WYRWICZ — POCZĄTKI GEOMETRYI

POCZĄTKI
GEOMETRYI
DLA SZKÓŁ POWIATOWYCH.

NA KLASSĘ DRUGĄ.

Z TRZEMA TABLICAMI FIGUR.

Cena z oprawą w papier srébrem kopiejek piętnaście.

W WILNIE
NAKŁADEM I DRUKIEM A. MARCINOWSKIEGO.
1825.

Wolno drukować pod warunkiem, ażeby przed zaczęciem przedaży, złożone były w Komitecie Cenzury exemplarze tey książki: jeden dla tegoż Komitetu, dwa dla Departamentu Ministeryum Oświecenia, dwa exemplarze dla Imperatorskiey *Publiczney Biblioteki, jeden dla* Imperatorskiey *Akademii nauk, i jeden dla* Imperatorskiego *Uniwersytetu w Abo. Wilno dnia* 21 *września* 1825 *roku.*

Cenzor Radzca Stanu Ignacy Reszka.

POCZĄTKI
GEOMETRYI.

XIĘGA DRUGA.

KOŁO I MIARA KĄTÓW.

OPISANIA.

I. Okrąg koła (circumferentia circuli), jestto linija krzywa, mająca wszystkie punkta, równie oddalone od punktu wewnątrz jey położonego, który nazywamy *środkiem* (centrum) (fig. 1).

Koło (circulus); jestto przestrzeń tą liniją krzywą zamknięta.

NB. W pospolitém mówieniu, koło częstokroć brać będziemy za jedno z okręgiem jego: lecz łatwo jest przywrócić ścisłość tym wyrazom, pamiętając, że koło jest powierzchnia, mająca długość i szerokość, a zaś okrąg jest tylko liniją.

II. Każda linija prosta CA, CE, CD, i t. d., ze środka do okręgu koła poprowadzona, nazywa się *promieniem* (radius), czyli *półśrednicą* (semi-diameter): wszelka zaś linija, jak AB, przechodząca przez środek i wpierająca się obudwóma końcami w okrąg koła, nazywa się *średnicą* (diameter).

Na mocy opisania koła, wszystkie promienie są równe sobie; oraz wszystkie średnice są równe sobie, i są dwa razy wziętym promieniem.

III. Nazywamy *łukiem* (arcus), jakąkolwiek część okręgu koła, jak FHG.

Cięciwa (chorda), czyli *podpora* łuku, jestto linija prosta FG, łącząca dwa końce jego.

IV. *Ucinek* (segmentum), jestto powierzchnia czyli część koła, zawarta między łukiem i cięciwą.

NB Jedney cięciwie FG, odpowiadają zawsze dwa łuki FHG, FEG, a następnie i dwa ucinki: lecz ile razy o nim mowa będzie, zawsze się rozumie mnieyszy, a w przeciwnym razie ostrzeże się.

V. *Wycinek* (sector): jestto część koła, zawarta między łukiem DE, i dwóma promieniami CD, CE, poprowadzonemi do końców tego łuku.

VI. Nazywamy *liniją wpisaną w koło*, tę liniją, którey końce znaydują się na okręgu jego, jak naprzykład, AB. (fig. 2).

Kąt wpisany; jestto kąt, jak BAC, mający swóy wierzchołek na okręgu koła, utworzony przez dwie cięciwy.

Troykąt wpisany ; jestto troykąt taki, jak BAC, mający wierzchołki swych kątów na okręgu koła.

A w ogólności, *figura wpisana*, nazywa się ta, którey wierzchołki wszystkich kątów znaydują się na okręgu koła: i razem się mówi, że koło jest *opisane* na tey figurze.

VII. *Sieczną* (secans), nazywa się linija prosta, przecinająca okrąg koła w dwóch punktach; taką jest AB, (fig. 3).

VIII. *Styczną* (tangens), nazywa się linija, [illegible] mająca jeden tylko punkt wspólny z okręgiem koła; taką jest CD.

Punkt wspólny M, nazywa się *punktem dotknięcia.* (albo punktem styczności)

IX. Podobnie dwa okręgi kół są *styczne* do siebie, gdy jeden tylko mają punkt z sobą wspólny.

X. Wielobok jest *opisanym na kole*, gdy wszystkie jego boki, są stycznemi do okręgu koła: w tymże samym razie mówi się, że koło jest *wpisane* w wielobok, (fig. 115).

PODANIE I.

TWIERDZENIE.

Każda średnica AB (fig. 4), *dzieli koło i okrąg jego na dwie części równe.*

Jeżeli bowiem przyłożymy figurę AEB do AFB, zachowując dla nich wspólną podstawę AB, tedy linija krzywa AEB, paść musi na liniją krzywą AFB, inaczey bowiem, w jedney lub drugiey, byłyby punkta nierównie oddalone od środka; co sprzeciwiałoby się opisaniu koła.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Każda cięciwa jest mnieysza od średnicy.

Bo gdy się do końców cięciwy AD, poprowadzą promienie AC, CD, będzie linija prosta AD<AC+CD, czyli AD<AB.

Wniosek. Naywiększa więc linija, jaka bydź może wpisana w koło, równa jest średnicy.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Linija prosta w dwóch tylko punktach spotykać może okrąg koła.

Bo gdyby ta linija spotykała koło we trzech punktach, tedy te trzy punkta byłyby równie oddalone od środka, azatém mielibyśmy trzy linije równe z jednego punktu do linii prostey poprowadzone; co jest niepodobieństwem. (pod. 16 xię. 1).

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

W każdém kole, albo w kołach równych, łukom równym odpowiadają cięciwy równe, *i wzajemnie cięciwy równe odcinają na kole łuki równe* (fig. 5).

Niech będą AC i EO, dwa promienie dwóch kół równe, i łuk AMD równy łukowi ENG; powiadam, że cięciwa AD będzie równą cięciwie EG.

Jakoż, ponieważ średnica AB, jest równa średnicy EF, więc półkole AMDB, przystać może zupełnie do półkola ENGF, i linija krzywa AMDB padnie całkiem na liniją krzywą ENGF. Aże zakładamy że część AMD jest równa części ENG, punkt więc D, padnie na punkt G; azatém cięciwa AD jest równa cięciwie EG.

Wzajemnie, zakładając że promień AC=EO, jeżeli cięciwa AD=EG, powiadam: że łuk AMD, jest równy łukowi ENG.

Gdyż pociągnąwszy promienie CD, OG, mieć będziemy dwa troykąty ACD, EOG, mające trzy boki odpowiednie równe; to jest, AC=EO, CD=OG, i AD=EG; azatém te dwa troykąty są równe (11, 1); kąt więc ACD=EOG. Lecz gdy położymy półkole ADB na jemu równe EGF, tedy, ponieważ kąt ACD=EOG, oczywiście promień CD, padnie na promień OG, i punkt D, na punkt G; azatém łuk AMD, jest równy łukowi ENG.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

W każdém kole, albo w kołach równych, łukowi większemu odpowiada cięciwa większa, i wzajemnie: lecz wtenczas to tylko zachodzi, gdy łuki, o których jest mowa, są mnieysze od półokręgu koła (fig. 5).

Niech będzie łuk AH, większy od łuku AD, i niech będą poprowadzone cięciwy AD, AH, i promienie CD, CH: dwa boki AC, CH, troykąta ACH, są równe dwóm bokom AC, CD, troykąta ACD: kąt ACH jest większy od ACD; więc (10, 1) trzeci bok AH, jest większy od trzeciego AD; azatém cięciwa podpierająca łuk większy, jest większą.

Wzajemnie, jeżeli cięciwa AH jest większą od AD, tedy z tychże samych troykątów wniesiemy, że kąt ACH, jest większy od ACD; azatém że łuk AH, jest większy od łuku AD.

Uwaga. Przypuszczamy, że łuki, o których jest mowa, są mnieysze od półokręgu koła. Bo, gdyby te były większe, tedyby zachodziła własność przeciwna, gdyż za powiększeniem łuku, cięciwaby się zmnieyszała, i wzajemnie: tak że gdy łuk AKBD jest większy od AKBH, to cięciwa AD pierwszego, jest mnieysza od cięciwy AH drugiego łuku. (To samo wypada, na mocy samego twierdzenia, przez odejmowanie łuków mniejszych jak półokręg, od łuków większych jako półokrąg, uważając, że spełnienie łuku mniejszego a [illegible] do całego okręgu, jest większe od spełnienia łuku [illegible]

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

średnica

Promień CG (fig. 6), *prostopadły do cięciwy* AB, *dzieli tak tę cięciwę, jakoteż*

tudzież przez się podparte,

łuk AGB, *przez nią podparty, na dwie równe części.*

Daymy promienie CA, CB; te promienie względem prostopadłey CD, są linijami pochyłemi równemi sobie; azatém równie są oddalone od tey prostopadłey (16, 1): więc AD=DB.

Powtóre: ponieważ AD=DB, CG, jest prostopadłą wyniesioną ze środka AB; więc (17, 1) każdy punkt tey prostopadłey, jest równie oddalony od dwóch punktów A, i B. Punkt G, jest jednym z tych punktów, więc odległość AG=BG; lecz jeżeli cięciwa AG, jest równa cięciwie GB, tedy łuk AG, jest równy łukowi GB, (pod. 4): azatém promień CG, prostopadły do AB, dzieli łuk podparty przez tęż cięciwę na dwie rowne części w punkcie G.

Uwaga. Srodek koła C, i środek D, cięciwy AB, oraz środek G, łuku podpartego przez tę cięciwę, są trzy punkta położone na jedney linii prostopadłey do cięciwy; aże dosyć jest dwóch punktów do oznaczenia położenia linii prostey; azatém wszelka linija prosta przechodząca przez dwa wzmiankowane punkta, przeydzie koniecznie i przez trzeci, i będzie prostopadłą do cięciwy.

Z tego także wypada: *że prostopadła wyniesiona ze środka cięciwy, przechodzi przez środek koła i przez środek łuku przez tę cięciwę podpartego.*

Bo ta prostopadła, jestto właśnie linija prostopadła, spuszczona ze środka koła na tęż cięciwę; gdyż obie te prostopadłe przechodzą przez środek cięciwy.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Przez trzy punkta dane A, B, C, *nie w linii prostey* (fig. 7), *można zawsze poprowadzić okrąg koła, lecz nie więcey jak jeden tylko.*

Połączmy te punkta linijami AB, BC, i podzielmy je na dwie równe części, przez prostopadłe DE, FG; powiadam: że te prostopadłe zbiegą się z sobą w punkcie O.

Gdyż linije DE, FG, przetną się z sobą, jeżeli nie są równoległe. Przypuśćmy że są równoległe: linija AB, prostopadła do DE, byłaby prostopadłą do FG (24, 1), i kąt w K, byłby prosty; lecz BK, przedłużenie BD, jest różne od BF; bo trzy punkta A, B, C, nie są w linii prostey; azatém byłyby dwie prostopadłe BF, BK, spuszczone z jednego punktu na jednę liniją: co jest niepodobieństwem (15, 1); azatém prostopadłe DE, FG, zawsze się z sobą przetną w jednym punkcie O.

Teraz, punkt O, jako należący do prostopadłey DE, jest równie oddalony od dwóch punktów A i B, (17, 1); tenże sam punkt O, jako należący do prostopadłey FG, jest równie oddalony od dwóch punktów B, C; trzy więc odległości, OA, OB, OC, są równe; azatém okrąg koła, z punktu O promieniem OB zarysowany, przeydzie przez trzy punkta dane A, B, C.

Dowiedliśmy że zawsze poprowadzić można okrąg koła przez trzy punkta dane, nie w linii prostey; powiadam teraz: że niewięcey poprowadzić można jak jedno koło. Bo gdyby był drugi okrąg koła, któryby także przechodził przez te trzy punkta dane A, B, C, jego środek niemógłby znaydować się za liniją DE (17, 1); gdyż byłby nierównie oddalony od A, i B: niemógłby także bydź za liniją FG, dla podobneyże przyczyny: azatém musiałby się znaydować razem na dwóch linijach DE, FG. Aże dwie linie proste w jednym się tylko punkcie przecinać mogą, przeto jeden tylko jest okrąg koła przechodzący przez trzy punkta dane.

Wniosek. Dwa okręgi kół, w dwóch tylko punktach przecinać się z sobą mogą; bo gdyby miały trzy punkta wspólne, tedyby miały jeden środek, i jeden i tenże sam okrąg koła składałyby.

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Dwie cięciwy równe, są równie oddalone od środka; a z dwóch cięciw nierównych, naymnieysza jest naybardziey oddaloną od środka.

1°. Niech będzie cięciwa AB=DE, (fig. 8); podzielmy je na dwie równe części, przez prostopadłe CF, CG, i daymy promienie CA, CD. Troykąty prostokątne CAF, DCG, mają przeciwprostokątne CA, CD, równe, i bok AF, połowa AB, jest równy bokowi DG, połowie DE; więc te troykąty są równe, (18, 1); azatém trzeci bok CF, jest równy trzeciemu CG; azatém: 1° dwie cięciwy równe AB, DE, są równie oddalone od środka.

2°. Niech będzie cięciwa AH, większa od DE, łuk AKH, będzie większy od łuku DME, (pod. 5): na łuku AKH weźmy część ANB=DME; daymy cięciwę AB, i spuśćmy CF, prostopadłą do tey cięciwy, i CI prostopadłą do AH: oczywiście widzimy, że CF większe jest od CO, a CO większe od CI, (16, 1); azatém, tym bardziey CF>CI; aże CF=CG, bo cięciwy AB, DE są równe, azatém będzie CG>CI, z dwóch więc cięciw nierównych, naymnieysza jest naybardziey oddaloną od środka.

PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Prostopadła BD (fig. 9), *z końca promienia* CA *wyniesiona, jest styczną do okręgu koła.*

Bo każda linija pochyła CE, jest dłuższą od prostopadłey CA, (16, 1); więc punkt E, jest za liniją: azatém linija BA, jeden ma tylko punkt wspólny A, z okręgiem koła; przeto BD, jest styczną (opis. 8).

Uwaga. Przez punkt dany A, nie więcey jak jedna styczna AD, do okręgu koła poprowadzoną bydź może. Bo gdyby można było poprowadzić drugą, tedyby ta nie była prostopadła do promienia CA, azatém do tey nowey styczney, promień CA, byłby pochyłym; i prostopadła, spuszczona ze środka na tę styczną, byłaby krótszą od CA; ta więc mniemana styczna wchodziłaby w koło, i byłaby sieczną.

PODANIE X.

TWIERDZENIE.

Dwie linije równoległe AB, DE, *odcinają na kole łuki* MN, PQ, *równe* (fig. 10)

Trzy tu zayść mogą przypadki.

1°. Jeżeli dwie linije równoległe są siecznemi, prowadzi się promień CH, prostopadły do cięciwy MP, który prostopadły razem będzie do jey równoległey NQ, (24, 1); więc punkt H, będzie razem środkiem łuku MHP i łuku NHQ; azatém będzie: łuk MH=HP, i łuk NH=HQ: stąd wypada MH—NH=HP—HQ; to jest: MN=PQ.

2°. Jeżeli jedna z tych dwóch równoległych AB, DE (fig. 11), jest sieczną, a druga styczną; do punktu dotknięcia H, daje się promień CH, który prostopadłym będzie tak do styczney DE, (9), jako i do jey równoległey MP. Lecz że promień CH, jest prostopadły do cięciwy MP, więc punkt H, jest środkiem łuku MHP; a zatém łuki MH, HP, zawarte między równoległemi AB, DE są równe.

3°. Nakoniec, jeżeli dwie równoległe DE, IL, są obie stycznemi, jedna w H, druga w K; prowadzi się AB sieczna do nich równoległa, mieć będziemy, na mocy tego, co się teraz dowiodło, MH=HP, i MK=KP; azatém łuk całkowity HMK=HPK; i nadto widzimy, że każdy z tych łuków jest połokręgiem koła.

PODANIE XI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa okręgi przecinają się z sobą w dwóch punktach, linija, przechodząca przez ich środki, będzie prostopadłą do cięciwy łączącey dwa punkta przecięcia się *tych kół i podzieli ją na dwie części równe.*

Bo linija AB (fig. 12 i 13), łącząca punkta przecięcia, jest cięciwą wspólną dwóm kołom. Jeżeli więc ze środka téy cięciwy wyniesiona będzie prostopadła, ta przeydzie przez oba środki C i D (6); lecz przez dwa punkta dane, jedna tylko linija poprowadzoną bydź może; azatém linija prosta przechodząca przez te środki, będzie prostopadłą w środku cięciwy wspólney.

PODANIE XII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli odległość dwóch środków kół jest mnieysza od summy ich promieni; i jeżeli razem promień większy, jest mnieyszy od summy mnieyszego promienia i odległości środków, tedy te dwa koła przetną się z sobą.

Bo, żeby to przecięcie zachodziło, potrzeba, iżby troykąt CAD (fig. 12 i 13), mógł exystować, azatém potrzeba, aby nietylko CD, było $<AC+AD$, lecz także, aby promień większy AD był $<AC+CD$; ile razy tedy troykąt CAD może bydź wykreślonym, tyle razy okręgi kół, zakreślone ze środków C i D, przetną się z sobą w A i B.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli odległość CD (fig. 14), *środków dwóch kół, jest równa summie ich promieni* CA, *i* AD; *te dwa koła dotkną się zewnętrznie.*

Jasno jest, że te koła mieć będą jeden tylko punkt wspólny A; bo żeby miały dwa takie punkta, potrzebaby było, aby odległość środków była mnieyszą od summy promieni (12).

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli odległość CD, *środków dwóch kół, jest równa różnicy ich promieni* CA, AD, *te dwa koła dotkną się z sobą wewnętrznie.*

Naprzód oczywiście widzimy, że te koła mają punkt wspólny A; i nie mogą mieć innego takiego, gdyż na to potrzebaby było, ażeby promień większy AD, był mnieyszy od summy promienia AC i odległości CD, środków (12): co właśnie nie zachodzi.

Wniosek. Jeżeli dwa koła dotykają się bądź wewnętrznie bądź zewnętrznie, środki ich i punkt dotknięcia znaydują się na jedney i teyże samey linii prostey.

Uwaga. Wszystkie koła mające swe środki na linii prostey CD (fig. 14 i 15) i przechodzące przez punkt A, są wzajemnie do siebie styczne; mają one między sobą jeden tylko punkt A wspólny. A jeżeli przez punkt A, poprowadzona będzie AE, prostopadła do CD, tedy ta linija będzie styczną wspólną wszystkim kołom.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

W kole albo w kołach równych, kąty równe ACB, DCE (fig. 16), *mające swóy wierzchołek w środku, obeymują na okręgu koła łuki równe* AB, DE.

Wzajemnie: jeżeli łuki AB, DE, *są równe, kąty* ACB, DCE *będą także równe.*

Gdyż 1° jeżeli kąt ACB, jest równy kątowi DCE, te dwa kąty mogą do siebie przystać; a ponieważ ramiona ich są równe, przeto punkt A padnie na D, a punkt B na E. Lecz wtenczas i łuk AB powinien paść także na łuk DE; bo gdyby te dwa łuki przyłożone do siebie, nie czyniły jednego łuku, tedyby w jednym lub drugim z nich znaydowały się punkta nierównie oddalone od środka koła; co jest niepodobieństwem: azatém łuk AB = DE.

2°. Jeżeli założymy łuk AB = DE, powiadam: że kąt ACB będzie równy kątowi DCE; bo gdyby te kąty nie były równe, i niech ACB jest kątem większym, tedy wziąwszy kąt ACI=DCE, mielibyśmy, na mocy tego cośmy dowiedli teraz, AI=DE; aże z założenia łuk AB=DE, więc byłoby AI=AB, to jest: część równa całości, co jest niepodobieństwem; azatém kąt ACB=DCE.

PODANIE XVI.

TWIERDZENIE.

W kole lub też w kołach równych; jeżeli dwa kąty w środku ACB, DCE (fig. 17), *mają się do siebie jak dwie liczby całkie, łuki* AB, DE, *ramionami tych kątów objęte, będą się miały do siebie, jak też same liczby; i mieć będziemy tę proporcyą*:
kąt ACB : DCE=łuk AB : DE.

Przypuśćmy, naprzykład, że kąty ACB, DCE, mają się do siebie, jak 7 do 4; albo co na toż samo wychodzi, przypuśćmy, że kąt M, obrany za wspólną miarę, siedm razy zawiera się w kącie ACB, a cztery w kącie DCE. Ponieważ kąty cząstkowe ACm, mCn, nCp, i t. d., DCx, xCy, i t. d., są równe między sobą; łuki przeto cząstkowe Am, mn, np, i t. d. Dx, xy, i t. d., będą także równe sobie (15); azatém całkowity łuk AB, mieć się będzie do łuku całkowitego DE; jak 7 do 4. Widzimy oczywiście: iż to samo rozumowanie zaydzie, gdybyśmy na mieyscu 7 i 4, mieli inne jakiekolwiek liczby; azatém, jeżeli stosunek kątów ACB, DCE, może bydź wyrażony w liczbach całkich, tedy łuki AB, DE, będą się miały do siebie jak kąty ACB, DCE.

Uwaga. Wzajemnie, jeżeli łuki AB, DE, mają się do siebie jak dwie liczby całkie, tedy i kąty ACB, DCE będą się miały do siebie jak też same liczby; tak, iż będzie zawsze ACB : DCE : : AB : DE; bo, że łuki cząstkowe A*m*, *mn* i t. d. D*x*, *xy* i t. d. są równe, tedy kąty cząstkowe AC*m*, *m*C*n*, i t. d.; DC*x*, *x*C*y*, i t. d., są także równe.

PODANIE XVII.

TWIERDZENIE.

Jakikolwiek będzie stosunek dwóch kątów ACB, ACD, (fig. 18); *zawsze* one *będą się miały do siebie, jak ich łuki* AB, AD, *zakreślone między ramionami z ich wierzchołków, jako środków, promieniami równemi.*

Założmy że kąt mnieyszy, umieszczony jest w większym: jeżeli wysłowione podanie, niema mieysca, kąt ACB, mieć się będzie do kąta ACD, jak łuk AB do innego łuku większego lub mnieyszego niż jest AD. Przypuśćmy że ten łuk jest większy, i oznaczmy go przez AO, mieć będziemy,

kąt ACB : ACD : : łuk AB : AO.

Wystawmy teraz że łuk AB, podzielony jest na części równe, z których każda jest mnieysza od DO: jeden przynaymniey będzie punkt podziału między D i O: niech będzie I tym punktem, i daymy CI; łuki AB, AI, mieć się będą do siebie, jak dwie liczby całkie; i na mocy poprzedzającego twierdzenia, będzie

kąt ACB : ACI : : łuk AB : AI.

Zbliżywszy do siebie te dwie proporcye, i uważając że w nich poprzedniki są też same, wniesiemy z tego, że następniki składają także proporcyą

kąt ACD : ACI : : łuk AO : AI.

Aże łuk AO, jest większy od łuku AI, aby więc ta proporcya zachodziła, potrzeba, iżby kąt ACD był większy od kąta ACI; że zaś przeciwnie, jest on mnieyszy; więc niepodobieństwem jest ażeby kąt ACB, tak się miał do kąta ACD, jak łuk AB do łuku większego niż jest AD.

Przez podobne zupełnie rozumowanie dowiedlibyśmy, że czwarty wyraz proporcyi nie może bydź mnieyszy od AD; więc zupełnie równy bydź musi AD; azatém mieć będziemy proporcyą:

kąt ACB : ACD : : łuk AB : AD.

Wniosek. Ponieważ kąt w środku koła i łuk ramionami jego objęty, taki mają z sobą związek, że gdy się jeden powiększy lub zmnieyszy w jakimkolwiek stosunku, to i drugi w tymże samym stosunku powiększa lub się zmnieysza; przeto mamy prawo wziąć jednę z tych wielkości za miarę drugiey. I tak, odtąd brać będziemy łuk AB, za miarę kąta ACB. Należy tylko uważać w porównywaniu kątów między sobą, że łuki służące im za miarę, powinny bydź nakreślone promieniami równemi; gdyż to przypuszczaliśmy we wszystkich poprzedzających podaniach.

Uwaga 1. Zdaje się iż naturalniey jest mierzyć ilość, drugą ilością tegoż samego gatunku, i na mocy tego początku, należałoby odnosić wszystkie kąty do kąta prostego: tak, że kąt prosty wziąwszy za jednostkę miary, mielibyśmy kąt ostry, wyrażony przez liczbę zawartą między 0 i 1; a kąt rozwarty, przez liczbę zawartą między 1 i 2; lecz ten sposób wyrażania kątów niebyłby naydogodnieyszy w użyciu: daleko jest prościey mierzyć kąty łukami koła, a to dla tego, że łatwo jest zrobić łuki, równe łukom danym, i dla wielu innych przyczyn. Z resztą, jeżeli miara kątów przez łuki koła, jest w pewnym gatunku nie wprost idąca, to przynaymniey łatwo jest otrzymać za pomocą ich miarę wprost idącą i bezwzględną: bo gdy łuk służący za miarę kątowi porównamy z ćwiercią całego okręgu koła, mieć będziemy stosunek kąta danego do kąta prostego; co jest miarą bezwzględną.

Uwaga 2. To wszystko, cośmy dowiedli w trzech poprzedzających podaniach względem porównania kątów z łukami, równie zachodzi względem porównywania wycinków z łukami: bo wycinki są równe, gdy takiemi są kąty, i w ogólności są one proporcyonalne kątom, azatém, *dwa wycinki* ACB, ACD, *wzięte w jedném kole albo też w kołach równych, mają się do siebie, jak łuki* AB, AD, *podstawy tych wycinków.*

Z tego widzimy że łuki koła, służące za miarę kątom, mogą także służyć za miarę rozmaitym wycinkom jednego koła lub kół równych.

PODANIE XVIII.

TWIERDZENIE.

Kąt BAD, *wpisany w koło* (fig. 19 i 20), *ma za miarę połowę łuku* BD, *objętego między jego ramionami.*

Przypuśćmy naprzód, że środek koła przypada w kącie BAD, (fig. 19); poprowadźmy średnicę AE, i promienie CB, CD. Kąt BCE zewnę[t]rzny względem troykąta ABC, jest równy summie dwóch kątów wnętrznych CAB, ABC, (19, 1); lecz że troykąt BAC, jest równoramienny, azatém kąt CAB=ABC; przeto kąt BCE jest równy dwa razy wziętemu kątowi BAC. Kąt BCE, jako kąt w środku, ma za miarę łuk BE; więc kąt BAC, będzie miał za miarę połowę BE. Dla podobney przyczyny kąt CAD, mieć będzie za miarę połowę ED; azatém BAC+CAD czyli BAD, mieć będzie za miarę połowę summy BE+ED, czyli połowę łuku BD.

Przypuśćmy powtóre: że środek C (fig. 20), znayduje się za kątem BAD; wówczas, gdy poprowadzimy średnicę AE, kąt BAE, będzie miał za miarę połowę łuku BE; kąt DAE, połowę DE; azatém różnica ich BAD, będzie miała za miarę połowę BE mniey połową ED, czyli połowę BD.

Każdy więc kąt wpisany, ma za miarę połowę łuku między jego ramionami zawartego.

Wniosek I. Wszystkie kąty BAC, BDC, i t. d. (fig. 21), wpisane w jeden ucinek, są równe sobie; gdyż mają za miarę połowę tegoż samego łuku BOC.

II. Każdy kąt BAD (fig. 22), wpisany w półokrąg koła, jest równy kątowi prostemu; gdyż ma on za miarę połowę półokręgu koła BOD, czyli ćwierć okręgu koła.

Dla dowiedzenia tey rzeczy innym sposobem, pociągniymy liniją AC: troykąt CAB jest równoramienny, więc kąt BAC=ABC; troykąt CAD podobnie jest równoramienny, więc kąt CAD=ADC; azatém BAC+CAD czyli

BAD=ABD+ADB. Lecz jeżeli dwa kąty B i D, troykąta ABD, ważą razem trzeci kąt BAD, trzy kąty troykąta ważyć będą dwa razy wzięty kąt BAD; aże nadto ważą one dwa kąty proste, azatém kąt BAD jest kątem prostym.

III. Każdy kąt BAC (fig. 21), wpisany w ucinek większy od półokręgu koła, jest kątem ostrym; gdyż ma za miarę połowę łuku BOC mnieyszego od pół okręgu koła.

A każdy kąt BOC, wpisany w ucinek mnieyszy od pół okręgu koła, jest kątem rozwartym; gdyż ma za miarę połowę łuku BAC, większego od pół okręgu koła.

IV. Kąty przeciwległe A i C (fig. 23), czworoboku ABCD, wpisanego w koło, razem wzięte, ważą dwa kąty proste; bo kąt BAD, ma za miarę połowę łuku BCD; kąt BCD, ma za miarę połowę łuku BAD; więc oba kąty BAD, BCD, wzięte razem, mają za miarę połowę pół okręgu koła; azatém ich summa równa się dwóm kątom prostym.

PODANIE XIX.

TWIERDZENIE.

Kąt BAC (fig. 24), *utworzony przez styczną i cięciwę, ma za miarę połowę łuku* AMDC, *zawartego między jego ramionami.*

Do punktu dotknięcia A, poprowadźmy średnicę AD; kąt BAD, jest prosty (9); ma on za miarę połowę pół okręgu koła AMD; kąt DAC, ma za miarę połowę DC; azatém BAD+DAC czyli kąt BAC, ma za miarę połowę AMD więcey połowa DC, czyli połowę całego łuku AMDC. Dowiedlibyśmy podobnie, że kąt CAE ma za miarę połowę łuku AC, zawartego między jego ramionami.

Zagadnienia ściągające się do dwóch xiąg piérwszych.

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Daną liniją prostą AB (fig. 25), *podzielić na dwie części równe.*

Z punktów A i B, jako środków, promieniem większém niż połowa AB, zakreślają się dwa łuki przecinające się z sobą w D; punkt D, będzie równie oddalony od punktów A i B. Podobnie oznaczmy nad, albo pod liniją AB drugi punkt E, także równie oddalony od punktów A i B; przez te dwa punkta D, E, poprowadźmy liniją DE; powiadam: że DE przetnie liniją AB, na dwie części równe w punkcie C.

Gdyż punkta D, i E, jako każdy z nich równie oddalony od końców A i B, znaydować się muszą oba na prostopadłey wyniesioney ze środka linii AB. Lecz przez dwa punkta dane, jedna tylko linija prosta poprowadzoną bydź może; azatém linija DE, jest tąż samą prostopadłą, która przecina liniją AB, na dwie równe części w punkcie C.

ZAGADNIENIE II.

Z punktu A *danego na linii* BC (fig. 26), *wynieść prostopadłą do niey.*

Biorą się dwa punkta B i C równie oddalone od A, potym z tych punktów B i C, jako środków, promieniem większym niż jest BA, zakreślają się dwa łuki, które się przetną w D; a linija poprowadzona AD będzie prostopadłą żądaną.

Bo punkt D, jako równie oddalony od B i od C, należy do prostopadłey wyniesioney ze środka linii BC; azatém AD jest prostopadłą.

Uwaga. Toż samo wykreślenie służy do zrobienia kąta prostego BAD, w punkcie danym A, na linii daney BC.

Sposob 2gi. Vincent str. 113

ZAGADNIENIE III

Z punktu A *danego za liniją prostą* BD (fig. 27), *spuścić prostopadłą na tę liniją.*

Z punktu A, jako środka, promieniem dostatecznie wielkim, zakreśla się łuk, któryby przeciął liniją BD w dwóch punktach B i D: bierze się potym punkt E równie oddalony od punktów B i D, i prowadzi się linija AE, która będzie prostopadłą żądaną.

Bo każdy z dwóch punktów A i E są równie oddalone od punktów B i D, azatém linija AE, jest prostopadła w środku linii BD.

Sposob zgi. Vincent str. 114.

ZAGADNIENIE IV.

W punkcie A, *na linii* AB (fig. 28) *zrobić kąt równy kątowi danemu* K.

Z wierzchołka K, jako środka, jakimkolwiek promieniem, zakreśla się łuk IL, między ramionami kąta: z punktu A, jako środka, promieniem AB równym KI, zakreśla się łuk nieograniczony BO; bierze się potém promień równy cięciwie LI; i z punktu B, jako środka, tym promieniem nakreśla się łuk, który przetnie w D łuk nieograniczony BO; prowadzi się potém AD: a kąt DAB będzie równy kątowi danemu K.

Bo dwa łuki BD, LI, mają promienie i cięciwy równe, azatém są równe (4, 2); więc kąt BAD = IKL.

ZAGADNIENIE V.

Podzielić kąt lub łuk dany na dwie części równe.

1°. Jeżeli potrzeba podzielić łuk AB (fig. 29), na dwie części równe, tedy z punktów A i B, jako środków, jednym promieniem zakreślają się dwa łuki przecinające się z sobą w punkcie D:

przez punkt D i przez środek C, prowadzi się linija CD, która przetnie łuk AB, na dwie części równe w punkcie E.

Bo każdy z punktów C i D, jest równie oddalony od końców A i B cięciwy AB; azatém linija CD jest prostopadłą do środka tey cięciwy, więc dzieli łuk AB na dwie części równe w punkcie E (6, 2).

2°. Jeżeli potrzeba podzielić na dwie części równe kąt ACB, należy wprzód z wierzchołka C, jako środka, zakreślić łuk AB, a potém tak postąpić jak wyżey; oczywiście, linija CD podzieli kąt ACB na dwie części równe.

Uwaga. Za pomocą tegoż samego wykreślenia można podzielić każdą z połów AE, EB, na dwie części równe; tak, że przez koleyne podziały, podzielony będzie kąt lub łuk na cztery części równe, na ośm, na szesnaście i t. d.

Uwaga o trysekcyi kąta z Kunze T. I str. 25-26.
Jak $\frac{1}{3} = 0,1111\ldots$ tak też $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} + \&c\ldots$

ZAGADNIENIE VI.

Przez punkt dany A, *poprowadzić liniją równoległą do linii daney* BC (fig. 30).

Z punktu A, jako środka, promieniem dostatecznie wielkim, zakreśla się łuk nieograniczony EO: z punktu E jako środka, tymże promieniem, zakreśla się łuk AF, bierze potém ED=AF, i daje się linija AD, a ta będzie liniją równoległą żądaną.

Bo, dawszy liniją AE, widzimy oczywiście, że kąty naprzemianległe AEF, EAD są równe; azatém linije AD, EF, są równoległe (24, 1).

ZAGADNIENIE VII.

Mając dane dwa kąty A i B, *troykąta, znaleść trzeci* (fig. 31).

Daymy liniją nieograniczoną DEF, i w punkcie E zrobmy kąt DEC=A, a kąt CEH=B; kąt pozostały HEF będzie kątem trzecim szukanym; bo te trzy kąty, wzięte razem, ważą dwa kąty proste.

ZAGADNIENIE VIII.

Mając dwa boki dane B i C, *troykąta, i kąt* A *między niemi zawarty, nakreślić tróykąt* (fig. 32).

Prowadzi się linija nieograniczona DE, i w jakimkolwiek punkcie D, na niey wziętym, robi się kąt EDF równy kątowi danemu A; bierze się potém DG=B, DH=C, i daje się linija GH; a troykąt DGH, będzie troykątem żądanym.

ZAGADNIENIE IX.

Mając dany bok i dwa kąty troykąta, nakreślić troykąt.

Dwa kąty dane mogą bydź albo oba przyle-

3*

głe bokowi danemu albo jeden przyległy, a drugi przeciwległy: w tym ostatnim przypadku, szuka się trzeciego (pod. 7); a tak zawsze mieć będziemy dwa kąty przyległe; na wykreślenie takiego troykąta, prowadzi się linija prosta DE (fig. 33), równa bokowi danemu; robi się w punkcie D, kąt EDF równy jednemu z kątów przyległych; a w punkcie E robi się kąt DEG, równy drugiemu kątowi danemu: dwie linije DF, EG, przetną się z sobą w H, i utworzą troykąt DEH żądany.

ZAGADNIENIE. X.

Mając trzy boki A, B, C, *dane, nakreślić troykąt* (fig. 34).

Prowadzi się linija DE, równa bokowi A; z punktu E, jako środka, promieniem równym drugiemu bokowi B, zakreśla się łuk; z punktu D, jako środka, promieniem równym trzeciemu bokowi C, zakreśla się łuk drugi, który przetnie pierwszy w F; dają się linije DF, EF, a troykąt DEF będzie troykątem szukanym.

Uwaga. Gdyby jeden z boków był większy od summy dwóch innych, tedyby łuki nie przecięły się z sobą; lecz rozwiązanie zawsze jest podobne do wykonania, jeżeli summa dwóch boków, jakkolwiek wzięta, jest większa od trzeciego.

ZAGADNIENIE XI.

Mając dane dwa boki A i B, *troykąta, i kąt* C, *przeciwległy bokowi* B, *nakreślić troykąt.*

Tu dwa zachodzą przypadki:

1°. Jeżeli kąt C jest prosty albo rozwarty (fig. 35): robi się kąt EDF, równy kątowi C; bierze się DE=A; z punktu E, jako środka, promieniem równym bokowi danemu B, nakreśla się łuk, który przetnie liniją DF, w punkcie F; prowadzi się linija EF; a troykąt DEF będzie troykątem żądanym.

W tym pierwszym przypadku, potrzeba żeby bok B był większym od A; bo kąt C, będąc prostym lub rozwartym, jest naywiększym z kątów troykąta; azatém bok przeciwległy powinien bydź także naywiększym.

2°. Jeżeli kąt C, jest ostry, (fig. 36); a bok B jest większym od A; tedy tosamo wykreślenie zachodzi, i troykąt DEF, będziey troykątem szukanym.

Lecz, jeżeli kąt C jest ostrym (fig. 37), a bok B mnieyszy jest od A, wówczas łuk zakreślony ze środka E, promieniem EF=B, przetnie bok DF we dwóch punktach F i G, położonych z jedney strony punktu D: będą więc dwa troykąty DEF, DEG, równie zadosyć czyniące zagadnieniu.

Uwaga. To zagadnienie jest niepodobne we wszystkich przypadkach, jeżeli bok B, jest mnieyszy od prostopadłey spuszczoney z punktu E na liniją DF.

ZAGADNIENIE XII.

Mając dane boki A i B, *przyległe równoległoboku, oraz kąt* C, *między niemi zawarty, nakreślić równoległobok* (fig. 38).

Poprowadźmy liniją DE=A, zrobmy w punkcie D, kąt FDE=C, weźmy DF=B; zakreśmy dwa łuki jeden z punktu F, jako środka promieniem FG=DE, drugi z punktu E, jako środka, promieniem EG=DF: przez punkt G, gdzie się te dwa łuki przecinają, poprowadźmy linije FG, EG; a czworobok DEGF, będzie równoległobokiem żądanym.

Z wykreślenia bowiem boki przeciwległe są równe, więc figura nakreślona jest równoległobokiem (30, 1), i ten równoległobok jest utworzony z boków danych i kąta danego.

Wniosek. Jeżeli kąt dany jest prosty, figura będzie prostokątem; a nadto, jeżeli boki są równe, figura będzie kwadratem.

ZAGADNIENIE XIII.

Znaleść środek koła lub łuku danego.

Biorą się od upodobania na okręgu lub łuku trzy punkta A, B, C (fig. 39); poprowadźmy albo wyobraźmy że są poprowadzone AB, i BC; podzielmy te dwie linije na dwie części równe przez prostopadłe DE, FG; punkt O, gdzie się te prostopadłe spotykają z sobą, będzie środkiem szukanym.

Uwaga. Tosamo wykreślenie służy, tak do poprowadzenia okręgu koła przez trzy punkta dane A, B, C, jakoteż do opisania okręgiem koła troykąta danego ABC.

ZAGADNIENIE XIV.

Przez punkt dany poprowadzić styczną do okręgu koła danego.

Jeżeli punkt dany A, jest na okręgu koła (fig. 40); daje się promień CA, i prowadzi się prostopadła AD, do CA; a AD będzie styczną żądaną (9, 2); jeżeli punkt dany A jest za kołem, łączy się ten punkt A, ze środkiem koła, liniją prostą CA (fig. 41), dzieli się CA na dwie równe części w punkcie O; z punktu O jako środka, promieniem OC, zakreśla się okrąg koła, który przetnie okrąg koła danego w punkcie B; prowadzi się linija AB, a ta linija AB, będzie styczną żądaną.

Gdyż poprowadziwszy CB, mieć będziemy kąt CBA, wpisany w półokrąg koła, który będzie prostym (18, 2); azatém AB, jest prostopadłą w końcu promienia CB; więc ona jest styczną.

Uwaga. Gdy punkt A dany jest za kołem, widzimy iż zawsze dwie są styczne równe AB, AD, przechodzące przez punkt A: są równe, bo troykąty prostokątne CBA, CDA, mają przeciwprostokątną CA wspólną, i bok CB = CD, więc te troykąty tą równe (18, 1), azatém AD = AB, i razem kąt CAD = CAB.

i równo nachylone do AC

ZAGADNIENIE XV.

W troykąt dany ABC, *wpisać koło* (fig. 42).

Dzielą się kąty A i B, na dwie równe części linijami AO i BO, które z sobą się zbiegą w punkcie O; z punktu O spuszczają się prostopadłe OD, OE, OF, na trzy boki troykąta danego; powiadam, że te prostopadłe będą równe między sobą: z wykreślenia bowiem kąt DAO = OAF, kąt prosty ADO = AFO; więc trzeci kąt AOD jest równy trzeciemu AOF; nadto, bok AO, jest wspólny obudwóm troykątom AOD, AOF, i kąty przyległe bokowi równemu są równe, azatém te dwa troykąty są równe; więc DO = OF. Podobnym sposobem dowiedziemy, że dwa troykąty BOD, BOE, są równe; więc OD = OE; azatém trzy prostopadłe OD, OE, OF są równe między sobą.

Jeżeli teraz z punktu O, jako środka, promieniem OD, nakreśli się okrąg koła, ten oczywiście wpisany będzie w troykąt ABC; gdyż bok AB, prostopadły w końcu promienia OD, jest styczną: tosamo jset z bokami BC, AC.

Uwaga. Trzy linije dzielące trzy kąty troykąta na połowy, zbiegają się z sobą w jednym punkcie.

Dodatek z Kurzra str. 109, wnioski 2–6.

ZAGADNIENIE XVI.

Na linii daney AB, *nakreślić ucinek, mieszczący w sobie kąt dany* C; *tojest ucinek taki, aby wszystkie kąty weń wpisane, były równe kątowi danemu* C (fig. 43 i 44).

Przedłużmy AB ku D, w punkcie B, zróbmy kąt DBE=C, daymy BO prostopadłą do BE, i ze środka linii AB wynieśmy prostopadłą GO; z punktu spotkania się O, jako środka, promieniem OB, nakreślmy koło; a ucinek AMB będzie żądanym.

Jakoż, ponieważ BF, jest prostopadłą w końcu promienia OB; więc BF jest styczną, i kąt ABF ma za miarę połowę łuku AKB (19, 2): nadto, kąt AMB, jako kąt wpisany, ma także za miarę połowę łuku AKB, przeto kąt AMB=ABF=EBD=C; azatém wszystkie kąty wpisane w ucinek AMB, są równe kątowi danemu C.

Uwaga. Jeśliby kąt dany był prosty, ucinek szukany byłby półkolem nakreśloném na średnicy AB.

ZAGADNIENIE XVII.

Znaleść stosunek liczbowy dwóch liniy prostych danych AB, CD, *jeśli te dwie linije mają między sobą miarę wspólną* (fig. 45).

Odcina się linija mnieysza CD na większey AB tyle razy, ile razy w niey mieścić się może, naprzykład dwa razy; i niech jeszcze zostaje reszta BE.

Przenosi się reszta BE na liniją CD, tyle razy, ile się w niey zawrzeć może, naprzykład raz jeden, i pozostanie reszta DF.

Przenosi się druga reszta DF na pierwszą BE, tyle razy ile się mieścić w niey może, naprzykład raz jeden, i pozostanie reszta BG.

Przenosi się trzecia reszta BG na drugą DF, tyle razy ile się w niey pomieścić może.

Ciągną się dopóty te przenoszenia, aż póki nieotrzymamy resztę pewną liczbą razy dokładnie zawierającą się w reszcie poprzedzającey. Ta ostatnia reszta będzie miarą wspólną linij podanych, a wziąwszy ją za jedność, znaydziemy łatwo wartości reszt poprzedzających; a nakoniec wartości dwóch liniy podanych; skąd poznamy ich stosunek w liczbach.

Naprzykład: jeżeli znaydziemy, że GB zawiera się dokładnie dwa razy w FD; tedy BG będzie miarą wspólną dwóch liniy podanych. Niech będzie $BG = 1$, mieć będziemy $FD = 2$; lecz że EB zawiera jeden raz FD więcey GB;

więc EB = 3; CD zawiera raz EB więcey FD: azatém CD = 5: nakoniec, ponieważ AB zawiera dwa razy CD więcey EB, przeto AB = 13; azatém stosunek dwóch liniy AB, CD, jest stosunkiem 13 do 5. Gdyby linija CD była wzięta za jedność, linija AB byłaby $\frac{13}{5}$, a gdyby zaś linija AB wzięta była za jedność, linija CD byłaby $\frac{5}{13}$.

Uwaga. Sposób teraz wyłożony jest tenże sam, jaki mamy przepisany w arytmetyce, dla wynalezienia wspólnego dzielnika dwóch liczb: a tém samem nie potrzebuje inszego dowodu.

Bardzo bydź może, że ciągnąc naydaley to działanie, nie znaydziemy nigdy reszty, którąby dokładnie zawierała się pewną liczbą razy w reszcie poprzedzającey. Wówczas dwie linije zgoła nie mają miary wspólney i z tego względu nazywają się linijami *niewspółmiernemi* (incomensurabiles); tego niżey obaczymy przykład w stosunku przekątney do boku kwadratu.

Nie można wówczas znaleść dokładnego stosunku w liczbach; lecz zaniedbując ostatnią resztę, znaydziemy stosunek mniey lub więcey zbliżony, podług tego, jak działanie mniey lub więcey posunione będzie daley.

ZAGADNIENIE XVIII.

Mając dwa kąty A i B, *dane*, *znaleść wspólną miarę, jeżeli tę mają, i ztąd wyciągnąć ich stosunek w liczbach* (fig. 46).

Nakreślają się promieniami równemi łuki CD, EF, służące za miarę tym kątom; i postępuje się potém, dla porównania tych łuków CD, EF, tak, jak w zagadnieniu poprzedzającém: gdyż łuk może bydź przenoszony na łuk tegoż promienia, jak linija prosta na liniję prostą; a tak tym sposobem przyydziemy do wspólney miary łuków CD, EF, jeżeli ją mają, i do stosunku ich w liczbach. Ten stosunek będzie tenże sam, co stosunek kątów danych (17, 2): i jeżeli DO jest miarą wspólną łuków, tedy DAO będzie miarą wspólną kątów.

Uwaga. Tym sposobem można znaleść wartość bezwzględną kąta, porównywając łuk służący za miarę, z całym okręgiem koła; naprzykład: jeżeli łuk CD ma się do okręgu koła jak 3 do 25, kąt A będzie $\frac{3}{25}$ czterech kątów prostych, czyli $\frac{12}{25}$ kąta prostego.

Zdarzyć się także może, iż łuki porównywane nie mają wspólney miary, wówczas na kąty mieć będziemy stosunki w liczbach mniey lub więcey zbliżone, podług tego, jak działanie mniey lub daley posunione było.

XIĘGA TRZECIA.

PROPORCYE FIGUR.

OPISANIA.

I. Nazywać będziemy *figurami równoważnemi*, te: których powierzchnie są równe.

Dwie figury mogą bydź równoważne, chociaż całkiem różne: naprzykład, koło może bydź równoważne z kwadratem, z troykątem, prostokątem i t. p.

Nazwanie figur równych zachowamy dla tych tylko, które przyłożone do siebie, przystają we wszystkich swych punktach: takiemi są: dwa koła promieni równych, dwa troykąty mające trzy boki odpowiednio równe i t. p.

*) II. Dwie figury są *podobne*, gdy mają kąty ~~odpowiedne~~ równe i boki *odpowiedne* proporcyonalne. Przez boki odpowiedne, rozumieć będziemy te, które mają tożsamo położenie w obudwóch figurach, ~~albo~~ czyli które są przyległe kątom równym. Te kąty nazywają się także kątami *odpowiednemi*.

Wn. Dwa wielokąty podobne równoległe, są podobne sobie.

Dwie figury równe, zawsze są podobne; lecz dwie figury podobne mogą bydź całe nierówne.

III. W dwóch różnych kołach, nazywają się *łuki*, *wycinki*, *ucinki*, *podobne*, te które odpowiadają kątom w środku równym. (2n−2 zamiast 2n−4)

*) Rozstrząśnienie, ile ta def. ma wad. zbytecznych — Zaradzenie temu przez rozłożenie def. na 2 części: 1) trójkąty podobne te, które mają po dwa kąty równe, kąt i t. p. 2) Wielokąty podobne są te, które się składają z jednakowej liczby trójkątów podobnych i podobnie ułożonych — Definicya figur podobnych oparta na uważaniu [illegible] podobieństwa. (Lefeb. str. 368)

I tak gdy A jest równy kątowi O (fig. 47), łuk BC jest podobny łukowi DE, wycinek ABC, wycinkowi ODE i t. d.

IV. *Wysokość* równoległoboku, jestto prostopadła EF, mierząca odległość dwóch boków przeciwległych AB, CD, wziętych za podstawy (fig. 48).

V. *Wysokość* troykąta, jest to prostopadła AD, spuszczona z wierzchołka kąta A, na bok przeciwległy BC, wzięty za podstawę (fig. 49).

VI. *Wysokość* trapeza, jestto prostopadła EF, poprowadzona między jego bokami równoległemi AB, CD, (fig. 50).

VII. *Plac*, albo *powierzchnia* figury, są wyrazy prawie jednoznaczne. Plac oznacza szczególniey ilość powierzchni figury, tyle ile jest mierzoną albo porównywaną z drugą figurą.

NB. Dla wyrozumienia tey i następnych xiąg, trzeba mieć przytomną teoryą proporcyy, na co odsyłamy do zwyczaynych Arytmetyki i Algebry traktatów. Jedno tylko zrobimy postrzeżenie, bardzo ważne dla utwierdzenia prawdziwego znaczenia podań, i zniesienia wszełkiey ciemności, bądź w wysłowieniu bądź w dowodzeniach.

Gdy mamy proporcyą A : B : : C : D, wiemy że mnogość skraynych A×D, jest równa mnogości średnich B×C.

Ta prawda niezawodna w liczbach, równie jest niezawodną i w jakichkolwiek wielkościach, byleby się te dały wyrazić albo wystawić tylko w umyśle, że są wyrażone w liczbach; co zawsze przypuścić można: naprzykład, jeżeli A, B, C, D, są linijami, można wyobrazić sobie że jedna z tych cztérech liniy, albo piąta jakaś, służy wszystkim za miarę wspólną, a która jest wzięta za jedność; wówczas każda z liniy A, B, C, D, wyraża pewną liczbę jedności całką albo łamaną, współmierną albo niewspółmierną, a proporcya między linijami A, B, C, D, staje się proporcyą liczb.

Mnogość więc liniy A i D, którą także nazywają *prostokątem*, nic innego nie jest, tylko liczba jedności linijowych, zawartych w A, mnożona przez liczbę jedności linijowych, zawartych w D; i łatwo poymujemy, że ta mnogość może i powinna bydź równa mnogości podobnie wypadającey z liniy B i C.

Wielkości A i B, mogą bydź jednym gatunkiem, naprzykład, linijami, a wielkości C i D, drugim gatunkiem naprzykład powierzchniami; wówczas potrzeba uważać te wielkości jako liczby. A i B, wyrażą się w jednościach linijowych, a C i D w jednościach powierzchni: a więc mnogość $A \times D$, będzie liczbą, tak jak jest mnogość $B \times C$.

W ogólności, we wszystkich działaniach zachodzić mogących w proporcyach, należy uważać wyrazy tych proporcyy jako liczby, każda z gatunku sobie właściwego; a żadna trudność, w pojęciu działań i wniosków z nich wynikających nie zaydzie.

Powinniśmy tu także ostrzedz, że wiele dowodzeń naszych gruntować się będzie na niektórych prawidłach nayprostszych Algebry, które to prawidła same oparte są na znajomych pewnikach; i tak: jeżeli $A = B + C$, gdy pomnożymy każdy członek przez tę samę ilość M, z tąd wniesiemy $A \times M = B \times M + C \times M$; podobnie, jeżeli mamy $A = B + C$ i $D = E - C$; gdy dodamy te ilości równe i wymażemy $+ C$, i $- C$, które się niszczą: wniesiemy stąd $A + D = B + E$: to same i o innych działaniach. To wszystko samo przez się jest oczywistém, lecz w przypadku trudności nie zaniedbamy przyzwoicie objaśnić.

PODANIE I.

TWIERDZENIE.

Równoległoboki mające podstawy i wysokości równe są równoważne.

Niech będzie AB, podstawą wspólną dwóch równoległoboków ABCD, ABEF (fig. 51): ponieważ zakładamy, że w tych równoległobokach taż sama jest wysokość, przeto podstawy górne DC, FE, będą w linii prostey równoległey AB.

Aże z natury równoległoboków AD = BC, AF = BE; i kąt DAF = CBF i dla teyże przyczyny DC = AB, FE = AB; więc DC = FE; azatém, odciągając DC i FE od teyże samey linii DE, reszty pozostałe CE i DF będą równe.

Z tego wypada, że troykąty DAF, CBD, są równoboczne między sobą.

Lecz gdy od czworoboku ABED, odciągniemy troykąt ADF, zostanie równoległobok ABEF; a gdy od tegoż samego czworoboku ABED, odciągnie się troykąt CBE, zostanie równoległobok ABCD, azatém dwa równoległoboki ABCD, ABEF, mające podstawy, i wysokości równe, są równoważne.

Wniosek. Każdy równoległobok ABCD równoważny jest z prostokątem ABEF, mającym tęż samę podstawę i wysokość (fig. 52).

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Każdy troykąt ABC, *jest połową równoległoboku* ABCD, *mającego tęż samę podstawę i wysokość* (fig. 53).

Bo troykąty ABC, ACD, są równe (28, 1).

Wniosek I. Troykąt więc ABC jest połową prostokąta BCEF, mającego tęż samę podstawę BC, i tęż samę wysokość AO; bo prostokąt BCEF, jest równoważny z równoległobokiem ABCD.

Dopełnij- na trojką- ta do rów- noległo- -boku

Wniosek II. Wszystkie troykąty mające podstawy równe i wysokości równe, są równoważne.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Dwa prostokąty mające tęż samę wysokość mają się do siebie jak ich podstawy.

Niech będą ABCD, AEFD, dwa prostokąty (fig. 54) mające wspólną wysokość AD; powiadam, że te prostokąty mieć się będą do siebie jak ich podstawy AB, AE.

Przypuśćmy naprzod, że podstawy AB, AE, są współmierne między sobą, tak iż są naprzykład jak liczby 7 i 4: jeżeli podzielimy AB na 7 części równych, AE zawierać będzie cztery z tych części: wynieśmy z każdego punktu podziału prostopadłą do podstawy, utworzymy tym sposobem 7 prostokątów częściowych, równych między sobą; bo te mieć będą też samę podstawę i wysokość. Prostokąt ABCD zawierać będzie 7 prostokątów częściowych, a zaś prostokąt AEFD, cztéry tylko takich; azatém prostokąt ABCD, tak się ma do prostokąta AEFD, jak 7 do 4, czyli jak AB do AE; tożsamo rozumowanie stosować się może do wszelkiego innego stosunku, niż jest 7 do 4; azatém jakikolwiek będzie ten stosunek, byleby tylko był wymierny, mieć będziemy

ABCD : AEFD : : AB : AE.

Załóżmy powtóre, że podstawy AB, AE (fig. 55), są niewspółmierne między sobą; powiadam, że ~~dla tego~~ w tym przypadku mieć będziemy

ABCD : AEFD : : AB : AE.

Bo gdyby ta proporcya niebyła prawdziwą, tedy, ponieważ trzy pierwsze wyrazy zostają te same, przeto czwarty będzie większy lub mnieyszy od AE; przypuśćmy że jest większy i że mamy

ABCD : AEFD : : AB : AO.

Podzielmy liniją AB, na części równe mnieysze niż jest EO, jeden przynaymniey podział przypadnie między E i O, naprzykład w punkcie I; z tego punktu wynieśmy do AI prostopadłą IK; podstawy AB, AI, będą współmierne między sobą, a więc będzie, na mocy tego co się w przypadku pierwszym ~~teraz~~ dowiodło,

$$ABCD : AIKD :: AB : AI.$$

Lecz z przypuszczenia mamy

$$ABCD : AEFD :: AB : AO;$$

w tych dwóch proporcyach poprzedniki są równe, więc następniki składają proporcyą, tak iż będzie,

$$AIKD : AEFD :: AI : AO.$$

Lecz AO jest większe od AI; azatém, aby ta proporcya zachodziła, potrzeba żeby prostokąt AEFD, był większy od AIKD; przeciwnie zas, jest on mnieyszy, więc proporcya jest niepodobna; azatém ABCD, nie może się mieć do AEFD, jak AB ma się do linii większey od AE.

Przez zupełnie podobne rozumowanie dowiedlibyśmy, że czwarty wyraz proporcyi nie może bydź mnieyszy od AE, azatém musi bydź równy AE.

Jakikolwiek więc będzie stosunek podstaw: dwa prostokąty, ABCD, AEFD, jedney wysokości, mają się do siebie, jak ich podstawy AB, AE.

Uważać tu, że w 2giey części dowodzenia przypuszcza się, iż stosunki proporcyi zmieniających się do liczb niewspółmiernych. — Wskazać dowód inny, oparty na samey definicyi stosunku liczb niewspółmiernych, opiera na tém: iż stosunek liczb niewspółmiernych jest to granica wszystkiego stosunku współmiernych, coraz bliższych prawdy.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Jakiekolwiek dwa prostokąty ABCD, AEGF (fig. 56), *mają się do siebie jak* ~~*mnogości*~~ iloczynów *z podstaw przez wysokości* : *tak*, *iż zawsze będzie*,

ABCD : AEGF : : AB×AD : AE×AF.

Ułożywszy te dwa prostokąty tak, ażeby kąty w A, były w wierzchołku przeciwległe; przedłużają się boki GE, CD, aż do spotkania się z sobą w H: dwa prostokąty ABCD, AEHD, jako mające tęż samę wysokość AD, mają się do siebie jak ich podstawy AB, AE. Podobnie dwa prostokąty AEHD, AEGF, mające tęż samę wysokość AE, mają się do siebie jak ich podstawy AD, AF; a tak mieć będziemy te dwie proporcye:

ABCD : AEHD : : AB : AE
AEHD : AEGF : : AD : AF.

Mnożąc przez się te proporcye w porządku odpowiednym, i uważając że średni wyraz AEHD, może bydź opuszczony, jako mnożnik wspólny poprzednika i następnika, mieć będziemy,

ABCD : AEGF : : AB×AD : AE×AF.

Uwaga. Można więc za miarę prostokąta wziąć mnogość z podstawy przez jego wysokość; byleby przez tę mnogość rozumiano mnogość dwóch liczb, które są liczbą jedności linijowych zawartych w podstawie i liczbą jedności linijowych zawartych w wysokości.

Ta miara nie jest bezwzględna, lecz tylko względna; domyślamy się w niey, że wyrachowany jest podobnym sposobem inny prostokąt, mierząc jego boki tąż samą jednością linijową; otrzymuje się tym sposobem druga mnogość, a stosunek tych dwóch mnogości jest równy stosunkowi prostokątów, zgodnie z podaniem teraz dowiedzioném.

Naprzykład: jeżeli podstawa prostokąta A ma trzy jedności, a jego wysokość dziesięć jedności, prostokąt wyrażony będzie przez liczbę 3×10, czyli 30; liczba tak odosobniona nic nie znaczy, lecz gdy mamy drugi prostokąt B, którego podstawa niech ma dwanaście jedności, a wysokość siedm jedności, ten drugi prostokąt wyrażony będzie przez liczbę 7×12 czyli 84: stąd wniesiemy, że dwa prostokąty A i B mają się do siebie, jak 30 : 84: azatém, jeżelibyśmy się zgodzili wziąć prostokąt A za jednostkę miary w powierzchniach, wówczas prostokąt B, miałby za miarę bezwzględną $\frac{84}{30}$, to jest, iżby się równał $\frac{84}{30}$ jedności powierzchni.

Pospoliciey i dogodniey bierzemy kwadrat za jednostkę powierzchni, i obiera się jeszcze kwadrat taki, którego bok jest jednostką linijową; wówczas miara, którą uważaliśmy tylko jako

[Lepiéy podstawa 1 sznur. a wysokość 3 sznury; [illegible] A będzie morgiem, a jeśli morg [illegible] za [illegible] jako [illegible], będzie A : B = 3 : 7×12, więc B = $\frac{84}{3}$ = 28 morgów.

względną, staje się bezwzględną: naprzykład liczba 30, przez którąśmy mierzyli prostokąt A, wyraża 30 jedności powierzchni, czyli 30 tych kwadratów, z których każdy ma bok równy jedności; co oczywiściey wystawia figura 57.

iloczyn,

Bardzo często mieszają w Geometryi mnogość dwóch liniy z ich *prostokątem*, i to wyrażenie przeszło nawet do Arytmetyki dla oznaczenia mnogości z dwóch liczb nierównych, tak, jak się używa wyrażenie *kwadratu*, na oznaczenie mnogości z liczby mnożoney przez się. Różnica między wyrażeniem prostokąta, [illegible] ABCD, [illegible] ABX[illegible]

Kwadraty z liczb 1, 2, 3 i t. d. są 1, 4, 9, i t. d.; a tak widzimy, że kwadrat zbudowany na linii dwa razy większey, jest cztéry razy większy: zbudowany na trzy razy większey, jest dziewięć razy większy, i tak daley, (fig. 58).

Tu przypomnieć o miarach kwadratowych: wyrażających i geometrycznych. — Dodać też uwagi: 1) Gdy pole i jeden bok prostokąta w danych w liczbach, jak się wynajduje bok drugi. 2) Z liczby wyrażającej pole kwadratu, jak się wynajduje liczba wyrażająca bok tegoż kwadratu.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

iloczynowi

Powierzchnia jakiegokolwiek równoległoboku jest równa mnogości z jego podstawy przez wysokość.

Bo równoległobok ABCD (fig. 52), jest równoważnym z prostokątem ABEF, mającym tęż samę podstawę AB, i tęż samę wysokość BE (1); ten zaś ostatni ma za miarę AB×BE (4), azatém AB×BE równa się powierzchni równoległoboku ABCD.

Wniosek. Równoległoboki mające tęż samę podstawę, mają się do siebie jak ich wysokości; a równoległoboki jedney wysokości, mają się do siebie jak ich podstawy; bo gdy A, B, C, są jakiemikolwiek trzema wielkościami, mamy w ogólności A×C : B×C : : A : B.

W 2ch [illegible] = [illegible] równych, ~~podstawy~~ wysokości są odwrotnie proporcjonalne podstawom. $p : p' = \frac{1}{w} : \frac{1}{w'}$.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Powierzchnia troykąta jest równa mnogości z podstawy przez połowę jego wysokości.

Troykąt bowiem ABC (fig. 59), jest połową równoległoboku ABCE, mającego tęż samę podstawę BC i wysokość AD co i troykąt (2); aże powierzchnia równoległoboku ABCE=BC×AD (5); azatém powierzchnia troykąta ABC=½BC×AD czyli BC×½AD.

Wniosek. Dwa troykąty równey wysokości, mają się do siebie jak ich podstawy; a dwa troykąty równych podstaw, mają się do siebie jak ich wysokości.

Wn. 2. W 2ch tr. = równych, wysokości są odwrotnie proporc. podstawom

(Uw. W każdym tr., boki jego a, b, c [illegible] do siebie odwrotnie jak wysokości odpowiadające a', b', c', t.j.: $\frac{a}{(\frac{1}{a'})} = \frac{b}{(\frac{1}{b'})} = \frac{c}{(\frac{1}{c'})}$

czyli $a : b : c = \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'}$.)

Wn. 3. Mając dane pole Δta i jego podstawę (lub wysokość) w liczbach, jak wynaleźć wysokość (lub podstawę).

Wn. 4. Pole takiego 4kąta, którego przekątne są do siebie prostopadłe, jest ½ iloczynu przekątnych. A [illegible]: każdy 4kąt jest = równy równoległobokowi wystawionemu na przekątnych tego 4kąta.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Powierzchnia trapeza ABCD (fig. 60), *równa się wysokości jego* EF, *mnożoney przez pół summy podstaw równoległych* AB, CD.

Przez punkt I, środek boku BC; poprowadźmy KL liniją równoległą bokowi przeciwległemu AD, i przedłużmy DC, aż do spotkania się z KL.

W troykątach IBL, ICK, bok IB=IC z wykreślenia; kąt LIB=CIK, a kąt IBL=ICK, dla równoległości liniy CK i BL (24, 1), więc te troykąty są równe (7, 1); azatém trapez ABCD, równoważny jest z równoległobokiem ADKL, i ma za miarę EF×AL.

Lecz mamy AL=DK, i ponieważ troykąt IBL jest równy troykątowi KCI, bok BL=CK; azatém AB+CD=AL+DK=2AL; a tak AL jest pół summą podstaw AB, CD; azatém nakoniec powierzchnia trapcza ABCD, jest równa wysokości EF, mnożoney przez pół summę podstaw AB, CD: co się tak wyraża, $ABCD = EF \times \left(\frac{AB+CD}{2}\right)$.

Uwaga. Jeżeli przez punkt I, środek boku BC, poprowadzi się IH równoległa podstawie AB; punkt H będzie środkiem boku AD; gdyż figura AHIL jest równoległobokiem tak, jak

DHIK: bo boki przeciwległe są równoległemi: mamy więc AH=IL a DH=IK; aże IL=IK; gdyż troykąty BIL, CIK są równe, więc AH=DH.

Można uważać, że linija $HI = AL = \frac{AB+DC}{2}$; powierzchnia więc trapeza wyrazić się także może przez $EF \times HI$: to jest, powierzchnia trapeza równa jest wysokości jego mnożoney przez liniją łączącą środki boków nierównoległych. [*]

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli linija AC *jest podzieloną na dwie części* AB, BC (fig. 61), *kwadrat zbudowany na całey linii* AC, *zawierać będzie kwadrat zbudowany na części* AB, *więcey kwadrat zbudowany na drugiey części* BC, *więcey dwa razy wzięty prostokąt z dwóch części* AB. BC: *co tak wyrażamy*: $\overline{AC}^2$ *czyli* $(AB+BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$.

Zbuduymy kwadrat ACDE, weźmy AF=AB; poprowadźmy FG, liniją równoległą do AC, i BH równoległą do AE.

Kwadrat ACDE został podzielony na cztéry części: pierwsza ABIF jest kwadratem zbudowanym na AB, gdyż wzięliśmy AF=AB; druga IGDH jest kwadratem zbudowanym na BC,

[*] Tu wyłożyć jeszcze z Kursu T. I. str. 148 [illegible] 1° Wniosek o mierzeniu Δta, z [illegible] odpowiednich jego wierzchołków. — 2° O mierzeniu pow. wielokąta, przez rozkład na trójkąty [illegible]. 3° przez rozkład na trapezy i trójkąty. 4° przez opisanie wielokąta wewnątrz niedostępnego, samym wielokątem.

gdyż, ponieważ AC=AE i AB=AF, różnica AC—AB jest równa różnicy AE—AF, co daje BC=EF: lecz z przyczyny równoległości liniy, IG=BC i DG=EF; azatém HIGD jest równy kwadratowi zbudowanemu na BC. Te dwie części odtrącone od całkowitego kwadratu, dają na resztę dwa prostokąty BCGI, EFIH, z których każdy ma za miarę AB×BC: azatém kwadrat zbudowany na AC i t. d.

Uwaga. To podanie wychodzi na to, co się dowodzi w Algebrze na utworzenie kwadratu z dwówyrazu, a który tak jest wyrażony: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli linija AC *jest różnicą dwóch liniy* AB, BC (fig. 62) *kwadrat zbudowany na* AC, *zawierać będzie kwadrat* z AB *więcey kwadrat* z BC, *mniey dwa razy wzięty prostokąt zbudowany* z AB i BC: *to jest że mieć będziemy* $\overline{AC}^2$ *czyli* $(AB-BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$.

Zróbmy kwadrat ABIF, weźmy AE=AC, poprowadźmy CG równoległą BI, HK równoległą AB, i dokończmy kwadratu EFLK.

Dwa prostokąty CBIG, GLKD, każdy ma za miarę AB×BC: jeżeli je odciągniemy od całey figury ABILKEA, mającey za wartość $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; oczywiście zostanie kwadrat ACDE, azatém i t. d.

Uwaga. To podanie wychodzi na formułę algebraiczną $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

PODANIE X.

TWIERDZENIE.

Prostokąt zbudowany na summie i różnicy dwóch liniy: jest równy różnicy kwadratów z tych liniy: to jest będzie $(AB+BC)\times(AB-BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$ (fig. 63).

Wystawmy na AB i AC, kwadraty ABIF, ACDE; przedłużmy AB na ~~ilość~~ BK=BC, i dokończmy prostokąta AKLE.

Podstawa AK prostokąta jest summą dwóch liniy AB, BC; jego wysokość AE, jest różnicą tychże liniy; azatém prostokąt $AKLE = (AB+BC)\times(AB-BC)$. Lecz tenże sam prostokąt jest złożony z dwóch części ABHE+BHLK; a część BHLK jest równa prostokątowi EDGF; bo BH=DE, a BK=EF; azatém AKLE=ABHE+EDGF. Aże te dwie części składają kwadrat ABIF mniey kwadrat DHIG, który jest kwadratem wystawionym na BC; azatém nakoniec, $(AB+BC)\times(AB-BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

Uwaga. To podanie wychodzi na wzór algebraiczny $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

PODANIE XI.

TWIERDZENIE.

Kwadrat z przeciwprostokątney troykąta prostokątnego, jest równy summie kwadratów z dwóch innych boków.

Niech będzie ABC troykąt prostokątny w A (fig. 64); nakreśliwszy kwadraty z trzech jego boków, z wierzchołka kąta prostego spuśćmy na przeciwprostokątną prostopadłą AD, którą przedłużmy aż do E, poprowadźmy potém przekątne AF, CH; kąt ABF składa się z kąta ABC więcey kąt prosty CBF: kąt CBH, składa się z tegoż kąta ABC więcey kąt prosty ABH; azatém kąt ABF=HBC. Aże AB=BH, jako boki jednego kwadratu, i BF=BC, dla teyże przyczyny; azatém troykąty ABF, HBC, jako mające kąty równe zawarte między bokami równemi, są równe sobie (6,1).

Troykąt ABF jest połową prostokąta BDEF (albo dla krótkości BE) mającego tęższamę podstawę BF i tęższamę wysokość BD (pod 2); tróykąt HBC jest podobnie połową kwadratu AH, bo że kąty BAC i BAL, są proste, AC i AL składają jednę liniją prostą, równoległą do HB; więc tróykąt HBC i kwadrat AH mają wspólną podstawę BH i wysokość AB; azatém tróykąt jest połową kwadratu.

Dowiedliśmy, że tróykąt ABF jest równy troykątowi HBC; więc prostokąt BDEF, równający się dwa razy wziętemu troykątowi ABF, jest równoważny kwadratowi AH, równającemu się dwa razy wziętemu trokątowi HBC. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że prostokąt CDEG, jest równoważny kwadratowi AI. Aże dwa prostokąty BDEF, CDEG, wzięte razem, składają kwadrat BCGF; azatém kwadrat BCGF z przeciwprostokątney jest równy summie kwadratów ABHL, ACIK, z dwóch innych boków, co tak wyrażamy: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

ów kąta

Wniosek I. Kwadrat z jednego boku ~~składających kąt~~ prosty, ego jest równy kwadratowi z przeciwprostokątney mniey kwadrat em z drugiego boku; co się tak wyraża: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

Wniosek II. Niech będzie ABCD kwadrat (fig. 73); AC, jego przekątna: ponieważ tróykąt ABC jest prostokątny i równoramienny, przeto będzie $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$. Azatém *kwadrat z przekątney* AC *kwadratu, jest równy podwóynemu kwadratowi z jego boku* AB.

Tę własność oczywiściey pokazać można, prowadząc przez punkta A i C, linije równoległe do BD, a przez punkta B i D, linije równoległe do AC: tym sposobem utworzy się nowy kwadrat EFGH, który będzie kwadratem z AC. Widzimy zaś, że kwadrat EFGH, zawiera w sobie ośm troykątów równych troykątowi ABE, a zaś kwadrat ABCD zawiera ich tylko cztéry; azatém kwadrat EFGH jest dwa razy większy od ABCD.

Ponieważ $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, albo wyciągając pierwiastki kwadratowe, mamy $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$; azatém *przekątna kwadratu jest niewspółmierna ze swoim bokiem.*

To jeszcze się lepiey objaśni w inném zdarzeniu.

Wniosek III. Dowiedliśmy że kwadrat AH (fig. 64) jest równoważny prostokątowi BDEF; że zaś z przyczyny wspólney wysokości BF, kwadrat BCGF ma się do prostokąta BDEF, jak podstawa BC do podstawy BD, azatém

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : BD.$$

To jest, *kwadrat z przeciwprostokątney ma się do kwadratu z jednego boku kąta prostego, jak przeciwprostokątna do ucinka przyległego temu bokowi.* Nazywamy tu *ucinkiem*, część przeciwprostokątney zakończoną prostopadłą spuszczoną z kąta prostego; i tak BD, jest ucinkiem przyległym bokowi AB, a DC jest ucinkiem przyległym bokowi AC. Podobnym sposobem mielibyśmy

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : CD.$$

Wniosek IV. Prostokąty BDEF, DCGE, mające także jednę wysokość, mają się do siebie jak ich podstawy BD, CD. Że zaś te prostokąty są równoważne kwadratom $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$; azatém

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : CD.$$

Więc, *kwadraty z dwóch boków kąta prostego mają się do siebie jak ucinki przeciwprostokątney przyległe tym bokom.*

Wn. V. $\overline{AD}^2 = BD \times DC$. Wystawiwszy bowiem na BD kwadrat BN, mamy (I) $\overline{AD}^2 = AH - BN = BE - BN = MZ = BD \times DC$. (Kurz. str. 67)

[*]

PODANIE XII.

TWIERDZENIE.

W troykącie ABC (fig. 65), *jeżeli kąt* C *jest ostry, kwadrat z boku mu przeciwległego, będzie mnieyszy od summy kwadratów z boków ~~składających~~ obejmujących kąt ostry* C; *a gdy będzie spuszczona* AD *prostopadła na* BC; *różnica będzie równa podwóynemu prostokątowi* BD×CD: *tak iż mieć będziemy*:

Wyjaśnienie bez figury.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

Tu zachodzą dwa przypadki: 1° Jeżeli prostopadła pada wewnątrz troykąta ABC, mieć będziemy $BD = BC - CD$, a następnie (9), $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$. Dorzucając do jedney i drugiey strony $\overline{AD}^2$, i uważając że troykąty prostokątne ABD, ADC, dają $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$, i $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$; mieć będziemy $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$.

2°. Jeżeli prostopadła AD pada zewnątrz troykąta ABC, będzie $BD = CD - BC$; a następnie (9), $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2CD \times BC$. Dorzucając do je-

Używając wzoru jak Kurz. str. 80

[*] Dowód odwrotności twierdzenia Pytagorasowego, jak w Kurz. str. 68. B C A gdzie się wystawia BC prostopadłą do BC a równą CA. — Heurystyczne rozwinięcie twierdzenia Pytagorasowego (Pierwsze z Kurz., str. 76-77). — Zastosowania. 1) do wyprowadzenia prostopadłej przez troykąt 3, 4, 5. 2) do wyrach. jednego boku, gdy dwa inne są dane w liczbach.

dney i drugiey strony $\overline{AD}^2$; otrzymamy podobnie $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

W troykącie ABC (fig. 66), *jeżeli kąt* C *jest rozwarty, kwadrat z* AB, *boku przeciwległego, będzie większy od summy kwadratów z boków składających kąt rozwarty* C; *a jeżeli będzie spuszczona* AD, *prostopadła na* BC, *różnica będzie równa podwóynemu prostokątowi* BC×CD, *tak, iż będziemy mieli*:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD.$$

Prostopadła nie może padać wewnątrz troykąta; bo gdyby naprzykład padła w E, troykąt ACE miałby razem kat prosty E, i kąt rozwarty C; co jest niepodobieństwem (19, 1); więc padać musi zewnątrz; a więc mamy BD=BC+CD; stąd wypada (8), $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CD$ Dorzucając do jedney i drugiey strony, $\overline{AD}^2$, i czyniąc uproszczenia, jak w poprzedzającem twierdzeniu, znaydziemy $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.

Uwaga. Jeden tylko troykąt prostokątny, ma tę własność, iż summa kwadratów z dwóch boków, równa się kwadratowi z trzeciego; bo gdy kąt zawarty między temi bokami jest ostry, summa kwadratów z tych boków będzie większa od kwadratu boku przeciwległego; a będzie mnieyszą, jeżeli jest rozwarty. – Mając same boki Δ-ta w liczbach, jak poznać rodzaj kątów tym bokom przeciwległych.

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

W jakimkolwiek troykącie ABC, (fig. 67), *gdy się z wierzchołka jego poprowadzi linija* AE, *do środka podstawy, mieć będziemy* $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2$.

Spuśćmy prostopadłą AD na podstawę BC: troykąt AEC, przez XII podanie, daje:

$$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EC}^2-2EC\times ED.$$

Troykąt ABE, przez XIII podanie, daje:

$$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+2EB\times ED:$$

azatém dorzucając te dwie równości, i uważając że EB=EC; mieć będziemy:

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EB}^2.$$

Wniosek. W każdym równoległoboku summa kwadratów z boków jego, jest równa summie kwadratów z przekątnych.

Jakoż, przekątne AC, BD, (fig. 68), przecinają się z sobą na dwie równe części w punkcie E (51, 1); troykąt więc ABC daje:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2.$$

Troykąt ADC, podobnie daje:

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2.$$

Dodając do siebie członki tych dwóch równości i uważając, że $BE=DE$, znaydziemy:

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=4\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2.$$

Aże $4\overline{AE}^2$, jestto kwadrat z 2AE, czyli z AC; $4\overline{DE}^2$ jest kwadratem z BD; azatém summa kwadratów z boków, jest równa summie kwadratów z przekątnych.

Uwaga. Tw. ten jest tylko szcz. przyp. tw. nast.: W każdym 4kącie, summa kwadratów z jego boków jest = na summie kwadratów z przekątnych, [illegible] kwadratem [illegible] na linii łączącej środki tych dwóch przekątnych.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

Linija DE, *poprowadzona równolegle do podstawy troykąta* ABC, *dzieli boki* AB, AC, *proporcyonalnie* (fig. 69), *tak, że będzie* AD : DB : : AE : EC.

Daymy linije BE, i DC: dwa troykąty BDE, DEC, mają jednę podstawę DE, oraz jednę wysokość, jako mające swe wierzchołki B i C, na linii równoległey do podstawy; te więc troykąty są równoważne (2).

Troykąty ADE, BDE, jako mające wierzchołek wspólny w E, azatém jedney wysokości, ma-

[x]

$$\overline{ab}^2+\overline{bc}^2=2\overline{ae}^2+2\overline{be}^2$$
$$\overline{cd}^2+\overline{da}^2=2\overline{ae}^2+2\overline{de}^2$$
$$\overline{ab}^2+\overline{bc}^2+\overline{cd}^2+\overline{da}^2=\overline{ac}^2+2(\overline{be}^2+\overline{de}^2)$$
$$\overline{be}^2+\overline{de}^2=2\overline{bf}^2+2\overline{ef}^2$$
$$\overline{ab}^2+\overline{bc}^2+\overline{cd}^2+\overline{da}^2=\overline{ac}^2+4\overline{bf}^2+4\overline{ef}^2$$
$$=\overline{ac}^2+\overline{bd}^2+4\overline{ef}^2$$

ją się do siebie jak ich podstawy AD, DB (6), tak, iż

ADE : BDE : : AD : DB.

Troykąty ADE, DEC, których wierzchołek jest wspólny w D, mają także jednę wysokość, azatém mają się do siebie jak ich podstawy AE, EC, więc

ADE : DEC : : AE : EC:

aże troykąt BDE=DEC, przeto, z przyczyny wspólnego stosunku w tych dwóch proporcyach, wnosimy: że AD : DB : : AE : EC.

Wniosek I. Stąd składając, wypada, AD+DB: AD : : AE+EC : AE, czyli AB : AD : : AC : AE; i także AB : BD : : AC : CE. [illegible]

Wniosek II. *Jeżeli między dwie linije proste* AB, CD (fig. 70), *ilekolwiek poprowadzi się liniy sobie równoległych* AC, EF, GH, BD, i t. d. *te linije proste będą przecięte proporcyonalnie; tak iż będzie:* AE : CF : : EG : FH : : GB : HD. 1° Gdy AB, CD są równoległe.

Niech będzie bowiem O punktem spotkania się liniy prostych AB, CD; w troykącie OEF, gdzie linija AC równoległą jest podstawie EF, mieć będziemy, OE : AE : : OF : CF czyli OE : OF : : AE : CF. W troykącie OGH, podobnie mieć będziemy OE : EG : : OF : FH, czyli OE : OF : : EG : FH; azatém z przyczyny wspólnego stosunku OE : OF, te dwie proporcye dają AE : CF : : EG : FH. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że EG : FH : : GB : HD, 6

Inny dowód w Kunze str. 163

I na odwrot: jeżeli dwie l. proste są [illegible] trzech lub więcej l. prostych przecięte na odcinki proporcyonalne, a dwie którekolwiek z tych linij [illegible] są od siebie [illegible], to i wszystkie te l. [illegible] od siebie równoległe, byleby te linie [illegible] nie krzyżowały się z sobą [illegible] pomiędzy [illegible].

i tak daley; azatém linije AB, CD, są proporcyonalnie przecięte przez równoległe EF, GH, i t. d.

PODANIE XVI.

TWIERDZENIE.

Wzajemnie, jeżeli boki AB, AC, *są proporcyonalnie przecięte przez liniją* DE, *tak, że jest* AD : DB : : AE : EC; *powiadam, że ta linija* DE, *będzie rownoległą do podstawy* BC (fig. 71).

Bo jeżeli gdy DE nie jest równoległą do BC, niech więc będzie taką DO; wówczas, podług poprzedzającego twierdzenia, mieć będziemy AD : BD : : AO : OC. Aże z założenia AD : DB : : AE : EC; więc mieć będziemy AO : OC : : AE : EC : proporcya niepodobna, bo z jedney strony poprzednik AE, jest większy od AO, a z drugiey następnik EC, jest mnieyszy od OC; azatém linija równoległa do BC, przez punkt D poprowadzona, nie może się różnić od DE, azatém DE jest tą równoległą.

Uwaga. Toż samoby wypadło, gdybyśmy założyli proporcyą AB : AD : : AC : AE; gdyż ta proporcya dałaby AB—AD : AD : : AC—AE : AE, czyli BD : AD : : CE : AE.

PODANIE XVII.

TWIERDZENIE.

Linija AD, *dzieląca kąt* BAC *troykąta, na dwie równe części, dzieli ~~także~~ podstawę* BC *na dwa ucinki* BD, DC, *proporcyonalne bokom przyległym* AB, AC; *tak, że będzie* BD : DC : : AB : AC (fig. 72).

Przez punkt C daymy CE, równoległą do AD, aż do spotkania się z przedłużonym bokiem BA. Ponieważ w troykącie BCE, linija AD jest równoległą podstawie CE, więc mieć będziemy tę proporcyą (15),

BD : DC : : AB : AE

lecz troykąt ACE jest równoramienny; bo z przyczyny liniy równoległych AD, CE, kąt ACE=DAC i kąt AEC=BAD (24, 1). Aże z założenia kąt DAC=BAD, więc kąt ACE=AEC; a następnie AE=AC (13, 1). Podstawując więc AC na mieyscu AE, w proporcyi poprzedzającey, mieć będziemy

BD : DC : : AB : AC.

Odwrotność tego twierdzenia. — Wniosek o podobnym twierdzeniu dla linii dzielącej kąt zewnętrzny trójkąta na dwie części równe. — Wniosek drugi o punktach harmonijnych. (Ob. Kuntze str. 166) Kuntze str. 168

PODANIE XVIII.

TWIERDZENIE.

Dwa troykąty równokątne mają boki odpowiedne proporcyonalne i są podobne.

Niech będą ABC, DCE (fig. 74), dwa troykąty mające kąty równe, to jest BAC = CDE, ABC = DCE, i ACB = DEC; powiadam, że boki odpowiedne, czyli przyległe kątom równym, będą proporcynalne, tak, że będzie BC : CE : : AB : CD : : AC : DE.

Umieśćmy boki odpowiedne BC, CE w jednym kierunku linii, i przedłużmy boki BA, ED, aż do zbieżenia się z sobą w punkcie F.

Ponieważ BCE jest liniją prostą, a kąt BCA = CED, przeto AC jest równoległa DE (24, 1). Podobnie, ponieważ kąt ABC = DCE, linija AB jest równoległa do DC; azatém figura ACDF jest równoległobokiem. W troykącie BFE, ponieważ linija AC jest równoległa do podstawy FE, przeto mieć będziemy BC : CE : : BA : AF (15), kładąc na mieyscu AF jemu równy bok CD, mieć będziemy

BC : CE : : BA : CD.

W tymże samym troykącie BFE, uważając BF jako podstawę, CD jest równoległą tey podstawie, i mamy tę proporcyą BC : CE : : FD : DE;

kładąc na mieyscu FD, jemu równy AC, mieć będziemy

BC : CE : : AC : DE.

Nakoniec, z tych dwóch proporcyy, zawierających stosunek wspólny BC : CE, wnosimy także

AC : DE : : BA : CD.

Azatém troykąty równokątne BAC, CDE mają boki odpowiedne proporcyonalne. Aże podług opisania II, dwie figury są podobne, gdy mają kąty ~~odpowiednie~~ równe, i boki odpowiedne proporcyonalne, więc troykąty równokątne BAC, CDE są figurami podobnemi.

Wniosek. Aby dwa troykąty były podobne sobie, dosyć jest aby miały dwa kąty ~~odpowiednie~~ równe, bo tém samém trzeci kąt jednego będzie równy trzeciemu kątowi drugiego troykąta, i takie dwa troykąty będą równokątne.

Uwaga. Należy uważać, że w troykątach podobnych boki odpowiedne leżą na przeciwko kątów równych: i tak, ponieważ kąt ACB jest równy kątowi DEC, bok AB jest odpowiedny bokowi DC; podobnież, boki AC i DE są bokami odpowiednemi, jako leżące na przeciwko kątów równych ABC, DCE; wiedząc ~~że~~ które boki są odpowiedne, natychmiast tworzymy proporcye

AB : DC : : AC : DE : : BC : CE.

Uw. 2. Dwa trójkąty są podobne, gdy boki jednego są albo wszystkie trzy równoległe, albo wszystkie trzy prostopadłe do boków drugiego [illegible]

Uw. 2. W takich dwóch trójkątach, w których kąt jeden pierwszego jest = kątowi drugiego, a kąt drugi pierwszego z kątem drugiego trójkąta dopełniają się do dwóch kątów prostych, boki przeciwne kątom ~~równym~~ mają się do siebie jak boki przeciwne kątom dopełniającym się. (Planche II fig. 11-12). Co jednak właściwie jest tylko [illegible] wystawieniem Podania XVII na str. 63., gdzie takiemi tr. są ADB i ADC

PODANIE XIX.

TWIERDZENIE.

Dwa troykąty mające boki odpowiedne proporcyonalne, są równokątne i podobne sobie.

Załóżmy że mamy BC : EF : : AB : DE : : AC : DF (fig. 75); powiadam, że troykąty ABC, DEF, mieć będą kąty równe, to jest że A = D, B = E, C = F.

Zróbmy w punkcie E, kąt FEG = B, a w punkcie F, kąt EFG = C, trzeci więc G będzie równy trzeciemu A, i te dwa troykąty ABC, EFG, będą równokątne; azatém, na mocy poprzedzającego twierdzenia, mieć będziemy BC : EF : : AB : EG; aże z założenia BC : EF : : AB : DE, azatém EG = DE. Mieć będziemy jeszcze, przez tożsamo twierdzenie, BC : EF : : AC : FG; aże z założenia mamy BC : EF : : AC : DF, więc FG = DF, azatém troykąty EGF, DEF, jako mające boki równe, są równe sobie (11, 1). Lecz z wykreślenia troykąt EGF jest równokątny z troykątem ABC, azatém także troykąty DEF, ABC są równokątne i podobne.

Uwaga I. Z tych dwóch ostatnich podań widzimy, że równość kątów troykąta wypływa z proporcyonalności boków, i wzajemnie, tak że jeden z tych warunków, jest dostatecznym do podobności troykątów; nie jest tożsamo w figurach mających więcey niż trzy boki; bo mówiąc tylko o czworoboku, można nieodmieniając kątów popsuć proporcyą boków; albo nieodmieniając boków odmienić kąty: a tak, proporcyonalność boków nie może bydź wypadkiem równości kątów, ani *odwrotnie*. Widzimy naprzykład, gdy poprowadzimy EF (fig. 76) równoległą do BC. kąty czworoboku AEFD, są równe kątóm czworoboku ABCD; lecz proporcya boków jest różna. Podobnie, nieodmieniając cztérech boków AB, BC, CD, AD, można przybliżyć albo oddalić punkt B od punktu D; przez co odmienią się kąty.

Uwaga II. Dwa poprzedzające podania, właściwie mówiąc, składają jedno tylko; a przyłączone do nich podanie na kwadrat z przeciwprostokątnéy, stanowią nayważnieysze i nayobfitsze w Geometryi podania, które prawie jedne są dostateczne we wszystkich zastosowaniach i rozwiązaniu wszelkich zagadnień: a to dla tego, że wszystkie figury podzielić się mogą na troykąty, a każdy troykąt na dwa troykąty prostokątne. Azatém własności ogólne troykątów zawierają w sobie sposobem zawikłanym własności wszystkich figur.

PODANIE XX.

TWIERDZENIE.

Dwa troykąty mające po kącie równym, zawartym między bokami proporcyonalnémi, są podobne.

Niech będzie kąt A=D, i przypuśćmy że jest AB : DE : : AC : DF; powiadam, że troykąt ABC jest podobny troykątowi DEF (fig. 77).

Weźmy AG=DE i poprowadźmy GH równoległą do BC: kąt AGH, będzie równy kątowi ABC (24, 1); a troykąt AGH, będzie równokątnym z troykątem ABC, mieć więc będziemy AB : AG : : AC : AH; a że z założenia AB : DE : : AC : DF, a z wykreślenia AG=DE, azatém AH=DF; dwa więc troykąty AGH, DEF, mają kąt zawarty między bokami równémi, a zatém są one równe. Aże troykąt AGH jest podobny troykątowi ABC, a zatém troykąt DEF, jest także podobny ABC.

PODANIE XXI.

TWIERDZENIE.

Dwa troykąty mające boki odpowiedne równoległe, albo do siebie prostopadłe, są podobne.

Bo, 1°. Jeżeli bok AB jest równoległy do DE

Dwa trójkąty są podobne, gdy dwa boki jednego są proporcyonalne dwóm bokom drugiego trójkąta, i gdy kąty przeciwległe [większym z tych boków proporcyonalnych, są równe sobie. (Grzegorz. T. I. str. 175)
(Lub [illegible] tak, jak [illegible] T. I. str. 172.)

(fig. 78), a bok BC równoległy do EF, kąt ABC jest równy DEF (27, 1): jeżeli nadto, AC jest równoległy do DF, kąt ACB będzie równy DFE; i BAC równy EDF: azatém troykąty ABC, DEF, są równokątne a więc podobne.

2°. Niech będzie bok DE (fig. 79) prostopadły do AB, i bok DF prostopadły do AC; w czworoboku AIDH, dwa kąty I i H są proste; aże cztéry kąty razem wzięte ważą cztéry kąty proste (20, 1); a zatém dwa pozostałe IAH, IDH ważą dwa kąty proste. Lecz dwa kąty EDF, IDH ważą także dwa kąty proste, więc kąt EDF jest równy kątowi IAH czyli BAC. Podobnie, jeżeli trzeci bok EF jest prostopadły do trzeciego BC, dowiedlibyśmy, że kąt DFE = C, a DEF = B; a zatém dwa troykąty ABC, DEF, mające boki odpowiednie prostopadłe do siebie, są równokątne i podobne.

Uwaga. W przypadku boków równoległych, boki odpowiedne są to boki równoległe, a w przypadku boków prostopadłych, boki odpowiedne są to boki prostopadłe: i tak w ostatnim tym przypadku, DE jest odpowiedny AB; DF odpowiedny AC; EF odpowiedny BC.

W przypadku boków prostopadłych, położenie względne dwoch troykątow może bydź różne od tego, jakie jest wystawione na figurze 79. Lecz równość odpowiednych kątów, dowiedzie się zawsze, bądź z czworoboków, jakim jest AIDH, którego dwa kąty są proste, bądź przez porównanie dwóch troykątów, mających kąty w wierz-

Fig. 77. Z[illegible]. AB : DE = AC : DF, B = E, nadto AC > AB a tém samém DF > DE.

Dowodzenie.

Odcinam AG = DE, AH = DF, łączę GH. Z tąd, na mocy proporcyi ułożonej, [illegible] AB : AG = AC : AH, [illegible] GH równoległa do BC, a zatem G = B. Że B = E [illegible], więc G = E, a dwa trójkąty AGH i DEF, przy tym przypadku, kąty są równe. Lecz AGH jest równokątny względem ABC, więc ABC i DEF są także równokątne, a [illegible] pro[illegible] do siebie [illegible]

[illegible] jednej naprzeciwległe boki są równe, a kąty przeciwległe [illegible] [illegible] albo oba [illegible], albo oba razem rozwarte.

Dowodz. Dla jednostajności, lepiej dowodzić tym samym przez sposobem, jak podanie XX, to jest: odcinając AG = DE i prowadząc GH równoległą do BC.

chołku przeciwległe i kąt prosty: oprócz tego, można zawsze uważać, że nakreślono, wewnątrz troykąta ABC, troykąt DEF, którego boki są równoległe bokóm troykąta porównywanego z ABC, a wówczas dowodzenie sprowadzi się do przypadku figury 79.

PODANIE XXII.

TWIERDZENIE.

Linije AF, AG *i t. d. jakkolwiek poprowadzone przez wierzchołek troykąta, dzielą podstawę* BC *i jéy równoległą* DE, *proporcyonalnie; tak, że będzie* DI : BF : : IK : FG : : KL : GH i t. d. (fig. 80). [

Ponieważ linija DI jest równoległa do BF, troykąt ADI jest równokątnym z ABF, i mamy tę proporcyą DI : BF : : AI : AF. Podobnie, ponieważ IK jest równoległa do FG; przeto będzie AI : AF : : IK : FG, azatém, z przyczyny spólnego stosunku AI : AF, będzie DI : BF : : IK : FG; podobnym sposobem znaydziemy IK : FG : : KL : GH, i t. d.; azatém linija DE tak jest podzieloną w punktach I, K, L, jak podstawa BC w punktach F, G, H.

Wniosek. Jeżeli więc BC podzieloną będzie na części równe w punktach F, G, H, tedy i równoległa jéy DE, podzieloną będzie także na części równe w punktach I, K, L.

[I na odwrót: jeśli podstawa trójkąta i jej równoległa na [illegible] drugich bokach zakończona, podzielone na ilekolwiek odcinków sobie proporcjonalnych, natenczas każde z punktów podziału odpowiednie [illegible], leżą z wierzchołkiem trójkąta na jednej linii prostej (Kurzw. str. 164).

PODANIE XXIII.

TWIERDZENIE.

W troykącie prostokątnym, jeżeli z wierzchołka kąta prostego A, *spuszczona będzie prostopadła* AD, *na przeciwprostokątną jego*, (fig. 81).

1° *Dwa troykąty cząstkowe* ABD, ADC *będą ~~sobie~~ podobne ~~i~~ całemu troykątowi* ABC. [illegible] sobie.

2° *Każdy bok* AB *lub* AC, *będzie średnio-proporcyonalny, między przeciwprostokątną* BC *i ucinkiem przyległym* BD *lub* DC.

3° *Prostopadła* AD, *będzie średnią proporcyonalną między dwoma ucinkami* BD, DC.

Bo, 1°. Troykąty BAD, BAC, mają kąt wspólny B, nadto kąt prosty BDA jest równy kątowi prostemu BAC; a zatém trzeci kąt BAD jednego, jest równy trzeciemu C, drugiego troykąta; azatém te dwa troykąty są równokątne i podobne: dowiedlibyśmy podobnie, że troykąt DAC jest podobny troykątowi BAC: trzy więc troykąty są równokątne i podobne między sobą.

2°. Ponieważ tróykąt BAD jest podobny tróykątowi BAC, więc ich boki odpowiednie są proporcyonalne; aże bok BD, w małym tróykącie, jest odpowiedny BA w wielkim, gdyż one leżą na przeciwko kątów równych BAD, BCA; przeciwprostokątna BA małego, jest odpowiedna przeciwprostokątney BC wielkiego troykąta; azatém utworzyć możemy proporcyą BD : BA : : BA : BC. Podobnym sposobem znaleźlibyśmy DC : AC : : AC : BC : więc 2° każdy z boków AB, AC jest średnim proporcyonalnym między przeciwprostokątną i ucinkiem przyległym temu bokowi.

3°. Nakoniec, podobność tróykątów ABD, ADC, przez porównanie boków odpowiednych, daje BD : AD : : AD : DC: azatém 3° prostopadła AD jest średnią proporcyonalną między ucinkami BD, DC przeciwprostokątnéy.

Uwaga. Proporcya BD : AB : : AB : BC, równając mnogość wyrazow skraynych z mnogością średnich, daje $\overline{AB}^2 = BD \times BC$.

Mamy podobnie $\overline{AC}^2 = DC \times BC$; azatém $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times BC + DC \times BC$. Drugi członek jest to samo co $(BD + DC) \times BC$, i przywodzi się do $BC \times BC$ czyli $\overline{BC}^2$, azatém będzie $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; kwadrat więc zbudowany na przeciwprostokątnéy BC jest równy summie kwadratów zbudowanych na dwóch innych bokach AB, AC. Wpadamy więc tu na podanie kwadratu z przeciwprostokątnéy, cale różną drogą od téy, jakąśmy tam szli; skąd widzimy, że właściwie mówiąc, podanie kwadratu z przeciwprostokątnéy jest wypadkiem proporcyonalności boków w tróy-kątach równokątnych. A tak podania fundamentalne Geometryi sprowadzają się, że tak powiem, do tego tylko jednego, że w troykątach równokątnych boki odpowiedne są proporcyonalne.

Często się zdarza, jak teraz przykład mieliśmy tego, że wyciągając wnioski z jednego lub wielu podań, wpadamy na podanie już dowiedzione. W ogólności, głównym charakterem twierdzeń Geometrycznych i nieprzpartym dowodem ich pewności, jest to, że kombinując je razem, jakimkolwiek sposobem, byleby rozumować prawie, wpadniemy zawsze na wypadki dokładne. Niebyłoby tak, gdyby niektóre podania były fałszywe albo tylko mniey więcey prawdziwe: zdarzyłoby się często, że przez kombinacyą podań między sobą, błąd urosłby i stałby się widocznym. Tego mamy przykłady we wszystkich dowodzeniach, w których używamy *przywiedzenia do niedorzeczności.* Dowodzenia te, w których zamierzamy wyprobować, że dwie ilości są równe, zależą na pokazaniu, że gdyby między niemi była naymnieysza jaka nierówność, tedy przyszlibyśmy przez ciąg rozumowania do niedorzeczności jawney i w oczy bijącey; skąd wnosić musimy, że te dwie ilości są równe.

Wniosek. Jeżeli z punktu A (fig. 82), wziętego na okręgu koła, poprowadzą się dwie cięciwy AB, AC do końców średnicy BC, troykąt BAC, będzie prostokątnym w A (18, 2); azatém 1° *prostopadła* AD, *jest średnią propor-*

cyonalną między dwóma ucinkami BD, DC, *średnicy*. Albo, co na toż samo wychodzi, kwadrat $\overline{AD}^2$ jest równy prostokątowi $BD \times DC$.

2°. *Cięciwa* AB, *jest średnią proporcyonalną, między średnicą* BC *i ucinkiem przyległym* BD; albo, co na jedno wychodzi, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$.

Podobnie mamy $\overline{AC}^2 = CD \times BC$; azatém $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$; a gdy porównamy $\overline{AB}^2$ do $\overline{BC}^2$, mieć będziemy $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: BD : BC$. Podobnym sposobem otrzymalibyśmy $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: DC : BC$. Te stosunki kwadratów z boków, bądź między sobą, bądź z kwadratem przeciwprostokątney, były już podane, jako wniosek III i IV pod. XI.

PODANIE XXIV.

TWIERDZENIE.

Dwa troykąty mające jeden kąt równy, mają się do siebie, jak prostokąty z boków składających ten kąt równy; i tak troykąt ABC (fig. 83), *ma się do troykąta* ADE, *jak prostokąt* $AB \times AC$ *do prostokąta* $AD \times AE$.

Daymy liniją BE: dwa troykąty ABE, ADE, których wierzchołek jest wspólny w E, są równey wysokości, a więc mają się do siebie, jak ich podstawy AB, AD, (6), to jest:

$$ABE : ADE :: AB : AD.$$

Podobnie mamy,

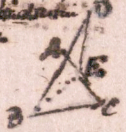
ABC : ABE : : AC : AE.

Mnożąc przez się te dwie proporcye w porządku w jakim są napisane, i opuszczając wspólny termin ABE, mieć będziemy:

ABC : ADE : : AB×AC : AD×AE.

Wniosek. Dwa więc troykąty [niemiejsze] będą równoważne, jeżeli prostokąt AB×AC, jest równy prostokątowi AD×AE, albo gdy jest AB : AD : : AE : AC. Coby zachodziło wtenczas, kiedyby linija DC była równoległą do BE.

Uw. Dwa tr., w których kąt jednego i drugiego równa się do dwóch kątów prostych, mają się także do siebie jak prostokąty z boków te kąty zamykających. Dowodzenie to samo.



PODANIE XXV.

TWIERDZENIE.

[*] *Dwa troykąty podobne, mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednych.*

Niech będzie kąt A=D i B=E (fig, 77): naprzód, z przyczyny kątów równych A i D, na mocy poprzedzającego podania, mamy

ABC : DEF : : AB×AC : DE×DF.

Nadto, z przyczyny podobieństwa troykątów mamy

AB : DE : : AC : DF;

jeżeli teraz wyrazy tey proporcyi pomnożymy

[*] Tego tw. można ~~dowieść~~ pokazaniem pierwej, że gdy w dwóch tr. podobnych, z wierzchołków sobie odpowiadających spuścimy prostopadłe do boków tym wierzchołkom przeciwległych, to wtenczas rozdziela się na dwie pary tr. prostokątnych takie sobie podobnych (Kuntze str. 173 f. 77)

przez odpowiadające wyrazy proporcyi tosamey

$$AC : DF :: AC : DF;$$

~~stąd~~ wypadnie

$$AB\times AC : DE\times DF :: \overline{AC}^2 : \overline{FD}^2.$$

Azatém

$$ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Dwa więc troykąty podobne ABC, DEF, mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednych AC, DF, albo jak kwadraty z dwóch innych jakichkolwiek boków odpowiednych sobie.

[illegible] Odpowiadające sobie boki [illegible] tr. podobnych [illegible]

PODANIE XXVI.

TWIERDZENIE.

Dwa wieloboki podobne, składają się z jedney liczby troykątów podobnych każdy każdemu, i podobnie rozłożonych.

W wieloboku ABCDE (fig. 84), daymy z jednego kąta A, przekątne AC, AD, do innych kątów. W drugim wieloboku FGHIK, podobnie z kąta F odpowiednego kątowi A, daymy przekątne FH, FI do innych kątów.

Ponieważ wieloboki są podobne, kąt ABC jest równy sobie odpowiednemu FGH (opis. 2), i nadto, boki AB, BC są proporcyonalne bokom FG, GH, tak, że $AB : FG :: BC : GH$.

Z tego wypada: że troykąty ABC, FGH, mają kąt równy zawarty między bokami proporcyonalnemi; azatém są podobne (20): kąt więc BCA, jest równy GHF. Te kąty równe odciągnione od kątów sobie równych BCD, GHI, dają reszty ACD, FHI równe: lecz ponieważ troykąty ABC, FGH są podobne, będzie AC : FH : : BC : GH; nadto, z przyczyny podobności wieloboków, BC : GH : : CD : HI; więc AC : FH : : CD : HI: aże już widzieliśmy, że kąt ACD=FHI, azatém troykąty ACD, FHI, mają kąt równy zawarty między bokami proporcyonalnemi, a więc są podobne.

Podobnym sposobem ciągnęlibyśmy daley dowodzenie podobności następnych troykątów, jakabykolwiek była liczba boków wieloboku założonego: azatém dwa wieloboki podobne składają się z jednakiey liczby troykątów podobnych, i podobnie rozłożonych.

Uwaga. Podanie ~~wywrótne~~ odwrótne jest równie prawdziwe: *jeżeli dwa wieloboki złożone są z jednakiey liczby troykątów podobnych. i podobnie rozłożonych, tedy te wieloboki są podobne.*

Gdyż podobieństwo troykątów odpowiednych, daje kąt ABC=FGH, BCA=GHF, ACD=FHI; azatém BCD=GHI, także CDE=HIK i t. d. Nadto mieć będziemy, AB : FG : : BC : GH : : AC : FH : : CD : HI i t. d.; więc takie dwa wieloboki mają kąty równe i boki proporcyonalne, azatém są podobne sobie.

PODANIE XXVII.

TWIERDZENIE.

Obwody wieloboków podobnych mają się do siebie jak boki odpowiedne, a powierzchnie ich, jak kwadraty z tych boków.

1°. Ponieważ z natury figur podobnych (fig. 84), mamy AB : FG : : BC : GH : : CD : HI i t. d.; wnieść możemy z tego szeregu stosunków równych: Summa poprzedników AB + BC + CD i t. d., obwód figury pierwszey, ma się do summy następników FG + GH + HI i t. d., obwodu drugiey figury, jak poprzednik do swego następnika, czyli jak bok AB do sobie odpowiadającego FG. ([illegible] podobnych).

2°. Ponieważ troykąty ABC, FGH, są podobne, przeto mamy (25) ABC : FGH : : $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$; także troykąty podobne ACD, FHI dają ACD : FHI : : $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$; azatém, z przyczyny stosunku wspólnego $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$ będzie

$$ABC : FGH : : ACD : FHI.$$

Przez podobne rozumowanie znaydziemy

$$ACD : FHI : : ADE : FIK$$

i tak daley, gdyby była większa liczba troykątów. Z tego szeregu stosunków równych wnosimy: Summa poprzedników ABC+ACD+ADE, czyli wielobok ABCDE, ma się do summy następników FGH + FHI + FIK, czyli do wieloboku FGHIK, jak poprzednik ABC do swego następnika FGH, czyli jak $\overline{AB}^2$ do $\overline{FG}^2$; azatém powierzchnie wieloboków podobnych mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednych.

Wniosek. Jeżeli wystawimy trzy figury podobne, których boki odpowiedne są równe w szczególności trzem bokom troykąta prostokątnego, figura wystawiona na boku wielkim, będzie równa summie dwóch innych: gdyż te trzy figury są proporcyonalne kwadratom z ich boków odpowiednych, aże kwadrat z przeciwprostokątney jest równy summie kwadratów z dwóch innych boków, azatém i t. d.

Uw. Tw. Pitagoresowe jest tylko szczególnym przypadkiem niniejszego wniosku, bo [illegible]

PODANIE XXVIII.

TWIERDZENIE.

Części dwóch cięciw AB, CD, (fig. 85), *przecinających się w kole, są wzajemnie proporcyonalne, tojest że* AO : DO : : CO : OB.

Daymy linije AC i BD; tróykąty ACO, BOD, mają kąty w O równe, jako w wierzchołku przeciwległe; kąt A jest równy kątowi D, jako wpisane w jeden ucinek (18, 2); dla teyże samey przyczyny, kąt C = B; azatém te troykąty są podobne, więc boki odpowiedne, dają proporcyą

AO : DO : : CO : OB.

Wniosek. Stąd wyciągamy AO×OB=DO×CO, azatém prostokąt z dwóch części jedney cięciwy, jest równy prostokątowi z dwóch części drugiey cięciwy.

PODANIE XXIX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli z jednego punktu O (fig. 86), *wziętego za kołem, poprowadzą się sieczne* OB, OC, *kończące się na łuku wklęsłym* BC, *tedy całkowite sieczne, będą wzajemnie proporcyonalne swoim częściom zewnętrznym, tojest: będzie* OB : OC : : OD : OA.

Bo gdy damy AC, BD, tróykąty OAC, OBD mieć będą kąt wspólny O, i kąt B=C (18, 2); a zatém te troykąty są podobne, więc ich boki odpowiedne dają proporcyą

OB : OC : : OD : OA.

Wniosek. Azatém prostokąt OA×OB jest równy prostokątowi OC×OD.

Uwaga. Uważać tu możemy, że to podanie wiele ma podobieństwa z poprzedzającém, i tém się tylko od niego różni, że dwie cięciwy AB, CD, zamiast przecinania się z sobą w kole, przecinają się zewnątrz niego. Następujące podanie może się uważać także jako szczególny przypadek, tegoż podania.

PODANIE XXX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli z punktu O, *wziętego za kołem* (fig. 87), *poprowadzona* inna ~~*będzie*~~ *styczna* OA, *i sieczną* OC, ~~*tedy*~~ *styczna będzie średnią proporcyonalną między sieczną i jéy częścią zewnętrzną, tak, iż będzie* OC : OA : : OA : OD *albo co na jedno wychodzi*, $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

Gdy bowiem damy AD i AC, tróykąty OAD, OAC, mieć będą kąt wspólny O; nadto kąt OAD, utworzony przez styczną i cięciwę (19, 2), ma za miarę połowę łuku AD, i kąt C, ma też samę miarę, azatém kąt OAD = C; więc dwa te troykąty są podobne, i dają proporcyą

$$OC : OA : : OA : OD$$

która daje $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

Dodatek: O potędze pktu względem koła — [illegible]

PODANIE XXXI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli w tróykącie ABC, *podzielony będzie kąt* A *na dwie części równe liniją* AD (fig. 88); *prostokąt z boków* AB, AC, ten kąt zawierających *będzie równy prostokątowi z ucinkow* BD;

łukiem trzeciego zmniejszonemu

DC, ~~*więcéy*~~ *kwadrat*em *z linii* AD, *dzielącéy kąt na dwie równe części.*

Poprowadźmy koło przez trzy punkta A, B, C; przedłużmy AD, aż do spotkania się z okręgiem koła w punkcie E, i daymy CE.

Tróykąt BAD jest podobny tróykątowi EAC; bo z założenia kąt BAD=EAC; kąt B=E, gdyż oba mają za miarę połowę łuku AC; azatém te tróykąty są podobne, więc boki odpowiedne dają proporcyą BA : AE : : AD : AC. Skąd wypada BA×AC=AE×AD; aże AE=AD+DE; przeto pomnożywszy tę równość przez AD, będziemy mieli $AE\times AD=\overline{AD}^2+AD\times DE$. Że zaś $AD\times DE=BD\times DC$ (28); azatém $BA\times AC=\overline{AD}^2+BD\times DC$.

NB. Dodać, do [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] XVII.

Kontr. T. I. [illegible]

Uwaga. Jeżeli AC > AB, linia dzieląca kąt zewnętrzny BAC' na dwie równe części, spotka CB w punkcie D', i będzie $BA\times AC=BD'\times D'C-\overline{AD'}^2$.

PODANIE XXXII.

TWIERDZENIE.

W każdym tróykącie ABC (fig. 89), *prostokąt z dwóch boków* AB, AC, *jest równy prostokątowi ze średnicy* CE, *koła opisującego ten tróykąt, i prostopadłéy* AD, *spuszczonéy na trzeci bok* BC *tróykąta.* z wierzchołka kąta temu bokowi przeciwległego.

Bo, daymy liniją AE: tróykąty ABD, AEC, są prostokątne jeden w D drugi w A; nadto kąt B=E; te więc tróykąty są podobne, i dają tę proporcyą

AB : CE : : AD : AC

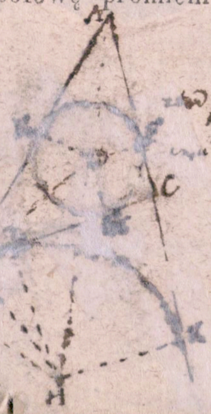
skąd AB×AC = CE×AD.

Wniosek. Gdy pomnożymy te ilości równe przez jednę ilość BC, będzie AB×AC×BC = CE×AD×BC. Aże AD×BC równa się podwóyney powierzchni tróykąta (6); azatém *mnogość z trzech boków tróykąta równa jest powierzchni jego mnożoney przez podwóyną średnicę koła opisującego tróykąt.*

Mnogość z trzech liniy nazywa się czasami *bryłą*, czego przyczynę niżey obaczymy, jéy wartość łatwo się poymuje, wyobrażając że linije są obrócone na liczby.

Uwaga. Można dowieść także, że *powierzchnia tróykąta równa jest obwodowi jego, mnożonemu przez połowę promienia koła weń wpisanego.*

Gdyż troykąty AOB, BOC, AOC (fig. 42), mające swóy wierzchołek wspólny w O, mają za wysokość wspólną promień koła wpisanego; więc summa tych troykątów będzie równa summie podstaw AB, BC, AC, mnożoney przez połowę promienia OD, azatém powierzchnia tróykąta ABC, jest równa jego obwodowi mnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego.



$AE : DE = AI : HI$, bo $DE \parallel HI$

$BE : DE = HI : BI$, bo $BED \sim HIB$

$AE.BE : \overline{DE}^2 = AI : BI$

$\overline{DE}^2.AI = AE.BE.BI$,

$(DE.AI)^2 = AI.AE.BE.BI$.

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $a+b+c = 2p$,

$AI = p$, $AE = p-a$, $BE = p-b$, $BI = p-c$;

więc $DE.AI =$ pow. $ABC = \Delta$, i

$\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

PODANIE XXXIII.

TWIERDZENIE.

W każdym czworoboku ABCD *wpisanym w koło* (fig. 90), *prostokąt z dwóch przekątnych* AC, BD, *jest równy summie prostokątów z boków* ~~*im*~~ *przeciwległych* sobie; *tak, że będzie.*

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Cyli prosciej: Uczyńmy kąt CDI = ABD.

Weźmy łuk CO = AD, i daymy BO, która przetnie przekątną AC w punkcie I.

Kąt ABD = CBI; gdyż jeden ma za miarę połowę AD, a drugi połowę CO równą AD. Kąt ADB = BCI; gdyż są wpisane w jeden ucinek AOB; azatém tróykąt ABD jest podobny tróykątowi IBC; więc tę ułożyć możemy proporcyą AD : CI : : BD : BC, skąd AD × BC = CI × BD.

ABD ∼ IBC

BCD ∼ BIA

Powiadam teraz, że tróykąt ABI jest podobny tróykątowi BDC, bo łuk AD jest równy CO; gdy więc do jednego i drugiego dodamy OD, mieć będziemy łuk AO = DC, azatém kąt ABI = DBC; nadto, kąt BAI = BDC; bo są wpisane w jeden ucinek: tróykąty więc ABI, DBC są podobne; azatém boki ich odpowiedne dają proporcyą CD : IA = BD : AB

AB : BD : : AI : CD

skąd AB × CD = AI × BD. Dodawszy dwa wypadki znalezione i uważając, że AI × BD + CI ×

$BD=(AI+CI)\times BD=AC\times BD$, znaydziemy $AD\times BC+AB\times CD=AC\times BD$.

Uwaga. Podobnym sposobem dowieść można innego twierdzenia tyczącego się czworoboku wpisanego.

Twierdzenie to powiedź. wystawione samo. przez się do wyrażenia przekątnych czworokąta wpisanego w koło, przez boki tegoż czworokąta.

Tróykąt ABD podobny troykątowi BIC; daje proporcyą $BD:BC::AB:BI$, skąd $BI\times BD=BC\times AB$. Gdy damy CO, troykąt ICO, podobny troykątowi ABI, będzie podobny tróykątowi BDC, i da proporcyą $BD:CO::DC:OI$ skąd $OI\times BD=CO\times DC$; czyli, że $CO=AD$, $OI\times BD=AD\times DC$. Dodając te dwa wypadki do siebie, i uważając że $BI\times BD+OI\times BD$, przywodzi się do $BO\times BD$, otrzymamy

$$BO\times BD=AB\times BC+AD\times DC.$$

Gdybyśmy wzięli $BP=AD$, i dali CKP, znalezlibyśmy przez podobne rozumowanie

$$CP\times CA=AB\times AD+BC\times CD.$$

Aże łuk BP jest rowny CO, przeto gdy z jednéy i drugiéy strony dodamy BC, mieć będziemy łuk $CBP=BCO$; przeto cięciwa CP, jest równa cięciwie BO, a następnie prostokąty $BO\times BD$, i $CP\times CA$ mają się do siebie, jak BD do CA; a zatém

$$BD:CA::AB\times BC+AD\times DC:AD\times AB+BC\times CD.$$

A zatém, *dwie przekątne czworoboku wpisanego, mają się do siebie, jak summy prostokątów z boków na ich końcach opierających się.*

8

w $ABCD$ .. $fg=ac+bd$,
.. $ABCD'$ $fh=ad+bc$,
.. $ABC'D$ $gh=ab+cd$.

Dzieląc dwa z tych równań przez siebie, otrzymujemy stosunek przekątnych, a dzieląc wypadek przez trzecie [illegible], otrzymujemy przekątną.

Te dwa twierdzenia służyć mogą do wynaydowania przekątnych, gdy znane są boki.

PODANIE XXXIV.

TWIERDZENIE.

Odległości każdego punktu na okręgu koła od takich dwóch punktów, które by do końców średnicy były punktami harmonijnemi z sobą sprzężonemi, są do siebie w stosunku stałym.

Niech będzie punkt P *dany wewnątrz koła na promieniu* AC (fig. 91); *i niech będzie punkt* Q, *wzięty zewnątrz koła na przedłużeniu tegoż promienia, tak, że jest* CP : CA : : CA : CQ; *jeżeli z jakiegokolwiek punktu* M, *wziętego na okręgu koła, poprowadzą się do dwóch punktów* P i Q *linije proste* MP, MQ, *powiadam, że te linije proste będą wszędzie w jednym stosunku do siebie, i że będzie* MP : MQ : : AP : AQ.

Ponieważ z założenia mamy CP : CA : : CA : CQ, przeto kładąc CM na mieyscu CA, będzie CP : CM : : CM : CQ; azatém troykąty CPM, CQM, mają kąt równy C, zawarty między bokami proporcyonalnemi, więc są podobne (20, 3), azatém trzeci bok MP ma się do trzeciego MQ, jak CP do CM, czyli CA. Aże proporcya CP : CA : : CA : CQ, daje (różnica poprzedników do różnicy następników, jak którykolwiek poprzednik do swego następnika)

CP : CA : : CA—CP : CQ—CA

czyli

CP : CA : : AP : AQ,

azatém MP : MQ : : AP : AQ.

Uwaga. Twierdzenie powyższe można inaczej tak wysłowić: Jeżeli średnicę AB podzielimy harmonicznie w punktach P i Q (t. j. na części proporcyonalne, czyli tak, aby było AP : BP = AQ : BQ), odległości każdego punktu M na okręgu od punktów sprzężonych P, Q, będą w stosunku stałym [AP : AQ.] [takim z proporcyi]

Zagadnienia ściągające się do xięgi trzeciey.

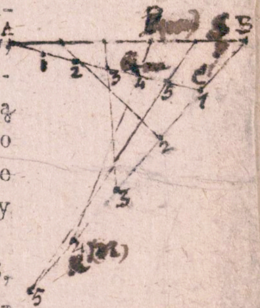
ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Podzielić daną liniją prostą na pewną liczbę części równych, albo na części proporcyonalne linijom danym.

Sposób 1szy

1°. Niech będzie linija AB (fig. 92), dana do podzielenia na pięć części równych. Przez koniec jey A, prowadzi się linija prosta AG nieograniczoney długości, bierze się potém AC, jakieykolwiek wielkości, i przenosi się na AG, pięć razy po sobie; łączy się ostatni punkt podziału G, z końcem B linii daney, liniją prostą GB: prowadzi się potém linija CI równoległa do GB; a AI będzie piątą częścią linii AB, tak, że przeniosłszy AI pięć razy na AB, podzielimy przez to tę liniją, na pięć równych części.

Sposób 2gi, gdzie nie potrzeba prowadzić równoległych.



Jakoż, ponieważ CI jest równoległa do GB, przeto boki AG, AB proporcyonalnie są przecięte w C i I (15); aże AC jest piątą częścią linii AG, więc i AI jest piątą częścią AB.

2°. Niech będzie dana linija AB (fig. 93), do podzielenia na części proporcyonalne linijom danym P, Q, R. Przez koniec A daje się nieograniczona linija AG; bierze się AC = P, CD = Q, DE = R; łączą się z sobą końce E i B, liniją prostą, a przez punkta C, D, prowadzą się CI, DK,

AP : PS = AQ : QC

czyli AP : PS = m : (n−m)

PS : PB = CR : BR

PS : PB = (m−1) : m

AP : PB = (m−1) : n−(m−1)

AP : AP+PB = m−1 : n

AP : AB = m−1 : n

$AP = \frac{m-1}{n} AB.$

m = 1, 2, 3, ... n

(1) CP : CA = CA : CQ wypływa:

CA−CP : CA+CP = CQ−CA : CQ+CA,

czyli: AP : BP = AQ : BQ (2).

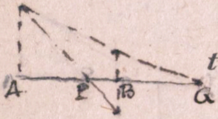
I nawzajem, z proporcyi (2) wypływa proporcyja (1).

równoległe do EB; powiadam, że linija AB, podzieloną jest na części AI, IK, KB, proporcyonalne linijom danym P, Q, R.

Z przyczyny bowiem równoległych CI, DK, EB, części AI, IK, KB, są proporcyonalne częściom AC, CD, DE (15), które z wykreślenia są równe linijom danym P, Q, R.

Uwaga. Zag. teraźniejsze odpowiada regule spółki w arytmetyce. Za pomocą tego zag. łatwo do trzech punktów danych w linii prostej wyznaczyć 4ty harmoniczny, z jednym z nich sprzężony.

ZAGADNIENIE II.



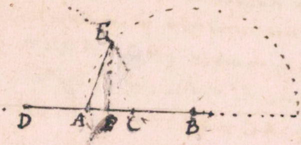
Znaleść czwartą proporcyonalną do trzech liniy danych A, B, C.

Prowadzą się dwie linije nieograniczone DE, DF (fig. 94), pod jakimkolwiek kątem. Na DE, bierze się DA = A, DB = B: na DF zaś bierze się DC = C, i daje się AC, i przez punkt B prowadzi się BX równoległa do AC; a powiadam, że DX, będzie czwartą proporcyonalną szukaną. Jakoż, ponieważ BX jest równoległa do AC, przeto mamy proporcyą DA : DB : : DC : DX; aże trzy pierwsze wyrazy tey proporcyi są równe trzém linijom danym, przeto DX jest czwartą proporcyonalną szukaną.

Wniosek. Podobnym sposobem znaydziemy trzecią proporcyonalną do dwóch liniy danych A, B; gdyż ta będzie tosamo co czwarta proporcyonalna do trzech liniy A, B, C.

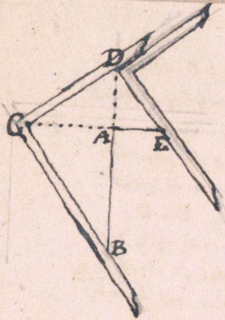
Do Zag. III.

Sposób 3ci (najprostszy).



Na większej AB = B odcinam linią AC = A mniejszą z dwóch linij danych; przedłużam BA o AD = CB; a na podstawie BD kreślę trójkąt równoramienny BED, którego boki ramiona będą równe AB = DC, albo raczej wyznaczam tylko wierzchołek E tegoż trójkąta za pomocą ~~przecięcia~~ się dwóch łuków; linia prosta EA (lub EC) będzie średnią proporcyonalną między AB i AC. — Bo jeżeli ze środka B, promieniem BA, zamiast kreślić tylko łuk mały, zakreślę cały półokrąg koła, a z punktu E spuszczę prostopadłą do BD, która także linią BD jako też linią AC dzieli na dwie części równe; będzie (XXIII. Wn. 2) 2AB : AE = AE : ½AC, a zatém AB : AE = AE : AC. (Kurtz T. I. str. 176). — W tém rozwiązaniu nie trzeba ani dzielić l. prostej na dwie części równe (dla znalezienia środka półkola), ani też wyprowadzać prostopadłej.

DE = EB bo tr. DBE jest =ramienny. od DE = EB odejmując DA = CB zostaje: AE = EC więc tr. ACE jest także równoramienny.



Zag. Między danemi dwiema liniami prostemi AB i AE znaleźć dwie średnie geometrycznie proporcyonalne (AC i AD), to jest dwie l. takie, aby było

AB : AC = AC : AD = AD : AE.

Rozwiązanie mechaniczne za pomocą dwóch węgielnic wskazuje figura obok narysowana. (Burja. II. 365).

$$a : x = x : y = y : b$$

daje $\left.\begin{array}{l} x^2 = ay \\ bx = y^2 \end{array}\right\}$ stąd $x^4 = a^2y^2 = a^2bx$, $x^3 = a^2b$

$$bx^3 = ay^3 \quad \text{czyli} \quad x^3 : y^3 = a : b$$

$$y^3 = \frac{b}{a}x^3 = ab^2$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}$$

$$y = \sqrt[3]{ab^2}$$

ZAGADNIENIE III.

Znaleść średnią proporcyonalną między dwiema linijami danemi A i B.

Na linii nieograniczoney DF (fig. 95), bierze się DE=A, i EF=B; na linii całkiey DF, jako na średnicy, zakreśla się półokrąg koła DGF; z punktu E, wynosi się EG prostopadła do średnicy, która spotka okrąg koła w G; powiadam, że EG będzie średnią proporcyonalną szukaną.

Jakoż prostopadła GE, z punktu okręgu koła spuszczona na średnicę, jest średnią proporcyonalną między dwóma ucinkami DE, EF, średnicy (23); owoż te ucinki równe są tu linijom danym A i B.

Sposób 2gi. Bierze DE=B, DF=A; na większej DE kreśli półkole DGE, a potem prostopadłą FG, i prowadzi DG; cięciwa DG będzie średnią szukaną.

ZAGADNIENIE IV.

Podzielić liniją daną AB, *na dwie części; tak, ażeby część większa była średnią proporcyonalną między całą liniją i drugą jey częścią.* (fig. 96).

Z końca B linii AB, wynosi się prostopadła BC równa połowie AB; z punktu C, jako środka promieniem BC, zakreśla się okrąg koła; prowadzi się linija AC, która przetnie okrąg koła w D; i bierze się AF=AD, powiadam, że li-

Uwaga. Gdy jedna z dwóch linij danych będzie wzięta za jedność, a druga od niej n razy większą; natenczas średnia geometryczna między temi dwiema liniami będzie wyobrażona pierwiastkiem kwadratowym z liczby n.

nija AB, podzieloną jest w punkcie F, według żądania: to jest, że będzie AB : AF : : AF : FB.

Gdyż AB, jako prostopadła w końcu promienia CB, jest styczną; a gdy przedłuży się AC, aż do nowego spotkania się z okręgiem koła w punkcie E, mieć będziemy (30), AE : AB : : AB : AD; skąd AE—AB : AB : : AB—AD : AD.

AE : AB = AB : AD

AB : AE—AB = AD : AB—AD

A ponieważ promień BC, jest połową AB, przeto średnica DE, jest równa AB, a następnie AE—AB=AD=AF; mamy także, z przyczyny że AF=AD, AB—AD=FB; azatém AF : AB : : FB : AD czyli AF; więc *przewracając*, będzie AB : AF : : AF : FB.

Uwaga. Ten rodzay dzielenia linii AB, nazywa się dzieleniem na *średni i skrayny stosunek:* widzieć będziemy tego podziału częste użycia. Tu zważyć należy, że sieczna AE jest podzielona na średni i skrayny stosunek w punkcie D; gdyż, ponieważ AB=DE, mamy AE : DE : : DE : AD.

ZAGADNIENIE V.

Przez punkt dany A *w kącie danym* BCD (fig. 97); *poprowadzić liniją* BD, *tak, aby części* AB, AD, *zawarte między punktem* A *i dwóma ramionami kąta, były równe.*

Przez punkt A, poprowadźmy AE równoległą do CD, i weźmy BE=CE, a przez punkta

Gdyby zag. teraźniejsze wystawić ogólniej tak: „Na linii prostej nieograniczonej, przechodzącej przez dwa punkta dane A i B, wynaleźć punkt, którego by odległość od punktu A była średnia proporcjonalna między jego odległością od punktu drugiego B, i odległością onej AB"; natenczas punkt F byłby jednym, a ~~drugi~~ w przedłużeniu BA tak, aby było AF' = AE, punkt F' byłby drugim punktem szukanym.

Do Uwagi Zag. IV.

† Gdybyśmy zagadnienie teraźniejsze wystawili ogólniej tak: „Na linii prostej nieograniczonej, przechodzącej przez dwa punkta dane A i B, wyznaczyć punkt, któregoby odległość od punktu A, była średnią proporcjonalną między jego odległością od punktu drugiego B, i ~~odległością~~ AB"; natenczas punkt F byłby jednym, a wziąwszy na przedłużeniu linii BA w stronę A, $AF' = AE$, punkt F' byłby drugim punktem szukanym. Z proporcyi bowiem

$$AE : AB = AB : AD$$

wypływa:

$$AE + AB : AE = AB + AD : AB;$$

ale $AE + AB = AF' + AB = BF'$, $AE = AF'$, $AB + AD = DE + AD = AE = AF'$; więc

$$BF' : AF' = AF' : AB.$$

*)

Do Zagad. V.

Zagadnienie teraźniejsze możnaby ogólniej tak podać: Przez punkt dany A na płaszczyźnie kąta danego w kącie danym BCD, poprowadzić linię BD tak, aby części AB, AD, zawarte między punktem A i dwóma ramionami kąta, były do siebie w stosunku danym $m : n$. Rozwiązanie tenczas by się tylko różniło od poprzedzającego, iż poprowadziwszy AE równoległą do CD, trzebaby wziąć EB tak, aby było $EB : EC = m : n$.

*) Rozwiązanie algebraiczne. $AB = a$, $AF = x$.

$BF = a - x$, zatem ma być

$$a : x = x : a - x$$

$$x^2 = a(a - x),$$

czyli

$$x^2 + ax = a^2,$$

zkąd

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2}$$

to jest:

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a, \text{ lub } x = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} a$$

Pierwsza wartość na x, jest AF; druga zaś, z odmianą znaku $-$ na $+$, jest AF'.

B i A, poprowadźmy BAD, a ta będzie liniją żądaną.

Bo, że AE jest równoległa do CD, mamy BE : EC : : BA : AD; aże BE=EC, więc BA=AD.

ZAGADNIENIE VI.

Zrobić kwadrat równoważny równoległobokowi albo troykątowi danemu.

1°. Niech będzie ABCD (fig. 98), równoległobok dany, AB podstawą, a DE jego wysokością. Między AB i DE, szuka się średnia proporcyonalna XY; a kwadrat zbudowany na XY, będzie równoważny równoległobokowi ABCD.

Gdyż z wykreślenia mamy AB : XY : : XY, DE; więc $\overline{XY}^2$=AB×DE : aże AB×DE jest miarą równoległoboku, a $\overline{XY}^2$ jest miarą kwadratu, więc one są równoważne z sobą.

2°. Niech będzie ABC (fig. 99), troykąt dany, którego BC, jest podstawą, a AD wysokością: szuka się średnia proporcyonalna między BC i połową AD, i niech tą liniją będzie XY; powiadam, że kwadrat zbudowany na XY, będzie równoważny troykątowi ABC.

Jakoż, ponieważ mamy BC : XY : : XY : ½ AD; przeto stąd wypada $\overline{XY}^2$=BC×½ AD; azatém kwadrat z XY, jest równoważny troykątowi ABC.

ZAGADNIENIE VII.

Na linii daney AD (fig. 100), *wystawić prostokąt* ADEX, *równoważny prostokątowi danemu* ABFC.

Szuka się czwartey proporcyonalney do trzech liniy AD, AB, AC, którą niech będzie AX; a powiadam, że prostokąt zbudowany z AD i AX, będzie równoważny prostokątowi ABFC.

Jakoż, ponieważ mamy AD : AB : : AC : AX, przeto stąd wypada AD×AX=AB×AC: azatém prostokąt ADEX, jest równoważny prostokątowi ABFC.

ZAGADNIENIE VIII.

Znaleść w linijach stosunek prostokąta z dwóch liniy danych A i B, *do prostokąta z dwóch drugich liniy danych* C i D (fig. 103).

(+) Niech będzie X czwarta proporcyonalna do liniy B, C, D; powiadam, że stosunek dwóch liniy A i X, równy będzie stosunkowi dwóch prostokątów A×B, C×D.

Jakoż, ponieważ mamy B : C : : D : X; przeto stąd wypada C×D=B×X; azatém A×B : C×D : : A×B : B×X : : A : X.

Wniosek. Azatém chcąc mieć stosunek kwadratów zbudowanych na linijach danych A i C,

(+) [illegible]: zamieniam prostokąt drugi C×D na równoważny ~~B×X~~ X×B pierwszemu, a mający z nim jednakową wysokość B. Wtedy A : X będzie stosunkiem prostokąta pierwszego do trzeciego, a zatem i pierwszego do drugiego.

szukać potrzeba trzeciey proporcyonalney X, do liniy A i C, to jest $A : C :: C : X$; a mieć będziemy $A^2 : C^2 :: A : X$.

ZAGADNIENIE IX.

Znaleść w linijach stosunek mnogości trzech liniy danych A, B, C, *do mnogości z trzech innych liniy danych* P, Q, R, (fig. 104).

Do trzech liniy danych P, A, B, szuka się czwartą proporcyonalną X: do drugich liniy danych C, Q, R, szuka się czwartey proporcyonalney Y. A dwie linije znalezione X, Y, będą się miały do siebie, jak mnogości $A \times B \times C$, $P \times Q \times R$.

Jakož, ponieważ $P : A :: B : X$; przeto $A \times B = P \times X$; a mnożąc przez C obie strony, będzie $A \times B \times C = C \times P \times X$. Podobnie, ponieważ $C : Q :: R : Y$; przeto stąd wypada $Q \times R = C \times Y$; a mnożąc obie strony tey równości przez P; będzie $P \times Q \times R = P \times C \times Y$; azatém mnogość $A \times B \times C$ ma się do mnogości $P \times Q \times R$, jak $C \times P \times X$ do $P \times C \times Y$, czyli jak X do Y.

Uw. - To zag. należy właściwie do Solidometryi.

ZAGADNIENIE X.

Wystawić troykąt równoważny wielobokowi danemu.

Niech będzie ABCDE, (fig. 101), wielobok dany. Daymy naprzód przekątną CE, odcinającą troykąt CDE; przez punkt D, poprowadźmy DF, równoległą do CE, aż do spotkania się jey z AE przedłużoną; połączmy punkta C i F liniją prostą, a wielobok ABCDE, będzie równoważny wielobokowi ABCF mającemu mniey jednym bokiem.

Jakoż troykąty CDE, CFE, mają wspólną podstawę CE, i są jednakiey wysokości; bo ich wierzchołki D, F, znaydują się na linii DF równoległey podstawie; więc te troykąty są równoważne. Dorzucając do każdego z tych troykątów figurę ABCE, mieć będziemy z jedney strony wielobok ABCDE, a z drugiey wielobok ABCF, równoważne sobie.

Podobnie, można odciąć kąt B, podstawując za troykąt ABC, troykąt jemu równoważny AGC; a przez to pięciobok ABCDE zamieniony będzie na troykąt jemu równoważny GCF.

Tenże sam sposób postępowania stosuje się do każdego wieloboku, gdyż za każdym razem zmnieyszając jednym liczbę boków, wpadniemy na troykąt jemu równoważny.

Uwaga. Widzielismy już, że każdy troykąt może bydź zamieniony na kwadrat sobie rownoważny (pod. 6), azatém znaleść można kwadrat równoważny figurze prostokreślney daney, i to nazywa się *kwadrować* figurę prostokreślną, czyli znaleść jey *kwadraturę*.

Zagadnienie *kwadratury koła*, zależy na znalezieniu kwadratu równoważnego kołu, którego średnica jest dana.

ZAGADNIENIE XI.

Wystawić kwadrat, któryby był równy summie, albo różnicy dwóch kwadratów danych.

Niech będą A i B, boki kwadratów danych (fig. 102).

1°. Jeżeli potrzeba znaleść kwadrat równy summie tych kwadratów; prowadzą się dwie linije ED, EF, nieograniczone pod kątem prostym; bierze się ED = A, a EG = B, i prowadzi się DG; a ta linija DG, będzie bokiem kwadratu szukanego.

Bo troykąt DEG, jako prostokątny, ma tę własność, że kwadrat wystawiony na DG, jest równy summie kwadratów wystawionych na ED, i EG.

2°. Jeżeli trzeba znaleść kwadrat równy różnicy kwadratów danych, podobnym sposobem tworzy się kąt FEH, a potém bierze się bok GE, równy mnieyszemu z boków A i B; z punktu G, jako środka promieniem GH, równym drugiemu bokowi, nakreśla się łuk, który przetnie EH w H; powiadam, że kwadrat wystawiony na EH, będzie równy różnicy kwadratów wystawionych na liniach A i B.

Bo troykąt GEH, jest prostokątny, przeciwprostokątna jego GH = A, a bok GE = B; zatêm kwadrat wystawiony na EH i t. d.

Uwaga. Tym sposobem znaleść można kwadrat, równy summie ilukolwiek kwadratów; gdyż wykreślenie sprowadzające dwa kwadraty do jednego, przywiedzie trzy do dwóch, a te dwa potém do jednego, i tak daléy z innémi. Toż samo byłoby, gdyby niektóre z kwadratów, miały bydź odciągnione od summy inney.

ZAGADNIENIE XII.

***Wykreślić kwadrat, któryby się miał do kwadratu danego* ABCD (fig. 105), *jak linija* M *do linii* N.**

Na linii nieograniczoney EG, bierze się EF=M, a FG=N; na EG jako na średnicy nakreśla się półokrąg koła, i z punktu F, wynosi się prostopadła FH do średnicy. Z punktu H, prowadzą się cięciwy HG, HE, które nieograniczenie przedłużają się: na piérwszéy bierze się HK równy bokowi AB kwadratu danego, i przez punkt K prowadzi się KI równoległa do EG; powiadam, że HI będzie bokiem kwadratu szukanego.

Jakoż, z przyczyny równoległych KI, GE, mamy HI : HK : : HE : HG; azatém $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$. Lecz w troykącie prostokątnym EHG (23), kwadrat z HE, ma się do kwadratu z HG, jak ucinek EF do ucinka FG; czyli jak M do N; azatém $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: M : N$; aże HK=AB, więc kwadrat wystawiony na HI ma się do kwadratu wystawionego na AB, jak M do N.

ZAGADNIENIE XIII.

Na boku FG, *odpowiednym bokowi* AB, (fig. 84), *nakreślić wielobok podobny wielobokowi danemu* ABCDE.

W wieloboku danym prowadzą się przekątne AC, AD: w punkcie F, robi się kąt GFH = BAC, a w punkcie G robi się kąt FGH = ABC; linije FH, GH, przetną się w H; a troykąt FGH będzie podobny troykątowi ABC; podobnie na boku FH, odpowiednym bokowi AC, wykreśla się troykąt FIH, podobny troykątowi ADC; a na FI, odpowiednym bokowi AD, wykreśla się troykąt FIK podobny tróykątowi ADE. Wielobok FGHIK, będzie wielobokiem żądanym, podobnym wielobokowi ABCDE.

Gdyż te dwa wieloboki złożone są z jednakiey liczby troykątów podobnych i podobnie umieszczonych (26).

Rozwiązania na dwie części. a) Trójkąt ([illegible]) b) Wielokąt. [illegible] ... jak w FH- [illegible]

ZAGADNIENIE XIV.

Mając dane dwie figury podobne, wykreślić ~~jedną~~ figurę podobną, któraby była równa ich summie, albo ich różnicy.

Niech będą A i B dwa boki odpowiedne figur danych: szuka się kwadratu równego summie albo różnicy kwadratów wystawionych na A i B; niech X, będzie bokiem tego kwadratu; X będzie w figurze szukaney, bokiem odpowiednym bokom A i B w figurach danych. Wykreśli się potém sama figura za pomocą poprzedzającego zagadnienia.

Gdyż figury podobne, mają się jak kwadraty z boków odpowiednych. Aże kwadrat z boku X, jest równy summie albo różnicy kwadratów wystawionych na bokach odpowiednych A i B; azatém figura wystawiona na boku X, jest równa summie albo różnicy figur podobnych, wystawionych na bokach A i B.

ZAGADNIENIE. XV.

Wykreślić figurę podobną figurze daney, i która miałaby się do niey w stosunku danym M *do* N.

Niech będzie A, bok figury daney, X bok odpowiedny figurze szukanéy: potrzeba ażeby kwadrat X miał się do kwadratu z A, jak M do N, (27). Znaydziemy więc X, przez zagadnienie XII; znając X, resztę dokończy się przez zagadnienie XIII.

ZAGADNIENIE XVI.

Wykreślić figurę podobną figurze P, *a równoważną figurze* Q, (fig. 106).

Szuka się boku M, kwadratu równoważnego figurze P, i boku N, kwardatu równoważnego figurze Q.

Niech będzie potém X, czwarta proporcyonalna do trzech liniy danych M, N, AB; na boku X, odpowiednym bokowi AB, wystawia się figura podobna figurze P; a powiadam nadto, że ta figura będzie równoważną figurze Q.

Gdyż nazwawszy I figurę wystawioną na boku X, mieć będziemy $P : I :: \overline{AB}^2 : X^2$; a że z wykreślenia $AB : X :: M : N$, czyli $\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2$; a zatém $P : I :: M^2 : N^2$. Aże także z wykreślenia mamy $M^2 = P$, i $N^2 = Q$; przeto $P : I :: P : Q$; więc $I = Q$; a zatém figura I jest podobna figurze P, i równoważna figurze Q.

ZAGADNIENIE XVII.

Wykreślić prostokąt równoważny kwadratowi danemu C, *a w którymby boki przyległe czyniły summę daną* AB (fig. 107).

Na AB, jako na średnicy, nakreśla się półokrąg koła, w odległości AD, równéy bokowi kwadratu danego C, prowadzi się linija DE, równoległa średnicy. Z punktu E, gdzie ta równoległa spotka okrąg koła, spuszcza się EF prostopadła na średnicę; powiadam, że AF i FB są bokami prostokąta szukanego.

Gdyż summa ich jest równa AB, a z nich prostokąt $AF \times FB$, jest równy kwadratowi z EF, (23), czyli kwadratowi z AD; a zatém ten prostokąt jest równoważny kwadratowi danemu C.

Uwaga. Aby to zagadnienie było podobne, potrzeba żeby odległość AD, nieprzewyższała wielkości promienia, to jest, ażeby bok kwadratu C, nieprzechodził połowę linii AB.

Uw. 2. Kwadr. AB = a, AD = b, odcinki AF, FB są pierwiastkami równania $x^2-ax=-b^2$ [1], a same odcinki odjemnie wzięte, są pierwiastkami równ. $x^2+ax=-b^2$ [2].

ZAGADNIENIE XVIII.

Wystawić prostokąt równoważny kwadratowi C, *i któregoby boki przyległe różniły się od siebie liniją daną* AB (fig. 108).

Na linii danéy AB, jako na średnicy, nakreśla się półokrąg koła; z końca średnicy prowadzi się styczna AD, równa bokowi kwadratu C: przez punkt D i środek koła O, prowadzi się sieczna DF: powiadam, że DE i DF będą bokami przyległémi prostokąta danego.

Gdyż 1° różnica tych boków jest równa średnicy EF czyli AB. 2° prostokąt DE×DF jest równy $\overline{AD}^2$ (30); więc ten prostokąt jest równoważny kwadratowi danemu C.

Uw. Kwadr. AB = a, AD = b, pierwiastkami równania $x^2-ax=b^2$ [illegible] są: $x=DF$, $x=-DE$; pierwiastkami zaś równania $x^2+ax=b^2$ [illegible] są: $x=-DF$, $x=DE$.

ZAGADNIENIE XIX.

Znaleść wspólną miarę, jeżli ta jest, między przekątną i bokiem kwadratu.

Niech będzie ABCG (fig. 109) jakikolwiek kwadrat, AC jego przekątna.

Potrzeba naprzód przenieść CB, na CA, tyle razy ile się razy zawrzéć może, (zag. 17, 2 Kięg.): i na ten koniec nakreślmy ze środka C, promie-

[3] $x(x-a)=b^2$, $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2+b^2}$. Pokazać wykreślenie linii x na figurze.

niem CB, półokrąg koła DBE: widzimy że CB, raz się zawiéra w AC, z resztą AD: wypadkiem więc piérwszego działania jest 1, z resztą AD, którą porównać potrzeba z bokiem BC czyli jemu równym AB; można wziąć AF=AD, i rzeczywiście przenieść ją na AB, znaydziemy, że AF, zawiéra się dwa razy w AB z pewną resztą: lecz że ta reszta i następne idą zmnieyszając się, przeto wkrótce dla swojey małości stałyby się niewidzialne. Byłby to sposób tylko mechaniczny niedokładny, skąd niemoglibyśmy wnieść z pewnością czy linije AC, CB, mają między sobą, lub nie, miarę wspólną. Mamy sposób bardzo prosty uniknienia liniy ubywających, i przywodzi się do działania z samémi linijami zostającemi zawsze jednéy wielkości.

Jakoż kąt ABC, ponieważ jest prosty, AB jest styczną, a AE sieczną z tegoż punktu poprowadzoną, przeto mieć będziemy (30) AD : AB : : AB : AE; a tak w drugiém działaniu, gdzie chodzi o porównanie AD z AB, można zamiast stosunku AD do AB, wziąć stosunek AB do AE; a że bok AB, czyli jemu równy CD, zawiéra się dwa razy w AE resztą AD; a zatém wypadek drugiego działania jest wieloraz 2, z resztą AD, którą porównać potrzeba z AB.

Trzecie działanie, które zależy na porównaniu AD z AB, przywodzi się podobnie do porównania boku AB, czyli jemu równego CD, z AE, i mieć będziemy także 2 za wieloraz, a AD za resztę.

Stąd widzimy że działanie nigdy niebędzie skończone, azatém że niemasz miary wspólnéy między przekątną i bokiem kwadratu. Jestto prawda, którąśmy poznali przez Arytmetykę (ponieważ te dwie linije mają się do siebie $: : \sqrt{2} : 1$) (11), a która tu nabywa większego stopnia jasności przez rozwiązanie geometryczne.

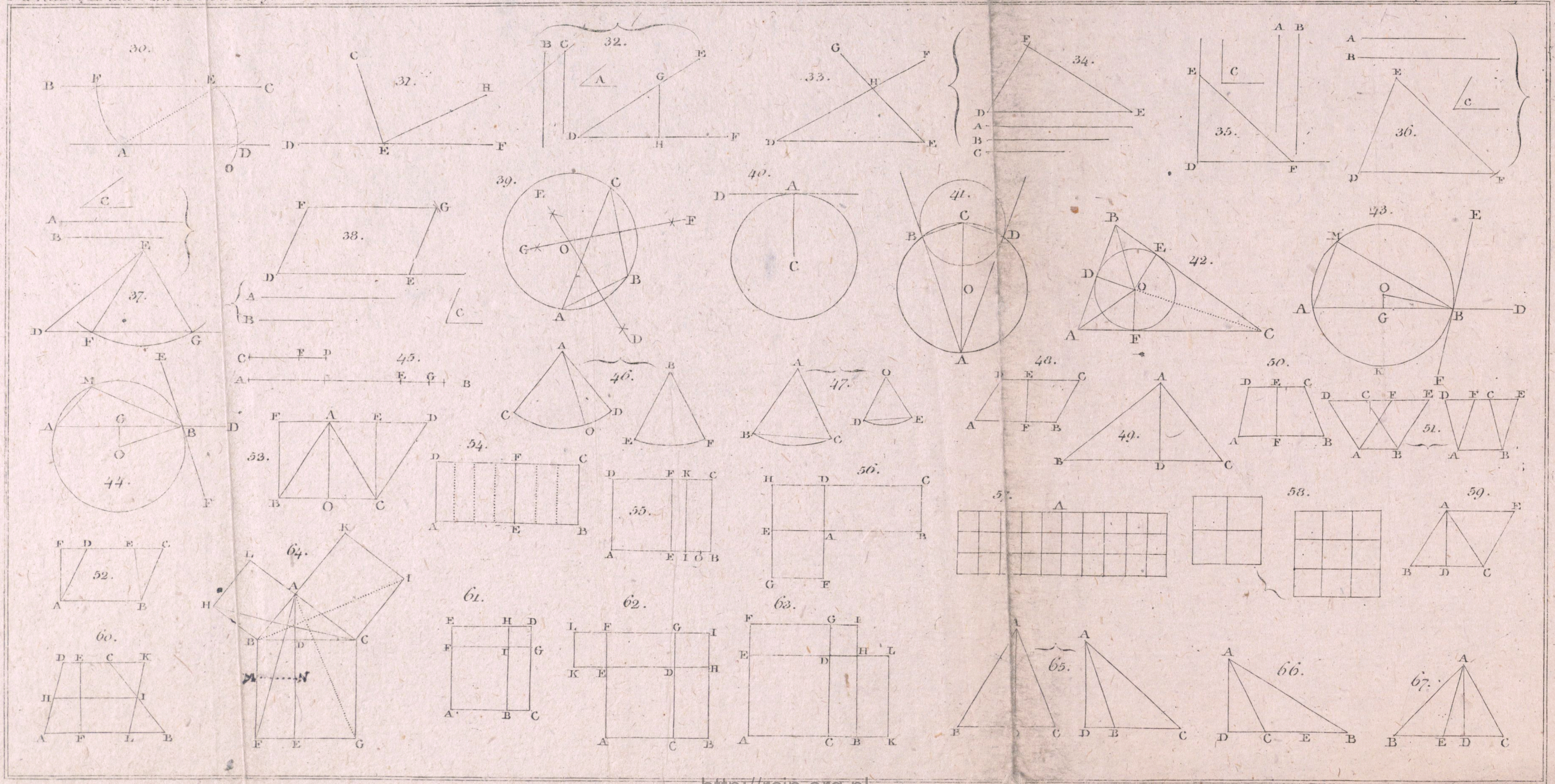
Uwaga. Chociaż niepodobieństwem jest znaleść w liczbach dokładny stosunek przekątnéy do boku kwadratu, lecz do niego tyle się zbliżyć można, ile sami zechcemy, za pomocą ułamku ciągłego, który się równa temu stosunkowi. Pierwsze działanie dało za wieloraz 1; drugie zaś i wszystkie inne do nieskończoności ciągnące się, dają 2; a tak ułamek, o którym mowa jest $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +$ i t. d. do nieskończoności.

Naprzykład, jeśli obrachujemy ten ułamek, przestając na cztérech terminach, znaydziemy że wartość jego jest $1\frac{12}{29}$; czyli $\frac{41}{29}$, tak że stosunek przybliżony przekątney do boku kwadratu jest $: : 41 : 29$. Znaleźlibyśmy stosunek bardziey zbliżony, biorąc większą liczbę terminów w ułamku ciągłym.

$\sqrt{2} = 1 + x$; $x(2+x) = 1$, $x = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+x}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}}$ etc.

Ogólnie, jeśli a^2 jest największym kwadratem zawartym w liczbie N całkowitej, i jeśli położymy $N = a^2 + \alpha$, $\sqrt{N} = a + x$, będzie $(a+x)^2 = a^2 + \alpha$, $x(2a+x) = \alpha$, $x = \frac{\alpha}{2a+x}$, a więc przez ciągłe podstawianie:

$$\sqrt{N} = a + \frac{\alpha}{2a + \frac{\alpha}{2a + \frac{\alpha}{2a + \dots}}}$$ i t. d.


30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.

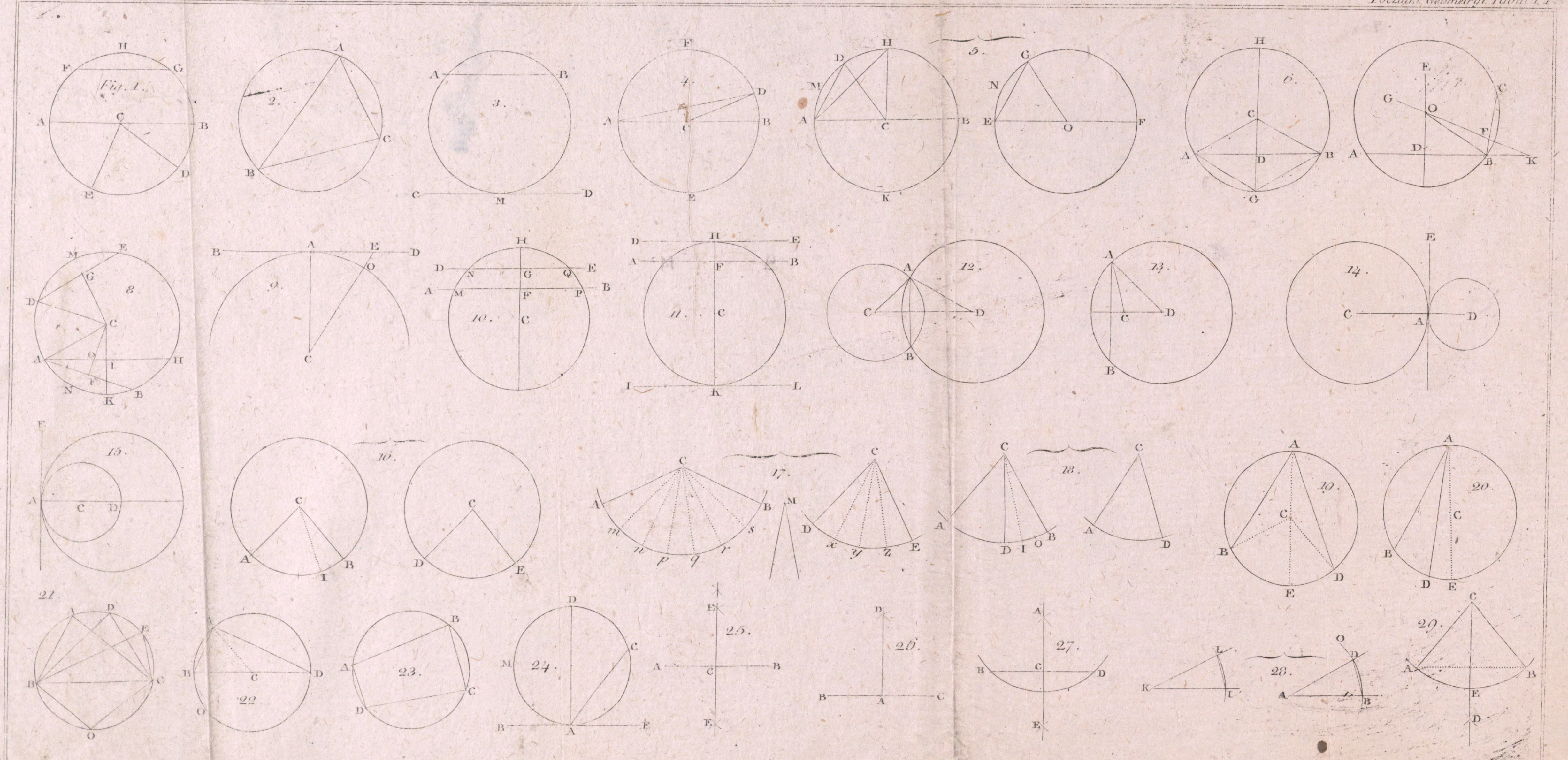
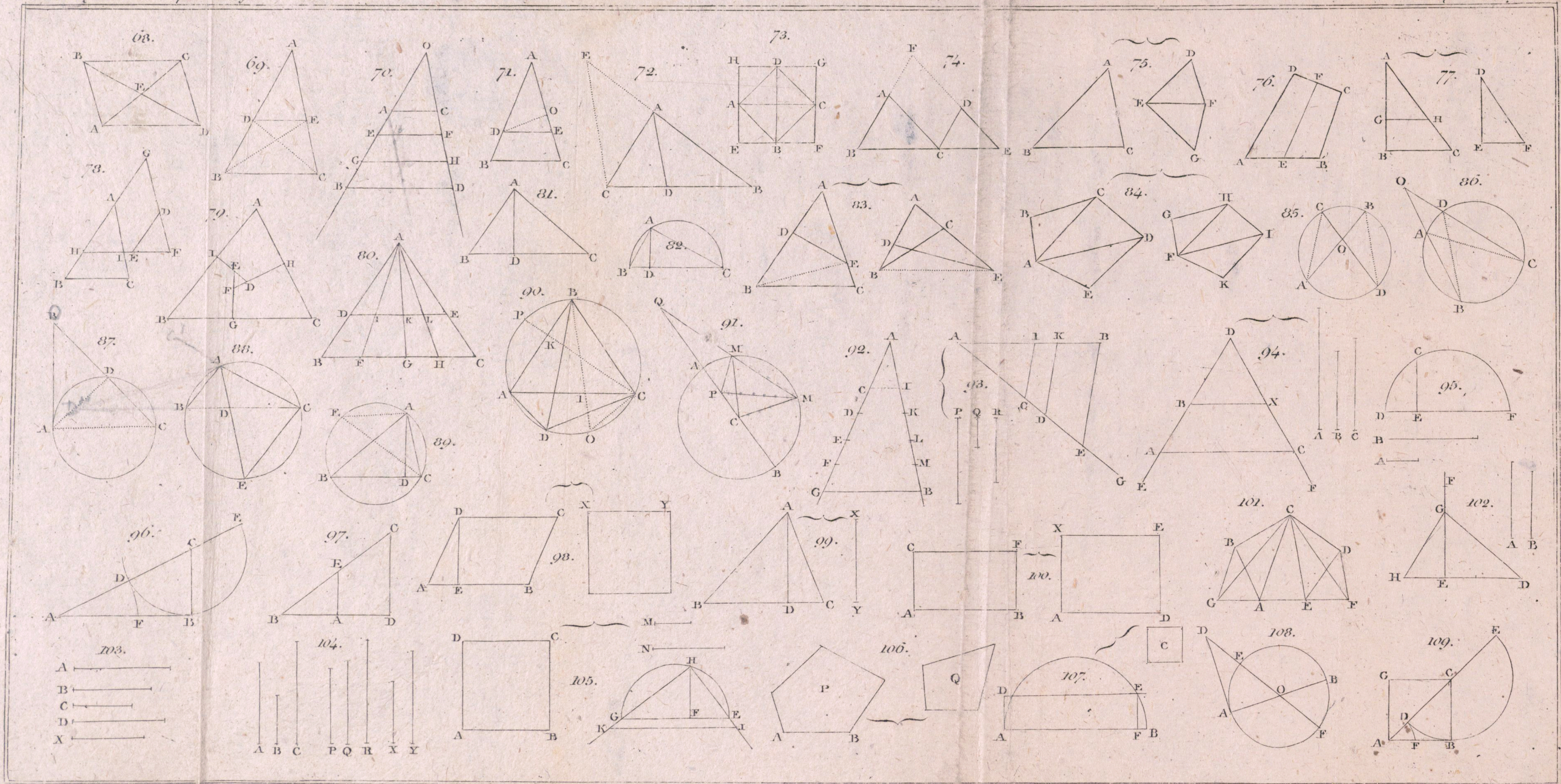


Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.


68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.