'' \cdots q, q', q'' \cdots$ *derivées de la fonction u, et le calcul intégral consiste à retrouver la fonction u par le moyen de cette dernière fonction. Cette notion des calculs différentiel et intégral me paraît la plus claire et la plus simple qu'on n'avait encore donnée; elle est comme on voit, indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes“* (Abhandl. aus d. J. 1772).

6) Über Condorcet's Versuch berichtet Lacroix in seinem *Traité du cal. diff. et int.* (3^e^ ed. p. XXII).

7) Arbogast hat der Pariser Akademie im Jahre 1789 eine Abhandlung vorgelegt, die den Titel hatte: *„Essai sur des nouveaux principes du calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infinement petits et des limites“* (s. die Vorrede zu dem *„Calcul des dérivations“* desselben Verfassers, Straſsburg 1800). Lagrange erwähnt diese Arbeit in der Einleitung zu seiner *„Théorie des fonctions analytiques“*; sie wurde nicht gedruckt. Vgl. Lacroix, *Traité de calcul différentiel et intégral. Préface* p. XXIX.

8) Pasquich, Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung, im VIII. Hefte des Hindenburg'schen Archivs der reinen und angewandten Mathematik 1798. S. 386—424. Diese Schrift war uns nicht zugänglich, aber die Hauptzüge der darin entwickelten Methode von Pasquich entnehmen wir aus dem kurzen Berichte über dieselbe, der in der Schrift v. Johann Schulz: „Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigsten mathematischen Theorien“ (Königsberg 1803) enthalten ist. Pasquich postuliert die Form der Entwickelung $y = Az^a + Bz^b + Cz^c + \cdots$; wenn man in dieser Reihe jedes Glied mit seinem Exponenten von z multipliziert, so hat man das sogenannte Exponential von y, welches durch εy bezeichnet wird. Es ist also:

$$\varepsilon y = aAz^a + bBz^b + cCz^c + \cdots$$

Hieraus ergeben sich die Hauptsätze:

$$\varepsilon \cdot xy = y \cdot \varepsilon x + x \cdot \varepsilon y; \quad \varepsilon \cdot x^n = n x^{n+1} \cdot \varepsilon x; \quad \varepsilon \cdot \frac{x}{y} = \frac{y \cdot \varepsilon x - x \cdot \varepsilon y}{y^2}, \cdots$$

Die Grundoperationen der Exponentialrechnung sind also mit denen der Differentialrechnung einerlei. Allein Pasquich — so lesen wir weiter — ist von der Absicht durch seinen Calcul den Leibnizischen verdrängen zu wollen, selbst so weit entfernt, daſs er im „Intelligenzblatte der Allg. Litt. Zeitung“ 1798, N. 99 ausdrücklich erklärt, wie er jeden neuen Calcul, wodurch man das zu ersetzen suche, was der schlecht abgehandelten Differentialrechnung fehlt, für ganz entbehrlich halte. — Aus derselben Quelle entnehmen wir noch, das Grūson's neue

Servois[9]) u. a. Die *„Théorie des fonctions analytiques“* ist aber die bedeutenste auf diesem Gedanken fufsende Arbeit, in welcher Lagrange nicht nur das Ganze der Differential- und Integralrechnung nach einer einheitlichen Methode darlegt, sondern auch die Anwendungen der Analysis auf geometrische und mechanische Probleme nach derselben Betrachtungsweise behandelt.[10])

Den Prinzipien der Lagrange'schen Methode liegen folgende zwei Behauptungen zu Grunde:

1) Eine jede Funktion ist im allgemeinen in eine unendliche nach ganzen positiven Potenzen des Arguments fortschreitende Reihe entwickelbar.

2) Infinitesimal- oder Grenzbetrachtungen sind zur Begründung der höheren Analysis gar nicht nötig; dieses ganze Gebiet der Wissenschaft kann man sehr einfach auf algebraische Weise aus dem in der ersten Behauptung ausgedrückten Satz entwickeln.

„Expositionsrechnung“ (*Mémoire sur le Calcul d'Exposition inventé par* Jean Philippe Gruson, *professeur royal des mathématiques,* Berlin 1802) mit der Pasquich'schen Exponentialrechnung im Wesentlichen übereinstimmt.

9) Servois hat zwei Abhandlungen über die Prinzipien der höheren Analysis der Pariser Akademie in den Jahren 1805 und 1809 überreicht. Dieselben wurden nicht gedruckt. Der in den *„Annales de Mathématiques“* V, p. 93—141 (1814—1815) publizierte Aufsatz: *„Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel“* ist ein Auszug aus jenen Arbeiten. Die Differenzen und Differentiale von Funktionen werden hier vom Standpunkte der Theorie der Operationen betrachtet (*„La différence et la différentielle possèdent deux propriétés en commun: d'être distributives et commutatives entre elles“*). Servois' Standpunkt in Betreff der Infinitesimalmethode charakterisiert der folgende Passus, den wir aus seinem zweiten in demselben Bande der *„Annales de Mathématiques“* (p. 141—170) und hauptsächlich gegen Wroński's Philosophie des Unendlichen (s. unten) gerichteten Artikel: *„Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel et particulièrement sur la doctrine des infiniment petits“* entnehmen: *„Je suis convaincu que la méthode infinitésimale n'a ni ne peut avoir de théorie qu'en pratique; c'est un instrument dangereux entre les mains des commençants qui imprime nécessairement et pour longtemps un caractère de gauchérie, de pussilanimité à leurs recherches dans la carrière des applications. Enfin anticipant à mon tour sur le jugement de la postérite j'ose prendre que cette méthode sera un jour accusée et avec raison d'avoir rétardé le progrès des sciences mathématiques.“*

10) Das Werk erschien im Jahre 1797 unter dem Titel: *„Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniments petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies“* (2e Aufl. 1813, 3e besorgt durch Serret im Jahre 1847, auch *Oeuvres* IX). Ein wichtiger Kommentar dazu, zum Teil auch ein selbständiges Werk sind die *„Leçons sur le calcul des fonctions“* (zweite Auflage 1806, *Oeuvres* X).

Die erste Behauptung sucht Lagrange auf folgende Weise zu rechtfertigen. Ist $f(x)$ eine Funktion der Variablen x und setzt man $x + i$, wo i eine beliebige Gröfse ist, an Stelle von x, so wird die Funktion $f(x+i)$ in der Form einer Reihe $f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \cdots$ darstellbar; $p, q, r \cdots$ sind Funktionen von x, die von i unabhängig sein sollen. Diese Voraussetzung, sagt er, wird durch die Entwickelungen bekannter Funktionen bestätigt, aber niemand suchte bisher dieselbe a priori zu begründen. Die Begründung soll darin bestehen, dafs für allgemeine (unbestimmte) Werte von x und i obige Reihe keine gebrochenen und negativen Potenzen von i enthalten dürfe. Enthielte sie nämlich gebrochene Potenzen, so würde die Anzahl der verschiedenen Werte der Reihe für $f(x+i)$ — Lagrange hat hier mit Wurzelgröfsen behaftete Funktionen im Auge — gröfser sein als die Anzahl der verschiedenen Werte der Funktion $f(x)$; was ungereimt ist.[11]) Enthielte aber die Entwickelung für $f(x+i)$ negative Potenzen von i, so würde $f(x+i)$ für $i = 0$, also die Funktion $f(x)$ selbst, unendlich, was nur für einzelne Werte von x stattfinden kann.

Ist die Entwickelung der Funktion $f(x+i)$ in die Reihe

$$f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \cdots$$

auf diese Weise begründet, so ist damit auch die zweite Behauptung gerechtfertigt. Die Coefficienten $p, q, r, \cdots$ der Reihe sind Funktionen von x; nennt man den ersten Coefficienten p die derivierte Funktion der primitiven Funktion $f(x)$ und bezeichnet sie durch $f'(x)$, so wird — wie leicht zu beweisen ist — $2\,q$ gleich der Derivierten von p, $3\,r$ gleich der Derivierten von q u. s. w. Auf diese Weise erhält man die aufeinander folgenden Derivierten der gegebenen Function: die erste $f'(x) = p$, die zweite $f''(x) = 2\,q$, die dritte $f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot r$ u. s. w. Diese Derivierten oder Ableitungen der gegebenen Funktion sind mit den nach der Infinitesimal- oder Grenzmethode erhaltenen Differentialquotienten identisch, aber scheinbar ganz ohne Grenzbetrachtungen hergeleitet. Somit werden nach Lagrange in der weiteren Entwickelung der ganzen Lehre Infinitesimalbetrachtungen entbehrlich.

Die grofse Autorität des Namens Lagrange hat der *„Théorie des fonctions analytiques"* schnelle Verbreitung und grofsen Einflufs gesichert.

---

11) *„Cette démonstration"* — sagt Lagrange — *„est générale et rigoureuse, tant que x et i demeurent indéterminées; mais elle cesserait de l'être, si l'on donnait à x des valeurs déterminées; car il serait possible que ces valeurs détruissent quelques radicaux dans $f(x)$ qui pourraient néanmoins subsister dans $f(x)$."* (*Théorie des f.* 3e. ed. p. 9.) Einige Fälle, in welchen *„la règle générale est en défaut"* untersucht Lagrange im Kapitel V seines Werkes.

Man bewunderte den Reichtum des Inhalts und die Vorzüge der vortrefflichen Darstellung, während man der Begründungsweise der Prinzipien der Methode zuerst weniger Aufmerksamkeit schenkte.[12])

Carnot in seiner bekannten Schrift: „*Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*" betrachtet die Lagrange'sche Methode als eine Art der „*Méthode des indéterminées*". Ihre Grundlage ist ihm ganz

---

12) In dem „*Rapport historique sur le progrès des sciences depuis 1789 et sur leur état actuel*" (Paris 1810) lesen wir folgendes: „M. Lagrange *dans son mémoire célèbre avait déposé une de ces idées fécondes qui n'appartiennent qu'aux génies de premier ordre; il avait indiqué les moyens de ramener au calcul purement algébrique les procédés du calcul infinitésimal en écartant soigneusement toute l'idée de l'infini. Frappés de ce trait de lumière plusieurs géomètres cherchaient des développements que nul ne pouvait donner aussi bien que l'inventeur.* M. Lagrange *ayant accepté les fonctions d'instituteur de l'École polytechnique y créa sous les yeux de ses auditeurs toutes les parties dont il a depuis composé son Traité des fonctions analytiques, ouvrage classique dont il serait bien superflu de faire aujourd'hui l'éloge et qu'il suffit d'avoir cité etc.*" Crelle (Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Gröfsen, Bd. I 1813 p. 39 u. ff.) schreibt: „In dem ganzen Umfange der Prinzipien der Entwickelung, ja selbst der Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Gröfsen innerhalb des Calculs findet sich auch nicht eine Spur von der Notwendigkeit der Idee des sogenannten Unendlichen, die die Dunkelheit in diesem Teile des Calculs hervorgebracht zu haben scheint ... Zwar giebt es allerdings einen Ort, wo die Idee des Unendlichen notwendig gewesen, oder vielleicht noch jetzt mehr oder weniger notwendig sein kann (nämlich die Anwendung des Calculs auf Raumgröfsen), allein dieser Ort liegt nicht innerhalb des Calculs ... Was die Schwäche auf der Stelle der Anwendungen des Calculs betrifft, so ist bekanntlich auch diese in der That schon gehoben, denn derselbe grofse Mann, dem man die Berichtigung der Ideen über die Rechnung des Veränderlichen überhaupt verdankt, hat auch hier bewiesen, dafs die Ideen des Unendlichen wenigstens entbehrlich und der Übergang vom Calcul zur Anwendung vermittelst Vorstellung möglich sei, die an Strenge und Eigentümlichkeit den geometrischen Vorstellungen der Alten gleichen."

Über Lagrange's Methode haben auch früher Johann Schulz (l. c.), E. G. Fischer (Über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis, Berlin 1808) sehr günstig geurteilt.

Um auch Philosophen zu citieren, sagen wir, dafs Comte in seinem „*Cours de philosophie positive*" (I vol. 1829) die Lagrange'sche Methode „*la plus rationnelle et la plus philosophique de toutes*" nennt; nur für die Anwendungen scheint sie ihm zu kompliziert zu sein. Hegel's Logik, (nach C. Frantz: „Die Philosophie der Mathematik 1842) erklärte die Methode von Lagrange als die am meisten wissenschaftliche.

Den Taylor'schen Satz, welcher die Grundlage der Lagrange'schen Methode bildet, suchte man auf verschiedene Weise zu begründen. Die bezügliche Litteratur findet man in Klügels Mathem. Wörterbuch, 5er Teil 1er Band 1831 Artikel „Taylor's Lehrsatz"; vgl. auch Reiff l. c. p. 156 u. ff.

sicher[13]), die eigentliche Schwierigkeit zur Annahme dieser „lichtvollen Methode" sieht er nur in der Neuheit des Lagrange'schen Algorithmus, dessen Anwendung eine völlige Umarbeitung der gesamten bezüglichen Litteratur nach sich ziehen müfste.[14]) Eine eigentliche Kritik der Prinzipien der Lagrange'schen Methode finden wir bei Carnot nicht.

Lacroix sucht in seinem grofsen *„Traité du calcul différentiel et intégral"* den Taylor'schen Satz auf induktive Weise d. h. für besondere Klassen von Funktionen zu begründen. Die ihm bekannten Beweise des Satzes befriedigen ihn nicht, weil sie zu abstrakt sind und nicht von der Pflicht befreien die Ausnahmefälle einer besonderen Betrachtung unterziehen zu müssen.[15]) Im dritten Bande seines Werkes, vielleicht durch einige dazwischen erschienene Kritiken, von welchen gleich die Rede sein wird, beeinflufst, scheint er manche Zweifel an der Begründungsweise der ersten Behauptung von Lagrange zu hegen[16]), aber ein bestimmtes und sicheres Prinzip an deren Stelle giebt er nicht.

Merkwürdigerweise sind die ersten Zweifel an der Richtigkeit der

---

13) *„Afin de conserver, dans tout le cours de ses opérations, l'exactitude rigoureuse dont il s'est fait la loi de ne jamais s'écarter,* Lagrange, *qui fait aussi usage des différentielles, sous une autre dénomination et sous une autre notation, les considère comme des quantités finies, indéterminées. En conséquence, il ne néglige aucun terme et prend ses différentielles comme on le fait dans le calcul aux différences finies. C'est à quoi il parvient par le théorème de Taylor, dont il fait la base de sa doctrine, et qu'il démontre directement par l'analyse ordinaire, tandis qu'avant lui on ne l'avait encore demontré que par le secours même du Calcul différentiel"* (5. Aufl. S. 156).

14) *Ainsi, par exemple, il faudrait refondre toutes les collections académiques, tous les écrits d'*Euler *et ceux de* Lagrange *lui-même"* (l. c. p. 158).

15) Seconde édition 1810. I Vol. p. XXI. *„Ces propositions"*, sagt er, *„si générales en apparence, ont plus d'éclat que d'utilité, puisqu'elles ne dispensent, par de l'examen des cas où elles sont en défaut; il vaut mieux ne montrer ces cas que succesivement, à mesure qu'ils se présentent d'eux-mêmes, que de les faire prévoir d'avance et comme des accessoires, au moment ou le lecteur n'embrasse qu'avec peine le petit nombre d'idées principales que vous lui présentez."*

16) *„En rapportant ici* (Chap. III du 1 Vol. p. 339) *le raisonnement sur lequel s'appuie* Lagrange *pour prononcer que le développement général de l'accroissement d'une fonction ordonnée suivant les puissances de celui de la variable indépendante ne doit point contenir de puissances fractionnaires de ce dernier, c'est à dessin que je me suis servi du mot „paraît" (ligne II en rémontant), parce qu'en effet ce n'est là qu'un aperçu qui aurait besoin d'être justifié par des preuves que l'auteur de la „Théorie des fonctions" n'a point données. Le principe qu'il emploie est très admissible comme explication de la circonstance qui rend la série de* Taylor *inapplicable, mais non pas comme un principe évident par lui même dans l'état général des choses"* (Lacroix, *Traité etc.* III 1819, p. 629—630).

Lagrange'schen Prinzipien von nichtfranzösischen Mathematikern erhoben worden: von Burja, Wroński, Śniadecki, Bolzano.

In einer Abhandlung unter dem Titel: „*Sur le développement des fonctions en séries*" (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1801, S. 21) sagt Burja, dafs zwar der Versuch Lagrange's Behauptung für einfachere Funktionen bestätige, aber man sehe nicht ein, warum dieselbe auch für verwickeltere Funktionen wahr sein müsse. Der zweite Teil der Lagrange'schen Beweisführung (nämlich die Relationen zwischen den Coefficienten betreffend) sei zwar ganz richtig, aber es bleibe doch eine Schwierigkeit, nämlich die Begründung der Möglichkeit der Entwickelung. Burja glaubt dieser Schwierigkeit auf folgende Weise aus dem Wege zu gehen: „Man sage nicht, dafs jede Funktion in eine unendliche nach ganzen positiven Potenzen des Arguments fortschreitende Reihe entwickelbar sein müsse, sondern nur, dafs man jede Funktion so behandeln könne, als wenn sie in eine solche Potenzreihe entwickelbar wäre. Der weitere Fortgang der Rechnung, nämlich die Bestimmung der Coefficienten, wird dann zeigen, wann diese Annahme als begründet, wann aber als unzulänglich zu betrachten ist".[17])

Tiefer wurde die Sache von Wroński erfafst. Als eifriger Anhänger der Leibnizischen Differentialmethode und der Kantischen Philosophie protestiert er energisch gegen die Verbannung des Unendlichen aus der Analysis. In seinem Werke: „Philosophie der Mathematik" erklärt er die Grundlage der Lagrange'schen Methode als wissenschaftlich falsch, weil dieselbe ein allgemeines theoretisches Gebiet, d. h. die Differentialrechnung, auf eine spezielle technische Form, als welche er die Taylor'sche Reihe betrachtet, zu begründen sucht.[18]) In einer besonderen Schrift u. d. T.: „*Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de* Lagrange" (Paris 1812)[19]) werden

17) Einen ähnlichen Gedanken scheint Ohm in seiner Schrift „Geist der Differential- und Integralrechnung 1846: — wie wir den Worten von Hankel (Art. Grenze in der „Allgem. Encykl. der Wiss. u. d. K. von Ersch und Gruber" XC. 1871) entnehmen können — ausgesprochen zu haben.

18) *Introduction à la philosophie des mathématiques et Technie de l'algorithmie par M.* Hoëné *de* Wronski Paris 1811.

19) Die Schrift besteht aus drei Stücken. Das erste (p. 1—40) auch unter dem Titel: „*Réfutation* etc." wurde der Pariser Akademie vorgelegt, aber durch die Berichterstatter Legendre und Arago abgelehnt. Das zweite Stück (p. 41—81) handelt über die: „*Insufissance de la démonstration du théorème de* Taylor, *tentée par* M. Poisson". Das dritte (p. 83—110): „*Quelques observations concernant le rapport fait à la Classe des sciences de l'Institut pour le premier de ces mémoires*" ist eine in sehr gereiztem Tone geschriebene Replik. In den Noten behandelt Wroński: Algorithmische Fakultäten, progressive und regressive Differenzen und giebt einen rein formalen Beweis der allgemeinen Entwickelung nach Fakultäten.

die Prinzipien der Lagrange'schen Methode einer ausführlichen Analyse unterworfen. Den Ausgangspunkt bei LAGRANGE bilden die Formeln:

$$1)\ f(x+i) = A + Bi + Ci^2 + \cdots; \quad 2)\ f(x+i) = f(x) + iP.$$

Woher, fragt WROŃSKI, kommt uns die Kenntnis der Form 1), wie kann man ihre Möglichkeit begründen, ist eine jede Funktion $f(x+i)$ als solche, mit der Reihe 1) identisch oder nur gleichwertig? LAGRANGE behauptet, dafs die Entwickelung im allgemeinen nur ganze positive Potenzen von i enthalten müsse, und dafs nur für spezielle Werte von x gebrochene und negative Potenzen in der Reihe vorkommen können. Nach WROŃSKI kann eine jede Funktion $\varphi(i)$ im allgemeinen in eine Reihe nach Potenzen z. B. von $a + \sqrt[m]{i}$ entwickelt werden, und das wechselseitige Kompensieren der Glieder mit gebrochenen Exponenten von i, von welcher bei LAGRANGE die Rede ist, kann sich nur als Resultat der Ausrechnung des Wertes für spezielle Werte von x ergeben. Die Lagrange'schen Prinzipien könnten also höchstens hypothetischen Wert und daher die Methode selbst nur problematische Gewifsheit besitzen, während doch die Differentialrechnung apodiktisch sein soll. Wäre aber auch die Begründung bei LAGRANGE ganz fehlerfrei, so würden doch seine Prinzipien zur Darlegung der Infinitesimalrechnung unzureichend sein. Denn niemals könnten die Sätze 1) und 2) eine unabhängige und absolute Erklärung der Coefficienten $A, B, C \cdots$ ergeben. Die Natur derselben kann keineswegs durch die Bezeichnung der Stelle, welche sie in der unendlichen Reihe einnehmen, präzisiert werden. Würden wir eine allgemeinere Entwickelungsreihe, z. B. die nach den Fakultäten von $\varphi(x)$ fortschreitende Reihe

$$F(x+i) = F(x+j) + F'(x)\,\varphi(x)^{1/\xi} + F''(x)\,\varphi(x)^{2/\xi} + \cdots$$

zum Ausgangspunkte nehmen, so würden wir zu ganz anderen Derivierten geführt werden. Dieselben hätten im betrachteten Falle die Form

$$F'(x) = \frac{\varDelta F(x+i)}{\varDelta \varphi(i)}, \quad F''(x) = \frac{W[\varDelta \varphi(i)\ \varDelta^2 F(x+i)]}{\varDelta \varphi(i)\ \varDelta^2 \varphi(i)^{2/\xi}}, \ldots \text{[20]}$$

und für unendlich kleine Werte von ξ und für $\varphi(i) = i$ würden diese Derivierten die Gestalt

20) Die Ausdrücke W im Zähler sind die zuerst von WROŃSKI eingeführten Differenz- (und Differential-)-Determinanten, die bei ihm „*fonctions schin*" heifsen und jetzt oft „*Wronskiane*" genannt werden. Für i mufs eine der Wurzeln der Gleichungen $\varphi(i) = 0$ genommen werden.

$$F'(x) = \frac{dF(x+i)}{di}, \quad F''(x) = \frac{d^2F(x+i)}{1 \cdot 2 \cdot di^2}, \cdots (i = 0)$$

annehmen, wo d die unendlich kleinen Differenzen bezeichnen. Erst die Betrachtung dieser durch die unendlich kleinen Inkremente definierten Gröfsen erklärt nach WROŃSKI die Bedeutung der Derivierten $F'(x)$, $F''(x) \cdots$

Zwei Jahre nach der „*Réfutation*“ erscheint wieder eine neue Schrift von WROŃSKI: „*Philosophie de l'infini, contenant des contre-réflexions et réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*“.[21]) In ihrem kritisch-polemischen Teile ist dieselbe hauptsächlich gegen CARNOT's: „*Réflexions sur la metaphysique du calcul infinitésimal*“ und auch gegen die zweite Auflage der Lagrange'schen „*Théorie des fonctions analytiques*“ gerichtet. WROŃSKI wiederholt hier ausführlich seine früheren Einwände gegen die Prinzipien von LAGRANGE. In dem positiv-historischen Teile der Schrift unterzieht er alle bekannten Methoden der Begründung der höheren Analysis einer vergleichenden Betrachtung vom Standpunkte seiner Philosophie.[22]) Als Schlufs

---

21) Die Schrift besteht aus folgenden Stücken: 1) *Contre-réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal* (p. 1—30). 2) *Philosophie de calcul infinitesimal* (32—68). 3) *Réponse à la seconde édition de la Théorie des fonctions analytiques de* LAGRANGE“ (p. 69—98). 4) *Sur l'éloge de M. le comte de* LAGRANGE (p. 99—121). In den Noten behandelt WROŃSKI: „die allgemeine Methode der Approximation oder die algorithmische Exhaustionsmethode (p. 121—166) und die primitive Bildung der Differentiale“ (p. 167—171). Die Behandlung ist rein formal.

22) Um den Leser eine Einsicht in WROŃSKI's Betrachtungsweise zu gewähren, geben wir hier einen kurzen auf die Metaphysik der Infinitesimalrechnung sich beziehenden Auszug aus dieser Schrift (p. 34 u. ff.): „*Avant tout, il faut reconnaître que l'idée de l'infini est un produit intellectuel tout à fait différent de celui qui constitue la conception d'une quantité finie. Ce sont deux fonctions de notre savoir tout à fait hétérogènes. L'une, l'a conception d'une* q u a n t i t é f i n i e *est un produit de* l'entendement *qui, sous les conditions du temps qui lui sont propres, introduit une unité intellectuelle ou une signification dans l'être opposé au savoir. L'autre,* l'idée de l'infini *est un produit de la* raison *qui, en lui-même, se trouve hors des conditions du temps et par conséquent inapplicable ou transcendentale dans l'usage constitutif que nous faisons du savoir pour la connaissance de l'être. Employé au moins d'une manière regulative, en le soumettant, par l'influence du* jugement, *aux conditions du temps qui lui sont étrangères, ce produit de la raison, l'idée de l'infini, transformée ainsi en l'idée de* l'indéfini *sert à lier les conceptions même que nous avons de la quantité . . . C'est cette importante distinction transcendentale, qui est le noeud de la métaphysique du calcul infinitésimal . . . Le premier résultat que nous obtenons de cette dinstinction transcendentale est le* precepte négatif *de ne pas confondre dans l'Algorithmie les lois* objectives *des* quantités finies *avec les* lois purement subjectives *des* quantités infinitésimales . . . *Or, ce* principe des lois subjectives *faisant l'objet du calcul infinitésimal n'est autre rien que le* grand principe *même du calcul infinitésimal, savoir: „Deux quantités qui ne diffèrent*

dieser Betrachtung erscheint die Behauptung der Unzulänglichkeit der Lagrange'schen Methode.

Śniadecki, der seine Einwände gegen die Grundprinzipien der „*Théorie des fonctions*“ Lagrange persönlich (1804) vorgelegt haben soll, erklärt in seiner Schrift[23]), dafs dessen Methode im Grunde genommen mit der Grenzmethode identisch ist. Lagrange dividiert die Gleichung für die entwickelte Differenz $f(x+i) - f(x)$ durch den Zuwachs i und betrachtet den Quotienten für $i = 0$; es wird dann die eine Seite der Gleichung $\frac{0}{0}$, die zweite aber enthält ein von i freies Glied d. i. den Wert des Differentialquotienten. Während aber die Grenzmethode ganz klar ist, läfst uns die Begründung bei Lagrange unbefriedigt, weil sein Hauptsatz, dafs man i so klein wählen könne, dafs jedes Glied der (konvergenten) Reihe $f(x) + ip + i^2q + \cdots$ gröfser sei als die Summe aller darauf folgender Glieder in der Reihentheorie zwar unzweifelhaft wahr, aber in der Differentialrechnung, die nicht blofs approximativ verfährt, als Prinzip nicht gelten darf.

Wenn auch die meisten Einwände der oben genannten Kritiker nicht unberechtigt waren, eine definitive Lösung der Frage konnten sie doch nicht erbringen. Dieselbe konnte nur von einer tieferen Auffassung des Funktionsbegriffes, von einer strengeren Behandlung der Stetigkeits- und Konvergenzfragen ausgehen. Bolzano ist vielleicht der erste Mathematiker im XIX. Jahrhundert, der ein feineres Gefühl für eine strenge Behandlung der Grundprobleme der Mathematik besafs. In seinen von den Zeitgenossen leider nicht gehörig beachteten oder schief beurteilten Schriften, bemühte sich Bolzano ein strengeres Verfahren für die Beweise mehrerer Grundsätze der höheren Analysis zu schaffen. Er hat den richtigen Begriff der Stetigkeit der Funktionen eingeführt[24]), einen wichtigen Satz über die Grenze der ver-

---

entre elles que d'une quantité indéfiniment plus petite, sont rigoureusement égales.“ Es folgt dann die „metaphysische Deduktion“ dieses Prinzips. Gergonne und Servois haben diese Philosophie der Mathematik von Wroński sehr scharf angegriffen.

23) J. Śniadecki: O. Józefie Ludwiku de Lagrange, *pierwszym geometrze naszego wieku*. Wilno 1815 (polnisch).

24) „Nach einer richtigen Erklärung versteht man unter der Redensart, dafs eine Funktion $f(x)$ für alle Werte von x, die inner- oder aufserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel, dafs wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega) - f(x)$ kleiner als jede gegebene Gröfse gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann“ („Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dafs zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege“, Prag 1817, p. 11).

änderlichen Gröſse formuliert[25]) und der Reihentheorie einen allgemeinen Konvergenzsatz zu Grunde gelegt.[26]) Schon aus diesen Sätzen würde sich eine strengere Kritik der Lagrange'schen Methode als bisher ergeben können. Was den Taylor'schen Satz betrifft, so kann Bolzano nicht verbergen, daſs er ihn nicht ganz in dem Sinne und in der Allgemeinheit zugebe, wie man ihn gewöhnlich darstellt. Er hatte sich bloſs zum Gesetze gemacht den Satz nur unter solchen Umschränkungen und auf eine solche Art zu gebrauchen, wie er es nach seinen eigenen Begriffen glaubt rechtfertigen zu können und zu seiner Zeit thun will.[27]) Ob er das gethan und seine Betrachtungen über den Taylor'schen Satz niedergeschrieben hat, wissen wir nicht.[28]) Jedenfalls haben die Gedanken Bolzano's den Beifall der damaligen Mathematiker nicht erworben und blieben ohne Einfluſs auf die Entwickelung der Analysis.[29]) Es war Cauchy vorbehalten die Reformperiode der Wissenschaft zu beginnen.

Über die von Cauchy in seinen grundlegenden Werken (*Cours d'analyse algébrique* 1821, *Résumé des leçons données à l'École polytechnique* 1823, *Leçons sur le calcul différentiel* etc. 1829 etc.) aufgestellten Prinzipien der Methode der unendlich kleinen Gröſsen, über die Grundlage seiner Funktionen und Reihentheorie brauchen wir hier nicht näher zu berichten[30]), denn

---

25) „Wenn eine Eigenschaft M nicht allen Werten einer veränderlichen Gröſse x, wohl aber allen, die kleiner sind, als ein gewisses u, zukömmt, so giebt es allemal eine Gröſse U, welche die gröſste derjenigen ist, von der behauptet werden kann, daſs alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen" (daselbst p. 41). Dieser Satz wurde von Weierstrass in seinen Vorlesungen verwendet.

26) „Wenn eine Reihe von Gröſsen $\overset{1}{F}(x)$, $\overset{2}{F}(x) \cdots \overset{n}{F}(x) \cdots \overset{n+r}{F}(x)$ von der Beschaffenheit ist, daſs der Unterschied zwischen ihrem n-ten Gliede $\overset{n}{F}(x)$ und jedem späteren $\overset{n+r}{F}(x)$, sei dieses von jenem noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Gröſse verbleibt, so giebt es jedesmal eine gewisse beständige Gröſse, und zwar nur eine, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt" (daselbst p. 35).

27) Die drei Probleme der Rektifikation, der Complanation und der Cubirung u. s. w. Leipzig 1817, p. 11.

28) S. auch Bolzano, „Paradoxien des Unendlichen" (1850). Zweite unveränderte Auflage. Berlin 1889. p. 69. Vielleicht werden noch manche Arbeiten von Bolzano in seinem Nachlasse aufgefunden werden. Vgl. F. J. Studnička, Bericht über die mathematischen und naturwissenschaftlichen Publikationen der kg. böhmischen Ges. d. Wiss. während ihres hundertjährigen Bestandes, Prag 1884. p. 119.

29) Eine Würdigung der Leistungen Bolzano's geben Hankel (Art. Grenze in der Allg. Encykl. von Ersch und Gruber) und O. Stolz (Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, Math. Ann. XIX).

30) Wir citieren nur folgende Worte aus den Vorreden zu den *Cours d'ana-*

diese Leistungen beherrschen noch gegenwärtig das gesamte Gebiet der Analysis. Durch diese Arbeiten von Cauchy sind die Infinitesimal- und Grenzmethoden von jener gefürchteten Metaphysik befreit und die Frage über die Giltigkeit der Prinzipien der Lagrange'schen Methode vollkommen erledigt worden.

Die späteren Kritiker und Historiker, wie Cournot[31]), Hankel[32]), Freycinet[33]), Mansion[34]), Vivanti[35]) u. a. konnten schon in den Besprechungen der Lagrange'schen Methode die von den älteren Kritikern erhobenen Einwände durch mathematisch überzeugende Belege verstärken.

Das unmittelbare Ziel, welches Lagrange durch seine Methode zu erreichen suchte, wurde zwar nicht erreicht[36]), aber die Potenzreihe, der Aus-

---

lyse und den *Leç. sur le calcul: „En partant de la continuité des fonctions je n'ai pu me dispenser de faire connaître les proprietés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal . . . Quant aux méthodes j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communement admises . . . ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que dans la réalité la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment.“*

„La formule de Taylor *ne peut plus être admise comme générale, qu'autant qu'elle est réduite à un nombre fini de termes et completée par un reste. Je n'ignore pas qu'en faisant d'abord abstraction de ce reste l'illustre auteur de la „Mécanique analytique“ a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions derivées. Mais malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaitre l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi des séries divergentes. Il y a plus, le théorème de* Taylor *semble dans certains cas fournir le développement d'une fonction en série convergente quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée.“* Das klassische von Cauchy gegebene Beispiel einer solchen Funktion ist wohlbekannt. S. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung I. Bd. p. 105.

31) Cournot, *Traité élémentaire des fonctions et du cal. inf. 1841.*

32) Hankel, Art. Grenze l. c.

33) Freycinet, *De l'analyse infinitésimale.* Paris 1881, 2 éd. p. 228.

34) Mansion, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale.* Paris 1887, p. 290.

35) G. Vivanti, *Il concetto d' infinitesimo e la sua applicazione nella matematica, Mantova* 1894, p. 97, 124.

36) Der Einfluſs der in der *„Théorie des fonctions analytiques“* enthaltenen Gesichtspunkte und Methoden ist noch jetzt merkbar. Eine Würdigung ihrer geschichtlichen Bedeutung findet man bei Brill u. Nöther: „Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer

gangspunkt seiner Betrachtungen, wurde bekanntlich in einer neuen durch CAUCHY's Vorarbeiten vorbereiteten präziseren Auffassung das Fundament der modernen Theorie der analytischen Funktionen, wie sie uns in den Schöpfungen von WEIERSTRASS[37]) und MÉRAY[38]) jetzt fertig dasteht

Es ist auch nicht zu verkennen, dafs die Tendenz, welche LAGRANGE in seiner Schöpfung leitete, nämlich die Algebraisierung der höheren Analysis, nicht ohne Einwirkung geblieben ist. Dieselbe Denkweise hatte auch in unserer Zeit zwei grofse Vertreter: einen WEIERSTRASS und einen KRONECKER. Ob diese algebraisierende oder gar arithmetisierende Richtung wissenschaftliche Resultate in völliger Unabhängigkeit von jener zweiten Denkweise — wir nennen sie intuitiv — hervorzubringen im stande sei, ist eine Frage, die wir hier nicht erörtern können.[39]) Es scheint aber das Zusammenwirken beider Richtungen ein mächtiger Faktor der Förderung der Wissenschaft zu sein. Die *„Théorie des fonctions analytiques“* hat zu beiden Richtungen beigetragen, indem sie die schöpferischen Geister je nach Individualität zur Erweiterung und Vervollständigung der in ihr liegenden Ansätze in der einen und in der anderen Richtung anregte.

Zeit“ im III. B. des „Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ Berlin 1894, p. 150—155.

37) *„Nous sommes débarassés (par la conception de* WEIERSTRASS*)“* — sagt POINCARÉ in seiner neuesten Arbeit, *L'oeuvre mathématique de* WEIERSTRASS“ (Acta mathematica XXII p. 7) *„des doutes qui au siècle dernier et dans la première moitié de ce siècle assaillaient souvent les penseurs à propos des principes du calcul infinitésimal et aussi de ceux que pouvait provoquer par ses lacunes la théorie des fonctions analytiques de* LAGRANGE. *Toute cela n'est plus aujourd'hui que de l'histoire ancienne.“* Ein Bruchstück dieser *„histoire ancienne“* haben wir versucht im gegenwärtigen Artikel zu geben.

38) MÉRAY, *„Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques“* 4 Bde. 1894—98. Seinen Standpunkt erklärt MÉRAY in der Vorrede zum I. Bande, insb. p. XIV—XVIII.

39) Vgl. KLEIN, *The Evanston Colloquium.* 1894. p. 41 und Über Arithmetisierung der Mathematik (Nachrichten der kgl. Gesellschaft der Wissenschaft in Göttingen, 1895 S. 82—91). Vgl. auch die oben citierte Arbeit von POINCARÉ p. 16—18 und PRINGSHEIM, „Irrationalzahlen und Convergenz unendlicher Prozesse“ in der Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, I Bd. 1es Heft p. 64.

Warschau, im Dezember 1898.

S. Dickstein.