

0 — robotyka

Wojciech Szczepiński

**ANALIZA DOKŁADNOŚCI
USTAWIANIA KĄTÓW ORIENTACJI
KOŃCÓWKI ROBOCZEJ MANIPULATORÓW**

45/1989

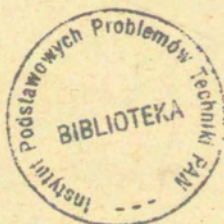
P.269



WARSZAWA 1989

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 czerwca 1989 r.



56740



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 2,05 Ark.druk. 2,75
Oddano do drukarni we wrześniu 1989 r.
Nr zamówienia 28/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

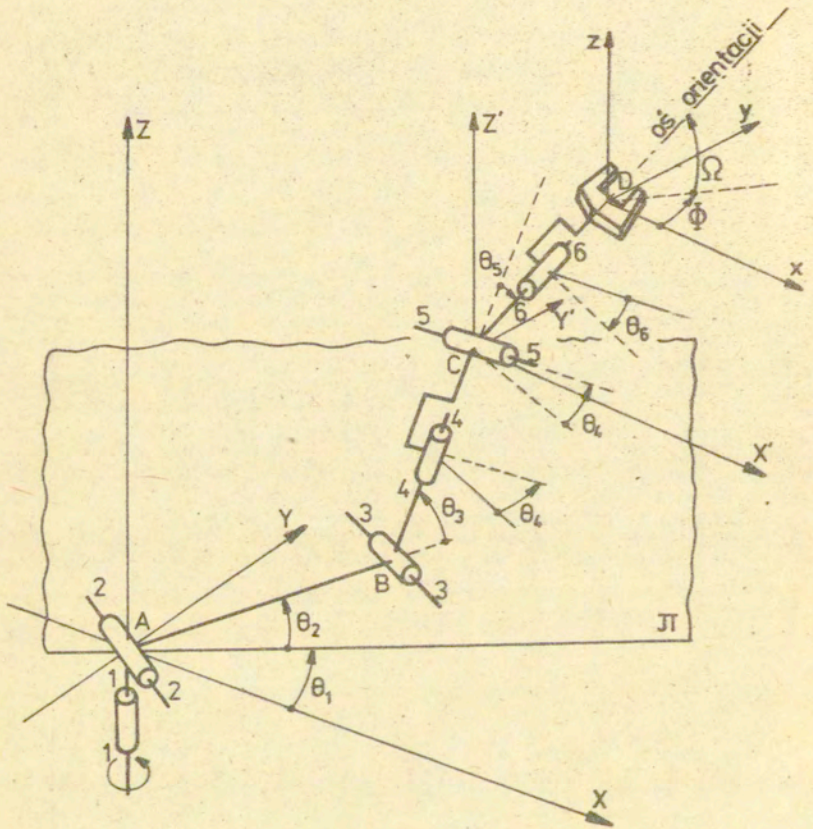
ANALIZA DOKŁADNOŚCI USTAWIANIA KĄTÓW
ORIENTACJI KOŃCÓWKI ROBOCZEJ MANIPULATORÓW

Streszczenie

Orientację osi końcówki roboczej manipulatora określają trzy kąty w przestrzeni. Odchylenie od nominalnej orientacji chwytaka przedstawia się w postaci promienia-wektora w prostokątnym układzie współrzędnych, w którym na każdej osi odkłada się błąd ustawienia poszczególnych kątów orientacji. Jeśli błąd ustawienia każdej z par kinematycznych manipulatora zawiera się w pewnych dopuszczalnych granicach (tolerancjach ustawienia), to końce wszystkich możliwych wektorów odchylenia orientacji w tej przestrzeni będą znajdowały się wewnątrz lub na powierzchni pewnego wielościanu, który określano jako wielościan tolerancyjny dokładności orientacji. Wyprowadzono równania płaszczyzn ograniczających ten wielościan. Metodykę postępowania przy wyznaczaniu wielościanów tolerancyjnych pokazano na kilku przykładach szczegółowych.

1. Wstęp

W poprzednich pracach [1] i [2] rozpatrywano zagadnienie dokładności pozycjonowania manipulatorów robotów. Pokazano w nich sposób wyznaczania wielościanów ograniczających przestrzeń, w której mieszczą się wszystkie możliwe wektory odchylenia od określonej pozycji nominalnej końcówki roboczej manipulatora. W niniejszej pracy zajmiemy się wyznaczaniem podobnych wielościanów ograniczających w przestrzeni odchylen orientacji obszar, wewnątrz którego mieszczą się wszystkie możliwe wektory błędów orientacji przy określonej pozycji



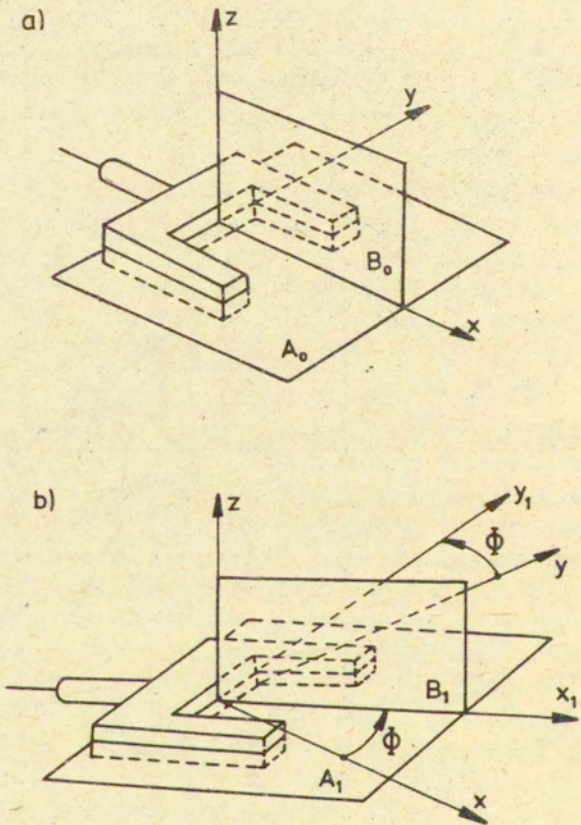
Rys. 1

manipulatora.

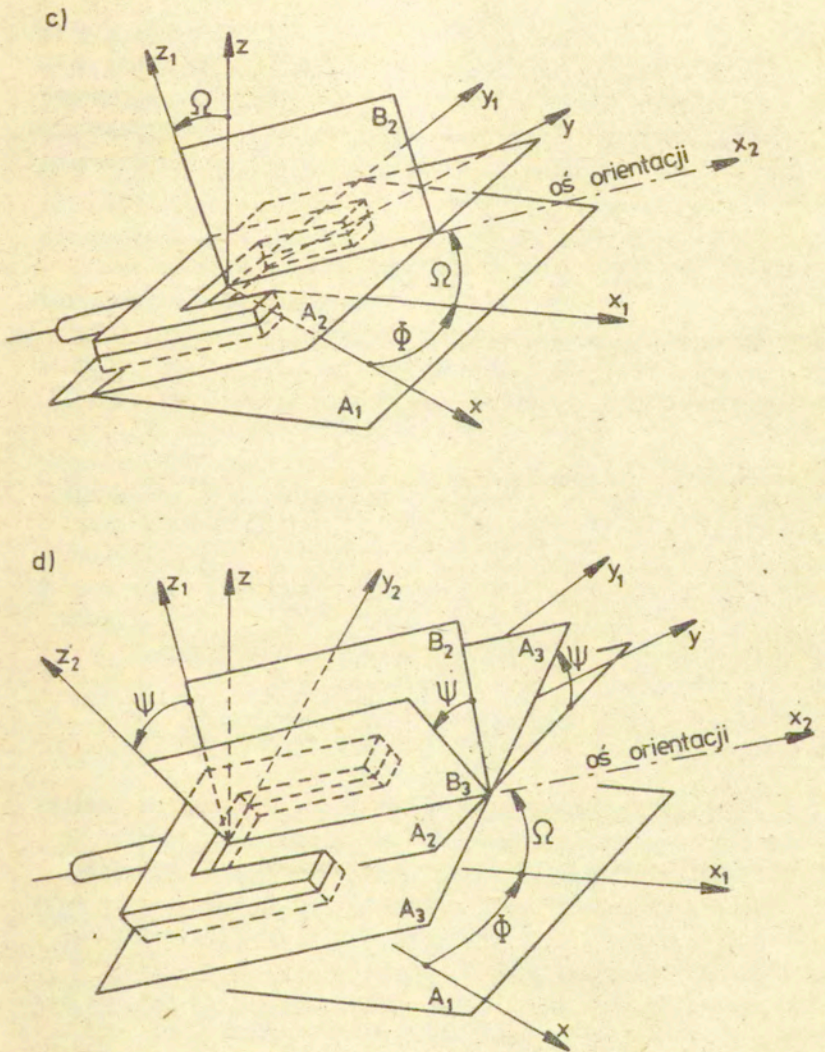
Jako punkt wyjścia rozpatrzmy pewien ogólny typ manipulatora z sześcioma parami kinematycznymi pokazany schematycznie na rys.1. Par posuwisto-zwrotnych nie uwzględniono w tym schemacie, ponieważ nie wpływają one na orientację chwytaka. Obrotowe pary kinematyczne umożliwiają ustawienie wymiarów kątowych odpowiednio od Θ_1 do Θ_6 .

Orientację chwytaka manipulatora w przestrzeni można określić za pomocą kątów Φ , Ω i Ψ pokazanych schematycznie na rys.2 w odniesieniu do lokalnego układu współrzędnych x, y, z o osiach równoległych do podstawowego układu X, Y, Z i o początku umieszczonym w wybranym punkcie charakterystycznym chwytaka. Ten lokalny układ dla jasności zaznaczono również na rys.1.

Jako wyjściowe położenie chwytaka przyjmiemy położenie przedstawione na rys.2a, gdy jego główne płaszczyzny A i B pokrywają się odpowiednio z płaszczyznami x, y oraz y, z . To wyjściowe położenie płaszczyzn głównych oznaczono przez A_0 i B_0 . Załóżmy, że najpierw chwytak został obrócony wokół osi z o kąt Φ , a związane z nim prostokątne elementy jego płaszczyzn głównych zajęły odpowiednio pozycje A_1 i B_1 (rys.2b). Jeśli przyjąć, że osie x i y są związane z chwytakiem to zostaną one przy tym obrócone do położenia x_1 i y_1 . Następnie obrócmy chwytak wokół osi y_1 o kąt Ω (rys.2c). Wycinki płaszczyzn głównych zajmą położenia oznaczone przez A_2 i B_2 , a związane z nim osie x_1 i z zajmą odpowiednio położenia x_2 i z_1 . Oś x_2 stanowi oś orientacji chwytaka, wzdłuż której skierowana jest jego główna oś geometryczna. Ostateczną oś orientacji chwytaka w przestrzeni określa kąt Ψ , o który obrócono go wokół osi orientacji x_2 . Związane z chwytakiem wycinki jego płaszczyzn głównych zajmą ostatecznie pozycje oznaczone na rys.2d odpowiednio przez A_3 i B_3 , a związane z nim osie współrzędnych zajmą odpowiednio pozycje y_2 i z_2 . Taka hipotetyczna sekwencja ruchów chwytaka wyjaśnia sposób odmierzania kątów Φ , Ω i Ψ , określających orien-



Rys. 2.



Rys. 2.

tację chwytaka w przestrzeni X, Y, Z .

Przy rozwiązywaniu zagadnienia wyznaczania odchyień orientacji w przypadku manipulatorów o skomplikowanej budowie wyznaczenie zależności kątów orientacji Φ, Ω, Ψ od kątów ustawienia obrotowych par kinematycznych $\theta_1, \dots, \theta_k$ jest dość złożone. Pokażemy to na przykładzie manipulatora przedstawionego schematycznie na rys.1.

Przy ustalonym kącie θ_1 ruchy segmentów A-B i B-C zachodzą w płaszczyźnie Π , przechodzącej przez oś Z i wyznaczonej przez wielkość kąta θ_1 . Przy obrocie pary kinematycznej o osi obrotu 4-4 następuje ruch segmentu C-D, którego oś opisuje powierzchnię stożkową. Ośią stożka jest przedłużenie osi segmentu B-C, a jego wierzchołkiem jest punkt C. Wprowadzmy pomocniczy układ współrzędnych $X'Y'Z'$ o osiach równoległych odpowiednio do osi układu XYZ i o początku w wierzchołku stożka C. Jeżeli teraz jako orientację odniesienia przyjmiemy, tak jak na rys.2a, orientację osi chwytaka wzdłuż osi X' , to rozpatrywany kierunek C-D tej osi (rys.3) można otrzymać najpierw przez obrót wokół osi Z' o kąt Φ , a następnie wokół nowego (obróconego) położenia osi Y'_1 o kąt Ω . Na podstawie rys.3 możemy napisać

$$(1) \quad \Phi = \theta_1 + \arctg \frac{\overline{NM}}{\overline{CM}}, \quad \Omega = \arcsin \frac{\overline{DN}}{\overline{CD}}.$$

Wielkości odcinków \overline{NM} , \overline{DN} i \overline{CM} wyznaczmy na podstawie rys.4. Wygodnie jest rozpatrywać wstępnie zależności na płaszczyźnie Π (rys.4a - por.rys.1). Gdyby kąt skręcenia θ_4 w parze kinematycznej o osi 4-4 równał się zeru to również ramię C-D manipulatora leżałoby w tej płaszczyźnie, a jego końcowy punkt zajmowałby pozycję oznaczoną przez D^0 na rysunku. Jeśli jednak kąt skręcenia θ_4 nie równa się zeru to punkt D dokonuje obrotu względem osi stożka C-E o kąt θ_4 od położenia D^0 do położenia pokazanego jako punkt D^{sk} na kładzie przekroju stożka. Rzut tego punktu w tym nowym położeniu na płaszczyznę Π oznaczono przez D'' , a rzut

$$\overline{NM} = c \sin \theta_5 \sin \theta_4 ,$$

$$(1a) \quad \overline{CM} = c [\cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \sin \theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos \theta_4) ,$$

$$\overline{DN} = c [\sin \theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos \theta_4) + \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) .$$

Podstawiając te wyrażenia do wzorów (1) i uwzględniając, że $\overline{CD} = c$ otrzymujemy dość skomplikowane związki między kątami orientacji $\overline{\Phi}$ i Ω i kątami ustawczymi $\theta_1 \dots \theta_5$ par kinematycznych. Wyrażenie na kąt $\overline{\Psi}$ ma bardziej skomplikowaną postać. Zostanie ono podane przy obliczaniu przykładu obliczeń dla tego typu manipulatora.

W przypadku manipulatorów o prostszej budowie spotykanych w praktyce wyrażenia na kąty orientacji mają jednak znacznie prostszą postać. Zostanie to pokazane dalej na konkretnych przykładach.

Ogólnie możemy zapisać, że kąty orientacji chwytaka manipulatora wyrażają się przez kąty θ_i ($i = 1, 2 \dots k$) ustawienia poszczególnych obrotowych par kinematycznych

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) ,$$

$$(2) \quad \Omega = \Omega(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) ,$$

$$\overline{\Psi} = \overline{\Psi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) .$$

Jeśli przy powtarzających się kolejnych ruchach manipulatora każdy z kątów ustawczych θ_i obrotowych par kinematycznych zostaje ustawiony z pewnym niewielkim odchyleniem (błędem) $\Delta \theta_i$ od żądanego ustawienia nominalnego, to orientacja chwytaka dozna również odchylenia od żądanej orientacji nominalnej. Kąty orientacji $\overline{\Phi}$, Ω , $\overline{\Psi}$ doznają małych odchyleń od swych żądanych nominalnych wielkości. Te małe odchylenia oznaczone odpowiednio małymi literami φ , ω , ψ będą się równały

$$(3) \quad \varphi = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i, \quad \omega = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i .$$

Pochodne cząstkowe występujące w wyrażeniach (3) można traktować jako współczynniki wrażliwości dokładności orientacji na błędy ustawienia poszczególnych obrotowych par kinematycznych. Można je zestawić w postaci macierzy funkcyjnej, mającej postać macierzy jacobianowej

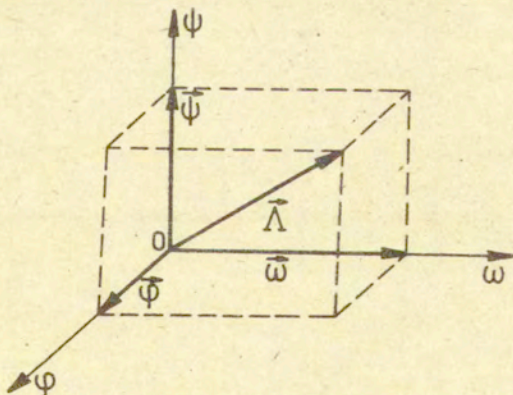
$$(4) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_k} \end{bmatrix} .$$

Równości (3) można ogólnie zapisać w postaci macierzowej

$$(5) \quad \begin{bmatrix} \psi \\ \omega \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ \Delta \theta_k \end{bmatrix} .$$

2. Wyznaczanie wielościanów tolerancyjnych dokładności orientowania chwytaka - metoda równań ścian wielościanu

Jak już wspomniano we wstępie przy każdorazowym powtarzającym się cyklu pracy manipulatora ustawienie poszczególnych par kinematycznych następuje z pewnym niewielkim odchyleniem od żadanego ustawienia, które teoretycznie powinno być takie samo przy każdym cyklu. W wyniku tych niewielkich odchyłeń również kąty orientacji chwytaka Φ , Ω , Ψ będą przy każdym cyklu nieco inne, doznając odchyłeń φ , ω , ψ określonych wzorami (3). Jeśli teraz wprowadzimy pewną przestrzeń z prostokątnym układem współrzędnych φ , ω , ψ , w której na poszczególnych osiach współrzędnych będziemy odpowiednio odmierzać odchylenia kątów orientacji, to każdorazowo odchylenie orientacji chwytaka będzie w niej reprezentowane przez pewien wektor $\vec{\Lambda}$ o składowych równych odpowiednio $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ i $\vec{\psi}$ (rys.5)



rys.5.

W każdym cyklu pracy manipulatora błędy ustawienia par kinematycznych $\Delta \theta_1$ mogą być różne. A więc za każdym razem koniec wektora $\vec{\Lambda}$ zajmuje inne położenie. Wszystkie takie możliwe położenia wektora $\vec{\Lambda}$ zawierają się w granicach pewnego obszaru w przestrzeni ψ, ω, γ , jeżeli przyjmemy, że odchylenia dokładności ustawienia poszczególnych par kinematycznych zawierają się w określonych dopuszczalnych granicach zwanych tolerancjami dokładności ustawienia pary kinematycznej. Obszar taki jak pokażemy ma postać wielościanu, a ściślej mówiąc równoległościanu. Będziemy go nazywali wielościanem tolerancyjnym dokładności orientacji manipulatora.

Początek O układu współrzędnych ψ, ω, γ odpowiada żądanej nominalnej orientacji chwytaka. Zbadajmy jak będzie się zmieniało położenie końca wektora odchylenia orientacji od orientacji nominalnej, jeśli odchylenia $\Delta \theta_r$ i $\Delta \theta_s$ dokładności ustawienia dwóch z obrotowych par kinematycznych oznaczonych numerami odpowiednio r i s będą się zmieniały, a odchylenia dokładności ustawienia pozostałych par kinematycznych będą miały stałe wielkości. W tym celu odchylenia $\Delta \theta_r$ i $\Delta \theta_s$ w równaniach (3) należy uważać za zmienne parametry a pozostałe odchylenia $\Delta \theta_1$ uważać za wielkości stałe.

Równania (3) zapiszemy w nieco innej postaci

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \Delta \theta_r + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \Delta \theta_s + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_k} \Delta \theta_k, \\ (3a) \quad \omega &= \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} \Delta \theta_r + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} \Delta \theta_s + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_k} \Delta \theta_k, \\ \gamma &= \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_r} \Delta \theta_r + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} \Delta \theta_s + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_k} \Delta \theta_k. \end{aligned}$$

Wyznamy teraz $\Delta\theta_r$ i $\Delta\theta_s$ rozwiązujac wzgledem nich dwa pierwsze z równań (3a). W rezultacie otrzymujemy wyrażenia

$$(a) \quad \Delta\theta_r = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} \end{vmatrix}} \varphi - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} \end{vmatrix}} \omega -$$

$$- \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} \end{vmatrix}} \Delta\theta_i - \sum_{i=r+1}^k \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} \end{vmatrix}} \Delta\theta_i,$$

$$(b) \quad \Delta\theta_s = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} \end{vmatrix}} \varphi - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} \end{vmatrix}} \omega -$$

$$- \sum_{i=1}^{s-1} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} \end{vmatrix}} \Delta\theta_i - \sum_{i=s+1}^k \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} \end{vmatrix}} \Delta\theta_i.$$

Ten sposób postępowania jest poprawny tylko wtedy, gdy jacobiany występujące w mianowniku nie są równe zero. Po podstawieniu tych wyrażeń do trzeciego z równań (3a) otrzymujemy równanie płaszczyzny we współrzędnych ψ, ω, Υ

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} \end{vmatrix} \psi + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \end{vmatrix} \omega + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} \end{vmatrix} \Upsilon =$$

$$= \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i} \end{vmatrix} \Delta \theta_i.$$

Użyto tu zapisu wyznacznikowego w postaci jacobianów. Zwracamy uwagę, że sumowanie w wyrazie po prawej stronie można przeprowadzić od $i = 1$ do $i = k$ bez wyłączenia przypadków $i = r$ oraz $i = s$, ponieważ dla $i = r$ oraz $i = s$ wyznacznik pod znakiem sumy równa się zero, gdyż dwie z jego kolumn są jednakowe.

Równanie (4) można zapisać w bardziej zwartej postaci

$$(4a) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} & \psi \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} & \omega \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} & \Upsilon \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_r} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i} \end{vmatrix} \Delta \theta_i.$$

Rozwijając lewą stronę równania (4a) na podwyznaczniki względem elementów trzeciej kolumny otrzymujemy równanie w postaci (4).

Biorąc kolejno po dwa odchylenia różnych obrotowych par kinematycznych jako zmienne parametry otrzymujemy równania różnych płaszczyzn ograniczających wielościan tolerancyjny dokładności orientowania chwytaka. Liczbę tych równań określa wzór

$$(5) \quad m = \binom{k}{2} = \frac{k!}{2(k-2)!} .$$

Liczbę równań płaszczyzn m w zależności od liczby obrotowych par kinematycznych k zestawiono w poniższej tabelicy (zwróćmy uwagę, że rozpatrujemy tylko występowanie par kinematycznych piątej klasy, to znaczy par obrotowych o jednym stopniu swobody obrotu)

k	3	4	5	6	7
m	3	6	10	15	21

W konkretnych przypadkach równania te mogą być takie same dla różnych kombinacji par r i s . Wówczas efektywnie liczba równań płaszczyzn będzie mniejsza niż określona wzorem (5). Przypadek taki występuje w Przykładach 2 i 3 (str. 35 i 38).

3. Wyznaczanie wielościanów tolerancyjnych dokładności orientowania chwytaka metodą określania równań ich krawędzi

W punkcie 2 wyprowadzono równania płaszczyzn ograniczających wielościan tolerancyjny dokładności orientowania chwytaka manipulatora. Wielościan tolerancyjny można również wyznaczyć w inny sposób przy użyciu równań określających w przestrzeni odchylenia kątów orientacji chwytaka od orientacji nominalnej, a więc w przestrzeni φ , ω , ψ rozpatrywanej w poprzednim punkcie, położenie jego krawędzi.

W celu wyprowadzenia ogólnej postaci równań krawędzi wielościanu tolerancyjnego zbadajmy jak się będzie zmieniało w przestrzeni ψ , ω , ψ położenie końca wektora określającego błąd orientacji chwytaka jeśli odchylenie $\Delta\theta_r$ dokładności ustawienia kąta jednej z obrotowych par kinematycznych, którą oznaczymy numerem r , będzie się zmieniało, a błędy dokładności ustawienia kąta pozostałych obrotowych par kinematycznych będą miały stałe wartości. Błąd ustawienia $\Delta\theta_r$ będziemy więc traktowali jako zmienny parametr w równaniach (3), określających małe odchylenia ψ , ω , ψ dokładności orientacji końcówki roboczej manipulatora od orientacji nominalnej określonej kątami orientacji $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}^*$, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^*$ i $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^*$.

Równania (3) zapiszemy teraz w postaci

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \Delta\theta_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \Delta\theta_r + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_k} \Delta\theta_k, \\
 (3b) \quad \omega &= \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} \Delta\theta_1 + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} \Delta\theta_r + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_k} \Delta\theta_k, \\
 \psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \Delta\theta_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_r} \Delta\theta_r + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_k} \Delta\theta_k.
 \end{aligned}$$

Wyznamy teraz $\Delta\theta_r$ z pierwszego z tych równań, otrzymując wyrażenie:

$$(a) \quad \Delta\theta_r = \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r}} \psi - \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r}} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \Delta\theta_i - \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r}} \sum_{i=r+1}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \Delta\theta_i,$$

które następnie podstawiamy do dwóch pozostałych równań (3b).

W wyniku otrzymujemy równania

$$\omega = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r}} \varphi + \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r}} \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \end{vmatrix} \Delta \theta_i,$$

(6)

$$\psi = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_r}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r}} \varphi + \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r}} \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} \end{vmatrix} \Delta \theta_i.$$

Sumowanie w wyrazach po prawej stronie można przeprowadzić od $i = 1$ do $i = k$ bez wyłączenia przypadku $i = r$, ponieważ dla $i = r$ wyznacznik pod znakiem sumy równa się zeru.

Równania (6) są to równania prostej w układzie współrzędnych φ , ω , ψ . Każde z nich jest równaniem płaszczyzny rzutujskiej prostą odpowiednio na płaszczyzny φ , ω i ψ . A zatem przy zmianie wielkości błędu ustawienia jednej z obrotowych par kinematycznych i utrzymywaniu stałych wartości błędów (odchyień) dokładności ustawienia pozostałych obrotowych par kinematycznych koniec wektora $\vec{\Lambda}$ reprezentującego odchylenie orientacji końcówki (por. rys.5) porusza się po prostej określonej równaniami (6).

Dobierając odpowiednio wielkości skrajnych dopuszczalnych odchyień $\Delta \theta_i$ (tolerancji dokładności ustawienia pozostałych obrotowych par kinematycznych) znajdujemy wszystkie skrajne położenia tej prostej. Te skrajne położenia określają krawędzie wielościanu tolerancyjnego.

Równań (6) nie można stosować jeżeli $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_r} = 0$. W takich przypadkach należy posługiwać się bezpośrednio równaniami (3). Zostanie to pokazane dalej na konkretnych przy-

kładach.

Przy rozwiązywaniu takich konkretnych zadań okazuje się niekiedy, że nie wszystkie skrajne położenia prostych określonych równaniami (6) odpowiadają krawędziom wielościanu tolerancyjnego. Niektóre z nich mogą znajdować się na jego ścianach lub w jego wnętrzu. Jest to pewna komplikacja związana ze stosowaniem metody wyznaczania krawędzi. W trudniejszych przypadkach postać wielościanu można ustalić stosując jednocześnie obie metody, a więc metodę wyznaczania równań ścian i metodę wyznaczania równań krawędzi.

4. Przykłady wyznaczania wielościanów tolerancyjnych dokładności orientowania chwytaka

Jako przykład wyznaczymy wielościan tolerancyjny dokładności orientowania chwytaka manipulatora pokazanego schematycznie na rys.1. Ograniczymy się tylko do pewnego wybranego położenia w celu pokazania sposobu postępowania. Postępując analogicznie można wyznaczyć wielościan dla dowolnego położenia.

Wyznaczymy najpierw zależności funkcyjne dla kątów orientacji zapisane ogólnie w postaci (2). Zależności te dla kątów orientacji Φ i Ω podano już w punkcie 1 pracy w postaci (1) i (1a). Teraz wyznaczymy zależność dla trzeciego z kątów orientacji Ψ . Ogólnie dla rozpatrywanego manipulatora można wyrażenie na ten kąt przedstawić w postaci sumy

$$(7) \quad \Psi = \theta_6 + \Psi_1.$$

Kąt Ψ_1 , który należy dodać do kąta θ_6 powodującego bezpośredni obrót chwytaka wokół osi orientacji, wynika z dodatkowego obrotu wokół tej osi wywołanego obrotem pary kinematycznej o osi 4-4 o kąt θ_4 . Wówczas ramię C-D manipulatora

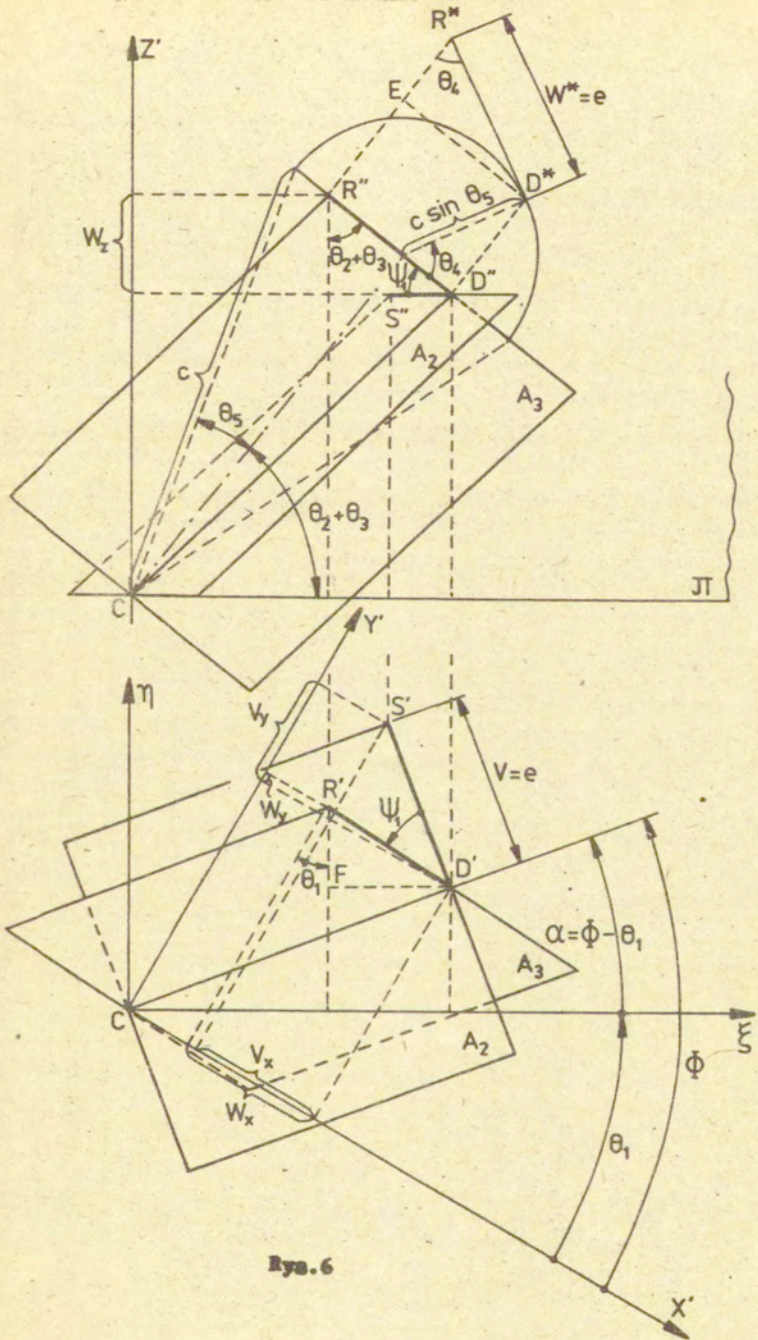


Рис. 6

zakreśla łuk na powierzchni stożkowej jak to pokazano na rys. 3. Rys.6 przedstawia jak w związku z tym obraca się o kąt Ψ_1 płaszczyzna odniesienia z położenia A_2 do położenia A_3 (por.rys.2d). Podobnie jak na rys.4 górna część rys.6 przedstawia rzut na płaszczyznę Π , pokazaną już na rys.1. Dolna część rys.6 przedstawia rzut na płaszczyznę $X'Y'$.

Zgodnie z umową podaną na rys.2c i 2d płaszczyzna odniesienia A_2 musi być tak zorientowana aby jej krawędź DS skierowana prostopadłe do osi orientacji CD była równoległa do płaszczyzny $X'Y'$. Wobec tego na dolnej części rysunku jej rzut $D'S'$ pokazuje jej rzeczywistą długość, którą oznaczymy przez e (tę długość odcinka DS krawędzi obrano dowolnie). Na górnym rysunku rzut tej krawędzi $D''S''$ musi być skierowany równoległe do osi poziomej. W porównaniu z rys.2d to położenie płaszczyzny odniesienia A_2 odpowiadałoby obróceniu jej wraz z osią orientacji wokół osi Z' o kąt α z położenia odpowiadającego kątowi $\theta_4 = 0$. Nie ma przy tym żadnego obrotu wokół osi orientacji.

Wskutek obrotu pary kinematycznej 4-4 o kąt θ_4 i zajęcia przez oś orientacji pozycji CD pokazanej na rysunku, związana z nią sztywno płaszczyzna A zajmie położenie A_3 , takie że jej krawędź DR nie będzie równoległa do płaszczyzny $X'Y'$. Mamy więc konfigurację odpowiadającą konfiguracji pokazanej na rys.2d. Sposób wyznaczenia rzutów $D'R'$ i $D''R''$ krawędzi DR pokazano na rys.6. Półkoło w jego górnej części jest kładem na płaszczyznę Π przekroju stożka zataczanego przez ramię C-D przy zmienianiu kąta θ_4 , a punkt D^* jest kładem punktu D, którego położenie jest określone wielkością kąta θ_4 . Odcinek D^*R^* jest kładem krawędzi DR. Musi on być skierowany stycznie do koła przekroju stożka. Na tym kładzie ma on swą rzeczywistą długość e , taką jaką przyjęliśmy dla płaszczyzny w położeniu A_2 . Rzutując kład tej krawędzi na prostą przedstawiającą rzut przekroju stożka na płaszczyznę Π otrzymujemy rzut $D''R''$ krawędzi na tę płaszczyznę. Rzut $D'R'$ na płaszczyznę $X'Y'$ znajdujemy odkładając na niej odcinek $\overline{FR}' = \overline{ER}^*$ w sposób pokazany w dol-

nej części rys.6. Mając już wyznaczone rzuty krawędzi płaszczyzn A_2 i A_3 możemy je potraktować jako wektory w przestrzeni, obydwa z początkiem w punkcie D. Oznaczmy je odpowiednio symbolem \vec{V} dla krawędzi płaszczyzny A_2 i symbolem \vec{W} dla krawędzi płaszczyzny A_3 . Szukany kąt Ψ_1 obrotu wokół osi orientacji będzie kątem między tymi wektorami. Jest on określony wzorem (patrz np. [3])

$$\Psi_1 = \arccos \left[\frac{1}{e^2} (W_x V_x + W_y V_y + W_z V_z) \right],$$

gdzie symbole V_x, V_y, V_z oraz W_x, W_y, W_z oznaczają rzuty odpowiednich wektorów na osie współrzędnych.

W naszym przypadku nieco wygodniej będzie posłużyć się układem osi ξ, η, z' pokazanym na rys.6. Wtedy kąt będzie określony wzorem

$$(a) \quad \Psi_1 = \arccos \left[\frac{1}{e^2} (W_\xi V_\xi + W_\eta V_\eta + W_z V_z) \right],$$

gdzie

$$\begin{aligned} V_\xi &= e \sin \alpha, & V_\eta &= e \cos \alpha, & V_z &= 0, \\ W_\xi &= e \sin \theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3), & W_\eta &= e \cos \theta_4. \end{aligned}$$

Po podstawieniu do wzoru (a) otrzymujemy

$$(b) \quad \Psi_1 = \arccos \left[\sin \theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin \alpha + \cos \theta_4 \cos \alpha \right].$$

Kąt α zgodnie z rys.4 i wyrażeniami (1a) jest określony wzorem

$$\begin{aligned} (c) \quad \alpha &= \arctg \frac{NM}{CM} = \\ &= \arctg \frac{\sin \theta_5 \sin \theta_4}{\cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \sin \theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3) (1 - \cos \theta_4)}. \end{aligned}$$

Ostatecznie kąty określające orientację chwytaka wyrażają się następująco w zależności od kątów $\theta_1 \dots \theta_6$

$$(8) \quad \Phi = \theta_1 + \alpha = \\ = \theta_1 + \arctg \frac{\sin\theta_5 \sin\theta_4}{\cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \sin\theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos\theta_4)}$$

$$(9) \quad \Omega = \arcsin[\sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) + \sin\theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos\theta_4)],$$

$$(10) \quad \Psi = \theta_6 + \Psi_1 = \\ = \theta_6 + \arccos[\sin\theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin\alpha + \cos\theta_4 \cos\alpha],$$

gdzie α jest określone związkiem (c).

Macierz funkcyjna (4) współczynników wrażliwości dokładności orientacji chwytaka ma w rozpatrywanym tu przypadku następującą postać

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_5} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_6} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_5} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_6} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_5} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_6} \end{bmatrix}$$

Większość elementów tej macierzy ma bardzo złożoną postać. Odpowiednie wyrażenia analityczne zestawiono w dodatku na końcu pracy. Jednak niektóre elementy macierzy są niezależne od kątów $\theta_1, \dots, \theta_6$ i przyjmują albo wartość równą jedności, albo wartość zerową. Macierz ta po uwzględnieniu tych stałych jej elementów ma postać

$$(11a) \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_5} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_5} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_5} & 1 \end{bmatrix}$$

Mając tę macierz z podanymi w dodatku wyrażeniami na jej elementy możemy wyznaczyć wielościany tolerancyjne dokładności orientacji chwytaka dla dowolnego jego położenia w przestrzeni roboczej manipulatora. Poniżej podano rozwiązania dla dwóch z tych położeń.

Przykład 1.

Wyznamy wielościan tolerancyjny dokładności orientacji dla pozycji manipulatora z rys.1 określonej następującymi kątami ustawienia poszczególnych par kinematycznych

$$\theta_1 = 0^\circ, \quad \theta_2 = \theta_3 = 30^\circ, \quad \theta_4 = 45^\circ, \quad \theta_6 = 0^\circ.$$

Przyjmujemy, że tolerancji dokładności ustawienia tych par są jednakowe i symetryczne. Mamy więc

$$\Delta \theta_1 = \Delta \theta_2 = \Delta \theta_3 = \Delta \theta_4 = \Delta \theta_5 = \Delta \theta_6 = \pm \Delta \theta,$$

gdzie $\Delta \theta$ oznacza pewne małe dopuszczalne odchylenie katowe ustawienia poszczególnych par kinematycznych. Kąt ustawienia każdej z nich może się różnić od teoretycznego /nominalnego/ kąta ustawienia θ_1 w granicach od $+\Delta \theta$ do $-\Delta \theta$.

Po podstawieniu powyższych wartości kątów θ_1 do odpowiednich wyrażeń na pochodne cząstkowe podane w dodatku otrzymujemy wartości liczbowe elementów macierzy współczynników wrażliwości (11a). Poniżej zestawiono tak obliczone

wartości liczbowe w sposób dogodny w dalszych obliczeniach.

(11b)

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6
$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}$	1	0,2940	0,2940	0,5154	0,5126	0
$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1}$	0	0,9020	0,9020	0,3736	-0,9020	0
$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1}$	0	-0,5015	-0,5015	0,6079	-0,3120	1

Przebieg obliczeń wykazał, że w tak złożonym przypadku jak rozpatrywany tu problem wyznaczenia wielościanu o nieznannej z góry konfiguracji znacznie wygodniej jest stosować opisaną w punkcie 2 metodę wyznaczania równań ścian wielościanu. Opisana w punkcie 3 metoda wyznaczania równań jego krawędzi została tu użyta jako metoda pomocnicza - głównie służąca do sprawdzania dokładności wyników otrzymanych przy użyciu metody wyznaczania równań ścian.

Obierając kolejno parami jako zmienne różne pary odchyłek $\Delta \theta_r$ i $\Delta \theta_s$ i podstawiając odpowiednie wartości pochodnych podane w powyższej tabelicy do równania (4) otrzymujemy równania płaszczyzn, których skrajne położenia określają ściany wielościanu. Przy sześciu parach kinematycznych rozpatrywanego manipulatora tych równań powinno być według wzoru (6) piętnaście. Jednak jak wynika z powyższej tabelicy współczynników wrażliwości wartości odpowiednich pochodnych są dla $i = 2$ i $i = 3$ jednakowe. Różnych równań dla płaszczyzn ograniczających wielościan tolerancyjny będzie więc dziesięć, tak jakby było tylko pięć par kinematycznych. Z każdego z tych równań można określić dwa skrajne położenia płaszczyzny. Otrzymujemy zatem dziesięć par równoległych płaszczyzn i wie-

łościan tolerancyjny będzie dwudziestościanem o równoległych parami ścianach.

Płaszczyzny będziemy oznaczali symbolem $P(r - s)$, gdzie r i s są numerami odchyłek $\Delta \theta_r$ i $\Delta \theta_s$ zmieniających się na danej płaszczyźnie. Poniżej podano wyprowadzenie ogólnej postaci równań poszczególnych płaszczyzn. Dla wyjaśnienia sposobu postępowania przy wyprowadzaniu pierwszego z tych równań podano wszystkie etapy obliczenia. Dla następnych płaszczyzn ograniczone się do podania ostatecznej postaci równania.

I. Płaszczyzny $P(1 - 2)$; zmienne odchyłki ustawienia kątów θ_1 i θ_2 ; stałe wielkości odchyłek ustawienia kątów $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$.

Równanie (4) przyjmuje następującą postać

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \varphi + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \omega + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \psi = \\ & = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} \Delta \theta_3 + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_4} \end{vmatrix} \Delta \theta_4 + \\ & + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_5} \end{vmatrix} \Delta \theta_5 + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_6} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_6} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_6} \end{vmatrix} \Delta \theta_6 . \end{aligned}$$

Po podstawieniu liczbowych wartości pochodnych podanych w tabelicy (11b) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & 0,9020 \\ 0 & -0,5015 \end{vmatrix} \psi + \begin{vmatrix} 0 & -0,5015 \\ 1 & 0,2940 \end{vmatrix} \omega + \begin{vmatrix} 1 & 0,2940 \\ 0 & 0,9020 \end{vmatrix} \gamma = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 0,2940 & 0,2940 \\ 0 & 0,9020 & 0,9020 \\ 0 & -0,5015 & -0,5015 \end{vmatrix} \Delta\theta_3 + \begin{vmatrix} 1 & 0,2940 & 0,5154 \\ 0 & 0,9020 & 0,3736 \\ 0 & -0,5015 & 0,6079 \end{vmatrix} \Delta\theta_4 + \\ & + \begin{vmatrix} 1 & 0,2940 & 0,5126 \\ 0 & 0,9020 & -0,9020 \\ 0 & -0,5015 & -0,3120 \end{vmatrix} \Delta\theta_5 + \begin{vmatrix} 1 & 0,2940 & 0 \\ 0 & 0,9020 & 0 \\ 0 & -0,5015 & 1 \end{vmatrix} \Delta\theta_6 . \end{aligned}$$

Wyznacznik przy $\Delta\theta_3$ po prawej stronie równania równa się zeru, ponieważ dwie jego kolumny są jednakowe. Oznacza to, że wielkość $\Delta\theta_3$ nie wpływa na położenie tej płaszczyzny - może się ona na niej zmieniać. Podobnie na położenie płaszczyzny P(1 - 3), na której zmieniają się $\Delta\theta_1$ i $\Delta\theta_3$, nie będzie wpływała wielkość odchylenia $\Delta\theta_2$. Obie płaszczyzny będą więc miały to samo równanie.

Po wykonaniu rachunków otrzymamy ostatecznie równanie płaszczyzna P(1 - 2) w postaci

$$(i) \quad \psi + 0,5560 \omega = 0,8156 \Delta\theta_4 - 0,8135 \Delta\theta_5 + \Delta\theta_6 .$$

Zgodnie z wyżej podanymi uwagami jest to również równanie płaszczyzn P(1 - 3). Płaszczyzny te są prostopadłe do płaszczyzny ω , ψ w przestrzeni odchylen orientacji chwytaka ψ , ω , γ .

II. Płaszczyzny P(1 - 4); zmienne odchyłki ustawienia katów θ_1 i θ_4 ; stałe wielkości odchylen ustawienia katów θ_2 , θ_3 , θ_5 , θ_6 .

Równanie tych płaszczyzn ma następującą postać

$$(ii) \quad \psi - 1,6271 \omega = -1,9692 (\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) + 1,1555 \Delta\theta_5 + \Delta\theta_6 .$$

Są to również płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny ω, ψ .

III. Płaszczyzny P(1 - 5); zmienne odchyłki ustawienia kątów θ_1 i θ_5 ; stałe wielkości odchylenia ustawienia kątów $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_6$.

Równanie tych płaszczyzn otrzymujemy w postaci

$$(iii) \quad \psi - 0,3459\omega = -0,8135(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) + 0,4786\Delta\theta_4 + \Delta\theta_6.$$

Są one również prostopadłe do płaszczyzny ω, ψ .

IV. Płaszczyzny P(1 - 6); zmienne odchyłki ustawienia kątów θ_1 i θ_6 ; stałe wielkości odchylenia ustawienia kątów $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$.

Równanie płaszczyzn ma prostą postać

$$(iv) \quad \omega = 0,9020(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) + 0,3736\Delta\theta_4 + 0,9020\Delta\theta_5.$$

Są to płaszczyzny prostopadłe do osi ω .

V. Płaszczyzny P(2 - 4); zmienne odchyłki ustawienia kątów θ_2 i θ_4 ; stałe wielkości odchylenia ustawienia kątów $\theta_1, \theta_5, \theta_6$.

Teraz równanie ma ogólniejszą postać

$$(v) \quad \psi + 1,2312\omega - 2,0718\psi = \\ = -2,0718\Delta\theta_1 - 2,4844\Delta\theta_5 + \Delta\theta_6.$$

Są to płaszczyzny nachylone do wszystkich trzech osi współrzędnych ψ, ω, ψ .

VI. Płaszczyzny P(2 - 5); zmienne odchyłki ustawienia kątów θ_2 i θ_5 ; stałe wielkości odchylenia ustawienia kątów $\theta_1, \theta_4, \theta_6$.

Również teraz otrzymujemy równanie płaszczyzn nachylonych względem wszystkich trzech osi współrzędnych

$$(vi) \quad \psi + 0,2273\omega + 1,0085\psi = \\ = 1,0085\Delta\theta_1 + 1,2125\Delta\theta_5 + \Delta\theta_6.$$

VII. Płaszczyzny P(2 - 6) ; zmienne odchyłki ustawienia kątów θ_2 i θ_6 ; stałe wielkości odchylen ustawienia kątów θ_1 , θ_4 , θ_5 .

Wynikające z tych warunków płaszczyzny są prostopadłe do płaszczyzny współrzędnych ψ , ω . Ich równania mają następującą postać

$$(vii) \quad \psi - 0,3259\omega = \Delta\theta_1 + 0,3937\Delta\theta_4 + 0,8067\Delta\theta_5 .$$

VIII. Płaszczyzny P(4 - 5) ; zmienne odchyłki ustawienia kątów θ_4 i θ_5 ; stałe wielkości odchylen ustawienia kątów θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_6 .

Równania płaszczyzn dla tego przypadku mają poniższą postać

$$(viii) \quad \psi - 0,7197\omega - 0,6577\psi = \\ = - 0,6577\Delta\theta_1 - 1,3440(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) + \Delta\theta_6 .$$

IX. Płaszczyzny P(4 - 6) ; zmienne odchyłki ustawienia kątów θ_5 i θ_6 ; Stałe wielkości odchylen ustawienia kątów θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_5 .

Płaszczyzny te są prostopadłe do płaszczyzny współrzędnych ψ , ω i są opisane równaniem

$$(ix) \quad \psi - 1,3796\omega = \Delta\theta_1 - 0,9505(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) - 1,7570\Delta\theta_5 .$$

X. Płaszczyzny P(5 - 6) ; zmienne odchyłki ustawienia kątów θ_5 i θ_6 ; stałe wielkości odchylen ustawienia kątów θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 .

Również te płaszczyzny są prostopadłe do płaszczyzny współrzędnych ψ , ω . Mają one równanie

$$(x) \quad \psi + 0,5682\omega = \Delta\theta_1 + 0,8065(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) + \\ + 0,7277\Delta\theta_4 .$$

Skrajne położenia wyżej rozpatrywanych płaszczyzn, określające ściany wielościanu, otrzymamy podstawiając do powyższych równań odpowiednio największe $(+\Delta\theta)$, lub najmniejsze $(-\Delta\theta)$ dopuszczalne odchylenia (tolerancje) ustawienia kątów $\theta_1, \dots, \theta_6$, tak aby otrzymać po prawej stronie

równań raz możliwie największą a następnie najmniejszą wartość wolnego wyrazu. Równania tych skrajnych położań płaszczyzn przedstawiają się następująco:

Płaszczyzny P(1 - 2)

$$\psi + 0,5560\omega = \pm 2,6291\Delta\theta .$$

Płaszczyzny P(1 - 4)

$$\psi - 1,6271\omega = \pm 6,0939\Delta\theta .$$

Płaszczyzny P(1 - 5)

$$\psi - 0,3459\omega = \pm 3,1056\Delta\theta .$$

Płaszczyzny P(1 - 6)

$$\omega = \pm 3,0796\Delta\theta .$$

Płaszczyzny P(2 - 4).

$$\psi + 1,2312\omega - 2,0718\varphi = \pm 5,5562\Delta\theta .$$

Płaszczyzny P(2 - 5)

$$\psi + 0,2273\omega + 1,0085\varphi = \pm 3,2210\Delta\theta .$$

Płaszczyzny P(2 - 6)

$$\varphi - 0,3259\omega = \pm 2,2004\Delta\theta .$$

Płaszczyzny P(4 - 5)

$$\psi - 0,7197\omega - 0,6577\varphi = \pm 4,3457\Delta\theta .$$

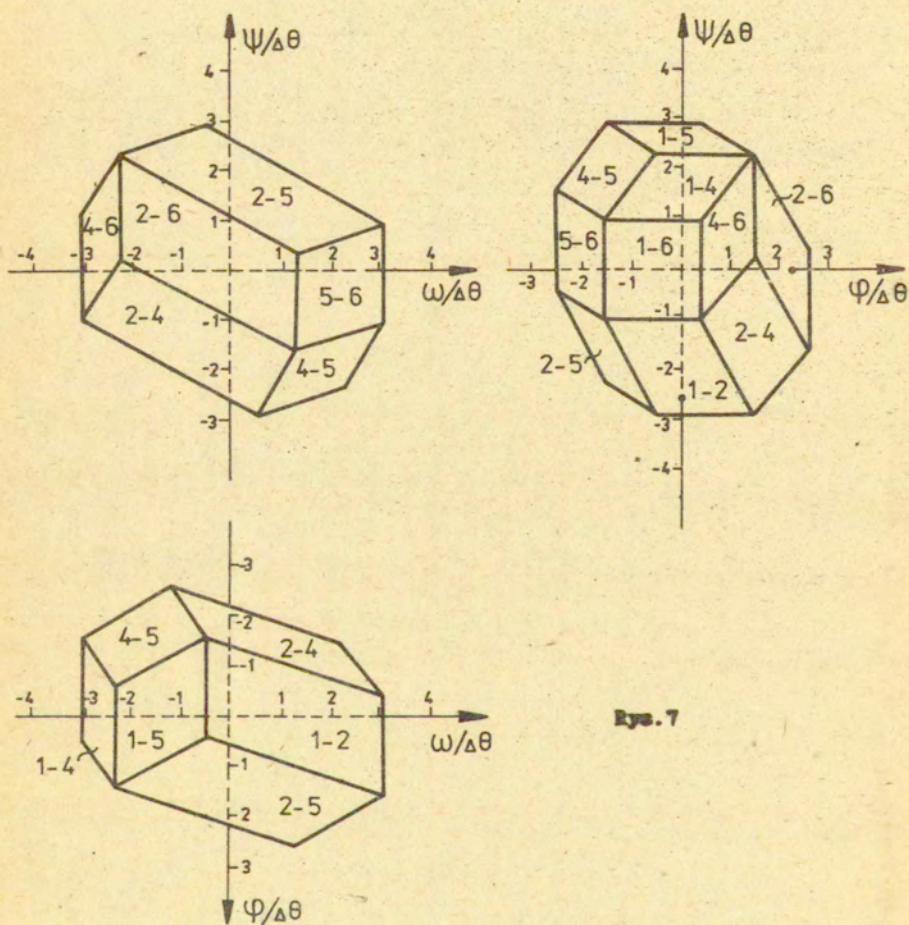
Płaszczyzny P(4 - 6)

$$\varphi - 1,3796\omega = \pm 4,6580\Delta\theta .$$

Płaszczyzny P(5 - 6)

$$\varphi + 0,5682\omega = \pm 3,3407\Delta\theta .$$

Przyjmując odpowiednio górny i dolny znak po prawej stronie znaków równości otrzymujemy równania dla obu skrajnych położań każdej z tych płaszczyzn. W rezultacie ich przecięć otrzymujemy dwudziestościan pokazany na rys. 7 w rzutach na płaszczyzny współrzędnych. W rzucie na płaszczyznę ψ , φ pokazanym po prawej stronie widoczne jest wszystkie dziesięć



Rys. 7

ścian po jednej z każdej pary równoległych ścian.

Równania krawędzi tego wielościanu można albo otrzymać rozwiązując parami równania przecinających się wzdłuż nich ścian, albo wyznaczyć je bezpośrednio z ogólnych równań (6) przyjmując kolejno jako zmienny parametr odchyłkę ustawienia

każdego z kątów $\theta_1, \dots, \theta_6$. Dla przykładu wyznaczmy równania krawędzi posługując się równaniami (6).

Proste odpowiadające poszczególnym krawędziom będziemy oznaczali symbolem K_r , gdzie r jest numerem odchyłki $\Delta\theta_r$ zmieniającej się wzdłuż rozpatrywanej prostej. Przy wyprowadzaniu równań dla pierwszej z tych prostych podamy wszystkie etapy obliczenia. Dla dalszych prostych podamy tylko ostateczną postać równań.

Krawędzie K_1 ($r = 1$); zmienna odchyłka ustawienia kąta θ_1 .

Równania (6) przyjmują następującą postać

$$\omega = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}} \varphi + \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}} \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_3 + \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_4 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_5} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_5} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_5 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_6} & \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_6} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_6 \end{array} \right\},$$

$$\psi = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}} \varphi + \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}} \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_3 + \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_4 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_5} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_5} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_5 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_6} & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_6} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \end{array} \right| \Delta\theta_6 \end{array} \right\}.$$

Po podstawieniu liczbowych wartości pochodnych podanych w tablicy (11b) i wykonaniu rachunków otrzymujemy równania prostej w postaci

$$(a) \quad \begin{aligned} \omega &= 0,9020 (\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 - \Delta\theta_5) + 0,3736 \Delta\theta_4, \\ \psi &= - 0,5015 (\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) + 0,6079 \Delta\theta_4 - 0,3120 \Delta\theta_5 + \Delta\theta_6. \end{aligned}$$

Są to proste równoległe do osi ψ . Ich skrajne położenia obliczone dla różnych ale nie wszystkich kombinacji dodatnich lub ujemnych skrajnych odchyłeń (tolerancji) $\Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_6$ są krawędziami wielościanu. Krawędzi należących do rodziny K_1 jest osiem. Można je na rys.7 zidentyfikować jako krawędzie utworzone przez przecięcia płaszczyzn $P(1 - n)$ z odpowiednimi płaszczyznymi $P(1 - m)$, gdzie $n = 2, 4, 5, 6$, $m = 2, 4, 5, 6$, przy czym $n = m$. Nie wszystkie z takich możliwych przecięć płaszczyzn są krawędziami wielościanu. Z rys.7 wynika, że np. płaszczyzny $P(1 - 2)$ i $P(1 - 4)$ przecinają się na zewnątrz wielościanu. Podobnie jest z niektórymi innymi przecięciami. Wynika stąd, że podstawiając do równań (a) różne dowolne kombinacje skrajnych odchyłeń $\Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_6$ otrzymujemy dla niektórych z tych kombinacji równania prostych nie będących krawędziami wielościanu. Sprawia to, że stosując wyłącznie metodę wyznaczania równań krawędzi bardzo trudno jest określić wielościan tolerancyjny w przypadku manipulatora o złożonej budowie.

Pozostałe krawędzie mają niżej podane równania.

Krawędzie K_2 ($r = 2$); zmienna odchyłka ustawienia kąta θ_2

$$(b) \quad \begin{aligned} \omega &= 3,0681\psi - 3,0681 \Delta\theta_1 - 1,2078 \Delta\theta_4 - 2,4747 \Delta\theta_5, \\ \psi &= - 1,7058\psi + 1,7058 \Delta\theta_1 + 1,4870 \Delta\theta_4 + 0,5625 \Delta\theta_5 + \Delta\theta_6. \end{aligned}$$

Te same równania otrzymuje się przyjmując, że zmienna jest $\Delta\theta_3$; wynika to z identyczności pochodnych względem kątów θ_2 i θ_3 [por. tablica (11b)].

Krawędzie K_4 ($r = 4$); zmienna odchyłka kąta θ_4

$$(c) \quad \begin{aligned} \omega &= 0,7249\psi - 0,7249 \Delta\theta_1 + 0,6889(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) - 1,2736 \Delta\theta_5, \\ \psi &= 1,1795\psi - 1,1795 \Delta\theta_1 - 0,8483(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) - 0,9166 \Delta\theta_5 + \Delta\theta_6. \end{aligned}$$

Krawędzie K_5 ($r = 5$); zmienna odchyłka kąta θ_5

$$(d) \quad \begin{aligned} \omega &= 1,7597 \psi + 1,7597 \Delta \theta_1 + 1,4194(\Delta \theta_2 + \Delta \theta_3) + 1,2805 \Delta \theta_4, \\ \psi &= -0,6087 \psi + 0,6087 \Delta \theta_1 - 0,3226(\Delta \theta_2 + \Delta \theta_3 + \\ &\quad + 0,9216 \Delta \theta_4 + \Delta \theta_6. \end{aligned}$$

Krawędzie K_6 ($r = 6$); zmienna odchyłka kąta θ_6

W tym przypadku nie można stosować równań (6), ponieważ $\partial \Phi / \partial \theta_6 = 0$. Równania krawędzi K_6 można wyznaczyć bezpośrednio z równań (3). Zmienna wielkość $\Delta \theta_6$ występuje tylko w wyrażeniu określającym ψ . Stąd równania krawędzi K_6 otrzymujemy bezpośrednio z wyrażen określających ψ i ω .

Przyjmują one następującą postać

$$(e) \quad \begin{aligned} \psi &= 0,2940(\Delta \theta_2 + \Delta \theta_3) + 0,5154 \Delta \theta_4 + 0,5126 \Delta \theta_5, \\ \omega &= 0,9020(\Delta \theta_2 + \Delta \theta_3 - \Delta \theta_5) + 0,3736 \Delta \theta_4. \end{aligned}$$

Są to równania rodziny prostych równoległych do osi ψ . Te z tych położen prostych, które tworzą krawędzie wielościanu, można łatwo zidentyfikować na rys.7.

Przykład 2.

Wyznamy wielościan tolerancyjny dokładności orientacji dla tego samego manipulatora co w przykładzie 1 (to jest dla manipulatora o schemacie pokazanym na rys.1), ale dla pozycji określonej kątami ustawienia par kinematycznych o następujących wielkościach

$$\theta_1 = 0^\circ, \quad \theta_2 = \theta_3 = \theta_5 = 30^\circ, \quad \theta_4 = 0^\circ, \quad \theta_6 = 0^\circ.$$

Pozycja ta różni się od rozpatrywanej w przykładzie 1 tylko wielkością kąta θ_4 .

Jak w tamtym przykładzie przyjmujemy, że

$$\Delta \theta_1 = \Delta \theta_2 = \Delta \theta_3 = \Delta \theta_4 = \Delta \theta_5 = \Delta \theta_6 = \pm \Delta \theta.$$

Wartości liczbowe pochodnych cząstkowych obliczone dla
wyżej podanych wielkości kątów zestawiono w poniższej tabelicy

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6
$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}$	1	0	0	0,577	0	0
$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_1}$	0	1	1	0	-1	0
$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1}$	0	0	0	0	0	1

Podstawiając te wielkości do równań (3) otrzymujemy

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_4} \Delta \theta_4 = \Delta \theta_1 + 0,577 \Delta \theta_4 ,$$

$$\omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_5} \Delta \theta_5 = \Delta \theta_2 + \Delta \theta_3 - \Delta \theta_5 ,$$

$$\psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_6} \Delta \theta_6 = \Delta \theta_6 .$$

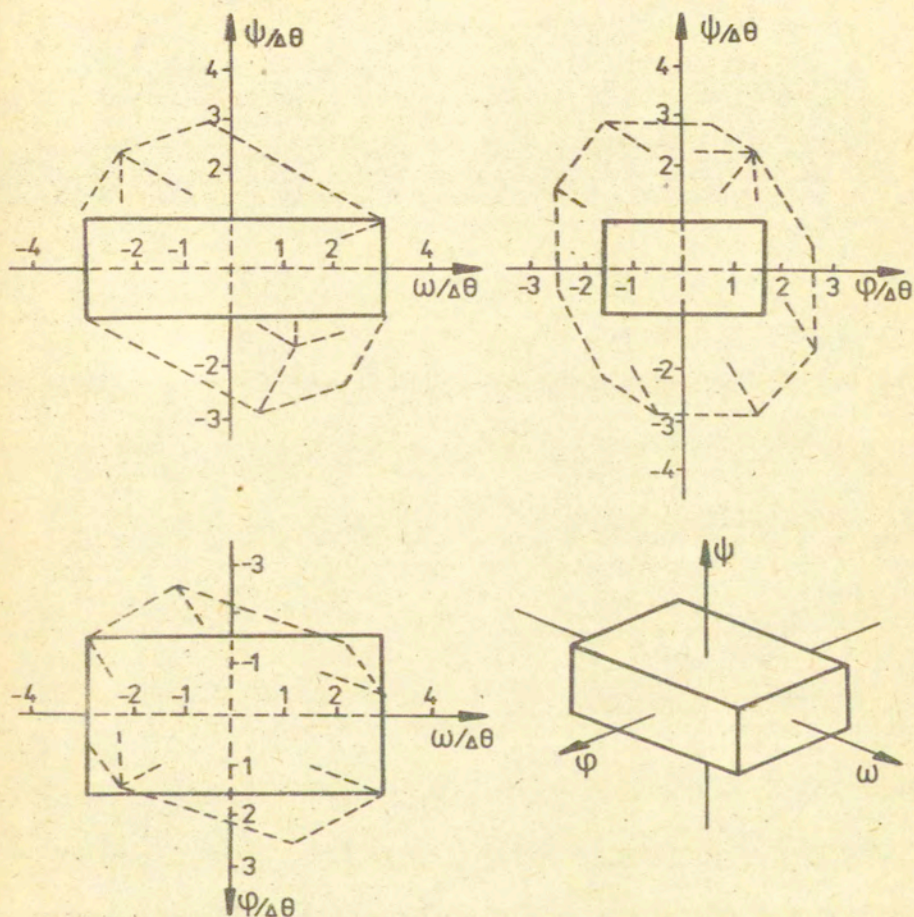
Są to równania płaszczyzn równoległych do odpowiednich płaszczyzn współrzędnych. Ich skrajne położenia znajdujemy podstawiając odpowiednio największe (+ $\Delta\theta$), lub najmniejsze (- $\Delta\theta$) dopuszczalne odchylenia (tolerancje) ustawienia kątów $\theta_1, \dots, \theta_6$, tak aby otrzymać największe bezwzględne odległości tych płaszczyzn od początku układu. Te skrajne położenia płaszczyzn są określone wyrażeniami

Płaszczyzny P - 1 $\varphi = \pm 1,577 \Delta \theta ,$

Płaszczyzny P - 2 $\omega = \pm 3 \Delta \theta ,$

Płaszczyzny P - 3 $\psi = \pm \Delta \theta .$

Ograniczają one w przestrzeni φ, ω, ψ prostopadłościan pokazany na rys.8. Dla porównania liniami przerywanymi

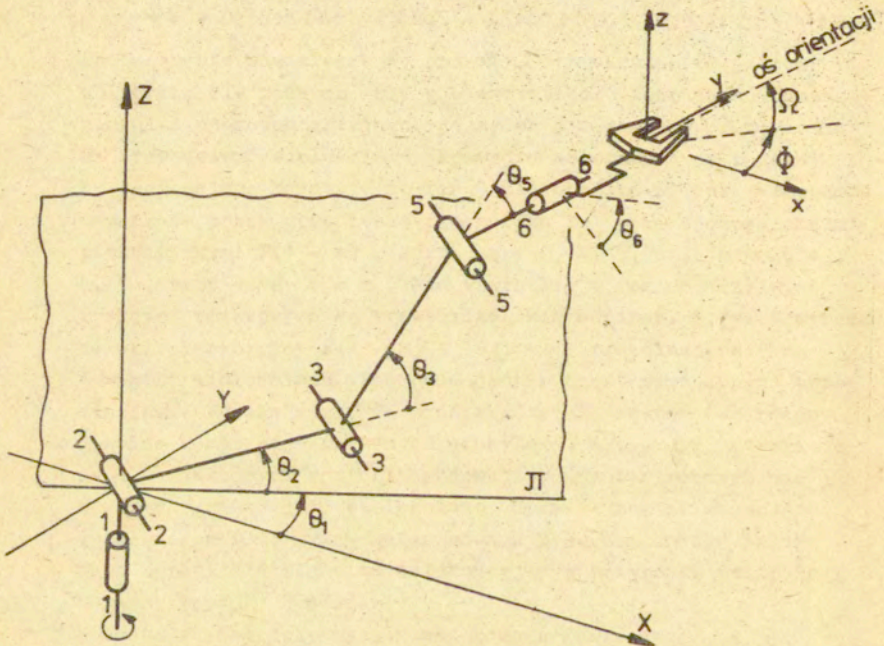


Rys.8

wskazano kontury wielościanu wyznaczonego w przykładzie 1 dla innej pozycji tego manipulatora. Widoczne jest jak silnie zależy możliwy błąd ustawienia każdego z kątów orientacji Φ , Ω , Ψ od pozycji manipulatora.

Przykład 3.

Wyznamy wielościan tolerancyjny dokładności orientacji dla manipulatora o schemacie pokazanym na rys.9. Różni



Rys.9.

się on od poprzednio rozpatrywanego manipulatora o schemacie przedstawionym na rys.1 brakiem pary kinematycznej o osi obrotu 4 - 4. Kąty orientacji chwytaka zależą teraz w prosty sposób od kątów ustawienia poszczególnych par kinematycznych. Mamy teraz zależności

$$\Phi = \theta_1, \quad \Omega = \theta_2 + \theta_3 - \theta_5, \quad \Psi = -\theta_6.$$

Znak minus po prawej stronie równości dla Ψ przyjęto ponieważ na rys.9 kąt θ_6 odmierza się w przeciwnym kierunku niż na rys.1.

Ogólnie zapisane wyrażenia (3) uzależniające błędy kątów orientacji od błędów ustawienia par kinematycznych mają teraz elementarną postać

$$\psi = \Delta\theta_1 ,$$

$$\omega = \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 - \Delta\theta_5 ,$$

$$\chi = -\Delta\theta_6 .$$

Są to podobnie jak w przykładzie 2 równania płaszczyzn równoległych do odpowiednich płaszczyzn współrzędnych. Ich skrajne położenia są określone wyrażeniami

$$\text{Płaszczyzny P - 1} \quad \psi = \pm \Delta\theta ,$$

$$\text{Płaszczyzny P - 2} \quad \omega = \pm \Delta\theta ,$$

$$\text{Płaszczyzny P - 3} \quad \chi = \pm \Delta\theta ,$$

jeżeli przyjmiemy jak poprzednio, że

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = \Delta\theta_3 = \Delta\theta_5 = \Delta\theta_6 = \pm \Delta\theta .$$

Wielościan tolerancyjny ma więc postać prostopadłościannu podobnie jak w przykładzie 2, ale jego krawędzie równoległe do osi ψ są teraz krótsze. W przeciwieństwie do rozpatrywanego w przykładach 1 i 2 manipulatora z rys.1 teraz wielościan tolerancyjny ma tę samą postać dla wszystkich pozycji manipulatora.

D O D A T E K

Wyrażenia na elementy macierzy funkcyjnej (11a) dla manipulatora o schemacie przedstawionym na rys. 1

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_3} = \frac{\sin \theta_5 \sin \theta_4}{(1 + A^2)B^2} \left[\sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) + \right. \\ \left. + \sin \theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos \theta_4) \right].$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_4} = \frac{1}{(1 + A^2)B^2} \left[B \sin \theta_5 \cos \theta_4 + \right. \\ \left. + \sin^2 \theta_5 \sin^2 \theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \right].$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_5} = \frac{1}{(1 + A^2)B^2} \left\{ B \cos \theta_5 \sin \theta_4 - \right. \\ \left. - \sin \theta_5 \sin \theta_4 \left[\sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos \theta_4) \right] \right\}.$$

gdzie

$$A = \frac{1}{B} \sin \theta_5 \sin \theta_4,$$

$$B = \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \sin \theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos \theta_4).$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_3} = \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} \left[\cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) - \right. \\ \left. - \sin \theta_5 \sin(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos \theta_4) \right].$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_4} = \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} \sin \theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_4.$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_5} = \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} \left[\cos \theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos \theta_4) - \right. \\ \left. - \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) \right].$$

gdzie

$$D = \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_5) + \sin \theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3)(1 - \cos \theta_4).$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_3} = - \frac{1}{\sqrt{1 - E^2}} \left\{ \sin \theta_4 \left[\cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} \right] - \cos \theta_4 \sin \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} \right\}.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_4} = - \frac{1}{\sqrt{1 - E^2}} \left[\cos \theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin \alpha + \right. \\ \left. + \sin \theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_4} \right].$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_5} = - \frac{1}{\sqrt{1 - E^2}} \left[\sin \theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_5} - \right. \\ \left. - \cos \theta_4 \sin \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_5} \right],$$

gdzie

$$E = \sin \theta_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin \alpha + \cos \theta_4 \cos \alpha,$$

$$\alpha = \arctg A.$$

Literatura

1. W. Szczepiński, Analiza pól tolerancji dokładności pozycjonowania i orientacji manipulatorów roboczych o ruchach płaskich, Prace IPPT nr.29/1988
2. W. Szczepiński, Analiza dokładności pozycjonowania manipulatorów robotów o ruchach przestrzennych, Prace IPPT nr.54/1988
3. W. Pogorzelski, Geometria analityczna, Czytelnik, Warszawa 1949

