PRAWO SZEREGÓW WROŃSKIEGO

JEGO FORONOMIA (*)

NAPISAŁ

P. ABEL TRANSON

Dowodzenie prawa szeregów dane przez Wrońskiego, w r. 1812, w trzeciéj Nocie załączonéj do Rozprawy nad *zbiciem teoryi funkcyi analitycznych*, jest, jak to już miałem sposobność powiedzieć (**), bardzo prostém; jednakże pierwsze dzieła autora będąc w zupełności wyczerpane, pożyteczném mi się zdaje podać tu to dowodzenie, przejść następnie do zastosowania prawa szeregów do rozwinięcia jakiejkolwiek funkcyi podług działów (*les facultés*) i podług potęg (*les puissances*) zmiennéj niezależnéj, wysłowić twierdzenie którego dowodzenie wymaga osobnéj teoryi wyznaczników i które jest « zasadą fundamentalną wywodu algorytmicznego *prawa najwyższego* » i w końcu, okazać że Wroński wiele wpierwéj od myśli *Cynematyki*, podanéj przez P. Ampère'a, dowiódł potrzeby tejże saméj nauki którą nazwał *Foronomią*, to jest nauki zajmującéj się badaniem praw ruchu, niezważając na siły które go wywołują.

I. — Autor dowiódł w swej *Filozofii Matematyki*, ogłoszonéj w r. 1811, że kształt ogólny szeregów jest następującym :

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi(x)^{1/\xi} + A_2\varphi(x)^{2/\xi} + A_3\varphi(x)^{3/\xi} + \dots,$$

w którym symbol $\varphi(x)^{m/\xi}$ przedstawia iloczyn mający m wyrazów, to jest:

$$\varphi(x)^{m/\xi} = \varphi(x)\,\varphi(x+\xi)\,\varphi(x+2\xi)\dots\varphi[x+(m-1)\xi].$$

Szło więc tylko w dodatku ogłoszonym w r. 1812 o danie wzoru spółczynnika ogólnego A_μ. Tu przytoczę dosłownie wyrazy autora.

. . . .

« W tym celu, przypomnijmy że różnica ubywająca jakiejkolwiek funkcyi $f(x)$ jest przewyżką téj

(*) *Foronomia*, nauka ruchu.

(**) *Nowe Roczniki*, drugi szereg, t. XIII, str 161.

funkcyi nad tę, która ją poprzedza w rzędzie przyrostka ξ zmiennéj, to jest :

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-\xi).$$

« Wyrażenie jakiegokolwiek rzędu tych różnic, zawsze w rzędzie ubywającym, jest

$$\Delta^\mu f(x) = f(x) - \frac{\mu}{1} f(x-\xi) + \frac{\mu.\mu-1}{1.2} f(x-2\xi) - \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3} f(x-3\xi) + \ldots ;$$

stosując ten wzór do jakiejkolwiek funkcyi kształtu

$$f(x) = \varphi(x)^{\omega/\xi},$$

wypada

$$(1) \qquad \Delta^\mu \varphi(x)^{\omega/\xi} = \varphi(x)^{\omega/\xi} - \frac{\mu}{1}\varphi(x-\xi)^{\omega/\xi} + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}\varphi(x-2\xi)^{\omega/\xi} \ldots + (-1)^\mu \varphi(x-\mu\xi)^{\omega/\xi}.$$

« Wreszcie, ponieważ jest w ogóle

$$\varphi(x-\lambda\xi)^{\omega/\xi} = \varphi(x-\lambda\xi)\,\varphi(x-\lambda\xi+\xi)\,\varphi(x-\lambda\xi+2\xi)\ldots\varphi[x-\lambda\xi+(\omega-1)\xi],$$

λ będąc jakąkolwiek liczbą ; czynnik $\varphi(x)$ znajdzie się zawartym w dziale $\varphi(x-\lambda\xi)^{\omega/\xi}$ kiedy ω będzie większém od λ, i kiedy wreszcie ω i λ będą liczbami całkowitemi, jak to przypuścimy tutaj. Więc tenże sam czynnik $\varphi(x)$ będzie zawartym we wszystkich wyrazach wyrażenia (1) różnicy $\Delta^\mu\varphi(x)^{\omega/\xi}$, kiedy ω będzie większém od μ; a przeto, podstawiając za x wartość która sprowadza do zera czynnik $\varphi(x)$, otrzyma się w przypadku o którym mowa, wartość

$$(2) \qquad \Delta^\mu\varphi(x)^{\omega/\xi} = 0.$$

« Otóż kształt ogólny szeregów jest

$$(3) \qquad F(x) = A_0 + A_1\varphi(x)^{1/\xi} + A_2\varphi(x)^{2/\xi} + A_3\varphi(x)^{3/\xi} + \ldots,$$

« Biorąc więc z obu stron tego wyrażenia (3) różnice rzędów ubywających 1, 2, 3, 4,..., i podstawiając następnie za x wartość która sprowadza do zera czynnik $\varphi(x)$, otrzymamy na mocy równania (2), ciąg równań

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta F(x) = A_1\Delta\varphi(x) \\ \Delta^2 F(x) = A_1\Delta^2\varphi(x) + A_2\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi} \\ \Delta^3 F(x) = A_1\Delta^3\varphi(x) + A_2\Delta^3\varphi(x)^{2/\xi} + A_3\Delta^3\varphi(x)^{3/\xi} \\ \Delta^4 F(x) = A_1\Delta^4\varphi(x) + A_2\Delta^4\varphi(x)^{2/\xi} + A_3\Delta^4\varphi(x)^{3/\xi} + A_4\Delta^4\varphi(x)^{4/\xi} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

« Pierwsze z tych równań daje bezpośrednio

$$A_1 = \frac{\Delta F(x)}{\Delta\varphi(x)}.$$

« Powtóre, ponieważ na mocy równania (2) jest $\Delta\varphi(x)^{2/\xi} = 0$, dwa pierwsze z poprzedzających równań (4) są tożsamościowe z równaniami :

$$\Delta F(x) = A_1\Delta\varphi(x) + A_2\Delta\varphi(x)^{2/\xi},$$

$$\Delta^2 F(x) = A_1\Delta^2\varphi(x) + A_2\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi},$$

które dają odrazu (*)

$$A_2 = \frac{[\Delta^1\varphi(x)\Delta^2 F(x)]}{(\Delta^1\varphi(x)\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi})}.$$

« Po trzecie, uważając że na mocy wartości ogólnéj (2), wypada

$$\Delta\varphi(x)^{2/\xi}=0,\quad \Delta\varphi(x)^{3/\xi}=0,\quad \Delta^2\varphi(x)^{3/\xi}=0,$$

więc trzy pierwsze z równań (4) są tożsamościowe z równaniami :

$$\Delta F(x) = A_1\Delta\varphi(x) + A_2\Delta\varphi(x)^{2/\xi} + A_3\Delta\varphi(x)^{3/\xi},$$

$$\Delta^2 F(x) = A_1\Delta^2\varphi(x) + A_2\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi} + A_3\Delta^2\varphi(x)^{3/\xi},$$

$$\Delta^3 F(x) = A_1\Delta^3\varphi(x) + A_2\Delta^3\varphi(x)^{2/\xi} + A_3\Delta^3\varphi(x)^{3/\xi},$$

które dają także natychmiast

$$A_3 = \frac{(\Delta^1\varphi(x)\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi}\Delta^3 F(x))}{(\Delta^1\varphi(x)\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi}\Delta^3\varphi(x)^{3/\xi})}$$

« Postępując w ten sam sposób, znajdziemy, nie przez indukcyę, lecz przez samą zasadę tworzenia się tych ilości, że w ogólności

$$A_\mu = \frac{(\Delta^1\varphi(x)\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi}\Delta^3\varphi(x)^{3/\xi}\ldots\Delta^{\mu-1}\varphi(x)^{\mu-1/\xi}\Delta^\mu F(x))}{(\Delta^1\varphi(x)\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi}\Delta^3\varphi(x)^{3/\xi}\ldots\Delta^{\mu-1}\varphi(x)^{\mu-1/\xi}\Delta^\mu\varphi(x)^{\mu/\xi})}$$

μ będąc skaźnikiem jakimkolwiek.

« Nadto, mając wzgląd na wartość x w tém wyrażeniu spółczynnika ogólnego dla A_μ a przeto na wartość (2), zobaczymy że summa kombinacyjna (*wyznacznik*) tworząca mianownik w wyrażeniu A_μ który tylko cośmy oznaczyli, sprowadza się do swego pierwszego wyrazu, to jest że mamy

$$(\Delta^1\varphi(x)\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi}\Delta^3\varphi(x)^{3/\xi}\ldots\Delta^{\mu-1}\varphi(x)^{\mu-1/\xi}\Delta^\mu\varphi(x)^{\mu/\xi}) = \Delta^1\varphi(x)\Delta^2\varphi(x)^{2/\xi}\Delta^3\varphi(x)^{3/\xi}\ldots\Delta^{\mu-1}\varphi(x)^{\mu-1/\xi}\Delta^\mu\varphi(x)^{\mu/\xi},$$

« I to jest właśnie wyrażenie algorytmiczne *prawa ogólnego szeregów.* »

Nim się zajmiemy zastosowaniem powyżéj wskazaném, zwracam uwagę czytelnika na ostrzeżenie, które autor przytacza zaraz po poprzedzającém dowodzeniu :

«... Winniśmy uprzedzić, że w systemie Filozofii Matematyki, to dowodzenie, pomimo całéj swéj ścisłości i prostoty, nie jest jeszcze dostateczném. Prawo o którém mowa, i które jest *prawem ogólném szeregów*, jest tylko *przypadkiem szczególnym* prawa algorytmicznego bezwzględnego, które ma kształt następujący :

$$F(x) = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 + \ldots;$$

ilości Ω_0, Ω_1, Ω_2,,.. będąc jakiemikolwiek funkcyami zmiennéj, związanemi lub nie przez jakiekolwiek prawo;... potrzeba więc, aby dowieść prawa o którém mowa, wyprowadzić je bezpośrednio

(*) Iloczyny między nawiasami, w liczniku i w mianowniku dla A_2, i daléj w licznikach i mianownikach dla A_3, A_4, ..., A_μ, są wyrazami głównemi *wyznaczników*, które dają wartości tych spółczynników. Autor daje tym spółczynnikom nazwisko funkcyj *schinn*, wedle litery hebrajskiéj którą on im przyznaje za cechę. Ja zaś stosuję się do znakowania obecnie przyjętego ; lecz sprawdzam mimochodem że Wroński prześcignął geometrów współczesnych używając od chwili swego pierwszego ogłoszenia (1810-1811) tych funkcyj, które się stały od tego czasu tak wytworzoném narzędziem w całéj Algorytmii.

jako przypadek szczególny z prawa bezwzględnego które dopierośmy wskazali. Ten to właśnie wywód da dowodzenie filozoficzne *prawa ogólnego szeregów* o którém mówimy. »

Autor, który w pierwszej sekcyi *Filozofii Techni* dał już w r. 1815 dowodzenie *prawa najwyższego*, wyprowadził zeń rzeczywiście, w drugiéj sekcyi tegoż samego dzieła (1816-1817 r.). *Prawo szeregów* jako przypadek szczególny.

II.— Jeżeli czynnik $\varphi(x)$ jest jakimkolwiek, przypadek $\Delta\varphi(x)^{\omega/\xi}=0$ zawsze jak $\omega>\mu$, jest powodem że w wyznaczniku znajdującym się w liczniku ilości A_μ, wszystkie wyrazy leżące nad przekątnią służącą do utworzenia wyrazu głównego, są zerami, z wyjątkiem wyrazów ostatniéj kolumny, które są następującemi po sobie różnicami funkcyi $F(x)$, mianowicie ;

$$\Delta F(x),\quad \Delta^2 F(x),\ldots \Delta^{\mu-1} F(x),\quad \Delta^\mu F(x).$$

Nadto, jeśli czynnik $\varphi(x)=x$, wszystkie wyrazy tej przekątni są stałemi, wyjąwszy ostatniego, który jest równym $\Delta^\mu F(x)$. Albowiem mamy

$$\Delta(x)=1.\xi;\ \Delta^2 x^{2/\xi}=1.2.\xi^2;\ \Delta^3 x^{3/\xi}=1.2.3.\xi^3;\ldots,$$

a ponieważ wyrazy, które od nich są niższe w każdéj kolumnie są różnicami po sobie następującemi tych wyrazów stałych, zatém te wyrazy niższe są wszystkie zerami; tak więc, jeśli czynnik $\varphi(x)=x$, wyznacznik który jest w liczniku ilości A_μ sprowadza się do swego wyrazu głównego. W liczniku więc i w mianowniku są dwa iloczyny z równéj liczby czynników, które się różnią tylko ostatnim czynnikiem każdego z nich. Wypada więc ztąd że

$$A_\mu=\frac{\Delta^\mu F(0)}{1.2.3\ldots\mu\xi^\mu}.$$

Należy położyć $\Delta^\mu F(0)$, ponieważ w przypadku ogólnym winno się podstawić za x w A_μ wartość szczególną na x która czyni $\varphi(x)=0$, otóż tutaj ta wartość jest $x=0$.

Ostatecznie, wypada na rozwinięcie funkcyi $F(x)$, podług działów po sobie następujących na x :

$$F(x)=F(0)+\frac{\Delta F(0)}{\xi}.x^{1/\xi}+\frac{\Delta^2 F(0)}{\xi^2}.\frac{x^{2/\xi}}{1.2}+\frac{\Delta^3 F(0)}{\xi^3}.\frac{x^{3/\xi}}{1.2.3}+\ldots.$$

Przypuśćmy obecnie iż ξ jest nieskończenie małém i równém dx; różnice skończone przedstawione przez Δ stają się różniczkami, i rozwinięcie, podług potęg po sobie następujących zmiennéj, jest :

$$F(x)=F(0)+\left(\frac{dF(0)}{dx}\right)x+\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2}+\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1.2.3}\cdots$$

Rozwinięcie to jest rozwinięciem Maclaurin'a, które zastosowane do funkcyi $F(x)=f(x+h)$, daje rozwinięcie Taylor'a zmieniwszy w tém ostatniém h na x.

W teraźniejszym sposobie wykładania, rozwinięcie Taylor'a wprowadza się do nauki, próbując rozciągnąć pewną własność funkcyj algebraicznych całkowitych do jakiejkolwiek funkcyi algorytmicznéj; w ten sposób postępując dotykamy kwestyi z najniższego punktu widzenia; tymczasem wyprowadzając rozwinięcie to z prawa szeregów, dochodzimy do tegoż samego, lecz drogą wspanialszą i więcéj uczoną, która, tak mi się przynajmniéj zdaje, dobitniéj pozwala uczuć i ważność otrzymanego wypadku i miejsce jakie on winien zająć w nauce. Wreszcie, zatrzymując rozwinięcie jakiekolwiek na którymkolwiek wyrazie, zawsze można sobie wystawić istnienie wyrazu dopełniającego a zatém, widoczną jest rzeczą, że przyjmując ostatni sposób wyprowadzania, nic nie może stanąć na przeszkodzie do oznaczenia *kształtu reszty* sposobem zwyczajnie używanym.

III. — Czemuż tedy należy przypisać, że wypadki otrzymane przez Wrońskiego pozostawały w tak długiém zapomnieniu?

Nikt bez wątpienia nie uwierzy, żeby tak mało uzasadnione wnioski sprawozdania komisyi z r. 1811 mogły były zachwiać chociaż na chwilę w umysłach geometrów tyle imponujące świadectwo Lagrange'a, który w r. 1810 ogłasza że «*autor* (prawa najwyższego) *wyprowadza ze swego wzoru wszystkie znane wzory rozwinięcia funkcyj i że one są tylko przypadkami szczególnemi jego wzoru.*»

Nie zatrzymując się bynajmniéj nad szukaniem powodów tego dziwnego wypadku, który przyjąć jesteśmy zmuszeni : że uczeni w ogóle nie wiedzieli o pracach Wrońskiego; postaram się usunąć ostatnią trudność po za którą kryjąc się, niektórzy mogliby dziś jeszcze odmówić rozbioru tych prac.

Wroński przedstawiając swe *prawo szeregów* i jeszcze ogólniejsze prawo, które nazwał *prawem najwyższém*, tudzież prawo znane pod nazwą *zagadnienie powszechne* dla którego ostatniemi czasy P. Cayley uprościł dowodzenie, przedstawiając nadto liczne zastosowania tych praw, nie zajmuje się bynajmniéj rozpoznaniem czy rozwinięcia które wyprowadza są zbieżne, rozbieżne lub nieoznaczone. Czyni on to nie dla tego żeby nie przyznawał konieczności zbieżności rozwinięć kiedy idzie o oznaczenie liczebne wartości funkcyj, owszem; lecz jest on przekonany że szeregi, które zwie *foremnemi*, wyrażając przez ogół nieskończony swych wyrazów, ścisły związek pomiędzy funkcyą rozwiniętą i funkcyą dowolną służącą za miarę algorytmiczną pierwszéj, są przez to samo doskonale określone i to zupełnie niezależnie od téj przypadkowéj okoliczności, zbieżności lub rozbieżności. W drugiéj części swéj *Filozofii Technii* Wroński zajmuje się tą kwestyą bardzo obszernie. Tymczasem geometrzy, przyznając szeregom tylko możność dania przybliżonéj wartości funkcyj, mniemają mieć prawo odrzucania wszelkich innych szeregów prócz szeregów zbieżnych. W saméj rzeczy, pięknie by wyszedł ten, ktoby dzisiaj przedstawił jakiś szereg, chociażby najwięcéj elegancki, nie podając natychmiast roztrząśnienia jego zbieżności.

Nie przyjmując bynajmniéj udziału w kwestyi o któréj mowa, ograniczę się tylko na skromnéj uwadze następującéj :

Odrzucić jakiekolwiek rozwinięcie dla tego że autor nie podał warunków jego zbieżności, jest tém samém, jak żeby jakiś geometra wzgardził był szeregami Taylor'a, Maclaurin'a, Bourmann'a, i Lagrange'a, aż do chwili, bardzo niedawnéj, w któréj poznano z dokładnością warunki ich zbieżności. Bezwątpienia! jestto zupełnie toż samo. Zapomnienie się do tego stopnia jest nie do pojęcia!

IV. — Kiedy Wroński w r. 1810 przedstawił akademii umiejętności swe *prawo najwyższe*, teorya wyznaczników była jeszcze bardzo mało znaną. Późniéj dopiero poszukiwania Binet'a i Cauchy'ego rozwinęły i uogólniły wypadki poprzednio otrzymane (*Dziennik Szkoły Politechnicznéj*, 1813 i 1815 r.); lecz nawet w tych ostatnich epokach i długo jeszcze potém, funkcye te były uważane przez geometrów jako utworzone jedynie z ilości stałych.

Tymczasem już w roku 1810, Wroński uczynił dowodzenie *prawa najwyższego* zależném od zupełnie różnéj teoryi tychże samych funkcyj uważając je nie jako funkcye złożone z ilości stałych, lecz przeciwnie jako funkcye złożone z ilości zmiennych połączonych z sobą za pomocą pewnych związków. Z całéj téj teoryi, o któréj mowa, zrobił Wroński jedno twierdzenie którego podanie tutaj uważam sobie za powinność 1° z téj przyczyny że ono prowodząc do *prawa najwyższego* jest bardzo ważném, i 2° : że dowodzenie jego nie przedstawi zapewne czytelnikowi, w skutek ogromnego postępu teoryi wyznaczników w ostatnich czasach, rzeczywistych trudności.

TWIERDZENIE. — Niech będą $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_\omega$ funkcye jednéj zmiennéj x, i niech będzie Δ cecha różnic wziętych dowolnie względem jakiegokolwiek przyrostka zmiennéj x podług prawa postępującego albo prawa ubywającego. Jeżeli z tych funkcyj utworzymy raz ilości

$$X_1 = \left(\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_1\right),$$

$$X_2 = \left(\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_2\right),$$

$$X_3 = \left(\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_3\right),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$X_\omega = \left(\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_\omega\right) (*),$$

a drugi raz, ilości

$$T_1 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + i\Delta^{\delta_1} Y_0,$$

$$T_2 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + 2i\Delta^{\delta_1} Y_0 + i^2\Delta^{\delta_2} Y_0,$$

$$T_3 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + 3i\Delta^{\delta_1} Y_0 + 3i^2\Delta^{\delta_2} Y_0 + i^3\Delta^{\delta_3} Y_0;$$

i ogólnie, dla jakiegokolwiek skaźnika ρ,

$$T_\rho = \Delta^{\delta_0} Y_0 + \frac{\rho}{1} i\Delta^{\delta_1} Y_0 + \frac{\rho(\rho-1)}{1.2} i^2\Delta^{\delta_2} Y_0 + \frac{\rho(\rho-1)(\rho-2)}{1.2.3} i^3\Delta^{\delta_3} Y_0 + \ldots,$$

zakładając $i = +1$, kiedy różnice Δ są brane w kierunku postępującym, $i = -1$ kiedy te różnice są brane w kierunku ubywającym, otrzyma się związek równości podany poniżéj, który stanowi twierdzenie o którém mowa :

$$\left(\Delta^0 X_1 \Delta' X_2 \Delta^2 X_3 \ldots \Delta^{\omega-1} X_\omega\right) = (T_1 T_2 T_3 \ldots T_{n-1}) \left(\Delta^{\delta_0} Y_{\delta_1} \Delta^{\delta_1} Y_1 \Delta^{\delta_2} Y_2 \ldots \Delta^{\delta_{10}} Y_{10}\right),$$

w którém skaźnikom różnic funkcyj Y nadaje się wartości następujące

$$\delta_0 = \delta, \quad \delta_1 = 1 + \delta, \quad \delta_2 = 2 + \delta, \ldots, \quad \delta_\omega = \omega + \delta,$$

δ będąc jakąkolwiek liczbą całkowitą, tak jak ω (*Filozofia Technii*, sekcya I^{sza}, str. 193).

W równości powyższéj, dwa iloczyny w nawiasach przedstawiają jeszcze, na pierwszéj stronie wyraz główny wyznacznika o ω^2 elementach, a na drugiéj wyraz główny wyznacznika o $(\omega + 1)^2$ elementach. Rozumie się samo przez się : że $\Delta^0 X_1 = X_1$ i $\Delta^0 Y_0 = Y_0$. Wreszcie, aby dobrze wyjaśnić kierunek twierdzenia, zrobię sprawdzenie w przypadku jak można najprostszym to jest w przypadku kiedy $\delta = 0$ i kiedy $\omega = 2$ (**).

Równość dana sprowadza się wówczas do

$$[\Delta^0 X_1 \Delta^1 X_2] = T_1 [\Delta^0 Y_0 \Delta^1 Y_1 \Delta^2 Y_2].$$

(*) Każdy iloczyn w nawiasie przedstawia wyraz główny wyznacznika o czterech elementach, tak np., że

$$X_n = \Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_n - \Delta^{\delta_0} Y_n \Delta^{\delta_1} Y_0$$

(**) Według skaźnika najwyższego funkcyi T, widzimy że najmniejsza wartość którą może przybrać skaźnik ω, jest równą 2.

Przypuszczając że różnice są brane w kierunku postępującym, funkcya $T_1 = Y_0 + \Delta Y_0$ jest jednoznaczną z funkcyą Y, i druga strona powyższéj równości jest równą

$$+ Y_1 Y_0 (\Delta Y_1 \Delta^2 Y_2 - \Delta Y_2 \Delta^2 Y_1),$$
$$- Y_1 \Delta Y_0 (Y_1 \Delta^2 Y_2 - Y_2 \Delta^2 Y_1),$$
$$+ Y_1 \Delta^2 Y_0 (Y_1 \Delta Y_2 - Y_2 \Delta Y_1).$$

Otóż, mając wzgląd na wartości następujące :

$$\Delta X_1 = Y_0 \Delta^2 Y_1 - Y_1 \Delta^2 Y_0 + \Delta Y_0 \Delta^2 Y_1 - \Delta Y_1 \Delta^2 Y_0,$$
$$\Delta X_2 = Y_0 \Delta^2 Y_2 - Y_2 \Delta^2 Y_0 + \Delta Y_0 \Delta^2 Y_2 - \Delta Y_2 \Delta^2 Y_0,$$

zobaczymy z łatwością że pierwsza strona, to jest :

$$X_1 \Delta X_2 - X_2 \Delta X_1,$$

jest zupełnie taż sama co druga.

V. — P. Ampère w swéj *Próbie nad filozofią nauk*, czyli *Wytłomaczeniu klassyfikacyi wiadomości ludzkich*, ogłoszonéj w r. 1834, wyprowadził na jaw wszystkie korzyści nauki, zajmującéj się własnościami geometrycznemi ruchu, nie zważając na siły które go tworzą i na masy które nim są ożywione. Dał on jéj nazwisko *Cynematyki* (z greckiego κινημα, ruch) i ten szczęśliwy pomysł, przyjęty przez wszystkich uczonych, był następnie rozwinięty przez generała Poncelet'a i przez wielu innych geometrów jego szkoły. Cynematyka jest więc dzisiaj nauką w zupełności ustaloną i honor stworzenia jéj spada na Ampère'a, albowiem pewném jest, że prace Wrońskiego zostały niedostrzeżone przez uczonych.

Jakkolwiekbądź, jeżeli przyznamy, że własność jakiegoś wynalazku należy się temu, który go pierwszy ogłosił, winniśmy w takim razie dopomnieć się na korzyść Wrońskiego o pierwszeństwo w wynalezieniu nauki ruchu bez względu na siły.

Rzeczywiście, w r. 1818, t.j. szesnaście lat przed pojawieniem się *Próby nad filozofią nauk* p. Ampère'a Wroński wydał w pierwszym numerze *Sfinxa* (*), tablicę ogólną nauk pod tytułem : *System architektoniczny bezwzględny Encyklopedyi wiedzy ludzkiéj*; w téj tablicy znajduje się umieszczoną pod nazwiskiem *Foronomii*, nauka ruchu, z tém ostrzeżeniem; *nie mięszać jéj z Mechaniką do któréj oprócz ruchu wchodzi uważanie sił.*

Pierwszeństwo więc téj myśli należy się koniecznie Wrońskiemu. Następnie ciekawą jest rzeczą zobaczyć, zapatrując się z punktu widzenia filozoficznego, które miejsce przeznacza Ampère dla Cynematyki w swéj *Klasyfikacyi naturalnéj nauk* i porównać to położenie z położeniem przeznaczoném Foronomii w *Systemie architektonicznym wiedzy ludziéj*.

Ampère, po zaliczeniu Mechaniki do nauk pierwszego rzędu, rozdziela ją w sposób następujący

Mechanika	*elementarna* :	Cynematyka, Statyka;
	przestępna :	Dynamika, Mechanika cząsteczkowa.

(*) *Sfinx*, wydawnictwo peryodyczne którego wyszły tylko dwa numera, ich ogłoszenie było poprzedzone *Przedmową* do *Sfinxa*.

Nie tu miejsce tłomaczyć cztery punkta widzenia, według których autor rozdziela każdą naukę *pierwszego rzędu*, a szczególniéj Mechanikę na cztery nauki *trzeciego rzędu*. Jan Reynard poświęcił część swéj znakomitéj rozprawy nad *Encyklopedya*, dla wytknięcia ile znikome i niedostateczne są podstawy klasyfikacyi Ampère'a (*). Należy jednakże dziwić się że umysł tak rozsądny umieścił jako gałęź Mechaniki, tęż samą naukę, z któréj wyklucza siłę i masę, aby w niéj uważać tylko ruch. Bez wątpienia wykład Cynematyki powinien natychmiast poprzedzać wykład Mechaniki; lecz inne są wymagania wykładu, a inne potrzeby klasyfikacyi filozoficznéj.

We wszystkich dziełach Wrońskiego, Traktatach Matematyki, Filozofii, Religii, Polityki, Historyi, wszędzie się znajdują streszczenia dające rękojmię o zasadach nauki stałéj i prawdziwie ogólnéj i też same kształty klasyfikacyi. Te kształty odznaczają *System architektoniczny* ogłoszony drukiem w r. 1818. W tym systemacie uważam w szczególności odtwarzanie się stałe troistości wypadającéj z dwóch myśli różnorodnych, kóre się stawią jak *bieguny* i trzeciéj myśli z którą dwie pierwsze jednoczą się i *neutralizują*. Oto, na przykład, część *Systemu architektonicznego* odnosząca się do Matematyki :

Matematyka czysta :

a_1) Bieguny przeciwne ;

a_2) Spojenie przestrzeni; rozciągłość : *Geometrya*.

b_2) Następstwo czasu. — Liczba : *Algorytmia*.

b_1) Neutralizowanie czasu i przestrzeni.

Ruch : *Foronomia*.

(któréj nie należy mieszać z Mechaniką do któréj wchodzi nadto uważanie sił.)

Tak więc, według Wrońskiego, wartość Matematyki czystéj składa się z trzech wyrazów : Geometryi, Algorytmii, Foronomii. Co się tyczy *Mechaniki*, on ją umieszcza w *Naukach natury*; jest to gałęź *Fizyki*.

Post scriptum. — Poczytałbym się za szczęśliwego, gdybym mógł w przedmiocie czysto matematycznym, dać przynajmniéj przeczuć filozoficzną wartość Wrońskiego tém bazdziéj, że on sam oświadcza że o tyle tylko przywiązuje wartość do swych prac matematycznych, o ile one posłużyć mogą do ustalenia naukowego jego pojęć filozoficznych.

Podając publiczności polskiéj wierny przekład tych artykułów, czujemy się w obowiązku złożyć uczonemu ich autorowi wyrazy rzeczywistéj wdzięczności za tyle godną miłośnika nauki i prawdy obronę prac Wrońskiego. Mamy nadzieję że usiłowanie pana Transon nie pozostanie bez naśladowania, lecz owszem, powoła ono świat uczony do dalszego badania i ocenienia w zupełności matematycznych utworów Wrońskiego. (Przyp. tłomacza).

Paryż, dnia 4 maja 1876 roku.

(*) Patrz artykuł *Encyklopedya* w 41ym zeszycie (1843) *Encyklopedyi malowniczéj*.