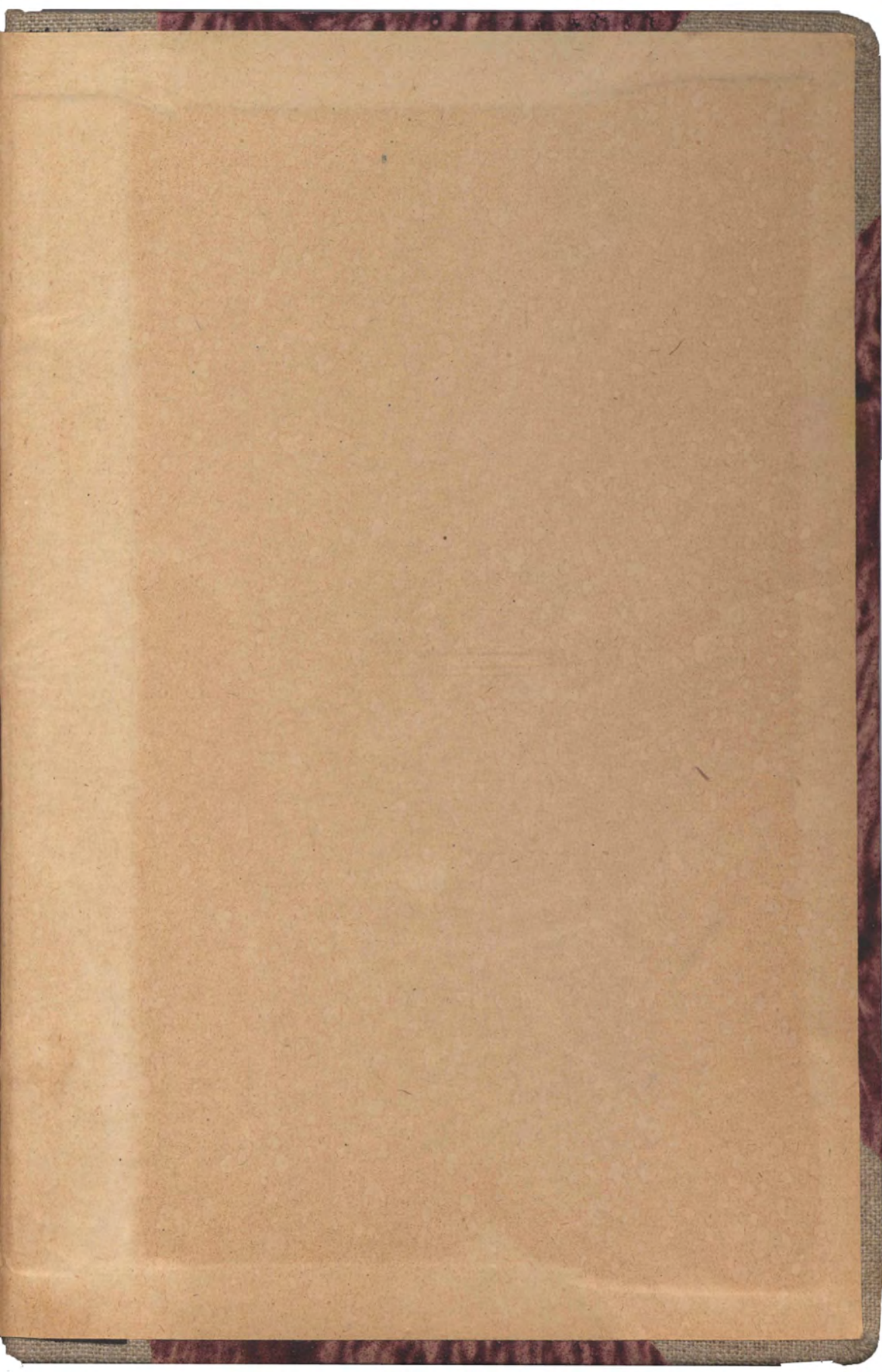

RUDZKI
ASTRONOMIA
TEORETYCZNA
I

T.N. W



Wielmożnemu Panu
S. Dicksteinowi
205
z uprzejmym wyrazami
poczta Autor

ASTRONOMIA TEORETYCZNA

~~GABINET MATEMATYCZNY~~
~~Towarzystwa Naukowego. Warszawskiego~~

ASTRONOMIA TEORETYCZNA

Jur *9* *Kat*
M. P. RUDZKI

ASTRONOMIA TEORETYCZNA

TOM I

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

L. inw. 836

W KRAKOWIE
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
G. GEBETHNER I SP. W KRAKOWIE — GEBETHNER I WOLFF W WARSZAWIE
1914



Kraków. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarz. J. Filipowskiego.

PRZEDMOWA AUTORA.

Podobnie jak „Fizyka ziemi“ (Kraków, 1909) niniejsza „Astronomia teoretyczna“ powstała z wykładów moich w Uniwersytecie krakowskim, mianowicie z ogólnego kursu oraz z wykładów teorii księżycy i z wykładów teorii równowagi. Pochodzenie odbiło się na charakterze dzieła: nie jest to książka popularna jak „Gwiazdy i budowa wszechświata“ (Kraków, 1912), ale dzieło przeznaczone w pierwszym rzędzie dla studentów Uniwersytetu oraz dla tych którzy chcą zapoznać się ze zasadniczymi teoriami astronomicznymi.

Pisząc podręcznik musiałem naturalnie podać przykłady. Traktowałem je może nieco obszerniej, niżli to się zazwyczaj dzieje, bo wiem, że nie sprawia początkującym tak wielkich trudności, jak przejście od teorii do praktyki. Przykłady te nie są nowe: aby oszczędzić sobie trudu, wziąłem gotowe przykłady z różnych dzieł. Swoją drogą przerobiłem je¹⁾, w niektórych poprawiłem błędy rachunku. Nie przerabiałem tylko obu przykładów zapożyczonych u Watsona.

Staralem się czerpać wprost ze źródeł, musiałem jednakże niejednokrotnie odstąpić od reguły. Tak np. pisząc o metodach wyznaczenia orbit Olbersa i Gaussa miałem przed oczami zarówno rozprawę Olbersa „Ueber die leichteste Methode...“ jak dzieło Gaussa „Theoria motus...“; pisałem jednak wedle Encke'ego, bo wykład jego jest bez porównania jaśniejszy i łatwiejszy od wykładu samych autorów. Tak ~~się~~ odstąpiłem od reguły w rozdziałach poświęconych przedmiotowi, którym dotychczas bardzo mało zajmowałem się — mówię o poprawianiu orbit i o specjalnych

¹⁾ Przykłady w rozdz. III-cim przerabiał także prof. J. Sleszyński, za co mu serdecznie dziękuję.

perturbacyach — w rozdziałach tych wolałem trzymać się wypróbowanego przewodnika niż silić się na samoistne opracowanie, które prawdopodobnie wypadłoby nieco słabo. Zresztą wszędzie wyraźnie zaznaczyłem, które paragrafy są napisane wedle innych dzieł.

Rozdział III-ci (o metodzie najmniejszych kwadratów) czytał w rękopisie kolega prof. J. Sleszyński. Składam mu gorące podziękowanie za jego światłe uwagi i rady, z których w znacznej mierze skorzystałem.

Chociaż astronomia jest starą nauką, jednakże robi wciąż postępy. Postępy te starałem się uwzględnić. Podałem więc — naturalnie tylko w zarysie — Hill'a teorię księżycą, Poincaré'go teorię figur równowagi, Leuschnera metodę wyznaczania orbit i t. d. i t. d.

Aby nie powiększać zbytecznie rozmiarów książki, nie włączyłem do niej ani astrofizyki, ani sprawozdania o współczesnych badaniach nad budową wszechświata. Zresztą o tym ostatnim przedmiocie pisałem w popularnym dziełku pod tyt. „Gwiazdy i budowa wszechświata“ [Kraków, 1912].

Na końcu wielu rozdziałów podałem spisy dzieł, z których korzystałem opracowując tę książkę. Mniejsze rozprawy — oprócz niewielu wyjątkowo ważnych — zupełnie pominąłem¹⁾.

Kraków, Październik 1912 r.

M. P. Rudzki.

¹⁾ Mapki konstelacyi znajdują się w wymienionym w tekście przedmowy dziełku „Gwiazdy i budowa wszechświata“. Polecam także bardzo dogodną polską mapkę nieba prof. M. Ernsta wydaną przez Altenberga we Lwowie 1911 r. Dalej wymienię R. Schurig'a: *Tabulae coelestes. Himmels-Atlas*. Drugie wydanie (przez dr. P. Götz'a) Lipsk (Ed. Gaebler's geogr. Institut) bez daty i t. d.

SPIS RZECZY

zawartych w tomie I-szym.

Przedmowa autora str. V—VI

ROZDZIAŁ I. Trygonometrya sferyczna.

1. Trójkąt sferyczny. — 2. Zasadnicze wzory trygonometrii sferycznej. — 3. Wzory odnoszące się do trójkąta sferycznego prostokątnego. — 4. Wzory odnoszące się do trójkąta sferycznego prostobocznego. — 5. Wzory nadające się do logarytmowania. — 6. Wzory Napiera i Delambre'a. — 7. Wzory różniczkowe. — 8. Sferyczna przewyżka. — Literatura str. 1—15

ROZDZIAŁ II. Interpolacya z tablic.

1. Cel interpolacyi. — 2. Wzór interpolacyjny Newtona. Wzór Stirlinga i t. d. — 3. Różniczkowanie i całkowanie wzorów interpolacyjnych. — Literatura str. 16—23

ROZDZIAŁ III. Metoda najmniejszych kwadratów.

1. Błędy obserwacyi. — 2. Średnia arytmetyczna. — 3. Metoda najmniejszych kwadratów. — 4. Błąd prawdopodobny. Błąd średni. Porównanie teorii z doświadczeniem. — 5. Obliczenie błędu średniego z ostatków. — 6. Waga obserwacyi. — 7. Średni błąd pomiarów i błąd średniej arytmetycznej w przypadku, gdy wagi obserwacyi są niejednakowe. — 8. Przykład. — 9. Przypadek kilku niewiadomych związanych liniowo z wielkościami bezpośrednio mierzonymi. — 10. Przypadek, gdy związki między niewiadomymi a wielkościami mierzonymi nie są liniowe. — 11. Twierdzenie o błędzie średnim funkcyi liniowej. — 12. Wagi poprawek. — 13. Wzór na błąd średni obserwacyi typowej. — 14. Przykład. Ostateczne sprawdzenie rachunków. — Literatura str. 24—66

ROZDZIAŁ IV. Interpolacya za pomocą szeregów potęgowych i szeregów funkcyi sferycznych.

1. Szeregi potęgowe. — 2. Szeregi funkcyi kołowych. — 3. Przypadek, gdy dane są wartości funkcyi w punktach dzielących obwód koła na równe części. — 4. Zastosowanie równań (2) i (3) do interpolacyi. — 5. Przykład. — Literatura str. 67—85

ROZDZIAŁ XVII. Wyznaczenie orbity eliptycznej z trzech obserwacji.

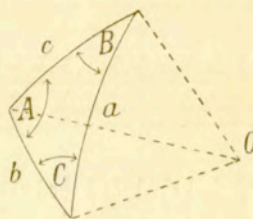
1. Zasadnicze wzory metody Gaussa. — 2. Dyskusya równania (21). Wielorakie rozwiązania. — 3. Obliczenie przybliżonych wartości na q_1, q_2, r_1, r_2 i t. d. — 4. Drugie przybliżenie. Obliczenie stosunków między polami wycinków a polami trójkątów. — 5. Rozwiązanie systemu równań (51 bis) i (52 bis). — 6. Dalsze przybliżenia i obliczenie elementów. — 7. Przykład. — 8. Porównanie pozycji obliczonych z elementami z pozycjami obserwowanymi. Efemerydy . str. 379—427

ROZDZIAŁ I.

Trygonometria sferyczna.

1. Trójkąt sferyczny.

Weźmy kulę i dla prostoty załóżmy, że promień jej jest równy jedności. Weźmy w powierzchni jej jakiekolwiek trzy punkty: A, B, C i połączmy je ze sobą łukami wielkich kół. Łuki te utworzą pewien „trójkąt sferyczny“. Kąty pomiędzy łukami wielkich kół nazywają się „kątami“ sferycznego trójkąta, łuki AB, AC i BC nazywają się „bokami“ sferycznego trójkąta. Jeżeli połączymy „wierzchołki“ trójkąta sferycznego A, B, C odcinkami prostych ze środkiem kuli O ; to zaraz spostrzeżemy, że łuk AB jest proporcjonalny do kąta AOB , łuk AC proporcjonalny do kąta AOC , a łuk BC proporcjonalny do kąta BOC . Ponieważ zaś promień kuli jest równy jedności, więc jeżeli wyrazimy kąty w mierze łukowej, t. j. za pomocą liczby π , to boki BC, AC i AB będą równe odpowiednim kątom BOC, AOC i AOB .



Ryc. 1.

Będziemy oznaczać kąty sferycznego trójkąta przez A, B, C a przeciwległe im boki przez a, b, c , więc n. p. łuk $AC = \sphericalangle AOC = b$ i t. d.

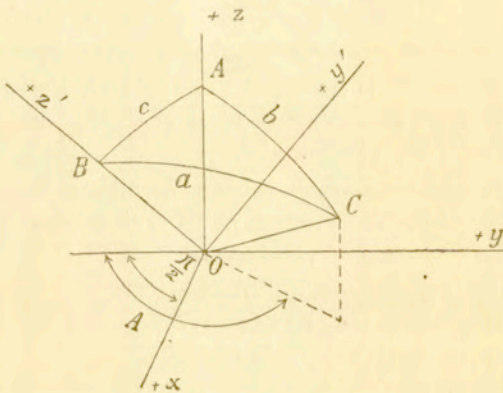
2. Zasadnicze wzory trygonometrii sferycznej.

Naokoło dowolnego punktu O zataczamy kulę o promieniu równym jedności, bierzemy na tej kuli dowolny trójkąt sferyczny ABC i przeprowadzamy przez O trzy osie wzajemnie do siebie prostopadłe w taki sposób, aby dodatnia oś z przechodziła przez wierzchołek A , zaś oś y znajdowała się w płaszczyźnie AOB . Za doda-

tnią obieramy tę stronę osi y , która jest skierowana w prawo. Tak samo obieramy jako dodatnią tę stronę osi x , która jest skierowana od płaszczyzny papieru ku nam. Jednocześnie zakładamy, że wierzchołek C znajduje się ponad płaszczyzną papieru. Wszystkie te założenia nie mają zresztą żadnego zasadniczego znaczenia i na kształt ostatecznych wzorów nie mają wpływu. Robimy je tylko dlatego, aby nie mieć żadnych wątpliwości przy pisaniu przechodowych wzorów.

Jasną jest rzeczą, że przy powyższych założeniach współrzędne prostokątne wierzchołka C są:

$$(1) \begin{cases} x = \sin b \cos (A - 90^\circ) = \sin b \sin A \\ y = \sin b \sin (A - 90^\circ) = -\sin b \cos A \\ z = \cos b = \cos b \end{cases}$$



(Ryc. 2).

Obróćmy teraz osie y i z w ich własnej płaszczyźnie, t. j. naokoło osi x tak, aby oś $+z$ przechodziła przez wierzchołek B . Oczywiście musimy obrócić osie o kąt c i jeżeli oznaczymy nowe współrzędne prostokątne przez x', y', z' , to między nimi a dawnymi współrzędnymi x, y, z będą zachodzić znane z geometrii analitycznej związki:

$$(2) \begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos c + z \sin c \\ z' = -y \sin c + z \cos c \end{cases}$$

Lecz w nowym systemie współrzędne punktu C są:

$$(3) \begin{cases} x' = \sin a \cos (90^\circ - B) = \sin a \sin B \\ y' = \sin a \sin (90^\circ - B) = \sin a \cos B \\ z' = \cos a = \cos a \end{cases}$$

Ze wzorów (1)(2) i (3) wynikają natychmiast „zasadnicze wzory“ trygonometrii sferycznej:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{aligned} \right\} (4)$$

Weźmy najpierw wzór trzeci. Przez kołowe przestawienia można oczywiście otrzymać jeszcze dwa podobne wzory, a zatem będziemy mieli razem trzy wzory:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \right\} (5)$$

Tak samo można przez kołowe przestawienia otrzymać z pierwszego wzoru (4) dwa podobne doń wzory. Dla krótkości napiszemy wszystkie trzy w postaci:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (6)$$

W przeciwieństwie do pierwszego i trzeciego, drugi wzór (4) zawiera pięć elementów, mianowicie trzy boki i dwa kąty. Ponieważ ze sinusem tego samego boku można połączyć raz jeden kąt przyległy, drugi raz drugi, więc liczba wzorów tego kształtu co trzeci wzór (4) jest podwójną, t. j. można napisać aż sześć wzorów tego typu, mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \end{aligned} \right\} (7)$$

Ze wzorów (5), (6) i (7) łatwo jest wyprowadzić inne wzory. Tak n. p. ponieważ wzory (7) są jednorodne względem sinusów boków, więc można zamiast tych ostatnich podstawić proporcjonalne do nich (na mocy równań (6)) sinusy kątów, poczem otrzymamy sześć wzorów:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \sin A \cos B = \cos b \sin C - \sin B \cos A \cos c \\ \sin A \cos C = \cos c \sin B - \sin C \cos A \cos b \\ \sin B \cos C = \cos c \sin A - \sin C \cos B \cos a \\ \sin B \cos A = \cos a \sin C - \sin A \cos B \cos c \\ \sin C \cos A = \cos a \sin B - \sin A \cos C \cos b \\ \sin C \cos B = \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a \end{array} \right.$$

Dalej jeżeli podzielimy prawą stronę pierwszego równania (7) przez $\sin b$ a lewą przez równą mu na mocy równań (6) wielkość

$$\frac{\sin B \sin a}{\sin A},$$

to po łatwym przestawieniu otrzymamy:

$$\cos c \cos A = \cotg b \sin c - \cotg B \sin A.$$

W podobny sposób otrzymamy z pozostałych wzorów (7) jeszcze pięć dalszych wzorów tego typu, razem więc otrzymamy sześć wzorów:

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \cos c \cos A = \cotg b \sin c - \cotg B \sin A \\ \cos b \cos A = \cotg c \sin b - \cotg C \sin A \\ \cos a \cos B = \cotg c \sin a - \cotg C \sin B \\ \cos c \cos B = \cotg a \sin c - \cotg A \sin B \\ \cos b \cos C = \cotg a \sin b - \cotg A \sin C \\ \cos a \cos C = \cotg b \sin a - \cotg B \sin C \end{array} \right.$$

Wreszcie możemy otrzymać równania podobne do równań (5), ale zawierające nie po trzy boki i po jednym kącie, a po trzy kąty i po jednym boku. Weźmy n. p. piąte i szóste równania ((8)), pomnóżmy każde z nich przez $\sin C$ i napiszmy je w postaci:

$$\begin{aligned} \sin^2 C \cos A &= \cos a \sin B \sin C - \sin A \sin C \cos b \cos C \\ \sin^2 C \cos B &= \sin A \sin C \cos b - \sin B \sin C \cos a \cos C \end{aligned}$$

Wyrugujmy wyraz

$$\sin A \sin C \cos b$$

pomiędzy temi dwoma równaniami, a otrzymamy równanie::

$$\sin^2 C \cos A = \sin B \sin C (1 - \cos^2 C) \cos a - \cos B \cos C \sin^2 C.$$

Po podzieleniu przez $\sin^2 C$ powyższe równanie przejdzie na

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

Przez kołowe przestawienia otrzymamy podobne dalsze dwa równania: (10)

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

Oczywiście równania tego typu mogą być tylko trzy.

3. Wzory odnoszące się do trójkąta sferycznego prostokątnego.

Załóżmy, że jeden z kątów n. p. kąt $A = 90^\circ$, wtedy

$$\cos A = 0 \quad \sin A = 1,$$

zaś wzory (5), (6), (7), (8), (9) i (10) przywodzą się do następujących

$$\cos a = \cos b \cos c \quad (5 \text{ bis})$$

$$\left. \begin{aligned} \sin b &= \sin a \sin B \\ \sin c &= \sin a \sin C \end{aligned} \right\} (6 \text{ bis})$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} a \cos C \\ \operatorname{tang} c &= \operatorname{tang} a \cos B \end{aligned} \right\} (7 \text{ bis})$$

$$\left. \begin{aligned} \cos B &= \cos b \sin C \\ \cos C &= \cos c \sin B \end{aligned} \right\} (8 \text{ bis})$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \sin c \operatorname{tang} B \\ \operatorname{tang} c &= \sin b \operatorname{tang} C \end{aligned} \right\} (9 \text{ bis})$$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \quad (10 \text{ bis})$$

Bok a nazywa się przeciwprostokątnią (hypotenuzą), a boki b i c przyprostokątniami (katetami) tak samo jak w trójkącie prostokątnym płaskim. Ze wzoru (5 bis) zaraz widać, że albo wszystkie trzy cosinusy boków są dodatnie, albo jeden dodatni a dwa odjemne. Stąd zaś wynika, że w trójkącie sferycznym prostokątnym albo wszystkie trzy boki są mniejsze niż 90° , albo też jeden bok jest mniejszy niż 90° , a dwa pozostałe większe.

4. Wzory odnoszące się do trójkąta sferycznego prostobocznego.

Założmy, że jeden z boków n. p. bok $a = 90^\circ$, wtedy

$$\cos a = 0 \quad , \quad \sin a = 1,$$

zaś wzory (5), (6), (7), (8), (9) i (10) przywodzą się do następujących:

$$(5 \text{ ter}) \quad \cos A = -\cotg b \cotg c$$

$$(6 \text{ ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin B = \sin b \sin A \\ \sin C = \sin c \sin A \end{array} \right.$$

$$(7 \text{ ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos b = \cos B \sin c \\ \cos c = \cos C \sin b \end{array} \right.$$

$$(8 \text{ ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tg B = -\tg A \cos c \\ \tg C = -\tg A \cos b \end{array} \right.$$

$$(9 \text{ ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tg B = \tg b \sin C \\ \tg C = \tg c \sin B \end{array} \right.$$

$$(10 \text{ ter}) \quad \cos A = -\cos B \cos C$$

Ze wzoru (10 ter) zaraz widać, że cosinusy kątów mogą być albo wszystkie trzy odjemne, albo też jeden jest odjemny a dwa dodatnie. Stąd wynika, że w trójkącie sferycznym prostobocznym albo wszystkie trzy kąty są większe niż 90° , albo jeden tylko jest większy niż 90° a dwa pozostałe mniejsze niż 90° .

Podczas gdy dla jakiegokolwiek trójkąta sferycznego mieliśmy razem 27 wzorów, tymczasem tak dla prostokątnego jak dla prostobocznego mamy tylko po 10 wzorów. Łatwo przekonać się, że w oboju tych specjalnych przypadkach pozostałe 17 wzorów są tylko pewnymi przekształceniami podanych tu 10-iu wzorów. X

5 Wzory nadające się do logarytmowania.

Wzory §§. 4 i 5, t. j. odnoszące się do trójkątów prostokątnych i prostobocznych mogą być odrazu logarytmowane; lecz wzory §. 3 odnoszące się do zwykłych trójkątów sferycznych, z wyjątkiem wzorów (6), nie nadają się do logarytmowania, bo zawierają summy i różnice¹⁾. Można je uczynić przystępnymi do rachunku

¹⁾ Można zresztą użyć logarytmów Gaussa, ale tą drogą nie można osiągnąć wielkiej dokładności.

logarytmicznego przez wprowadzenie pewnych pomocniczych kątów, albo przez odpowiednie przekształcenia.

Najpierw pokażemy, jak wprowadza się pomocnicze kąty. Weźmy zasadnicze wzory (4) i dla przykładu założmy, że b , c i A są wiadome. Połóżmy:

$$\left. \begin{aligned} \sin b \cos A &= m \sin q \\ \cos b &= m \cos q \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ze wzorów tych zaraz wynika

$$\operatorname{tg} q = \operatorname{tg} b \cos A. \quad (12)$$

Oczywiście wzór ten nadaje się do logarytmowania. Ponieważ wedle założenia b i A są wiadome, więc natychmiast znajdziemy tangens szukanego pomocniczego kąta q . Aby usunąć wątpliwości co do tego, w jakim kwadrancie leży kąt q , trzeba zrobić określone założenie co do znaku czynnika m . Założmy, że m jest dodatnie, wtedy $\sin q$ i $\cos q$ będą mieć te same znaki, co lewe strony równań (11). Skoro zaś znaki $\sin q$ i $\cos q$ są wiadome, to wiadomo, w jakim kwadrancie leży kąt q . Następnie powracamy do równań (4), które po podstawieniu wartości na $\sin b \cos A$ i $\cos b$ z równań (11) przybierają następującą, nadającą się do logarytmowania postać:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= m \sin (c - q) \\ \cos a &= m \cos (c - q) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Z pierwszego i drugiego wzoru (13) wynika wzór:

$$\operatorname{tang} B = \frac{\sin b \sin A}{m \sin (c - q)},$$

ale wedle pierwszego wzoru (11)

$$m = \frac{\sin b \cos A}{\sin q},$$

przetworzując m otrzymamy:

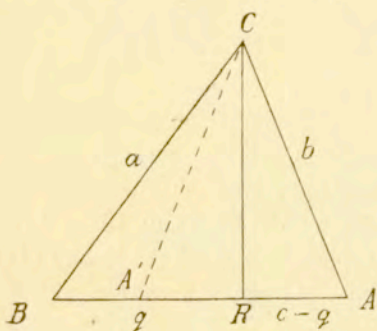
$$\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tg} A \sin q}{\sin (c - q)}. \quad (14)$$

Tak samo z drugiego i trzeciego wzoru (13) otrzymamy:

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} (c - q)}{\cos B}. \quad (15)$$

Pozostaje wątpliwość, w jakich kwadrantach leżą kąty B i a , bo z równań (13) nie można określić znaków wszystkich czterech funkcyi kołowych: dwóch sinusów i dwóch cosinusów. Ale we wszystkich zadaniach są pewne ograniczenia, albo pewne wskazówki, na podstawie których można osądzić, w jakim kwadrancie leży przynajmniej jeden z kątów B i a . Jeżeli n. p. wiemy, w jakim kwadrancie leży kąt B , to „eo ipso“ znamy znaki $\sin B$ i $\cos B$, a wtedy czy to z pierwszego i trzeciego, czy też z drugiego i trzeciego równania (13) określimy znaki funkcyi $\sin a$ i $\cos a$, t. j. kwadrant, w którym leży kąt a .

W trójkącie naszym pozostał jeszcze nieznanym kąt C ; ale skoro wszystkie inne boki i kąty są znane, to łatwo znaleźć kąt C , choćby n. p. za pomocą wzorów (6).



(Ryc. 3).

Metoda powyższa jest równoważna rozłożeniu danego trójkąta sferycznego na dwa trójkąty prostokątne lub prostoboczne. N. p. w danym razie, gdybyśmy z wierzchołka C spuścili prostopadłą na bok c , a odcinek między wierzchołkiem B a spodkiem R tej prostopadłej oznaczyli przez q , to roz-

wiązawszy oba otrzymane w ten sposób trójkąty prostokątne $CBBR$ i CAR , otrzymalibyśmy wzory równoważne wzorom (14) i (15). Wątpliwość co do kątów B i a , o której była wyżej mowa, właśnie powstaje dzięki wprowadzeniu tych trójkątów pomocniczych. Rzeczywiście ponieważ do wzorów (13) kąt A wchodzi tylko przez sinus, to jeżeli odmierzymy $A'R = AR$ i jeżeli połączymy A' z C , to można napisać takie same wzory dla trójkąta $CA'B$, w którym kąt $A' = 180^\circ - A$, bok $CA' = CA = b$, zaś $A'R = c - q$. Inaczej mówiąc, te same pomocnicze trójkąty prostokątne mogą służyć dla dwóch trójkątów. Zauważymy jeszcze, że we wszystkich trzech wzorach (12), (14) i (16) niewiadomy kąt określa się przez tangens. Jest to okoliczność korzystna, bo tang zmienia się szybciej niż cosinus i sinus, wskutek czego określenie kąta przez tangens jest dokładniejsze. N. p. ze siedmiocyfrowymi logarytmaami błąd w określeniu kąta nie przenosi $0''05$.

6. Wzory Napiersa i Delambre'a (Gaussa).

Niezawsze musimy uciekać się do wprowadzenia kątów pomocniczych. We wielu przypadkach można zwykle wzory trygonometrii sferycznej zastąpić przez pewne dające się logarytmować a otrzymane drogą przekształceń wzory.

Z trzeciego wzoru zasadniczego (4) otrzymujemy natychmiast

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

stąd zaś

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{b+c+a}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos A &= 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}. \end{aligned}$$

Położmy jeszcze

$$a + b + c = 2p,$$

a będziemy mogli napisać

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}} \\ \sin \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin b \sin c}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Analogicznych wzorów dla kątów $\frac{1}{2} B$ i $\frac{1}{2} C$ nie piszemy, bo łatwo otrzymać je przez kołowe przestawienia. Oczywiście wzorów (16) należy używać wtedy, gdy wszystkie boki są dane, a kąty są nieznanne. We wzorze na $\sin \frac{1}{2} A$ należy brać pierwiastek zawsze ze znakiem $+$, bo $\frac{1}{2} A$ nie może być większe od 180° . Wątpliwości co do znaku $\cos \frac{1}{2} A$ łatwo rozstrzygnąć, bo wszystkie boki są dane, a więc można rozpoznać, jak wielkimi będą przeciwległe kąty. Ze wzorów (16) zaraz wynika:

$$\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B = \frac{\sin (p-b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-c)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin (p-b)}{\sin c} \cos \frac{1}{2} C$$

$$\cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B = \frac{\sin (p-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-c)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin (p-a)}{\sin c} \cos \frac{1}{2} C$$

$$\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B = \frac{\sin p}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin p}{\sin c} \sin \frac{1}{2} C$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B &= \frac{\sin (p-c)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \sin b}} = \\ &= \frac{\sin (p-c)}{\sin c} \sin \frac{1}{2} C. \end{aligned}$$

Stąd zaraz wynika

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin (p-b) + \sin (p-a)}{\sin c}.$$

Ale

$$\begin{aligned} \sin (p-b) + \sin (p-a) &= \sin \frac{1}{2} (a-b+c) + \sin \frac{1}{2} (-a+b+c) = \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (a-b), \end{aligned}$$

zaś

$$\sin c = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c,$$

a zatem

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c}.$$

Tworząc tak samo $\sin \frac{1}{2} (A-B)$ i t. d., otrzymamy cztery następujące wzory:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \\ \frac{\sin \frac{1}{2} (A-B)}{\cos \frac{1}{2} C} &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} c} \\ \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\sin \frac{1}{2} C} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \\ \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\sin \frac{1}{2} C} &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b)}{\sin \frac{1}{2} c}. \end{aligned} \right.$$

Przez kołowe przestawienia łatwo otrzymać jeszcze osiem podobnych wzorów na $\sin \frac{1}{2} (A+C)$ i t. d. Wzory powyższe noszą

nazwę wzorów Delambre'a i Gaussa, bo podał je Delambre w 1807 r. i mniej więcej w tym samym czasie niezależnie od Delambre'a Gauss. Przez proste dzielenia można z nich wyprowadzić tak zwane analogie Napiera:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B) &= \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B) &= \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b) &= \operatorname{tang} \frac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b) &= \operatorname{tang} \frac{1}{2} c \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Wzorów na $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+C)$ i t. d. nie wypisujemy. Wzorów Delambre'a i Gaussa oraz wzorów Napiera używamy wtedy, gdy dane są dwa boki i kąt między nimi zawarty, albo dwa kąty i bok między nimi zawarty. Naturalnie jeden wzór nie wystarcza, trzeba użyć dwóch wzorów Napiera, względnie czterech Delambre'a. Wzory Delambre'a są o tyle dogodniejsze, że dają tak sinusy jak cosinusy, a więc nie pozostawiają wątpliwości co do tego, w jakich kwadrantach leżą kąty $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(A-B)$ i t. d.

Wzory na promień koła wpisanego w trójkąt sferyczny, wzory na promień opisanego koła oraz wiele innych wzorów pomijamy, bo te, które tu podaliśmy, wystarczają do rozwiązania wszelkich zadań astronomicznych.

Podobnie jak w trygonometrii płaskiej, są też przypadki, w których dwa trójkąty czynią zadość warunkom zadania, mianowicie gdy dane są dwa boki i kąt przeciwległy jednemu z nich, albo gdy dane są dwa kąty i bok przeciwległy jednemu z nich.

7. Wzory różniczkowe.

Wzory te oddają wielkie usługi, gdy trzeba ocenić zmianę jednego z elementów trójkąta sferycznego, n. p. spowodowaną przez błąd. Wyprowadzimy tu cztery wzory różniczkowe.

Zaczynamy od trzeciego wzoru zasadniczego (4), różniczkujemy go i otrzymujemy po zmianie znaków:

$$\sin a da = [\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A] db + \\ + [\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A] dc + \sin b \sin c \sin A dA.$$

Wedle wzorów (7) współczynnik przy db to $\sin a \cos C$, współczynnik przy dc to $\sin a \cos B$, wreszcie na mocy wzorów (6) możemy we współczynniku przy dA zamiast $\sin b \sin A$ napisać $\sin a \sin B$. Dokonawszy tych podstawień i skróciwszy przez $\sin a$, otrzymamy

$$(a) \quad da = \cos C db + \cos B dc + \sin c \sin B dA.$$

W podobny sposób z pierwszego wzoru (10) otrzymamy

$$(b) \quad dA = -\cos c dB - \cos b dC + \sin b \sin C da.$$

Następnie, logarytmując pierwszy wzór (4), otrzymamy:

$$\log \sin a + \log \sin B = \log \sin b + \log \sin A,$$

skąd przez różniczkowanie wynika

$$(c) \quad \cotg a da + \cotg B dB = \cotg b db + \cotg A dA.$$

Wreszcie biorąc piąte równanie (9) i różniczkując, otrzymamy po uporządkowaniu

$$(\cos b \cotg a + \sin b \cos C) db + (-\cotg A \cos C + \cos b \sin C) dC - \\ - \frac{\sin b}{\sin^2 a} da + \frac{\sin C}{\sin^2 A} dA = 0.$$

Lecz współczynnik przy db to na mocy trzeciego wzoru ((5)) $\frac{\cos c}{\sin a}$, współczynnik przy dC to na mocy drugiego wzoru (10) $\frac{\cos B}{\sin A}$, a zatem można napisać

$$\frac{\cos c}{\sin a} db + \frac{\cos B}{\sin A} dC - \frac{\sin b}{\sin^2 a} da + \frac{\sin C}{\sin^2 A} dA = 0.$$

Mnożymy to równanie przez $\sin a \sin A$, podstawiamy na mocy równań (6)

$$\frac{\sin b \sin A}{\sin a} = \sin B, \quad \frac{\sin C \sin a}{\sin A} = \sin c,$$

przenosimy wyraz odjemny na drugą stronę i otrzymujemy:

$$(d) \quad \sin B da = \cos c \sin A db + \sin a \cos B dC + \sin c dA.$$

A więc zapowiedziane cztery wzory różniczkowe są:

$$\left. \begin{aligned} da &= \cos C db + \cos B dc + \sin c \sin B dA \\ dA &= -\cos c dB - \cos b dC + \sin b \sin C da \\ \cotg a da - \cotg b db &= \cotg A dA - \cotg B dB \\ \sin B da &= \cos c \sin A db + \sin a \cos B dC + \sin c dA \end{aligned} \right\} (19)$$

Zaraz widać, że pierwszy wzór (19) reprezentuje sześć wzorów, bo można w trzecim wyrazie po prawej stronie napisać $\sin b \sin C$ zamiast $\sin c \sin B$. W ten sposób mamy dwa wzory na różniczkę da i tak samo dwa na różniczkę db i dwa na różniczkę dc . Wzory na różniczki db i dc łatwo otrzymać ze wzorów na różniczkę da przez przestawienia kołowe. Tak samo można napisać dwa wzory na różniczkę dA , bo można napisać $\sin c \sin B$ zamiast $\sin b \sin C$; a zatem drugi wzór (19) także reprezentuje sześć wzorów. Wzorów takich jak czwarty wzór (19) można napisać także sześć, bo z każdego wzoru (9) można otrzymać jeden wzór tego typu. Za to wzorów takich jak trzeci wzór (19) można oczywiście napisać tylko trzy. W następnym paragrafie zastosujemy wzory różniczkowe do obliczenia sferycznej przewyżki.

8. Sferyczna przewyżka.

Podczas gdy w trójkącie płaskim (w geometrii euklidesowej) suma kątów zawsze równa się dwóm prostym, w trójkącie sferycznym suma kątów jest większa od dwóch prostych. Różnicę

$$A + B + C - \pi = \varepsilon$$

nazywamy sferyczną przewyżką (ekscessem). Ta przewyżka ma niemałe zastosowanie w geodezyi i w niektórych wzorach, których tu dla krótkości nie przytaczaliśmy, bo w astronomii rzadko kiedy bywają stosowane. Okażemy, że sferyczna przewyżka równa się polu sferycznego trójkąta, jeżeli promień kuli przyjmiemy za jedność a kąty wyrazimy w mierze łukowej, t. j. za pomocą liczby π .

Oznaczamy pole trójkąta przez F . Zakładamy, że bok a obraca się naokoło wierzchołka C o nieskończenie mały kąt tak, że pole trójkąta powiększa się. Przedłużamy bok c do przecięcia się z nowym położeniem boku a w punkcie B' . Pole trójkąta wzrosło o pole CBB' , a więc

$$dF = CBB'.$$

Ale jeżeli na CB' odmierzymy dawny bok $a = CB$ n. p. do punktu B'' , to trójkąt równoboczny CBB'' będzie różnił się od CBB' tylko o pole trójkąta $B''BB'$. To ostatnie pole jest wielkością nieskończenie małą drugiego rzędu, bo tak wysokość jak podstawa trójkąta $BB'B''$ są nieskończenie małe. Pomijając więc wielkość nieskończenie małą drugiego rzędu wobec wielkości nieskończenie małych pierwszego rzędu możemy napisać:

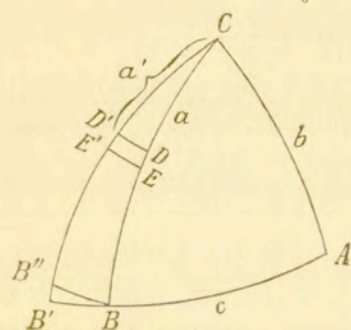
$$dF = CBB''.$$

Pole równobocznego trójkąta CBB'' ¹⁾ obliczamy w następujący sposób. Weźmy łuk $a' < a$, odmierzymy go na bokach CB i CB'' od C do D i od C do D' , następnie odmierzymy $a' + da'$ od C do E i od C do E' . Pole nieskończenie małego czworoboku $DED'E'$ (jest to także wielkość drugiego rzędu) jest

$$dC \sin a' da'.$$

Przeto pole trójkąta $CBB'' = dF$ będzie

$$(20) \quad dF = dC \int_0^a \sin a' da' = dC (1 - \cos a).$$



Ryc. 4.

Teraz obliczymy przyrost przewyżki. Ponieważ

$$\varepsilon = A + B + C - \pi,$$

a kąt A pozostał bez zmiany, więc

$$d\varepsilon = dB + dC.$$

Lecz z drugiego wzoru (19) przez kołowe przedstawienie otrzymujemy wzór

$$dB = -\cos a dC - \cos c dA + \sin c \sin A db.$$

Stąd zaś ze względu, że ani A , ani b nie uległo zmianie, wynika

$$dB = -\cos a dC,$$

a stąd

$$(21) \quad d\varepsilon = (1 - \cos a) dC.$$

Porównawszy wzory (20) i (21), widzimy, że

$$d\varepsilon = dF.$$

¹⁾ który nie jest sferycznym trójkątem, bo BB'' jest łukiem małego koła. Ale ta okoliczność jest dla dowodu obojętna.

Mógłby ktoś zarzucić, że zmieniliśmy trójkąt tylko z jednej strony; ale powtarzając tę samą konstrukcyę i rozumowanie z bokiem b a potem z bokiem c znów otrzymalibyśmy to samo. Zatem mamy ogólnie

$$d\varepsilon = dF.$$

Stąd wynika, że

$$\varepsilon = F + \text{stała.}$$

Ale zaraz widać, że stała musi być zerem, bo jeżeli będziemy zmniejszać trójkąt do nieskończoności, to w granicy nietylko F stanie się zerem, ale także ε , bo nieskończenie mały trójkąt sferyczny jest identyczny z płaskim. Tedy ostatecznie

$$\varepsilon = F. \quad (22)$$

Jeżeli zaś zamiast kuli o promieniu 1 weźmiemy kulę o promieniu R , to równanie to przejdzie na

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2}, \quad (22 \text{ bis})$$

przyczem naturalnie wyobrażamy sobie, że w drugim równaniu F i R są wyrażone w zwykłych miarach n. p. F w metrach kwadratowych a R w metrach liniowych. Co zaś do ε , to powinno ono być w obu równaniach wyrażone w mierze łukowej, t. j. za pomocą liczby π .

Literatura.

J. A. Serret: *Traité de trigonometrie*. Paryż 1888.

W. Chauvenet: *A Manual of spherical and practical astronomy*. Filadelfia 1871.

F. Brünnow: *Lehrbuch der sphärischen Astronomie* (kilka wydań).

F. R. Helmert: *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*. Dwa tomy, Lipsk 1880 i 1884.

ROZDZIAŁ II.

Interpolacja z tablic.

1. Cel interpolacji.

W astronomii mamy często do czynienia z funkcjami, których wyrażenia analityczne są wcale nieznane, albo z takimi, których wyrażenia są do rachunku niedogodne. Pomimo tego wartości liczbowe owych funkcji, odpowiadające różnym wartościom argumentu (zmiennej niezależnej) lub argumentów, są przynajmniej w pewnym obrębie znane. Wartości te wraz z odpowiednimi argumentami układamy w tablice¹⁾. Otóż w praktyce często zdarza się, że potrzebujemy wartości w tablicach nieznajdującej się, ale odpowiadającej argumentowi zawartemu pomiędzy dwoma sąsiednimi argumentami tablicy. Wtedy musimy potrzebną nam wartość funkcji interpolować.

2. Wzór interpolacyjny Newtona. Wzór Stirlinga i t. d.

Wyobraźmy sobie, że mamy tablicę funkcji u jednej zmiennej niezależnej (jednego argumentu), przyczem, jak to zwykle bywa, wartości argumentu są równoodległe. Jeżeli n. p. argumentem jest czas, to wartości funkcji są podane co godzinę, albo co dobę i t. d. Mamy tedy tablicę takiego kształtu:

Argument	Funkcja
0	u_0
1	u_1
2	u_2
3	u_3
4	u_4
5	u_5
6	u_6
7	u_7

¹⁾ Każdemu znane są tablice logarytmów. Mogą one posłużyć jako typowy przykład tablic funkcji, której analityczne wyrażenie jest znane, ale do rachunku niedogodne.

Tworzymy kolejne różnice pomiędzy wartościami funkcji

$$\Delta'_{1/2} = u_1 - u_0, \quad \Delta'_{3/2} = u_2 - u_1, \quad \Delta'_{5/2} = u_3 - u_2 \text{ i t. d.}$$

Nazywamy je „różnicami pierwszymi“, albo „różnicami pierwszego rzędu“. Następnie tworzymy różnice pomiędzy różnicami, a więc:

$$\Delta''_1 = \Delta'_{3/2} - \Delta'_{1/2}, \quad \Delta''_2 = \Delta'_{5/2} - \Delta'_{3/2}, \quad \Delta''_3 = \Delta'_{7/2} - \Delta'_{5/2} \text{ i t. d.}$$

Nazywamy je „różnicami drugimi“ albo „różnicami drugiego rzędu“. W dalszym ciągu tworzymy „trzecie, czwarte i t. d. różnice“, t. j.

$$\Delta'''_{3/2} = \Delta''_2 - \Delta''_1, \quad \Delta'''_{5/2} = \Delta''_3 - \Delta''_2 \text{ i t. d.}$$

$$\Delta^{IV}_2 = \Delta'''_{5/2} - \Delta'''_{3/2}, \quad \Delta^{IV}_3 = \Delta'''_{7/2} - \Delta'''_{5/2} \text{ i t. d.}$$

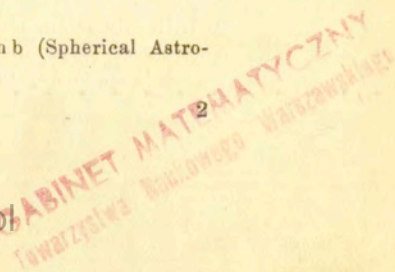
.

Wreszcie tworzymy z nich następujący schemat:

Argument	Funkcja	Różnica I,	II,	III,	IV,	V
0	u_0					
	—	$\Delta'_{1/2}$				
1	u_1	—	Δ''_1	—		
	—	$\Delta'_{3/2}$	—	$\Delta'''_{3/2}$		
2	u_2	—	Δ''_2	—	Δ^{IV}_2	
	—	$\Delta'_{5/2}$	—	$\Delta'''_{5/2}$	—	$\Delta^V_{5/2}$
3	u_3	—	Δ''_3	—	Δ^{IV}_3	—
	—	$\Delta'_{7/2}$	—	$\Delta'''_{7/2}$	—	$\Delta^V_{7/2}$
4	u_4	—	Δ''_4	—	Δ^{IV}_4	— (A)
	—	$\Delta'_{9/2}$	—	$\Delta'''_{9/2}$	—	$\Delta^V_{9/2}$
5	u_5	—	Δ''_5	—	Δ^{IV}_5	—
	—	$\Delta'_{11/2}$	—	$\Delta'''_{11/2}$	—	$\Delta^V_{11/2}$
6	u_6	—	Δ''_6	—	Δ^{IV}_6	
	—	$\Delta'_{13/2}$	—	$\Delta'''_{13/2}$		
7	u_7	—	Δ''_7			
	—	$\Delta'_{15/2}$				
8	u_8					

¹⁾ Używam tego samego znakowania, co S. Newcomb (Spherical Astronomy, New-York 1906).

Astronomia teoretyczna.



Teoretycznie możnaby w wielu przypadkach¹⁾ tworzyć różnice coraz to wyższych rzędów aż do nieskończoności, ale w rzeczywistości różnice coraz to wyższych rzędów są za wsze coraz to mniejsze. Dzięki temu można w rachunkach zawsze pominąć różnice wyższych rzędów. Na których różnicach należy się zatrzymać, to zależy od dokładności samych tablic i od tego, z jaką dokładnością ma być wykonany rachunek. Wogóle jednak bardzo rzadko się zdarza, aby uwzględniano różnice dalsze niż piąte.

Powiedzieliśmy przed chwilą, że w praktyce różnice coraz to wyższych rzędów są coraz to mniejsze. Jest to prawdo tak ogólne, że skoro w jakimś miejscu tablic różnice coraz to wyższych rzędów nie zmniejszają się, a powiększają się, to napewno można twierdzić, że popełniono błąd przy obliczeniu czy to którejś wartości funkcyi u , czy to którejś różnicy.

Z definicyi różnic wynikają następujące związki, które przy pomocy powyższego schematu (A) łatwo stwierdzić:

$$u_1 = u_0 + \Delta'_{1/2}$$

$$u_2 = u_1 + \Delta'_{3/2} = u_0 + \Delta'_{1/2} + \Delta'_{3/2} = u_0 + 2\Delta'_{1/2} + \Delta''_1$$

$$u_3 = u_2 + \Delta'_{5/2} = u_0 + 2\Delta'_{1/2} + \Delta''_1 + \Delta'_{3/2} + \Delta''_2 = u_0 + 3\Delta'_{1/2} + 3\Delta''_1 + \Delta'''_{3/2}$$

i t. d. i t. d. Spostrzegamy z łatwością, że liczbowe współczynniki przy kolejnych różnicach są te same, co we wzorze binomialnym, i piszemy ogólnie:

$$(1) \quad u_n = u_0 + n\Delta'_{1/2} + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta''_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta'''_{3/2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \Delta^{IV}_{5/2} + \dots$$

Jest to wzór interpolacyjny Newtona. Dopóki n jest liczbą całą, wzór (1) jest niewątpliwie ścisły, ale bezużyteczny, bo wartości funkcyi u , odpowiadające całym wartościom n , bez tego znajdują się w tablicy. Użytecznym staje się wzór (1) dopiero wtedy, gdy założymy, że pozostaje ścisłym także dla ułamkowych wartości n . Wystarczy założenie, że pozostaje ścisłym, gdy n jest prawdziwym ułamkiem dodatnim, lub ujemnym, bo w praktyce n jest zawsze zawarte między -1 a $+1$. Zawsze można najbliższą do interpolowanej wartość funkcyi u przyjąć za u_0 , bo w naszym rozumowaniu obraliśmy zero zupełnie dowolnie. Hypoteza, że wzór (1),

¹⁾ N. p. gdy funkcyja u jest przestępną.

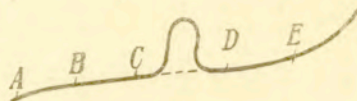
a tak samo wzory otrzymane zeń przez przekształcenia, jest ścisły dla ułamkowych wartości n , jest niezawsze słuszną, ale sprawdza się, jeżeli funkcyja u jest ciągła i nie przedstawia w danym odstępie jakiej osobliwości¹⁾. Na szczęście w zwykłej praktyce astronomicznej tego rodzaju przypadki nie zdarzają się wcale. Aby pokazać zastosowanie wzoru Newtona, weźmiemy następujący przykład. W „*Connaissance des Temps*“ są podane długości Merkurego w średnie południe w Paryżu co drugi dzień. Weźmy *n. p.* dane z pierwszych dni stycznia 1912 r. i utwórzmy różnice pierwszych czterech rzędów.

Data	Długość Merkurego	Δ^I	Δ^{II}	Δ^{III}	Δ^{IV}
0 st. 1912	275° 54' 6''	— — —			
2 " "	281 39 13.5	5° 45' 6''			
4 " "	287 32 38.3	5 53 24.8	8' 18''	1' 56''	—
6 " "	293 38 18.2	6 3 39.9	10 15.1	2 6.5	9'6
8 " "	299 52 18.7	6 16 0.5	12 21.6	2 14.3	7.8
10 " "	306 22 55.1	6 30 36.4	14 35.9		

Obliczmy stąd długość Merkurego w średnie południe 1 stycznia 1912. Ponieważ tablica podaje długości co dwie doby, więc biorąc na u_0 długość 0 stycznia w średnie południe musimy dla średniego południa 1 stycznia położyć $n = \frac{1}{2}$. Tedy współczynniki we wzorze (1) będą:

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad -\frac{5}{128}, \quad \dots$$

¹⁾ Wyjaśnimy te słowa na przykładzie. Załóżmy, że funkcyja u ma przebieg taki, jak krzywa na załączonym rysunku. Załóżmy dalej, że znane są tylko wartości funkcyi (t. j. rzędne krzywej) w punktach A, B, C, D, E i t. d. Oczywiście interpolacya między punktami C i D da nie rzeczywisty przebieg krzywej, a odmienny od niego, zaznaczony na rysunku linią przerywaną. Ale gdyby odstępy między znanymi wartościami funkcyi były znacznie mniejsze, to owo lokalne zwiększenie krzywizny nie mogłoby ująć uwagi i możnaby odtworzyć krzywą przez interpolacyę. Gdyby jednak między C i D znajdowała się nieciągłość albo punkt podwójny, to zmniejszenie odstępu nie doprowadziłoby do celu.



Ryc. 5.

Z drugiej strony z tablicy wynika

$$u_0 = 275^\circ 54' 6''9, \quad \Delta_{1/2}^I = 5^\circ 45' 6''6, \quad \Delta_1^{\text{II}} = 8' 18''2, \\ \Delta_{3/2}^{\text{III}} = 1' 56''9, \quad \Delta_2^{\text{IV}} = 9''6.$$

Podstawiając we wzór (1) znajdziemy szukaną długość 1 stycznia 1902 r.

$$278^\circ 45' 44''9.$$

Wzór Newtona jest tem niedogodny, że zawiera różnice, stojące w różnych wierszach; ale można zeń wyprowadzić dogodniejsze wzory, zawierające tylko różnice figurujące w dwóch bezpośrednio po sobie następujących wierszach.

Ze schematu (A) łatwo wyprowadzimy następujące równości:

$$\Delta_1^{\text{II}} = \Delta_0^{\text{II}} + \Delta_{1/2}^{\text{III}} \\ \Delta_{3/2}^{\text{III}} = \Delta_{1/2}^{\text{III}} + \Delta_0^{\text{IV}} + \Delta_{1/2}^{\text{V}} \\ \Delta_2^{\text{IV}} = \Delta_0^{\text{IV}} + 2\Delta_{1/2}^{\text{V}} + \Delta_0^{\text{VI}} + \Delta_{1/2}^{\text{VII}} \\ \Delta_{3/2}^{\text{V}} = \Delta_{1/2}^{\text{V}} + 2\Delta_0^{\text{VI}} + 3\Delta_{1/2}^{\text{VII}} + \Delta_0^{\text{VIII}} + \Delta_{1/2}^{\text{IX}} \\ \dots$$

Wyrugujmy teraz ze wzoru (1) Δ_1^{II} , $\Delta_{3/2}^{\text{III}}$, Δ_2^{IV} i t. d. za pomocą tych ostatnich równań, a otrzymamy

$$u_n = u_0 + n\Delta_{1/2}^I + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta_0^{\text{II}} + \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right] \Delta_{1/2}^{\text{III}} \\ + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right] \Delta_0^{\text{IV}} + \\ + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right] \Delta_{1/2}^{\text{V}} + \dots$$

Ściągnąwszy wyrazy w nawiasach, znajdziemy:

$$(2) \quad u_n = u_0 + n\Delta_{1/2}^I + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta_0^{\text{II}} + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_{1/2}^{\text{III}} + \\ + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta_0^{\text{IV}} + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Delta_{1/2}^{\text{V}} + \dots$$

Wzór (2) zawiera tylko różnice parzyste z wiersza o wskaźniku 0 i nieparzyste z wiersza o wskaźniku $1/2$. Zamiast tych ostatnich można wprowadzić różnice nieparzyste z wiersza o wskaźniku $-1/2$ za pomocą równań

$$\begin{aligned} \Delta_{1/2}^I &= \Delta_{-1/2}^I + \Delta_0^I \\ \Delta_{1/2}^{III} &= \Delta_{-1/2}^{III} + \Delta_0^{III} \\ &\dots \end{aligned}$$

Wtedy ze wzoru (2) otrzymamy wzór

$$\begin{aligned} u = u_0 + n\Delta_{-1/2}^I + \frac{n(n+1)}{1.2} \Delta_0^I + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} \Delta_{-1/2}^{III} + \\ + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4} \Delta_0^{IV} + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

który bywa użyteczny wtedy, gdy interpolujemy wstecz, t. j. nie między u_0 a u_1 a między u_0 i u_{-1} . Rzecz prosta, że wtedy n będzie ujemne. Jeżeli jednak n ma oznaczać ułamek dodatni, to można w ostatnim wzorze napisać $-n$ zamiast n , poczem otrzymamy:

$$\begin{aligned} u_n = u_0 - n\Delta_{-1/2}^I + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta_0^I - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} \Delta_{-1/2}^{III} + \\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} \Delta_0^{IV} - \\ - \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} \Delta_{-1/2}^V + \dots \end{aligned} \quad (3 \text{ bis})$$

Oprócz wzorów (2) i (3) istnieją jeszcze inne wzory, których tu wyprowadzać nie będziemy. Zrobimy wyjątek dla wzoru Stirlinga, który równie dobrze nadaje się do interpolowania naprzód jak wstecz. Otrzymamy go dodając poprostu do siebie wzory (2) i (3) i dzieląc przez 2. Różnice parzystych rzędów są w obu wzorach jednakowe, a więc ich współczynniki sumują się. Różnice nieparzystych rzędów są różne: we wzorze (2) wzięte z wiersza o wskaźniku $1/2$ a we wzorze (3) z wiersza o wskaźniku $-1/2$; ale ich współczynniki są jednakowe, jeżeli więc oznaczymy średnie arytmetyczne w taki sposób:

$$\frac{1}{2}(\Delta_{1/2}^I + \Delta_{-1/2}^I) = \Delta_0^I, \quad \frac{1}{2}(\Delta_{1/2}^{III} + \Delta_{-1/2}^{III}) = \Delta_0^{III} \quad \text{i t. d.},$$

to będziemy mogli napisać wzór Stirlinga w kształcie:

$$(4) \quad u_n = u_0 + n\Delta_0^I + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \Delta_0^{II} + \frac{n(n^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_0^{III} + \frac{n^2(n^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta_0^{IV} + \\ + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Delta_0^V \dots$$

Przez to, iż oznaczyliśmy średnie arytmetyczne różnic nieparzystych rzędów przez Δ_0^I , Δ_0^{III} i t. d., nie może wyniknąć żadne nieporozumienie, bo wiadomo, że tylko Δ_0 z parzystymi górnymi wskaźnikami oznaczają różnice, zatem skoro spostrzeżemy Δ_0 z nieparzystym górnym wskaźnikiem, to będziemy wiedzieli, że to nie jest różnica, a coś innego, w danym razie wedle umowy średnia arytmetyczna dwóch różnic nieparzystego rzędu o dolnych wskaźnikach $+1/2$ i $-1/2$.

3. Różniczkowanie i całkowanie wzorów interpolacyjnych.

Częstokroć zdarza się, że musimy różniczkować, względnie całkować funkcyje, których wyrażenia analityczne nie są znane. Przedstawiamy wtedy funkcyę przez jeden z powyżej przytoczonych wzorów interpolacyjnych, albo przez jaki inny i różniczkujemy, względnie całkujemy wedle ogólnych reguł.

Za zmienną niezależną bierzemy naturalnie n , a ponieważ wartości n są zwykle podane co równe odstępów czasu, więc n zastępuje nam zmienną t (= czas). Jeżeli odstępów czasu w danej tablicy są równe przyjętym w rachunku jednostkom czasu, to mamy poprostu

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dn}$, jeżeli zaś są k razy większe, to wtedy

$$(5) \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{k} \frac{d}{dn}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{k^2} \frac{d^2}{dn^2}, \dots \quad \text{wogóle} \quad \frac{d^m}{dt^m} = \frac{1}{k^m} \frac{d^m}{dn^m}$$

Ale utwórzmy pochodne funkcyi interpolacyjnej. Za punkt wyjścia weźmy wzór Stirlinga (4). Możemy go uważać za przekształcony wzór Taylora ze zmienną niezależną n . Ponieważ wzór Taylora jest uporządkowany wedle potęg zmiennej niezależnej, mianowicie:

$$(6) \quad u_n = u_0 + n \frac{du}{dn} + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2u}{dn^2} + \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3u}{dn^3} + \dots,$$

więc musimy taksamo uporządkować wzór (4), inaczej bowiem oba wzory nie będą porównywalne. — Po uporządkowaniu wzór Stirlinga przedstawi się nam w postaci¹⁾

$$u = u_0 + n \left[\Delta_0^I - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_0^{III} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Delta_0^V - \dots \right. \\ \left. + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \left[\Delta_0^{II} - \frac{1}{3 \cdot 4} \Delta_0^{IV} + \dots \right] + \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left[\Delta_0^{III} - \frac{1}{4} \Delta_0^V \dots \right] \quad (7)$$

Po porównaniu wzorów (6) i (7) znajdziemy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dn} &= \left[\Delta_0^I - \frac{1}{6} \Delta_0^{III} + \frac{1}{30} \Delta_0^V - \frac{1}{140} \Delta_0^{VII} + \dots \right] \\ \frac{d^2u}{dn^2} &= \left[\Delta_0^{II} - \frac{1}{12} \Delta_0^{IV} + \frac{1}{90} \Delta_0^{VI} - \dots \right] \\ \frac{d^3u}{dn^3} &= \left[\Delta_0^{III} - \frac{1}{4} \Delta_0^V + \frac{7}{120} \Delta_0^{VII} - \dots \right] \\ \frac{d^4u}{dn^4} &= \left[\Delta_0^{IV} - \frac{1}{6} \Delta_0^{VI} + \dots \right] \\ \frac{d^5u}{dn^5} &= \left[\Delta_0^V - \frac{1}{3} \Delta_0^{VII} + \dots \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Przypominamy, że

$$\Delta_0^I = \frac{1}{2} (\Delta_{1/2}^I + \Delta_{-1/2}^I), \quad \Delta_0^{III} = \frac{1}{2} (\Delta_{1/2}^{III} + \Delta_{-1/2}^{III}), \dots$$

oraz, że chcąc przejść od zmiennej n do zmiennej t należy uwzględnić równania (5).

Wzory (8) dają możność obliczyć pochodne z różnic. W łatwiejszych zadaniach więcej różnic, jak tu wypisano, nie uwzględniamy. Dokładniejsze wzory z wyliczonymi współczynnikami aż do dalszych wyrazów znajdują się w traktatach specjalnych np. w znanym dziele Th. v. Oppolzera p. t.: *Lehrbuch der Bahnbestimmung*. — Pożyteczne wskazówki co do interpolacji znajdują się we wspomnianem już dziele S. Newcomba p. t.: *Spherical Astronomy* (New York 1906).

Literatura.

Wymienione na końcu I-go rozdziału dzieło Chauveneta, przed chwilą przytoczone dzieła Th. v. Oppolzera i S. Newcomba oraz B. Baillaud, *Cours d'Astronomie*. Paryż 1893 i 1896.

¹⁾ Zamiast u piszemy po prostu u .

ROZDZIAŁ III.

Metoda najmniejszych kwadratów.

1. Błędy obserwacyi.

W astronomii ciągle robimy pomiary. Zmysły nasze oraz narzędzia, służące do pomiarów, nie są doskonałe, warunki, w których odbywają się obserwacye, ulegają pewnym zmianom; wskutek tego pomiary nasze nie są absolutnie ścisłe. Przekonujemy się o tem, jeżeli powtórzymy pomiar tej samej wielkości kilka lub kilkanaście razy. Za każdym razem otrzymamy nieco odmienny rezultat. Ta niezgodność między kolejnymi pomiarami jednej i tej samej wielkości pochodzi właśnie stąd, że przy każdym pomiarze popełniłszy pewien błąd.

Rozróżniamy błędy „systematyczne“ i „przypadkowe“. Błędy systematyczne są to błędy takie, które można usunąć przez zmianę metody, albo takie, które można wyrugować za pomocą odpowiednich dodatkowych pomiarów i doświadczeń; tu np. należą błędy pochodzące z gięcia się narzędzi, z rozszerzania się w lecie a kurczenia w zimie. Określiwszy np. gięcie się lunety przez osobne doświadczenia możemy błąd stąd pochodzący wyrugować. Do błędów systematycznych należą niektóre błędy osobiste. Tak np. niektórzy obserwatorzy stale notują przejścia gwiazdy przez nitki zapóźno, inni zawcześnie. Błędy osobiste można także oznaczyć przez odpowiednie doświadczenia.

Natomiast „przypadkowymi“ nazywamy wszystkie błędy, których ani przez zmianę metody, ani przez dodatkowe doświadczenia określić i wyrugować nie można. Tu należą błędy pochodzące od mnóstwa drobnych przyczyn, np. od drobnych zmian we fizycznym i moralnym stanie obserwatora, od drobnych niedokładności w budowie narzędzi, dalej błędy pochodzące z nieregularnych zmian refrakcyi. Atmosferę przebiegają nieustannie mniejsze i większe

wiry, fale, miejscowe prądy, które zmieniają refrakcyę. Wskutek tego obrazy gwiazd wciąż drgają i zmieniają swój kształt. Błędy przypadkowe są z natury rzeczy zawarte w pewnych dość ciasnych granicach, przyczem większe błędy zdarzają się rzadziej niż małe; oprócz tego błędy te są raz dodatnie, drugi raz odjemne. Trudno oznaczyć granicę między błędami systematycznymi a przypadkowymi. Błąd pochodzący z tej samej przyczyny może raz występować jako systematyczny, drugi raz jako przypadkowy. Załóżmy np., że mierząc teodolitem kąt między dwoma ziemskimi przedmiotami A i B nastawiliśmy na A podziałkę 0° (na kole horyzontalnym) i że z kilku odczytań znaleźliśmy na kąt AB średnią wartość $50^{\circ}10'20''$. Ten rezultat może być błędny z dwóch przyczyn: 1) Koło horyzontalne może być niezupełnie dobrze scentrowane naokoło osi pionowej. 2) Kreski podziałki mogą w danej okolicy [koło 50°] być za blisko lub za daleko od 0° położone. Załóżmy dla prostoty, że pierwsza przyczyna błędu nie istnieje, że istnieje tylko druga, że np. koło 50° kreski podziałki są za blisko od 0° położone. Wtedy wszystkie odczytania dadzą za duży kąt i, choćbyśmy sto razy odczytanie powtórzyli, błędu tego nie wyrugujemy. Musimy go więc uważać za błąd systematyczny. Można go wyrugować wymierzając samą podziałkę i określając jej błędy; ale można także wyrugować go przez zmianę metody. Nastawmy na A raz 0° , drugi raz 60° , trzeci raz 120° , potem 180° , 240° i t. d. t. j. mierzymy kąt AB raz tą częścią podziałki, która znajduje się między 0° a 60° , drugi raz tą, która znajduje się między 60° a 120° i t. d. Otóż z powodu, że podziałki są rozłożone na obwodzie koła i że 0° schodzi się z 360° , musi się zdarzyć, że jeżeli koło 50° podziałki są za blisko, to w drugim miejscu koła będą za daleko od 0° położone. Wskutek tego, jeżeli mierząc jedną częścią podziałki otrzymujemy za duże kąty, to mierząc drugą częścią otrzymamy za małe kąty. Zatem w tej nowej metodzie błędy zależne od niedokładności podziałki koła będą raz dodatnie, drugi raz odjemne, będą zatem wzajemnie kompensować się, t. j. będą miały charakter błędów „przypadkowych“.

2. Średnia arytmetyczna.

Ponieważ błędy systematyczne mogą być wyrugowane tylko przez zmianę metody, albo przez osobne dodatkowe badanie, więc

powtarzanie pomiarów służy tylko do wyrugowania błędów przypadkowych. Właśnie dlatego, że wedle definicyi błąd przypadkowy może być równie dobrze dodatni jak ujemny, warto powtarzać pomiary i warto tworzyć średnią arytmetyczną, bo im więcej pomiarów, tem więcej szans, że średnia arytmetyczna będzie bliska do rzeczywistości. Załóżmy np., że mierzymy pewną długość L i że rezultaty oddzielnych pomiarów są $l_1, l_2, l_3, l_4 \dots l_n$. Co do błędów systematycznych, to ponieważ metoda średniej arytmetycznej ich nie dotyczy, założymy, że albo nie istnieją, albo już zostały wyrugowane. Możemy tedy położyć:

$$l_1 = L + \Delta_1, \quad l_2 = L + \Delta_2, \quad \text{i t. d.}$$

gdzie Δ_1, Δ_2 i t. d. oznaczają błędy „przypadkowe“. Tworzymy średnią arytmetyczną:

$$(1) \quad L_m = \frac{1}{n} \sum_1^n l_i = L + \frac{1}{n} \sum_1^n \Delta_i.$$

Ponieważ błędy przypadkowe są zarówno dodatnie jak ujemne, więc powinny mniej więcej kompensować się i

$$\sum_1^n \Delta_i$$

powinno być małą wielkością.

W dodatku we wyrażeniu na średnią arytmetyczną suma ta jest podzielona przez liczbę n . Wynika stąd, że im więcej pomiarów, tem „ceteris paribus“ L_m powinno mniej różnić się od rzeczywistej długości L . Powiedzieliśmy „ceteris paribus“, bo dokładność średniej arytmetycznej zależy nie tylko od ilości, ale także od jakości pomiarów. Średnia arytmetyczna z dziesięciu pomiarów dokonanych przez lepszego obserwatora, lepszym narzędziem, w lepszych warunkach może być łaćno dokładniejsza od średniej arytmetycznej z dwudziestu pomiarów dokonanych przez mniej wpraw nego obserwatora, gorszym narzędziem, lub w gorszych warunkach. Ale to są rzeczy nazbyt oczywiste, aby warto je obszernie tłumaczyć. Tak samo jasnym jest, że wolno, a nawet trzeba odrzucić pomiary jawnie mylne. Niekiedy zresztą można taki pomiar poprawić, np. jeżeli obserwator oczywiście pomylił się w odczytaniu podziałki lub w zapisie¹⁾. Natomiast odrzucanie pomiarów odskaku-

jących od większości, ale różniących się od pozostałych o wielkości leżące w granicach możliwych błędów z reguły prowadzi do sfałszowania rezultatu. Załóżmy np., że obserwator odczytuje cztery razy podziałkę, przyczem musi pewien mały odstęp ocenić „od oka“. Załóżmy, że trzy razy ocenił ten odstęp na 0,4, a za czwartym na 0,2. Jeżeli odrzuci ten ostatni pomiar, to otrzyma średnio 0,4, jeżeli go uwzględni, to otrzyma średnio 0,35.

Otóż doświadczenie poucza, że pospolicie ten drugi rezultat bywa bliższy prawdy, że w owych zgodnych między sobą odczytaniach obserwator wciąż przeceniał odległość, a w owym odskakującym od innych pomiarze popełnił odwrotny błąd, kompensujący błędy pozostałych odczytań.

Metoda średniej arytmetycznej jest zupełnie wystarczającą, gdy możemy szukaną wielkość bezpośrednio zmierzyć; ale jak postąpić wtedy, gdy z pewnej, lub z pewnych mierzonych wielkości mamy określić inne niepodlegające bezpośrednio mierzeniu wielkości? — Posługujemy się wtedy metodą „najmniejszych kwadratów“, którą można uważać za pewnego rodzaju uogólnienie metody „średniej arytmetycznej“.

3. Metoda najmniejszych kwadratów.

Wiadomo, że metoda ta ściśle uzasadnioną być nie może. Niema w tem nic dziwnego, bo błędy przypadkowe są dziełem różnych drobnych przyczyn, których sposób działania jest co najwyżej tylko ogólnikowo znany. Jakże ująć w ściśle ramy to, co jest niedokładnie znane albo nawet wcale nieznane. To też podany tu wywód nie ma wcale na celu dowieść słuszności metody najmniejszych kwadratów, ma tylko okazać na jakich przypuszczeniach jest oparta.

Będziemy wciąż rozumować tak, jak gdyby systematyczne błędy albo wcale nie istniały, albo już były wyrugowane; skoro zatem będzie mowa o błędzie, to zawsze należy rozumieć tylko błąd przypadkowy. Będziemy rozważać prawdopodobieństwo błędów przypadkowych, przyczem z początku ograniczymy się do najprostszego przypadku, gdy chodzi o pomiary jednej i tej samej wielkości, — później dopiero rozszerzymy metodę na przypadek wielu zmiennych.

¹⁾ Pomyłki w odczytaniu lub zapisie zdarzają się dość często, ale łatwo je odkryć, bo obserwator myli się zazwyczaj o okrągłe, całe liczby.

Błąd oznaczamy przez Δ , jego „prawdopodobieństwo“, właściwie jego prawdopodobną spodziewaną „częstość“ przez P . Jeżeli wśród n błędów spodziewamy się ν błędów zawartych między granicami Δ_1 i Δ_2 , to

$$(2) \quad \frac{\nu}{n} = P.$$

Dla ogólności założymy, że możebne są wszelkie błędy dodatnie i ujemne, nawet nieskończenie wielkie i że błąd może przybierać wszelkie możebne wartości. W tych warunkach n musi być nieskończenie wielkie; ale jeżeli $\Delta_2 - \Delta_1$ jest skończone, to ponieważ w skończonym odstępnie Δ może przybrać nieskończoną ilość wartości tworzących ciągły szereg, więc i ν jest także nieskończenie wielkie a stosunek $\frac{\nu}{n}$ (t. j. P) jest skończony. Jasną jest rzeczą, że P jest tem większe, im różnica $\Delta_2 - \Delta_1$ jest większa. Możemy tedy założyć, że

$$P = f(\Delta_2 - \Delta_1),$$

przyczem funkcyja f wzrasta wraz z różnicą $\Delta_2 - \Delta_1$. Zakładamy, że funkcyja f jest rozwijalna w zbieżny szereg potęgowy. Szereg ten nie może zawierać ani potęg ujemnych, ani wyrazu stałego, bo oczywiście musi przywodzić się do zera, gdy założymy, że $\Delta_2 - \Delta_1 = 0$. Możemy tedy napisać

$$P = A(\Delta_2 - \Delta_1) + B(\Delta_2 - \Delta_1)^2 \dots$$

Ograniczymy się do przypadku, gdy granice Δ_2 i Δ_1 są nieskończenie bliskie sobie, t. j. gdy

$$\Delta_2 - \Delta_1 = d\Delta.$$

Możemy wtedy pominąć dalsze wyrazy szeregu i napisać

$$P = Ad\Delta.$$

Ponieważ A jest skończone, więc $P = Ad\Delta$ jest nieskończenie małe. Jest to naturalna konsekwencyja naszego założenia, że granice, w których spodziewany błąd ma być zawarty, są nieskończenie ciasne.

Współczynnik A musi być funkcyją samego błędu, bo gdyby od Δ nie zależał, to wszystkie błędy wielkie czy małe byłyby

jednakowo prawdopodobne. To zaś byłoby sprzeczne z rzeczywistością, bo małe błędy trafiają się częściej niż duże. Piszemy więc

$$P = F(\Delta) d\Delta.$$

Stąd wynika, że prawdopodobieństwo, iż błąd jest zawarty między Δ_1 a Δ_2 , wyraża się przez całkę.

$$\int_{\Delta_1}^{\Delta_2} F(\Delta) d\Delta.$$

Wedle założenia błędy odjemne są równie częste jak dodatnie. Wynika stąd, że $F(\Delta)$ może zawierać tylko parzyste potęgi. Następnie ponieważ im większy błąd, tem rzadziej się trafia, więc $F(\Delta)$ powinno zmniejszać się, gdy Δ rośnie. Wśród nieskończonego mnóstwa funkcyi, czyniących zadość tym dwóm postulatam, wybieramy funkcyę

$$F(\Delta) = Ce^{-h^2 \Delta^2},$$

jako malejącą szybciej od innych a w przypadku jednej zmiennej prowadzącą do reguły średniej arytmetycznej.

Obrana przez nas funkcyę tak szybko zmniejsza się z wzrastającym Δ , że poza pewnemi granicami prawdopodobieństwo błędu staje się w praktyce zupełnie znikome. Wskutek tego sprzeczne z rzeczywistością założenie, że mogą zdarzać się dowolnie wielkie błędy, staje się nieszkodliwem. Stałą C określimy na podstawie następującego rozumowania. Jasną jest rzeczą, że błąd musi być zawarty między $-\infty$ a $+\infty$. Jeżeli więc weźmiemy te skrajne granice, to prawdopodobieństwo obróci się w pewność; tę zaś wyrażamy przez jedność. Rzeczywiście, jeżeli zesumujemy prawdopodobieństwa wszystkich błędów, to wedle wzoru (2) otrzymamy

$$\text{Pewność} = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \dots \text{in inf.} = \frac{v_1 + v_2 + \dots \text{in inf.}}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Piszemy tedy

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta = 1$$

i kładziemy $h\Delta = t$, poczem całka nasza przechodzi w

$$\frac{C}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Całka stojąca po lewej stronie tego równania jest znana: wartość jej jest $\sqrt{\pi}$, przeto

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

zaś

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta. \quad (3)$$

Co do h , to znaczenie jego poznamy przez następujące rozumowanie. Im h większe, tem P odpowiadające tej samej wartości Δ jest mniejsze, t. j. ten sam błąd jest mniej prawdopodobny. Zatem h może być uważane za miarę ścisłości pomiarów.

Okażemy teraz, że z powyższego prawa wynika reguła średniej arytmetycznej w razie, gdy chodzi o jedną, bezpośrednio mierzoną niewiadomą. Załóżmy, że mamy n pomiarów tej samej wielkości L , mianowicie $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$. Różnice:

$$l_1 - L = \Delta_1, \quad l_2 - L = \Delta_2, \dots \quad l_n - L = \Delta_n, \quad (4)$$

są to wedle definicyi błędy pomiarów. Napiszmy prawdopodobieństwa błędów $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ i t. d., zakładając, że ścisłość jest wszędzie jednakowa. Otrzymamy

$$P_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_1^2} d\Delta, \quad P_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_2^2} d\Delta, \dots \quad P_n = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_n^2} d\Delta.$$

Wedle zasad rachunku prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo, że zdarzy się jednocześnie pewna ilość zjawisk, jest iloczynem prawdopodobieństw oddzielnych zjawisk. Zatem prawdopodobieństwo seryi błędów $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$ jest

$$P_1 P_2 \dots P_n = \frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-h^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots)} (d\Delta)^n. \quad (5)$$

Ale to prawdopodobieństwo jest identyczne z prawdopodobieństwem, że z naszych pomiarów znajdziemy wielkość L , bo przy danych $l_1, l_2, \dots l_n$, błędy $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$ zależą tylko od L . Wyznaczmy L tak, aby to prawdopodobieństwo było jak największem. To wymaga, aby wykładnik był jak najmniejszy. Ponieważ współczynnika h , jako zależnego od ścisłości pomiarów, zmienić nie możemy, więc suma kwadratów błędów, stojąca we wykładniku, musi

być najmniejszą. Tu spostrzegamy, dlaczego metoda nosi nazwę metody najmniejszych kwadratów.

Poddawszy sumę kwadratów błędów warunkowi „minimum“, otrzymamy:

$$\Delta_1 d\Delta_1 + \Delta_2 d\Delta_2 + \dots + \Delta_n d\Delta_n = 0.$$

Lecz na mocy równań (4)

$$d\Delta_1 = d\Delta_2 = \dots = d\Delta_n = -dL,$$

bo $l_1, l_2 \dots l_n$ jako daty obserwacyjne nie mogą być zmienione. Zatem warunek minimum przychodzi się do

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n = 0$$

t. j. do

$$(l_1 - L) + (l_2 - L) + \dots + (l_n - L) = 0$$

i jako najprawdopodobniejszą wartość na L otrzymujemy „średnią arytmetyczną“

$$(6) \quad L_m = \frac{1}{n} \sum_1^n l_n.$$

Rzeczywista wartość L jest podana we wzorze (1).

4. Błąd prawdopodobny. Błąd średni. Porównanie teorii z doświadczeniem.

„Błędem prawdopodobnym“ nazywamy błąd taki, że błąd mniejszy od niego jest równie prawdopodobny jak większy od niego. Oznaczmy błąd prawdopodobny przez r . Wedle określenia prawdopodobieństwo, że błąd jest zawarty pomiędzy 0 a r , jest takie same, jak prawdopodobieństwo, że jest zawarty między r a $+\infty$. Stąd wynika równanie

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_r^\infty e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta,$$

albo skracając przez $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ i kładąc: $h\Delta = t$

$$\int_0^{hr} e^{-t^2} dt = \int_{hr}^\infty e^{-t^2} dt.$$

Dodajmy po obu stronach całkę:

$$\int_0^{hr} e^{-t^2} dt,$$

a otrzymamy

$$2 \int_0^{hr} e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Wynika stąd, iż prawdopodobieństwo błędu zawartego między $-r$ a $+r$ jest

$$P_r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Z powyższego przestępnego równania można znaleźć argument hr . Wedle tablic Krampa, gdy powyższa całka ma wartość 0,5, to

$$(7) \quad hr = 0,4769363 \dots$$

Za przykładem Gaussa błędem średnim nazywamy liczbę m określoną przez równość

$$(8) \quad m^2 = \frac{1}{n} \sum \Delta^2.$$

W praktyce błędy, osobiście małe, mogą powtarzać się, bo wyrażamy je przez skończoną ilość dziesiętnych; skoro zatem dwa błędy różnią się od siebie o wielkość mniejszą od połowy jedności ostatniego miejsca dziesiętnego, to wyrażają się przez tę samą liczbę. Załóżmy, że błąd Δ_1 powtarza się ν_1 razy, błąd Δ_2 — ν_2 razy i t. d. Wtedy zamiast wzoru (8) należy napisać

$$(8 \text{ bis}) \quad m^2 = \frac{1}{n} \sum \nu \Delta^2,$$

gdzie

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots$$

Gdy uważamy wszystkie dające się pomyśleć błędy zawarte między $-\infty$ a $+\infty$, to oczywiście wzory (8) i (8 bis) są nieprzydatne. Ale od wzoru (8 bis) można łatwo przejść do wzoru cał-

kowego: trzeba tylko zastąpić w nim $\frac{v}{n}$ przez „częstość“ błędu, t. j. trzeba na podstawie wzoru (2) położyć

$$\frac{v}{n} = P.$$

Podstawiając P ze wzoru (3) i biorąc granice $-\infty$ i $+\infty$ otrzymamy

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta. \quad (8 \text{ ter})$$

Jeżeli do wzoru (8 ter) zastosujemy prawidła całkowania „przez części“, to otrzymamy

$$m^2 = -\frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \left[\Delta e^{-h^2 \Delta^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta.$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie znika, a drugi po podstawieniu $h\Delta = t$ przechodzi w

$$\frac{1}{2h^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2h^2}.$$

Stąd otrzymujemy związek

$$2m^2 h^2 = 1$$

czyli

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}, \quad (9)$$

z którego widać, że ścisłość h jest odwrotnie proporcjonalna do średniego błędu. Jednocześnie z równań (7) i (9) widzimy, że wystarczy znać którąkolwiek jedną z liczb h , r , m , gdyż dwie pozostałe wyrażają się przez nią jednoznacznie.

Prawdopodobieństwo błędu średniego jest mniejsze niż prawdopodobieństwo błędu prawdopodobnego, bo błąd średni jest większy od prawdopodobnego, mianowicie

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{r}{hr\sqrt{2}} = \frac{r}{0,476\dots\sqrt{2}} = 1,4826022\dots r.$$

Prawdopodobieństwo, że błąd będzie równy, albo większy od m , wyrazi się przez całkę:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{mh}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 0,318 \dots$$

Z powyższego wynika pewien ważny wniosek. Załóżmy, że mamy jednolitą seryę jednakowo ścisłych pomiarów w liczbie n . Ile pomiarów, tyle błędów (choć mogą wśród nich znajdować się także błędy nieskończenie małe). Ze symetrii wynika, że powinno być $\frac{1}{2}n$ błędów dodatnich i tyleż odjemnych. Następnie wśród błędów dodatnich powinno być $\frac{1}{4}n$ błędów większych niż r oraz $\frac{1}{4}n$ błędów mniejszych od r . Tak samo wśród błędów odjemnych powinno być $\frac{1}{4}n$ błędów mniejszych od $-r$ i $\frac{1}{4}n$ błędów większych od $-r$. Dalej wśród błędów dodatnich powinno być $\frac{1}{2}0,318n$ błędów większych od m a $\frac{1}{2}0,682n$ błędów mniejszych od m i t. d. Co więcej, możemy obliczyć prawdopodobieństwa błędów równych $2r, 3r \dots$ i t. d., $2m, 3m \dots$ i t. d. i utworzyć cały szereg warunków podobnych do powyższych. Zatem jeżeli znamy rzeczywiste błędy, to określiwszy wartości błędów m i r , możemy sprawdzić, czy rzeczywiste błędy czynią zadość powyższym warunkom. Inaczej mówiąc, możemy sprawdzić teorię przez doświadczenie. Naturalnie absolutnej zgodności oczekiwać nie możemy, bo 1-mo w teorii liczba błędów jest nieskończona a w praktyce jest zawsze skończona; 2-do w teorii liczby błędów zawartych w pewnych granicach pospolicie wypadają ułamkowe¹⁾ a w rzeczywistości mogą to być tylko liczby całe, ale możemy spodziewać się zgodności przybliżonej, osobliwie jeżeli n jest dużą liczbą.

Niejednokrotnie przedsiębrano takie porównania teorii z doświadczeniem. Wógóle wypadają one dość pomyślnie dla teorii, chociaż zdarzają się serye zgadzające się z teoretycznym prawem częstości w sposób niezadawalniający. Zresztą o ile chodzi o zadania trafiające się w astronomii, to nic lepszego od powyżej podanego prawa częstości (prawa Gaussa) nie wynaleziono. Inna rzecz w zastosowaniach statystyki do biologii. Zdarzają się tam

¹⁾ Zresztą można tak dobrać granice, aby liczby błędów pomiędzy niemi zawartych były całe. Inny sposób ominięcia tej trudności podaje Lehmann Filhès: Ueber wahrscheinliche Fehlervertheilungen.

zadania, w których badamy rozkład pewnych zjawisk metodami analogicznymi do analizy błędów. Otóż tam rozkład zjawisk pomiędzy poszczególne kategorie bywa częstokroć z natury rzeczy niesymetryczny, wskutek czego o zastosowaniu prawa Gaussa mowy być nie może. Nawet dla symetrycznych rozkładów jest ono częstokroć nieodpowiednie. To też używają tam innych praw „częstości“. Ale to są rzeczy, które do nas nie należą.

5. Obliczenia błędu średniego z „ostatków“.

Powyżej podane obliczenia m , h i r pospolicie praktycznego zastosowania nie mają, bo w ogromnej większości przypadków samych błędów rozpoznać nie możemy. Np. w przypadku jednej zmiennej bezpośrednio mierzonej nie możemy obliczyć błędów: $\Delta_1 = l_1 - L$, $\Delta_2 = l_2 - L$ i t. d., bo L pozostaje nieznanne; możemy obliczyć tylko „ostatki“: $v_1 = l_1 - L_m$, $v_2 = l_2 - L_m$ i t. d., bynajmniej nie identyczne z błędami, bo L_m jest tylko najprawdopodobniejszą wartością na L , jaką umiemy obliczyć z pomiarów l_1 , l_2 , $l_3 \dots$ i t. d., ale nie jest mu ściśle równe. Przeciwnie ze wzoru (1) wiemy, że L_m różni się od L , mianowicie

$$L = L_m - \frac{1}{n} \sum_1^n \Delta_i,$$

a co gorsze, — różnicy: $\frac{1}{n} \sum \Delta$ ani obliczyć, ani nawet dokładnie ocenić nie możemy.

Wskutek tego, że oprócz rzadkich przypadków¹⁾ błędy właściwie pozostają nieznanne, uwagi nasze na końcu poprzedniego paragrafu, odnoszące się do sprawdzenia teorii przez doświadczenie, należy przyjąć z tem zastrzeżeniem, że o ile nie uda się nam dobrać taką seryę pomiarów, w której można określić same błędy, to sprawdzamy teorię nie na podstawie samych błędów: $\Delta_i = l_i - L$ a na podstawie „ostatków“ $v_i = l_i - L_m$, które mogą różnić się od błędów o małą nieznaną wielkość.

¹⁾ Jeżeli zmierzmy trzy kąty płaskiego trójkąta i utworzywszy sumę znajdziemy $180^\circ + E$, to oczywiście E jest prawdziwym błędem sumy. Swoją drogą nie będziemy mogli dociec, w jaki sposób na to E złożyły się błędy w pomiarach oddzielnych trzech kątów.

Wskutek tej nieświadomości rzeczywistych błędów nie możemy też do obliczenia średniego błędu m użyć wzoru (8). Dlatego zastępując wartość poszukiwaną wartością prawdopodobną używamy wzoru, w którym figurują tylko ostatki v_i . Za punkt wyjścia służy wzór (8), t. j. wzór

$$(10) \quad m^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n \Delta_i^2.$$

Jeżeli oznaczymy błąd średniej arytmetycznej przez ε , t. j. jeżeli położymy

$$(11) \quad L_m - L = \frac{1}{n} \sum_1^n \Delta_i = \varepsilon,$$

to będziemy mogli napisać:

$$\Delta_i = l_i - L = l_i - L_m + \varepsilon = v_i + \varepsilon,$$

a wzór na m^2 przybierze postać:

$$m^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_1^n v_i^2 + 2\varepsilon \sum_1^n v_i + n\varepsilon^2 \right].$$

Lecz na mocy definicji średniej arytmetycznej

$$\sum_1^n v_i = \sum_1^n l_i - nL_m = 0,$$

zatem drugi wyraz w nawiasie po prawej stronie znika i pozostaje

$$m^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n v_i^2 + \varepsilon^2.$$

Tu znowu na mocy wzoru (11) mamy

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_1^n \Delta_i^2 + 2 \sum \Delta_i \Delta_k \right].$$

Ponieważ błędy Δ_i i Δ_k są tak dodatnie jak odjemne, więc iloczynny tych błędów będą po części dodatnie, po części odjemne i z konieczności muszą się przeważnie kompensować. W każdym razie podwójna suma iloczynów będzie w porównaniu ze sumą kwa-

kwadratów mała osobiłwie, jeżeli n jest dużą liczbą. Przyjmujemy, że można ją (sumę iloczynów) wobec sumy kwadratów zupełnie pominać. Ale suma kwadratów błędów podzielona przez n , to znowu kwadrat błędu średniego, a więc możemy przyjąć, że

$$\varepsilon^2 = \frac{m^2}{n}, \quad \varepsilon = \pm \sqrt{\frac{m}{n}}. \quad (12)$$

Stąd zaś wynika

$$m^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_1^n v_i^2,$$

a stąd

$$m^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n v_i^2, \quad m = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}}. \quad (13)$$

Zatem wzór na „błąd średni“ wyrażony przez „ostatki“ jest zupełnie analogiczny do wzoru (10), w którym błąd średni jest wyrażony przez błędy, tylko zamiast n mamy w mianowniku $n-1$. Ponieważ z a w s z e można obliczyć ostatki, więc wzór (13) z a w s z e pozwala określić błąd średni wprawdzie niezupełnie ściśle, a z pewnem tylko przybliżeniem wogóle tem większem im n większe. Mając zaś m znajdziemy r i h na podstawie wzorów (7) i (9). Mianowicie znajdziemy z tych wzorów

$$r = 0,476... \sqrt{2} \cdot m = 0,6744897... m, \quad h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{0,7071068...}{m}. \quad (14)$$

Wróćmy na chwilę do wzoru (12). Wedle tego, co było wyżej powiedziane, ε jest to błąd średniej arytmetycznej ($\varepsilon = L_m - L$). Wzór (12) otrzymany na podstawie prawdopodobnych ale niezupełnie ścisłych założeń, pokazuje, że kwadrat błędu średniej arytmetycznej jest n razy mniejszy od kwadratu błędu średniego. Zresztą należy pamiętać, że tak wzór (12) jak wzór (13) mają na celu tylko dać pojęcie o dokładności wyników.

6. Waga obserwacji.

Dotychczas zakładaliśmy, że wszystkie obserwacje są jednakowo ściśle. Teraz stopniowo przejdziemy do przypadku, gdy ścisłość jest niejednakowa. Wyobraźmy sobie np., że wśród danych pomiarów wykonanych przez tego samego obserwatora, tą samą metodą

i w tych samych warunkach jeden jest średnią z kilku np. p pomiarów takich samych jak pozostałe. Oczywiście ta średnia zastępuje p pomiarów i powinna być wszędzie jako p pomiarów policzona. Wogóle jeżeli pomiar l_1 jest średnią z p_1 pomiarów, l_2 średnią z p_2 pomiarów i t. d., to wyrażenie średniej arytmetycznej będzie

$$(15) \quad L_m = \frac{\sum p l}{\sum p}.$$

Liczby p_1, p_2 i t. d. nazywamy „wagami“ obserwacji, bo wskazują one, ilu pojedynczym obserwacjom jest równoważna dana obserwacja. Jednocześnie widzimy ze wzoru (12), że błąd obserwacji o wadze p jest

$$(16) \quad \varepsilon = \frac{m}{\sqrt{p}},$$

a więc w stosunku \sqrt{p} mniejszy niż błąd pojedynczej obserwacji, której waga będzie 1. Ponieważ zaś ścisłość h jest odwrotnie proporcjonalna do błędowi, więc ścisłość obserwacji o wadze p jest w stosunku \sqrt{p} większa niż ścisłość obserwacji o wadze 1. Weźmy teraz przypadek, w którym ścisłość każdej obserwacji jest inna. Wtedy zamiast wzoru (5) powinniśmy napisać

$$P_1 P_2 \dots P_n = \frac{h_1 h_2 h_3 \dots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} (d\Delta)^n \cdot e^{-h_1^2 \Delta_1^2 - h_2^2 \Delta_2^2 - \dots - h_n^2 \Delta_n^2}.$$

Następnie skoro wprowadzimy warunek, aby wykładnik był minimum, to otrzymamy

$$h_1^2 \Delta_1 d\Delta_1 + h_2^2 \Delta_2 d\Delta_2 + \dots = 0.$$

Stąd podobnym jak w § 3 sposobem znajdziemy

$$(17) \quad L_m = \frac{\sum_1^n h_i^2 l_i}{\sum_1^n h_i^2}.$$

Porównując wzór (17) ze wzorem (15) widzimy, że we wzorze (15) wagi p_i odgrywają tę samą rolę co we wzorze (17) kwadraty „ścisłości“ h_i^2 . Stwierdziliśmy w ten sposób to, co przed chwilą było powiedziane o proporcjonalności między h_i i $\sqrt{p_i}$. Jednakże

spostrzegamy, że wzór (17) jest ogólniejszy niż (15), bo tam p_i były liczbami całkowitemi, a tu h_i mogą oczywiście być jakimikolwiek liczbami. Łatwo uzasadnić to uogólnienie, jeżeli weźmiemy w uwagę obserwacje różnej jakości. Rzeczywiście niema żadnej racji, dla której stosunki między ich wagami nie miałyby wyrażać się przez liczby ułamkowe albo niewymierne. Przyjmujemy tedy, że wzór (15), t. j. wzór

$$L_m = \frac{\sum_1^n p_i l_i}{\sum_1^n p_i} \quad (15 \text{ bis})$$

jest zupełnie ogólny, t. j. że wolno go stosować przy jakichkolwiek wagach.

Występuje pytanie, jak obliczyć wagi?

Załóżmy np., że mamy obliczyć średnią z kilku seryi obserwacji, przyczem można uważać obserwacje każdej oddzielnej seryi za jednakowo ścisłe, ale od seryi do seryi ścisłość jest inna. Obliczamy błąd średni każdej seryi oddzielnie. Jeżeli błędy średnie pierwszej, drugiej i t. d. seryi są: m_I, m_{II} i t. d., to każda obserwacja pierwszej seryi ma ścisłość: $h_I = \frac{1}{m_I \sqrt{2}}$, każda obserwacja

drugiej seryi ma ścisłość $h_{II} = \frac{1}{m_{II} \sqrt{2}}$ i t. d. Podobnież waga każdej obserwacji pierwszej seryi jest: $p_I = \frac{K}{m_I^2}$, waga każdej obserwacji drugiej seryi jest: $p_{II} = \frac{K}{m_{II}^2}$ i t. d., gdzie K jest to wspólny,

dowolny zresztą, czynnik proporcjonalności. Podstawmy te wagi we wzór (15). Jeżeli pierwsza serya składa się z n_I obserwacji, druga z n_{II} obserwacji i t. d., jeżeli średnia arytmetyczna z pierwszej seryi jest L_I , z drugiej L_{II} i t. d., to otrzymamy

$$L_m = \frac{\frac{n_I L_I}{m_I^2} + \frac{n_{II} L_{II}}{m_{II}^2} + \dots}{\frac{n_I}{m_I^2} + \frac{n_{II}}{m_{II}^2} + \dots}$$

Ale wedle wzoru (12) $\frac{n}{m^2}$ to nie innego, jak kwadrat odwrotności błędu średniej arytmetycznej, a więc jeżeli oznaczymy błąd średniej arytmetycznej L_I przez ε_I , błąd średniej arytmetycznej L_{II} przez ε_{II} i t. d.; to będziemy mogli napisać

$$(18) \quad L_m = \frac{\frac{L_I}{\varepsilon_I^2} + \frac{L_{II}}{\varepsilon_{II}^2} + \dots}{\frac{1}{\varepsilon_I^2} + \frac{1}{\varepsilon_{II}^2} + \dots}$$

Omówiony przypadek nie jest atoli powszechnym. Częstość zdarza się, że nie można obliczyć błędów średnich, np. jeżeli każda obserwacya ma inną ścisłość. Wtedy oceniamy „wagę“ na podstawie innych kryteriów, albo nawet z musu oznaczamy wagi dowolnie. Zresztą należy zauważyć, że nigdy nie możemy zupełnie uniknąć dowolności. Np. w przypadku poprzednio omówionym, do którego stosuje się wzór (18), przypuszczamy, że w jednej seryi wszystkie obserwacye są jednakowo ścisłe, w drugiej także jednakowo ścisłe i t. d.; ale skąd my to napewno wiedzieć możemy. Może który z warunków, mających wpływ na ścisłość, uległ zmianie podczas, gdy robiono obserwacye pewnej seryi, a my o tem nie wiemy.

7. Średni błąd pomiarów i błąd średniej arytmetycznej w przypadku, gdy waga obserwacyi jest niejednakowa.

Do obliczenia średniego błędu m i do obliczenia średniego błędu średniej arytmetycznej ε w przypadku, gdy wagi obserwacyi są różne, używamy wzorów:

$$(19) \quad m^2 = \frac{\sum p v^2}{n - 1}$$

$$(20) \quad \varepsilon^2 = \frac{m^2}{\sum p}$$

Tu należy rozumieć m jako średni błąd obserwacyi, którą przyjmujemy za typową i z którą porównujemy inne obserwacye. Waga jej jest = 1. Liczba n oznacza liczbę rzeczywistych obserwacyi. Podaję tu wywód tych wzorów wedle Gaussa¹⁾, uważam

¹⁾ Z pewnemi modyfikacyami.

go bo bowiem za lepszy i zrozumialszy od innych. Załóżmy, że przy obserwacjach, dokonanych z rozmaita ścisłością, popełniono błędy $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ i t. d. Niechaj h_1 będzie ścisłość pierwszego, h_2 drugiego pomiaru... i t. d. Wtedy błąd średni pierwszego pomiaru jest $m_1 = \frac{1}{h_1\sqrt{2}}$, drugiego pomiaru $m_2 = \frac{1}{h_2\sqrt{2}}, \dots$ i t. d. Uogólniając definicyę (8), zakładamy, że suma kwadratów błędów równa się sumie kwadratów błędów średnich, t. j.

$$\sum_1^n \Delta_i^2 = \sum_1^n m_i^2. \quad (21)$$

Weźmy teraz obserwacyę „typową“, z którą będziemy porównywać pozostałe. Możemy za typową wziąć jakąkolwiek z danych obserwacyi, ale dla zachowania jednorodności wzorów będziemy tak rozumować, jak gdyby „typowa“ obserwacya nie należała do szeregu danych. Mogłaby to np. być odpowiednio dobrana fikcyjna obserwacya. Zakładamy, że waga typowej obserwacyi jest 1 a jej błąd średni oznaczamy przez m . Wedle § 6:

$$m_1^2 = \frac{m^2}{p_1}, \quad m_2^2 = \frac{m^2}{p_2}, \quad m_3^2 = \dots \text{ i t. d.}, \quad (22)$$

gdzie p_1, p_2, \dots i t. d. oznaczają „wagi“ obserwacyi. Tedy możemy napisać wzór (21) w kształcie

$$\sum_1^n \Delta_i^2 = m^2 \sum_1^n \frac{1}{p_i},$$

skąd

$$m^2 = \frac{\sum_1^n \Delta_i^2}{\sum_1^n \frac{1}{p_i}}. \quad (23)$$

Gauss przyjmuje, że równie dobrze jak wzór (23) możnaby napisać wzór

$$m^2 = \frac{\sum_1^n \alpha_i \Delta_i^2}{\sum_1^n \frac{\alpha_i}{p_i}}, \quad (24)$$

gdzie α_i są to jakiegokolwiek współczynniki; albowiem prawe strony wzorów (23) i (24) mają jednakowe „średnie wartości“. Co to jest „średnia wartość (*valor medius*)“ Gaussa, tego ze względu na brak miejsca i czasu tłómaczyć nie będziemy; nie będziemy też dowodzić, że „średnie wartości“ prawych stron wzorów (23) i (24) są jednakowe; powiemy tylko, że równość między średnimi wartościami nie pociąga bynajmniej za sobą rzeczywistej równości. Łatwo przekonać się na dowolnym przykładzie, że prawe strony wzorów (23) i (24) nie są identyczne, ale też równie łatwo przekonać się, że są one tembardziej do siebie zbliżone, im 1-mo wagi $p_1, p_2 \dots$ i t. d. są mniej między sobą różne; 2-do im liczba obserwacji n jest większa. Przyjmujemy tedy wraz z Gaussem wzór (24) i zakładamy, że:

$$\alpha_1 = p_1, \quad \alpha_2 = p_2, \dots \quad \alpha_i = p_i \dots$$

Wtedy wzór (24) przechodzi w

$$(25) \quad m^2 = \frac{\sum_1^n p_i \Delta_i^2}{n}$$

Lecz wzór (25), jako zawierający błędy rzeczywiste Δ jest do obliczeń nieprzydatny, bo jak wiadomo, błędy najczęściej pozostają nieznanne. Wprowadzamy tedy „ostatki“

$$l_i - L_m = v_i,$$

które zawsze można obliczyć. Z § 5 wiemy już, że

$$\Delta_i = v_i + \varepsilon,$$

gdzie $\varepsilon = L_m - L$ jest to błąd średniej arytmetycznej. Podstawiawszy ostatki otrzymamy

$$nm^2 = \sum_1^n p_i v_i^2 + 2\varepsilon \sum_1^n p_i v_i + \varepsilon^2 \sum_1^n p_i.$$

We wzorze tym drugi wyraz jest równy zeru, bo ze względu na wzór (15 bis).

$$\sum_1^n p_i v_i = \sum_1^n p_i (l_i - L_m) = \sum_1^n p_i l_i - L_m \sum_1^n p_i = 0.$$

Tu spostrzegamy, że cel zamiany wzoru (23) na wzór (24) polegał na tem, aby prawą stronę równania na m sprowadzić do sumy kwadratów. Otrzymujemy tedy

$$nm^2 = \Sigma pv^2 + \varepsilon^2 \Sigma p. \quad (26)$$

Wedle definicyi $\varepsilon = L_m - L$, a więc uwzględniając wzór (15 bis) i pisząc znowu $l_i - L = \Delta_i$ mamy

$$\varepsilon = \frac{\Sigma pl}{\Sigma p} - L = \frac{\Sigma p(l - L)}{\Sigma p} = \frac{\Sigma p \Delta}{\Sigma p}.$$

Stąd

$$\varepsilon^2 \Sigma p = \frac{(\Sigma p \Delta)^2}{\Sigma p} = \frac{\Sigma p^2 \Delta^2 + 2 \Sigma p_i p_k \Delta_i \Delta_k}{\Sigma p}.$$

I tu także suma podwójnych iloczynów powinna być mała w porównaniu ze sumą kwadratów, bo iloczyny dodatnie kompensują się z odjemnymi. Pomijamy więc sumę iloczynów i piszemy

$$\varepsilon^2 \Sigma p = \frac{\Sigma p^2 \Delta^2}{\Sigma p}. \quad (27)$$

Skorzystajmy po raz drugi z twierdzenia, że wzór (24) pozostaje w swej mocy niezależnie od wartości na współczynniki α_i . Poprzednio kładliśmy $\alpha_i = p_i$; teraz połóżmy $\alpha_i = p_i^2$, a otrzymamy ze wzoru (24)

$$m^2 = \frac{\Sigma p^2 \Delta^2}{\Sigma p}. \quad (28)$$

Podstawiając tę wartość we wzór (27) natychmiast znajdziemy wzór (20), t. j.

$$\varepsilon^2 = \frac{m^2}{\sum_1^n p_i}. \quad (20 \text{ bis})$$

Podstawiając zaś ε^2 ze wzoru (20 bis) w (26) otrzymamy wzór (19) t. j.

$$m^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n p_i v_i^2. \quad (19 \text{ bis})$$

Ze wzoru (20) wynika, że „waga“ średniej arytmetycznej jest $\sum_1^n p_i$, to jest $\sum_1^n p_i$ razy większa niż waga obserwacji typ-

wej przyjętej za jednostkę. — Dalej widzimy, że wartość na m zależy od wyboru obserwacji typowej, t. j. od wyboru wagi. Jeżeli np. chcąc otrzymać krągłe liczby, zwiększymy wagi w stosunku q , to m wzrośnie w stosunku \sqrt{q} . Natomiast ε od wyboru wag nie zależy.

Że wzory (19) i (20) spoczywają na nieco kruchej podstawie, to wątpliwości nie ulega.

8. Przykład.

Zapóżyczamy u S. Newcomba¹⁾ następujący przykład: W r. 1882 mierzył on 7 razy czas, w ciągu którego światło przebiegało drogę od fortu Myer do pomnika Washingtona w Washingtonie i z powrotem. Czas ten jest podany w miliardowych sekundy. „Wagi“ oceniono wedle ilości obrotów zwierciadła, od którego odbijało się światło²⁾, uwzględniając także inne okoliczności. Rezultaty tych pomiarów były następujące:

Data:	Czas przebiegu światła w $\frac{1}{10^9}$ sek.:	Waga:
24/VII 1882	24828	4
26 „ „	24828	3
9/VIII „	24822	2
10 „ „	24825	5
11 „ „	24828	6
29 „ „	24831	6
30 „ „	24827	4

Ponieważ pierwsze cztery cyfry są oprócz jednego przypadku jednakowe, więc można napisać: $T(\text{czas}) = 24820 + l$, i utworzyć średnią z l , to jest z liczb: 8, 8, 2, 5, 8, 11, 7. Mnożąc przez odpowiednie wagi otrzymamy

$$\Sigma pl = 32 + 24 + 4 + 25 + 48 + 66 + 28 = 227,$$

zaś

$$\Sigma p = 4 + 3 + 2 + 5 + 6 + 6 + 4 = 30.$$

Stąd

$$L_m = \frac{227}{30} = 7,6.$$

¹⁾ Spherical astronomy, str. 60.

²⁾ Metoda Fizeau.

Zatem czas przebiegu światła wynosił średnio 24827,6 miliardowych sekundy. Tworzymy teraz ostatki $v = l - L_m$, mianowicie:

$$+ 0,4, + 0,4, - 5,6, - 2,6, + 0,4, + 3,4, - 0,6,$$

następnie tworzymy $\Sigma p v^2$ zaokrąglając do całych liczb. Otrzymamy w ten sposób:

$$\Sigma p v^2 = 1 + 0 + 63 + 34 + 1 + 69 + 1 = 169.$$

Ponieważ $n = 7$, więc $n - 1 = 6$, a zatem $m^2 = \frac{169}{6} = 28,2$,

następnie $\varepsilon^2 = \frac{28,2}{30} = 0,94$, zaś $\varepsilon = 0,97$. Odpowiednio do tego piszemy

$$T = 24827,6 \pm 0,97.$$

Gdybyśmy chcieli zamiast średniego błędu średniej arytmetycznej wprowadzić jej błąd prawdopodobny, to pomnożylibyśmy 0,97 przez 0,6745 (por. wzory 14) i otrzymalibyśmy

$$T = 24827,6 \pm 0,55.$$

9. Przypadek kilku niewiadomych, związanych liniowo z wielkościami bezpośrednio mierzonymi.

Załóżmy, że wielkości niewiadome x, y, z , i t. d. nie mogą być bezpośrednio zmierzone, ale że są związane linijowymi równaniami z pewnemi innemi dającemi się zmierzyć wielkościami. Najogólniejszy kształt takich równań, zwanych „warunkowemi“ jest

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \dots &= l_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots &= l_2 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

W równaniach tych współczynniki a, b, c i t. d. są dane przez teorię, l_1, l_2 i t. d. są to owe bezpośrednio mierzone wielkości. Mimochodem zaznaczymy, że rozmaite l niekoniecznie mają pochodzić z pomiarów jednej i tej samej wielkości; mogą to być rezultaty pomiarów różnych wielkości, ewentualnie nawet (wiadome) funkcye bezpośrednio mierzonych wielkości. Jeżeli liczba równań (29) jest równa ilości niewiadomych, to wtedy równania (29) są między sobą zgodne; ale skoro je rozwiążemy względem x, y i t. d., to we wartości niewiadomych wejdą błędy pomiarów. Dlatego to

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n p_i a_i^2 &= (aa), & \sum_1^n p_i a_i b_i &= (ab), & \sum_1^n p_i a_i c_i &= (ac), \dots \\ \sum_1^n p_i a_i l_i &= (al), & \sum_1^n p_i b_i l_i &= (bl), \dots \end{aligned} \right\} (31)$$

przyczem oczywiście

$$(ab) = (ba), \quad (ac) = (ca), \dots \text{ i t. d.} \quad (32)$$

następnie na znak, że wartości, które możemy otrzymać, nie są rzeczywistymi wartościami, tylko najbardziej prawdopodobnymi, napiszmy x_m zamiast x , y_m zamiast y i t. d., poczem otrzymamy tak zwane „normalne“ równania:

$$\left. \begin{aligned} (aa) x_m + (ab) y_m + (ac) z_m + \dots &= (al) \\ (ba) x_m + (bb) y_m + (bc) z_m + \dots &= (bl) \\ (ca) x_m + (cb) y_m + (cc) z_m + \dots &= (cl) \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} (33)$$

Ponieważ otrzymaliśmy „normalne równania“ przez przyrównanie do zera współczynników przy dx , dy i t. d., więc liczba ich jest ściśle równa liczbie niewiadomych $x, y \dots$ i należy rozwiązywać je tak, jak każdy inny system n liniowych równań o n niewiadomych. „Równania normalne“ odgrywają w przypadku większej liczby niewiadomych zupełnie tę samą rolę, co w przypadku jednej niewiadomej mierzonej bezpośrednio reguła średniej arytmetycznej.

10. Przypadek, gdy związki między niewiadomymi a wielkościami mierzonymi nie są liniowe.

Przechodzimy teraz do ogólniejszego przypadku, gdy związki pomiędzy wielkościami niewiadomymi a mierzonymi nie są liniowe. Zawsze można założyć, że te związki („równania warunkowe“) przedstawiają się w kształcie

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z \dots) &= l_1 \\ f_2(x, y, z \dots) &= l_2 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} (34)$$

bo gdyby były podane w innym kształcie, to możnaby je rozwiązać względem mierzonych wielkości l , t. j. sprowadzić do kształtu (34).

Równania (34) możnaby traktować w sposób analogiczny jak równania (29), ale doszlibyśmy wtedy do równań niesłychanie zawiłanych. Dlatego też obieramy inną, o wiele dogodniejszą drogę.

Bardzo często zdarza się, że szukane wielkości x, y i t. d. są już skądinąd przybliżenie znane. Np. x, y, \dots są to wartości pewnych znanych elementów, lecz posiadając nowe obserwacje, chcemy ponownie określić owe elementy z większą dokładnością. To znowu zdarza się, że można obliczyć $x, y \dots$ z teorii, a chcemy sprawdzić, czy teoretyczne wartości zgadzają się z tem, co wynika z obserwacji. W razie zaś, gdy szukane wielkości nie są już skądinąd znane, to można wybrać z pomiędzy równań (34) tyleż równań, ile jest niewiadomych [właśnie dlatego stosujemy metodę najmniejszych kwadratów, że liczba „równań warunkowych“ jest większa niż liczba niewiadomych] i rozwiązać je względem niewiadomych; otrzymane w ten sposób wartości można przyjąć jako pierwsze przybliżenie. Jednem słowem zawsze można mieć przybliżone wartości na x, y, z, \dots i t. d.

Skoro atoli posiadamy przybliżone wartości na x, y i t. d. — powiedzmy $x_0, y_0, z_0 \dots$, to możemy obliczyć przybliżone wartości funkcyi f_1, f_2 i t. d. oraz pochodnych

$$\frac{df_1}{dx}, \frac{df_1}{dy}, \dots, \frac{df_2}{dx}, \frac{df_2}{dy}, \dots \text{ i t. d.}$$

odpowiadające owym przybliżonym wartościom niewiadomych, bo kształt funkcyi f_1 i t. d. jest znany.

Z drugiej strony możemy przedstawić prawdziwe wartości $f_1(x, y, z)$ i t. d. w kształcie:

$$f_1(x, y, \dots) = f_1(x_0, y_0, \dots) + \left(\frac{df_1}{dx}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{df_1}{dy}\right)_0 \Delta y + \dots$$

$$f_2(x, y, \dots) = f_2(x_0, y_0, \dots) + \left(\frac{df_2}{dx}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{df_2}{dy}\right)_0 \Delta y + \dots$$

.....

Gdzie $\Delta x, \Delta y \dots$ są to przyrosty, albo, jak je w teorii błędów nazywają, „poprawki“ przybliżonych wartości niewiadomych. Ponieważ popospolicie $x_0, y_0, z_0 \dots$ są dosyć bliskie do prawdziwych $x, y, z \dots$, więc można ograniczyć się do tych wyrazów szeregu Taylora, które zawierają „poprawki“ Δx i t. d. liniowo, a dalsze

wyraży można pominąć. Wprowadźmy dla krótkości niektóre symbole. Położmy:

$$f_1(x_0, y_0, \dots) = M_1, \quad f_2(x_0, y_0, \dots) = M_2 \text{ i t. d.}$$

$$\left(\frac{df_1}{dx}\right)_0 = a_1, \quad \left(\frac{df_1}{dy}\right)_0 = b_1, \dots \quad \left(\frac{df_2}{dx}\right)_0 = a_2, \quad \left(\frac{df_2}{dy}\right)_0 = b_2 \dots$$

Dalej, aby uniknąć pomieszania z błędami, oznaczymy poprawki przez greckie litery, mianowicie położmy

$$\Delta x = \xi, \quad \Delta y = \eta, \quad \Delta z = \zeta \text{ i t. d.}$$

poczem będziemy mogli napisać:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \dots) &= M_1 + a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \dots \\ f_2(x, y, \dots) &= M_2 + a_2 \xi + b_2 \eta + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Teraz należy podstawić te wyrażenia na f i t. d. w równania warunkowe (34). Przedtem jednak zauważymy, że równania (34) podobnie jak równania (29) nie są ściśle, bo l_1 i t. d. zawierają błędy. Ścisłemi staną się równania (34) dopiero wtedy, gdy odejmiemy od prawych stron błędy. Skoro to uczynimy a także skoro wykonamy zapowiedziane przed chwilą podstawienia, to kładąc jeszcze

$$l_1 - M_1 = \lambda_1, \quad l_2 - M_2 = \lambda_2, \dots \text{ i t. d.}$$

otrzymamy na miejsce równań (34)

$$\left. \begin{aligned} a_1 \xi + b_1 \eta + \dots &= \lambda_1 - \Delta_1 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + \dots &= \lambda_2 - \Delta_2 \\ \dots &\dots \\ a_n \xi + b_n \eta + \dots &= \lambda_n - \Delta_n \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Równania (35) w liczbie n są to „równania błędów“. Spozstrzegamy, że są one zupełnie podobne do równań (30). Możemy tedy traktować je zupełnie tak samo jak tamte, poczem otrzymamy tyle „równań normalnych“, ile jest niewiadomych, mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} (aa) \xi_m + (ab) \eta_m + (ac) \zeta_m + \dots &= (a\lambda) \\ (ba) \xi_m + (bb) \eta_m + (bc) \zeta_m + \dots &= (b\lambda) \\ (ca) \xi_m + (cb) \eta_m + (cc) \zeta_m + \dots &= (c\lambda) \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

gdzie tak samo jak poprzednio:

$$(31 \text{ bis}) \quad (aa) = p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + \dots, \quad (ab) = p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots \text{ i t. d.} \\ (ab) = (ba), \quad (ac) = (ca), \text{ i t. d.}$$

Podobnie jak w równaniach (33) zamiast ξ, η, ζ i t. d. napisaliśmy $\xi_m, \eta_m, \zeta_m \dots$ na znak, że są to nie rzeczywiste, tylko w danych warunkach najprawdopodobniejsze wartości poprawek. Rozwiązawszy równania normalne (36) względem ξ_m, η_m i t. d. dodamy poprawki do przybliżonych wartości niewiadomych i otrzymamy najprawdopodobniejsze wartości niewiadomych $x, y \dots$ i t. d.

$$x_m = x_0 + \xi_m, \quad y_m = y_0 + \eta_m, \quad z_m = z_0 + \zeta_m \text{ i t. d.}$$

Sprowadziliśmy¹⁾ zatem przypadek ogólny, gdy związki między niewiadomymi a danymi obserwacyjnymi są jakiegokolwiek, do przypadku związków liniowych. Różnica polega tylko na tem, że tam w równaniach figurowały same niewiadome i same dane obserwacyjne, tu zaś figurują poprawki i różnice między danymi obserwacyjnymi a ich teoretycznymi przybliżonymi wartościami. Zresztą nawet wtedy, gdy związki między niewiadomymi a danymi obserwacyjnymi są liniowe, dogodniej jest posługiwać się wzorami obecnego paragrafu, bo „poprawki“ $\xi, \eta \dots$ i różnice $l - M$ mają popolicie mniejsze wartości liczbowe niż same $x_m, y_m \dots, l_1, l_2 \dots$ i t. d. Zatem także w przypadku związków liniowych dogodnie jest zacząć od określenia przybliżonych wartości $x_0, y_0 \dots$, względnie od podstawienia $x_0, y_0 \dots$, jeżeli te już są skądinąd znane.

Zauważymy wreszcie, że chociaż należy obierać jak najlepsze przybliżone wartości, jednakże wolno je nieco zaokrąglić, jeżeli dalsze rachunki mogą być przez to uproszczone.

11. Twierdzenie o błędzie średnim funkeyi liniowej.

Zależnie od natury funkeyi $f_1(x, y \dots)$, albo, co na jedno wychodzi, zależnie od współczynników $a_1, a_2 \dots, b_1, b_2 \dots$ waga obliczonych z równań normalnych poprawek nie jest jednakową nawet wtedy, gdy waga wszystkich pomiarów jest jednakowa. Określamy „wagi“ poprawek na podstawie pewnego twierdzenia, które zaraz uzasadnimy.

¹⁾ Konkretny przykład takiego sprowadzenia podamy w § 2 następnego rozdziału.

Jeżeli mamy związek liniowy

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots,$$

to oznaczając błędy średnie wielkości $x_1, x_2, x_3 \dots$ przez $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3} \dots$ i t. d., a błąd wielkości x przez m_x będziemy mieli

$$m_x^2 = a_1^2 m_{x_1}^2 + a_2^2 m_{x_2}^2 + a_3^2 m_{x_3}^2 + \dots \quad (38)$$

Dla krótkości udowodnimy to twierdzenie tylko dla dwóch zmiennych, albowiem uogólnienie dla trzech i więcej zmiennych nie przedstawia żadnych trudności. Piszemy zatem

$$z = ax + by,$$

mamy zaś udowodnić, że

$$m_z^2 = a^2 m_x^2 + b^2 m_y^2.$$

Należy rozróżnić dwa przypadki: albo wolno ze sobą kombinować tylko pewne np. jednocześnie zmierzone wartości x i y , albo wolno kombinować każdy pomiar x z każdym pomiarem y . W pierwszym razie oczywiście liczba pomiarów x i liczba pomiarów y muszą być jednakowe, w drugim mogą być różne.

1-szy przypadek. Mamy k pomiarów x , k pomiarów y i k równań

$$z_1 = ax_1 + by_1$$

$$z_2 = ax_2 + by_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_k = ax_k + by_k.$$

Jeżeli x_1 zawiera błąd Δx_1 , zaś y_1 błąd Δy_1 , to z_1 zawiera błąd

$$\Delta z_1 = a \Delta x_1 + b \Delta y_1$$

i tak samo

$$\Delta z_2 = a \Delta x_2 + b \Delta y_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta z_k = a \Delta x_k + b \Delta y_k.$$

Stąd

$$\Sigma (\Delta z)^2 = a^2 \Sigma (\Delta x)^2 + b^2 \Sigma (\Delta y)^2 + 2ab \Sigma \Delta x \Delta y.$$

Ponieważ błędy są tak dodatnie jak odjemne, więc podwójne iloczyny będą częścią dodatnie, częścią odjemne i będą się mniej więcej znosić. Pomijamy je, a pozostałe sumy kwadratów dzielimy

przez k , poczem na mocy definicyi błędu średniego (8) otrzymujemy

$$m_z^2 = a^2 m_x^2 + b^2 m_y^2.$$

2-gi przypadek. Ponieważ wolno kombinować każde x ze wszystkimi y , więc jeżeli jest k pomiarów x oraz i pomiarów y , to można napisać ki równań

$$\begin{aligned} z_{11} &= ax_1 + by_1, & z_{21} &= ax_2 + by_1, & z_{31} &= ax_3 + by_1 \dots \\ z_{12} &= ax_1 + by_2, & z_{22} &= ax_2 + by_2, & z_{32} &= ax_3 + by_2 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{1i} &= ax_1 + by_i, & z_{2i} &= ax_2 + by_i, & z_{3i} &= ax_3 + by_i \dots \end{aligned}$$

Naumyślnie napisaliśmy je w taki sposób, aby było widać, że mamy k grup, a w każdej grupie i równań. Zupełnie takie same równania będziemy mieli pomiędzy błędami, mianowicie:

$$\begin{aligned} \Delta z_{11} &= a\Delta x_1 + b\Delta y_1, & \Delta z_{21} &= a\Delta x_2 + b\Delta y_1, \dots \\ \Delta z_{12} &= a\Delta x_1 + b\Delta y_2, & \Delta z_{22} &= a\Delta x_2 + b\Delta y_2, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

Podnieśmy te równania do kwadratu i dodajmy do siebie stronami odpowiedniami. Iloczynny odrazu pomijamy jak wyżej:

$$\sum_1^{ki} (\Delta z)^2 = a^2 i [\Delta_{x_1}^2 + \Delta_{x_2}^2 + \dots + \Delta_{x_k}^2] + b^2 k [\Delta_{y_1}^2 + \Delta_{y_2}^2 + \dots + \Delta_{y_i}^2].$$

Jeżeli to podzielimy przez ki , to znowu wedle definicyi (8) otrzymamy

$$m_z^2 = a^2 m_x^2 + b^2 m_y^2,$$

bo liczba błędów Δz jest ki , błędów Δx jest k a błędów Δy jest i .

Łatwo domyślić się, jak uogólnić to twierdzenie dla przypadku trzech i więcej zmiennych niezależnych.

Mnożąc równanie (38) przez $(0,6745)^2$ otrzymalibyśmy zupełnie takie same równanie pomiędzy kwadratami błędów prawdopodobnych.

12. Wagi poprawek.

Zapomocą twierdzenia (38) łatwo jest otrzymać wyrażenia na wagi poprawek. Trzeba w tym celu powrócić do równań normalnych (36) i rozwiązać je względem poprawek.

Na mocy znanych twierdzeń z teorii wyznaczników znajdziemy:

$$\left. \begin{aligned} \xi_m &= \frac{(a\lambda) D_{11} + (b\lambda) D_{12} + \dots}{D} \\ \eta_m &= \frac{(a\lambda) D_{21} + (b\lambda) D_{22} + \dots}{D} \text{ i t. d.} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

gdzie D jest to wyznacznik lewostronnych współczynników równań normalnych, mianowicie

$$D = \begin{vmatrix} (aa) & (ab) & (ac) \dots \\ (ba) & (bb) & (bc) \dots \\ (ca) & (cb) & (cc) \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

zaś D_{ik} jest to minor wyznacznika D należący do elementu stojącego na przecięciu i -tej kolumny i k -tego wiersza. Biorąc w uwagę wzory (31) porządkujemy liczniki we wyrażeniach (39) wedle wielkości λ , poczem otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} \xi_m &= p_1 A_1 \lambda_1 + p_2 A_2 \lambda_2 + \dots \\ \eta_m &= p_1 B_1 \lambda_1 + p_2 B_2 \lambda_2 + \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{D} [a_1 D_{11} + b_1 D_{12} + c_1 D_{13} + \dots \\ A_2 &= \frac{1}{D} [a_2 D_{11} + b_2 D_{12} + c_2 D_{13} + \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ B_1 &= \frac{1}{D} [a_1 D_{21} + b_1 D_{22} + c_1 D_{23} + \dots \\ B_2 &= \frac{1}{D} [a_2 D_{21} + b_2 D_{22} + c_2 D_{23} + \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

We wzorach (40) poprawki występują jako funkcyje liniowe wielkości λ_1 , λ_2 i t. d.; te ostatnie zaś są różnicami obserwowanych wielkości $l_1, l_2 \dots$ i obliczonych wielkości M_1, M_2 i t. d. Zatem wzory (40) zupełnie podpadają pod kategorię rozważanych w poprzednim §-ie związków i możemy do nich zastosować wzór (38). Oznaczając błędy średnie poprawek przez ϵ_ξ , ϵ_η i t. d. ... [te po-

prawki w przypadku wielu zmiennych odgrywają tę samą rolę, co średnia arytmetyczna w przypadku jednej zmiennej], a błędy średnie wielkości λ (albo, co na jedno wychodzi, średnie błędy pomiarów l) przez m_1, m_2 i t. d., otrzymamy następujące wzory:

$$(42) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\xi}^2 = p_1^2 A_1^2 m_1^2 + p_2^2 A_2^2 m_2^2 + p_3^2 A_3^2 m_3^2 + \dots \\ \varepsilon_{\eta}^2 = p_1^2 B_1^2 m_1^2 + p_2^2 B_2^2 m_2^2 + \dots \\ \varepsilon_{\zeta}^2 = p_1^2 C_1^2 m_1^2 + p_2^2 C_2^2 m_2^2 + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Gdyby wagi wszystkich obserwacji były jednakowe, to moglibyśmy przyjąć, że są równocześnie równe jedności. Wtedy wszystkie błędy średnie pomiarów stałyby się między sobą równe, wielkości $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2$ znacznie uprościłyby się a poprzednie równania przeszłyby na

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi}^2 &= m^2 \Sigma A^2, \\ \varepsilon_{\eta}^2 &= m^2 \Sigma B^2 \dots \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

gdzie m jest wspólna wartość błędu średniego wszystkich pomiarów. Jednakże nie będziemy zajmować się tym łatwiejszym przypadkiem; pozostaniemy przy przypadku ogólnym.

Wprowadźmy teraz „obserwację typową”. Waga jej jest 1 a błąd średni m . Wiemy już z § 7, że

$$m^2 = m_1^2 p_1 = m_2^2 p_2 = m_3^2 p_3 = \dots$$

Tedy możemy napisać wzory (42) w kształcie

$$(43) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\xi}^2 = m^2 [p_1 A_1^2 + p_2 A_2^2 + \dots \\ \varepsilon_{\eta}^2 = m^2 [p_1 B_1^2 + p_2 B_2^2 + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Lecz tak samo, jak porównaliśmy błędy średnie pomiarów z błędem średnim obserwacji typowej, możemy porównać też błędy średnie poprawek. Oznaczmy „wagi” poprawek przez p_{ξ}, p_{η} i t. d. Wedle definicyi

$$(44) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\xi}^2 = \frac{m^2}{p_{\xi}}, & \varepsilon_{\eta}^2 = \frac{m^2}{p_{\eta}}, \dots \end{cases}$$

Przeto z równań (43) otrzymujemy natychmiast następujące:

$$(45) \quad \begin{cases} p_{\xi} = \frac{1}{\Sigma p_i A_i^2}, & p_{\eta} = \frac{1}{\Sigma p_i B_i^2}, \dots \end{cases}$$

Właściwie równania (43) i (45) zawierają rozwiązanie zadania, pozostaje tylko znaleźć wzór na średni błąd m „typowej” obserwacji. Ale odłożymy to zadanie do następnego paragrafu, tu zaś postaramy się przyprowadzić wzory (43) i (45) do innego, dogodniejszego kształtu, bo oczywiście obliczanie takich sum jak $\Sigma p_i A_i^2$ wymaga długich rachunków.

Utwórzmy najpierw takie wyrażenia, jak $\Sigma p_i a_i A_i$, $\Sigma p_i b_i A_i$ i t. d. Z równań (41) natychmiast wypada:

$$\Sigma p_i a_i A_i = \frac{1}{D} [D_{11} \Sigma p_i a_i^2 + D_{12} \Sigma p_i a_i b_i + D_{13} \Sigma p_i a_i c_i + \dots] \quad \text{J}$$

$$\Sigma p_i b_i A_i = \frac{1}{D} [D_{11} \Sigma p_i b_i a_i + D_{12} \Sigma p_i b_i^2 + D_{13} \Sigma p_i b_i c_i + \dots] \quad \text{J}$$

.....

to jest

$$\left. \begin{aligned} \Sigma p_i a_i A_i &= \frac{1}{D} [(aa) D_{11} + (ab) D_{12} + (ac) D_{13} + \dots] \text{J} \\ \Sigma p_i b_i A_i &= \frac{1}{D} [(ba) D_{11} + (bb) D_{12} + (bc) D_{13} + \dots] \text{J} \\ \Sigma p_i c_i A_i &= \frac{1}{D} [(ca) D_{11} + (cb) D_{12} + (cc) D_{13} + \dots] \text{J} \\ &\dots \end{aligned} \right\} (46)$$

Przyjrzyjmy się wzorom (46). Z teorii wyznaczników wiadomo, że można napisać wyznacznik D w kształcie

$$D = (aa) D_{11} + (ab) D_{12} + (ac) D_{13} + \dots$$

Tak samo z teorii wyznaczników wiadomo, że

$$(ba) D_{11} + (bb) D_{12} + (bc) D_{13} + \dots = 0$$

$$(ca) D_{11} + (cb) D_{12} + (cc) D_{13} + \dots = 0$$

.....

bo skoro napiszemy lewe strony ostatnich równości w postaci wyznaczników, to okaże się, że to są wyznaczniki, w których po dwie kolumny są identyczne, mianowicie w pierwszym pierwsza i druga kolumna są identyczne, w drugim pierwsza i trzecia są identyczne i tak dalej. Wskutek tego ze wzorów (46) otrzymujemy

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma p_i a_i A_i = 1, \quad \Sigma p_i b_i A_i = 0, \quad \Sigma p_i c_i A_i = 0, \dots \\ \text{Postępując tak samo otrzymamy:} \\ \Sigma p_i a_i B_i = 0, \quad \Sigma p_i b_i B_i = 1, \quad \Sigma p_i c_i B_i = 0, \dots \\ \Sigma p_i a_i C_i = 0, \quad \Sigma p_i b_i C_i = 0, \quad \Sigma p_i c_i C_i = 1, \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Weźmy teraz sumy $\Sigma p_i A_i^2$, $\Sigma p_i B_i^2$, ... i t. d.
Ze wzorów (41) wynika

$$\Sigma p_i A_i^2 = \frac{D_{11}}{D} [p_1 a_1 A_1 + p_2 a_2 A_2 + p_3 a_3 A_3 + \dots] + \\ + \frac{D_{12}}{D} [p_1 b_1 A_1 + p_2 b_2 A_2 + \dots] + \frac{D_{13}}{D} [p_1 c_1 A_1 + p_2 c_2 A_2 + \dots] + \dots$$

to jest na mocy wzorów (47):

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma p_i A_i^2 = \frac{D_{11}}{D} = Q_{11}, \\ \text{tak samo znajdziemy} \\ \Sigma p_i B_i^2 = \frac{D_{22}}{D} = Q_{22} \\ \Sigma p_i C_i^2 = \frac{D_{33}}{D} = Q_{33} \\ \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Oznaczyliśmy stosunki między minorami, należącymi do elementów przekątnej głównej wyznacznika D a samym wyznacznikiem przez Q_{11} , Q_{22} i t. d., bo tak je pospolicie oznaczają w teorii najmniejszych kwadratów. Dochodzą do nich zazwyczaj inną drogą, ale ta wydała mi się krótszą i łatwiejszą. Obliczenie wyznacznika D i jego minorów D_{ii} (gdzie $i=1, 2, \dots$) jest o tyle ułatwione, że z powodu równości (32) tak sam wyznacznik D jak minory D_{ii} są symetryczne.

Z porównania wzorów (48) ze wzorami (43) i (45) wynikają ostateczne wzory

$$(49) \quad \varepsilon_{\xi}^2 = m^2 Q_{11} = m^2 \frac{D_{11}}{D}, \quad \varepsilon_{\eta}^2 = m^2 Q_{22} = m^2 \frac{D_{22}}{D}, \dots$$

$$(50) \quad p_{\xi} = \frac{1}{Q_{11}} = \frac{D}{D_{11}}, \quad p_{\eta} = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{D}{D_{22}}, \dots$$

13. Wzór na błąd średni obserwacji typowej.

Pozostał nam jeszcze do wyprowadzenia wzór na m , t. j. na błąd średni obserwacji typowej. Za punkt wyjścia weźmiemy wzór (25) z § 7, albowiem wedle założenia wagi $p_1, p_2 \dots$ rozmaitych obserwacji nie są jednakowe. Piszemy więc

$$m^2 = \frac{\sum_1^n p_i \Delta_i^2}{n} \dots \quad (51)$$

i wyrażamy błędy Δ przez ostatki v . Wedle wzorów (35)

$$\Delta_i = \lambda_i - a_i \xi - b_i \eta - \dots \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Skoro zamiast prawdziwych poprawek, których nie znamy, podstawimy najprawdopodobniejsze, to otrzymamy ostatki

$$v_i = \lambda_i - a_i \xi_m - b_i \eta_m - \dots \quad (i = 1, 2 \dots n). \quad (52)$$

Stąd

$$\Delta_i = v_i + \delta_i, \quad (53)$$

gdzie

$$\delta_i = a_i (\xi_m - \xi) + b_i (\eta_m - \eta) + \dots \quad (54)$$

Jeżeli podstawimy wyrażenia (53) w (51), to pomijając, jak wyżej, sumę iloczynów, otrzymamy

$$nm^2 = \sum_1^n p_i v_i^2 + \sum_1^n p_i \delta_i^2. \quad (55)$$

Sumę kwadratów ostatków możemy obliczyć, natomiast sumę $\sum p \delta^2$ możemy tylko ocenić, bo różnice $\xi_m - \xi, \eta_m - \eta \dots$ nie są znane. Ocenimy tę sumę w następujący sposób. Na podstawie wzoru (54) możemy napisać

$$\sum p_i \delta_i^2 = (\xi_m - \xi) \sum p_i a_i \delta_i + (\eta_m - \eta) \sum p_i b_i \delta_i + \dots \quad (56)$$

Ale z tego samego wzoru (54) wynika, że

$$\sum p_i a_i \delta_i = (\xi_m - \xi) \sum p_i a_i^2 + (\eta_m - \eta) \sum p_i a_i b_i + \dots$$

to jest [patrz wzory (31)]:

$$\sum p_i a_i \delta_i = (\xi_m - \xi) (aa) + (\eta_m - \eta) (ab) + \dots$$

Oddzielając poprawki rzeczywiste od prawdopodobnych możemy napisać

$$\Sigma p_i a_i \delta_i = (aa) \xi_m + (ab) \eta_m + \dots - (aa) \xi - (ab) \eta - \dots$$

Jeżeli teraz spojrzymy na równania normalne (36), to spostrzeżemy, że w ostatnich równaniach po prawej stronie suma wyrazów ze znakiem + to nie innego jak $(a\lambda)$; co zaś do sumy wyrazów ze znakiem — zawierających poprawki rzeczywiste, to, aby lepiej rozpoznać jej znaczenie, napiszemy równanie „in extenso“:

$$\begin{aligned} \Sigma p_i a_i \delta_i = (a\lambda) &- [p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + p_3 a_3^2 + \dots] \xi \\ &- [p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + p_3 a_3 b_3 + \dots] \eta \\ &- [p_1 a_1 c_1 + p_2 a_2 c_2 + p_3 a_3 c_3 + \dots] \zeta \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

i nieco inaczej uporządkujemy:

$$\begin{aligned} \Sigma p_i a_i \delta_i = (a\lambda) &- p_1 a_1 [a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \dots \\ &- p_2 a_2 [a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Skoro to porównamy ze wzorami (35), to zaraz spostrzeżemy, że można napisać:

$$\Sigma p_i a_i \delta_i = (a\lambda) - p_1 a_1 (\lambda_1 - \Delta_1) - p_2 a_2 (\lambda_2 - \Delta_2) - p_3 a_3 (\lambda_3 - \Delta_3) \dots$$

Ale [porównaj wzory (31)]:

$$p_1 a_1 \lambda_1 + p_2 a_2 \lambda_2 + \dots = (a\lambda),$$

przeto

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma p_i a_i \delta_i = \Sigma p_i a_i \Delta_i \\ &\text{Tak samo znajdziemy, że} \\ &\Sigma p_i b_i \delta_i = \Sigma p_i b_i \Delta_i \\ &\text{i t. d.} \dots \dots \dots \text{i t. d.} \end{aligned} \right.$$

Możemy więc napisać wzór (56) w kształcie

$$(56 \text{ bis}) \quad \Sigma p \delta^2 = (\xi_m - \xi) \Sigma p a \Delta + (\eta_m - \eta) \Sigma p b \Delta + \dots$$

Trzeba jeszcze wyrugować różnice: $\xi_m - \xi$, $\eta_m - \eta \dots$ i t. d. W tym celu weźmy wzory (40), wedle których

$$\xi_m = \Sigma p_i A_i \lambda_i, \quad \eta_m = \Sigma p_i B_i \lambda_i, \dots$$

Gdybyśmy zamiast wielkości $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ posiadali odpowiednie wielkości bez błędów, t. j. gdybyśmy posiadali

$$\lambda_1 - \Delta_1, \quad \lambda_2 - \Delta_2, \quad \lambda_3 - \Delta_3 \text{ i t. d.,}$$

to na prawdziwe poprawki otrzymalibyśmy zupełnie takie same równania jak (40), a zatem

$$\xi = \Sigma p_i A_i (\lambda_i - \Delta_i), \quad \eta = \Sigma p_i B_i (\lambda_i - \Delta_i) \dots$$

Stąd zaś wypada, że

$$\xi_m - \xi = \Sigma p_i A_i \Delta_i, \quad \eta_m - \eta = \Sigma p_i B_i \Delta_i \dots \text{ i t. d.} \quad (58)$$

Podstawiając ze wzorów (58) we wzór (56 bis), otrzymamy

$$\Sigma p \delta^2 = \Sigma p_i A_i \Delta_i \times \Sigma p_i a_i \Delta_i + \Sigma p_i B_i \Delta_i \times \Sigma p_i b_i \Delta_i + \dots \quad (59)$$

Po prawej stronie tego ostatniego równania stoją iloczyny sum. Pierwszy iloczyn zawiera współczynniki A i a , drugi B i b , trzeci C i c ; jasną przeto jest rzeczą, że takich iloczynów mamy tyle, ile jest niewiadomych. Jeżeli są k niewiadome (gdzie $k < n$), to liczba iloczynów jest także k .

Weźmy teraz pierwszy iloczyn i wykonajmy mnożenie. Oczywiście otrzymamy dwa rodzaje wyrazów: jedne, w których będą figurować kwadraty błędów i ich wag, np. $a_1 A_1 p_1^2 \Delta_1^2$, $a_2 A_2 p_2^2 \Delta_2^2$ i t. d.; drugie, w których figurują iloczyny błędów i wag o różnych wskaźnikach i z pewnością po części dodatnie, po części odjemne. Podobnie, jak wszędzie dotychczas, pomijamy sumę tych iloczynów, to jest przyjmujemy, że zamiast

$$\Sigma p A \Delta \times \Sigma p a \Delta \text{ można napisać } \Sigma a_i A_i p_i^2 \Delta_i^2 \text{ } ^1).$$

Wróćmy teraz na chwilę do równania (24) z § 7, wedle którego mamy przybliżenie

$$m^2 = \frac{\Sigma a_i \Delta_i^2}{\Sigma \frac{a_i}{p_i}}$$

bez względu na to, jakie wartości mają współczynniki a .

¹ Należy zauważyć, że nie mamy pewności, czy wszystkie iloczyny $a_i A_i$ są dodatnie.

Załóżmy, że

$$a_i = p_i^2 a_i A_i,$$

a otrzymamy

$$\Sigma a_i A_i p_i^2 \Delta_i^2 = m^2 \Sigma p_i a_i A_i.$$

Lecz wedle wzorów (47)

$$\Sigma p_i a_i A_i = 1,$$

a więc ostatecznie

$$\Sigma a_i A_i p_i^2 \Delta_i^2 = m^2.$$

Widzimy więc, że wartość iloczynu $\Sigma p_i A_i \Delta_i \times \Sigma p_i a_i \Delta_i$ jest średnio m^2 . Postępując tak samo z następnymi iloczynami figurującymi po prawej stronie równania (59) znajdziemy, że każdy z nich ma także średnio tęsamą wartość m^2 . Ponieważ liczba iloczynów jest k , więc ostatecznie zamiast równania (59) możemy napisać

$$(60) \quad \Sigma p \delta^2 = k m^2.$$

Podstawiając zaś stąd w równanie (55), otrzymamy wzór służący do obliczania średniego błędu obserwacji typowej z ostatków, mianowicie

$$(61) \quad m^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i^2}{n - k}.$$

Przypominamy, że

$$(52 \text{ bis}) \quad v_i = \lambda_i - a_i \xi_m - b_i \eta_m - \dots,$$

że n jest to liczba równań warunkowych (i tak samo liczba równań błędów), k liczba niewiadomych, zaś $p_1, p_2, p_3 \dots$ i t. d. są to wagi danych $l_1, l_2 \dots$ i t. d. wziętych z obserwacji.

Porównując wzór (61) ze wzorem (51) widzimy wielkie podobieństwo. Widzimy, że m^2 oblicza się z ostatków tak samo jak z błędów, tylko w mianowniku wzoru (51) stoi n , t. j. liczba równań warunkowych, a w mianowniku wzoru (61) $n - k$, t. j. liczba równań warunkowych zmniejszona o liczbę niewiadomych. Inaczej mówiąc, w mianowniku wzoru (60) stoi liczba równań zbędnych.

14. Przykład. Ostateczne sprawdzenie rachunków.

Zapóżyczamy u Helmerta¹⁾ następujący przykład. W sieci trójkątów geodezyjnych w pobliżu Spiry (Speier) prof. Schwerd

¹⁾ Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. II-gie wydanie. Lipsk 1907, str. 43 i 159.

z punktu D' zmierzył następujące 8 kątów między kierunkami idącymi do punktów A, B, W, H, N .

$\sphericalangle BA = 19^{\circ} 25' 59'', 42$	(średnia z 90 pojedynczych pomiarów)
" $BW = 34 18 43, 61$	" 80 " "
" $AW = 14 52 44, 33$	" 70 " "
" $HW = 15 34 58, 80$	" 20 " "
" $BH = 18 43 45, 60$	" 20 " "
" $NA = 12 26 24, 65$	" 40 " "
" $BN = 6 59 34, 51$	" 60 " "
" $NH = 11 44 11, 60$	" 20 " "

Zaraz spostrzegamy, że z pomiędzy tych 8-miu kątów tylko 4 są od siebie niezależne, pozostałe 4 są sumami lub różnicami pierwszych 4-ech. Zatem są tylko cztery niewiadome, mianowicie przyjmujemy

$$\sphericalangle BN = x, \quad \sphericalangle BH = y, \quad \sphericalangle BA = z, \quad \sphericalangle BW = t$$

Wtedy zaś

$$\begin{aligned} \sphericalangle NH &= -x + y, & \sphericalangle AW &= -z + t, & \sphericalangle NA &= -x + z, \\ \sphericalangle HW &= -y + t. \end{aligned}$$

Kładziemy

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta, \quad t = t_0 + \tau,$$

a na x_0, y_0, z_0, t_0 przyjmujemy bezpośrednio zmierzone wartości

$$\begin{aligned} x_0 &= 6^{\circ} 59' 34'', 51, & z_0 &= 19^{\circ} 25' 59'', 42 \\ y_0 &= 18 43 45, 60, & t_0 &= 34 18 43, 61 \end{aligned}$$

Stąd, opuszczając równania warunkowe, które każdy łatwo sobie napisze, obliczamy następującą tabliczkę ($l_i = M_i + \lambda_i$)

$l_1 = 19^{\circ} 25' 59'', 42$	$M_1 = z_0 = 19^{\circ} 25' 59'', 42$	$\lambda_1 = 0'', 00$	} (A)
$l_2 = 34 18 43, 61$	$M_2 = t_0 = 34 18 43, 61$	$\lambda_2 = 0, 00$	
$l_3 = 14 52 44, 33$	$M_3 = -z_0 + t_0 = 14 52 44, 19$	$\lambda_3 = 0, 14$	
$l_4 = 15 34 58, 80$	$M_4 = -y_0 + t_0 = 15 34 58, 01$	$\lambda_4 = 0, 79$	
$l_5 = 18 43 45, 60$	$M_5 = y_0 = 18 43 45, 60$	$\lambda_5 = 0, 00$	
$l_6 = 12 26 24, 65$	$M_6 = -x_0 + z_0 = 12 26 24, 91$	$\lambda_6 = -0, 26$	
$l_7 = 6 59 34, 51$	$M_7 = x_0 = 6 59 34, 51$	$\lambda_7 = 0, 00$	
$l_8 = 11 44 11, 60$	$M_8 = -x_0 + y_0 = 11 44 11, 09$	$\lambda_8 = 0, 51$	

Tedy „równania błędów“ (35) są:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \quad \cdot \quad \zeta \quad \cdot = 0,00 - \Delta_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \tau = 0,00 - \Delta_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad -\zeta + \tau = 0,14 - \Delta_3 \\ \cdot \quad -\eta \quad \cdot + \tau = 0,79 - \Delta_4 \\ \cdot \quad +\eta \quad \cdot \quad \cdot = 0,00 - \Delta_5 \\ -\xi \quad \cdot \quad +\zeta \quad \cdot = -0,26 - \Delta_6 \\ +\xi \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot = 0,00 - \Delta_7 \\ -\xi + \eta \quad \cdot \quad \cdot = 0,51 - \Delta_8 \end{array} \right.$$

Gdybyśmy mieli oddzielne pomiary, to moglibyśmy obliczyć średnie błędy wszystkich 8-miu kątów. Stąd zaś obliczylibyśmy ich wagi. Ponieważ atoli pomiarów nie posiadamy, więc musimy oznaczyć wagi dowolnie. Zważywszy, że wszystkie kąty mierzył tensam obserwator i tensamem narzędziem, możemy przyjąć, że wszystkie pomiary były jednakowo dobre i wziąć wagi prosto proporcjonalne do liczby pojedynczych pomiarów. Ponieważ te liczby są podzielne przez 10, więc weźmiemy za obserwację typową średnią z dziesięciu pojedynczych pomiarów i położymy:

$$(63) \quad p_1 = 9, \quad p_2 = 8, \quad p_3 = 7, \quad p_4 = p_5 = 2, \quad p_6 = 4, \\ p_7 = 6, \quad p_8 = 2.$$

Utwórzmy teraz „równania normalne“ (36), co w danym razie jest o tyle ułatwione, że w „równaniach błędów“ (62) współczynniki przy poprawkach są bądź 0, bądź +1, bądź -1.

Z pomocą wzorów (31), względnie (31 bis) wprędce znajdziemy

$$\begin{array}{rcl} 12 \xi_m - 2 \eta_m - 4 \zeta_m & & = + 0,02 \\ - 2 \xi_m + 6 \eta_m & & - 2 \tau_m = - 0,56 \\ - 4 \xi_m & + 20 \zeta_m - 7 \tau_m & = - 2,02 \\ & - 2 \eta_m - 7 \zeta_m + 17 \tau_m & = + 2,56 \end{array}$$

Najpierw obliczamy wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} 12, & -2, & -4, & 0 \\ -2, & 6, & 0, & -2 \\ -4, & 0, & 20, & -7 \\ 0, & -2, & -7, & 17 \end{vmatrix}$$

i jego minory:

$$\begin{array}{l}
 D = 17036 \\
 \left. \begin{array}{l}
 D_{11} = 1666, \quad D_{22} = 3220, \quad D_{33} = 1108, \quad D_{44} = 1264 \\
 D_{12} = D_{21} = 638, \quad D_{13} = D_{31} = 420, \quad D_{14} = D_{41} = 248 \\
 D_{23} = D_{32} = 304, \quad D_{24} = D_{42} = 504, \quad D_{34} = D_{43} = 492,
 \end{array} \right\} (64)
 \end{array}$$

Stąd [patrz wzory (39)]:

$$\begin{aligned}
 \xi_m &= -\frac{537''48}{17036} = -0''03155 \\
 \eta_m &= -\frac{1114''28}{17036} = -0''06541 \\
 \zeta_m &= -\frac{1140''48}{17036} = -0''06695 \\
 \tau_m &= +\frac{1964''72}{17036} = +0''11533.
 \end{aligned}$$

Tedy poprawki kolejnych kątów zmierzonych, t. j. wielkości $a_1 \xi_m + b_1 \eta_m + \dots$ są:

$$\left. \begin{array}{ll}
 \sphericalangle BA & \zeta_m = -0''06695 \\
 \text{„ } BW & \tau_m = +0,11533 \\
 \text{„ } AW & -\zeta_m + \tau_m = +0,18228 \\
 \text{„ } HW & -\eta_m + \tau_m = +0,18074 \\
 \text{„ } BH & +\eta_m = -0,06541 \\
 \text{„ } NA & -\xi_m + \zeta_m = -0,03540 \\
 \text{„ } BN & +\xi_m = -0,03155 \\
 \text{„ } NH & -\xi_m + \eta_m = -0,03386.
 \end{array} \right\} (B)$$

Dodajemy teraz te poprawki do zmierzonych kątów i otrzymujemy poprawione kąty¹⁾. Ponieważ jednak rezultaty pomiarów były podane w setnych sekundy, więc zaokrąglamy poprawki do setnych sekundy²⁾ i otrzymujemy:

1) Obliczenie składników ze znakami \pm podane jest niżej.

2) Tu spostrzegamy, że można byłoby obliczyć poprawki $\xi_m, \eta_m \dots$ i t. d. z mniejszą dokładnością np. nie zapomocą 5-cio cyfrowych a zapomocą 4-ro cyfrowych logarytmów.

$$(65) \left\{ \begin{array}{l} \sphericalangle BA = z_0 + \zeta_m = 19^\circ 25' 59'' 35 \pm 0'' 167 \\ \text{„ } BW = t_0 + \tau_m = 34 \ 18 \ 43,73 \pm 0,178 \\ \text{„ } AW = -z_0 + t_0 - \zeta_m + \tau_m = 14 \ 52 \ 54,37 \pm 0,244 \\ \text{„ } HW = -y_0 + t_0 - \eta_m + \tau_m = 15 \ 34 \ 58,98 \pm 0,335 \\ \text{„ } BH = y_0 + \eta_m = 18 \ 43 \ 45,53 \pm 0,284 \\ \text{„ } NA = -x_0 + z_0 - \xi_m + \zeta_m = 12 \ 26 \ 24,62 \pm 0,264 \\ \text{„ } BN = x_0 + \xi_m = 6 \ 59 \ 34,48 \pm 0,204 \\ \text{„ } NH = -x_0 + y_0 - \xi_m + \eta_m = 11 \ 44 \ 11,57 \pm 0,350. \end{array} \right.$$

Aby obliczyć średni błąd obserwacji typowej, musimy przede wszystkim obliczyć ostatki

$$v_i = \lambda_i - a_i \xi_m - b_i \eta_m - \dots$$

Wielkości $a_i \xi_m + b_i \eta_m + \dots$ mamy w tabliczce (B), a wielkości λ w tabliczce (A). Tedy możemy natychmiast ułożyć tabliczkę ostatków, w której po prawej stronie wypiszemy odpowiednie wagi wedle równań (63)

$$(C) \left\{ \begin{array}{ll} v_1 = + 0,06695 \dots & p_1 = 9 \\ v_2 = - 0,11533 \dots & p_2 = 8 \\ v_3 = - 0,04228 \dots & p_3 = 7 \\ v_4 = + 0,60896 \dots & p_4 = 2 \\ v_5 = + 0,05541 \dots & p_5 = 2 \\ v_6 = - 0,22460 \dots & p_6 = 4 \\ v_7 = + 0,03155 \dots & p_7 = 6 \\ v_8 = + 0,54416 \dots & p_8 = 2 \end{array} \right.$$

Stąd

$$\Sigma p v^2 = 1,7095.$$

Mieliśmy 8 równań warunkowych a 4 niewiadome, przeto $n = 8$, $k = 4$, $n - k = 4$, zaś

$$(66) \quad m = \pm \sqrt{\frac{1,7095}{4}} = \pm 0,654.$$

Średni błąd pojedynczego pomiaru jest

$$\pm \sqrt{\frac{17,095}{4}} = \pm 2,067 \text{ (a jego waga} = 0,1).$$

Teraz zapomocą równań (64) obliczamy

$$Q_{11} = \frac{D_{11}}{D} = 0,09779, \quad Q_{22} = \frac{D_{22}}{D} = 0,18901,$$

$$Q_{33} = \frac{D_{33}}{D} = 0,06504, \quad Q_{44} = \frac{D_{44}}{D} = 0,07420,$$

stad zaś i ze wzoru (66) na podstawie wzorów (49) i (50) otrzymamy

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \pm 0,204, & \varepsilon_\eta &= \pm 0,284, & \varepsilon_\zeta &= \pm 0,167, & \varepsilon_\tau &= \pm 0,178 \\ p_\xi &= 10,23 & p_\eta &= 5,29 & p_\zeta &= 15,38 & p_\tau &= 13,48. \end{aligned}$$

Wreszcie możemy ze wzoru (38) obliczyć błędy średnie pozostałych czterech kątów. Błędy te, podobnie jak błędy $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta \dots$ i t. d. pomieściliśmy po prawej stronie „poprawionych“ kątów we wzorach (65).

W powyższym przykładzie rachunki były stosunkowo łatwe i krótkie, ale bardzo często zdarza się, że zadanie wymaga bezporównania dłuższych rachunków. W takim razie należy trzymać się jednego z wyrobionych schematów, które można znaleźć w specjalnych kompendyach [np. w „Ausgleichsrechnung“ Helmerta]. Schematy te są tak obmyślane, aby zredukować rachunki do minimum¹⁾ i aby umożliwić sprawdzanie w ciągu rachunku. My tu przytoczymy tylko wzór służący do ostatecznego sprawdzenia, mianowicie:

$$(vv) = (\lambda\lambda) - (a\lambda) \xi_m - (b\lambda) \eta_m - \dots \quad (67)$$

Wzór ten jest ściśle a wynika ze wzorów (52). Jeżeli pomnożymy każdy z tych wzorów przez odpowiednie $p\lambda$, to dodawszy wszystkie wzory, otrzymamy:

$$(v\lambda) = (\lambda\lambda) - (a\lambda) \xi_m - (b\lambda) \eta_m - \dots,$$

jeżeli zaś pomnożymy każdy ze wzorów (52) przez odpowiednie $p\nu$, to dodawszy wszystkie wzory, otrzymamy:

$$(vv) = (v\lambda) - (av) \xi_m - (bv) \eta_m - \dots$$

¹⁾ Naturalnie przy dłuższych rachunkach należy posilkować się nie tylko logarytmami, ale także tablicami kwadratów, tablicami iloczynów, maszynami rachunkowymi i t. d., i t. d. Dalej należy tak dobierać wagi i tak zaokrągląć przybliżone wartości niewiadomych, aby ułatwić dalsze rachunki. Wreszcie, co najważniejsze, należy zachowywać tylko taką ścisłość, jakiej wymaga zadanie.

Ale znowu z tychże równań (52) przy pomocy równań normalnych (36) otrzymamy:

$$(av) = (bv) = (cv) = \dots = 0.$$

Stąd wynika

$$(vv) = (v\lambda),$$

co prowadzi wprost do wzoru (67).

Literatura.

C. F. Gauss: *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*. Dzieła Gaussa, tom IV-ty, Getynga 1873.

T. N. Thiele: *Theory of Observations*, Londyn 1903 r.

F. R. Helmert: *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*, drugie wydanie, Lipsk 1907.

B. Baillaud: dzieło cytowane w końcu II-go rozdziału.

S. Newcomb: " " " " " "

ROZDZIAŁ IV.

Interpolacya zapomocą szeregów potęgowych i szeregów funkcyi kołowych.

1. Szeregi potęgowe.

Obszerne zastosowania ma metoda najmniejszych kwadratów przy przedstawieniu funkcyi znanych z obserwacyi przez szeregi potęgowe, szeregi funkcyi kołowych, kulistych i t. d. Np. obserwujemy jakąś wielkość zmieniającą się z czasem ale, jak się nam wydaje, nieperyodyczną i próbujemy przedstawić ją przez szereg potęgowy. Założmy, że obserwowane wartości funkcyi są:

x_1	w	chwili	czasu	t_1
x_2	"	"	"	t_2
x_3	"	"	"	t_3
.

Piszemy tedy równania:

$$\begin{aligned} a + bt_1 + ct_1^2 + \dots &= x_1 \\ a + bt_2 + ct_2^2 + \dots &= x_2 \\ a + bt_3 + ct_3^2 + \dots &= x_3 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

W równaniach tych x_1, x_2, \dots i t. d., t_1, t_2, \dots i t. d. są dane przez obserwacyę, zaś współczynniki a, b, c i t. d. są niewiadome. Względem niewiadomych a, b, c, \dots równania są liniowe. Jeżeli mamy n obserwacyi i n równań, to oczywiście możemy określić tylko n współczynników, więc w każdym razie musimy urwać szereg na n -tym wyrazie. Że w tym przypadku zadanie przywodzi się do rozwiązania systemu n liniowych równań i że dla chwil czasu t_1, t_2, \dots, t_n szereg będzie ściśle przybierał wartości $x_1, x_2,$

x_3, \dots, x_n , tego chyba tłumaczyć nie potrzebujemy. Ale ten przypadek interesu nie przedstawia choćby dlatego, że oczywiście wszystkie błędy obserwacji wejdą do wyrażenia funkcji. Zresztą pospolicie zdarza się, że gdy do przedstawienia n obserwacji trzeba użyć szeregu złożonego z n wyrazów, to albo obserwacje są złe, albo za mało liczne, albo wreszcie szereg potęgowy nie nadaje się do przedstawienia danej funkcji.

O wiele bardziej interesującym jest przypadek, gdy do przedstawienia funkcji wystarcza ilość wyrazów mniejsza niż ilość obserwacji. Np. z graficznego przedstawienia obserwowanych wartości x (czasu przyjmujemy za odcięte a obserwowane wartości x za rzędne) widać, że funkcja x ma przebieg przybliżenie prostoliniowy; — wtedy do przedstawienia jej wystarczy wyrażenie: $x = a + bt$. Tak samo może się zdarzyć, że ma przebieg podobny do przebiegu paraboli, wtedy wystarczy wyrażenie

$$x = a + bt + ct^2 \text{ i t. d.}$$

Może się także zdarzyć, że wyraziwszy n obserwacji przez szereg potęgowy złożony z n wyrazów, spostrzeżemy, że oprócz pierwszych kilku wszystkie współczynniki są bardzo małe, a przytem nie zmniejszają się regularnie. To jest znak, że zależą one przeważnie od błędów obserwacji i że tylko współczynniki kilku pierwszych wyrazów mają realne znaczenie. Wtedy należy dalsze wyrazy poprostu odrzucić.

We wszystkich tych przypadkach liczba niewiadomych współczynników będzie mniejsza od liczby równań, przeto należy określać współczynniki zapomocą metody najmniejszych kwadratów. Zastosowanie jej w tym przypadku nie przedstawia żadnych trudności.

Zakończymy ten paragraf uwagą, która dotyczy nie tylko wzorów potęgowych, ale wogóle wszystkich interpolacyjnych. Nie należy nigdy „ekstrapolować“, t. j. używać wzorów interpolacyjnych do obliczenia wartości funkcji leżących poza granicami skrajnych obserwacji, albowiem w ogromnej większości przypadków ekstrapolacja zawodzi. Pochodzi to stąd, że wzory interpolacyjne mają zazwyczaj zupełnie inny charakter analityczny aniżeli te funkcje, które mają przedstawiać. Inna rzecz, gdy wzór wynika z jakiejś dobrze ugruntowanej teorii a chodzi tylko o empiryczne oznaczenie pewnych wchodzących doń stałych. Ale takich wzorów nie nazywamy interpolacyjnymi.

2. Szeregi funkcyj kołowych.

Wiadomo, że funkcyjne peryodyczne a w pewnych granicach nawet jakiegokolwiek funkcyjne¹⁾ dają się przedstawić przez szeregi Fouriera:

$$f(x) = a_0 + \sum a_n \cos nax + \sum b_n \sin nax, \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (1)$$

gdzie a jest to pewna stała zależna od peryodu funkcyj, względnie w przypadku, gdy funkcyja nie jest peryodyczną, od granic, w których ją rozwijamy w szereg Fouriera. Ogólniejszy przypadek możemy pominąć: ograniczymy się do funkcyj peryodycznych.

W astronomii rzadko kiedy zdarza się, abyśmy mogli stosować metodę Fouriera. W metodzie tej oblicza się współczynniki a_n i b_n z całek, w których pod znakiem całkowania figuruje funkcyja $f(x)$. Ponieważ najczęściej zdarza się, że funkcyj tej dobrze nie znamy a znamy tylko z obserwacyi oddzielne jej wartości i to w liczbie skończonej, więc po prostu możemy napisać tylko pewną skończoną liczbę równań warunkowych kształtu

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0 + \sum a_n \cos nax_1 + \sum b_n \sin nax_1 \\ f_2 &= a_0 + \sum a_n \cos nax_2 + \sum b_n \sin nax_2 \\ &\dots \\ &\dots \dots \dots (n = 1, 2 \dots) \end{aligned}$$

gdzie $x_1, x_2 \dots$ są to „znane” wartości argumentu x odpowiadające obserwowanym wartościom funkcyj f . Np. wyobraźmy sobie, że x oznacza czas; wtedy x_1, x_2, \dots są to „czasy” obserwacyi, które notujemy.

Należy tu rozróżnić dwa przypadki: albo peryod jest znany, albo też nieznan. Jeżeli peryod T jest znany, to ponieważ $a = \frac{2\pi}{T}$; więc argumenty nax_i są znane i można odrazu obliczyć wszystkie $\cos nax$ i $\sin nax$. W takim razie zadanie oczywiście przychodzi się do zadania rozpatrzonego w poprzednim paragrafie: mamy szereg równań liniowych z $2k + 1$ niewiadomymi $a_0, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ i jeżeli liczba równań jest większa niż liczba niewiadomych, to trzeba zastosować metodę najmniejszych kwadratów.

¹⁾ W miejscach, w których funkcyja przestaje być ciągłą, np. przeskakuje od wartości f_1 do f_2 , szereg Fouriera daje średnią arytmetyczną obu wartości.

Do tego samego przywodzi się ostatecznie zadanie, gdy peryod T (inaczej mówiąc związana z nim stała α) jest nieznan. Początkowo musimy na α i na współczynniki a i b przyjąć pewne przybliżone wartości, poczem metodą podaną w § 10 poprzedniego rozdziału określamy „poprawki“.

Przybliżony peryod można określić ze samych obserwacji, jeżeli te obejmują dostatecznie długi odstęp. Weźmy np. przypadek, gdy chodzi o funkcję czasu. Jeżeli obserwacje obejmują okres czasu krótszy od jednego peryodu funkcji, to określenie peryodu jest wogóle niemożliwe. Aby otrzymać dobre przybliżenie, trzeba mieć obserwacje jak najczęstsze i obejmujące okres czasu znacznie dłuższy od jednego peryodu. Im mniej ściśle obserwacje, tem ów okres czasu musi być dłuższy.

Ponieważ wartości funkcji powtarzają się po upływie peryodu, więc obserwowane wartości także powinny powtarzać się po upływie peryodu. Naturalnie nie powtarzają się ściśle, bo po pierwsze zawierają błędy, po drugie chyba przypadkowo może się zdarzyć, żeby odstęp czasu pomiędzy — powiedzmy — obserwacją k -tą a obserwacją i -tą był dokładnie równy peryodowi funkcji. Wyobraźmy sobie np., że największe obserwowane wartości funkcji są mniej więcej między sobą równe i że przytrafiają się w mniej więcej równych odstępach czasu T_1, T_2, \dots . wyobraźmy sobie dalej, że najmniejsze obserwowane wartości są także mniej więcej jednakowe i że odstępy czasu pomiędzy nimi np. T_k, T_{k+1}, \dots są także mniej więcej równe pomiędzy sobą a zarazem przybliżenie równe odstępom T_1, T_2, \dots ¹⁾; wtedy można wziąć średnią arytmetyczną ze wszystkich $T_1, T_2, \dots, T_k, T_{k+1}, \dots$ za przybliżony peryod T_0 , z którego zaraz obliczymy przybliżone $\alpha_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Przybliżone wartości współczynników a i b można obliczyć, traktując z początku zadanie tak, jak gdyby T_0 było dokładną wartością peryodu i biorąc tylko tyle równań, ile współczynników chcemy obliczyć²⁾. Następnie bierzemy wszystkie równania i metodą najmniejszych kwadratów obliczamy poprawki. Może się jednakże zdarzyć, że do rozpoznania peryodu wystarczą

¹⁾ W tego rodzaju poszukiwaniach wielce pomocnymi są metody graficzne.

²⁾ Rzecz prosta, że w tego rodzaju zadaniach nie obywa się bez prób niekiedy nieudatnych. Często zdarza się, że początkowo przyjęte wyrazy okazują się niedostateczne, że trzeba wziąć w uwagę jeszcze dalsze wyrazy i t. d.

obserwacje obejmujące okres czasu krótszy od samego peryodu. Jeżeli np. obserwujemy ciało krążące po kole z jednostajną prędkością kątową, to możemy określić peryod z prędkości kątowej. Wtedy dość jest mieć obserwacje w ciągu okresu krótszego niż sam peryod. Załóżmy, że obserwowaliśmy współrzędne prostokątne:

$$\begin{array}{l} x_1 \text{ i } y_1 \text{ w chwili czasu } t_1 \\ x_2 \text{ i } y_2 \text{ } t_2 \\ \cdot \text{ } \cdot \\ \cdot \text{ } \cdot \end{array}$$

Ponieważ wiemy, że orbita jest kołem a prędkość kątowa jest stała, więc możemy napisać:

$$\begin{array}{l} x_1 = a \cos (b + ct_1), \quad y_1 = a \sin (b + ct_1) \\ x_2 = a \cos (b + ct_2), \quad y_2 = a \sin (b + ct_2), \end{array}$$

gdzie a , b i c są to stałe tymczasem jeszcze nieokreślone. Spostrzegamy, że można je określić już z dwóch obserwacji, a to dzięki temu, że uważamy środek koła za wiadomy; gdyby był niewiadomy, to trzeba by mieć trzy obserwacje. Połóżmy mianowicie:

$$\frac{x_1}{y_1} = \text{tang } \theta_1, \quad \frac{x_2}{y_2} = \text{tang } \theta_2.$$

Oczywiście możemy natychmiast obliczyć θ_1 i θ_2 . Nawet wątpliwości co do kwadrantów, w których te kąty mają być położone, nie będzie, bo znamy znaki cosinusów i sinusów. Obliczywszy kąty θ_2 i θ_1 zaraz znajdziemy stałą c , która nosi nazwę „*ruchu*“. Jeżeli np. liczymy czas na dni, to odpowiednio c nazywa się „*ruchem dziennym*“. Obliczamy c z równania

$$c = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1},$$

poczem zaraz otrzymamy T z równania

$$T = \frac{2\pi}{c}.$$

Co do stałej b , to ta zależy od wyboru „*epoki*“, t. j. tego momentu czasu, który przyjmujemy za zero. Określamy ją z równań

$$b = \theta_1 - ct_1, \quad b = \theta_2 - ct_2.$$

Wreszcie stałą a obliczamy z równań

$$a = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad a = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Widzimy stąd, że mając tylko dwie obserwacye możemy na a i b wziąć średnie z dwóch wartości. Jeżeli zaś mamy n obserwacyi, to możemy na a i b wziąć średnie z n wartości, a na c średnią z $n - 1$ wartości.

Skoro mamy przybliżone wartości na a, b i c , to możemy obliczyć poprawki metodą podaną w § 10 poprzedniego rozdziału. Oznaczmy te poprawki przez $\delta a, \delta b$ i δc , rozwińmy wyrażenia na x i y w szeregi Taylora, urwijmy je na wyrazach liniowych względem poprawek i napiszmy „równania błędów“

$$(A) \begin{cases} x_1 - \Delta x_1 = a \cos(b + ct_1) + \cos(b + ct_1) \delta a - \\ - a \sin(b + ct_1) \delta b - at_1 \sin(b + ct_1) \delta c \\ y_1 - \Delta y_1 = a \sin(b + ct_1) + \sin(b + ct_1) \delta a + \\ + a \cos(b + ct_1) \delta b + at_1 \cos(b + ct_1) \delta c \\ x_2 - \Delta x_2 = a \cos(b + ct_2) + \cos(b + ct_2) \delta a - \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

Porównując te równania z równaniami (35) poprzedniego rozdziału spostrzegamy, że $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ to to samo, co tam l_1, l_2, \dots ; $a \cos(b + ct_1), a \sin(b + ct_1), a \cos(b + ct_2)$ i t. d. to samo, co tam M_1, M_2, M_3, \dots ; dalej $+ \cos(b + ct_1), + \sin(b + ct_1), \cos(b + ct_2), \dots$ to samo, co tam a_1, a_2, a_3, \dots ; $- a \sin(b + ct_1), + a \cos(b + ct_1), \dots$ to samo, co tam b_1, b_2, \dots ; wreszcie $\delta a, \delta b, \delta c$ to samo, co tam ξ, η, ζ . Zatem nie pozostaje nic więcej jak utworzyć „równania normalne“, podstawić wartości liczbowe i t. d.¹⁾

Przytoczymy konkretny przykład wedle S. Newcomba²⁾. W r. 1901 we Washingtonie T. J. J. See obserwował Titanie (satelitę Uranusa). Z tych obserwacyi wynikają następujące współrzędne satelity względem planety

1)	13,5026	Maja	$x = - 24,95$	$y = - 22,05$
2)	15,5007	„	+ 18,61	- 26,85
3)	17,5008	„	+ 29,46	+ 15,03
4)	22,5014	„	- 20,04	- 26,67.

¹⁾ Zwracamy uwagę na to, że mieliśmy tu przypadek, w którym związki pomiędzy wielkościami obserwowanymi a określanymi z pomocą metody najmniejszych kwadratów, nie są liniowe.

²⁾ Loc. cit. str. 67.

Orbita Titanii jest elipsą, ale korzystając z tego, że mimośród jest bardzo mały, możemy w pierwszym przybliżeniu przyjąć, że jest kołem. Odpowiednio do tego przyjmujemy, że ruch Titanii po orbicie jest jednostajny.

Jako epokę przyjmujemy zwykle moment w środku okresu obserwacji, tu dogodnie jest wziąć moment w początku tego okresu. Newcomb przyjmuje epokę 13,5000 Maja, wskutek czego czasy będą

$$t_1 = 0,0026, \quad t_2 = 2,0007, \quad t_3 = 4,0008, \quad t_4 = 9,0014.$$

Obliczamy a :

$$a_1 = 33,30, \quad a_2 = 32,66, \quad a_3 = 33,07, \quad a_4 = 33,36,$$

skąd średnio $a = 33,08$. Obliczamy θ :

$$\theta_1 = 221^\circ 28', \quad \theta_2 = 304^\circ 44', \quad \theta_3 = 27^\circ 2', \quad \theta_4 = 233^\circ 5'.$$

Tworzymy różnice:

$$\theta_2 - \theta_1 = 83^\circ 16', \quad \theta_3 - \theta_2 = 82^\circ 18', \quad \theta_4 - \theta_3 = 206^\circ 3',$$

skąd wedle wzorów: $c = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$ i t. d. trzy wartości na c

$$c = 42^\circ 2', \quad 41^\circ 7,7, \quad 41^\circ 12' \text{ (około).}$$

Newcomb przyjmuje średnio $c = 41^\circ 15'$. Jak otrzymał tę średnią, nie wiem, bo gdyby powyższymi trzema wartościami przydał wagi 2, 2 i 5, proporcjonalne do czasów $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$ i $t_4 - t_3$, to byłby otrzymał $41^\circ 25'$. Snać pierwszej wartości na c przydał wagę znacznie mniejszą. Pozostając przy obranej przezeń średniej i przyjmując epokę 13,5 Maja mamy

$$\theta_1 = 221^\circ 28' = b + ct_1 = b + 41^\circ 15' \times 0,0026,$$

skąd

$$b = 221^\circ 22'.$$

Obecnie mamy wszystkie potrzebne daty. Obliczamy tedy x , y i $b + ct$.

- | | | | |
|----|-----------------------------------|---------------------|---------------------|
| 1) | $b_0 + c_0 t_1 = 221^\circ 28'$, | $x_0 = -24,79$, | $y_0 = -21,91$, |
| | | $x - x_0 = -0,16$, | $y - y_0 = -0,14$. |
| 2) | t_2 303 54, | $x_0 = +18,45$, | $y_0 = -27,46$, |
| | | $x - x_0 = +0,16$, | $y - y_0 = +0,61$. |
| 3) | t_3 26 24, | $x_0 = +29,63$, | $y_0 = +14,71$, |
| | | $x - x_0 = -0,17$, | $y - y_0 = +0,32$. |
| 4) | t_4 232 40, | $x_0 = -20,06$, | $y_0 = -26,30$, |
| | | $x - x_0 = +0,02$, | $y - y_0 = -0,37$. |

$x - x_0$ i $y_0 - y_0$ to tosamo co $\lambda = l - M$ etc. oraz tosamo, co $x - a \cos(b + ct)$ i $y - a \sin(b + ct)$ we wzorach (A) obecnego paragrafu. Przed podstawieniem we wzory (A) dogodnie będzie zmienić epokę i przenieść zero czasu do momentu trzeciej obserwacji. Jednocześnie zaokrąglimy liczby i napiszemy $t_1 = -4$, $t_2 = -2$, $t_3 = 0$, $t_4 = 5$. Następnie podstawimy we wzory (A) i otrzymamy następujące równania błędów:

$t = -4$	$-0,749 \delta a + 21,9 \delta b - 88 \delta c = -0,16 - \Delta_1$
-4	$-0,662 \quad -24,8 \quad + 99 \quad = -0,14 - \Delta_2$
-2	$+0,558 \quad +27,5 \quad - 55 \quad = +0,16 - \Delta_3$
-2	$-0,830 \quad +18,5 \quad - 37 \quad = +0,61 - \Delta_4$
0	$+0,896 \quad -14,7 \quad \quad 0 \quad = -0,17 - \Delta_5$
0	$+0,444 \quad +29,6 \quad \quad 0 \quad = +0,32 - \Delta_6$
$+5$	$-0,607 \quad +26,3 \quad +132 \quad = +0,02 - \Delta_7$
$+5$	$-0,795 \quad -20,1 \quad -100 \quad = -0,37 - \Delta_8$

Tu należy zwrócić uwagę na pewną właściwość równań przed chwilą napisanych, właściwość zresztą nieraz przytrafiającą się¹⁾. Rozpoznamy ją analizując równania (A), z których równania błędów wynikły przez podstawienie. Oto wyrazy $x_1 - x_0$ i t. d. t. j. wyrazy $x - a \cos(b + ct)$ mają wymiary sekund kątowych, bo x_1, y_1 i t. d. są podane w sekundach, zaś $a \cos(b + ct)$ składa się z dwóch czynników, z których jeden: cosinus jest czystą liczbą, a drugi: a ma wymiary sekund kątowych. Jednym słowem wyrazy wiadome w równaniach błędów mają wymiary sekund kątowych. Wskutek tego pozostałe wyrazy tych równań także muszą mieć wymiary sekund kątowych. Weźmy wyraz: $\cos(b + ct) \delta a$. Ponieważ $\cos(b + ct)$ jest czystą liczbą, więc δa musi mieć wymiary sekund kątowych. Następny wyraz: $-a \sin(b + ct) \delta b$ także ma wymiary sekund kątowych. We wyrazie tym $\sin(b + ct)$ jest czystą liczbą, a ma wymiary sekund kątowych, więc już $a \sin(b + ct)$ posiada pożądane wymiary i δb musi być czystą liczbą. To znaczy, że δb jest wyrażone w mierze łukowej, bo miara ta jest stosunkiem łuku do promienia koła, a więc czystą liczbą. Przez analogiczne rozumowanie dojdziemy do wniosku, że także $t_1 \delta c$ jest czystą liczbą, że zatem δc ma wymiary odwrotności czasu, jak zresztą

¹⁾ Należy zawsze zbadać, czy w danem zadaniu nie przytrafia się coś podobnego.

być powinno, bo δc jest prędkością kątową. Uwzględnimy tę okoliczność przy ostatecznem obliczeniu poprawek.

Ponieważ w równaniach błędów współczynniki przy δc są około 100 razy większe niż współczynniki przy δa , a około 30 razy większe niż współczynniki przy δb , więc dla ułatwienia dalszych rachunków kładziemy

$$\delta a = 10\xi, \quad \delta b = \frac{1}{3}\eta, \quad \delta c = \frac{1}{10}\zeta.$$

Wtedy zaokrąglając jeszcze współczynniki, zmieniając znaki w niektórych równaniach i opuszczając $\Delta_1, \Delta_2 \dots$ jako niepotrzebne napiszemy:

7,5 ξ	— 7,3 η	+ 8,8 ζ	=	0,16
6,6	+ 8,3	— 9,9	=	0,14
5,6	+ 9,2	— 5,5	=	0,16
— 8,3	+ 6,2	— 3,7	=	0,61
9,0	— 4,9	0,0	=	— 0,17
4,4	+ 9,9	0,0	=	0,32
— 6,1	+ 8,8	+ 13,2	=	0,02
8,0	+ 6,7	+ 10,0	=	0,37

Stąd otrzymamy „normalne“ równania:

450, ξ	— 0,3 η	— 0,9 ζ	=	— 1,44
— 0,3	+ 543,	— 72,1	=	+ 14,34
— 0,9	— 72,1	+ 515,	=	— 0,73.

A stąd

t. j.

$$\xi = -0,0032, \quad \eta = +0,0264, \quad \zeta = +0,00232,$$

$$\delta a = -0,03 \quad \delta b = 0,088 \quad \delta c = 0,000232.$$

Poprawka δa wypadła odrazu w sekundach, ale trzeba pamiętać o tem, że b i c w równaniach błędów były wyrażone w mierze łukowej, że zatem poprawki ich wypadły także w mierze łukowej. Ponieważ dogodnie wyrazić je w minutach i ponieważ π odpowiada 180° t. j. 10800', więc trzeba pomnożyć δb i δc przez $\frac{10800}{\pi} = 3437,7468$.

Dla krągłego rachunku można mnożyć przez 3438', poczem otrzymamy δb w minutach, zaś δc w minutach na dobę, bo δc ma

wymiary prędkości kątowej, a za jednostkę czasu przyjęliśmy dobę. Tedy na dobę:

$$\delta a = -0,03, \quad \delta b = +30,3, \quad \delta c = +0,8,$$

zaś poprawione wartości „elementów“ orbity Titanii są:

$$a = 33,05, \quad b = 221^{\circ} 52,3, \quad c = 41^{\circ} 15,8.$$

3. Przypadek, gdy dane są wartości w punktach dzielących obwód koła na równe części.

Nie możemy tu rozważać różnych specjalnych, rzadko przytrafiających się zadań, chociażby tak interesujących jak oddzielenie niewymiernych, albo wykrycie utajonych peryodów. Zato zajmujemy się pewną specjalną metodą, mającą bardzo obszerne zastosowanie w praktyce, np. przy poprawianiu błędów podziałek na kołach narzędzi astronomicznych i t. d.

Jeżeli funkcyja jest peryodyczną a peryod jest znany, to dogodnie jest obserwować te wartości funkcyi, które odpowiadają wartościom argumentu dzielącym obwód koła na równe części, albowiem obliczenie współczynników $a_0, a_1, \dots, b_1, \dots$ wzoru interpolacyjnego (1) jest wtedy znacznie ułatwione. Wskutek tego obserwatorowie umyślnie rozkładają obserwacye w taki sposób, aby powyższy warunek był spełniony. Chociaż wzory do obliczenia współczynników $a_0, \dots, a_1, \dots, b_1, \dots$ wynikają także z metody najmniejszych kwadratów, jednakże wolimy wyprowadzić je łatwiejszym sposobem polegającym na dwóch elementarnych równościach ¹⁾.

Wiadomo, że

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} e^{kiA} = 1 + e^{kiA} + e^{2kiA} + \dots + e^{(n-1)kiA} = \frac{e^{niA} - 1}{e^{iA} - 1} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

bo wogóle

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1.$$

¹⁾ Gdybyśmy przyjęli za punkt wyjścia metodę najmniejszych kwadratów, to także musielibyśmy posługiwać się temi samemi równościami.

Załóżmy teraz, że $A = 2\pi \frac{h}{n}$, gdzie h jest liczbą całą tak samo jak k i n .

Wtedy

$$e^{n i A} = 1,$$

a wskutek tego

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} e^{k i A} = 0.$$

Ale

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} e^{k i A} = \sum_{k=0}^{k=n-1} (\cos kA + i \sin kA) \quad (i = \sqrt{-1},$$

przeto poprzednie równanie rozpada się na dwa równania, o które nam właśnie chodziło:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \cos kA = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin kA = 0. \quad (2)$$

Tylko wtedy, gdy $\frac{h}{n} = r$, gdzie r jest także liczbą całą,

$$A = 2\pi r, \quad e^{iA} = 1,$$

a

$$\frac{e^{n i A} - 1}{e^{i A} - 1} = \frac{0}{0},$$

zaś

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \cos kA = n, \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin kA = 0, \quad (3)$$

bo wszystkie cosinusy są równe jedności, a wszystkie sinusy są równe zeru.

Zauważmy też — co później nam będzie potrzebne —, że jeżeli

$$\sum_0^{n-1} \cos kA = 0, \quad \sum_0^{n-1} \sin kA = 0,$$

to także

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \cos kpA = 0, \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin kpA = 0 \quad (4)$$

nawet wtedy, gdy p nie jest liczbą całą.

Rzeczywiście, skoro $e^{niA} = 1$, to $e^{pniA} = 1$, chociażby p nie było liczbą całą, a zatem

$$\frac{e^{pniA} - 1}{e^{niA} - 1} = 0,$$

skąd zaraz wynikają równania (4). Podobnie jak poprzednio i w tym razie wyjątek będzie wtedy, gdy $pA = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi \dots$ i t. d. Wtedy suma cosinusów będzie n a sinusów 0, zupełnie tak jak w równaniach (3).

4. Zastosowanie równań (2) i (3) do interpolacji.

Założmy dla prostoty, że peryod funkeyi $f(x)$, którą mamy przedstawić przez szereg funkeyi kołowych (1), jest 2π ; ponieważ zaś mamy specjalnie rozważać przypadek, w którym obserwowane wartości funkeyi odpowiadają punktom dzielącym obwód koła na równe części, więc położmy.

$$A = \frac{2\pi}{n},$$

gdzie n jest to liczba cała. Oznaczmy wartości $f(x)$ odpowiadające argumentom: $x=0, x=A, x=2A \dots$ i t. d. przez $f_0, f_1, f_2 \dots$ i t. d. i położmy:

$$(5) \quad f(x) = \Sigma (a_p \cos px + b_p \sin px) \quad (p=0, 1, 2, 3 \dots),$$

gdzie a_p i b_p są to współczynniki, które mamy określić. Położmy w równaniu (5) kolejno: $x=0, x=A, x=2A \dots$ a otrzymamy szereg równań:

$$(6) \quad \begin{cases} f_0 = \Sigma a_p \\ f_1 = \Sigma (a_p \cos pA + b_p \sin pA) \\ f_2 = \Sigma (a_p \cos 2pA + b_p \sin 2pA) \\ \dots \\ f_{n-1} = \Sigma (a_p \cos (n-1)pA + b_p \sin (n-1)pA). \end{cases}$$

Więcej równań napisać nie możemy, bo równania odpowiadające założeniom: $x=nA, x=(n+1)A$ i t. d., dałyby znowu kolejno pierwsze, drugie i t. d. równania (6).

Pomnóżmy teraz równania (6) najpierw przez 1, 1, 1... i dodajmy je do siebie stronami odpowiedniemi, potem pomnóżmy

pierwsze równanie (6) przez 1, drugie przez $\cos A$, trzecie przez $\cos 2A \dots$ i t. d. i także dodajmy, potem pomnożmy pierwsze przez 1, drugie przez $\cos 2A$, trzecie przez $\cos 4A \dots$ i t. d. i także dodajmy, ... wogóle pomnożmy pierwsze przez 1, drugie przez $\cos qA$ trzecie przez $\cos 2qA \dots$ i t. d. (gdzie q jest jakakolwiek cała liczba), i dodajmy stronami odpowiedniami.

Rozważmy odrazu przypadek ogólny t. j. ten, w którym mnożymy kolejne równania (6) przez 1, $\cos qA$, $\cos 2qA \dots$ i t. d. Po dodaniu równań otrzymamy:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f_k \cos kqA = \Sigma a_p + \Sigma (a_p \cos pA + b_p \sin pA) \cos qA \\ + \Sigma (a_p \cos 2pA + b_p \sin 2pA) \cos 2qA \\ + \dots$$

co można też tak napisać:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f_k \cos kqA = \frac{1}{2} \Sigma a_p + \frac{1}{2} \Sigma a_p \\ + \frac{1}{2} \Sigma [a_p \cos (p+q)A + a_p \cos (p-q)A] + \\ + \frac{1}{2} \Sigma [b_p \sin (p+q)A + b_p \sin (p-q)A] \\ + \frac{1}{2} \Sigma [a_p \cos 2(p+q)A + a_p \cos 2(p-q)A] + \\ + \frac{1}{2} \Sigma [b_p \sin 2(p+q)A + b_p \sin 2(p-q)A] \\ + \dots$$

Wyberzmy teraz z prawej strony wszystkie wyrazy, w których figuruje współczynnik a_0 , potem wszystkie wyrazy, w których figuruje współczynnik a_1 i t. d. Weźmy np. wyrazy, w których figuruje współczynnik a_p

$$\frac{1}{2} a_p [1 + \cos (p+q)A + \cos 2(p+q)A + \cos 3(p+q)A + \dots \\ + \cos (n-1)(p+q)A] \\ + \frac{1}{2} a_p [1 + \cos (p-q)A + \cos 2(p-q)A + \cos 3(p-q)A + \dots \\ + \cos (n-1)(p-q)A]$$

i porównajmy sumy stojące w nawiasach z pierwszym wzorem (4).

*Widzimy, że te sumy znikają. Tak samo, jeżeli weźmiemy wyrazy, w których figuruje współczynnik b_p

$$\frac{1}{2} b_p [\sin (p+q)A + \sin 2(p+q)A + \sin 3(p+q)A + \dots \\ + \sin (n-1)(p+q)A] \\ + \frac{1}{2} b_p [\sin (p-q)A + \sin 2(p-q)A + \sin 3(p-q)A + \dots \\ + \sin (n-1)(p-q)A],$$

to zobaczymy, że na mocy drugiego równania (4) sumy w nawiasach znikają.

Jednakże prawa strona naszego równania nie jest cała równa zeru. Podczas gdy wszystkie sumy, przez które są pomnożone współczynniki b_p , znikają, pomiędzy sumami, przez które są pomnożone współczynniki a_p , nie znikną te, w których

$$(7) \quad (p + q)A = 2r\pi \quad \text{albo} \quad (p - q)A = 2r\pi,$$

gdzie r jest to liczba cała; wtedy bowiem stosują się nie równania (4) a równania (3) i odpowiednie sumy cosinusów są równe liczbie n .

Ponieważ wedle założenia $A = \frac{2\pi}{n}$, więc równości (7) są równoważne równościom

$$(7 \text{ bis}) \quad p + q = rn, \quad p - q = rn.$$

Kładąc kolejno $r = 0$, $r = \pm 1$, $r = \pm 2$ i t. d. otrzymamy z równości (7 bis)

$$\begin{aligned} p = -q, \quad p = \pm n - q, \quad p = \pm 2n - q, \quad p = \pm 3n - q, \dots \\ p = q, \quad p = \pm n + q, \quad p = \pm 2n + q, \quad p = \pm 3n + q, \dots \end{aligned}$$

Przeto równanie nasze przywodzi się do

$$(8) \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} f_k \cos kqA = \frac{n}{2} [\dots + a_{-n-q} + a_{-n+q} + a_{-q} + a_q + a_{n-q} + a_{n+q} + \dots].$$

Z drugiej strony mnożąc równania (6) przez 0 , $\sin qA$, $\sin 2qA$, ..., $\sin(n-1)qA$ i postępując tak samo jak poprzednio otrzymamy

$$(9) \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} f_k \sin kqA = \frac{n}{2} [\dots - b_{-n-q} + b_{-n+q} - b_{-q} + b_q - b_{n-q} + b_{n+q} - \dots].$$

Zdawałoby się, że kładąc kolejno $q = 0, 1, 2, 3 \dots$ *in inf.* możemy otrzymać nieograniczoną liczbę równań (8) i (9). W istocie jednak liczba ich jest ograniczona. Łatwo przekonać się o tem, wstawiając do równań (8) i (9) zamiast q najpierw $-n-q$, potem $-n+q$, $-q$, $+q$, $n-q$, $n+q$ i t. d. Z powodu, że $nA = 2\pi$, lewe strony równań (8) pozostają niezmienione, zaś lewe strony równań (9) tylko zmieniają znak; po prawej stronie tych równań jedne współczynniki wstępują na miejsce drugich, przyczem

w równaniach (8) także nawet znaku nie zmieniają a w równaniach (9) zmieniają znaki jednocześnie z lewymi stronami. Słowem wciąż otrzymujemy te same równania. Różnych od siebie równań otrzymamy tylko n , t. j. tyle, ile było równań (6). Zaś z n równań możemy określić nie więcej jak n współczynników.

Niektóre współczynniki możemy odrazu przyrównać do zera. Mianowicie szereg Fouriera (5) nie zawiera współczynników z ujemnymi wskaźnikami, możemy więc położyć

$$\begin{aligned} \dots &= a_{-n-q} = a_{-q} = 0 \\ \dots &= b_{-n-q} = b_{-q} = 0; \end{aligned}$$

tylko w razie, gdy $q=0$, to $a_{-q}=a_{-0}=a_0$, przeto nie może być przyrównane do zera. Spojrzawszy zaś na wzór (8) widzimy, że wskutek tego a_0 wystąpi z czynnikiem 2. Skorzystamy z tej uwagi nieco dalej, teraz zaś przejdziemy do współczynników z dodatnimi wskaźnikami. Załóżmy, że współczynniki $a_0, a_1, a_2 \dots$ tworzą zbieżny i szybko ubywający szereg, że taksamo współczynniki $b_1, b_2, b_3 \dots$ tworzą zbieżny i szybko ubywający szereg i pominiemy we wzorach (8) i (9) wszystkie współczynniki oprócz tych, które posiadają najniższe dodatnie wskaźniki. W ten sposób ze ścisłych równań (8) i (9) otrzymamy następujące przybliżone wzory, służące do obliczenia współczynników szeregu Fouriera:

$$\left. \begin{aligned} a_q &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f_k \cos kqA \\ b_q &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f_k \sin kqA. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

We wzorach tych wolno kłaść $q=1, 2, \dots$ i t. d., wreszcie co najwyżej $q=\frac{1}{2}(n-1)$, jeżeli n jest nieparzyste, zaś co najwyżej $q=\frac{1}{2}(n-2)$, jeżeli n jest parzyste.

Dla obliczenia a_0 służą — w myśl wyżej zrobionej uwagi — wzór

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f_k, \quad (11)$$

z którego widać, że a_0 jest średnią arytmetyczną wszystkich danych wielkości. Co do b_0 , to wiemy, że $b_0=0$, jak to zresztą wynika z drugiego wzoru (10).

Powiedzieliśmy przed chwilą, że gdy n jest nieparzyste ($n = 2m + 1$), to można położyć co najwyżej $q = \frac{1}{2}(n - 1) = m$. Oczywiście otrzymamy m współczynników: a_1, a_2, \dots, a_m z pierwszego wzoru (10), tyleż współczynników: b_1, b_2, \dots, b_m z drugiego wzoru (10) i jeden współczynnik a_0 ze wzoru (11), razem $2m + 1 = n$ współczynników, t. j. tyle, ile jest równań (6). Że tak być musi, to jest zupełnie jasne. Natomiast powiedzenie, że gdy n jest parzyste ($n = 2m$), to można co najwyżej położyć $q = \frac{1}{2}(n - 2) = (m - 1)$ wymaga objaśnienia. Objasnienie jest tembardziej potrzebne, że właśnie ten przypadek zawsze zachodzi w praktyce, albowiem dla ułatwienia rachunków zawsze dzielimy obwód koła na parzystą, nawet na podzielną przez 4 ilość równych odstępów. Zdawałoby się, że kładąc $q = 1, 2, \dots, m$ otrzymamy z równań (10) $2m$ współczynników, a więc doliczając jeszcze a_0 pochodzące ze wzoru (11) razem $2m + 1$ współczynników, t. j. o jeden więcej niż można otrzymać z $n = 2m$ równań (6). W istocie jednak otrzymamy tylko $2m$ współczynników. Aby przekonać się o tem, wróćmy na chwilę do (ściśłego) równania (9) i połączmy w niem $n = 2m, q = m$. Zważwszy, że $mA = \frac{1}{2}nA = \pi$, natychmiast skonstatujemy, że obie strony równania obracają się w zero. Zatem b_m z równania (9) określić się nie da. Kładziemy je równem zero, ale nie na podstawie równania (9), a dlatego, że następujące po b_m współczynniki przyrównujemy do zera.

Oprócz tego zachodzi tu jeszcze inna okoliczność. Oto kładąc $n = 2m, q = m$ w równaniu (8) spostrzegamy, że $a_{2m-q} = a_m$. Zatem pomijając inne współczynniki musimy pozostawić $a_{2m-q} = a_m$, a wskutek tego z równania (8) otrzymamy na a_m równo połowę tej wartości, którą otrzymalibyśmy z pierwszego równania (10). Mianowicie otrzymujemy

$$(12) \quad a_m = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{k=n-1} f_k \cos kmA = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{k=n-1} f_k \cos k\pi = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k f_k.$$

Dla obliczenia a_m należy posługiwać się wzorem (12) a nie (10).

Teraz widzimy, dlaczego w przypadku, gdy n jest parzyste we wzorach (10) należy kłaść $q = 1, 2, 3, \dots$ i co najwyżej $q = \frac{1}{2}(n - 2)$. Zresztą zły to znak, gdy trzeba obliczać a_m . Zazwyczaj obliczamy je tylko dlatego, aby ostatecznie przekonać się, że rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg (5) jest nieprzydatne. Wszak wzory (10) polegają na założeniu, że szeregi współczynników a_i i b_i są szybko

zbieżne, że wolno wobec a_q pominąć nawet a_{2m-q} , a wobec b_q nawet b_{2m-q} . Lecz gdy q jest już bliskie do m , to łącznie może się zdarzyć, że a_{2m-q} już nie będzie znikome w porównaniu z a_q , lub że b_{2m-q} nie będzie znikome w porównaniu z b_q . Połóżmy np. $n = 2m = 24$. Jasnym jest, że gdy szereg jest szybko zbieżny, to zawsze wolno pominąć a_{24} w porównaniu z a_3 , ale bardzo łatwo może się zdarzyć, że nie można będzie pominąć a_{13} w porównaniu z a_{11} . A zatem nawet wtedy, gdy współczynniki a_i i b_i tworzą zbieżne szeregi, wzory (10) są tem mniej dokładne, im q jest bliższe do m . Dlatego to interpolacja przez wzór (5) jest możliwą i udatną tylko wtedy, gdy $f(x)$ daje się przedstawić z dostateczną dokładnością przez ilość wyrazów¹⁾ dużo mniejszą aniżeli $n = 2m$.

Ale mógłby kto powiedzieć, że obliczając $n = 2m$ współczynników $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ osiągniemy większą dokładność, bo wtedy wzór (5) odtworzy nam dane wartości funkcji $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ absolutnie ściśle. Na to odpowiemy, że o absolutnie ściśle odtworzenie wielkości f_0, f_1, f_2, \dots — zawierających zresztą błędy obserwacyi — wcale nie chodzi, bo je bez tego posiadamy. Chodzi nam o wzór do obliczania wartości funkcji $f(x)$ pomiędzy danymi wartościami f_0, f_1, f_2, \dots i t. d., a właśnie wtedy, gdy z powodu małej zbieżności musimy obliczać coraz to dalsze współczynniki a_i i b_i tak, że q zbliża się do m , to owe pośrednie wartości są niepewne. Bywamy zmuszeni do obliczania coraz to dalszych współczynników zazwyczaj wtedy, gdy $f(x)$ nie daje się wyrazić z dostateczną dokładnością zapomocą mniejszej niż n ilości wyrazów. Można wtedy złemu zaradzić, dzieląc każdy dawny odstęp na dwa lub więcej równych między sobą odstępów i robiąc nowe obserwacye w nowych punktach podziału.

„*Mutatis mutandis*“ można to samo powiedzieć o przypadku, gdy n jest nieparzyste, ale przypadku tego — ze względu na niesłychanie rzadkie zastosowanie w praktyce — bliżej rozpatrywać nie warto. Kończymy praktyczną uwagą, że należy obliczać więcej współczynników niż potrzeba, aby przekonać się, czy który z pominiętych współczynników nie jest przypadkowo większy od zatrzy-

¹⁾ Liczymy tu każdy \cos i \sin w szeregu (5) oddzielnie, a więc powiadamy np., że szereg

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

składa się z trzech wyrazów.

manyeh, albo czy współczynniki dalsze, które, jak się zdawało, szybko ubywają, nie wzrastają znowu począwszy od pewnego wskaźnika.

5. Przykład.

Zapozyczamy następujący przykład u U. J. Leverriera. Dane są w równych odstępach co 22,5 promienie wodzące Merkurego w jednostkach astronomicznych [jednostka astr. to prawie dokładnie połowa wielkiej osi orbity ziemskiej]:

$$\begin{aligned} r_0 &= 0,3075108, & r_1 = r_{15} &= 0,3168512, & r_2 = r_{14} &= 0,3509976, \\ & & & & r_3 = r_{13} &= 0,3720028, \\ r_4 = r_{12} &= 0,4030226, & r_5 = r_{11} &= 0,4297924, & r_6 = r_{10} &= 0,4499996, \\ & & & & r_7 = r_9 &= 0,4624760, \\ r_8 &= 0,4666860; \end{aligned}$$

a trzeba wyrazić promień wodzący jako funkcję peryodyczną argumentu²⁾. Spostrzegamy, że funkcya jest parzysta, wskutek czego wszystkie współczynniki b_i będą równe zeru. Zresztą $n = 16$, $A = 22^\circ 30' 00''$. Najpierw obliczamy a_0 t. j. średnią arytmetyczną ze wszystkich szesnastu danych wartości i znajdujemy $a_0 = 0,3952801$. Następnie przystępujemy do obliczenia $a_1, a_2 \dots$. Na podstawie pierwszego wzoru (10), korzystając ze znanych związków: $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha$, $\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$ i z równości $r_{15} = r_1$, $r_{14} = r_2 \dots$ i t. d. możemy napisać:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{8} [r_0 - r_8 + 2(r_1 - r_7) \cos 22,5^\circ + 2(r_2 - r_6) \cos 45^\circ + \\ & \quad + 2(r_3 - r_5) \cos 67,5^\circ] \\ a_2 &= \frac{1}{8} [r_0 + r_8 - 2r_4 + 2(r_1 - r_3 - r_5 + r_7) \cos 45^\circ] \\ a_3 &= \frac{1}{8} [r_0 - r_8 + 2(r_1 - r_7) \cos 67,5^\circ - 2(r_2 - r_6) \cos 45^\circ - \\ & \quad - 2(r_3 - r_5) \cos 22,5^\circ] \\ a_4 &= \frac{1}{8} [r_0 + 2r_4 + r_8 - 2r_2 - 2r_6] \\ a_5 &= \frac{1}{8} [r_0 - r_8 - 2(r_1 - r_7) \cos 67,5^\circ - 2(r_2 - r_6) \cos 45^\circ + \\ & \quad + 2(r_3 - r_5) \cos 22,5^\circ] \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Annales de l'Observatoire de Paris, Tom I-szy str. 144 i 145.

²⁾ Choć Leverrier tego nie powiada, ale oczywiście argumentem jest długość heliocentryczna Merkurego.

Podstawiając wartości liczbowe znajdziemy

$$a_0 = 0,395\ 2801$$

$$a_1 = -0,078\ 3296$$

$$a_2 = -0,007\ 9529$$

$$a_3 = -0,001\ 2123$$

$$a_4 = -0,000\ 2190$$

$$a_5 = -0,000\ 0435$$

Leverrier wyliczył jeszcze trzy współczynniki, t. j. wyliczył tyle współczynników, ile się dało, mianowicie:

$$a_6 = -0,000\ 0093$$

$$a_7 = -0,000\ 0022$$

$$a_8 = -0,000\ 0005.$$

Naturalnie są one trochę niepewne, ale ponieważ ich absolutne wartości są bardzo małe, więc niepewność niema dostrzegalnego wpływu na rezultaty t. j. na obliczenie promienia wodzącego.

Literatura.

Oprócz dzieł cytowanych w końcu poprzednich rozdziałów wymienimy następujące jako specjalnie odnoszące się do interpolacji przez szereg Fouriera.

U. J. Leverrier: *Recherches astronomiques*. *Annales de l'Observatoire impérial de Paris* tom I (1855). Wstęp i 3-ci dodatek. (Metoda odstępów niewymiernych z 2π).

J. F. Encke: *Entwicklung in eine periodische Reihe*. *Berliner Astronomisches Jahrbuch* f. 1860.

H. Burkhardt: *Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen*. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*. Tom X. Lipsk 1908.

M. P. Rudzki: *Fizyka ziemi*. Kraków 1909, rozdz. X, § 7.

— — — *Physik der Erde*, Lipsk 1911, rozdz. X, § 7. (Oddzielenie peryodów niewymiernych).

H. Bruns: *Untersuchung einer Wanschaff'schen Teilung*, *Astr. Nachr.* tom 130, S. 17 i t. d.

ROZDZIAŁ V.

Niektóre rozwinięcia w szeregi.

1. Rozwinięcia w szeregi funkcyj trygonometrycznych.

W astronomii często zdarza się następujące zadanie. Łuk y jest związany z łukiem x równaniem:

$$\operatorname{tang} y = \frac{m \sin x}{1 - m \cos x};$$

trzeba stąd wyprowadzić wzór na samo y . Aby go otrzymać, prze-
różniczkujemy dane równanie względem parametru m :

$$\frac{1}{\cos^2 y} \frac{dy}{dm} = \frac{(1 - m \cos x) \sin x + m \sin x \cos x}{(1 - m \cos x)^2},$$

skąd

$$\frac{dy}{dm} = \cos^2 y \frac{\sin x}{(1 - m \cos x)^2}.$$

Ale — podniósłszy do kwadratu dane równanie — można
napisać:

$$\frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{m^2 \sin^2 x}{(1 - m \cos x)^2},$$

skąd

$$\cos^2 y = \frac{(1 - m \cos x)^2}{1 - 2m \cos x + m^2}.$$

Rugując za pomocą ostatniego wzoru $\cos^2 y$ z wyrażenia na
 $\frac{dy}{dm}$ otrzymamy

$$\frac{dy}{dm} = \frac{\sin x}{1 - 2m \cos x + m^2}.$$

Zamiast funkcji trygonometrycznych wprowadzamy wykładnicze z urojonymi wykładnikami:

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad (i = \sqrt{-1}),$$

przeto

$$\frac{dy}{dm} = \frac{1}{2i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{(1 - me^{ix})(1 - me^{-ix})}.$$

Korzystając z tożsamości

$$e^{ix} - e^{-ix} = e^{ix}(1 - me^{-ix}) - e^{-ix}(1 - me^{ix})$$

możemy napisać

$$\frac{dy}{dm} = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{ix}}{1 - me^{ix}} - \frac{e^{-ix}}{1 - me^{-ix}} \right].$$

Ponieważ m jest zazwyczaj mniejsze od jedności, więc można wykonać dzielenie:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dm} &= \frac{e^{ix}}{2i} \left[1 + me^{ix} + m^2 e^{2ix} + m^3 e^{3ix} + \dots \right] \\ &\quad - \frac{e^{-ix}}{2i} \left[1 + me^{-ix} + m^2 e^{-2ix} + m^3 e^{-3ix} + \dots \right] \end{aligned}$$

Teraz zaś odwrotnie zastępując funkcyje wykładnicze przez trygonometryczne znajdziemy

$$\frac{dy}{dm} = \sin x + m \sin 2x + m^2 \sin 3x + \dots$$

Stąd znowu całkując otrzymamy szukany wzór na y

$$y = \pm n\pi + \frac{m}{1} \sin x + \frac{m^2}{2} \sin 2x + \frac{m^3}{3} \sin 3x + \dots \quad (1)$$

$(n = 0, 1, 2, 3 \dots)$.

Jeżeli y znika razem z x , to należy położyć $n = 0$.

Załóżmy, że dane jest równanie

$$\operatorname{tang} y = m \operatorname{tang} x.$$

Dla prostoty założymy, że y i x stają się jednocześnie zerem.

Utwórzmy

$$\operatorname{tang}(y - x) = \frac{\operatorname{tang} y - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} y \operatorname{tang} x} = \frac{(m - 1) \operatorname{tang} x}{1 + m \operatorname{tang}^2 x}.$$

Stąd przez łatwe przekształcenia otrzymamy:

$$\operatorname{tang}(y - x) = \frac{(m - 1) \sin 2x}{2 + 2(m - 1) \sin^2 x}$$

Korzystając z tożsamości

$$(m + 1) - (m - 1) = 2$$

i ze znanego związku

$$1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$$

możemy to zaraz sprowadzić do kształtu:

$$\operatorname{tang}(y - x) = \frac{\frac{m - 1}{m + 1} \sin 2x}{1 - \frac{m - 1}{m + 1} \cos 2x}$$

zupełnie analogicznego do równania

$$\operatorname{tang} y = \frac{m \sin x}{1 - m \cos x},$$

z którego przed chwilą wyprowadziliśmy wzór (1). Stosując tedy wzór (1) natychmiast znajdziemy

$$(2) \quad y = x + \frac{m - 1}{m + 1} \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{m - 1}{m + 1} \right)^2 \sin 4x + \\ + \frac{1}{3} \left(\frac{m - 1}{m + 1} \right)^3 \sin 6x + \dots$$

Rozwiniemy jeszcze w podobny sposób:

$$y = \log \sqrt{1 - 2m \cos x + m^2}.$$

Znowu tworzymy pochodną względem m

$$\frac{dy}{dm} = \frac{m - \cos x}{1 - 2m \cos x + m^2},$$

znowu zastępujemy funkcje kołowe przez wykładnicze i korzystamy z tożsamości:

$$2m - e^{ix} - e^{-ix} = e^{ix} (me^{-ix} - 1) + e^{-ix} (me^{ix} - 1),$$

poczem dochodzimy do przekształconego wzoru

$$\frac{dy}{dm} = -\frac{1}{2} \frac{e^{ix}}{1 - me^{ix}} - \frac{1}{2} \frac{e^{-ix}}{1 - me^{-ix}}.$$

Znowu wykonujemy dzielenie, znowu łączymy po dwa wyrazy i napowrót wprowadzamy funkcyę kołowe, poczem otrzymamy

$$\frac{dy}{dm} = -\cos x - m \cos 2x - m^2 \cos 3x - \dots$$

Stąd zaś całkując otrzymamy szukany wzór

$$y = -m \cos x - \frac{m^2}{2} \cos 2x - \frac{m^3}{3} \cos 3x - \dots \quad (3)$$

Rozwiniemy wreszcie w szereg funkcyę

$$y = \frac{1}{1 - 2m \cos x + m^2}.$$

Wzór powyższy można napisać w kształcie

$$y = \frac{1}{(1 - me^{ix})(1 - me^{-ix})} = \frac{1}{1 - m^2} \left[\frac{1}{1 - me^{ix}} + \frac{me^{-ix}}{1 - me^{-ix}} \right].$$

Wykonując dzielenie i wogóle postępując tak jak przy wyprowadzeniu wzorów (1) i (3) zaraz otrzymamy

$$y = \frac{1}{1 - m^2} [1 + 2m \cos x + 2m^2 \cos 2x + 2m^3 \cos 3x + \dots] \quad (4)$$

Podnosząc przedostatni (przechodowy) wzór do potęgi k i następnie dopiero rozwijając otrzymalibyśmy analogiczny wzór na y^k .

Jasną jest rzeczą, że, jak to zresztą wynika ze sposobu wyprowadzenia, wzory (1), (3) i (4) są zbieżne, jeżeli m jest zawarte pomiędzy granicami -1 i $+1$. Co zaś do wzoru (2), to widzimy, że m może być dowolnie wielkie, ale musi być dodatnie. Rzecz prosta, że „*ceteris paribus*“ wzory (1), (3) i (4) są tem szybciej zbieżne, im m jest bliższe do zera, a wzór (2) jest tem szybciej zbieżny, im m jest bliższe do $+1$.

2. Rozwinięcie w szereg wielomianów Legendre'a.

Spotykamy to rozwinięcie w teorii przyciągania. Niech będzie wyrażenie

$$y = (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (\alpha < 1, x < 1).$$

Napiszmy je w kształcie

$$y = [1 - \alpha(2x - \alpha)]^{-\frac{1}{2}}$$

i założmy, że absolutna wartość $\alpha(2x - \alpha)$ jest mniejsza od jedności. Wtedy stosując wzór dwumianowy Newtona możemy napisać:

$$(5) \quad y = 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha(2x - \alpha)}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{\alpha^2(2x - \alpha)^2}{1 \cdot 2} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \frac{\alpha^3(2x - \alpha)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{(2m - 1)}{2} \frac{\alpha^m(2x - \alpha)^m}{1 \cdot 2 \dots m} + \dots$$

Wykonajmy potęgowanie i ugrupujmy wyrazy szeregu (5) wedle potęg parametru α . Zaraz widzimy, że jednakowe potęgi znajdują się w różnych wyrazach tego szeregu. Potęga zerowa znajduje się tylko w pierwszym wyrazie, pierwsza tylko w drugim, ale już druga figuruje tak w drugim jak w trzecim, a wyższe potęgi znajdują się we wielu wyrazach. Możemy jednak wybrać wszystkie wyrazy zawierające np. α^n w następujący sposób. Ponieważ

$$\alpha^n(2x - \alpha)^m = \alpha^n \left[(2x)^m - \frac{m}{1} (2x)^{m-1} \alpha + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (2x)^{m-2} \alpha^2 - \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^k m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} (2x)^{m-k} \alpha^k + \dots \right]$$

więc α^n figuruje w $m+1$ -szym wyrazie szeregu (5), jeżeli $m \leq n \leq 2m$. Założmy, że ten warunek jest spełniony i że np. $m+k=n$. Wtedy z $m+1$ -szego wyrazu szeregu (5) otrzymamy

$$(6) \quad \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2^m} \frac{\alpha^n \cdot (-1)^{n-m} m(m-1) \dots (2m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)} \cdot (2x)^{2m-n}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez

$$(2m-n)(2m-n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

i skracając, co się da, przeprowadzamy to wyrażenie do kształtu

$$\alpha^n \cdot \frac{1.3 \dots (2m-1)}{1.2.3.4 \dots (n-m)} \cdot \frac{(-1)^{n-m}}{2^{n-m}} \cdot \frac{x^{2m-n}}{1.2.3 \dots (2m-n)}. \quad (6 \text{ bis})$$

Ale

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{2m}) = 2m \cdot (2m-1) (2m-2) \dots (2m-n+1) x^{2m-n},$$

przeto możemy napisać wyrażenie (6 bis) w kształcie

$$\alpha^n \cdot \frac{1.3 \dots (2m-1)}{1.2 \dots 2m} \cdot \frac{(-1)^{n-m}}{2^{n-m}} \cdot \frac{1}{1.2 \dots (n-m)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^{2m}).$$

Ale

$$\frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{1.2.3 \dots 2m} = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{1.2 \dots m},$$

więc pozostaje

$$\frac{\alpha^n}{2^n} \cdot (-1)^{n-m} \cdot \frac{1}{1.2 \dots (n-m)} \cdot \frac{1}{1.2.3 \dots m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^{2m}).$$

Mnożymy wreszcie licznik i mianownik przez $1.2.3 \dots n$ i otrzymujemy

$$\frac{\alpha^n}{2^n} \cdot \frac{1}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{(-1)^{n-m} 1.2.3 \dots n}{1.2.3 \dots m \cdot 1.2.3 \dots (n-m)} \cdot x^{2m} \right]. \quad (6 \text{ ter})$$

Wyrażenie (6 ter) pochodzi z $m+1$ -szego wyrazu szeregu (5), jeżeli $m \leq n \leq 2m$. Aby zebrać wszystkie wyrazy kształtu (6 ter) zawierające α^n , trzeba oczywiście sumować od $m = \frac{n}{2}$, ewentualnie od $m = \frac{n+1}{2}$, jeżeli n jest nieparzyste, aż do $m = n$. Ponieważ jednak

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{2m}) = 0,$$

skoro $m < \frac{n}{2}$, więc można zacząć sumowanie od $m=1$, bo w ten sposób dodajemy do sumy same zera. Otrzymujemy tedy ostatecznie grupę wyrazów zawierających α^n w kształcie

$$\frac{\alpha^n}{2^n} \cdot \frac{1}{1.2 \dots n} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[\sum_{m=1}^{m=n} (-1)^{n-m} \frac{1.2.3 \dots n \cdot x^{2m}}{1.2.3 \dots m \cdot 1.2.3 \dots (n-m)} \right]. \quad (7)$$

Nie trudno przekonać się, że suma w nawiasie to nic innego jak n -ta potęga dwumianu: $x^2 - 1$, zatem można napisać wyrażenie (7) w kształcie:

$$(7 \text{ bis}) \quad \frac{\alpha^n}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Stąd zaś wynika następujące rozwinięcie w szereg

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \sum \alpha^n \cdot X_n, \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots \text{in inf.})$$

w którym

$$(9) \quad X_n = \frac{\alpha^n}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Funkcje X_n noszą nazwę „wielomianów Legendre'a”, zaraz bowiem widać, że funkcja X_n jest wielomianem stopnia n . Dla przykładu wypiszemy tu kilka wielomianów Legendre'a najniższych rzędów:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 = 1 \\ X_1 = x \\ X_2 = \frac{3}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \\ X_3 = \frac{5}{2} \left(x^3 - \frac{3}{5} x \right) \\ X_4 = \frac{35}{8} \left(x^4 - \frac{6}{7} x^2 + \frac{3}{35} \right) \\ \dots \end{array} \right.$$

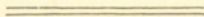
Jeżeli weźmiemy współrzędne biegunowe i założymy, że $x = \cos \gamma$, gdzie γ jest to kąt między dwoma promieniami, z których jeden ma kierunek θ, ψ , a drugi kierunek θ', ψ' , t. j. jeżeli położymy

$$x = \cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\psi - \psi'),$$

to po podstawieniu wielomiany Legendre'a (10) przejdą na tak zwane wielomiany Laplace'a, które znowu są specjalnym przypadkiem ogólniejszych funkcji kulistych Laplace'a. W razie gdy $x = \cos \gamma$, to wartość wielomianu Legendre'a względnie L a-

plac'a jest zawsze zawarta pomiędzy granicami -1 a $+1$, jeżeli zaś wielomian jest rzędu parzystego, to nawet tylko między 0 a $+1$.

Zauważmy, że wtedy także warunki, aby szereg (8) był zbieżny, są spełnione, o ile chodzi o x , bo do zbieżności szeregu (8) potrzeba, aby tak a jak x były zawarte pomiędzy granicami -1 a $+1$.



ROZDZIAŁ VI.

Sfera niebieska i sferyczne współrzędne.

1. Sfera niebieska, horyzont, ekliptyka, równik, punkty równonocne, kolury.

W astronomii posługujemy się głównie — choć nie wyłącznie — współrzędnymi biegunowymi. Jeżeli środek współrzędnych znajduje się w miejscu obserwacji, to współrzędne nazywamy „widomymi“, jeżeli w środku ziemi, to geocentrycznymi“, jeżeli w środku słońca, to „heliocentrycznymi“.

Wyobrażamy sobie kulę zatoczoną naokoło środka współrzędnych nieskończenie wielkim promieniem i nazywamy ją „sferą niebieską“. Moglibyśmy także przyjąć, że promień sfery niebieskiej jest skończony; ale o wiele dogodniej uważać go za nieskończenie wielki, bo możemy wtedy w porównaniu z promieniem pomijać skończone odległości np. odległość między środkiem ziemi a miejscem obserwacji, możemy uważać płaszczyzny i proste równoległe za identyczne i t. d.

W dalszym ciągu często będziemy mówić o trzech płaszczyznach: horyzontu, ekliptyki i równika. Płaszczyzna horyzontu jest to płaszczyzna prostopadła do kierunku siły ciężkości w miejscu obserwacji¹⁾, a wielkie koło, w którym przecina się ze sferą niebieską, nazywamy „horyzontem“. Płaszczyzna horyzontu jest styczna do powierzchni spokojnej cieczy w miejscu obserwacji. Stąd pochodzi, że używamy powierzchni spokojnej rtęci do wyznaczenia płaszczyzny horyzontu. Prostą mającą ten sam kierunek, co siła ciężkości w miejscu obserwacji, nazywamy prostą pionową, albo krócej „pionem“. Można też powiedzieć, że pion jest to styczna do

¹⁾ Niekiedy rozróżniają tak zwaną „płaszczyznę geocentrycznego horyzontu“, t. j. płaszczyznę równoległą do horyzontu, przechodzącą przez środek ziemi. Jest to pojęcie mało przydatne. Wspominamy o niem dla informacji.

linii siły ciężkości w miejscu obserwacji. Z określenia wynika, że pion i płaszczyzna horyzontu są do siebie wzajemnie prostopadłe, oraz że każde miejsce na powierzchni ziemi ma inny pion i inną płaszczyznę horyzontu.

Płaszczyznę „ekliptyki“ nazywamy tę, przechodzącą przez środek słońca płaszczyznę, w której leży droga ziemi naokoło słońca, ewentualnie płaszczyznę do niej równoległą. Ściśle biorąc droga ziemi naokoło słońca nie jest krzywą dokładnie płaską; ale pomijając drobne zboczenia w sposób, o którym będzie dalej mowa, otrzymujemy pewną krzywą płaską zwaną średnią drogą ziemi. Płaszczyznę tej średniej drogi ziemi nazywamy płaszczyzną ekliptyki. Ekliptyką zaś nazywamy to wielkie koło, wzdłuż którego płaszczyzna średniej drogi ziemi przecina się ze sferą niebieską. Oczywiście ekliptyka jest jedna dla wszystkich miejsc obserwacji.

Płaszczyznę „równika“ nazywamy płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu ziemi. Wielkie koło, w którym płaszczyzna równika przecina się ze sferą niebieską, nazywa się „niebieskim równikiem“. Równik jest oczywiście także jeden dla wszystkich miejsc obserwacji.

Ponieważ płaszczyzny równika i ekliptyki są do siebie nachylone [pod kątem około 23°], więc przecinają się wzdłuż prostej zwanej „prostą równonocną“. Punkty, w których prosta równonocna przebija sferę niebieską, t. j. punkty, w których „równik“ i „ekliptyka“ przecinają się ze sobą, nazywają się „punktami równonocnymi“. W swym pozornym ruchu naokoło ziemi słońce przechodzi przez jeden z tych punktów na wiosnę podnosząc się (względem północnej półkuli ziemi) z pod równika ponad równik. Punkt ten nazywamy punktem „wiosennego porównania dnia z nocą“. Przez drugi, wprost tamtemu przeciwległy punkt „jesiennego porównania dnia z nocą“ słońce przechodzi w jesieni schodząc (względem północnej półkuli ziemi) z nad równika pod równik. Będziemy tymczasem uważać punkty równonocne za nieruchome: o ich wolnym cofaniu się na ekliptyce będzie mowa dalej.

Przeprowadźmy przez oś obrotu ziemi i przez prostą równonocną płaszczyznę. Wielkie koło, w którym ta płaszczyzna przecina się ze sferą niebieską, nazywamy „kolurem równonocnym“. Wielkie koło, którego płaszczyzna także przechodzi przez oś obrotu ziemi, ale jest do płaszczyzny koluru równonocnego prostopadła, nazywamy „kolurem przesilenia“ (solstitialnym), bo w punktach, w których kolur przesilenia przecina ekliptykę, następują przesi-

lenia letnie i zimowe. Jasną jest rzeczą, że prosta prostopadła w środku ziemi do ekliptyki leży w płaszczyźnie koluru przesilenia a punkty, w których ta prosta przebija sferę niebieską, czyli tak zwane „bieguny ekliptyki“ leżą na samym kolurze przesilenia.

2. I-szy system współrzędnych.

Za płaszczyznę fundamentalną przyjmujemy płaszczyznę horyzontu w miejscu obserwacyi, za oś biegunową prostą pionową w miejscu obserwacyi. Z dwóch punktów, w których prosta pionowa przebija sferę niebieską, ten, który znajduje się nad głową, nazywamy „zenitem“, a ten, który znajduje się pod nogami, „nadir-em“. Przez oś biegunową (przez pion) przeprowadzamy „płaszczyzny pionowe (wertykały“). Wielkie koła, wzdłuż których płaszczyzny pionowe przecinają się ze sferą niebieską, nazywamy „kołami pionowymi“. Małe koła równoległe do horyzontu nazywamy „kołami wysokości“ albo „almukantarami“. Pomiedzy płaszczyznami pionowymi wyróżniamy tę, która przechodzi przez oś obrotu ziemi i nazywamy ją „płaszczyzną południka“ a odpowiednie wielkie koło na sferze niebieskiej nazywamy „niebieskim południkiem“. Ślad płaszczyzny południka na płaszczyźnie horyzontu nazywamy „linią południkową“. Punkty, w których linia południkowa przebija sferę niebieską, nazywamy: jeden „południowym“, drugi „północnym punktem horyzontu“. Płaszczyzna pionowa prostopadła do płaszczyzny południka nazywa się płaszczyzną „pierwszego koła pionowego“ (pierwszy wertykał). Ślad jej na płaszczyźnie horyzontu to linia „wschodnio-zachodnia“. Punkty, w których ten ślad przebija sferę niebieską, to punkty „wschodni“ i „zachodni“ horyzontu. Położenie punktu na sferze niebieskiej oznaczamy za pomocą dwóch kątów. Jeden kąt to odległość kątowa od horyzontu, którą nazywamy „wysokością“. Zamiast wysokości można użyć też odległość kątową od zenitu, która jest dopełnieniem wysokości do 90° . Drugą współrzędną jest kąt pomiędzy płaszczyzną południka a płaszczyzną tego koła pionowego, które przechodzi przez dany punkt. Kąt ten nazywamy „azymutem“. Najczęściej liczą azymuty od lewej strony ku prawej zaczynając od południa. Zatem na południu azymut wynosi 0° , na zachodzie 90° , na północy 180° , na wschodzie 270° . Innemi słowy liczymy azymuty w kierunku pozornego ruchu słońca od południa

przez zachód, północ, wschód, napowrót ku południu. Marynarze często liczą od 0° do 180° w obie strony t. j. od południa przez zachód ku północy i od południa na wschód ku północy. Geodeci często liczą azymut w tym samym kierunku co astronomowie, ale poczynając od północy przez wschód, południe, zachód, napowrót ku północy. Azymut liczony od wschodu lub zachodu nazywają „amplitudą“. Jak widzimy, pierwszy system współrzędnych jest sztywnie związany ze ziemią.

3. II-gi system.

Za oś biegunową przyjmujemy oś obrotu ziemi¹⁾, lub inną prostą do niej równoległą a za płaszczyznę fundamentalną płaszczyznę równika. Wyobrażamy sobie płaszczyzny przechodzące przez oś biegunową, a więc prostopadłe do płaszczyzny równika. Wielkie koła, wzdłuż których te płaszczyzny przecinają się ze sferą niebieską, nazywamy „kołami godzinowymi“. Pomiedzy temi kołami jest jedno, którego płaszczyzna przechodzi przez miejsce obserwacji i jest identyczna z płaszczyzną południka. Małe koła równoległe do równika noszą nazwę „równoleżników deklinacji“. Punkty, w których oś biegunowa przebija sferę niebieską, nazywamy „biegunami niebieskimi“. Północny biegun znajduje się na tej samej stronie równika co północny biegun ziemi, południowy na tej samej co południowy biegun ziemi. Pozyceę punktu na sferze niebieskiej wyznaczamy za pomocą „deklinacji“ i „kąta „godzinowego“. Deklinacja jest to kątowa odległość punktu od równika. Liczymy ją od 0° do 90° na północ (deklinacja północna, dodatnia) i od 0° do -90° na południe (deklinacja południowa, odjemna) od równika. Niekiedy zamiast deklinacji wprowadzamy odległość kątową od północnego bieguna, która oczywiście dopełnia się z deklinacją do 90° . Druga współrzędna: kąt godzinowy jest to kąt pomiędzy płaszczyzną południka a płaszczyzną tego koła godzinowego, które przechodzi przez dany punkt. Kąty godzinowe liczymy od południa na zachód²⁾ i dalej w porządku $S-W-N-E-S$ albo w stopniach, albo w godzinach (godzina = 15°). System ten, jako sztywnie ze ziemią związany, uczestniczy w codziennym jej obrocie. Wskutek tego

¹⁾ Często nazywają tę oś „osią świata“.

²⁾ Zatem za pozornym ruchem słońca i gwiazd oraz za wskazówkami zegarka.

kąty godzinowe gwiazd stałych nieustannie wzrastają i powiększają się o 360° w ciągu doby gwiazdowej. Natomiast deklinacye gwiazd stałych są — o ile nie uwzględniamy pewnych powolnych i drobnych zmian — stałe.

4. III-ci system, współrzędne równikowe.

Widzieliśmy, że II-gi system współrzędnych kręci się wraz ze ziemią. W III-cim systemie oś biegunowa i płaszczyzna fundamentalna są te same co w II-gim, a więc osią biegunową jest oś świata a płaszczyzną fundamentalną płaszczyzna równika, ale system ten nie uczestniczy w ruchu obrotowym ziemi. Jędną współrzędną, deklinacyę ma wspólną z II-gim systemem, ale druga współrzędną, acz podobną do kąta godzinowego, jest wszakże od niego różna, bo dla gwiazd stałych stała. Jest nią kąt pomiędzy płaszczyzną przechodzącą przez oś świata oraz przez punkt wiosennego porównania dnia z nocą a płaszczyzną przechodzącą przez oś świata i przez daną gwiazdę. Kąt ten nazywamy „rektascensją“ [wzniesieniem prostem] a liczymy go w kątach lub godzinach przeciw wskazówkom zegarka a za kierunkiem obrotu ziemi, t. j. w kierunku wprost przeciwnym jak kąt godzinowy.

5. IV-ty system, współrzędne ekliptyczne.

Płaszczyzną fundamentalną jest płaszczyzna ekliptyki, a prosta do niej prostopadła jest osią biegunową. Punkty, w których oś biegunowa przebija sferę niebieską, nazywamy „biegunami“ ekliptyki. Jako jedna współrzędna służy kątowa odległość od ekliptyki, zwana „szerokością niebieską“ i liczona w podobny sposób jak deklinacya. Jako drugą współrzędną, zwaną „niebieską długością“, bierzemy kąt pomiędzy płaszczyzną przechodzącą przez prostą prostopadłą do ekliptyki i przez punkt wiosennego porównania dnia z nocą a płaszczyzną przechodzącą przez tę samą prostą i dany punkt. Taksamo jak rektascensję liczymy długość od zachodu przez południe na wschód, t. j. przeciw wskazówkom zegarka, a w kierunku rzeczywistego obrotu ziemi.

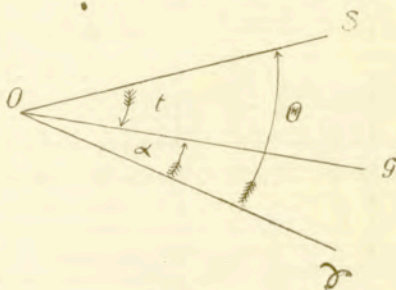
Tak w III-cim jak w IV-tym systemie współrzędne gwiazd stałych są, o ile nie uwzględniamy pewnych małych i powolnych zmian, stałe.

U w a g a. Rektascensye, kąty godzinowe, długości często liczymy w godzinach, minutach i sekundach. Trzeba pamiętać, że

$$\begin{aligned} 1^h &= 15^\circ, & 1^m &= 15', & 1^s &= 15'' \\ 1^\circ &= 4^m & 1' &= 4', & 1'' &= \frac{1}{18}^s. \end{aligned}$$

6. Przekształcenie z II-go systemu współrzędnych w III-ci i odwrotnie.

Przekształcenie to jest bardzo łatwe, bo jedna ze współrzędnych: deklinacja δ jest wspólna obu systemom a pomiędzy pozostałymi dwoma związek jest liniowy. Tak kąty godzinowe t , jak rektascensye α liczymy wzdłuż równika; tylko pierwsze liczymy od południka na zachód (w kierunku pozornego ruchu gwiazd), a drugie od wiosennego porównania dnia z nocą na wschód (w kierunku obrotu ziemi). Niechaj płaszczyzna papieru będzie płaszczyzną równika, niechaj OS będzie linią południkową, przyczem S znajduje się na południowej stronie nieba. Niechaj OG będzie śladem płaszczyzny koła deklinacji gwiazdy na płaszczyźnie równika, a $O\gamma$ tą stroną prostej równonocnej, która jest skierowana ku punktowi wiosennego porównania dnia z nocą γ . Wtedy



Ryc. 6.

- ∠ $SOG = t =$ kątowi godzinowemu danej gwiazdy,
- ∠ $GO\gamma = \alpha =$ rektascensyi danej gwiazdy,
- ∠ $SO\gamma = \theta =$ rektascensyi południka.

Z rysunku (Ryc. 6) zaraz widać, że

$$t = \theta - \alpha. \quad (1)$$

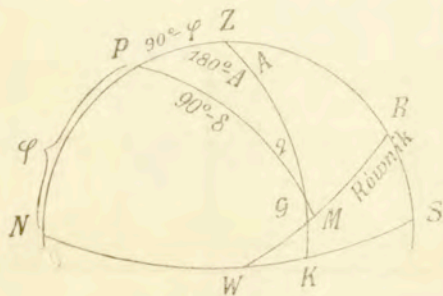
Nazwaliśmy tu kąt θ rektascensyą południka, bo liczyliśmy go od γ do S , ale gdybyśmy go liczyli w przeciwnym kierunku: od S ku γ , to wypadłoby go nazwać kątem godzinowym wiosennego porównania dnia z nocą. Widzimy stąd, że rektascensya południka i kąt godzinowy wiosennego porównania dnia z nocą są sobie równe, tylko liczą się w innym kierunku. Oprócz tego kąt θ

ma jeszcze trzecią nazwę, mianowicie nazywamy go „czasem gwiazdowym“.

Przekształcenie z I-go systemu w III-ci i odwrotnie — robimy przez pośrednictwo II-go systemu, taksamo przekształcenie z II-go w IV-ty przez pośrednictwo III-go, wreszcie przekształcenie z I-go w IV-ty przez pośrednictwo II-go i III-go. Widzimy stąd, że prócz przed chwilą rozwiązanego zadania musimy rozwiązać jeszcze dwa, mianowicie zadanie o przekształceniu z I-go systemu w II-gi i zadanie o przekształceniu z III-go systemu w IV-ty.

7. Przekształcenie z I-go systemu w II-gi.

Dane są: wysokość gwiazdy h , jej azymut A i szerokość miejsca obserwacji φ ; należy znaleźć deklinację gwiazdy δ i jej kąt godzinowy t .



(Ryc. 7).

Za załączonym rysunku (Ryc. 7) G wyobraża rzut gwiazdy na sferę niebieską, Z zenit, P biegun północny osi świata, N , W i S punkty: północny, zachodni i południowy horyzontu; tedy NWS przedstawia horyzont, WMR równik, NZS koło południkowe, PGM koło godzinowe

gwiazdy, ZGK jej koła pionowe. Miejsce obserwacji naturalnie znajduje się w środku kuli, a ponieważ promień jej jest nieskończenie wielki, więc uważamy je za identyczne ze środkiem ziemi. Łuk NP t. j. wysokość bieguna nad horyzontem nazywa się geograficzną szerokością miejsca obserwacji, którą tu oznaczyliśmy przez φ . Łuk GM jest to wedle definicji deklinacja gwiazdy δ , a łuk GK jej wysokość nad horyzontem. Kąt przy Z między południkiem a kołem pionowym gwiazdy to wedle definicji jej azymut A , a kąt przy P pomiędzy południkiem a kołem godzinowym gwiazdy to wedle definicji kąt godzinowy t . Kąt q przy G nazywa się „kątem parallaktycznym“. Rozważmy trójkąt sferyczny ZPG , którego wierzchołki znajdują się: Z w zenicie, P w biegunie osi świata a G w gwieździe. W trójkącie tym boki są:

$$PZ = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$ZG = \frac{\pi}{2} - h = \zeta^1)$$

$$PG = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Dalej kąty są: $\pi - A$ przy Z , t przy P , q przy G . Zastosujmy do tego trójkąta wzory zasadnicze (4) z rozdziału I-go, kładąc:

$$\pi - A = A \quad \frac{\pi}{2} - \delta = a$$

$$t = B \quad \frac{\pi}{2} - h = b$$

$$q = C \quad \frac{\pi}{2} - \varphi = c;$$

a otrzymamy natychmiast

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \sin t &= \cos h \sin A \\ \cos \delta \cos t &= \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos A \\ \sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wzory te łatwo przekształcimy na wzory obliczalne przez logarytmy kładąc podobnie jak w § 5 rozdziału I-go

$$\sin h = m \cos M$$

$$\cos h \cos A = m \sin M,$$

skąd

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= m \sin (\varphi - M) \\ \cos \delta \sin t &= \cos h \sin A \\ \cos \delta \cos t &= m \cos (\varphi - M). \end{aligned} \right\} \quad (2 \text{ bis})$$

Postępując podobnie jak tam obliczamy najpierw pomocniczy kąt M ze wzoru

$$\text{tang } M = \text{cotg } h \cos A,$$

następnie omijając obliczenie czynnika m obliczamy t ze wzoru

$$\text{tang } t = \text{tg } A \frac{\sin M}{\cos (\varphi - M)},$$

¹⁾ ζ oznacza odległość kątową od zenitu.

wreszcie obliczamy δ ze wzoru

$$\text{tang } \delta = \cos t \text{ tg } (\varphi - M).$$

Ponieważ δ jest zawsze zawarte między $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$, więc $\cos \delta$ jest zawsze dodatni i za pomocą równań (2 bis)¹⁾ można zawsze rozstrzygnąć, w jakim kwadrancie leży kąt t i jaki znak ma δ , dodatni czy ujemny.

8. Przekształcenie z II-go systemu w I-szy.

Dane są δ , t i φ a należy określić h i A . Z tego samego trójkąta sferycznego, który rozpatrywaliśmy w poprzednim zadaniu, na podstawie tych samych wzorów zasadniczych (4) rozdziału I-go zaraz otrzymamy:

$$(3) \quad \begin{cases} \cos h \sin A = \cos \delta \sin t \\ \cos h \cos A = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t \\ \sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t \end{cases}$$

Aby przerobić te wzory na wzory obliczalne przez logarytmy, położymy:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= m \sin M \\ \cos \delta \cos t &= m \cos M, \end{aligned}$$

skąd

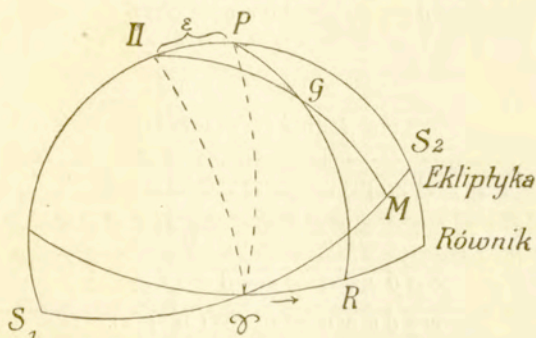
$$(3 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \sin h = m \cos (\varphi - M) \\ \cos h \sin A = \sin t \cos \delta \\ \cos h \cos A = m \sin (\varphi - M). \end{cases}$$

W dalszym ciągu postępujemy tak, jak w poprzednim zadaniu. Ponieważ h jest zawsze zawarte między $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, więc $\cos h$ jest zawsze dodatni i o kwadrancie, w którym leży kąt A (azymut), oraz o znaku kąta h rozstrzygamy na podstawie równań 3 bis, pamiętając, że wedle umowy (§ 5 rozdz. I) $m > 0$.

¹⁾ Przypominamy, że w § 5 rozdziału I-go umówiliśmy się uważać m za dodatnie.

9. Przekształcenie z III-go systemu w IV-ty.

Weźmy trójkąt sferyczny, którego wierzchołki znajdują się; jeden w północnym biegunie świata P , drugi w północnym biegunie ekliptyki Π a trzeci w gwiazdzie G , jak to widać ze załączonego rysunku. Prócz tego w tym rysunku $\sphericalangle R$ oznacza równik, S_1M ekliptykę, $S_1\Pi PS_2$ „kolor“ przesilenia, $P\mathcal{V}$ „kolor“ równonocy, które zresztą narysowaliśmy tylko dla przykładu, bo w zadaniu żadnej specjalnej roli nie odgrywają. Dalej $\sphericalangle M = \lambda =$ długości niebieskiej, $MG = \beta =$ szerokości niebieskiej gwiazdy, $\sphericalangle R = \alpha =$ jej rektascensyi a $RG = \delta =$ jej deklinacyi. Wreszcie łuk $\Pi P = \varepsilon =$ na-



(Ryc. 8).

chyleniu ekliptyki do równika, bo oczywiście łuk ten jest równy kątowi między osią ekliptyki i osią świata, a ten znowu jest równy kątowi $M\mathcal{V}R$ (przy \mathcal{V}) pomiędzy ekliptyką a równikiem. Boki naszego trójkąta są: $\Pi P = \varepsilon$, $\Pi G = 90^\circ - \beta$, $PG = 90^\circ - \delta$, zaś kąty: kąt przy $P = 90^\circ + \alpha$, przy $\Pi = 90^\circ - \lambda$, wreszcie przy G kąt parallaktyczny $= q$. Znow na podstawie wzorów (4) rozdziału I-go zaraz znajdziemy:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha \\ \sin \beta &= \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Aby je przerobić na wzory obliczalne przez logarytmy, kładziemy:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= m \sin M \\ \cos \delta \sin \alpha &= m \cos M, \end{aligned}$$

skąd

$$(4 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = m \sin (M - \varepsilon) \\ \cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda = m \cos (M - \varepsilon). \end{array} \right.$$

10. Przekształcenie z IV-go systemu w III-ci.

Z tego samego trójkąta sferycznego $PIIG$ zaraz otrzymujemy

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha = -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda \\ \sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda, \end{array} \right.$$

kładąc zaś

$$\begin{array}{l} \sin \beta = m \sin M \\ \cos \beta \sin \lambda = m \cos M, \end{array}$$

otrzymujemy obliczalne przez logarytmy wzory

$$(5 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} \sin \delta = m \sin (M + \varepsilon) \\ \cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha = m \cos (M + \varepsilon). \end{array} \right.$$

U w a g a. Wzory (2 bis), (3 bis), (4 bis) i (5 bis) dają niekiedy nie dość ściśle rezultaty. Zdarza się to wtedy, gdy który tangens przedstawia się jako stosunek dwóch bardzo małych wielkości. Wtedy najlepiej jest odstąpić od wzorów dających się logarytmować i wykonać rachunki z pomocą odpowiednich oryginalnych wzorów, t. j. wzorów (2), (3), (4), względnie (5).

Zrobimy tu jeszcze niektóre zadania.

11. Określenie kąta godzinowego, jeżeli dana jest wysokość znanej gwiazdy i szerokość miejsca obserwacyi.

Dane są zatem h i φ , a ponieważ gwiazda jest znana, więc wiadomą jest także jej deklinacya δ . Weźmy trzeci wzór (3) i rozwiążmy go względem $\cos t$.

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}.$$

Stąd zaraz wynika

$$\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos(\varphi + \delta) + \sin h}.$$

W dalszym ciągu dogodnie jest zamiast h wziąć jego dopełnienie do $\frac{\pi}{2}$, t. j. zenitalną odległość ζ . Piszemy tedy:

$$\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} t = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \cos \zeta}{\cos(\varphi + \delta) + \cos \zeta}.$$

Stosując znane wzory trygonometrii

$$\begin{aligned} \cos m - \cos n &= -2 \sin \frac{1}{2}(m + n) \sin \frac{1}{2}(m - n) \\ \cos m + \cos n &= 2 \cos \frac{1}{2}(m + n) \cos \frac{1}{2}(m - n) \end{aligned}$$

i wprowadzając symbol

$$H = \frac{1}{2}(\zeta + \varphi + \delta)$$

otrzymamy wzór

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin(H - \varphi) \sin(H - \delta)}{\cos H \cos(H - \zeta)}}, \quad (6)$$

który bywa bardzo często używany przez marynarzy. Istnieją nawet osobne tablice pomocnicze ułatwiające odnośne rachunki.

12. Określenie azymutu znanego ciała niebieskiego z jego wysokości, jeżeli szerokość miejsca obserwacji jest znana.

W tym przypadku znamy φ , δ i h , np. znamy φ i δ z efermerydy, a h z obserwacji. Zupełnie tak samo jak w poprzednim zadaniu na podstawie trzeciego wzoru (2) znajdujemy

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\cos(h + \varphi) + \sin \delta}{\cos(h - \varphi) - \sin \delta}.$$

Znowu wprowadzamy

$$\zeta = \frac{\pi}{2} - h$$

i piszemy wzór pod postacią

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin(\zeta - \varphi) + \sin \delta}{\sin(\zeta + \varphi) - \sin \delta}.$$

Następnie przekształcamy prawą stronę za pomocą znanych wzorów:

$$\begin{aligned}\sin m - \sin n &= 2 \sin \frac{1}{2}(m - n) \cos \frac{1}{2}(m + n) \\ \sin m + \sin n &= 2 \sin \frac{1}{2}(m + n) \cos \frac{1}{2}(m - n),\end{aligned}$$

i otrzymujemy

$$(7) \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(H - \varphi) \cos(H - \zeta)}{\sin(H - \delta) \cos H}}.$$

Za pomocą wzorów (6) i (7) można wyznaczyć południk. Załóżmy np., że, jak to często zdarza się w praktyce, wyznaczyliśmy azymut słońca z jego wysokości za pomocą wzoru (7). Skoro znamy azymut słońca w pewnej chwili, to wiemy jaki kąt tworzy płaszczyzna południka z płaszczyzną pionową przechodzącą przez oś lunety, a więc „*eo ipso*“ znamy położenie południka.

Ponieważ deklinacja zmienia się ustawicznie (w Marcu i Wrześniu zmiana dochodzi do 1' na godzinę), więc chcąc mieć dokładne rezultaty, trzeba obserwując h słońca jednocześnie notować czas, aby móc interpolować z efemeryd odpowiednią deklinację słońca¹⁾.

Wzory (6) i (7) nie dają żadnych wskazówek, w jakim kwadrancie mają się znajdować kąty t względnie A , ale w praktyce zawsze wiadomo, w jakim kwadrancie należy je umieścić.

13. Wschód i zachód gwiazdy.

W chwili, gdy gwiazda wschodzi lub zachodzi, jej wysokość równa się zeru. Połóżmy tedy w trzecim wzorze (3) $h = 0$ a otrzymamy:

$$(8) \quad \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t = 0.$$

Wprowadźmy do tego równania odległość od bieguna północnego $p = \frac{\pi}{2} - \delta$ i rozwiążmy je względem $\cos t$

$$(9) \quad \cos t = -\frac{\operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} p}.$$

Oczywiście równanie jest możebne tylko wtedy, gdy stosunek $\operatorname{tang} \varphi : \operatorname{tang} p$ jest zawarty między -1 a $+1$. Gdy $p < \varphi$, to

¹⁾ Przyczem trzeba także pamiętać o tem, że efemerydy są obliczone dla pewnej długości geograficznej, na której czas średni jest wogóle inny niż w miejscu obserwacji. Por. nast. rozdział.

równanie jest niemożliwe: gwiazda nigdy nie zachodzi, t. j. wiecznie znajduje się nad horyzontem. Gdy $p = \varphi$, to $\cos t = -1$, $t = \pi$: gwiazda dotyka horyzontu na samej północy. Gdy $180^\circ - \varphi > p > \varphi$, to równanie jest możliwe, a ponieważ danej wartości $\cos t$ odpowiada tak samo $360^\circ - t$ jak t , więc równanie (9) ma dwa rozwiązania, z których jedno (t) odpowiada wschodowi, a drugie ($360^\circ - t$) zachodowi gwiazdy. Z drugiej strony zważywszy, że kąt godzinowy liczy się od południka, widzimy, że południk dzieli drogi gwiazd na dwie równe części. Gdy $p > 180^\circ - \varphi$, to równanie (9) jest znowu niemożliwe: gwiazda zawsze pozostaje pod horyzontem.

Weźmy np. Kraków. W Krakowie $\varphi = 50^\circ 06'$, zatem gwiazdy, których p jest mniejsze niż $50^\circ 06'$, t. j. te, których deklinacja jest większa niż $39^\circ 94'$, zawsze znajdują się nad horyzontem. Gwiazdy, których deklinacja jest dodatnia ale mniejsza od $39^\circ 94'$, oraz gwiazdy południowego nieba, których deklinacja jest zawarta między 0° a $-39^\circ 94'$, wschodzą i zachodzą. Wreszcie gwiazdy południowego nieba, których deklinacja jest zawarta między $-39^\circ 94'$ a -90° , nie są w Krakowie widzialne.

Dla gwiazd północnego nieba $\tan p$ jest dodatni, a więc na północnej półkuli ziemi równanie (9) daje dla tych gwiazd ujemną wartość na $\cos t$: ich punkty wschodu znajdują się pomiędzy 90° i 180° a punkty zachodu między 180° a 270° , t. j. pierwsze znajdują się między punktami E i N a drugie między punktami N i W horyzontu. Dla gwiazd południowego nieba $\tan p$ jest ujemny, a więc na północnej półkuli ziemi równanie (9) daje dla tych gwiazd dodatnią wartość na $\cos t$: ich punkty wschodu znajdują się pomiędzy punktami S i E , a punkty zachodu między punktami W i S horyzontu.

Zastosujmy jeszcze równanie (9) do słońca. Odległość biegunowa słońca zmienia się od $90^\circ - \varepsilon$ do $90^\circ + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon = 23^\circ 5'$ (mniej więcej). Jeżeli zatem $\varphi < 90^\circ - \varepsilon$, to podwójny warunek:

$$180^\circ - \varphi > p > \varphi$$

jest zawsze spełniony i słońce codziennie wschodzi i zachodzi, zaś łuk pomiędzy punktami wschodu i zachodu, t. j. długość dnia wzrasta, gdy p zmniejsza się, t. j. gdy deklinacja słońca wzrasta (i odwrotnie). Jeżeli zaś $\varphi > 90^\circ - \varepsilon$, to słońce pozostaje nad horyzontem póty, dopóki $\varphi > p$, t. j. póty, póki $\delta > 90^\circ - \varphi$. Zato słońce

pozostaje wciąż pod horyzontem póty, póki $p > 180^\circ - \varphi$, t. j. póty, póki deklinacja jest mniejsza niż $\varphi - 90^\circ$.

Jednakże powyższa teoria wymaga pewnego uzupełnienia, bo pominięto w niej różne okoliczności mające wpływ na widomy wschód i zachód. Nie mówimy o tem, że jeżeli na wschodniej stronie horyzontu znajdują się góry, to musimy zobaczyć wschód później aniżeli to wypada ze wzoru (9). Nie mówimy także o tem, że jeżeli obserwatoryum jest wysoko położone, to wschód jest zawsze przyspieszony a zachód opóźniony. Przeciwnie wyobrażamy sobie, że obserwujemy na idealnej równinie i tuż u powierzchni gruntu. Otóż nawet wtedy momenty wschodu i zachodu nie będą takie, jakie wynikają z równania (9), a nieco inne. Przedewszystkiem refrakcyja, o której będzie mowa dalej, zawsze zwiększa wysokość ciał niebieskich nad horyzontem. Dzięki refrakcyi z a w s z e widzimy wschód nieco wcześniej, a zachód nieco później niż to być powinno. Następnie, o ile chodzi o słońce i księżyc, to ponieważ ich widome średnice wynoszą około pół stopnia, więc już lub jeszcze widzimy ich krawędzie nad horyzontem, podczas gdy ich środki znajdują się jeszcze lub już około $\frac{1}{4}$ stopnia pod horyzontem. Po drugie, ponieważ ich deklinacje są właściwie obliczone dla środka ziemi a odległość obserwatoryum od środka ziemi nie jest absolutnie znikomą w porównaniu do odległości tych ciał¹⁾ od ziemi, więc trzeba uwzględnić parallaksę. Jednakże w przypadku słońca poprawka na parallaksę jest tak mała, że za wyjątkiem tych przypadków, w których wymagana jest bardzo wielka dokładność, można ją zaniedbać. Trzeba uwzględnić tylko wpływ refrakcyi i rozmiary słońca. Otóż ponieważ w samym horyzoncie refrakcyja zwiększa wysokość o mniej więcej $34'$ a połowa średnicy słońca wynosi około $16'$, więc widzimy krawędź słońca nie w chwili, gdy $h=0$, a w chwili, gdy $h=-50'$. Ponieważ $\sin 50' = -0,0145$, więc zamiast równania (8) trzeba pisać:

$$(8 \text{ bis}) \quad \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t = -0,0145,$$

a zamiast równania (9)

$$(9 \text{ bis}) \quad \cos t = - (0,0145 \sec \delta \sec \varphi + \tan \delta \tan \varphi).$$

¹⁾ Te same uwagi odnoszą się także do planet.

Naturalnie, skoro chodzi o słońce, to nie można brać deklinacji w południe danego dnia, a trzeba interpolować ją dla chwili wschodu, względnie zachodu, pamiętając przytem o różnicy czasu między miejscem obserwacji a południkiem, dla którego efemeryda została obliczona.

Literatura.

Oprócz dzieł poprzednio wymienionych: W. Chauvenet. A manual of spherical and practical astronomy. Dwa tomy. Filadelfia, 1871. Tom I-szy zawiera astronomię sferyczną; II-gi, praktyczną (teorię narzędzi i metody obserwacji).

ROZDZIAŁ VII.

Czas.

1. Zasadnicza jednostka czasu. Doba gwiazdowa i słoneczna.

Za jednostkę zasadniczą czasu przyjmujemy ten odstęp czasu, w ciągu którego ziemia wykonuje jeden obrót naokoło swej osi. Możemy uważać obrót ziemi za prawie zupełnie jednostajny, skąd wynika, że kolejne czasy obrotu są prawie ściśle między sobą równe. Mówimy „prawie“, bo niektóre fizyczne procesy powinny oddziaływać na prędkość obrotu, np. tarcie przyptywów powinno go zwalniać. Z drugiej strony w ruchu księżyca istnieje pewne niewytłómaczone przyspieszenie, które możnaby tłómaczyć przez zwiększenie się samej miary czasu. Jednakże to nie są rzeczy absolutnie pewne. Ścisłego doświadczenia dowodu, że czas obrotu ziemi powiększył się w historycznych czasach choćby o drobny ułamek sekundy, nie posiadamy. Wobec tego możemy czas obrotu ziemi uważać wprawdzie nie za bezwzględnie, ale za praktycznie stałą wielkość¹⁾.

Ziemia obraca się ze zachodu na wschód, wskutek czego sfera niebieska wraz ze wszystkimi ciałami niebieskimi pozornie obraca się ze wschodu na zachód. Chwila, w której pewne ciało niebieskie, lub wogóle jakikolwiek punkt sfery niebieskiej przechodzi przez południk miejsca obserwacyi, nazywa się chwilą jego „przejścia“ przez południk, jego „kulminacyi“.

Bieguny osi świata dzielą południk na dwie połowy. Gdy gwiazda przechodzi przez tę połowę południka, w której znajduje

¹⁾ Możliwość tak zreformować mechanikę, aby czas obrotu ziemi był bezwzględnie stałą. Ale taka reforma byłaby prawdopodobnie z innych względów niedogodną. Zresztą poczynająca się w naszych czasach reforma mechaniki pójdzie, jak się zdaje, w innym kierunku.

się zenit miejsca obserwacji, to kulminację nazywamy „górną“; gdy zaś przechodzi przez tę połowę, w której znajduje się nadir, to kulminację nazywamy „dolną“. W górnej kulminacji kąt godzinowy gwiazdy wynosi: 0^h , 24^h , 48^h , ..., w dolnej: 12^h , 36^h , 60^h ... i t. d.

Obrót ziemi uważamy, jak powiedzieliśmy wyżej, za jednostajny. Gdyby jeszcze położenie osi obrotu ziemi w przestrzeni i wewnątrz ziemi było stałe, to sfera niebieska pozornie obracałaby się zupełnie jednostajnym ruchem. Ale, dzięki pewnym zmianom położenia ziemskiej osi obrotu w przestrzeni, odstęp czasu między jedną kulminacją danego punktu sfery niebieskiej a drugą nie są ściśle jednakowe. Im dany punkt jest bliższy do bieguna, tem różnice między odstępami czasu, upływającymi od jednej kulminacji do drugiej, są większe, podczas gdy u punktów położonych na równiku są prawie niedostrzegalne. W praktyce możemy uważać różnice między odstępami czasu, upływającymi od jednej kulminacji danego punktu równikowego do drugiej, za prawie zupełnie równe między sobą. Za miarodajny przyjmujemy odstęp czasu pomiędzy dwoma górnymi kulminacjami wiosennego punktu porównania dnia z nocą¹⁾. Nazywamy go „dobą gwiazdową“, a dzielimy go na 24 godziny „gwiazdowe“, godzinę gwiazdową na 60 minut „gwiazdowych“ i t. d.

Z powodu owych malutkich, przed chwilą wspomnianych perturbacji długość doby gwiazdowej nie jest ściśle stała i nie jest zupełnie dokładnie równa czasowi obrotu ziemi naokoło osi. Ale to są zboczenia nazbyt małe, aby mogły mieć w praktyce jakiegokolwiek znaczenie.

Nazywamy „czasem gwiazdowym“ kąt godzinowy punktu wiosennego porównania dnia z nocą. Już z § 6 poprzedniego rozdziału wiemy, że „czas gwiazdowy“ to to samo, co [wciąż zmieniająca się] rektascensya południka. W chwili, w której rektascensya jakiejś stałej gwiazdy (por. § 4 poprzedniego rozdziału) i czas gwiazdowy, t. j. rektascensya południka są równe, gwiazda właśnie przechodzi przez południk (górną kulminacja!).

„Doba słoneczna“ jest to odstęp czasu pomiędzy dwoma gór-

¹⁾ Ponieważ to jest punkt idealny przez żadną gwiazdę nieoznaczony, więc kulminacje jego wyznaczamy pośrednio przez kulminacje gwiazd. Odstępów czasu między kulminacjami samych gwiazd nie możemy przyjąć za miarodajne ze względu na ruchy własne gwiazd i na niektóre inne powody.

nemi kulminacyami słońca na tym samym południku. „Czas słoneczny“ (prawdziwy) jest to poprostu kąt godzinowy słońca.

Z powodu rocznego obiegu ziemi naokoło słońca, odbywającego się ze zachodu na wschód, słońce pozornie posuwa się na sferze niebieskiej w tym samym kierunku¹⁾. Wskutek tego rektascensya słońca wciąż wzrasta, mianowicie w ciągu roku, t. j. od jednego wiosennego porównania dnia z nocą do drugiego rektascensya wzrasta o całe 24°. Wskutek tego w każdej następnej dobie gwiazdowej słońce przechodzi przez południk później niż w poprzedniej i doba słoneczna jest dłuższa od gwiazdowej o tyle²⁾, że w roku mieści się dób słonecznych o jedną mniej niż gwiazdowych.

W życiu powszedniem stosujemy się do słońca, przeto rachujemy czas na doby słoneczne. Ale rektascensya słońca wzrasta nierównomiernie najpierw dlatego, że pozorna droga słońca ekliptyka jest nachylona do równika, wzdłuż którego liczymy rektascensye; a więc równym łukom ekliptyki odpowiadają nierówne łuki równika, po drugie dlatego, że sam ruch słońca w ekliptyce, jako odbicie nierównomiernego ruchu ziemi naokoło słońca, jest także nierównomierny. Wskutek zaś nierównomiernego wzrastania rektascensyi doby słoneczne są między sobą o tyle nierówne³⁾, że nie nadają się do mierzenia czasu. Aby otrzymać równe pomiędzy sobą doby, wyobrażamy sobie fikcyjny punkt, krążący po równiku ze stałą prędkością tak obraną, że jego rektascensya w ciągu roku wzrasta o 24°. Punkt ten nazywamy „średnim słońcem“. W ciągu roku średnie słońce to pozostaje poza rzeczywistością, to wyprzedza je, ale suma zboczeń dodatnich kompensuje sumę zboczeń odjemnych. Odstęp czasu pomiędzy jedną „górną kulminacją“ średniego słońca a drugą jest naturalnie stały, a nazywa się „dobą średnią słoneczną“. Kąt godzinowy fikcyjnego średniego słońca nazywa się „czasem średnim słonecznym“. Rzeczywisty czas słoneczny nazywają też niekiedy „widowym“, chwilę górnej kulminacyi rzeczywistego słońca nazywają „widomem południem“, a chwilę górnej kulminacyi średniego słońca „średnim południem“. W astronomii doba liczy

¹⁾ Łatwo przekonać się o tem, obserwując gwiazdy tuż przed i tuż po wschodzie słońca. Przekonamy się, że słońce wschodzi i zachodzi razem z gwiazdami coraz to dalej na wschód położonemi.

²⁾ Średnio o 3^m 55,9...

³⁾ W zimie północnej półkuli dłuższe, w lecie krótsze.

się nie od północy, jak w życiu powszednim, a od południa, wskutek czego godziny przedpołudniowe należą do doby poprzedniej.

Oznaczając czas widomy słoneczny przez T_a a średni przez T_m , rektascensję prawdziwego słońca przez α_a a rektascensję średniego przez α_m , możemy na podstawie równania (1) poprzedniego rozdziału napisać:

$$\left. \begin{aligned} \Theta - T_a &= \alpha_a \\ \Theta - T_m &= \alpha_m. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

To znaczy, że różnica między czasem gwiazdowym i słonecznym prawdziwym równa się rektascensyi prawdziwego słońca, a różnica pomiędzy czasem gwiazdowym i słonecznym średnim równa się rektascensyi średniego słońca. Ponieważ tak α_a jak α_m jest tylko jedne dla całej ziemi, więc pomimo tego, że w jednej i tej samej chwili absolutnego czasu na różnych obserwatoriach — czasy: gwiazdowy i oba słoneczne są różne, jednakże różnice między czasem gwiazdowym i obu słonecznymi są jednakowe.

2. Równanie czasu.

Równaniem czasu nazywamy różnicę między czasem średnim słonecznym a czasem prawdziwym słonecznym, t. j. różnicę między kątami godzinowymi słońca średniego i prawdziwego. Oznaczwszy równanie czasu przez E z równań (1) poprzedniego paragrafu otrzymamy:

$$E = T_m - T_a = \alpha_a - \alpha_m. \quad (2)$$

Więc równanie czasu jest jednocześnie różnicą między rektascensją prawdziwego a rektascensją średniego słońca i jest oczywiście dla całej ziemi w tej samej absolutnej chwili czasu jednakowe. Aby je obliczyć, trzeba znąć pozorny ruch słońca po ekliptyce. Ponieważ tym ruchem będziemy zajmować się później, więc powiemy tylko, że równanie czasu jest podane na każdy dzień w efemerydach. Weźmy np. „Berliner Jahrbuch“ na rok 1911. Weźmy 16 Listopada. Znajdziemy, że dnia tego w średnie południe w Berlinie równanie czasu wynosi — $15^m 18^s 06$. Zatem wedle równania (2) w średnie południe w Berlinie było już $15^m 18^s 06$ czasu prawdziwego. Zapytajmy, jaki był czas prawdziwy w średnie południe w Krakowie tego samego dnia. Kraków leży na wschód od Berlina. Wskutek tego w Kra-

kwie 1) jest średnie południe wtedy, gdy w Berlinie jest $23^h 33^m 44^s 52$ poprzedniego dnia (różnica czasu Kraków — Berlin = $26^m 15^s 48$) i równanie czasu w Krakowie w średnie południe 16 Listopada jest takie jak w Berlinie 15 Listopada o godzinie $23^h 33^m 44^s 52$. Tego równania czasu nie ma w efemerydzie, ale można je wyinterpolować (dość wziąć pierwszą różnicę). Mianowicie w Berlinie w średnie południe

$$\begin{array}{ll} 15 \text{ Listopada:} & E = - 15^m 28^s 03 \\ \text{a } 16 \text{ „ „ jak wyżej:} & \text{„} = - 15 \text{ } 18,06. \end{array}$$

Stąd wynika, że 15 Listopada o $23^h 33^m 44^s 52$ berlińskiego czasu średniego, t. j. w samo średnie krakowskie południe równanie czasu wynosiło — $15^m 18^s 24$. Innemi słowy 16 Listopada w średnie krakowskie południe było już $15^m 18^s 24$ czasu słonecznego. W podobny sposób można obliczyć czas słoneczny prawdziwy o każdej porze dnia i roku.

Widzieliśmy tu, że w Listopadzie czas słoneczny średni jest mniejszy od prawdziwego, t. j. pozostaje za nim w tyle ($E < 0$). Wogóle E zmienia się w następujący sposób: Dnia 1 Stycznia E wynosi około $+4$ minut (czas średni wyprzedza czas rzeczywisty). Potem E rośnie aż do 11 Lutego, mianowicie tego dnia czas średni wyprzedza czas rzeczywisty o prawie $11\frac{1}{2}$ minut. Od 11 Lutego E zmniejsza się. Zerem staje się 15 Kwietnia, poczem poczyną przybierać wartości odjemne. Dnia 14 Maja dochodzi prawie do wartości — $3\frac{1}{2}$ minuty [czas średni pozostaje w tyle za prawdziwym czasem słonecznym]. Odtąd E znowu zbliża się do zera. Dnia 14 Czerwca ponownie przechodzi przez zero, poczem wzrasta aż do 26 Lipca, w którym to dniu wynosi około $6\frac{1}{4}$ minuty. Odtąd znowu zmniejsza się i dnia 1 Września znowu przechodzi przez zero. Najmniejszą wartość [odjemnie największą] osiąga 3 Listopada, mianowicie wynosi w tym dniu około — $16\frac{1}{3}$ min. Potem znowu zbliża się do zera. Dnia 24 Grudnia przechodzi przez zero i staje się znowu dodatniem.

Dzięki temu, że deklinacja słońca wciąż zmienia się, południe widome (rzeczywiste) nie dzieli dnia [t. j. odstęp czasu między wschodem i zachodem słońca] na pół. W okresie wzrastania

1) Należy pamiętać, że mówimy teraz o czasie miejscowym, nie o środkowo-europejskim.

deklinacyi popołudnie prawdziwe jest nieco dłuższe od przedpołudnia, a w okresie zmniejszania się deklinacyi nieco krótsze. Ponieważ zaś średnie południe przypada to przed, to po widomem, więc przedpołudnie cywilne i popołudnie cywilne są jeszcze więcej między sobą nierówne jak przedpołudnie i popołudnie prawdziwe. Przytem namięniany to cywilne przedpołudnie, to cywilne popołudnie jest dłuższe. Np. w jesieni średnie południe przypada po widomem, cywilne popołudnie jest krótsze od przedpołudnia [prawdziwe popołudnie jest także krótsze od przedpołudnia, ale różnica jest mniejsza]. Od zimowego przesilenia dzieje się odwrotnie. W Styczniu popołudnie wzrasta, gdy przedpołudnie jeszcze skraca się i t. d.

3. Czas miejscowy, środkowo-europejski, absolutny.

„Czas miejscowy“ liczy się od miejscowego średniego południa. O nim to mówiliśmy w poprzednim paragrafie. Na wschód czas miejscowy jest coraz to większy, na zachód coraz to mniejszy. Różnica wynosi 4 minuty na każdy stopień długości geograficznej. Dla ujednostajnienia rozkładów jazdy na kolejach i innych celów praktycznych w zachodniej Europie [W. Brytania, Belgia, Hiszpania, Portugalia, a od jesieni 1911 r. także Francya] przyjęto czas „zachodnio-europejski“, t. j. po prostu greenwichski. W środkowej Europie [Niemcy, Austro-Węgry, Dania, Szwecya, Norwegia, Szwajcarya, Włochy i Malta] przyjęto czas „środkowo-europejski“. Jest to czas południka o 15° na wschód od Greenwichu położonego, przeto równo o godzinę większy od greenwichskiego. Ponieważ długość Krakowa [dokładniej długość koła południkowego w obserwatorium krakowskiem] jest: $1^{\text{h}} 19^{\text{m}} 50^{\text{s}} 27$ na wschód od Greenwichu, więc miejscowy czas krakowski jest od środkowo-europejskiego o $19^{\text{m}} 50^{\text{s}} 27$ większy. Gdy więc np. wedle czasu środkowo-europejskiego mamy 12-tą w południe, to wedle czasu średniego krakowskiego jest już $19^{\text{h}} 50^{\text{m}} 27^{\text{s}}$ na 1-szą, a jednocześnie wedle czasu zachodnio-europejskiego 11-ta. We wschodniej Europie [Bułgarya, Turcya europ. i Rumunia] przyjęto czas „wschodnio-europejski“ o dwie godziny większy od greenwichskiego. W Rosyi europejskiej ¹⁾ przyjęty jest na kolejach czas „petersburgski“, właściwie czas obserwa-

¹⁾ W Królestwie na liniach kolejowych Warszawa-Wiedeń (pomimo upaństwowienia), W.-Kalisz i W.-Bydgoszcz jeszcze w Latym 1912 r. pozostawał w użyciu czas warszawski o $1^{\text{h}} 24^{\text{m}} 7^{\text{s}} 25$ większy od greenwichskiego.

toryum pułkowskiego o $2^h 1^m 18^s 57$ większy od greenwichskiego a o $1^h 1^m 18^s 57$ większy od środkowo europejskiego. Stany Zjednoczone północnej Ameryki są podzielone na 5 pasów (tak samo Kanada). Od wybrzeża Atlantyku do $67\frac{1}{2}^\circ$ długości zachodniej od Greenwichu czas „atlantycki“ o 4^h mniejszy od greenwichskiego, od $67\frac{1}{2}^\circ$ W do $82\frac{1}{2}^\circ$ W „wschodni“ o 5 godzin mniejszy, od $82\frac{1}{2}^\circ$ W do $97\frac{1}{2}^\circ$ W „centralny“ o 6 godzin mniejszy, od $97\frac{1}{2}^\circ$ W do $112\frac{1}{2}^\circ$ W „górski“ o 7 godzin mniejszy, wreszcie od $112\frac{1}{2}^\circ$ W do wybrzeża Oceanu Spokojnego czas „Oceanu Spokojnego“ (Pacific) o 8 godzin mniejszy. W Japonii przyjęto czas o 9 godzin większy od greenwichskiego i t. d. Linia, na której zmienia się data o jeden dzień, przechodzi przez cieśninę Bhringa, idzie Oceanem Spokojnym na zachód od wysp Aleuckich i od wysp Sandwich, przechodzi pomiędzy wyspami Tonga i Samoa, potem na wschód od Nowej Zelandyi. Przebieg ma dość kręty¹⁾.

Jeżeli zachodzi potrzeba synchronizować zjawiska odbywające się na różnych punktach powierzchni ziemi, to zazwyczaj przywozimy wszystkie czasy do czasu greenwichskiego. Zwyczaj ten utarł się oddawna. Np. seismolog chcąc zbadać rozchodzenie się fali seismicznej danego trzęsienia ziemi przywodzi zapisy stacji seismicznych japońskich, amerykańskich i t. d. do czasu greenwichskiego. Zaprowadzenie jednostajnego, czyli, jak niektórzy — niewłaściwie zresztą — mówią, „absolutnego“ czasu na całej ziemi, byłoby oczywiście w stosunkach codziennych niedogodnem. Dlatego też podnoszony kilkakrotnie projekt zaprowadzenia takiego jednostajnego czasu (aby nikogo nie obrazić, proponowano np. czas jerozolimski) na całej ziemi — zawsze upadał.

4. Rok zwrotnikowy, gwiazdowy i t. d. Era juliańska.

„Rok [zwrotnikowy] tropiczny“ jest to odstęp czasu pomiędzy dwoma po sobie następującymi przejściami średniego słońca przez punkt wiosennego porównania dnia z nocą, ale także nie rzeczywistego a średniego. Kolejne odstępy pomiędzy przejściami średniego słońca przez prawdziwy punkt wiosennego porównania dnia z nocą są między sobą z powodu nutacyi nierówne. Te zmiany — zresztą niewielkie — mają charakter peryodyczny. Wykluczamy je biorąc

¹⁾ Daty te po większej części zapożyczyłem z „Companion to the Observatory“, Londyn 1912, str. 27.

średni odstęp czasu. Oprócz tego są jeszcze pewne wiekowe zmiany pochodzące z przyspieszenia w cofaniu się punktów równonocnych; ale tych weale nie eliminujemy, bo są tak powolne, że każdy rok tropiczny jest od poprzedniego tylko o 0,0005 krótszy. Długość roku tropicznego (zwrotnikowego) w dobach średnich słonecznych jest

$$365,24220\dots$$

Ponieważ w swym pozornym codziennym obiegu (ze wschodu na zachód) naokoło ziemi punkt wiosennego porównania dnia z nocą coraz to bardziej wyprzedza słońce a po roku zwrotnikowym znowu je dogania, więc oczywiście w ciągu roku zwrotnikowego wykonuje o jeden obieg więcej niż słońce. Zatem rok zwrotnikowy równa się 366,24220... dobowi gwiazdowemu i mamy równanie:

$$365,2422 \text{ dób śr. sł.} = 366,2422 \text{ dobowi gwiazdowemu.} \quad (3)$$

W życiu codziennym przyjmujemy za początek roku północ w nocy z 31 Grudnia na 1 Stycznia. Astronom przyjmuje za początek roku średnie południe 1 Stycznia; ale średnie południe jest na każdym obserwatorium inne. Ta nierównoczesność początku roku wogóle nie sprawia niedogodności; tylko w niektórych rachunkach, mianowicie w rachunkach odnoszących się do gwiazd stałych trzeba mieć wspólny wszystkim obserwatoryom początek roku. Na propozycję Bessla umówiono się przyjmować za początek słonecznego roku [nazywają go często poprostu rokiem Bessla] chwilę, w której rektascensya średniego słońca liczona od średniego porównania dnia z nocą przybiera pewną określoną wartość. W zwykłej praktyce astronomicznej przyjmują tę chwilę, w której pomieniona rektascensya równa się $280^{\circ} = 18^{\text{h}} 40^{\text{m}} 1^{\text{s}}$. Dokładniejsze określenie słonecznego roku Bessla pozwalamy sobie tutaj pominąć. Można je znaleźć np. na str. 125 kilkakrotnie cytowanej astronomii sferycznej Newcoma oraz w innych nowszych dziełach specjalnych.

Rok gwiazdowy jest to ten odstęp czasu, po którym słońce

¹⁾ Naturalnie ta chwila odpowiada na różnych południkach różnym czasem lokalnym. Ponieważ zaś rok cywilny jest w zwykłych latach (365 dni) krótszy, a w przestępnych (366 dni) dłuższy od zwrotnikowego, więc ta chwila — powiedzmy w Krakowie — przypada w różnych latach na różne godziny w ciągu 1, lub 2 Stycznia, np. w r. 1912 przypadła na 2 Stycznia 6^h 36^m 6^s czasu średn. krakowskiego astronomicznego.

powraca do tych samych gwiazd, wyrażając się dokładniej, do tego samego punktu na ekliptyce. Jest on dłuższy od roku zwrotnikowego o ten czas, który słońce potrzebuje, aby przebiegł ten łuk, o który punkt wiosennego porównania dnia z nocą cofnął się w ciągu roku. Odstęp czasu, o którym mowa, nie jest stały; podlega on pewnym peryodycznym i (bardzo powolnym) wiekowym zmianom. Obecnie rok gwiazdowy średnio wynosi 365,2563... dób średnich słonecznych. W rachunkach astronomicznych rok ten używanym nie bywa.

Rok zwrotnikowy, jako jednostka z dobą słoneczną niewymierna, jest w rachunkach obejmujących dłuższe okresy czasu niedogodny. Zamiana lat tropieźnych na dni i t. d. niepotrzebnie komplikuje rachunki. Dlatego astronomowie rzadko posługują się nim. Zazwyczaj liczą czas na dni. Datę także oznaczają w dniach licząc od zera juliańskiej epoki¹⁾ zaczynającej się na 4713 lat przed początkiem naszej ery. 0 Stycznia 1900 r. było to 2415020 dni juliańskiej epoki. W kalendarzach astronomicznych dzień juliańskiej epoki jest podany na każdy dzień roku, np. obok 31 Grudnia 1911 r. stoi: 2491402 dni juliańskiej epoki. To znaczy, że w południe średnie 31 Grudnia 1911 r. upływa 2491402 dni od początku tej epoki i w ciągu astronomicznego 31 Grudnia 1911 r., t. j. od południa 31 Grudnia 1911 r. do południa 1 Stycznia 1912 r., astronom datuje tak: 2491402 dni, tyle to godzin, minut i sekund. Więc astronom podaje ilość dni upłynionych, albo inaczej mówiąc, wyraża daty nie za pomocą liczb porządkowych, a za pomocą liczb kardynalnych.

Postępując konsekwentnie astronomowie zamiast zwykłych dat często podają lata upłynione. Tak więc powinniśmy właściwie w ciągu 1912 r. pisać 1911 lat. Jednakże piszą 1912 lat, bo przyjmują początek naszej ery o rok wcześniej i w datach przypadających w ciągu tego roku piszą rok zero. Rok ten odpowiada pierwszemu rokowi przed Chr. w zwykłej chronologii. Dalsze lata przed Chr. oznaczają liczbami odjemnymi: rok — 1 odpowiada drugiemu przed Chr. w zwykłej chronologii, rok — 2, trzeciemu i t. d.

Dalej używają astronomowie lat juliańskich, a to dlatego, że stulecie juliańskie zawiera 36525 dób, zatem w rachunkach jest o wiele dogodniejsze niż niewymierne z dobą słoneczną stulecie

¹⁾ Wprowadzonej przez Scaligera.

zwrotnikowe, albo nierówne między sobą stulecia gregoryańskie. Np. wiek XX gregoryański będzie o 1 dzień dłuższy niż XIX, XVIII i XVII.

Kalendarz gregoryański jest przystosowany do roku zwrotnikowego, zawierającego 365,24220... doby słoneczne średnie.

Ponieważ rok cywilny musi zawierać całą liczbę dób, więc liczymy w zwykłych latach 365 a w przestępnych (których liczba porządkowa jest podzielna przez 4) po 366 dni, podobnie jak w kalendarzu juliańskim. Ale po 400 latach otrzymalibyśmy w ten sposób $365 \times 400 + 100$ dni, podczas gdy w rzeczywistości 400 lat zwrotnikowych zawierają tylko $365 \times 400 + 96,88$ dni.

W kalendarzu gregoryańskim usuwamy w ciągu 400 lat trzy zbyteczne dni w ten sposób, że lata podzielne przez 100 nie są przestępne, tylko podzielne przez 400 są przestępne. Z tego powodu lata 1700, 1800 i 1900, które w kalendarzu juliańskim były przestępnymi, w gregoryańskim były zwykłymi, a rok 2000 będzie przestępnym. Dlatego to XX wiek będzie o jeden dzień dłuższy od poprzednich stuleci. Jednakże, jak widzimy, po 400 latach pozostaje jeszcze nadwyżka 0,12 doby, z której po 4000 lat utworzy się nadwyżka wynosząca więcej niż dobę. Można ją — choć nie całą — usunąć, umawiając się, aby rok 4000 był zwykłym a nie przestępnym ¹⁾.

5. Zamiana czasu średniego na gwiazdowy i odwrotnie.

Z równania (3) poprzedniego paragrafu wynika, że doba gwiazdowa ma 86164,091... sekund średniego czasu słonecznego, bo doba słoneczna zawiera ich 86400, a

$$86400 \frac{365,2422}{366,2422} = 86164,091 \dots$$

¹⁾ Nadmienimy tu, że wedle bulli Grzegorza XIII w r. 1582 po 4-tym Październiku nastąpił zaraz 15-ty, t. j. wyrzucono 10 dni. W krajach katolickich wprędce zaprowadzono reformę gregoryańską, w krajach protestanckich później. Często zapominają o tej nieciągłości dat, a także o tem, że różnica między datami gregoryańskiego i juliańskiego kalendarza, która w XX wieku wynosi 13 dni, w XIX wynosiła 12 dni, w XVIII 11 dni, a w XVII 10 dni. W dokumentach z czasów po zaprowadzeniu reformy gregoryańskiej zwykle przy dacie stoi *n. s.* (nowy styl), co usuwa wątpliwość, wedle jakiego stylu podano datę.

Więc doba gwiazdowa jest o 235,909 sekund średnich słonecznych t. j. blisko o 4 minuty krótsza niż doba średnia słoneczna. Wzajemnie ponieważ dzielimy dobę gwiazdową także na 24 godzin, godzinę gwiazdową na 60 minut, minutę na 60 sekund, t. j. dzielimy dobę gwiazdową na 86400 sekund gwiazdowych, więc z równania (3) znajdziemy, że doba średnia słoneczna zawiera 86636,555... sekund gwiazdowych t. j. o 236,555 sekund gwiazdowych więcej niż doba gwiazdowa. Stąd wynikają reguły służące do zamiany czasu średniego na słoneczny i odwrotnie. Położmy

$$\frac{365,2422 \dots}{366,2422 \dots} = k,$$

oznaczymy czas średni słoneczny, liczony od średniego południa, przez T_m , czas gwiazdowy przez Θ , wreszcie czas gwiazdowy w średnie południe przez Θ_0 , a otrzymamy

$$(4) \quad T_m = k(\Theta - \Theta_0)$$

i odwrotnie

$$(5) \quad \Theta = \Theta_0 + \frac{1}{k} T_m.$$

Mnożenie przez k , względnie przez $\frac{1}{k}$ prawie nigdy nie potrzebujemy wykonywać, bo wszystkie kalendarze astronomiczne, rozmaite podręczniki i t. d., zawierają osobne tablice ułatwiające zamianę jednego czasu na drugi. Czas gwiazdowy w średnie południe Θ_0 jest również codziennie podany w kalendarzach astronomicznych. Ale efemerydy są obliczone dla południka tego obserwatorium, które wydaje efemerydę: *Nautical Almanac* jest obliczony dla Greenwichu, *Berliner Jahrbuch* dla Berlina, *Connaissance des Temps* dla Paryża. Tymczasem Θ_0 t. j. momenty górnej kulminacji średniego słońca wyrażone w czasie gwiazdowym przypadają na tem samym obserwatorium w kolejnych dobach gwiazdowych na coraz późniejsze godziny (gwiazdowe). Ponieważ to spóźnienie wzrasta w sposób ciągły, więc jeżeli np. dziś średnie słońce przyszło do Berlina ze spóźnieniem α , to do Greenwichu, jako leżącego dalej na zachód, przyjdzie ze spóźnieniem α_1 większem niż α . Widzimy stąd, że Θ_0 jest na każdym południku inne i że w miejscowościach, które nie posiadają własnej efemerydy, trzeba je obliczać. Obliczenie można wykonać za pomocą cudzej efemerydy. Czas

gwiazdowy wyprzedza średni w ciągu doby słonecznej o 236.555 sekund gwiazdowych, t. j. w ciągu godziny słonecznej (średniej) o 9,8565 sek. gwiazd. Wyraźmy tedy różnicę długości między naszym obserwatoryum a obserwatoryum efemerydy w godzinach (w kalendarzach astronomicznych długości są podane w godzinach) i dajmy jej znak +, jeżeli nasze obserwatoryum leży na zachód od obserwatoryum efemerydy, a — jeżeli leży na wschód od obserwatoryum efemerydy [w Krakowie zawsze kładziemy znak —, bo Kraków leży na wschód od tych obserwatoryów, których efemerydy używamy]. Ponieważ Θ_0 wzrasta w kierunku ze wschodu na zachód, więc oznaczając czas gwiazdowy w średnie południe na naszym obserwatoryum przez Θ_0 , czas gwiazdowy w średnie południe na obserwatoryum efemerydy przez Θ_{0e} , wreszcie długość geograficzną wyrażoną w godzinach i liczoną na zachód od południka obserwatoryum efemerydy przez L , powinniśmy napisać:

$$\Theta_0 = \Theta_{0e} + 9,8565 L \text{ sek. gw.} \quad (6)$$

Wzory (4), (5) i (6) wystarczają w zupełności do zamiany czasu średniego na gwiazdowy i odwrotnie.

Przykład. Dnia 15 Listopada 1911 r. o godzinie 7 popołudniu wedle czasu środkowo-europejskiego jaki był czas gwiazdowy w Krakowie. Wiemy już z § 3, że czas krakowski miejscowy jest o 19^m 50' 27" większy od czasu środkowo-europejskiego. Ponieważ zaś godziny popołudniowe czasu cywilnego zgadzają się z astronomicznymi, więc 7 godzina wedle czasu środkowo-europejskiego odpowiada 7^h 19^m 50' 27". Bierzemy paryską *Connaissance des Temps* i znajdujemy w niej długość Krakowa względem Paryża 1^h 10^m 29' 3" na wschód, zatem

$$L = - 1^h 10^m 29;3 = - 1^h 175.$$

Następnie znajdujemy, że 15/XI 1911 r. w średnie południe w Paryżu czas gwiazdowy był 15^h 33^m 47' 81", zatem

$$\Theta_{0e} = 15^h 33^m 47;81.$$

Obliczamy najpierw iloczyn 9,8565 L i znajdujemy — 11;58; tedy czas gwiazdowy w średnie południe w Krakowie 15/XI 1911 r. był:

$$\Theta_0 = 15^h 33^m 47;81 - 11;58 = 15^h 33^m 36;23.$$

Z drugiej strony $7^h 19^m 50;27$ czasu średniego to [rachunek robimy za pomocą tablicy] $7^h 21^m 2;52$ czasu gwiazdowego. Podstawiając tedy we wzór (5) znajdziemy, że czas gwiazdowy o 7 godz. popołudniu wedle czasu śród.-europ. 15 Listopada 1911 r. w Krakowie był:

$$\Theta = 15^h 33^m 36;23 + 7^h 21^m 2;52 = 22^h 54^m 38;75.$$

6. Zamiana czasu widomego na średni i odwrotnie.

Z równania (2) widać, że otrzymamy czas średni dodając do czasu widomego równanie czasu. Chcąc zaś otrzymać z czasu średniego widomy (rzeczywisty), trzeba odjąć równanie czasu od czasu średniego. Jak to wyżej (§ 2) było powiedziane, trzeba interpolować równanie czasu. Weźmy np. ten sam moment czasu, t. j. 7^h (*T. E. C.*) popołudniu 15 Listopada 1911 r. w Krakowie. Jaki był wtedy czas słoneczny widomy? 7^h *T. E. C.* to, jak już wiemy, $7^h 19^m 50;27$ *T. M. K.* Różnica czasu średniego z Paryżem to to samo, co różnica długości, więc w Paryżu było wtedy:

$$7^h 19^m 50;27 - 1^h 10^m 29;3 = 6^h 9^m 21;0 \text{ } T. M. P.$$

Interpolujemy równanie czasu wedle *Connaissance des Temps*. Dnia 15/XI 1911 r. w średnie południe paryskie $E = -15^m 27;71$
 „ 16/XI „ „ „ „ „ „ „ = -15 17,72.

Widzimy stąd, że w ciągu doby E powiększa się o 9;99, a w ciągu $6^h 9^m 21;0$ o 2;56. Tedy równanie czasu o 7^h *T. E. C.* było:

$$-15^m 25;15$$

i wedle równania (2)

$$(I) \quad T_a = T_m - E = 7^h 19^m 50;27 + 15^m 25;15 = 7^h 35^m 15;42.$$

Możemy też obliczyć T_a za pomocą pierwszego równania (1), wedle którego

$$(1 \text{ bis}) \quad T_a = \Theta - \alpha_a.$$

Obliczyliśmy Θ w końcu poprzedniego paragrafu, pozostaje obliczyć α_a .

W *Connaissance des Temps* znajdujemy, że w średnie południe paryskie $\alpha_a = 15^h 18^m 20;10$ oraz, że α_a wzrasta o 10;255 co godzinę. Ponieważ, jak to wyżej obliczyliśmy, 7^h *T. E. C.* odpowiada $6^h 9^m 21;0$ *T. M. P.*, a w ciągu $6^h 9^m 21'$ α_a wzrasta o 63;13, więc o 7^h *T. E. C.* $\alpha_a = 15^h 19^m 23;23$. Stąd zaś

$$(II) \quad T_a = 22^h 54^m 38;75 - 15^h 19^m 23;23 = 7^h 32^m 15;52.$$

Mała różnica pomiędzy (I) a (II) objaśnia się głównie przez to, że interpolowaliśmy równanie czasu i rektascensję (prawdziwego) słońca tylko do pierwszych różnic. Rozważywszy drugie obliczenie czasu widomego spostrzegamy, że choć pierwsze równanie (I), t. j. równanie $T_a = \Theta - \alpha_a$ wcale nie zawiera czasu średniego, jednakże ze względu na układ tablic przy interpolacji rektascensyi słońca musieliśmy wziąć do pomocy czas średni. Jednym słowem, chcąc przejść od czasu gwiazdowego do słonecznego widomego lub odwrotnie, musimy w ten lub inny sposób posilkować się czasem średnim.

7. Obliczenie kąta godzinowego ciała niebieskiego, którego rektascensya jest dana.

Równania (1) obecnego rozdziału są tylko specjalnymi przypadkami równania (1) z poprzedniego rozdziału, które daje natychmiast pożądaną odpowiedź. Rzeczywiście, skoro znamy w pewnej chwili czasu rektascensję danego ciała, to obliczywszy jeszcze dla tejże chwili czas gwiazdowy na naszym obserwatoryum, będziemy mieć obie wielkości stojące po prawej stronie równania

$$t = \Theta - \alpha \quad (1 \text{ ter})$$

i „*eo ipso*“ będziemy mieli kąt godzinowy t . Przypominamy, że kąty godzinowe dodatnie liczą się na zachód od południka. Ponieważ w chwili, gdy dane ciało znajduje się w górnej kulminacji, $t = 0$, przeto wtedy czas gwiazdowy równa się rektascensyi ciała. Widzimy stąd, że obserwując przejście gwiazdy przez południk możemy wyznaczyć jej rektascensję, jeżeli czas gwiazdowy jest znany. Ale odwrotnie, obserwując przejście przez południk gwiazdy, której rektascensya jest znana, możemy wyznaczyć czas gwiazdowy. Na tem polega oznaczenie czasu, które na każdym obserwatoryum robi się przynajmniej co parę tygodni w celu kontroli zegarów. Mając czas gwiazdowy, obliczamy zeń średni za pomocą wzoru (4).

Na obserwatoryach astronomicznych jedne zegary idą wedle czasu średniego, inne wedle czasu gwiazdowego. Główne zegary, mianowicie te, których chód kontrolujemy przez obserwacje kulminacji gwiazd stałych, idą wedle czasu gwiazdowego.

ROZDZIAŁ VIII.

Refrakcja astronomiczna.

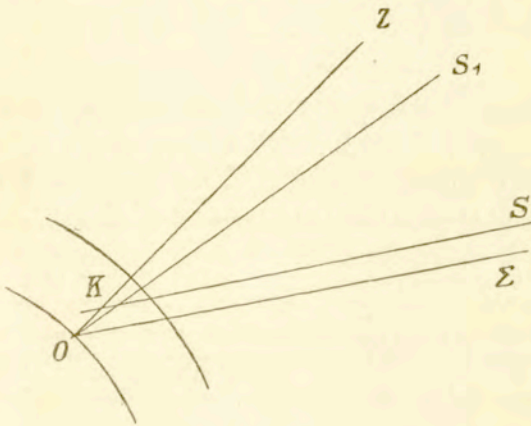
1. Budowa atmosfery.

Atmosferę możemy uważać za ciało izotropowe, ale niejednorodne, bo gęstość powietrza zmniejsza się w miarę tego, jak wzrasta wysokość nad poziomem morza. Gdyby atmosfera była nie tylko izotropową, ale także jednorodną, to promienie światła załamywałyby się tylko na górnej granicy atmosfery, a wewnątrz niej szłyby prostoliniowo. W rzeczywistości rzecz ma się inaczej: gęstość powietrza zmienia się stopniowo; załamanie na górnej granicy [jeżeli wogóle istnieje jaka górna granica atmosfery] jest z pewnością bardzo małe, prawdopodobnie nieskończenie małe; zato schodząc na dół i przenikając w coraz to gęstsze warstwy powietrza, promień światła idący od gwiazdy stopniowo coraz to więcej załamuje się, t. j. coraz to więcej zbacza od swego pierwotnego kierunku. Kąt, o który promień światła zbacza, nazywamy kątem refrakcyi, albo poprostu refrakcją.

Całej różnorodności zjawisk zachodzących w ciągu wędrówki promieni świetlnych przez atmosferę żadną teorią ogarnąć nie możemy. Atmosfera jest w ciągłym ruchu, gęstość powietrza w jednym i tem samym miejscu zmienia się nieustannie; więc zmieniają się nieustannie powierzchnie jednakowej gęstości. Są one przeważnie nierównoległe między sobą i różne od powierzchni ekwipotencyalnych siły ciężkości. Wskutek tego promienie światła w atmosferze nie tylko nie są proste, ale nawet nie są to krzywe płaskie, ani też od czasu niezależne. Jednakże doświadczenie poucza nas, że wszystkie zmiany są zawarte w dość ciasnych granicach, zaś specjalnie zmiany krótkoterminowe (drżanie obrazów gwiazd, migotanie) mają charakter błędów przypadkowych: promień zbacza

to w prawo, to w lewo, to w górę, to w dół od średniej drogi. Korzystając z tego, krótkoterminowych zmian wcale nie uwzględniamy w teorii. Eliminujemy je podobnie jak inne błędy powtarzając pomiary i tworząc średnie. Długoterminowe zmiany uwzględniamy — o ile się da. Stąd widzimy, że teoria refrakcyi rozważa pewne stany i zjawiska przeciętne, średnie, przyczem im mniej jest dokładną, tem więcej generalizuje.

Aby poznać skutki refrakcyi, rozpatrzmy następujący przykład: Weźmy kulę tych co ziemia rozmiarów, otoczoną atmosferą znajdującą się w zupełnym spokoju. W tej atmosferze gęstość jest funkcją odległości od środka kuli zmniejszającą się w sposób cią-



Ryc. 9.

gły w miarę tego, jak odległość od środka wzrasta. Promień wcho-
dzący z zewnątrz do takiej atmosfery natrafia na warstwy coraz
to gęstsze, a więc wciąż załamuje się ku prostopadłej. Zresztą zaraz
widać, że jest on w tym razie krzywą płaską, leżącą w płaszczy-
źnie przechodzącej przez środek ziemi, przez miejsce obserwacji
i przez gwiazdę. Z powodu załamania ku prostopadłej droga światła
w atmosferze jest krzywą zwróconą wklęsłością w dół, a obserwa-
torowi znajdującemu się w O wydaje się, że widzi gwiazdę S
w kierunku OS' , t. j. w kierunku stycznej do promienia w miejscu
obserwacji. Widzimy stąd, że refrakcyja zmniejsza odległości gwiazd
od zenitu, ale nie zmienia ich azymutów [ściśle uzasadnienie po-
damy w § 3]. Następnie widzimy, że gwiazda znajdująca się chwi-
lowo w zenicie miejsca obserwacji wcale nie podlega refrakcyi, bo

promienie od niej idące padają prostopadle na powierzchnie oddzielające warstwy o różnej gęstości, zatem nie podlegają załamaniu. W dalszym ciągu widzimy, że im gwiazda znajduje się dalej od zenitu, tem refrakcyja jest większa, bo promienie padają więcej ukośnie na powierzchnie oddzielające warstwy o różnej gęstości. Wskutek tego refrakcyja podnosi dolną krawędź księżyca i słońca więcej niż górną i ciała te wydają się nieco spłaszczone. Owo zależne od refrakcyi pozorne spłaszczenie jest tem większe, im słońce (względnie księżyc) znajduje się bliżej horyzontu.

Stosując podaną wyżej definicyę refrakcyi widzimy, że kąt refrakcyi, czyli krótko „refrakcyja“ to kąt pomiędzy kierunkami KS i OS' . Zatem oznaczając refrakcyę przez r mamy

$$r = \sphericalangle S'KS.$$

Gdyby nie było atmosfery, to widzielibyśmy gwiazdę w kierunku $O\Sigma$ i prawdziwa jej odległość zenitalna ζ byłaby $\sphericalangle ZO\Sigma$, ponieważ zaś widoma odległość zenitalna z jest to $\sphericalangle ZOS'$, więc [wszystkie te kąty leżą w jednej płaszczyźnie]

$$\zeta - z = \sphericalangle ZO\Sigma - \sphericalangle ZOS' = \sphericalangle S'O\Sigma.$$

Z powodu ogromnych odległości gwiazd wolno uważać kierunki $O\Sigma$ i KS za równoległe, t. j. można zamiast kąta $S'O\Sigma$ wziąć kąt $S'KS$ i napisać

$$(1) \quad \zeta - z = r.$$

Nawet wtedy, gdy chodzi o księżyc, pochodzący stąd błąd jest zupełnie znikomy. Dopiero gdy z (księżyca) = 84° , prawa strona równania (1) jest o $0,1$, a gdy $z = 90^\circ$, o $1''$ większa od lewej

Podaliśmy ten przypadek jako przykład, ale w gruncie rzeczy wyłożyliśmy hipotezę, na której opiera się zwykła teoria refrakcyi astronomicznej. Musimy tedy przedewszystkiem rozważyć, o ile ta hipoteza jest dopuszczalną. Atmosfera jest w ciągłym ruchu, ale dla naszych celów ważnem jest średnie, przeciętne położenie realnych powierzchni jednakowej gęstości, osobliwie w dolnem piętrze atmosfery. Teoretycznie obliczyć ich nie można, a określenie przez obserwacyę wprawdzie daje się pomyśleć, ale przedstawia ogromne techniczne trudności.

Rzeczywiście czyż możemy — powiedzmy — w ciągu roku

lub kilku lat co każdą (greenwichską!) ¹⁾ godzinę obserwować w tysiącach punktów rozsianych po całej ziemi na różnych wysokościach temperaturę, ciśnienie i wilgotność, t. j. te elementy, z których można obliczyć (optyczną) gęstość powietrza? Z pewnością nie. Można się tylko spodziewać, że w przyszłości uda się z balonowych i latawcowych obserwacji z gruba określić kształt średnich powierzchni jednakowej gęstości, powiedzmy, do 20 lub więcej kilometrów wysokości. Tymczasem możemy tylko utworzyć sobie ogólne pojęcie o tem, jak te niższe powierzchnie jednakowej gęstości wyglądają. Zresztą o nie to najwięcej chodzi, bo udział wyższych rozrzedzonych warstw atmosfery w zjawisku refrakcyi jest bardzo nieznaczny.

Otóż te średnie dolne powierzchnie jednakowej gęstości muszą mieć kształt spłaszczonych sferoid. Spłaszczenia ich muszą być wielkościami tego samego rzędu, co spłaszczenie geoidy, przyczem im dalej od powierzchni ziemi, tem spłaszczenie powinno być większe. Ale te sferoidy nie mogą być powierzchniami obrotowemi. Wobec tego, że średnie roczne temperatury, ciśnienia i wilgotności nie są funkcjami jednej tylko geograficznej szerokości, wzniesienie danej powierzchni jednakowej średniej gęstości nad poziomem morza jest z pewnością funkcją nie tylko szerokości ale i długości geograficznej. Już z powodu spłaszczenia średnich powierzchni jednakowej gęstości refrakcyja ²⁾ w samym zenicie nie jest wogóle zerem i ma wogóle wpływ na azymuty gwiazd; zaś z powodu niesymetrycznego, nieobrotowego kształtu tych powierzchni wpływ ten jest wogóle niejednakowy po obu stronach południka i nie znika nawet w samym południku. Widzimy stąd, że obliczając refrakcyę na podstawie hipotezy, iż atmosfera składa się z warstw kulistych współśrodkowych, popełniamy pewne stałe, na każdym obserwatorium odmienne błędy. Na szczęście mamy wszelkie powody przypuszczać, że zboczenia średnich powierzchni jednakowej gęstości od obrotowego kształtu są małe, prawdopodobnie nie większe niż zboczenia geoidy od ellipsoidy. Byłyby to zatem bardzo rozległe, obejmujące całe kraje i kontynenty zapadliny i wzniesienia, których głębokość, względnie wysokość wynosiłaby po kilka, lub kilkadziesiąt metrów. Z drugiej strony spłaszczenia powierzchni jednakowej

¹⁾ Aby obserwacje były równoczesne.

²⁾ Naturalnie mówimy tu o średniej refrakcyi.

gęstości w dolnych, mających największe dla refrakcyi znaczenie, warstwach, są bardzo nieznacznie różne od spłaszczenia poziomu morza, przeto pochodzące stąd wzajemne nachylenia powierzchni średniej jednakowej gęstości nie mogą być znaczne. Widać to zresztą z próbnych rachunków R. Radau'a¹⁾.

2. Teorya refrakcyi.

Refrakcyę astronomiczną znajǳ już starożytni. Pierwszym pisarzem, u którego spotykamy o niej wzmiankę, jest Kleomedes (czasy Augusta). Ptolemeusz (II-gi wiek po Chr) w swojej optyce [ale nie w *Almageście*] poświęca spory ustęp refrakcyi wogóle i refrakcyi astronomicznej specjalnie. Miał on o niej wcale trafne pojęcie. W średnich wiekach Arab Alhazen (około 1000 r., ten sam, który z trwania zmroku obliczył wysokość atmosfery), Vitelo (koniec XIII wieku) nie wiedzą nic ponad to, co było znane Ptolemeuszowi. Postęp zaczyna się dopiero w czasach Odrodzenia: astronomowie XVI wieku już starają się eliminować refrakcyę, Tycho de Brahe układa pierwszą tablicę poprawek wysokości gwiazd na refrakcyę; ale teorię matematyczną stworzyli dopiero matematycy XVII i XVIII wieku.

Za punkt wyjścia weźmiemy zasadę Fermata, z której wynikają nie tylko prawa załamania się światła przy przejściu z jednego jednorodnego ośrodka do drugiego, ale także różniczkowe równania promienia w izotropowych jednorodnych, lub niejednorodnych ośrodkach.

Zasada Fermata powiada, że drogi, po których biegnie światło, są to „brachistochrony“. To znaczy, że od jakiegokolwiek danego punktu *A* do jakiegokolwiek innego danego punktu *B* światło przebiega drogę w możliwie najkrótszym czasie. Jeżeli oznaczymy różniczkę czasu przez *dt*, drogi przez *ds*, a prędkość światła w danym ośrodku przez *V*, to wedle zasady Fermata

$$\delta \int_A^B dt = \delta \int_A^B \frac{ds}{V} = 0.$$

¹⁾ Recherches sur la théorie des refractions astronomiques, T. XVI i Essai sur les refractions astronomiques, T. XIX Annales de l'observatoire de Paris.

Zazwyczaj piszemy ten zasadniczy wzór w nieco innym kształcie. Wprowadzamy „wskaźnik załamania“ μ określony przez równanie

$$\mu = \frac{V_0}{V},$$

w którym V_0 oznacza absolutnie stałą prędkość światła w próżni, mnożymy całkę przez V_0 , poczem piszemy warunek minimum¹⁾ w kształcie

$$\delta \int_A^B \delta(\mu ds) = 0. \quad (2)$$

Ponieważ granice są niezmiennie, więc równanie (2) przywodzi się do

$$\int_A^B \delta(\mu ds) = 0,$$

t. j. do

$$\int_A^B (\delta\mu ds + \mu \delta ds) = 0.$$

Napiszmy to „in extenso“. Ponieważ

$$\delta\mu = \frac{d\mu}{dx} \delta x + \frac{d\mu}{dy} \delta y + \frac{d\mu}{dz} \delta z,$$

a z drugiej strony

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

skąd

$$ds \delta ds = dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz = dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z,$$

przeto równanie (2) przedstawia się w kształcie

$$\int_A^B \left(\frac{d\mu}{dx} \delta x + \frac{d\mu}{dy} \delta y + \frac{d\mu}{dz} \delta z \right) ds + \\ + \int_A^B \mu \left(\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z \right) = 0.$$

¹⁾ Wiadomo, że warunek (2) równie dobrze służy dla minimum jak dla maximum oraz dla minimax'a; wiadomo też, że chcąc przekonać się, który przypadek faktycznie zachodzi, trzeba zbadać drugą wariację. Ale w danym razie (za wyjątkiem chyba szczególnych przypadków) możebnem jest tylko minimum.

Całkując drugą całkę „przez części“ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \text{druga całka} &= \left[\mu \frac{dx}{ds} \delta x + \mu \frac{dy}{ds} \delta y + \mu \frac{dz}{ds} \delta z \right]_A^B \\ &\quad - \int_A^B \left[\delta x d \left(\mu \frac{dx}{ds} \right) + \delta y d \left(\mu \frac{dy}{ds} \right) + \delta z d \left(\mu \frac{dz}{ds} \right) \right]. \end{aligned}$$

Leżąc punkty końcowe A i B , jako z góry dane, są niezmiennie, przeto w obu punktach

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0$$

i wyraz scałkowany znika. Łącząc znowu obie całki możemy teraz napisać

$$(3) \quad \int_A^B \left[\frac{d\mu}{dx} ds - d \left(\mu \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x + \left[\frac{d\mu}{dy} ds - d \left(\mu \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y + \left[\frac{d\mu}{dz} ds - d \left(\mu \frac{dz}{ds} \right) \right] \delta z = 0.$$

Ponieważ oprócz punktów końcowych δx , δy i δz są wzdłuż całej drogi dowolne, więc aby całka (3) mogła być zerem, trzeba, żeby współczynniki przy δx , δy , δz były oddzielnie równe zeru. Tedy otrzymujemy trzy równania różniczkowe

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dx}{ds} \right) - \frac{d\mu}{dx} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dy}{ds} \right) - \frac{d\mu}{dy} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dz}{ds} \right) - \frac{d\mu}{dz} &= 0. \end{aligned} \right.$$

To są równania różniczkowe drogi światła t. j. promienia. Z pomiędzy równań (4) tylko dwa są niezależne, trzecie zaś jest konsekwencyą dwóch pozostałych. Łatwo przekonać się o tem w następujący sposób. Połóżmy dla krótkości

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma.$$

Pomiędzy dostawami stycznej do promienia α , β i γ zachodzi związek tożsamościowy

$$(5) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Teraz wykonajmy w równaniach (4) różniczkowania, a otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{d\mu}{ds} + \mu \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{d\mu}{dx} \\ \beta \frac{d\mu}{ds} + \mu \frac{d\beta}{ds} &= \frac{d\mu}{dy} \\ \gamma \frac{d\mu}{ds} + \mu \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{d\mu}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (4 \text{ bis})$$

Pomnóżmy pierwsze równanie (4 bis) przez $\alpha = \frac{dx}{ds}$, drugie przez $\beta = \frac{dy}{ds}$, trzecie przez $\gamma = \frac{dz}{ds}$, a uwzględniając równanie (5) otrzymamy

$$\frac{d\mu}{ds} + \mu \left[\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \beta \frac{d\beta}{ds} + \gamma \frac{d\gamma}{ds} \right] = \frac{d\mu}{ds}. \quad (6)$$

Ale z równania (5) wynika

$$\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \beta \frac{d\beta}{ds} + \gamma \frac{d\gamma}{ds} = 0, \quad (7)$$

zatem równanie (6) jest tożsamościowe. — Odwrotnie, jeżeli weźmiemy tę tożsamość i dwa równania (4), to otrzymamy trzecie równanie (4). Tedy to trzecie równanie jest po prostu konsekwencyą dwóch pozostałych.

Podnieśmy równania (4 bis) do kwadratu i dodajmy do siebie, a uwzględniając równanie (7) otrzymamy:

$$\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \mu^2 \left[\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 \right] = \left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2.$$

Wprowadźmy teraz dostawy kierunkowe normalnej głównej

$$\lambda = \varrho \frac{d\alpha}{ds}, \quad \mu = \varrho \frac{d\beta}{ds}, \quad \nu = \varrho \frac{d\gamma}{ds},$$

przyczem

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

a ϱ oznacza promień krzywizny. Zauważmy jeszcze, że suma trzech kwadratów po prawej stronie poprzedniego równania, to nie innego jak kwadrat pochodnej μ względem normalnej do powierzchni $\mu = \text{stała}$, a będziemy mogli napisać

$$\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \frac{\mu^2}{\varrho^2} = \left(\frac{d\mu}{dn}\right)^2. \quad (8)$$

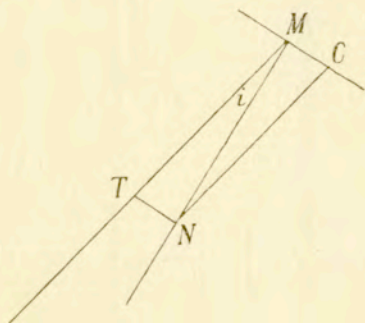
Widzimy stąd, że jeżeli w prostokącie $MTNC$, w którym MT ma kierunek stycznej a MC kierunek normalnej do promienia w punkcie M , odetniemy $MT = \frac{d\mu}{ds}$ a $MC = \frac{\mu}{\rho}$, to przekątnia $MN = \frac{d\mu}{dn}$ a zarazem posiada kierunek prostopadły do powierzchni

$\mu = \text{stałej}$. Tedy kąt $TMN = i$ to jest tak zwany kąt padania. Z prostokątnego trójkąta TMN zaraz wynika:

$$\text{tang } i = \frac{TN}{MT} = \frac{MC}{MT} = \frac{\mu}{\rho \frac{d\mu}{ds}},$$

co możemy też napisać w postaci

$$(9) \quad \frac{ds}{\rho} = \text{tang } i \frac{d\mu}{\mu}.$$



Ryc. 10.

Jeżeli krzywa jest płaska, to $\frac{ds}{\rho}$ jest to kąt pomiędzy dwoma sąsiednimi stycznymi do krzywej, albo, inaczej mówiąc, kąt, o który krzywa zbacza na nieskończenie małym odcinku ds . Jeżeli zatem utworzymy całkę

$$(10) \quad \int \frac{ds}{\rho} = \int \text{tang } i \frac{d\mu}{\mu},$$

powiedzmy, od granic atmosfery do oka, to otrzymamy całkowitą zmianę kierunku promienia w atmosferze, to jest właśnie to, co nazywamy „refrakcją“. W razie gdy promień nie jest krzywą płaską, to równanie (9) i całka (10) mają wprawdzie ciekawe geometryczne znaczenie, ale nie są tak użyteczne, jak w przypadku, gdy krzywa jest płaską.

3. Całkowanie zasadniczych równań różniczkowych w przypadku, gdy atmosfera składa się z warstw kulistych, współśrodkowych.

Równania (4) wogóle łatwe do całkowania nie są, ale jeżeli założymy, że atmosfera składa się z warstw kulistych, współśrodkowych, to całkowanie nie przedstawia specjalnych trudności.

Wtedy μ jest funkcją odległości r od wspólnego środka warstw kulistych, a jeżeli jeszcze umieścimy w nim środek współrzędnych, to równaniom (4) można będzie przydać kształt

$$\frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dx}{ds} \right) = \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dy}{ds} \right) = \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{y}{r}, \quad \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dz}{ds} \right) = \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{z}{r}. \quad (11)$$

Stąd łatwo wyprowadzimy równania:

$$z \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dy}{ds} \right) - y \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dz}{ds} \right) = 0, \quad x \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dz}{ds} \right) - z \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dx}{ds} \right) = 0, \\ y \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dx}{ds} \right) - x \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dy}{ds} \right) = 0.$$

Całki tych równań są:

$$\left. \begin{aligned} \mu \left(z \frac{dy}{ds} - y \frac{dz}{ds} \right) &= C_1 \\ \mu \left(x \frac{dz}{ds} - z \frac{dx}{ds} \right) &= C_2 \\ \mu \left(y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right) &= C_3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Naturalnie całki (12) nie są od siebie niezależne. Podobnie jak równania (4) tylko dwie z nich są niezależne, a trzecia wynika z dwóch pozostałych. Jeżeli pomnożymy pierwsze równanie (12) przez x , drugie przez y a trzecie przez z i dodamy do siebie, to otrzymamy równanie płaszczyzny

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0. \quad (13)$$

Wnosimy stąd, że promień jest krzywą płaską. Co więcej, leży on w płaszczyźnie przechodzącej przez środek współrzędnych [t. j. przez wspólny środek warstw kulistych¹⁾], bo równaniu (13) można uczynić zadość, kładąc

$$x = y = z = 0.$$

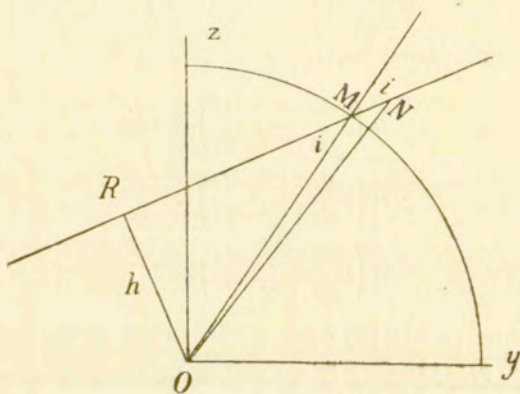
Skorzystajmy z tego i załóżmy, że jedna z płaszczyzn współrzędnych, np. płaszczyzna y, z jest identyczna z płaszczyzną pro-

¹⁾ Ponieważ przechodzi także przez gwiazdę i przez miejsce obserwacji, więc musi przechodzić także przez zenit. Usprawiedliwiliśmy w ten sposób twierdzenie z § 1, że refrakcja nie zmienia azymutu gwiazdy.

mienia. Wtedy $x = 0$, drugie i trzecie równanie (12) są spełnione [naturalnie należy położyć także $C_2 = C_3 = 0$] i pozostaje tylko pierwsze równanie (12). Możemy napisać to pierwsze równanie w nieco innym kształcie. Wiadomo, że

$$(14) \quad zdy - ydz = 2\alpha,$$

gdzie tak jak tu α oznacza pole nieskończenie małego trójkąta MON , w którym $MN = ds$ jest to nieskończenie mały element promienia w uważanym miejscu, a MO i NO są to dwa nieskończenie bliskie promienie wodzące, idące od końców tego elementu do wspólnego środka kulistych powierzchni, oddzielających warstwy o różnej gęstości. Pro-



Ryc. 11.

wadzimy styczną MR do promienia w punkcie M i spuszczyliśmy prostopadłą OR ze środka kulistych powierzchni na styczną. Odcinek $OR = h$ jest to wysokość trójkąta MNO . Tedy

$$\alpha = \frac{1}{2} hds$$

i równanie (14) przechodzi w

$$zdy - ydz = hds.$$

Na podstawie tego ostatniego równania pierwsze (a teraz jedyne) równanie (12) przechodzi w

$$\mu h = C_1.$$

Ale z trójkąta MOR zaraz wynika

$$h = r \sin i,$$

bo kąt RMO jest to kąt padania¹⁾, który oznaczyliśmy przez i . Ostatecznie zatem mamy równanie:

$$\mu r \sin i = C_1.$$

Łatwo jest określić stałą C_1 . Weźmy punkt w powierzchni ziemi, oznaczmy współczynnik załamania w miejscu obserwacji przez μ_0 , odległość miejsca obserwacji od środka kulistych powierzchni przez r_0 , wreszcie kąt padania w miejscu obserwacji przez i_0 . Wtedy

$$C_1 = \mu_0 r_0 \sin i_0.$$

Ale kąt padania w miejscu obserwacji, to nie innego jak widoma odległość zenitalna gwiazdy, którą oznaczyliśmy poprzednio przez z . Tedy

$$C_1 = \mu_0 r_0 \sin z$$

i ostatecznie otrzymujemy równanie

$$\mu r \sin i = \mu_0 r_0 \sin z. \quad (15)$$

4. Wzór na refrakcyę w przypadku, gdy uważamy ziemię za kulę otoczoną atmosferą złożoną z warstw kulistych, współśrodkowych.

Połączmy ze sobą rezultaty dwóch ostatnich paragrafów. Na końcu § 2 znaleźliśmy, że skoro promień jest krzywą płaską, to refrakcyę wyraża się przez całkę

$$r = \int \operatorname{tang} i \frac{d\mu}{\mu},$$

zaś w poprzednim paragrafie znaleźliśmy wzór (15), też odnoszący się do takich promieni, które są krzywymi płaskimi. Skoro za pomocą wzoru (15) wyrugujemy z tylko co napisanej całki kąt i , to otrzymamy zasadniczy wzór na refrakcyę w atmosferze kulisto-współśrodkowo uwarstwowanej

$$r = \int_1^{\mu_0} \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z}} \cdot \frac{d\mu}{\mu}. \quad (16)$$

¹⁾ Wynika to z definicji kąta padania, wedle której jest to kąt pomiędzy promieniem a normalną do powierzchni granicznej, tu bowiem powierzchnie graniczne są kulami, których wspólny środek znajduje się w O .

Jako górną granicę całki (16) przyjęliśmy współczynnik załamania w miejscu obserwacji, jako dolną — jedność, t. j. współczynnik załamania w próżni [porównaj definicyę współczynnika załamania w § 2]. Przyjmując tę dolną¹⁾ granicę całki (16) „*eo ipso*“ robimy założenie, że gęstość powietrza stopniowo schodzi na zero. Zdaje się, że tak jest, ale nie wiemy, czy atmosfera kończy się na skończonej odległości od ziemi, czy też (co jest bardzo możebne) nie posiada żadnej określonej górnej granicy. Ale ta wątpliwość jest zgoła nieszkodliwą, bo z powodu coraz to większego rozrzedzenia coraz to wyższych warstw atmosfery, udział ich w refrakcyi jest zupełnie nieznaczny i wszystko jedno, czy rozciągniemy całkowanie do stu lub dwustu kilometrów nad poziomem morza, czy też do nieskończonej odległości.

W całości (16) z jest od pozostałych dwóch zmiennych μ i r niezależne, odgrywa przeto rolę parametru. Związek pomiędzy μ i r nie jest bezpośredni: μ zależy od gęstości, która znowu jest funkcją temperatury, ciśnienia i wilgotności. Te ostatnie można uważać za funkcye odległości od środka kuli r i czasu t [właściwie także geograficznego położenia obserwatorium, ale aby uwzględnić to ostatnie, dość jest nadać stałym, wchodzącym we wzory na refrakcyę, odpowiednie „miejscowe wartości“]; przeto można uważać μ za funkcję r i t . Ponieważ światło przebiega swą drogę w atmosferze w ciągu małego ułamka sekundy, więc można uważać stan atmosfery za niezmienny w ciągu tego czasu, byleby stałe wchodzące do całki miały wartości odpowiadające temu chwilowemu stanowi atmosfery. Ostatecznie tedy można uważać μ za funkcję jednej zmiennej r .

Jakie trudności i wątpliwości omijamy, jakie robimy hipotezy, to się w dalszym ciągu okaże, ale już z tego, co przedtem było powiedziane, widzimy, że zupełnie pomijamy chwilowe nachylenie powierzchni jednakowej gęstości, ich odmienną od kulistej chwilową krzywiznę. Wprawdzie na szczęście są to wpływy drugorzędne, jednakże pomijając je nie możemy osiągnąć zbyt wielkiej ścisłości²⁾.

1) Dolna granica całki odpowiada górnej granicy atmosfery, bo promień zaczyna zbaczać wchodząc w atmosferę. Naturalnie górna granica całki odpowiada dolnej granicy atmosfery.

2) Pomijamy także dyspersyę: promienie różnej barwy mają trochę różne współczynniki załamania. Stąd stała refrakcyi dla fotograficznych obserwacji jest trochę większa od stałej dla obserwacji okiem.

Zazwyczaj astronomowie przyjmują pomiędzy współczynnikiem załamania μ a gęstością powietrza związek znany już Newtonowi

$$\mu^2 = 1 + 2c\rho. \quad (17)$$

Związek prawdziwy jest z pewnością więcej skomplikowany, zaś doświadczenia Mascart'a pokazały, że prawdopodobnie związek

$$\mu = 1 + c\rho$$

jest dokładniejszy niż związek (17), ale w rachunkach odnoszących się do refrakcyi można pozostać przy dawnym związku, bo gdy podniesiemy związek Mascart'a do kwadratu i pominiemy wyraz $c^2\rho^2$, to otrzymamy dawny związek (17). Wolno zaś pominąć $c^2\rho^2$, bo jeżeli przyjmiemy gęstość powietrza suchego przy 0° i ciśnieniu 760 mm. za jedność, to c będzie miało wartość około $\frac{1}{3400}$, ρ zaś może być co najwyżej trochę większe od jedności.

Na mocy związku (17)

$$\frac{\mu^2}{\mu_0^2} = \frac{1 + 2c\rho}{1 + 2c\rho_0} = 1 - 2\alpha\omega, \quad (18)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{c\rho_0}{1 + 2c\rho_0}, \quad \omega = 1 - \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (19)$$

Przez ρ_0 oznaczamy gęstość a przez μ_0 współczynnik załamania powietrza w miejscu obserwacyi. Ze wzoru (18) wynika

$$\frac{d\mu}{\mu} = - \frac{\alpha d\omega}{1 - 2\alpha\omega}. \quad (20)$$

Jednocześnie zastąpimy r przez inną zmienną, mianowicie położymy

$$\frac{r_0}{r} = 1 - s. \quad (21)$$

Jeżeli teraz wyrugujemy $\frac{\mu}{\mu_0}$, $\frac{d\mu}{\mu}$ i r z całki (16) za pomocą wzorów (18), (20) i (21), to wyprowadzając stałą α za nawias otrzymamy

$$- \alpha \int \frac{(1 - s) \sin z}{\sqrt{(1 - 2\alpha\omega) - (1 - s)^2 \sin^2 z}} \cdot \frac{d\omega}{(1 - 2\alpha\omega)}.$$

Korzystając z równości

$$\sin^2 z = \frac{1}{1 + \cotg^2 z}$$

przekształcamy to na

$$- \alpha \int \frac{(1-s)}{\sqrt{(1-2\alpha\omega)\cotg^2 z + 2s - 2\alpha\omega - s^2}} \cdot \frac{d\omega}{(1-2\alpha\omega)}$$

Wreszcie wyprowadzamy $(1-2\alpha\omega)$ za znak pierwiastkowania i otrzymujemy

$$- \alpha \int \frac{(1-s)}{\sqrt{\cotg^2 z + \frac{2s - 2\alpha\omega - s^2}{1-2\alpha\omega}}} \cdot \frac{d\omega}{(1-2\alpha\omega)^{3/2}}$$

Wiemy, że górna granica całki (16) odpowiada dolnej granicy atmosfery i odwrotnie. Ponieważ w miejscu obserwacji $\varrho = \varrho_0$, więc wedle wzoru (19) w górnej granicy $\omega = 0$ a w dolnej $\omega = 1$. Odwracamy jeszcze granice całki i ostatecznie otrzymujemy zamiast (16) nowy przekształcony wzór:

$$(22) \quad r = \alpha \int_0^1 \frac{1-s}{(1-2\alpha\omega)^{3/2}} \sqrt{\cotg^2 z + \frac{2s - 2\alpha\omega - s^2}{1-2\alpha\omega}} \cdot \frac{d\omega}{(1-2\alpha\omega)}$$

Co do stałej α , to z pierwszego wzoru (19) widać, że wartość jej zależy od gęstości powietrza w miejscu obserwacji (t. j. od ϱ_0). W obserwatoryach nisko położonych wartość jej jest bliska do 0,0003, t. j. w sekundach kątowych (refrakcyja jest kątem!) bliska do 60'', ale np. na wysokości 2900 metrów wynosi tylko około 0,0002, t. j. około 40''.

Korzystając z tego, że α jest tak małe, możemy wykonać dzielenia, mianowicie

$$\begin{aligned} (1-s)(1-2\alpha\omega)^{-3/2} &= (1-s) \left(1 + 3\alpha\omega - \frac{15}{2} \alpha^2 \omega^2 + \dots \right) = \\ &= 1 - s + 3\alpha\omega - \dots \end{aligned}$$

Dalsze wyrazy, jako nazbyt małe, pomijamy. Tak samo

$$\begin{aligned} \frac{2s - 2\alpha\omega - s^2}{1 - 2\alpha\omega} &= (2s - 2\alpha\omega - s^2) (1 + 2\alpha\omega + 4\alpha^2 \omega^2 + \dots) = \\ &= 2s - 2\alpha\omega - s^2 + 4\alpha\omega s - 4\alpha^2 \omega^2 - \dots \end{aligned}$$

Znowu pomijamy dalsze wyrazy. Wreszcie kładziemy

$$s - a\omega = u \quad (23)$$

i piszemy całkę (22) w uproszczonej postaci

$$r = a \int_0^1 \frac{(1 - u + 2a\omega) d\omega}{\sqrt{\cotg^2 z + 2u - (u - a\omega)^2}}. \quad (24)$$

5. Całkowanie całki wyrażającej refrakcję.

Aby scałkować całkę (24) trzeba ją rozwinąć w szereg. Takich rozwinięć znamy kilka. Niektóre z nich są zbieżne aż do $z = 90^\circ$, ale szeregi z nich wynikające są niedogodne. Dogodniejszymi są rozwinięcia o mniejszym obszarze zbieżności pomimo tego, że wtedy w pobliżu horyzontu trzeba używać innego rozwinięcia. Tu przytoczymy tylko takie ograniczone co do obszaru zbieżności rozwinięcia. Właściwie jest ono zbieżne od $z = 0$ aż do $z = 84^\circ 3'$, ale lepiej używać go tylko do $z = 80^\circ$, a nawet tylko do $z = 75^\circ$, jeżeli ograniczamy się tylko do trzech pierwszych wyrazów. Uwagi te mają zresztą tylko teoretyczne znaczenie, bo rozwinięcia są z dawna wykonane, refrakcje obliczone i ułożone w tablice. Do rozwinięcia, o którym mowa, dochodzimy w następujący sposób. Oczywiście można napisać wzór (24) w kształcie

$$r = a \operatorname{tang} z \int_0^1 \frac{q d\omega}{\sqrt{1 + Q \operatorname{tang}^2 z}}, \quad (25)$$

gdzie dla krótkości położyliśmy

$$1 - u + 2a\omega = q, \quad 2u - (u - a\omega)^2 = Q. \quad (26)$$

Stosując wzór dwumianowy Newtona natychmiast otrzymamy

$$r = a \operatorname{tang} z \int_0^1 q d\omega \left[1 - \frac{1}{2} Q \operatorname{tang}^2 z + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} Q^2 \operatorname{tang}^4 z - \right. \\ \left. - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} Q^3 \operatorname{tang}^6 z + \dots \right]$$

A zatem otrzymamy na r szereg kształtu

$$r = A_0 \operatorname{tang} z - A_1 \operatorname{tang}^3 z + A_2 \operatorname{tang}^5 z - \dots, \quad (27)$$

w którym

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \alpha \int_0^1 q d\omega = \alpha \int_0^1 (1 - u + 2\alpha\omega) d\omega \\
 A_1 &= \frac{\alpha}{2} \int_0^1 q Q d\omega = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (1 - u + 2\alpha\omega) [2u - (u - \alpha\omega)^2] d\omega \\
 &\dots \\
 A_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n} \alpha \int_0^1 q Q^n d\omega = \\
 &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n} \cdot \alpha \int_0^1 (1 - u + 2\alpha\omega) [2u - (u - \alpha\omega)^2]^n d\omega.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Bardzo korzystnym jest to, że wartość pierwszego i największego współczynnika szeregu (27) nie zależy od budowy atmosfery. Rzeczywiście, jeżeli za pomocą wzoru (23) napowrót wprowadzimy $s - a\omega$ zamiast u , to otrzymamy

$$\frac{A_0}{\alpha} = \int_0^1 (1 - s + 3a\omega) d\omega.$$

Najpierw całkujemy trzeci wyraz, który zależy tylko od ω , następnie rugujemy $1 - s$ za pomocą wzoru (21) i piszemy

$$\frac{A_0}{\alpha} = \frac{3}{2} \alpha + \int_0^1 \frac{r_0 d\omega}{r}.
 \tag{29}$$

Ale na mocy wzoru (19)

$$\frac{r_0 d\omega}{r} = - \frac{r_0}{\varrho_0} \frac{d\varrho}{r} = - \frac{r_0}{\varrho_0} \left[d \left(\frac{\varrho}{r} \right) + \frac{\varrho dr}{r^2} \right].$$

Pomnożmy drugą różniczkę w liczniku i mianowniku przez $g_0 r_0$, gdzie g_0 oznacza siłę ciężkości w miejscu obserwacji. Oznaczmy przez g siłę ciężkości na odległości r . Przynajmniej do jakich paru set kilometrów wysokości g jest przybliżenie odwrotnie proporcjonalne do r^2 , t. j.

$$g = \frac{g_0 r_0^2}{r^2}.$$

Teraz będziemy mogli napisać

$$r_0 \frac{d\omega}{r} = - \frac{r_0}{\varrho_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{\varrho}{r} \right) dr - \frac{1}{g_0 \varrho_0 r_0} g \varrho dr.$$

Ale wedle zasadniczych równań hydrostatyki

$$dp = - g \varrho dr, \quad (30)$$

gdzie p oznacza ciśnienie powietrza na wysokości r . Zatem otrzymujemy po prawej stronie różniczkę zupełną

$$r_0 \frac{d\omega}{r} = \frac{1}{g_0 \varrho_0 r_0} dp - \frac{r_0}{\varrho_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{\varrho}{r} \right) dr. \quad (31)$$

Musimy jeszcze rozpatrzyć granice całkowania, bo wprowadziliśmy nowe zmienne. Należy przytem pamiętać, że pisząc wzór (22) odwróciliśmy granice całkowania, że obecnie dolna granica całki odpowiada też dolnej granicy atmosfery, a górna górnej. Gdy $\omega = 0$ (dolna granica), to $\varrho = \varrho_0$, $r = r_0$, $p = p_0$; gdy $\omega = 1$ (górną granicą atmosfery), to $\varrho = 0$, r jest skończone lub nieskończone, zaś $p = 0$. Czy przyjmiemy, że r w górnej granicy atmosfery jest skończone, czy nieskończone, to jest zupełnie obojętne, bo podstawivszy (31) w (29), wykonawszy całkowanie i wstawivszy granice w obu przypadkach znajdziemy

$$\alpha \left(1 + \frac{3}{2} \alpha - \frac{p_0}{g_0 \varrho_0 r_0} \right). \quad (32)$$

Tak drugi jak trzeci wyraz w nawiasie są w porównaniu z 1 małe: o drugim wyrazie mówić nie potrzebujemy, bo wiemy już, że α wynosi zaledwo parę dziesięciotysięcznych, ale musimy zastanowić się nad trzecim. Trzeci wyraz jest stosunkiem dwóch ciśnień: w liczniku stoi ciśnienie p_0 , t. j. aktualne ciśnienie powietrza w obserwatorium w chwili obserwacji, w liczniku stoi fikcyjne ciśnienie słupa powietrza o gęstości ϱ_0 tej samej, co gęstość powietrza w obserwatorium¹⁾, poddanego tej samej sile ciężkości g_0 , która panuje w obserwatorium, i wysokości równej r_0 . Wartość stosunku $\frac{p_0}{g_0 \varrho_0 r_0}$ wynosi około $\frac{1}{800}$. Dokładną każdorazową wartość tego stosunku można obliczyć w następujący sposób:

$$\frac{p_0}{g_0 \varrho_0 r_0} = \frac{b}{B},$$

¹⁾ Wszędzie, gdzie mówimy o gęstości powietrza w obserwatorium, rozumiemy nie gęstość w pokojach, a gęstość powietrza zewnętrznego,

gdzie b oznacza wysokość słupa rtęci w barometrze w obserwatorium sprowadzoną do 0°C , zaś B wysokość słupa rtęci równoważnego słupowi powietrza o wysokości r_0 i gęstości ϱ_0 . Gdyby gęstość powietrza ϱ_0 była równą normalnej gęstości przy 0° i 760 mm. ciśnienia, to wysokość równoważnego słupa rtęci byłaby po prostu

$$\frac{r_0}{10517,1},$$

bo przy 0°C i 760 mm. ciśnienia gęstość rtęci jest 10517,1 razy większa niż gęstość powietrza. Ponieważ jednak gęstość powietrza jest ϱ_0 , więc [przyjmując gęstość normalną powietrza za jedność!] znajdziemy

$$B = \frac{\varrho_0 r_0}{10517,1}.$$

Ale

$$\varrho_0 = \frac{b}{0,76} \cdot \frac{273}{273 + T},$$

gdzie T oznacza temperaturę (w stopniach C) powietrza (zewnątrznego) w obserwatorium w chwili obserwacji. Zatem

$$B = \frac{b}{0,76} \cdot \frac{273}{273 + T} \cdot \frac{r_0}{10517,1},$$

a stąd

$$(33) \quad \frac{p_0}{g_0 \varrho_0 r_0} = \frac{b}{B} = \frac{7993}{r_0} \left(1 + \frac{T}{273}\right).$$

Widzimy stąd, że nietylko siła ciężkości ale i stan barometru zupełnie wypadają ze wzoru. Do obliczenia prawej strony wzoru potrzeba tylko znajomości temperatury w chwili obserwacji ¹⁾. Liczba 7993 jest to tak zwana „wysokość jednorodnej atmosfery“ wyrażona w metrach. Wobec tego trzeba też wyrazić r_0 w metrach. Jest to oczywiście wielkość dla danego obserwatorium stała. Można przyjąć $r_0 = R + H$, gdzie R oznacza średni promień elipsoidy, zaś H wysokość obserwatorium nad poziomem morza (obie w metrach), ale jeszcze lepiej położyć

$$(34) \quad r_0 = \sqrt{R_m R_n} + H,$$

¹⁾ Przypominamy, że g_0 , p_0 , ϱ_0 i r_0 są to wartości g , p , ϱ i r w poziomie obserwatorium a nie w poziomie morza.

gdzie H ma to samo znaczenie, co poprzednio, zaś R_m i R_n oznaczają miejscowe promienie krzywizny elipsoidy ziemskiej w południku i w kierunku do południka normalnym.

6. Troposfera i stratosfera.

Dalszych współczynników wzoru (27) bez znajomości budowy atmosfery, względnie bez hipotez co do jej budowy obliczyć nie można. W dawniejszych teoriach refrakcyi z musu zadawalniano się dość dalekimi od rzeczywistości hipotezami. Cassini przyjmował, że gęstość powietrza jest od dołu do góry stała, Newton zaś zakładał, że temperatura powietrza jest od dołu do góry stała. Z tego ostatniego założenia wynika, że gęstość powietrza jest funkcją wykładniczą wysokości. Bouguer znowu przyjmował, że gęstość powietrza zmniejsza się jednostajnie w miarę tego, jak wysokość wzrasta. Później obserwacje temperatury i ciśnienia na górach i w balonach¹⁾ dostarczyły faktycznego materiału, z którym liczyły się już wszystkie teorie XIX wieku. W ostatnich dwudziestu latach dzięki balonom sondom, t. j. małym balonom wzlatającym ze samopiszzącymi przyrządami bez obserwatora, uzyskano nawet wiadomości o warstwach pomiędzy 10 i 30 km. Zakres tych wiadomości rozszerzał się tak szybko, że np. to, co Newcomb pisze na str. 182 i 183 swej „Spherical Astronomy“ dziś już jest przestarzałe. Tymczasem książka jego wyszła w r. 1906.

To, co obecnie wiadomo o budowie atmosfery, można pokrótce przedstawić w następujący sposób. Dotąd zbadaną atmosferę można podzielić na dwa piętra: dolne, które Teisserenc de Bort nazwał „troposferą“ i w którym panują konwektywne procesy, i górne, nazwane przez Teisserenc'a de Bort „stratosferą“, w którym rozstrzygającym czynnikiem jest promieniowanie. W troposferze temperatura powietrza zmienia się nieustannie zależnie od pory dnia i roku oraz od wiatrów. Amplituda zmian temperatury (w czasie) nie zmniejsza się ze wzniesieniem nad powierzchnią ziemi: są wprawdzie miejscowości, gdzie zmniejsza się, ale są inne, w których osiąga maximum dopiero na pewnej wysokości, są też inne, w których można rozróżnić dwa maxima na dwóch różnych wyso-

¹⁾ Pierwszy wzlot Gay-Lussac'a i Biota 24 Sierpnia 1804 r.

kościach i t. d. Dopiero w pobliżu granicy stratosfery amplituda zmian temperatury zmniejsza się wyraźnie. Słowem, o ile chodzi o amplitudę zmian temperatury, to stosunki w troposferze są podobne do tych, które panują u powierzchni ziemi. A jak zmienia się temperatura w jednej i tej samej chwili czasu zależnie od wzniesienia nad powierzchnią ziemi? Zmienia się rozmaicie: w tem samym miejscu możemy raz obserwować wyraźny spadek temperatury od samego dołu troposfery aż do jej górnej granicy, a za drugim razem natrafimy na inwersję, t. j. na pewnej przestrzeni zamiast ubywać, temperatura będzie podnosić się. Ale jeżeli utworzymy średnie roczne, to wszędzie (w troposferze!) skonstatujemy spadek temperatury z wysokością. Oto np. spadek temperatury obliczony z międzynarodowych wzlotów balonów sond od Lipca 1902 r. do Czerwca 1907 r. Daty te¹⁾ dotyczą atmosfery nad środkową Europą.

Średni roczny spadek temperatury	
od powierzchni ziemi do 1 km.	— 3,28
1— 2 " "	— 4,56
2— 3 " "	— 5,01
3— 4 " "	— 5,71
4— 5 " "	— 6,23
5— 6 " "	— 6,82
6— 7 " "	— 7,02
7— 8 " "	— 7,26
8— 9 " "	— 6,40
9—10 " "	— 5,20
10—11 " "	— 3,22
11—12 " "	— 1,35
12—13 " "	— 0,27
13—14 " "	+ 0,03
14—15 " "	+ 0,14
15—16 " "	+ 0,23.

Górna granica troposfery jest zmienna: zniża się w zimie, podnosi w lecie, prócz tego podlega różnym czasowym zmianom; ale średnia jej wysokość nad środkową Europą wynosi około 11 km.

¹⁾ Wedle A. Wagnera: Die Temperaturverhältnisse in der freien Atmosphäre. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, tom III, str. 79.

Ku biegunom granica troposfery zniża się: na samym biegunie wysokość jej wynosi prawdopodobnie nie więcej jak 8 km. Przeciwnie ku równikowi granica troposfery podnosi się. O ile można wnosić ze wzlotów balonów sond w Batawii (na Jawie) i w Schirati (nad jeziorem Victoria Nyanza w Afryce), w pasie równikowym granica troposfery średnio znajduje się nie niżej jak na wysokości 15 km.

Ponad troposferą rozciąga się stratosfera. Tu niema kondensacyi pary, niema chmur, ani obłoków. Zmiany temperatury zależne od pór roku i dnia są nieznaczne, z drugiej zaś strony na różnych wysokościach znajdujemy prawie te same temperatury. Stąd często nazywają stratosferę „warstwą izotermiczną“. Zresztą zazwyczaj konstatujemy mały przyrost temperatury z wysokością, jak to nawet widać z podanej wyżej tablicy A. Wagnera [stratosfera zaczyna się mniej więcej od 11 km.]. Jak wysoko sięga stratosfera, nie wiemy, bo żaden balon sonda dotąd jej nie przebił; wiemy atoli, że pod równikiem temperatura jej [— 70° do — 80° C] jest niższa niż nad środkową Europą [około — 55°], tu zaś niższa niż w krajach podbiegunowych.

Tych najnowszych dat dotąd nie zużytkowano dla teoryi refrakcyi. Wnosimy z nich, że odpowiednio do innego prawa temperatury prawo gęstości w troposferze musi być inne niż w stratosferze. W tej ostatniej możnaby po prostu przyjąć prawo Newtona¹⁾.

7. Zależność gęstości od wzniesienia nad poziomem morza i od zawartości pary wodnej.

Mówiliśmy przed chwilą o związku między temperaturą powietrza i wzniesieniem, bo gęstość powietrza [a więc i współczynnik załamania] zależy zarówno od ciśnienia jak od temperatury. Przejdziemy teraz do związku między gęstością a wzniesieniem. Związek ten wynika z jednej strony z równania hydrostatycznego (30), z drugiej zaś strony z prawa Mariotte'a

$$\rho = \frac{p}{k\tau}. \quad (35)$$

W równaniu (35) $\tau (= 273^\circ + T)$ oznacza temperaturę absolutną, zaś k stałą, którą na razie nie potrzebujemy zajmować się.

¹⁾ Patrz następną uwagę.

Różniczkując równanie (35) i podstawiając w równanie (30) znajdziemy

$$k(\varrho d\tau + \tau d\varrho) = -g\varrho dr.$$

Skąd¹⁾

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \left[\frac{g}{k} \frac{dr}{\tau} + \frac{d\tau}{\tau} \right].$$

Ze zupełnie wystarczającą dokładnością możemy położyć

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2},$$

z drugiej zaś strony możemy przedstawić empiryczne daty co do temperatury za pomocą odpowiedniego wzoru interpolacyjnego. Ponieważ mniej więcej pewne dane nie sięgają poza 20 km., więc ponad 20 km. musimy ekstrapolować, ale w tym razie ekstrapolacja nie jest bardzo niebezpieczną, bo im wyższa warstwa atmosfery, tem udział jej w refrakcyi mniejszy. Najlepiej byłoby przyjąć, że powyżej 20 km. atmosfera jest izotermiczną. Wyraziwszy τ jako funkcję r np. $f(r)$ otrzymamy równanie

$$(36) \quad \frac{d\varrho}{\varrho} = - \frac{1}{f(r)} \left[\frac{g_0 r_0^2}{k r^2} + \frac{df}{dr} \right] dr,$$

w którym zmienne są rozdzielone i które przeto będzie całkowne²⁾. Uzyskawszy przez całkowanie związek między ϱ i r powrócimy do wzorów (28) i obliczymy współczynniki $A_1, A_2 \dots$ i t. d. Wprawdzie we wzorach (28) figurują inne zmienne, ale tamte zmienne są związane ze zmiennymi ϱ i r prostymi wzorami (19), (21) i (23). Którą z tych zmiennych wypadnie użyć jako zmienną niezależną, to zależy od natury związku między ϱ i r .

Pewną komplikację wnosi obecność pary wodnej w powietrzu. Ciśnienie wilgotnego powietrza jest sumą ciśnień powietrza suchego i pary wodnej. Tak samo gęstość wilgotnego powietrza jest sumą gęstości suchego powietrza i pary wodnej. Mamy zatem

$$p = p_1 + p_2, \quad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2.$$

¹⁾ Jeżeli położymy $\tau = \text{stała}$, $g = \text{stała}$, to oczywiście otrzymamy prawo Newtona.

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{g}{k\tau}(r-r_0)}.$$

²⁾ Drugi wyraz po prawej stronie równania (36) jest oczywiście różniczką zupełną funkcji — $\log f(r)$.

Co więcej, związek pomiędzy p_1 i q_1 z jednej a p_2 i q_2 z drugiej strony, jest to ten sam związek (35) wyrażający prawo Mariotte'a, ale ponieważ przy tem samym ciśnieniu i temperaturze gęstość pary wodnej wynosi tylko 0,623 gęstości powietrza, więc

$$q_1 = \frac{p_1}{k\tau}, \quad \text{ale} \quad q_2 = \frac{0,623 p_2}{k\tau}.$$

Stąd

$$q = q_1 + q_2 = \frac{1}{k\tau} [p_1 + 0,623 p_2] = \frac{1}{k\tau} [p - 0,377 p_2].$$

Zamiast 0,377 można napisać $\frac{3}{8}$, bo obie liczby są prawie równe. Piszemy tedy

$$q = \frac{1}{k\tau} \left(p - \frac{3}{8} p_2 \right). \quad (37)$$

Ale „*ad hoc*“ robione doświadczenia pokazały, że wskutek większej łamliwości pary wodnej „gęstość optyczna“ powietrza wyraża się raczej przez wzór:

$$q = \frac{1}{k\tau} \left(p - \frac{1}{8} p_2 \right). \quad (38)$$

Zatem przy wyprowadzeniu związku między gęstością a wznieśnieniem powinniśmy właściwie użyć nie wzoru (35) a wzoru (38). Ale $\frac{p_2}{p}$ jest zazwyczaj bardzo małym ułamkiem. W środkowej Europie¹⁾ u powierzchni gruntu p_2 wynosi średnio około 7 mm., t. j. mniej niż jedną setną p , dopiero w gorącym i wilgotnym klimacie Ceylonu wynosi średnio około 22 mm. Jest to element bardzo zmienny i w wysokim stopniu zależny od temperatury (i innych klimatycznych czynników). Pojemność powietrza na parę wodną szybko zmniejsza się razem z temperaturą. Im wyżej, tem p_2 jest mniejsze, ubywa zaś szybciej niż p . Na wysokości 2 km. nad powierzchnią gruntu wynosi zaledwo połowę tego co na dole. Zimne wyższe warstwy powietrza są bardzo suche: na wysokości 8 km. nad środkową Europą p_2 wynosi tylko około 0,07 mm. Ponieważ w dodatku we wzorze (38) p_2 jest podzielone przez 8, więc zupełnie je pomijając nie popełniamy wielkiego błędu; nawet w bardzo ścisłym rachunku wystarczy niewielka poprawka.

¹⁾ J. Hann. Lehrbuch der Meteorologie, Lipsk 1901, str. 223.

Dalszych współczynników wzoru (27), t. j. $A_1, A_2, A_3 \dots$ wyliczać nie będziemy, powiemy tylko, że we wszystkich dotychczasowych teoriach obliczenie opiera się na pewnych dowolnych hipotezach co do natury związku między ρ i r . Jeżeli te hipotezy nie doprowadzają do zbyt jawnych sprzeczności z obserwacjami, to tłumaczy się przez dwie okoliczności. O jednej już mówiliśmy, mianowicie wskazaliśmy na to, że pierwszy i najgłówniejszy współczynnik A_0 od budowy atmosfery nie zależy. Druga okoliczność polega na tem, że stałą refrakcyi α astronomowie określają wprost z astronomicznych obserwacji i w ten sposób do pewnego stopnia neutralizują brak faktycznych danych o budowie atmosfery. Zresztą, osobliwie w zadaniach wymagających wielkiej ścisłości, astronomowie starają się obserwować jak najbliżej zenitu. Ponieważ tang z jest tem mniejszy, im bliżej zenitu, więc obliczona refrakcyja jest także mniejsza, a przytem coraz mniej zależna od dalszych wyrazów szeregu (27), t. j. od tych wyrazów, których bez hipotezy co do budowy atmosfery obliczyć nie można. W samym zenicie obliczona refrakcyja jest zerem, choć, jak to wiemy z § 1, rzeczywista refrakcyja nie jest, ściśle biorąc, równa zeru w zenicie.

8. Refrakcyja w pobliżu horyzontu.

Ponieważ wzór (27) służy tylko do $z = 80^\circ$, więc w pobliżu horyzontu musimy posługiwać się innem rozwinięciem, pozostającym zbieżnem do $z = 90^\circ$. Możemy otrzymać takie rozwinięcie przez przekształcenie szeregu (27). Weźmy nową zmienną

$$\xi = \frac{\sqrt{\cotg^2 z + 2a} - \cotg z}{\sqrt{2a}},$$

skąd

$$\text{tang } z = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{2\xi}{(1 - \xi^2)}.$$

Stałą a określamy z warunków granicznych. Zwykle przyjmujemy, że a to nie innego jak wartość zmiennej $u = s - a\omega$ w górnej granicy atmosfery. Skoro wyrugujemy tang z ze szeregu (27) i wykonamy dzielenia, to otrzymamy szereg

$$(39) \quad r = B_0 \xi + B_1 \xi^3 + B_2 \xi^5 + \dots,$$

w którym

$$B_0 = \frac{2A_0}{\sqrt{2a}}, \quad B_1 = \frac{2A_0}{\sqrt{2a}} - \frac{8A_1}{(2a)^{3/2}} \dots$$

Szereg (39) pozostaje zbieżnym nawet dla $z = 90^\circ$ [$\zeta = 1$, gdy $z = 90^\circ$]. Oprócz tego są jeszcze inne rozwinięcia bardziej zbieżne niż (39) i do rachunku dogodniejsze. Dochodzimy wprawdzie do nich przez pewne uproszczenia, ale to nic nie szkodzi: nie warto silić się na zbytnią ścisłość, bo po pierwsze nikt precyzyjnych obserwacji w pobliżu horyzontu nie robi, po drugie refrakcyja w pobliżu horyzontu zależy w znacznym stopniu od takich nieobliczalnych czynników, jak pyły, opary, dymy i t. d.

9. Tablice refrakcyi.

Ponieważ wciąż musimy poprawiać obserwacje na refrakcyę, więc, aby ułatwić sobie robotę, posługujemy się tablicami. Tablice Caillet'a, Radau'a podają samą refrakcyę, Bessla, pułkowskie — jej logarytmy; ale tak jedne jak drugie składają się z tablic tak zwanej „normalnej refrakcyi“, t. j. refrakcyi obliczonej dla pewnej normalnej temperatury i ciśnienia, oraz z tablic pomocniczych, za pomocą których można z refrakcyi normalnej obliczyć refrakcyę dla każdego innego ciśnienia i każdej innej temperatury.

Opiszemy tablice Radau'a¹⁾ jako najdokładniejsze. Tablica I zawiera normalne refrakcyje obliczone dla 0°C , dla ciśnienia 760 mm., dla pewnego określonego spadku temperatury z wysokością i dla ciśnienia pary wodnej wynoszącego 6 mm. Tablica II służy do obliczenia poprawki na temperaturę²⁾. Założmy, że temperatura odczytana na zewnętrznym termometrze w obserwatorium wynosi $T^\circ\text{C}$. W tablicy II znajdziemy ułożone wedle dwóch argumentów z i T wartości współczynnika, powiedzmy k , przez który trzeba mnożyć T , aby otrzymać poprawkę na temperaturę kT . Dodawszy kT do refrakcyi normalnej wchodzimy do tablicy IV, która zawiera współczynniki β poprawki $\beta(b - 760)$, gdzie b oznacza stan barometru w czasie obserwacji. W tej tablicy argumentem jest poprawiona na temperaturę refrakcyja. Co do b , to zanim z odczytanego

¹⁾ Tablice te znajdują się na końcu „Essai sur les refractions astronomiques“ w tomie XIX „Annales de l'Observatoire de Paris“.

²⁾ Do tego samego celu, ale inną metodą służy także tablica III.

stanu barometru, powiedzmy, b' otrzymamy b , musimy wprzód dokonać trzech poprawek. Najpierw trzeba sprowadzić odczytany stan barometru do temperatury powietrza T_0 , bo temperatura barometru jest zwykle nieco różna od temperatury powietrza. Właściwie należałoby sprowadzić stan barometru do 0°C , ale Radau włączył sprowadzenie barometru od temperatury T^0 do 0°C w poprawkę na temperaturę, przeto pozostaje tylko redukcya od temperatury barometru do temperatury powietrza. Aby zrozumieć racyę pozostałych dwóch poprawek, musimy uprzytomnić sobie, dlaczego refrakcya zależy od stanu barometru. Nie zależy bezpośrednio, ale pośrednio, bo (por. § 4) zależy od gęstości powietrza, która znowu zależy od ciśnienia [i od temperatury, ale tę zależność już uwzględniliśmy w poprawce kT]. Ponieważ ciśnienie mierzymy za pomocą barometru, więc ostatecznie refrakcya zależy od stanu barometru. Ale ciśnienie jest proporcjonalne do stanu barometru (przywiedzonego do 0°C !) i do siły ciężkości; więc dwa jednakowe stany barometru odpowiadają niejednakowym ciśnieniom, jeżeli zostały odczytane w dwóch miejscach, w których siła ciężkości jest niejednakowa. Ponieważ Radau obliczył swoje tablice dla poziomu morza i dla 45° szerokości geograficznej, więc trzeba odczytania barometru sprowadzić do poziomu morza i do 45° szer. geogr. Załóżmy, że do odczytanego stanu barometru b' już dodaliśmy poprawkę Δb mającą na celu sprowadzenie do $T^0\text{C}$. Aby sprowadzić stan barometru do poziomu morza i do 45° szer. wystarczy pomnożyć $b' + \Delta b$ przez czynnik

$$\left(1 - \frac{2h}{R} - 0,0026 \cos 2\varphi\right),$$

w którym φ oznacza szerokość geogr. miejsca obserwacji, h jego wzniesienie nad poziomem morza a R średni promień geoidy. Oczywiście można powyższy czynnik, jako dla danego obserwatorium stały, obliczyć raz na zawsze.

Przejdźmy teraz do trzeciej poprawki barometru. Wiemy już [por. § 7 osobliwie wzór (38)], że tak gęstość zwyczajna, jak gęstość optyczna powietrza zależy od zawartości pary wodnej. Ponieważ wpływ gęstości na refrakcyę uwzględniamy przez pośredni-

¹⁾ Na R można przyjąć 6370000 metrów. Naturalnie trzeba wyrazić h także w metrach.

ctwo barometru, więc poprawkę gęstości, zależną od zawartości pary, można złączyć z poprawką na stan barometru. Poprawka ta wynosi

$$-\frac{1}{8}(p_2 - 6) \text{ milimetrów,}$$

przyczem p_2 oznacza ciśnienie pary wodnej w czasie obserwacji wyrażone w milimetrach rtęci. Liczba 6 stojąca w nawiasie obok p_2 pochodzi stąd, że Radau przyjął ciśnienie 6 mm. jako normalne¹⁾. Tedy ostatecznie

$$b = (b' + \Delta b) \left(1 - \frac{2h}{R} - 0,0026 \cos 2\varphi \right) - \frac{1}{8}(p_2 - 6)$$

i dopiero od tego b należy odjąć 760 mm., a potem różnicę (z właściwym znakiem) pomnożyć przez czynnik β , aby otrzymać poprawkę na stan barometru.

Po dokonaniu obu poprawek: na temperaturę i na stan barometru można już dodać refrakcyę do widomej odległości od zenitu. Radau podaje jednak tablice jeszcze dwóch poprawek. Pierwsza poprawka²⁾ zależy także od zawartości pary w powietrzu. Mianowicie w § 5 widzieliśmy, że współczynnik A_0 zależy od wysokości „jednorodnej atmosfery“, którą obliczyliśmy na 7993 metry. Ponieważ wysokość jednorodnej atmosfery także zależy od zawartości pary wodnej, więc należy wprowadzić odpowiednią poprawkę. Ale ponieważ wysokość jednorodnej atmosfery jest podzielona przez długość przeszło 800 razy od niej większą, więc ta poprawka wypada tak mała, że dopiero dla $z = 85^\circ$ wynosi 0,5. Tymczasem w pobliżu horyzontu sama refrakcyja może być o kilkanaście (lub więcej) sekund kątowych błędna, więc właściwie nie warto uwzględniać tak małej poprawki. Tablica V służy do osobnego celu. W tych razach, w których spadek temperatury z wysokością różni się od normalnego, można z pomocą tablicy V zrobić odpowiednią poprawkę. Ale rzadko się zdarza, abyśmy mieli dostateczne informacje o tem, czy i o ile spadek temperatury z wysokością jest nienormalny.

Przykład. Powtarzamy tu przykład za Radau'em. Obrął on

¹⁾ Mianowicie Radau przyjął stałą refrakcyi Bessla obliczoną z obserwacji w Królewcu, gdzie ciśnienie pary wynosi średnio 6 mm.

²⁾ Do tej poprawki służy tablica II bis i współczynniki c i c' na str. 60 cytowanej rozprawy Radau'a.

naumyślnie bardzo wielką odległość zenitalną, aby żadna z poprawek nie była znikomo małą. Obserwowane $z = 85^{\circ} 15,2$ przy $T = 12^{\circ}5$ i $b' = 754,2$ mm. Temperatura termometru na barometrze $10^{\circ}1$. Miejsce obserwacyi — Pułkowo.

Z tablicy I znajdujemy przez interpolację¹⁾ refrakcyę normalną 10' 43'',18

Z tablicy II znajdujemy przez interpolację $k = -2'',638$, skąd $kT = -2,638 \times 12,5 = -32,97$

Tedy refr. normalna $+ kT =$ 10' 10'',21

Odczytany stan barometru wynosi 754,2 mm., różnica między temperaturą powietrza a temperaturą barometru wynosi $2^{\circ}4$. Poprawka Δb na jeden stopień C wynosi²⁾ $0,000162 b'$, a na t stopni $0,000162 b' t$. W danym razie poprawka Δb musi być dodatnia, bo przy $12^{\circ}5$ stan barometru byłby wyższy niż przy $10^{\circ}1$. Tedy

$$\Delta b = + 754,2 \times 0,000162 \times 2,4 = + 0,293.$$

Stąd $b' + \Delta b = 754,2 + 0,3 = 754,5$. Teraz sprowadzamy do poziomu morza i do 45° szer. geogr.

W Pułkowie $\varphi = 59^{\circ} 46' 19''$, $h = 75$ m. Stąd

$$\frac{2h}{R} + 0,0026 \cos 2\varphi = 0,000022 - 0,001282 = - 0,001260,$$

stąd wedle wzoru podanego na poprzedniej stronnicy

$$b = 754,5 (1 + 0,00126) = 754,5 + 0,95 = 755,4,$$

zaś

$$b - 760 = - 4,6.$$

Teraz z argumentem $10' 10'',21$ wchodzimy do tablicy IV i znajdujemy $\beta = 0'',813$, zatem poprawka barometryczna jest:

$$- 4,6 \times 0'',813 = - 3'',74,$$

a więc

$$r = 10' 10'',21 - 3'',74 = 10' 6'',47$$

a poprawiona odległość zenitalna:

$$\zeta = 85^{\circ} 15,2 + 10',1 = 85^{\circ} 25',3.$$

¹⁾ Wszędzie wystarcza interpolacja do pierwszych różnic.

²⁾ Jeżeli, jak to zwykle bywa, podziałka barometru jest mosiężna.

Tablice Cailleta podają refrakcyę normalną (argumentem jest nie z a widoma wysokość nad horyzontem) oraz pewne czynniki. Jeden z tych czynników służy do poprawki na temperaturę, drugi do poprawki barometrycznej. *Connaissance des Temps* co roku podaje instrukcyę, jak używać tych tablic. Najbardziej rozpowszechnionymi, bo najdogodniejszymi są tablice Bessla pomimo tego, że skoro tylko z ma znaczną wartość, to przy tym układzie, który obrał Bessel, nie można wyzyskać zasadniczych wzorów w całej ścisłości, do której są zdolne. Tablice pułkowskie, choć oparte na innej stałej refrakcyi i na innej teorii (teorii Gylдена) są ułożone na wzór tablic Bessla.

Bessel wyraził refrakcyę w następujący sposób:

$$r = \alpha \operatorname{tang} z \beta^4 \gamma^2.$$

Należy zauważyć, że α Bessla ma inne znaczenie niż w rozwinętej tu teorii. Mianowicie jeżeli weźmiemy wzór (27) i napiszemy go w kształcie

$$[A_0 - A_1 \operatorname{tang}^2 z + A_2 \operatorname{tang}^4 z - \dots] \operatorname{tang} z,$$

to wyraz w nawiasie obliczony dla specjalnej temperatury i ciśnienia¹⁾ będzie to α Bessla. Tablice podają: $\log(\alpha \operatorname{tang} z)$, wykładniki λ i A (oba mało co większe od 1) i $\log \gamma$, które jest funkcją temperatury powietrza. Z drugiej strony

$$\log \beta = \log B + \log T,$$

gdzie B jest funkcją stanu barometru a T temperatury termometru na barometrze. Tablice podają tak $\log B$ jak $\log T$.

10. Poprawka na refrakcyę w różnego rodzaju obserwacyach.

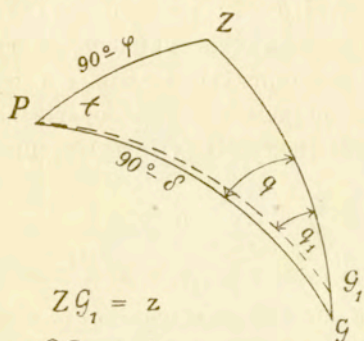
Z obserwacyi instrumentem, którego oś jest pionowa (np. teodolitem), otrzymujemy wprost azymut i zenitalną odległość. Poprawka na refrakcyę w azymucie jest zerem; dodając zaś do widomej zenitalnej odległości z refrakcyę r otrzymamy prawdziwą odległość zenitalną ζ , t. j.

$$\zeta = z + r$$

¹⁾ Jako normalną temperaturę powietrza Bessel przyjął $+9^{\circ}31$ C, jako normalną temperaturę termometru na barometrze $+10^{\circ}$ C, jako normalne ciśnienie 752,95 mm.

Jeżeli obserwujemy narzędziem, którego oś jest równoległa do osi świata, to obie obserwowane współrzędne muszą być poprawione. Poprawki są jednakowe dla II-go i III-go systemu współrzędnych [por. rozdział VI §§ 3 i 4], tylko ponieważ kąt godzinowy wzrasta we wprost przeciwnym kierunku jak rektascensya, więc poprawka kąta godzinowego ma przeciwny znak jak poprawka rektascensyi.

Weźmy trójkąt sferyczny, którego wierzchołki są: P biegun północny świata, Z zenit miejsca obserwacyi i G gwiazda [jest to ten sam trójkąt, który rozpatrywaliśmy w rozdziale VI-tym w § 7] i zastosujmy doń pierwsze równanie różniczkowe (19) z rozdziału I-go, t. j. równanie



$$ZG_1 = z$$

$$GG_1 = r$$

Ryc. 12.

$$da = \cos C db + \cos B dc + \sin c \sin B dA.$$

Położmy

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a = \frac{\pi}{2} - \delta & A = \pi - A \\ b = \zeta = z + r & B = t = \Theta - \alpha \\ c = \frac{\pi}{2} - \varphi & C = q. \end{array} \right.$$

Zważywszy, że ani $c = \frac{\pi}{2} - \varphi$, ani $A = \pi - A$ nie ulegają zmianie, widzimy, że powyższe równanie po podstawieniu przywodzi się do

$$(41) \quad d\delta = -\cos q d\zeta.$$

Weźmy teraz czwarty wzór (19) z rozdz. I-go. Przez kolowe przestawienia otrzymamy

$$\sin C db = \cos a \sin B dc + \sin b \cos C dA + \sin a dB.$$

Podstawmy tu znowu wartości (40), znowu położmy

$$d\varphi = dA = 0,$$

a otrzymamy

$$(42) \quad \sin q d\zeta = \cos \delta dt = -\cos \delta da.$$

W dalszym ciągu przyjmiemy, że α , δ , t oznaczają prawdziwe współrzędne, zaś α' , δ' , t' widome [t. j. zmienione przez refrakcyę]. Zamiast różniczki $d\alpha$ napiszmy $\alpha - \alpha'$, zamiast $d\delta$ napiszmy $\delta - \delta'$ i t. d. Odpowiednio do tego zamiast $d\zeta$ napiszmy $\zeta - z = r$ [por. wzór (1)], poczem otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \delta - \delta' &= -\cos q r \\ -(t - t') &= \alpha - \alpha' = -\frac{\sin q}{\cos \delta} r. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Po prawej stronie wzorów (43) figurują kąty δ i q , których właściwie jeszcze nie znamy, bo dany jest nie rzeczywisty trójkąt ZPG a widomy ZPG' . Musimy więc zamiast q i δ podstawić q' i δ' z widomego trójkąta¹⁾, ale to nie wadzi, bo gdybyśmy te same operacje dokonali nad trójkątem PZG' , to otrzymalibyśmy wzory zupełnie podobne do (43), tylko po prawej stronie zamiast $\sin q$, $\cos q$ i $\cos \delta$ figurowałyby $\sin q'$, $\cos q'$ i $\cos \delta'$. Jednakże wzory (43) mają pewną wadę. Oto otrzymaliśmy je wstawiając skończone różnice zamiast nieskończone małych różniczek. Tymczasem gdybyśmy napisali ściśle wzory na $\delta - \delta'$ i $\alpha - \alpha'$, to otrzymalibyśmy wzory nie liniowe względem r , przeciwnie po rozwinięciu względem r otrzymalibyśmy szeregi potęgowe. Zatem pisząc wzory (43) pominęliśmy kwadraty i wyższe potęgi refrakcyi. Póki r jest małe, to pochodzące stąd błędy są znikome; ale gdyby, jak w przykładzie poprzedniego paragrafu, r wynosiło około $10'$, to r^2 wyniosłoby około $2''^2$), czego już nie należy pomijać.

Ale obserwacje, mające na celu wyznaczenie współrzędnych α i δ , robimy zwykle w południku. Ponieważ południk jest jednym z kół pionowych, więc refrakcyja nie ma wpływu na kąt godzinowy: poprawka kąta godzinowego, względnie rektascensyi jest zerem. Z drugiej strony, jak to widać od pierwszego rzutu oka, wtedy (zupełnie ściśle)

$$\zeta + \delta = z + \delta'.$$

Zatem

$$t - t = \alpha - \alpha' = 0, \quad \delta - \delta' = -r. \quad (44)$$

¹⁾ Można określić q' ze wzoru:

$$\sin q' = \frac{\cos q \sin t'}{\sin z}.$$

²⁾ Trzeba wyrazić $10'$ w mierze łukowej, podnieść do kwadratu a potem znów zamienić na miarę kątową; w ten sposób otrzymamy około $1,7''$.

Otrzymałibyśmy to samo ze wzorów (43) zważywszy, że w południku $q=0$. Widzimy tedy, że wzory (44) są jednocześnie zupełnie ściśle i nadzwyczaj proste.

Jeżeli oznaczamy współrzędne równikowe poza południkiem, to tylko metodą różnicową. To znaczy, że wyznaczamy różnice pomiędzy deklinacją i rektascensją danej gwiazdy a rektascensją i deklinacją innej, której współrzędne są dobrze znane, ogólniej mówiąc wyznaczamy współrzędne danej gwiazdy względem innej, której absolutne współrzędne są dobrze znane. W tym celu wyszukujemy znaną gwiazdę o tyle bliską do danej, aby obie mieściły się jednocześnie w polu widzenia lunety, wtedy bowiem możemy wykonać pomiary za pomocą mikrometru. Wpływ refrakcyi na pomiary mikrometryczne jest bardzo mały, bo oczywiście wchodzi tu w rachubę nie same refrakcyje a ich różnice, różnice zresztą bardzo małe, bo porównywane gwiazdy są bardzo bliskie. Częstość można nawet zupełnie zaniechać poprawki na dyferencyalną refrakcyę. Wzorów na poprawki przy pomiarach mikrometrycznych rozwijać tu nie będziemy, odsyłamy czytelnika do rozpraw Bessla, które będą poniżej pod rubryką „literatura“ wymienione.

Współrzędnych ekliptycznych bezpośrednio nie obserwujemy, przeto nie zachodzi potrzeba wyprowadzać wzory na poprawki refrakcyjne tych współrzędnych. Poprawki na refrakcyę robi się przy obliczeniu obserwacyi.

Literatura.

C. Bruhns: Die astronomische Strahlenbrechung in historischer Entwicklung. Lipsk 1861.

O. Bonnet: Théorie de la refraction astronomique. Paryż 1888.

Th. v. Oppolzer: Über die astronomische Refraction. Wiedeń 1886. Odbitka z LIII tomu „Denkschriften der math.-naturw. Klasse der k. Akademie der Wiss. Wien“.

R. Radau: Recherches sur la théorie des refractions astronomiques. Annales de l'observatoire de Paris, tom XVI.

Tenże: Essai sur les refractions astronomiques, w tem samym wydawnictwie, tom XIX.

L. de Ball: Die Radausche Theorie der Refraktion. Wiedeń 1906. Odbitka ze „Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wiss. in Wien. Mathem.-naturw. Klasse, tom CXV, dział II a (1906).

Tenże: Über einen prinzipiellen Fehler... Astr. Nachr., tom CLXXXIX, str. 313—316.

— Der Wert der Refraktionskonstante... Astr. Nachr., tom CXCI, str. 285—300.

F. W. Bessel: Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen. *Astronomische Untersuchungen*, tom I. Królewiec 1841, str. 153—201.

Tenże: (Ten sam tytuł) *Astr. Nachr.*, tom III, str. 377 i IV str. 27, także w „Abhandlungen von F. W. Bessel“ wydanych przez R. Engelmann, tom I, Lipsk 1875, str. 237—243.

H. H. Turner: An Empirical Law of Astronomical Refraction. *Monthly Notices R. A. S.*, tom LXVIII (1907—1908), str. 496—510.

A. Wagner: Die Temperaturverhältnisse in der freien Atmosphäre. *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre*, tom III, str. 57—167.

A. Pepler: Temperatur und Druckgefälle in grossen Höhen. (To samo czasopismo), tom IV, str. 13—23.

W. J. Humphreys: The Height and Temperature of the Isothermal Region... *Bulletin of the Mount Weather Observatory*, tom IV, str. 136—142.

ROZDZIAŁ IX.

Parallaksy.

1. Kształt ziemi.

Ziemia jest ciałem nieregularnego kształtu, podobnem do elipsoidy obrotowej. Ponieważ niema żadnej możności ani potrzeby brać w rachubę wszystkie nieregularności jej kształtu, więc używamy następującego wybiegu. Zamiast figury samej ziemi rozważamy figurę pewnej powierzchni zwanej geoidą, a wszystkie nierówności powierzchni ziemi uważamy za zboczenia od geoidy. Geoida jest to to samo, co poziom morski, t. j. na oceanach średnia powierzchnia wód w spokoju, a pod lądami idealne przedłużenie powierzchni oceanów za pomocą niwelacyi. Geoida także nie jest regularną powierzchnią: składa się z kawałków analitycznie różnych powierzchni¹⁾, ale pomimo tego jest bardzo podobna do elipsoidy obrotowej, dużo podobniejsza niż fizyczna powierzchnia ziemi. Korzystamy z tego podobieństwa i obieramy pewną obrotową elipsoidę możliwie mało różną od geoidy, którą nazywamy „elipsoidą ziemską“. Pod elipsoidą możliwie mało różną od geoidy nie wszyscy geodeci rozumieją to samo, ale ostatecznie wszystkie definicye „elipsoidy ziemskiej“ są sobie mniej więcej równoważne. Możemy np. powiedzieć, że elipsoida ziemska jest to ta elipsoida obrotowa, współśrodkowa i współosiowa ze ziemią, u której suma kwadratów odległości od powierzchni geoidy jest najmniejszą. To znaczy, że wyobrażamy sobie elipsoidę obrotową mającą ten sam środek i tę samą oś obrotu co ziemia; że w każdym punkcie jej powierzchni np. *M* wystawiamy normalną, która przebiega powierzchnię geoidy w punkcie np. *N*; że powtarzamy tę samą operacyę bądź we wszystkich

¹⁾ Pisałem o tem obszerniej w mojej „Fizyce ziemi“ w rozdziale I-szym.

punktach powierzchni elipsoidy obrotowej, bądź w oddzielnych, ale bardzo gęsto i równomiernie rozsianych punktach; to znaczy wreszcie, że tworzymy Σh^2 , gdzie h oznacza odcinek MN , w taki sposób, aby żadnego punktu nie opuścić. Otóż tę elipsoidę obrotową, dla której Σh^2 jest najmniejszą, nazywamy „elipsoidą ziemską“.

Tak zwane rozmiary i spłaszczenie ziemi to są właściwie rozmiary i spłaszczenie „elipsoidy ziemskiej“. Tak samo, gdy mówimy o średnim promieniu ziemi, o promieniu lub półosi równikowej lub biegunowej, to właściwie rozumiemy średni promień, półoś równikową lub biegunową elipsoidy ziemskiej. Nic to nie szkodzi, osobliwie w rachunkach astronomicznych, bo geoida wogóle mało różni się od elipsoidy obrotowej. Zdaje się, że odległość między temi dwoma powierzchniami nigdzie nie przekracza 200 metrów. Z drugiej strony fizyczna powierzchnia ziemi, osobliwie na niskich równinach, mało różni się od geoidy. Tak zwane wzniesienia nad poziomem morza wynoszą po kilkadziesiąt lub kilkaset metrów. Średnia wysokość ładu nad poziomem morza wynosi tylko około 700 metrów. Zresztą w niektórych przypadkach uwzględniamy wysokość miejsca obserwacji nad poziomem morza. Natomiast wzniesienia (tu rozumiemy wzniesienie w sensie ogólniejszym jako dodatnie lub ujemne) geoidy nad elipsoidą nigdy nie uwzględniamy, bo go nie znamy. Wogóle z powodu nieznamości zbieżeń geoidy od elipsoidy postępujemy tak, jak gdyby te powierzchnie były identyczne i naturalnie wskutek tego popełniamy pewne, na szczęście, małe błędy; tak np. uważamy piony za prostopadłe do elipsoidy, podczas gdy pion jest prostopadły do poziomu przechodzącego przez miejsce obserwacji i tylko wyjątkowo może być identyczny z prostopadłą do elipsoidy. Prostopadła do elipsoidy obrotowej przecina się z jej małą osią, wskutek tego można przeprowadzić przez prostopadłą i przez małą oś (przez oś obrotu) płaszczyznę. Wedle definicyi będzie to płaszczyzna południka [por. rozdział VI-ty]. Ale w rzeczywistości prosta pionowa w miejscu obserwacji rozmiąga się ze ziemską osią obrotu, wskutek czego nie możemy przeprowadzić płaszczyznę jednocześnie przez prostą pionową i przez oś obrotu. Przeto rzeczywista płaszczyzna południka przechodzi jedynie przez prostą pionową, a do osi obrotu jest tylko równoległa. Co więcej, wskutek przyciągania księżycy i słońca oraz pewnych odkształceń samej ziemi kierunek siły ciężkości, t. j. pion nie jest całkiem stały, lecz podlega drobnym wahaniom. Z drugiej strony sama

ziemia wykonuje drobne oscylacje naokoło osi obrotu. Widzimy stąd, że nasze definitywy nie odpowiadają dokładnie rzeczywistości i że rozumując tak, jak gdyby były ściśle, wciąż popełniamy pewne błędy, które jednak na nasze szczęście są o tyle małe, że w astronomii, za wyjątkiem niektórych specjalnych teorii, można je bez szkody pomijać.

Powróćmy teraz do rozmiarów ziemi, t. j. właściwie do rozmiarów elipsoidy ziemskiej. W dawniejszych tablicach i podręcznikach, poczynawszy od lat czterdziestych przeszłego stulecia, zazwyczaj przyjmowano wymiary elipsoidy ziemskiej Bessla, mianowicie:

spłaszczenie	$e = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{299,15}$,
połowa większej (równikowej) osi	$a = 6377397,15$ metrów,
„ „ mniejszej (biegunowej) „	$b = 6356078,96$ „

Pod koniec XIX wieku zaczęły torować sobie drogę wymiary Clarke'go (podane w r. 1880)

$$e = \frac{1}{293,5}$$

$$a = 6378249 \text{ metrów}$$

$$b = 6356515 \quad "$$

Lecz wkrótce spostrzeżono, że spłaszczenie Clarke'go jest za duże. Z ogromnego mnóstwa pomiarów wahadłowych Helmert wyliczył spłaszczenie

$$e = \frac{1}{298,3}^{1)}$$

o wiele bliższe do spłaszczenia Bessla. Jednocześnie z nowszych pomiarów geodezyjnych wynioskowano, że a Bessla jest za małe, natomiast a Clarke'go jest prawdopodobnie bliższe prawdy. Gdy w r. 1907 przed pomiarami w Egipcie zapytano F. R. Helmerta, to doradził przyjąć

$$e = \frac{1}{298,3}, \quad a = 6378200 \text{ metr.}$$

¹⁾ Właściwie powinno było wypaść $\frac{1}{298,25}$. Por. moją rozprawę p. t.: *Sur la détermination de la figure de la terre d'après les mesures de la gravité*. „Bulletin astronomique“, tom XXII (1905 r.), str. 69, uwaga w dole.

Lecz w Październiku 1911 r. w Paryżu na konferencji, mającej na celu zreformowanie i ujednostajnienie efemeryd, pod wrażeniem ostatnich prac J. Hayforda, opartych na niektórych pomiarach w Stanach Zjednoczonych, przyjęto zaproponowane przez gen. Bourgeois

$$e = \frac{1}{297}$$

$$a = 6378400 \text{ metr. } ^1).$$

Z porównania tych liczb widać, że pólisie elipsoidy ziemskiej są jeszcze o paręset metrów niepewne, a mianownik ułamka wyrażającego spłaszczenie jeszcze o jednostkę niepewny. Charakterystycznym jest to, że coraz to późniejsze cyfry są coraz to więcej zaokrąglone. Doświadczenie nauczyło skromności! Ale jeżeli wymiary pólisi są o paręset metrów niepewne, to jasną jest rzeczą, że nawet przy obliczeniu parallaksy księżyca nie warto uwzględniać wysokości miejsca obserwacji nad poziomem morza, chyba to wzniesienie jest znaczne, np. wynosi 1000 lub więcej metrów, a chodzi o wielką dokładność. Niewielkie wzniesienia, np. wzniesienie Krakowa nad poziomem morza, są zawarte w granicach niepewności samych pólisi.

Odtąd będziemy rozumować tak, jak gdyby ziemia była elipsoidą obrotową.

2. Szerokość geograficzna, szerokość geocentryczna. Odległość od środka elipsoidy i t. d.

Szerokością geocentryczną nazywamy kąt między płaszczyzną równika a promieniem wodzącym poprowadzonym ze środka elipsoidy ziemskiej do miejsca obserwacji. Szerokość geograficzna jest to kąt między prostą pionową w miejscu obserwacji a płaszczyzną równika, ponieważ zaś uważamy prostą pionową za normalną do elipsoidy, więc możemy powiedzieć, że to jest kąt między prostą prostopadłą do elipsoidy w miejscu obserwacji a płaszczyzną równika. Na podstawie tych definicji łatwo znaleźć związek między szerokością geograficzną a geocentryczną. Przeprowadźmy płaszczyznę przez prostopadłą do elipsoidy w miejscu obserwacji i przez oś obrotu. Ponieważ mamy do czynienia z elipsoidą obrotową, więc

¹⁾ $b = a(1 - e)$

to jest zupełnie możebne. Z drugiej strony z uwag poczynionych w poprzednim paragrafie wiemy, że płaszczyzna nasza to płaszczyzna południka. Środek elipsoidy obieramy za środek współrzędnych prostokątnych, przecięcie płaszczyzny południka z płaszczyzną równika obieramy za oś x a oś obrotu za oś y . Równanie elipsy południkowej, wzdłuż której płaszczyzna południka przecina się z powierzchnią elipsoidy, jest

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Oznaczmy szerokość geograficzną przez φ a szerokość geocentryczną przez φ' . Z definicji szerokości geocentrycznej natychmiast wynika

$$\text{tang } \varphi' = \frac{y}{x},$$

a z definicji szerokości astronomicznej wynika

$$\text{tang } \varphi = -\frac{dx}{dy}.$$

Różniczkując równanie elipsy otrzymamy

$$\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0,$$

skąd

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2 dx}{a^2 dy},$$

t. j.

$$(1) \quad \text{tang } \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \text{ tang } \varphi = (1 - \varepsilon^2) \text{ tang } \varphi,$$

jeżeli wprowadzimy „mimośród“ określony przez równanie

$$(2) \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 2e - e^2.$$

Do równania (1) możemy zastosować wzór (2) rozdziału V-go. Połóżmy

$$m = \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2,$$

wtedy

$$\frac{m - 1}{m + 1} = -\frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2} = -\frac{2e - e^2}{2 - 2e + e^2} = -q,$$

gdzie q jest to nowy symbol, który wprowadzamy dla krótkości. Na podstawie pomienionego wzoru (2) z rozdziału V-go możemy odrazu napisać:

$$\varphi' = \varphi - q \sin 2\varphi + \frac{q^2}{2} \sin 4\varphi - \dots \quad (3)$$

Przyjmując

$$e = \frac{1}{297},$$

znajdziemy:

$$q = \frac{593}{175825} = 0,0033726 \dots \quad \frac{1}{2} q^2 = 0,00000568 \dots$$

Aby otrzymać współczynniki szeregu (3) w sekundach kątowych, trzeba te liczby pomnożyć przez 206264,8... Otrzymamy wtedy

$$\varphi' = \varphi - 695,663 \dots \sin 2\varphi + 1,173 \dots \sin 4\varphi - \dots \quad (3 \text{ bis})$$

Promień wodzący pod szerokością φ , czyli, inaczej mówiąc, odległość punktu położonego pod szerokością φ w powierzchni elipsoidy od jej środka, wyraża się przez wzór

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ale z równania elipsy mamy

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = a^2,$$

a obok tego mamy

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi' = (1 - \varepsilon^2) \tan \varphi.$$

Z tych dwóch równań natychmiast wynikają równania

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \\ y &= \frac{a (1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{\rho}{a} &= \sqrt{\frac{1 - 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \varepsilon^4 \sin^4 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

W Krakowie (obserwatoryum) $\varphi = 50^{\circ} 3' 51,9$. Kładąc znowu $e = \frac{1}{297}$ znajdziemy ze wzorów (3 bis) i trzeciego (4)

$$\varphi' = 49^{\circ} 52' 26,7, \quad \frac{e}{a} = 0,9980273 \dots$$

Z ryciny 12 zaraz widać, że długość odcinka normalnej od powierzchni elipsoidy obrotowej do przecięcia z osią obrotu jest MC , jeżeli więc oznaczmy tę długość przez N , to

$$N = MC = \frac{x}{\cos \varphi}.$$

Jeżeli tu podstawimy x z pierwszego wzoru (4), to zaraz otrzymamy

$$(5) \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Obliczymy jeszcze promień krzywizny południka pod szerokością φ . Wiadomo, że promień krzywizny, który oznaczamy przez R , wyraża się wzorem

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

ale

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3};$$

tedy

$$R = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}{a^4 b^4}.$$

Jeżeli tu podstawimy x i y ze wzorów (4), a b^2 zastąpimy przez $a^2(1 - \varepsilon^2)$, to otrzymamy

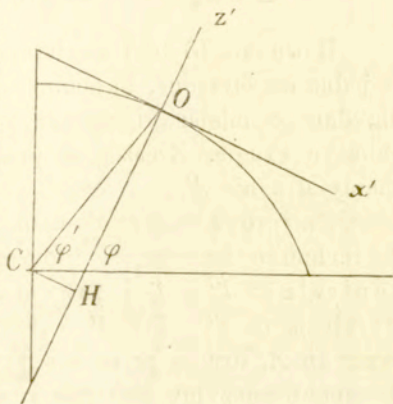
$$(6) \quad R = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}.$$

3. Parallaksa zenitalna i azymutalna.

Parallaksą nazywamy kąt między kierunkami idącymi z dwóch różnych stanowisk do tego samego punktu. Z parallaksami mamy

do czynienia przy przejściu od współrzędnych widomych do geocentrycznych, lub od geocentrycznych do widomych.

Weźmy dwa systemy współrzędnych prostokątnych, równoległych. W pierwszym systemie środek znajduje się w miejscu obserwacji, dodatnia oś z' jest skierowana pionowo w górę, dodatnia oś x' horyzontalnie i ku południowi, dodatnia oś y' horyzontalnie i ku zachodowi. W drugim systemie środek współrzędnych znajduje się w środku ziemi C , zaś osie są równoległe do poprzednich i tak samo skierowane. W pierwszym systemie oznaczamy współrzędne przez x', y', z' , w drugim przez x, y, z . Oznaczamy odległość od miejsca obserwacji O do ciała niebieskiego (raczej do jego środka) przez Δ' , a odległość od C przez Δ , dalej oznaczamy widomą odległość zenitalną ciała niebieskiego przez ζ' , a geocentryczną przez ζ , wreszcie widomy azymut przez A' , a geocentryczny przez A ; wtedy



Ryc. 13.

$$\left. \begin{aligned} x' &= \Delta' \sin \zeta' \cos A', & x &= \Delta \sin \zeta \cos A \\ y' &= \Delta' \sin \zeta' \sin A', & y &= \Delta \sin \zeta \sin A \\ z' &= \Delta' \cos \zeta', & z &= \Delta \cos \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Pomiędzy współrzędnymi x, y, z i x', y', z' mamy związki

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y' \\ z &= z_0 + z', \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

przyczem z ryc. 13 zaraz widać, że $\sphericalangle COH = \varphi - \varphi'$ oraz że

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= CH = \varrho \sin (\varphi - \varphi') \\ y_0 &= O \\ z_0 &= HO = \varrho \cos (\varphi - \varphi'). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Skoro podstawimy wartości ze wzorów (7) i (9) we wzory (8), to te ostatnie przejdą na

$$(8 \text{ bis}) \begin{cases} \Delta' \sin \zeta' \cos A' = \Delta \sin \zeta \cos A - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \\ \Delta' \sin \zeta' \sin A' = \Delta \sin \zeta \sin A \\ \Delta' \cos \zeta' = \Delta \cos \zeta - \varrho \cos(\varphi - \varphi'). \end{cases}$$

Równania (8 bis) zawierają rozwiązanie zadania. Jeżeli dane są jedne współrzędne, to ponieważ $\varrho \sin(\varphi - \varphi')$ i $\varrho \cos(\varphi - \varphi')$ są dla danego miejsca obserwacji znane¹⁾, łatwo z równań (8 bis) obliczyć drugie. Zresztą w praktyce zwykle zdarza się tak, że znamy Δ a nie Δ' .

Przyprowadzamy równania (8 bis) do innego dogodniejszego do rachunku kształtu, w którym wystąpi na jaw „parallaksa zenitalna“ $\zeta' - \zeta$ i „azymutalna“ $A' - A$. Aby otrzymać wyrażenia na $\zeta' - \zeta$ i $A' - A$ mnożymy pierwsze równanie (8 bis) przez $\sin A$, drugie przez $\cos A$ i odejmujemy jedno od drugiego, następnie mnożymy pierwsze równanie (8 bis) przez $\cos A$, drugie przez $\sin A$ i dodajemy jedno do drugiego. Otrzymamy

$$(10) \begin{cases} \Delta' \sin \zeta' \sin(A' - A) = \varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A \\ \Delta' \sin \zeta' \cos(A' - A) = \Delta \sin \zeta - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A, \end{cases}$$

skąd

$$(11) \quad \text{tang}(A' - A) = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\Delta \sin \zeta - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A}.$$

Z drugiej strony mnożąc pierwsze równanie (10) przez $\sin \frac{1}{2}(A' - A)$, a drugie przez $\cos \frac{1}{2}(A' - A)$ i dodając oba równania — po oczywistych przekształceniach otrzymamy

$$\Delta' \sin \zeta' \cos \frac{1}{2}(A' - A) = \Delta \sin \zeta \cos \frac{1}{2}(A' - A) - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos \frac{1}{2}(A' + A),$$

skąd po podzieleniu przez $\cos \frac{1}{2}(A' - A)$ wynika

$$\Delta' \sin \zeta' = \Delta \sin \zeta - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)}.$$

¹⁾ Te dwie wielkości są dla danego miejsca obserwacji nie tylko znane, ale stałe. Por. poprzedni paragraf.

Wprowadźmy kąt pomocniczy γ określony przez równanie

$$\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} (\varphi - \varphi') \frac{\cos \frac{1}{2} (A' + A)}{\cos \frac{1}{2} (A' - A)}; \quad (12)$$

wtedy będziemy mogli napisać poprzednie równanie i trzecie równanie (8 bis) w kształcie

$$\begin{aligned} \Delta' \sin \zeta' &= \Delta \sin \zeta - \varrho \cos (\varphi - \varphi') \operatorname{tang} \gamma \\ \Delta' \cos \zeta' &= \Delta \cos \zeta - \varrho \cos (\varphi - \varphi'). \end{aligned} \quad (13)$$

Mnożąc pierwsze z nich przez $\cos \zeta$, a drugie przez $\sin \zeta$ i odejmując drugie od pierwszego, potem mnożąc pierwsze przez $\sin \zeta$, a drugie przez $\cos \zeta$ i dodając otrzymamy dwa równania

$$\begin{aligned} \Delta' \sin (\zeta' - \zeta) &= \varrho \cos (\varphi - \varphi') \frac{\sin (\zeta - \gamma)}{\cos \gamma} \\ \Delta' \cos (\zeta' - \zeta) &= \Delta - \varrho \cos (\varphi - \varphi') \frac{\cos (\zeta - \gamma)}{\cos \gamma}, \end{aligned}$$

z których zaraz wynika

$$\operatorname{tang} (\zeta' - \zeta) = \frac{\varrho \cos (\varphi - \varphi') \sin (\zeta - \gamma)}{\Delta \cos \gamma - \varrho \cos (\varphi - \varphi') \cos (\zeta - \gamma)}. \quad (14)$$

Pomnóżmy jeszcze pierwsze równanie (13) przez $\cos \gamma$, a drugie przez $\sin \gamma$ i odejmijmy jedno od drugiego. Otrzymamy w ten sposób równanie

$$\Delta' \sin (\zeta' - \gamma) = \Delta \sin (\zeta - \gamma),$$

które napiszemy w kształcie

$$\Delta' = \Delta \frac{\sin (\zeta - \gamma)}{\sin (\zeta' - \gamma)}. \quad (15)$$

Powyższe równania odnoszą się do przypadku, gdy dane są współrzędne widome, a geocentryczne są niewiadome. Rzeczywiście zaraz widać, że gdy dane są widome współrzędne, to rozwiązując kolejno równania (11), (12), (14) a naostatku (15) wciąż będziemy mieli po prawej stronie równań same wiadome wielkości. Gdyby odwrotnie dane były geocentryczne współrzędne, a trzeba było przejść do widomych, to postępując zupełnie tak samo jak poprzednio, ale mnożąc przez $\sin A'$, $\cos A'$ tam, gdzie mnożyliśmy przez $\sin A$ i przez $\cos A$, oraz mnożąc przez $\sin \zeta'$, $\cos \zeta'$ tam, gdzie

mnożyliśmy przez $\sin \zeta$ i $\cos \zeta$, otrzymamy analogiczne do poprzednich równania. Równania (12) i (15) będą ściśle te same, a zamiast równań (11) i (14) otrzymamy równania:

$$(16) \quad \begin{aligned} \operatorname{tang}(A - A') &= -\frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A'}{\Delta' \sin \zeta' + \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A'} \\ \operatorname{tang}(\zeta - \zeta') &= \frac{\varrho \cos(\varphi - \varphi') \sin(\zeta - \gamma)}{\Delta' + \varrho \cos(\varphi - \varphi') \cos(\zeta - \gamma)}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że na kuli $\varphi - \varphi' = 0$, $A - A' = 0$. Widzimy stąd, że $A' - A$, jako zależne od spłaszczenia, jest małe. Zresztą rzadko zdarza się, abyśmy potrzebowali obliczać „parallaksę azy-mutalną“. Zazwyczaj obserwujemy w południku; wtedy $A' = A = 0$, równanie (11) jest spełnione identycznie, równanie (12) przechodzi w

$$(12 \text{ bis}) \quad \gamma = \varphi - \varphi',$$

zaś równania (14) i (15) przywodzą się do

$$(14 \text{ bis}) \quad \operatorname{tang}(\zeta' - \zeta) = \frac{\varrho \sin(\zeta - \varphi + \varphi')}{\Delta - \varrho \cos(\zeta - \varphi + \varphi')}$$

i

$$(15 \text{ bis}) \quad \Delta' = \Delta \frac{\sin(\zeta - \varphi + \varphi')}{\sin(\zeta' - \varphi + \varphi')}.$$

Dogodnie jest zastosować do równania (14 bis) wzór (1) z rozdziału V-go, przyczem oczywiście należy położyć¹⁾

$$m = \frac{\varrho}{\Delta}.$$

Zaraz rozwiniemy (14 bis) w szereg, tylko wprzódki zajmiemy się nieco stosunkiem $\frac{\varrho}{\Delta}$. Napiszmy tożsamość

$$\frac{\varrho}{\Delta} = \frac{\varrho}{a} \cdot \frac{a}{\Delta}.$$

¹⁾ Naturalnie można tak samo zastosować wzór (1) z rozdziału V-go do wzorów (11) i (14), trzeba tylko w pierwszym razie położyć

$$m = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi')}{\Delta \sin \zeta},$$

a w drugim

$$m = \frac{\varrho \cos(\varphi - \varphi')}{\Delta \cos \zeta}.$$

Czynnik $\frac{\varrho}{a}$ jest stały dla danego miejsca obserwacji, obliczamy go raz na zawsze za pomocą wzoru (4) niniejszego rozdziału. Czynniki $\frac{a}{\Delta}$ jest to tak zwana „horyzontalna równikowa parallaksa“. Ze wzoru (14) widać, że zenitalna parallaksa wzrasta razem z ζ , maximum osiąga wtedy, gdy

$$\cos(\zeta - \gamma) = \frac{\varrho}{\Delta} \cdot \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\cos \gamma},$$

t. j. jeszcze ponad horyzontem, ale już blisko niego. W samym horyzontie nazywamy parallaksę „horyzontalną“. Na równiku $\varphi = \varphi' = 0$, wskutek czego parallaksa azymutalna jest zawsze równa zeru (por. wzór 11) i tak samo $\gamma = 0$; następnie na równiku $\varrho = a$, przeto zenitalna horyzontalna parallaksa przywodzi się do $\frac{a}{\Delta}$. Horyzontalna równikowa parallaksa to ten kąt, pod którym widać ze środka ciała niebieskiego połowę równikowej średnicy ziemi. Oznaczamy go przez $\tilde{\omega}$, t. j. kładziemy

$$\text{tang } \tilde{\omega} = \frac{a}{\Delta},$$

ale ponieważ kąt $\tilde{\omega}$ jest zawsze bardzo mały (oprócz przypadku księżycy), więc zamiast tangensa piszemy sam kąt i przyjmujemy

$$\tilde{\omega} = \frac{a}{\Delta}, \quad (17)$$

albo też, jeżeli chodzi o to, aby wyrazić $\tilde{\omega}$ w sekundach kątowych

$$\tilde{\omega} = 206264,8 \frac{a}{\Delta}. \quad (17 \text{ bis})$$

Parallaksy horyzontalne¹⁾ równikowe słońca, księżycy i planet są podane w efemerydach: parallaksy księżycy nawet dwa razy

¹⁾ Od czasów konferencji paryskiej w r. 1896 efemerydy przyjmują 8,8, jako średnią parallaksę słońca. Zdaje się, że ta liczba jest cokolwiek za mała. Z obserwacji Erosa A. R. Hinks obliczył średnią parallaksę słońca 8,806 ± 0,004. Vide: A. R. Hinks: General Solution... i t. d. Monthly Notices, tom LXX, str. 588—603, specjalnie str. 603.

Za najprawdopodobniejszą średnią parallaksę księżycy S. Newcomb uważa 57' 2,63, Spher. Astr., str. 150.

na dobę, innych ciał raz na dobę, niektórych dalszych planet raz co dwa dni.

Powracając do rozwinięcia wzoru (14 bis) w szereg piszemy:
 $m = \frac{\varrho}{a} \tilde{\omega}$, stosujemy wzór (1) z rozdziału V-go (kładąc w nim $n = 0$) i otrzymujemy

$$(18) \quad \zeta' - \zeta = \frac{\varrho}{a} \tilde{\omega} \sin(\zeta - \varphi + \varphi') + \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho}{a} \tilde{\omega} \right)^2 \sin 2(\zeta - \varphi + \varphi') + \dots$$

We wzorze tym należy podstawić $\tilde{\omega}$ ze wzoru (17), jeżeli zaś chcemy otrzymać $\zeta' - \zeta$ w sekundach kątowych, to po podstawieniu $\tilde{\omega}$ należy całą prawą stronę wzoru pomnożyć przez 206264''8...

Do gwiazd stałych poprawki na parallaksę nie stosujemy, bo jest zawsze znikoma, dla słońca i planet wystarcza pierwszy wyraz szeregu (18), dla księżyca trzeba wziąć trzy wyrazy a także należy pisać $\tan \tilde{\omega}$ zamiast $\tilde{\omega}$. Zresztą gdy chodzi o księżyc, to zwykle obliczamy parallaksy z pierwotnych wzorów przekształcając je w taki sposób, aby były dostępne do rachunku logarytmicznego. Mianowicie wzory (12), (14) i (16) mają kształt

$$\tan y = \frac{m \sin x}{1 - m \cos x}.$$

Kładziemy $m \cos x = \sin M$ i przekształcamy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \tan y &= \frac{\sin M \tan x}{1 - \sin M} = \tan M \frac{\cos M}{1 - \sin M} \tan x = \\ &= \tan M \frac{1 + \sin M}{\cos M} \tan x \\ &= \tan M \frac{1 + 2 \sin \frac{1}{2} M \cos \frac{1}{2} M}{\cos^2 \frac{1}{2} M - \sin^2 \frac{1}{2} M} \tan x = \\ &= \tan M \frac{\cos \frac{1}{2} M + \sin \frac{1}{2} M}{\cos \frac{1}{2} M - \sin \frac{1}{2} M} \tan x \\ &= \tan M \tan (45^\circ + \frac{1}{2} M) \tan x. \end{aligned}$$

Przekształcamy tak tylko dla dogodności, bo nie należy sądzić, aby wzory w rodzaju (18) były (w rachunku!) mniej ściśle niż wzory pierwotne. Wszak obliczamy wzory pierwotne z pomocą logarytmów, które same są obliczone z pewnych szeregów. Jeżeli

rozwiniecie w szereg jest szybko zbieżne, to biorąc dostateczną ilość wyrazów, możemy otrzymać nawet dokładniejsze rezultaty aniżeli te, które otrzymujemy ze wzorów pierwotnych obliczanych przez logarytmy.

4. Parallaksa w deklinacji i rektascensyi oraz w szerokości i długości.

Wzory na parallaksę w deklinacji i rektascensyi wyprowadzamy tak samo jak wzory poprzedniego paragrafu. Znowu bierzemy dwa systemy współrzędnych prostokątnych: jeden widomy, drugi geocentryczny, ale obieramy inne kierunki za główne, mianowicie takie, aby oba systemy współrzędnych były systemami równikowymi¹⁾; a więc dodatnia oś z będzie skierowana ku północy, dodatnia oś x ku wiosennemu porównaniu dnia z nocą, a dodatnia oś y skierowana w taki sposób, że chcąc przejść od osi $+x$ do osi $+y$ musimy opisać kąt 90° przeciw wskazówkom zegarka (wyobrażamy sobie przytem, że na płaszczyznę równika, w której leżą osie x i y , patrzymy z górnej, północnej strony). Geocentryczne współrzędne ciała niebieskiego będą teraz

$$\Delta \cos \delta \cos \alpha, \quad \Delta \cos \delta \sin \alpha, \quad \Delta \sin \delta,$$

widome współrzędne ciała niebieskiego będą

$$\Delta' \cos \delta' \cos \alpha', \quad \Delta' \cos \delta' \sin \alpha', \quad \Delta' \sin \delta',$$

wreszcie współrzędne miejsca obserwacji względem środka ziemi będą

$$\rho \cos \varphi' \cos \Theta, \quad \rho \cos \varphi' \sin \Theta, \quad \rho \sin \varphi'.$$

Czas gwiazdowy Θ wchodzi we wyrażenia współrzędnych miejsca obserwacji, bo, jak to wiemy już z rozdziału VI-go § 6, jest on jednocześnie rektascensją miejsca obserwacji²⁾. Że zresztą współrzędne miejsca obserwacji w tych systemach współrzędnych nie mogą być stałe, to jest zupełnie jasne, bo oba systemy w ruchu obrotowym ziemi nie uczestniczą. Z drugiej strony jeden rzut oka na ryc. 12 lub 13 wystarczy, aby przekonać nas, że dla miejsca obserwacji rolę deklinacji odgrywa szerokość geocentryczna φ' .

¹⁾ Por. rozdział VI-ty §§ 3 i 4.

²⁾ Naturalnie musimy go liczyć jako kąt.

Podobnie jak w poprzednim paragrafie możemy napisać trzy równania

$$(19) \quad \begin{cases} \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' = \Delta \cos \delta \cos \alpha - \varrho \cos \varphi' \cos \Theta \\ \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' = \Delta \cos \delta \sin \alpha - \varrho \cos \varphi' \sin \Theta \\ \Delta' \sin \delta' = \Delta \sin \delta - \varrho \sin \varphi'. \end{cases}$$

Traktując je tak samo, jak w poprzednim przypadku, otrzymamy równania

$$(20) \quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\varrho \cos \varphi' \sin(\alpha - \Theta)}{\Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \cos(\alpha - \Theta)} \\ \operatorname{tang}(\delta' - \delta) = \frac{\varrho q \sin(\delta - \gamma_1)}{\Delta - \varrho q \cos(\delta - \gamma_1)} \\ \Delta' \sin(\delta' - \gamma_1) = \Delta \sin(\delta - \gamma_1). \end{cases}$$

Wielkości pomocnicze q i γ_1 określamy z równań

$$(21) \quad \begin{cases} q \cos \gamma_1 = \frac{\cos \varphi' \cos[\Theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]}{\cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)} \\ q \sin \gamma_1 = \sin \varphi' \end{cases}$$

Wzory (20) odnoszą się do przypadku, gdy dane są geocentryczne współrzędne. Gdyby dane były współrzędne widome, to wzory: ostatni (20) i oba wzory (21) pozostałyby bez zmiany, a zamiast dwóch pierwszych wzorów (20) należałoby napisać

$$(20 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\alpha - \alpha') = -\frac{\varrho \cos \varphi' \sin(\alpha' - \Theta)}{\Delta' \cos \delta' + \varrho \cos \varphi' \cos(\alpha' - \Theta)} \\ \operatorname{tang}(\delta - \delta') = -\frac{\varrho q \sin(\delta' - \gamma_1)}{\Delta' + \varrho q \cos(\delta' - \gamma_1)}. \end{cases}$$

Zazwyczaj obserwujemy w południku; wtedy

$$\alpha - \Theta = 0,$$

przeto, jak to widać z pierwszego wzoru (20), poprawka w rekta-scensyi jest zerem. Było to do przewidzenia, bo parallaksa azy-mutalna znika w południku. Zauważmy przytem, że na wschód od południka $\alpha' > \alpha$, a na zachód $\alpha' < \alpha$. Lecz skoro $\alpha' - \alpha = 0$ i $\alpha - \Theta = 0$, to wzory (21) dają:

$$q = 1, \quad \gamma_1 = \varphi',$$

i wzory (20) znacznie upraszczają się. Ostatecznie dla południka mamy zamiast wzorów (20)

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha' &= 0 \\ \text{tang}(\delta - \delta') &= \frac{\varrho \sin(\delta - \varphi')}{\Delta - \varrho \cos(\delta - \varphi')} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Skoro rozwiniemy drugi wzór (22) za pomocą wzoru (1) z rozdziału V-go, to otrzymamy szereg zupełnie podobny do (18) z tą tylko różnicą, że po lewej stronie na miejscu $\zeta' - \zeta$ będzie stać $\delta' - \delta$, a po prawej na miejscu $\zeta - \varphi + \varphi'$ będzie stać $\delta - \varphi'$. Oczywiście można tak samo rozwinąć oba wzory (20).

Wzorów na parallaksę w długości i szerokości nie piszemy, bo są zupełnie podobne do wzorów (20), względnie (20 bis). Trzeba tylko zamiast α i δ wszędzie podstawić λ i β , zaś zamiast rekta-scensyi obserwatoryum Θ i jego deklinacyi φ' należy podstawić jego geocentryczną długość i szerokość — powiedzmy — l i b . Te ostatnie wielkości obliczamy z Θ i φ' za pomocą wzorów (4) rozdziału VI.

5. Średnice planet widome i geocentryczne.

U tych ciał niebieskich, które nie przedstawiają się jako punkty, ale jako ciała o skończonej średnicy, parallaksa ma wpływ na rozmiary, t. j. w obserwatoryum widzimy inne rozmiary aniżeli te, które widzielibyśmy ze środka ziemi. Oznaczmy średnicę ciała widzianą ze środka ziemi przez D , a średnicę widzianą z obserwatoryum przez D' . Oczywiście

$$D : D' = \Delta' : \Delta,$$

ale wedle równania (15)

$$\Delta' : \Delta = \sin(\zeta - \gamma) : \sin(\zeta' - \gamma),$$

zaś wedle trzeciego równania (20)

$$\Delta' : \Delta = \sin(\delta - \gamma_1) : \sin(\delta' - \gamma_1).$$

Z tych proporcji wynika

$$D' : D = \sin(\zeta' - \gamma) : \sin(\zeta - \gamma) = \sin(\delta' - \gamma_1) : \sin(\delta - \gamma_1). \quad (23)$$

6. Parallaksy roczne gwiazd.

W § 3 zauważyliśmy już, że parallaksy gwiazd stałych są znikome. Mieliliśmy tam na myśli parallaksy w zwykłym znaczeniu tego słowa, t. j. różnice kierunków między promieniami wodzącymi idącymi od środka ziemi do gwiazdy i od obserwatorium do gwiazdy. Ponieważ te różnice są zupełnie znikome, więc obserwacje gwiazd stałych zrobione na różnych obserwatoriach można traktować tak, jak gdyby były dokonane w środku ziemi. Jednakże obserwacje gwiazd dokonane w różnych epokach nie są porównywalne, jeżeli obserwowana gwiazda ma dającą się zmierzyć „roczną parallaksę“, t. j. jeżeli kierunki od ziemi do gwiazdy wyznaczone w półrocznych odstępach czasu tworzą ze sobą kąt dający się zmierzyć.

„Parallaksą roczną“ nazywamy kąt, pod którym widać z gwiazdy połowę średnicy¹⁾ orbity ziemskiej. Ponieważ połowa średnicy orbity ziemskiej jest około 23000 razy większa niż połowa równikowej średnicy ziemi, więc parallaksa roczna jest także około 23000 razy większa od zwykłej horyzontalnej równikowej parallaksy i daje się zmierzyć wtedy, gdy ta druga jest zupełnie nieuchwytna.

Swoją drogą parallaksy roczne gwiazd stałych są tak małe — największa z nich, parallaksa α Centauri wynosi tylko około 0,75, że mierzenie ich jest połączone z ogromnymi trudnościami. Nad trudnościami temi rozwodzić się nie możemy, zato powiemy, jaki wpływ ma parallaksa roczna na współrzędne geocentryczne, ekliptyczne gwiazdy. Obieramy współrzędne ekliptyczne, bo wtedy zadanie przedstawia się w najprostszej formie.

Zadanie jest zupełnie podobne do zadania § 4 niniejszego rozdziału, tylko zamiast środka ziemi trzeba wziąć środek słońca, zamiast obserwatorium trzeba wziąć środek ziemi, zamiast odległości obserwatorium od środka ziemi ϱ , trzeba wziąć odległość ziemi od słońca R , zamiast odległości planety od środka ziemi — odległość gwiazdy od słońca, którą oznaczymy przez Δ , wreszcie zamiast równika trzeba wziąć ekliptykę. Ponieważ ziemia krąży w płaszczyźnie ekliptyki (drobne wychylenia pomijamy), więc analogiczna do φ' szerokość samej ziemi będzie zerem. Stąd zaraz wy-

¹⁾ W teorii „parallaksy rocznej“ można śmiało uważać orbitę ziemską za koło.

nika, że pomocniczy kąt γ_1 jest także zerem. Rolę geocentrycznej rektascensyi gwiazdy α odgrywa tu jej heliocentryczna długość λ_* , rolę geocentrycznej deklinacyi δ odgrywa tu heliocentryczna szerokość gwiazdy β_* . Tak samo zamiast widomych współrzędnych α' i δ' napiszemy tu geocentryczną długość i szerokość gwiazdy λ i β . Wreszcie rolę czasu gwiazdowego odgrywa tu heliocentryczna długość ziemi, ale ta równa jest geocentrycznej (podawanej w efemerydach) długości słońca \odot powiększonej¹⁾ o 180° . Bierzemy najpierw wzory (21). Ponieważ $\varphi' = \gamma_1 = 0$, więc pomijając jeszcze bardzo małą różnicę między λ i λ' otrzymamy na pomocniczą wielkość q wyrażenie

$$q = \cos(\odot + 180^\circ - \lambda_*) = -\cos(\odot - \lambda_*)$$

Teraz bierzemy wzory (20), wstawiamy nowe symbole, pomijamy w mianownikach drugie wyrazy, jako w porównaniu z pierwszymi bardzo małe, i piszemy

$$\text{tang}(\lambda - \lambda_*) = \frac{R \sin(\lambda_* - \odot - 180^\circ)}{\Delta_* \cos \beta}$$

$$\text{tang}(\beta - \beta_*) = -\frac{R}{\Delta_*} \sin \beta_* \cos(\odot - \lambda_*).$$

Po lewej stronie zamiast tangensów możemy naturalnie napisać same kąty. Z drugiej strony oznaczając roczną parallaksę przez p , możemy²⁾ zupełnie tak samo jak we wzorze (17) położyć

$$\frac{R}{\Delta_*} = p.$$

Otrzymamy wtedy ostatecznie

$$\left. \begin{aligned} \lambda - \lambda_* &= -\frac{p \sin(\lambda_* - \odot)}{\cos \beta_*} \\ \beta - \beta_* &= -p \sin \beta_* \cos(\lambda_* - \odot). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

¹⁾ Jest to rzecz zupełnie jasna, że jeżeli ze słońca widać ziemię w pewnym punkcie sfery niebieskiej, to ze ziemi widać słońce w punkcie wprost przeciwnym.

²⁾ Powiedzieliśmy już wyżej, że w teorii rocznej parallaksy wolno uważać orbitę ziemską za koło.

Pierwszy wzór (24) jest oczywiście w najbliższem sąsiedztwie bieguna ekliptyki nieprzydatny, trzeba tam używać ścisłego wzoru

$$(25) \quad \text{tang} (\lambda - \lambda_s) = \frac{p \sin (\odot - \lambda_s)}{\cos \beta_s + p \cos (\odot - \lambda_s)}.$$

W samym biegunie ekliptyki, t. j. dla $\beta_s = 90^\circ$, λ_s staje się nieokreślonym, wskutek czego wzór (25) staje się także nieprzydatnym. Trzeba sięgnąć aż do wzorów analogicznych do wzorów (19)

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \cos \beta \cos \lambda = \Delta_s \cos \beta_s \cos \lambda_s + R \cos \odot \\ \Delta \cos \beta \sin \lambda = \Delta_s \cos \beta_s \sin \lambda_s + R \sin \odot \\ \Delta \sin \beta = \Delta_s \sin \beta_s. \end{array} \right.$$

Dla $\beta_s = 90^\circ$ wzory (26) przywodzą się do

$$\begin{aligned} \Delta \cos \beta \cos \lambda &= R \cos \odot \\ \Delta \cos \beta \sin \lambda &= R \sin \odot \\ \Delta \sin \beta &= \Delta_s. \end{aligned}$$

Stąd wynika

$$\Delta \cos \beta = R \cos (\odot - \lambda)$$

a jednocześnie

$$\Delta \cos \beta \cos (\odot - \lambda) = R.$$

Te dwa równania dają się między sobą pogodzić tylko w takim razie, jeżeli $\cos (\odot - \lambda) = \pm 1$, t. j. jeżeli $\lambda = \odot$, albo jeżeli $\lambda = \odot + 180^\circ$. Łatwa konstrukcyja przekonuje nas, że należy wybrać hipotezę

$$\lambda = \odot \quad [\beta_s = 90^\circ].$$

Lecz skoro $\cos (\odot - \lambda) = 1$, to

$$\Delta \cos \beta = R,$$

z drugiej strony trzecie równanie daje

$$\Delta \sin \beta = \Delta_s.$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez $\sin \beta_s = 1$, a drugie przez $\cos \beta_s = 0$ i odejmując pierwsze od drugiego otrzymamy

$$\Delta \sin (\beta - \beta_s) = -R,$$

skąd wynika

$$\beta - \beta_s = -p, \quad [\beta_s = 90^\circ],$$

bo oczywiście można pominąć drobną różnicę między $\frac{R}{\Delta}$ a $\frac{R}{\Delta_s}$.

Wróćmy teraz do wzorów (24). Przy ich pomocy łatwo rozpoznamy zmiany pozycyi gwiazdy zależne od parallaksy rocznej. Niechaj pozycya heliocentryczna gwiazdy będzie środkiem współrzędnych prostokątnych. Weźmy styczną do równoleżnika szerokości za oś x a styczną do koła długości za oś y . Pomijając wielkości drugiego rzędu możemy napisać

$$\begin{aligned}x &= (\lambda - \lambda_*) \cos \beta_* \\y &= \beta - \beta_*.\end{aligned}$$

Podstawmy tu wartości na $\lambda - \lambda_*$ i $\beta - \beta_*$ ze wzorów (24), a otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{x}{p} &= -\sin(\lambda_* - \odot) \\ \frac{y}{p \sin \beta_*} &= -\cos(\lambda_* - \odot),\end{aligned}$$

skąd wynika

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2 \sin^2 \beta_*} = 1. \quad (27)$$

Widzimy stąd, że skutek parallaksy rocznej gwiazda opisuje na sklepieniu niebios małą elipsę, której dłuższa oś równoległa do ekliptyki, równa się $2p$ a krótsza oś równa się $2p \sin \beta_*$. W biegunie ekliptyki elipsa przechodzi w koło o promieniu p , jak to zresztą już znaleźliśmy poprzednio. Im bliżej ekliptyki, tem owa elipsa jest więcej spłaszczone, a w samej ekliptyce przechodzi w odcinek prosty, wzdłuż której gwiazda suwa się tam i napowrót. Wpływ parallaksy rocznej na pozycyę gwiazdy jest zupełnie podobny do wpływu aberacyi (patrz następny rozdział), ale elipsa aberacyjna jest większa: jej wielka oś, zresztą jednakowa dla wszystkich gwiazd, mierzy około $41''$. Tak podobne wpływy muszą kombinować się ze sobą, przyczem wpływ aberacyi naturalnie przemaga nad wpływem parallaksy rocznej: ten ostatni odgrywa wobec pierwszego rolę jakby perturbacyi nieco odkształcającej elipsę aberacyjną.

Wyprowadzimy jeszcze poprawki na parallaksę roczną w rektascensyi i deklinacyi.

Współrzędne równikowe ziemi względem słońca są takie same

jak współrzędne równikowe słońca względem ziemi tylko znaki mają przeciwne. Zatem wyrażenia ich będą

$$\begin{aligned} & - R \cos \delta, \cos \alpha, \\ & - R \cos \delta, \sin \alpha, \\ & - R \sin \delta. \end{aligned}$$

Dogodnie jest wyrazić rektascensję α , i deklinację δ , słońca przez szerokość i długość słońca, bo szerokość słońca jest zawsze tak mała ($< 1''$), że można ją przyjąć równą zeru. Bierzemy tedy wzory (5) z rozdziału VI-go, kładziemy $\beta = 0$, a $\lambda = \odot$, bo tak zwykle oznaczają długość słońca i otrzymujemy

$$\cos \delta, \cos \alpha, = \cos \odot, \quad \cos \delta, \cos \alpha, = \sin \odot \cos \varepsilon, \quad \sin \delta, = \sin \odot \sin \varepsilon.$$

Tedy współrzędne prostokątne równikowe ziemi względem słońca są:

$$\begin{aligned} & - R \cos \odot \\ & - R \sin \odot \cos \varepsilon \\ & - R \sin \odot \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Współrzędne geocentryczne gwiazdy są:

$$\begin{aligned} & \Delta \cos \delta \cos \alpha \\ & \Delta \cos \delta \sin \alpha \\ & \Delta \sin \delta, \end{aligned}$$

a współrzędne heliocentryczne gwiazdy są:

$$\begin{aligned} & \Delta, \cos \delta, \cos \alpha, \\ & \Delta, \cos \delta, \sin \alpha, \\ & \Delta, \sin \delta, \end{aligned}$$

Tedy będziemy mieli trzy zasadnicze wzory analogiczne do wzorów (19)

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta \cos \delta \cos \alpha &= \Delta, \cos \delta, \cos \alpha, + R \cos \odot \\ \Delta \cos \delta \sin \alpha &= \Delta, \cos \delta, \sin \alpha, + R \sin \odot \cos \varepsilon \\ \Delta \sin \delta &= \Delta, \sin \delta, + R \sin \odot \sin \varepsilon. \end{aligned} \right.$$

Postępując tak samo jak w § 3, pisząc $\cos \delta,$ zamiast $\cos \delta$ i pomijając znikomo drobne wyrazy w mianownikach otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha_1 &= p \sec \delta_1 [\sin \odot \cos \alpha_1 \cos \varepsilon - \cos \odot \sin \alpha_1] \\ \delta - \delta_1 &= p [\sin \odot \sin \varepsilon \cos \delta_1 - (\sin \odot \cos \varepsilon \sin \alpha_1 + \\ &\quad + \cos \odot \cos \alpha_1) \sin \delta_1]. \end{aligned} \right\} (29)$$

Zaraz widać, że pierwszy wzór (29) jest w pobliżu bieguna równika nieprzydatny. Trzeba tam używać ścisłego wzoru, t. j. takiego, w którym zachowano w mianowniku drugi wyraz. Łatwo otrzymać ów ścisły wzór ze wzorów (28) postępując tak samo jak w poprzednich przypadkach. Wywód, jako nazbyt łatwy, pomijamy. Tak samo pomijamy dyskusję wzorów (28) dla samego bieguna równika jako zupełnie podobną do dyskusji wzorów (26) dla bieguna ekliptyki.

Literatura.

Oprócz dzieł poprzednio wymienionych: H. Kobold: „Parallaxe“, artykuł we Valentinera „Handwörterbuch der Astronomie“, tom III, 1 (Wrocław 1899) str. 314—353.

ROZDZIAŁ X.

Aberacja.

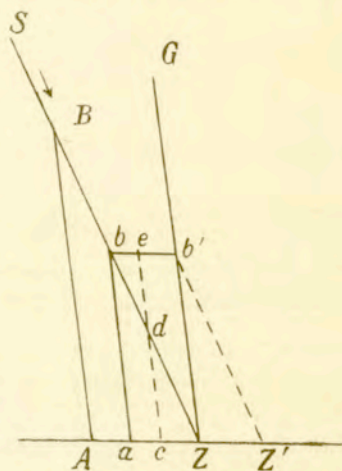
1. Odkrycie aberacyi. Aberacja planetarna. Elementarne tłumaczenie wpływu aberacyi na pozycye gwiazd.

Podobno jeszcze w starożytności Maximus z Tyru twierdził, że światło potrzebuje pewnego czasu, aby przebyć drogę od gwiazd do ziemi, ale właściwie dopiero O. Römer w r. 1676 spostrzegł, że zaćmienia księżyców Jowisza spaźniają się, gdy ziemia oddala się od Jowisza, a przeciwnie zdarzają się wcześniej niż to wypada z rachunku, gdy ziemia zbliża się do Jowisza. Römer zupełnie trafnie odgadł, że przyczyną spaźniania się, względnie przyspieszenia zjawiska jest skończona prędkość światła: im odległość między ziemią a Jowiszem jest większa, tem dłuższego czasu potrzeba na to, aby światło doszło do ziemi. Wpływ aberacyi na widome pozycye gwiazd i planet odkrył dopiero Bradley w r. 1728. Ponieważ światło przebiega astronomiczną jednostkę długości (prawie to samo co połowa większej osi orbity ziemskiej) w ciągu 498,26 sek.; więc jeżeli oznaczymy odległość obserwowanego ciała, wyrażoną w jednostkach astronomicznych przez Δ , moment obserwacyi przez t , a moment, w którym światło wyszło z obserwowanego ciała przez t_0 , to

$$(1) \quad t - t_0 = 498,26 \Delta.$$

Różnicę: $t - t_0$ nazywamy „*aberacją planetarną*“ a to dlatego, że obliczyć ją można tylko dla planet, których odległości są stosunkowo dobrze znane. Gdy chodzi o gwiazdy, to Δ jest albo wcale nieznanne, albo znane tak niedokładnie, że nie warto obliczać różnicę $t - t_0$. Wiadomo jednak, że nawet dla najbliższych gwiazd wynosi ona po kilka lat.

Oprócz tego, że widzimy gwiazdę nie taką, jaką jest w chwili t , a taką, jaką była przed czasem $t - t_0$, widzimy ją nie w kierunku ZS , skąd rzeczywiście przyszło światło, a w kierunku ZG . Prosta ZG leży w płaszczyźnie przechodzącej przez prostą ZS i przez styczną do drogi obserwatorium w chwili obserwacji t . Kąt SZG (patrz ryc. 14) nazywamy „kątem aberacji“ lub po prostu „aberracją“. Dzięki aberracji widoma pozycja ciała niebieskiego w chwili t jest względem jego rzeczywistej pozycji w chwili t_0 zawsze naprzód w kierunku chwilowego ruchu obserwatorium przesunięta. Dzieje się to dlatego, że w ciągu bardzo krótkiego czasu τ , w ciągu którego światło przebiega od obiektywu do okularu, luneta przesuwa się i gdybyśmy skierowali ją wzdłuż prostej¹⁾ SZ , po której idzie światło, to promień, który w chwili $t - \tau$ przeszedł przez środek obiektywu, nie trafiłby w chwili t na środek okularu. Rzeczywiście skutek ruchu lunety środek okularu znalazłby się w chwili t nie w Z a w Z' , jak to widać ze załączonego rysunku (Ryc. 14). Jak należy ustawić lunetę, aby promień, który w chwili $t - \tau$ przeszedł przez środek obiektywu, w chwili t trafił na środek okularu, to zaraz zobaczymy.



Ryc. 14.

Ponieważ czas τ jest bardzo krótki [stomilionowa część sekundy lub coś około tego], przeto można zawsze przyjąć, że w ciągu tego czasu luneta, a więc także środki obiektywu i okularu przesuwa się prostoliniowo i jednostajnie. Nakreślmy trójkąt AZB , w którym bok AZ ma kierunek chwilowego ruchu obserwatorium, a długość proporcjonalną do chwilowej prędkości obserwatorium — powiedzmy — v , dalej bok ZB ma kierunek promienia SZ , a długość proporcjonalną do prędkości światła V . Skierujmy oś lunety równoległe do trzeciego boku AB

¹⁾ Podstawą całej teorii aberacji jest założenie, że w próżni światło rozchodzi się prostoliniowo. O ile chodzi o próżnię, to założenie nasze jest zupełnie usprawiedliwione, bo niema żadnej raeyi, aby zbaczało z prostoliniowej drogi. Wprawdzie tu mówimy o przebiegu światła w lunecie, a luneta jest otoczona i wypełniona powietrzem, ale refrakcyę w atmosferze uwzględniamy osobno.

i założmy, że w chwili $t - \tau$ pewien promień idący od ciała S trafia na środek obiektywu znajdujący się np. w punkcie b , podczas gdy okular znajduje się w punkcie a . Po czasie τ promień dobiegnie do prostej AZ , wzdłuż której porusza się środek okularu i przemieści ją w punkcie Z , bo wedle poczynionych założeń i na mocy podobieństwa trójkątów BAZ i baZ długość odcinka bZ jest $V\tau$. Jednocześnie środek okularu odsunie się od a o odległość $v\tau$, przyczem dzięki poczynionym założeniom i na mocy podobieństwa tych samych trójkątów $v\tau = aZ$; a więc tak środek okularu jak promień zejdą się ze sobą w Z w chwili t . Oprócz tego widzimy, że podczas gdy luneta posuwa się równolegle do siebie samej, to światło, które weszło do niej przez środek obiektywu, spływa wciąż po samej osi. Gdy np. oś lunety znajduje się w pozycji ce , to światło właśnie dobiega do punktu d leżącego na osi, jak to wynika z podobieństwa trójkątów baZ i dcZ .

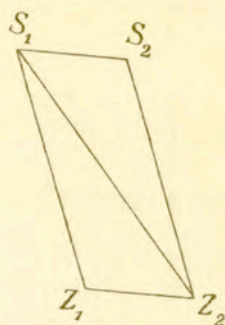
Dotąd rozumowaliśmy tak, jak gdyby kierunek, w którym biegnie światło, t. j. kierunek SZ był dany, a kierunek ZG , w którym widzimy ciało S , był szukany, lecz w rzeczywistości dzieje się odwrotnie: obserwacya daje nam kierunek ZG , a znaleźć trzeba kierunek ZS . Otrzymamy go przez konstrukcyę odwrotną do tej, którą poprzednio wykonaliśmy, składając odcinki AB i AZ wedle prawidła równoległoboku. Przekątnia równoległoboku ZS da nam szukany kierunek, skąd przyszło światło. Składanie to wykonamy analityczną metodą w § 3, teraz zaś wyciągniemy z dotychczasowych rozważań pewien ważny wniosek.

2. Wpływ wspólnego ruchu prostoliniowego i jednostajnego na aberacyę.

Założmy na chwilę, że ciało S i obserwatoryum mają wspólny ruch postępowy prostoliniowy i jednostajny. Jeżeli w chwili t_0 pozycye obserwatoryum i ciała S były: Z_1 i S_1 , a w chwili t : Z_2 i S_2 , to $S_1Z_1S_2Z_2$ jest to równoległobok prostoliniowy, a droga światła S_1Z_2 jest jego przekątnią. Szukajmy teraz kierunku Z_2G , w którym widzimy ciało S w chwili t . Stosując prawidło podane w poprzednim paragrafie znajdziemy, że w tym razie kierunek Z_2G , w którym w chwili t widzimy ciało S , jest identyczny z kierunkiem Z_2S_2 , w którym ciało S rzeczywiście znajduje się w chwili t . Zatem widzimy ciało S tak, jak gdyby i ono i obserwatoryum

były nieruchome. Stąd wynika, że wspólny ruch prostoliniowy i jednostajny niema żadnego wpływu na widome położenia ciał. Rezultat ten może być uważany za potwierdzenie teorii aberacyi, bo dowodzi, że zgadza się ona ze zasadą względności ruchu¹⁾.

Wspólny ruch ciał słonecznego systemu jest z pewnością prawie jednostajny i prawie prostoliniowy, a więc widome pozycje ciał należących do systemu słonecznego są od niego niezależne. Natomiast widome pozycje gwiazd stałych, które w ruchu systemu słonecznego nie uczestniczą, są zależne od ruchu systemu słonecznego. Co do ruchu obrotowego ziemi i ruchu jej po orbicie, to te mają naturalnie wpływ na widome pozycje wszystkich ciał niebieskich.



Ryc. 15.

3. Zasadnicze wzory teorii aberacyi.

Już w końcu § 1 powiedzieliśmy, w jaki sposób znając kierunek ZG można znaleźć kierunek ZS . Teraz wyrazimy to samo za pomocą metod geometrii analitycznej. Odnosimy ruch do osi prostokątnych nieruchomych, t. j. takich, które nie uczestniczą ani w ruchu obrotowym, ani w ruchu rocznym ziemi, ani wreszcie w ruchu systemu słonecznego względem gwiazd. O ściślejszą definicyę tego ostatniego ruchu nie chodzi, bo go w rachunkach nie uwzględniamy. Oznaczamy współrzędne środka okularu a (por. ryc. 14) w chwili $t - \tau$ przez x, y, z , współrzędne środka obiektywu b w tejże chwili przez $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$. Współrzędne punktu Z , t. j. środka okularu w chwili t będą: $x + \frac{dx}{dt} \tau, y + \frac{dy}{dt} \tau, z + \frac{dz}{dt} \tau$, bo ze względu na krótkość czasu τ można pominąć dalsze wyrazy szeregu Taylora. Na mocy tylko co przyjętych oznaczeń rzuty odcinka Zb na osie współrzędnych są

$$x + \Delta x - x - \frac{dx}{dt} \tau, \quad y + \Delta y - y - \frac{dy}{dt} \tau, \quad z + \Delta z - z - \frac{dz}{dt} \tau.$$

¹⁾ Nie możemy tu bliżej rozważać związku między aberacyą a zasadą względności ruchu, bo to zaprowadziłoby nas nazbyt daleko. Zresztą sądzimy, że chwila, w której wypadnie przebudować cały gmach astronomii tak, aby ściśle czynił zgodność postulatów wynikającym ze zasady względności, — jeszcze nie nastąpiła.

Z drugiej strony, oznaczając dostawy kierunku SZ , t. j. kierunku gwiazdy w chwili t_0 , przez $\cos \lambda_0$, $\cos \mu_0$, $\cos \nu_0$ możemy wyrazić rzuty odcinka Zb przez

$$V_0 \tau \cos \lambda_0, \quad V_0 \tau \cos \mu_0, \quad V_0 \tau \cos \nu_0,$$

gdzie V_0 oznacza prędkość światła względem współrzędnych nieruchomych. Możemy tedy napisać równania:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_0 \tau \cos \lambda_0 = \Delta x - \frac{dx}{dt} \tau \\ V_0 \tau \cos \mu_0 = \Delta y - \frac{dy}{dt} \tau \\ V_0 \tau \cos \nu_0 = \Delta z - \frac{dz}{dt} \tau. \end{array} \right.$$

Ale możemy zastąpić Δx , Δy , Δz przez inne wyrażenia, albowiem Δx , Δy , Δz są to współrzędne punktu b względem punktu a , albo, co na jedno wychodzi, punktu b' względem Z , bo odcinki ab i Zb' są równe i równoległe. Kierunek ab (lub Zb') jest to widomy kierunek gwiazdy. Jeżeli oznaczymy dostawy tego kierunku przez $\cos \lambda'$, $\cos \mu'$, $\cos \nu'$ a długość lunety przez D , to

$$\Delta x = D \cos \lambda', \quad \Delta y = D \cos \mu', \quad \Delta z = D \cos \nu'.$$

Podstawmy te wartości w równania (2), następnie podzielmy je przez τ i połączmy ¹⁾.

$$\frac{D}{\tau} = V'.$$

Wtedy równania (2) przybiorą postać

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_0 \cos \lambda_0 + \dot{x} = V' \cos \lambda' \\ V_0 \cos \mu_0 + \dot{y} = V' \cos \mu' \\ V_0 \cos \nu_0 + \dot{z} = V' \cos \nu'. \end{array} \right.$$

Dla krótkości użyliśmy tu znakowania Newtona pisząc \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} zamiast $\frac{dx}{dt}$... i t. d. Rozkładamy \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} na trzy składowe: \dot{x}_1 , \dot{y}_1 , \dot{z}_1 zależne od ruchu systemu słonecznego; \dot{x}_2 , \dot{y}_2 , \dot{z}_2 zależne od ruchu ziemi po orbicie (aberracja roczna) i \dot{x}_3 , \dot{y}_3 , \dot{z}_3 zależne od

¹⁾ Nie kładziemy $\frac{D}{\tau} = V_0$, bo droga światła w ciągu czasu τ jest trochę dłuższa od D .

ruchu obrotowego ziemi (abercyja dzienna). Prędkości $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ nie uwzględniamy, postępujemy tak, jak gdyby były zerami, ponieważ atoli zerami nie są, więc wychodzi to na to samo, jak gdybyśmy położyli ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} V_0 \cos \lambda_0 + \dot{x}_1 &= V \cos \lambda \\ \cdot &\cdot \\ \cdot &\cdot \\ \cdot &\cdot \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

i przekształcili równania (3) na

$$\left. \begin{aligned} V \cos \lambda + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 &= V' \cos \lambda' \\ V \cos \mu + \dot{y}_2 + \dot{y}_3 &= V' \cos \mu' \\ V \cos \nu + \dot{z}_2 + \dot{z}_3 &= V' \cos \nu' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Widzimy tedy, że dzięki pominięciu ruchu systemu słonecznego zmieniamy jednocześnie kierunki gwiazd i prędkość światła. Zato w równaniach (5) ruch jest odniesiony do osi przenoszących się razem ze systemem słonecznym i mających środek w jego środku masy. Ponieważ atoli środek ten bardzo nieznacznie różni się od środka słońca, więc w zastosowaniach praktycznych bierzemy środek słońca za środek współrzędnych.

Weźmiemy współrzędne heliocentryczne równikowe, zatem płaszczyznę fundamentalną będzie płaszczyzna równika, dodatnia oś x będzie skierowana ku wiosennemu porównaniu dnia z nocą a dodatnia oś y ku kolurowi ²⁾ letniego przesilenia. Jeżeli oznaczymy przez α' i δ' widomą rektascensję i deklinację, a przez α i δ te same zmienne, ale poprawione na abercyję, to

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, & \cos \lambda' &= \cos \delta' \cos \alpha' \\ \cos \mu &= \cos \delta \sin \alpha, & \cos \mu' &= \cos \delta' \sin \alpha' \\ \cos \nu &= \sin \delta, & \cos \nu' &= \sin \delta'. \end{aligned}$$

Podstawiawszy te wartości w równania (5), tą samą metodą, której używaliśmy w poprzednim rozdziale, otrzymamy z pierwszego i drugiego równania (5)

¹⁾ H. v. Seeliger: Bemerkung zur Theorie der Fixsternaberration. Astr. Nachr., tom CLXXVIII (1908) str. 251—254. Niektóre nasuwające się tu uwagi odkładamy do § 8.

²⁾ Por. rozdz. V-ty § 1. Zaznaczamy, że to jest ten sam układ osi równikowych, którym wciąż posługujemy się.

$$(6) \begin{cases} V' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) = V \cos \delta + (\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \cos \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \sin \alpha \\ V' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) = -(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \sin \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \cos \alpha, \end{cases}$$

skąd wynika

$$(7) \quad \text{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{-(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \sin \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \cos \alpha}{V \cos \delta + (\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \cos \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \sin \alpha}.$$

Jak widzimy, ten ostatni wzór wcale nie zawiera V' . Tak samo V' nie będzie figurować we wzorze dającym poprawkę deklinacyi, który zaraz wyprowadzimy. Ponieważ $V' = \frac{D}{r}$, więc to znaczy, że aberacya nie zależy od rozmiarów lunety. Dopiero gdybyśmy utworzyli zupełnie ściśłą teorię aberacyi, uwzględniającą różnice prędkości światła w powietrzu i szkłe, to rozmiary lunety i grubość szkieł pojawiłyby się w równaniach, ale tylko we wyrażach wyższych rzędów, które pomijamy. Odwrotnie, jeżeli aberacya nie zależy od rozmiarów lunety, to istnieje także wtedy, gdy obserwujemy gołem okiem. Zresztą doszlibyśmy do tego samego wniosku niezależnie od powyższej uwagi, zważywszy, że dla ostrego widzenia trzeba, aby promień światła biegł wzdłuż osi optycznej oka, że przeto musimy ustawić oś optyczną oka w kierunku ZG zupełnie tak samo jak oś lunety.

Za pomocą wzoru (1) z rozdziału V-go moglibyśmy otrzymać ze wzoru (7) wyrażenie na $\alpha' - \alpha$ w postaci pewnego szeregu¹⁾, ale korzystając z tego, że $\alpha' - \alpha$ jest bardzo małe, oraz z tego, że $(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \cos \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \sin \alpha$ jest bardzo małe w porównaniu z $V \cos \delta$, piszemy odrazu przybliżony wzór

$$(8) \quad \alpha' - \alpha = -\frac{\sec \delta}{V} [(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \sin \alpha - (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \cos \alpha].$$

Za wyjątkiem najbliższej okolicy bieguna wzór ten jest zupełnie wystarczający.

Zważmy teraz, że jeżeli $\alpha' - \alpha$ jest małe, to w pierwszym wzorze (6) można położyć $\cos(\alpha' - \alpha) = 1$ i napisać

$$V' \cos \delta' = V \cos \delta + (\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \cos \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \sin \alpha.$$

¹⁾ W tym celu trzeba by położyć

$$\dot{x}_2 + \dot{x}_3 = -M \cos m, \quad \dot{y}_2 + \dot{y}_3 = M \sin m,$$

przyczem M i m są to pewne pomocnicze zmienne.

Oprócz tego weźmiemy trzeci wzór (5) t. j.

$$V' \sin \delta' = V \sin \delta + \dot{z}_2 + \dot{z}_3,$$

następnie zastosujemy tę samą metodę, którą tylokrotnie posługiwaliśmy się, poczem otrzymamy wzory

$$V' \cos(\delta' - \delta) = V + [(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \cos \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \sin \alpha] \cos \delta + (\dot{z}_2 + \dot{z}_3) \sin \delta$$

$$V' \sin(\delta' - \delta) = -[(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \cos \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \sin \alpha] \sin \delta + (\dot{z}_2 + \dot{z}_3) \cos \delta,$$

z których zaraz wynika

$$\begin{aligned} \text{tang}(\delta' - \delta) &= \\ &= \frac{-[(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \cos \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \sin \alpha] \sin \delta + (\dot{z}_2 + \dot{z}_3) \cos \delta}{V + [(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \cos \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \sin \alpha] \cos \delta + (\dot{z}_2 + \dot{z}_3) \sin \delta} \quad (9) \end{aligned}$$

Lecz wyprowadzając ten wzór przyjęliśmy, że $\cos(\alpha' - \alpha) = 1$, co jest tylko przybliżenie słuszne, przeto niema sensu zatrzymywać w mianowniku małe wyrazy $\dot{x}_2 + \dots$ wobec V . Piszemy tedy odrazu

$$\begin{aligned} \delta' - \delta &= - \\ &= \frac{1}{V} \{ [(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \cos \alpha + (\dot{y}_2 + \dot{y}_3) \sin \alpha] \sin \delta - (\dot{z}_2 + \dot{z}_3) \cos \delta \}. \quad (10) \end{aligned}$$

Tak we wzorach (7) i (8) jak we wzorach (9) i (10) po prawej stronie figurują kąty α i δ ; więc wzory te odnoszą się do przypadku, gdy dane są współrzędne poprawione a trzeba obliczyć widome; ale gdybyśmy tą samą metodą wyprowadzili analogiczne wzory dla przypadku, gdy dane są współrzędne widome, i gdybyśmy potem przeszli do wzorów uproszczonych liniowych, to otrzymalibyśmy wzory różniące się od (8) i (10) tylko tem, że po prawej stronie zamiast α i δ mielibyśmy α' i δ' . Widzimy też, że skoro wzory (8) i (10) są liniowe, to można oddzielić wyrazy zależne od ruchu obrotowego ziemi (aberację dzienną) od wyrazów zależnych od ruchu po orbicie (od aberacji rocznej). Pozostaje tylko wyrazić prędkości $\dot{x}_2 \dots \dot{x}_3 \dots$ przez zmienne podawane w efemerydach.

4. Aberacja roczna.

Współrzędne prostokątne heliocentryczne równikowe ziemi są co do absolutnej wielkości równe geocentrycznym równikowym

współrzednym słońca, tylko znaki mają wprost przeciwne; jeżeli tedy rektascensya i deklinacya słońca są α , i δ , a jego promień wodzący R , to

$$x_2 = - R \cos \delta, \cos \alpha,$$

$$y_2 = - R \cos \delta, \sin \alpha,$$

$$z_2 = - R \sin \delta.$$

Lecz zamiast deklinacyi i rektascensyi słońca dogodnie jest wprowadzić jego długość i szerokość, bo szerokość słońca wynosi co najwyżej $\pm 1''$ z małym ułamkiem, przeto w teoryi aberacyi, w której chodzi tylko o pewne małe poprawki, można ją zawsze pominać. Do przejścia od współrzędnych biegunowych równikowych do takichże współrzędnych ekliptycznych służą wzory (5) rozdziału VI-go. Stosownie do tego, co było przed chwilą powiedziane, należy w danym razie położyć $\beta = 0$. Oprócz tego należy zamiast λ napisać \odot , bo tak oznaczają długość słońca, poczem otrzymamy

$$\cos \delta, \cos \alpha, = \cos \odot$$

$$\cos \delta, \sin \alpha, = \sin \odot \cos \varepsilon$$

$$\sin \delta, = \sin \odot \sin \varepsilon.$$

Podstawiając to w poprzednie wzory otrzymamy następujące wyrażenia na współrzędne heliocentryczne ziemi

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = - R \cos \odot \\ y_2 = - R \sin \odot \cos \varepsilon \\ z_2 = - R \sin \odot \sin \varepsilon. \end{array} \right.$$

Stąd zaś wynika

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = - \frac{dR}{dt} \cos \odot + R \sin \odot \frac{d\odot}{dt} \\ \dot{y}_2 = - \left(\frac{dR}{dt} \sin \odot + R \cos \odot \frac{d\odot}{dt} \right) \cos \varepsilon \\ \dot{z}_2 = - \left(\frac{dR}{dt} \sin \odot + R \cos \odot \frac{d\odot}{dt} \right) \sin \varepsilon. \end{array} \right.$$

Ale dla wielkości $\frac{dR}{dt}$, $\frac{d\odot}{dt}$ niema osobnych tablic, trzeba je tedy zastąpić przez takie wielkości, dla których posiadamy tablice. W tym celu oznaczymy tak zwany „średni ruch“ przez n , t. j. położmy

$$\frac{2\pi}{T} = n,$$

gdzie T jest to rok gwiazdowy, dalej oznaczymy mimośród orbity ziemskiej przez e . Ponieważ $e < 1$, więc zwykle kładziemy

$$e = \sin \varphi,$$

gdzie φ jest to pewien mały dodatni kąt. Oznaczmy następnie długość „perihelium“¹⁾ przez π , wreszcie załóżmy, że orbita ziemi jest dokładną elipsą i przyjmijmy, że²⁾ $a = 1$. Wtedy [patrz rozdz. XIII-ty, § 13, wzory (64)]

$$R^2 \frac{d\odot}{dt} = n\sqrt{1-e^2} = n \cos \varphi$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{ne}{\sqrt{1-e^2}} \sin(\odot - \pi) = n \operatorname{tang} \varphi \sin(\odot - \pi)$$

$$\frac{1-e^2}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R} = 1 + e \cos(\odot - \pi) = 1 + \sin \varphi \cos(\odot - \pi).$$

Jeżeli podstawimy te wartości we wzory (12), to po łatwych przekształceniach i redukcjach znajdziemy

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= n \sec \varphi (\sin \odot + \sin \varphi \sin \pi) \\ \dot{y}_2 &= -n \sec \varphi (\cos \odot + \sin \varphi \cos \pi) \cos \varepsilon \\ \dot{z}_2 &= -n \sec \varphi (\cos \odot + \sin \varphi \cos \pi) \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Teraz z kolei podstawimy wartości (13) we wzory (8) i (10) i otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} (\alpha' - \alpha)_2 &= -\frac{n \sec \varphi}{V} [\sin \alpha \sin \odot + \cos \alpha \cos \odot \cos \varepsilon] \sec \delta - \\ &\quad - \frac{n}{V} \operatorname{tang} \varphi [\sin \alpha \sin \pi + \cos \alpha \cos \pi \cos \varepsilon] \sec \delta \\ (\delta' - \delta)_2 &= -\frac{n \sec \varphi}{V} [\sin \delta \cos \alpha \sin \odot + \\ &\quad + (\cos \delta \sin \varepsilon - \sin \delta \cos \varepsilon \sin \alpha) \cos \odot] \\ &\quad - \frac{n}{V} \operatorname{tang} \varphi [\sin \delta \cos \alpha \sin \pi + (\cos \delta \sin \varepsilon - \\ &\quad - \sin \delta \cos \varepsilon \sin \alpha) \cos \pi]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

¹⁾ Tak nazywa się ten punkt orbity, w którym odległość między słońcem a ziemią jest najmniejsza.

²⁾ Właściwie połowa większej osi orbity jest o drobny ułamek większa niż astronomiczna jednostka długości.

Wzięliśmy różnice $\alpha' - \alpha$ i $\delta' - \delta$ w nawiasy i opatrzyliśmy je numerem 2 na znak, że obliczyliśmy tylko tę część aberacyi, która zależy od rocznego ruchu ziemi.

Obliczymy współczynniki stojące po prawej stronie przed kanciastymi nawiasami przyjmując połowę większej osi orbity ziemskiej za jednostkę długości a dzień średni słoneczny za jednostkę czasu. Ponieważ światło przebiega połowę większej osi orbity ziemskiej mniej więcej w 498,26 sek., a więc w tych jednostkach

$$V = \frac{1}{\frac{498,26}{86400}} = \frac{86400}{498,26}$$

Ponieważ ziemia obchodzi swoją orbitę w ciągu 365,25636... dni, więc

$$n = \frac{2\pi}{365,25636...} = \frac{1}{58,1323...}$$

a zatem $\frac{n}{V}$ wynosi około 0,0001. Gdyby orbita ziemi była kołem, to $\frac{n}{V}$ byłoby stosunkiem pomiędzy prędkością ziemi na orbicie i prędkością światła; ponieważ jednak orbita ziemi kołem nie jest, to $\frac{n}{V}$ wyraża ten stosunek tylko przybliżenie. Współczynnik

$$\frac{n}{V} \sec \varphi,$$

czyli tak zwana „stała aberacyi“ ma również wartość bliską do 0.0001, bo $\sec \varphi$ mało różni się od jedności ($\log \sec \varphi = 0,000061$). Chcąc wyrazić stałą aberacyi w mierze kątowej mnożymy ją przez 206264,8... poczem otrzymujemy około 20,5...

Astronomowie określają stałą aberacyi z obserwacyi zaćmień Jowisza i z obserwacyi gwiazd stałych, ale to określenie natrafia na wielkie trudności: rezultaty otrzymane z różnych seryi spostrzeżeń wykazują niezbyt zadawalniającą zgodność. Obecnie ogólnie przyjmują na stałą aberacyi wartość **20,47** poleconą przez konferencyę paryską 1896 r. pomimo tego, że wedle zdania wielu powag ta stała jest nieco zamała: sądzą, że należałoby powiększyć ją do

20,50 lub nawet nieco więcej. Będziemy trzymać się wartości przyjętej przez konferencję paryską głównie ze względu na jednostajność redukcji¹⁾. Druga stała:

$$\frac{n}{V} \operatorname{tang} \varphi = 0,34 \dots$$

Podstawiając te wartości stałych we wzory (14) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} (\alpha' - \alpha)_2 &= -20,47 [\sin \alpha \sin \odot + \\ &\quad + \cos \alpha \cos \odot \cos \varepsilon] \sec \delta - 0,34 [\dots \\ (\delta' - \delta)_2 &= -20,47 [\sin \delta \cos \alpha \sin \odot + \\ &\quad + (\cos \delta \sin \varepsilon - \sin \delta \cos \varepsilon \sin \alpha) \cos \odot] + \\ &\quad + 0,34 [\dots \end{aligned} \right\} (14 \text{ bis})$$

Nie wypisaliśmy wyrazów mających współczynnik 0,34, bo łatwo je sobie przepisać ze wzorów (14).

5. Aberacya roczna w długości i szerokości.

Aby ją otrzymać, należy wziąć współrzędne ekliptyczne gwiazdy zamiast równikowych. W tym celu dość jest we wzorach (14) położyć $\varepsilon = 0$ oraz jednocześnie napisać β zamiast δ i λ zamiast α .

¹⁾ Warto zaznaczyć, że ta stała wcale nieźle zgadza się z wymiarami ziemi przyjętymi przez konferencję paryską 1911 r. i z parallaxą słońca przyjętą w 1896 r. Mianowicie pisząc „*explicite*” połowę wielkiej osi orbity ziemskiej mamy na stałą aberacji — powiedzmy — k następujący wzór

$$k = \frac{na}{V} \sec \varphi,$$

ale $a = \frac{a_1}{\tilde{\omega}}$, gdzie oznaczyliśmy przez a_1 promień równikowy ziemi, a przez $\tilde{\omega}$ parallaxę słońca. Zatem będzie

$$k = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{na_1}{V} \sec \varphi.$$

Prędkość światła w próżni wynosi około 299860 km. na sek.; ponieważ atoli z prędkością ziemi kombinuje się prędkość światła w powietrzu, więc przyjmujemy $V = 299780$ km. na sek. Dalej

$$n = \frac{2\pi}{31558149},$$

bo rok gwiazdowy zawiera 31558149 sek., następnie $a_1 = 6378,4$ km., $\log \sec \varphi = 0,000061$, wreszcie, aby otrzymać k w sekundach, trzeba pomnożyć prawą stronę drzez $[206264,8]^2$. Kładąc $\tilde{\omega} = 8,8$ otrzymamy $k = 20,484$, a kładąc wraz z Hinksem $\tilde{\omega} = 8,806$ otrzymamy $k = 20,470$, t. j. stałą paryską z r. 1896.

W ten sposób, podstawiając jeszcze liczbowe wartości stałych aberacyi, przyjęte przez konferencyę paryską 1896 r., otrzymamy wzory

$$(15) \begin{cases} \lambda' - \lambda = - [20,47 \cos (\odot - \lambda) + 0,34 \cos (\pi - \lambda)] \sec \beta \\ \beta' - \beta = - [20,47 \sin (\odot - \lambda) + 0,34 \sin (\pi - \lambda)] \sin \beta. \end{cases}$$

Ze wzorów (15) wynika bardzo prosta interpretacya głównej części aberacyi rocznej. Jeżeli postąpimy tak samo jak w poprzednim rozdziale w § 6, gdzie chodziło o roczną parallaksę, to otrzymamy

$$\begin{aligned} x &= (\lambda' - \lambda) \cos \beta \\ y &= \beta' - \beta. \end{aligned}$$

Weźmy teraz wartości na $\lambda' - \lambda$ i $\beta' - \beta$ ze wzorów (15) pomijając drobne wyrazy ze współczynnikiem 0,34, a znajdziemy

$$\begin{aligned} x &= - 20,47 \cos (\odot - \lambda) \\ y &= - 20,47 \sin (\odot - \lambda) \sin \beta. \end{aligned}$$

Są to prostokątne współrzędne elipsy, której większa półoś równoległa do ekliptyki jest: 20,47 a mniejsza, do tamtej prostopadła: 20,47 sin β . Widzimy tedy, że wskutek aberacyi wszystkie gwiazdy opisują na sklepieniu niebios elipsy tem więcej spłaszczone, im dana gwiazda jest bliższa ekliptyki. W samej ekliptyce elipsa aberacyjna przywodzi się do odcinka prostej, w biegunie ekliptyki przechodzi w koło zupełnie tak samo jak elipsa zależna od rocznej parallaksy. Ale elipsa aberacyjna jest większa, fazy ruchu są inne, przytem ruch odbywa się w kierunku przeciwnym do obiegu ziemi naokoło słońca, podczas gdy ruch zależny od rocznej parallaksy odbywa się w tym samym kierunku co ruch ziemi naokoło słońca. Kąt: $\odot - \lambda$ jest to anomalia mimośrodowa elipsy. — Naturalnie pierwszy wzór (15) jest z powodu czynnika sec δ w najbliższem sąsiedztwie bieguna ekliptyki nieprzydatny. Stosują się tu zupełnie te same uwagi, które w § 6 poprzedniego rozdziału poczyniliśmy z powodu pierwszego wzoru (23). Zresztą wiemy już, że gdyby jaka gwiazda znajdowała się w samym biegunie ekliptyki, to musiałaby wskutek aberacyi opisywać naokoło niego kółko o promieniu 20,47. Gwiazdy położone w pobliżu bieguna ekliptyki opisują elipsy bardzo podobne do kół.

6. Aberacya dzienna.

Znowu korzystamy z tego, że przybliżone wzory na aberacyę są liniowe i obliczamy aberacyę dzienną niezależnie od rocznej. Znowu bierzemy współrzędne równikowe, ale tym razem geocentryczne. Współrzędne obserwatorium względem środka ziemi są (por. § 4 poprzedniego rozdziału):

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \varrho \cos \varphi' \cos \Theta \\ y_3 &= \varrho \cos \varphi' \sin \Theta \\ z_3 &= \varrho \sin \varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Przypominamy, że ϱ oznacza odległość obserwatorium od środka ziemi, φ' jego szerokość geocentryczną a Θ czas gwiazdowy liczony jako kąt. Ponieważ ϱ i φ' są dla danego obserwatorium stałe, więc

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\varrho \cos \varphi' \sin \Theta \frac{d\Theta}{dt} \\ \dot{y}_3 &= \varrho \cos \varphi' \cos \Theta \frac{d\Theta}{dt} \\ \dot{z}_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Podstawiając wartości ze wzorów (17) we wzory (6) i (8) zaraz znajdziemy

$$\left. \begin{aligned} (\alpha' - \alpha)_3 &= \frac{\varrho}{V} \sec \delta \cos \varphi' \cos (\Theta - \alpha) \frac{d\Theta}{dt} \\ (\delta' - \delta)_3 &= \frac{\varrho}{V} \cos \varphi' \sin (\Theta - \alpha) \frac{d\Theta}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

I tu wzięliśmy $\alpha - \alpha'$ i $\delta - \delta'$ w nawiasy i opatrzyliśmy je znacznikiem 3, aby w ten sposób uwydatnić, że to nie są całkowite poprawki na aberacyę, tylko jej części zależne od aberacyi dziennej. Kąt $\Theta - \alpha$ to jest kąt godzinowy gwiazdy. Oczywiście zamiast ϱ możemy wziąć po prostu promień równikowy ziemi a . W przyjętych tu jednostkach promień ten równa się tangensowi parallaksy słońca. Przyjmiemy tedy¹⁾

$$\varrho = \frac{8,8}{206264,8 \dots}$$

¹⁾ Można by też podstawić kąt zamiast tangensu, ale ponieważ wtedy w liczniku po prawej stronie pojawi się kwadrat sekund, a po lewej stronie mają być sekundy, więc trzeba by podzielić przez 206264,8. Zatem czy tak, czy inaczej rezultat będzie ten sam.

Prędkość światła weźmiemy ze stałej aberacji, więc położymy

$$V = \frac{n \sec \varphi}{20''47},$$

wreszcie położymy ¹⁾

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{86400}{86164,091\dots} 2\pi.$$

Stałą n podaliśmy w § 4, co do $\sec \varphi$, to logarytm jego jest 0,000061. Z temi liczbowemi wartościami znajdziemy

$$\frac{a}{V} \frac{d\Theta}{dt} = 0,320 = 0,021.$$

W południku mamy właśnie $\Theta - \alpha = 0$, a więc dla obserwacji południkowych wzory (18) przechodzą w

$$(\delta - \delta')_3 = 0$$

$$(\alpha - \alpha')_3 = -0,021 \cos \varphi' \sec \delta.$$

Ponieważ φ' jest dla danego obserwatorium stałe, więc można raz na zawsze obliczyć współczynnik $0,021\dots \cos \varphi'$. W Krakowie iloczyn ten wynosi 0,0135, przeto do obserwowanych w południku rektascensyi dodajemy 0,014 $\sec \delta$. Tę poprawkę robi się np. przy ścisłem wyznaczeniu czasu.

7. Wpływ ruchu systemu słonecznego na aberację.

Mówiliśmy już w § 1, że przy redukcji obserwacji gwiazd stałych nie odejmujemy od czasu obserwacji tego czasu, w ciągu którego światło przebiega od gwiazdy do obserwatorium, bo albo wcale nie znamy odległości gwiazdy, albo znamy ją nader niedokładnie. Wskutek tego pozycye gwiazd figurujące w katalogach właściwie nie odnoszą się do epoki podanej w katalogu, a do rozmaitych wcześniejszych epok.

Następnie ponieważ nie robimy także poprawek na aberację zależną od ruchu systemu słonecznego, więc pozycye gwiazd stałych podawane w katalogach są z reguły błędne. Na szczęście błędy, o których mowa, są po większej części bardzo nieznaczące.

Ruch systemu słonecznego nie jest zupełnie nieznan, ale po

¹⁾ Por. rozdz. VII-my, § 5.

pierwsze znamy go niedokładnie, po drugie znamy go tylko względem ograniczonej liczby (kilku tysięcy) gwiazd. Nie wdając się w bliższe rozpatrzenie tego ruchu, przyjmiemy go jako fakt i rozważymy, jakie z nieuwzględnienia jego wynikają skutki. Oto w § 3 przechodząc od ogólnych równań (3) do równań (5) musieliśmy zamiast prędkości światła V_0 wprowadzić pewną inną prędkość V . Prędkość V_0 uważamy za stałą, w takim atoli razie prędkości V za stałą uważać nie możemy. Rzeczywiście, weźmy równania (4) i połączmy

$$\dot{x}_1 = c \cos l, \quad \dot{y}_1 = c \cos m, \quad \dot{z}_1 = c \cos n,$$

przyczem l, m, n są to kąty kierunkowe, a c prędkość systemu słonecznego względem gwiazd. Wszystkie cztery wielkości, t. j. c, l, m, n możemy śmiało uważać za praktycznie stałe. Kładąc jeszcze

$$\cos l \cos \lambda_0 + \cos m \cos \mu_0 + \cos n \cos \nu_0 = \cos \gamma,$$

gdzie zatem γ jest to kąt pomiędzy kierunkiem ruchu systemu słonecznego a kierunkiem od ziemi do gwiazdy, łatwo z równań (4) znajdziemy

$$V^2 = V_0^2 + 2 V_0 c \cos \gamma + c^2. \quad (19)$$

Wedle założenia V_0 i c są stałe, zatem V a tak samo stała aberacyi $k = \frac{n \cos \varphi}{V}$ są to funkcye kąta γ . Zdaje się, że pierwszym, kto na to zwrócił uwagę, był Yvon Villarceau. Jak wiadomo, różne serye obserwacyi dają niezupełnie zgodne wyniki, ale dotąd nie wykryto żadnej systematycznej zależności stałej aberacyi od kąta γ . Różnice pomiędzy wartościami stałej aberacyi, określonymi z różnych seryi spostrzeżeń, pochodzą zatem przeważnie z innych przyczyn. Wnosimy stąd, że c musi być bardzo małe w porównaniu z V_0 , a dotychczasowe określenia prędkości c w zupełności potwierdzają ten wniosek, bo wskazują, że c powinno wynosić tylko około jednej piętnastotysięcznej V_0 . Tedy różnice pomiędzy V należącymi do różnych gwiazd a V_0 i tak samo różnice pomiędzy indywidualnymi V oraz pomiędzy indywidualnymi stałymi aberacyi są bardzo nieznaczne.

Wobec tego jasnym jest, że przesunięcia gwiazd spowodowane przez pominięcie ruchu systemu słonecznego, t. j. inaczej mówiąc przez substytucyę λ, μ, ν zamiast λ_0, μ_0, ν_0 , muszą być bardzo

nieznaczone. Przesunięcia te są dla różnych gwiazd różne, ale dla jednej i tej samej gwiazdy w ciągu długiego czasu prawie niezmiennie. Rzeczywiście traktując równania (4) tak samo jak równania (5) znaleźlibyśmy podobne do (8) i (10) równania

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} (\alpha' - \alpha)_1 = -\frac{\sec \delta}{V_0} (\dot{x}_1 \sin \alpha - \dot{y}_1 \cos \alpha) \\ (\delta' - \delta)_1 = -\frac{1}{V_0} [(\dot{x}_1 \cos \alpha + \dot{y}_1 \sin \alpha) \sin \delta - \dot{z}_1 \cos \delta], \end{array} \right.$$

z których zaraz widać słuszność naszego twierdzenia, bo prędkości \dot{x}_1 , \dot{y}_1 , \dot{z}_1 są stałe i wspólne wszystkim gwiazdom, zaś współrzędne α i δ pewnej określonej gwiazdy zmieniają się tak powolnie, że przesunięcia obliczone ze wzorów (20) byłyby w ciągu bardzo długich okresów czasu prawie stałe. Z drugiej strony widać, że te przesunięcia zmieniają się od gwiazdy do gwiazdy i że są one funkcjami kąta γ .

Takie stałe a nieznaczone¹⁾ przesunięcia gwiazd nie nam nie zawadzają, możemy nie zwracać na nie uwagi.

Gdy chodzi o ciała należące do słonecznego systemu, to przesunięć wyrażonych przez wzory (20) wcale nie należy eliminować, bo w myśl tego, co było powiedziane w § 2, skoro odniesiemy ruch do osi przenoszących się razem ze systemem słonecznym²⁾ to po uwzględnieniu aberacji rocznej i dziennej otrzymamy prawdziwą pozycję planety [czy komety] względem owych przenoszących się osi. Ponieważ atoli twierdzenie z § 2 stosuje się tylko do wspólnego ruchu systemu słonecznego, więc obliczając aberację dzienną i roczną trzeba pamiętać o tem, że otrzymujemy pozycje ciał słonecznego systemu względem poruszających się osi nie dla chwili obserwacji, a dla wcześniejszej chwili t_0 , w której światło opuściło planetę. Chwilę tę możemy obliczyć uwzględniając aberację planetarną (por. § 1). Naturalnie pod odległością między pozycją planety w chwili t_0 a pozycją obserwatorium w chwili t [por. wzór (1)] należy rozumieć odległość między pozycjami odniesionymi do osi poruszających się ze systemem słonecznym. To zaś, że i wewnątrz systemu słonecznego prędkość światła zależy do pewnego stopnia od kierunku — nie nam nie zawadza, bo z rozważań

¹⁾ Jednakże są one tego samego rzędu, co przesunięcia pochodzące z aberacji rocznej.

dotyczących gwiazd stałych wiemy już, że zmiany prędkości V są zawarte w bardzo ciasnych granicach.

Gdybyśmy atoli za podstawę naszych rozważań wzięli zasadę względności i gdybyśmy wraz z Einsteinem i Minkowskim przyjęli, że $V = V_0$ i że jest absolutną stałą, to wtedy musielibyśmy tak do teorii aberacyi jak do mechaniki niebios wprowadzić pewne modyfikacje.

Literatura.

Oprócz dzieł wymienionych w poprzednich rozdziałach:

H. v. Seeliger: Bemerkung zur Theorie der Fixsternaberration. *Astr. Nachr.* Tom CLXXVIII (1908), str. 251—254.

A. J. Yvon Villarceau: Théorie de l'Aberration... *Connaissance des Temps* na rok 1878, Dodatki, str. 3—67.

H. C. Plummer: On the Theory of Aberration and the Principle of Relativity. *Monthly Notices R. A. S.*, tom LXX, str. 252—266 i str. 478.

A. Einstein: Über das Relativitätsprinzip... *Jahrbuch der Radioaktivität*, tom IV (1907), str. 411—462.

H. Minkowski: Die Grundgleichungen f. die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Nachr. der kg. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, math. phys. kl.*, 1908, str. 53—111.

ROZDZIAŁ XI.

Cynematyczna teoria precesyi i nutacyi.

1. Wiadomości wstępne.

Odnosimy pozycje gwiazd do pewnych płaszczyzn i osi mających pewne fizyczne znaczenie. Tak np. we współrzędnych równikowych oś biegunowa jest to prosta równoległa do osi obrotu ziemi, we współrzędnych ekliptycznych płaszczyzna fundamentalna jest równoległa do płaszczyzny średniej drogi ziemi naokoło słońca. Ale te fundamentalne płaszczyzny i osie nie zajmują niezmiennego położenia w przestrzeni, np. oś obrotu ziemi nie pozostaje wciąż do siebie równoległa (o ruchu postępowym osi wraz ze ziemią nie mówimy, bo ruch ten nas nie obchodzi), ale wykonuje pewne ruchy, które odbijają się na „widomych“ pozycjach gwiazd. Przyczyna zmian w położeniu ziemskiej osi obrotu i prostopadłej do niej płaszczyzny równika polega na tem, że ziemia nie jest ciałem eentrobarycznym (vide rozdz. XIII ty, § 2), przeto przyciąganie księżycy i słońca prócz wypadkowej siły przechodzącej przez środek masy ziemi daje jeszcze pewną parę sił, która stara się obrócić ziemię naokoło pewnej osi różnej od osi obrotu. Wskutek tego ziemia wykonuje pewne ruchy, jeden o peryodzie wynoszącym dwadzieścia kilka tysięcy lat, drugi o peryodzie wynoszącym tylko kilkanaście lat. Pierwszy ruch, pierwsza „perturbacya“ nazywa się „lunisolarną precesyą“ t. j. księżycowo-słonecznem cofaniem się punktów równonocnych, drugi ruch nazywamy „nutacyą“.

Lecz gdy położenie ziemi zmienia się, to zmienia się też położenie sztywnie z nią związanej płaszczyzny równika i prosta równonocna [patrz rozdział VI ty] musi zmieniać swe położenie na płaszczyźnie ekliptyki. Kręci się ona w kierunku ze wschodu na zachód, a więc w kierunku wprost przeciwnym do kierunku obiegu

ziemi po orbicie. Stąd to samą perturbacyę nazywamy „cofaniem¹⁾ się punktów równonocnych“.

Ale na tem nie koniec. Wskutek przyciągania innych planet położenie orbity ziemskiej, a więc położenie płaszczyzny ekliptyki także zmienia się z czasem (precesya planetarna). Widzimy stąd, że nasze fundamentalne płaszczyzny i osie są wszystkie ruchome; przeto jeżeli chcemy mieć zupełnie nieruchomą płaszczyznę, to musimy obrać sobie chwilowe położenie czy to ekliptyki, czy równika, czy obu razem w jakiejś określonej chwili czasu np. 1 Stycznia 1750 r., 1 Stycznia 1850 r. i t. d. Widzimy też, że gdyby nawet księżycowo-słoneczna precesya nie istniała, to dzięki ruchowi samej ekliptyki (dzięki precesyi planetarnej) wzajemne położenia ekliptyki i równika byłyby zmienne, mianowicie zmieniałyby się ich kąt nachylenia i położenie linii przecięcia t. j. linii równonocnej.

Zmiany w położeniu punktów równonocnych, pochodzące z precesyi księżycowo-słonecznej, wraz ze zmianami, zależnymi od precesyi planetarnej, wytwarzają to, co nazywamy „ogólną precesyą“.

Jasną jest rzeczą, że dla obserwatora, znajdującego się na ziemi, powyższe perturbacye przedstawiają się jako pewne zmiany w położeniu gwiazd stałych i innych ciał niebieskich.

2. Cynematyczna teorya precesyi i nutacyi.

Zaczniemy od pewnych wzorów odnoszących się do cynematyki ruchu obrotowego. Weźmy system osi prostokątnych i założmy, że punkt o współrzędnych x, y, z obraca się naokoło dowolnej osi przechodzącej przez środek współrzędnych z prędkością kątową, której rzuty na osie x, y, z są p, q, r , przyczem in-

¹⁾ Łacińska nazwa „*praecessio*“ [skąd „precesya“] ma inne znaczenie i pochodzenie. Ponieważ punkty równonocne posuwają się po ekliptyce w kierunku przeciwnym do obiegu ziemi, a więc jakby na jej spotkanie, przeto ziemia przechodzi przez punkt równonocy wcześniej niż przez ten punkt swojej orbity, który w poprzednim roku był punktem równonocnym. Tak samo słońce w swym pozornym ruchu po ekliptyce (odbywającym się ze zachodu na wschód) wcześniej przechodzi przez punkt równonocy niż przez ten punkt ekliptyki, w którym w roku poprzednim znajdował się punkt porównania dnia z nocą. Dlatego to astronomie starożytni i średniowieczni mówili, że przejście słońca przez punkt równonocy poprzedza [*praecedit*] przejście przez ten punkt ekliptyki, w którym odbyło się porównanie dnia z nocą poprzedniego roku.

nego ruchu nie posiada. Jakie są liniowe prędkości punktu wynikające z tego obrotu?

Rozważmy prędkości liniowe pochodzące z obrotu naokoło osi z z prędkością r . Odległość punktu od osi z jest $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, prędkość kątowna jest r , a więc prędkość liniowa jest $v = \varrho r$. Rzuty jej na osie współrzędnych są

$$\varrho r \cos(v, x), \quad \varrho r \cos(v, y), \quad \varrho r \cos(v, z).$$

Ponieważ $\cos(v, z) = 0$, więc prędkość w kierunku z jest równa zeru. Co do pozostałych dwóch kierunków, to jeżeli oznaczymy przez θ kąt, który ϱ tworzy z osią x , to kierunek prędkości, jako normalny do ϱ , będzie¹⁾: $\theta + \frac{\pi}{2}$. Zatem

$$\cos(v, x) = \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta = -\frac{y}{\varrho}$$

$$\cos(v, y) = \sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta = \frac{x}{\varrho}.$$

Skoro to podstawimy we wyrażenia składowych prędkości, to znajdziemy, że wskutek obrotu naokoło osi z z prędkością kątowną r powstają prędkości liniowe:

w kierunku równoległym do osi x	— yr
" " " " " y	xr
" " " " " z	0.

Przez przestawienie kołowe znajdziemy w dalszym ciągu, że przez obrót naokoło osi x z prędkością kątowną p powstają prędkości liniowe

w kierunku równoległym do osi y	— zp
" " " " " z	+ yp
" " " " " x	0,

a przez obrót naokoło osi y z prędkością kątowną q powstają prędkości liniowe

w kierunku równoległym do osi z	— xq
" " " " " x	zq
" " " " " y	0.

¹⁾ Jak zawsze, w ogólnych wywodach rozważamy tylko kierunki dodatnie, bo wszystko, co odnosi się do kierunków ujemnych, otrzymujemy przez prostą zmianę znaku.

Ponieważ w danym razie prędkość liniowa punktu wedle założenia pochodzi tylko z obrotu, więc musi być

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - pz$$

$$\frac{dz}{dt} = py - qx$$

Weźmy teraz przypadek odwrotny. Wyobraźmy sobie, że punkt dany nie porusza się wcale, ale osie kręcą się naokoło środka współrzędnych (który też jest nieruchomy) z prędkością kątową, której rzuty na (kręcące się) osie współrzędnych są znowu p, q, r . Wtedy oczywiście współrzędne punktu x, y, z będą zmieniać się a prędkości, z którymi one zmieniają się, będą co do wielkości te same, co w poprzednim przypadku, ale znaki ich będą wprost przeciwnie. Zatem gdy punkt nie porusza się, ale osie kręcą się, to

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ry - qz \\ \frac{dy}{dt} &= pz - rx \\ \frac{dz}{dt} &= qx - py \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Jasną jest rzeczą, że wzory (1) mają bezpośrednio zastosowanie do precesyi. Wyobraźmy sobie, że x, y, z są to współrzędne punktu nieruchomego na sferze niebieskiej odniesione do osi równikowych kręcących się razem ze ziemią wskutek precesyi i nutacyi; wtedy równania (1) dadzą nam pozorne prędkości owego punktu, zależne od kręcenia się samych osi.

Zakładamy, że nasze osie są to osie geocentryczne równikowe, nieuczestniczące w obrocie ziemi i przechodzimy od współrzędnych prostokątnych do biegunowych kładąc

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta \cos \delta \cos \alpha \\ y &= \Delta \cos \delta \sin \alpha \\ z &= \Delta \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

W myśl poprzednich założeń musimy uważać Δ za stałe¹⁾. To znaczy, że zupełnie pomijamy ruch postępowy ziemi, albowiem

¹⁾ Założyliśmy, że tak punkt uważany jak srodek współrzędnych są nieruchome.

wpływem jego na współrzędne gwiazd zajmowaliśmy się już w rozdziałach poświęconych parallaksie i aberacyi. Tak samo pomijamy własne ruchy gwiazd. Tymi ostatnimi jeszcze nie zajmowaliśmy się, ale wkrótce pomówimy też i o nich. — Skoro podstawimy wartości (2) w równania (1), to Δ samo wypadnie z równań i otrzymamy

$$\begin{aligned} -\cos \delta \sin \alpha \dot{\alpha} - \sin \delta \cos \alpha \dot{\delta} &= -q \sin \delta + r \cos \delta \sin \alpha \\ \cos \delta \cos \alpha \dot{\alpha} - \sin \delta \sin \alpha \dot{\delta} &= p \sin \delta - r \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \dot{\delta} &= (q \cos \alpha - p \sin \alpha) \cos \delta. \end{aligned}$$

Mnożąc¹⁾ pierwsze z tych równań przez $-\sin \alpha$, drugie przez $\cos \alpha$, dodając, a następnie dzieląc otrzymane w ten sposób równanie i ostatnie z powyższych równań przez $\cos \delta$ otrzymamy

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{\alpha} = -r + (p \cos \alpha + q \sin \alpha) \operatorname{tang} \delta \\ \dot{\delta} = q \cos \alpha - p \sin \alpha. \end{cases}$$

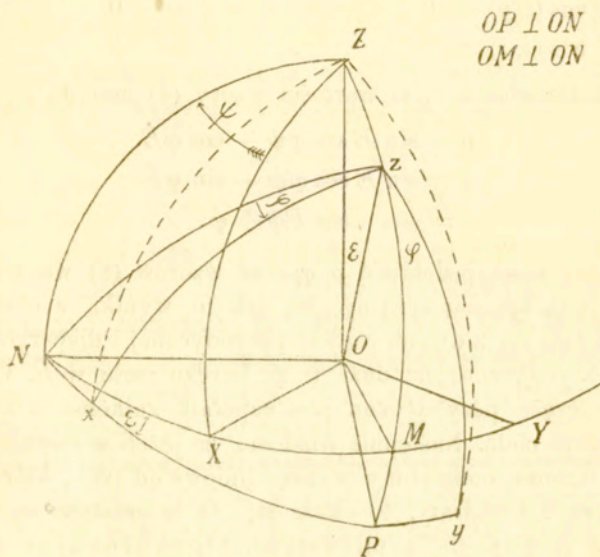
Po prawej stronie równań (3) figurują rzuty chwilowej prędkości obrotu osi na też same kręcące się osie. Aby poznać ruch samych osi, musimy go jednak odnieść do jakichś innych osi nieuczestniczących w precesyi i nutacyi. Jako takie osie obieramy osie prostokątne ekliptyczne z pewnej epoki np. z dnia 1 Stycznia 1850 r. Przyjmujemy płaszczyznę ówczesnej średniej²⁾ ekliptyki za płaszczyznę XY , zresztą zakładamy jak zwykle, że oś $+X$ jest skierowana ku ówczesnemu wiosennemu porównaniu dnia z nocą, oś $+Y$ ku kolurowi letniego przesilenia, a oś $+Z$ ku północnej półkuli nieba; tak samo ruchoma oś $+x$ będzie skierowana ku współczesnemu wiosennemu porównaniu dnia z nocą. Oba systemy: ruchomy i nieruchomy mają wspólny środek współrzędnych w środku ziemi, ale osi wspólnych nie mają. Położenie jednych osi względem drugich wyrażamy przez kąty Eulera. Kąty te bywają rozmaicie liczone; my tu będziemy liczyć je w taki sposób, aby odrazu przystosować się do praktyki astronomicznej.

Załóżmy, że równik współczesny przecina się z ekliptyką stałą w punkcie N . Kąt między płaszczyznami ZN i ZX oznaczamy przez ψ . Kąt między płaszczyzną równika a płaszczyzną

¹⁾ Używamy tu znowu znakowania Newtona: $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$, $\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt}$.

²⁾ Znaczenie przymiotnika „średni“ wyjaśni się w dalszym ciągu.

ekliptyki stałej oznaczamy przez E , wreszcie kąt pomiędzy płaszczyzną zN i płaszczyzną zx oznaczamy przez φ . Jeżeli kierunki liczone przeciw wskazówkom zegarka przyjmiemy za dodatnie, to φ będzie kątem liczonym dodatnio a ψ i E ¹⁾ będą liczone w kierunkach wstecznych, zatem odjemnie. Dla krótkości użyjemy znakowania Newtona, t. j. oznaczymy prędkości, z którymi zmieniają się kąty ψ , E i φ , przez $\dot{\psi}$, \dot{E} i $\dot{\varphi}$ i wyrazimy p , q , r przez ψ , \dot{E} , $\dot{\varphi}$. Biorąc rzuty tych ostatnich prędkości na osie x , y , z i pamiętając, że przy



Ryc. 16.

naszym sposobie liczenia kierunków dwa pierwsze kąty są odjemne, otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} p &= -\dot{\psi} \cos(Z, x) - \dot{E} \cos(Nx) + \dot{\varphi} \cos(z, x) \\ q &= -\dot{\psi} \cos(Z, y) - \dot{E} \cos(Ny) + \dot{\varphi} \cos(z, y) \\ r &= -\dot{\psi} \cos(Z, z) - \dot{E} \cos(Nz) + \dot{\varphi} \cos(z, z). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Lecz z trójkątów sferycznych prostobocznych²⁾ Zzx , Zzy oraz z innych części ryc. 16 zaraz znajdziemy

¹⁾ Punkt N odsuwa się w kierunku wstecznym od X , które przyjęliśmy za nieruchome.

²⁾ Stosują się tu wzory 7 ter. rozdz. I-go, § 4.

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(Z, x) = \sin E \cos(90^\circ + \varphi) = -\sin E \sin \varphi \\ \cos(Z, y) = \sin E \cos(180^\circ - \varphi) = -\sin E \cos \varphi \\ \cos(Z, z) = \cos E = \cos E \\ \cos(N, x) = \cos \varphi = \cos \varphi \\ \cos(N, y) = \cos(90^\circ + \varphi) = -\sin \varphi \\ \cos(N, z) = 0 = 0 \\ \cos(z, x) = 0 = 0 \\ \cos(z, y) = 0 = 0 \\ \cos(z, z) = 1 = 1. \end{array} \right.$$

Po podstawieniu tych wartości wzory (4) przejdą na

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \sin E \sin \varphi \dot{\psi} - \cos \varphi \dot{E} \\ q = \sin E \cos \varphi \dot{\psi} + \sin \varphi \dot{E} \\ r = -\cos E \dot{\psi} + \dot{\varphi}. \end{array} \right.$$

Możemy teraz podstawić p, q, r ze wzorów (6) we wzory (3), przedtem jednakże zauważymy, że, jak to wynika z obserwacji, $\dot{\psi}$ i \dot{E} składają się z dwóch części: peryodycznej i nieperyodycznej. Część nieperyodyczna jest duża w $\dot{\psi}$, bardzo mała w \dot{E} . Co do $\dot{\varphi}$, to w niem część peryodyczna jest zupełnie znikoma a nieperyodyczna bardzo mała. Następnie wiadomo, że jeżeli w równaniach (3) po prawej stronie oddzielimy wyrazy liniowe od tych, które zawierają iloczyny i kwadraty, to okaże się, że te ostatnie są zupełnie znikome w porównaniu z pierwszymi. Ograniczając się tedy do wyrazów liniowych możemy oddzielnie traktować nieperyodyczne wyrazy a oddzielnie peryodyczne. Pierwsze dają „precesyę“, drugie „nutacyę“.

3. Precesya.

Ponieważ nieperyodyczna część \dot{E} jest bardzo mała a kąt φ po 60 latach, które upłynęły od 1850 r. także bardzo mały, więc można pominąć $\sin \varphi \dot{E}$ oraz napisać 1 zamiast $\cos \varphi$. Oprócz tego obserwacja pokazuje, że o ile chodzi o precesyę, p jest zupełnie znikome. Możemy tedy przyjąć

$$\begin{aligned} p &= 0 \\ q &= \sin E \dot{\psi} \\ r &= \dot{\varphi} - \cos E \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Jeżeli jeszcze położymy ¹⁾

$$q = \sin E\psi = n, \quad r = \dot{\varphi} - \cos E\psi = -m, \quad (7)$$

gdzie m nazywa się precesją ogólną w rektascensyi, a n precesją ogólną w deklinacyi, to będziemy mogli napisać wzory (3) w kształcie

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \sin \alpha \operatorname{tang} \delta \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Znając pierwsze pochodne możemy utworzyć pochodne wyższych rzędów ²⁾ i napisać wedle wzoru Maclaurina

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 t^2 + \dots \\ \delta - \delta_0 &= \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0 t^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

gdzie znaczki ₀ oznaczają, że należy wziąć wartości pochodnych w epoce przyjętej za początkową, a t oznacza czas, który upłynął od tej epoki. Ponieważ szeregi (9) są szybko zbieżne, więc najczęściej poprzestajemy na pierwszych wyrazach.

Aby lepiej zrozumieć mechanizm precesyi, weźmy w uwagę wartości liczbowe. Prędkość $\dot{\varphi}$ [jest to prędkość „planetarnej precesyi“] wynosi tylko około $1/7$ sekundy kątowej na rok. Można zatem pominać nie tylko $\dot{\varphi}$ ale samą precesję planetarną φ , która dopiero po kilkudziesięciu tysiącach lat dojdzie do jednego stopnia kątowego. Z ryc. 16 zaraz widzimy, że gdyby $\dot{\varphi}$ i φ były rzeczywiście równe zeru, to oś Ox byłaby identyczna z ON , to jest prosta równonocna leżałaby wciąż w płaszczyźnie stałej ekliptyki 1850 r., co więcej, rzeczywista ekliptyka byłaby niezmienną. Wtedy ruch osi równikowych zależałby tylko od prędkości $\dot{\psi}$ (od prędkości

¹⁾ Wprowadzamy tu znakowanie, które powszechnie utarło się w astronomii sferycznej. Tak samo symbole p, q, r na składowe prędkości obrotu są powszechnie używane w mechanice.

²⁾ Przyczem trzeba uwzględnić ruchy własne gwiazd, o czym będzie mowa w następnym rozdziale.

W pobliżu bieguna $\frac{d\alpha}{dt}$ zmierza do nieskończoności, ale $\cos \delta \frac{d\alpha}{dt}$ pozostaje skończone.

lunisolarnej precesyi). Załóżmy chwilowo, że kąt E i prędkość ψ są stałe — wiemy zresztą, że zmieniają się bardzo powolnie — i weźmy ich wartości z 1900,0 r., mianowicie¹⁾:

$$E = 23^{\circ} 27' 8,03, \quad \psi = 50,37 \text{ (na rok).}$$

Z ryc. 16 widzimy, że oś Oz toczy się z prędkością kątową $50,37$ rocznie po stożku krągłym, którego wierzchołek znajduje się w O , którego osią jest prosta OZ a kąt wierzchołkowy wynosi $23^{\circ} 27'$ Ruch ten odbywa się za wskazówkami zegarka, t. j. w kierunku przeciwnym kierunkowi obiegu ziemi po orbicie.

Aby obejść cały stożek oś Oz potrzebowałaby:

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{50,37} = 25730 \text{ lat,}$$

ze względu jednak na to, że ψ zmienia się z czasem oraz ze względu na to, że ψ jest od zera różne i że powoli zmienia się z czasem — oś Oz toczy się po stożku niekrągłym i niezamkniętym oraz powraca do tej samej płaszczyzny pionowej przechodzącej przez OZ (do tego samego położenia powrócić nie może) po upływie mniej więcej 25786 lat.

Wskutek opisanego przed chwilą ruchu gwiazdy posuwają się po sklepieniu nieba. Wprawdzie z ruchem precesyjnym kombinują się ich ruchy własne, ale ponieważ te ostatnie ruchy są małe, więc pierwszego (precesyjnego) ruchu nie zacierają. Odkrył go jeszcze w II wieku przed Chr. Hipparch przez porównanie swoich obserwacji z obserwacjami Aristylla i Timocharisa (około 300 r. przed Chr.).

Wiemy już, że skutek przyciągania planet ekliptyka zmienia swe położenie. Nie pomieściliśmy jej na rys. 16, aby nie gmatwać go wielu liniami. Przechodziłaby ona tam przez punkt x . Dopelniamy teraz rysunek 16 rysunkiem 17, na którym znajdują się oba równiki i obie ekliptyki. Łuk xR oznacza długość współczesną gwiazdy G , zaś łuk XR_0 jej długość w epoce zero [naturalnie ro-

¹⁾ Wartości E i ψ w r. 1850 były $23^{\circ} 27' 31,68$ oraz $50,37$ (różnice między ψ z 1900 i z 1850 r. dotyczą tylko dalszych dziesiątych). Podajemy jeszcze wartości precesyi ogólnej w rektascensyi m i w deklinacyi n

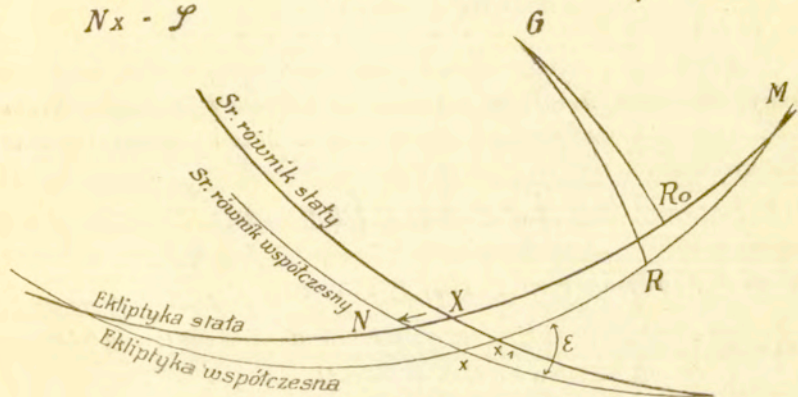
$m = 46,071$ w 1850,0 r.,	$46,085$ w 1900,0 r.
$n = 20,051$ „ „	$20,047$ „ „

zumujemy tu tak, jakby gwiazda nie posiadała ruchu własnego]. Różnica: $xR - XR_0$ to przyrost długości wskutek precesyi. Odmierzymy na ruchomej ekliptyce od punktu M łuk Mx_1 równy łukowi MX . Łuk x_1x nazywamy „ogólną precesyą w długości“. Ogólna precesya tylko nieznacznie różni się od przyrostu długości $xR - XR_0$ i bywa pospolicie zamiast niego podstawiana. Podajemy jej wartości

w r. 1850,0	50,2453
„ „ 1900,0	50,2564
„ „ 1912,5	50,2591
„ „ 1913,5	50,2593.

$$NX = \psi$$

$$Nx = \mathcal{P}$$



Ryc. 17.

Nachylenie ekliptyki do średniego równika także zmienia się, przyczem nachylenie ε współczesnego średniego równika do współczesnej ekliptyki różni się [zresztą mało] od nachylenia E współczesnego średniego równika do ekliptyki stałej.

Tu możemy wytłómaczyć, co należy rozumieć pod „średnim“ równikiem. „Średnim“ nazywamy ten równik, który otrzymalibyśmy wtedy, gdyby istniała tylko precesya, a nutacya, o której zaraz mówić będziemy, była stale zerem.

4. Nutacya.

Przechodzimy teraz do wyrazów peryodycznych: ϕ nie przyczynia się do nutacyi, natomiast \dot{E} i ψ zawierają wyrazy peryodyczne, ale niewielkie. Korzystając z tego pozwolimy sobie na nie-

które uproszczenia, mianowicie skorzystamy z tego, że φ jest małe i położymy $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$. Natomiast p w nutacyi nie jest znikome. Mamy tedy ze wzorów (6)

$$\begin{aligned} p &= -\dot{E} \\ q &= \sin E\psi \\ r &= -\cos E\psi, \end{aligned}$$

a po podstawieniu we wzory (3) otrzymujemy

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \cos E\psi + (\sin \alpha \sin E\psi - \cos \alpha \dot{E}) \operatorname{tang} \delta \\ \frac{d\delta}{dt} = \cos \alpha \sin E\psi + \sin \alpha \dot{E}. \end{cases}$$

Ponieważ peryod nutacyi jest stosunkowo krótki, więc możemy uważać α , δ i E w ciągu kilku peryodów za stałe. Wobec tego dogodnie jest wykonać całkowanie. Jeżeli jeszcze położymy dla krótkości

$$\int \dot{\psi} dt = N, \quad \int \dot{E} dt = \Omega,$$

to po scałkowaniu równań (10) otrzymamy

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha - \alpha_0 = (\cos E + \sin \alpha \sin E \operatorname{tang} \delta N) - \cos \alpha \operatorname{tang} \delta \Omega \\ \delta - \delta_0 = \cos \alpha \sin E N + \sin \alpha \Omega. \end{cases}$$

Tak „nutacya w długości“: N , jak „nutacya w nachyleniu“ Ω są funkcyami czasu, ale ponieważ zależą przedewszystkiem od długości wstępującego węzła¹⁾ księżycy Ω , więc dogodnie jest przedstawić je jako funkcyę tej nowej zmiennej. Pomijając drobne wyrazy piszemy

$$(12) \quad \begin{cases} N = -17,234 \sin \Omega \\ \Omega = 9,210 \cos \Omega. \end{cases}$$

Oczywistą jest rzeczą, że peryod nutacyi musi wynosić tyleż, co peryod obiegu węzłów księżycy t. j. 18,6 lat.

¹⁾ „Węzłami“ nazywamy te punkty, w których droga księżycy przecina ekliptykę. „Wstępującym“ nazywa się ten, w którym księżyc przechodzi z południowej strony ekliptyki na północną, „zstępującym“ ten, w którym księżyc przechodzi z północnej strony ekliptyki na południową. Oznaczamy pierwszy węzeł przez Ω , a drugi przez \mathcal{U} , — długość pierwszego oznaczamy także przez Ω , długość drugiego jest naturalnie $180^\circ + \Omega$.

Rozważmy ruch bieguna prawdziwego naokoło średniego. Przesunięcie bieguna prawdziwego równoległe do ekliptyki jest

$$x = \sin \varepsilon N,$$

a w kierunku do tamtego prostopadłym

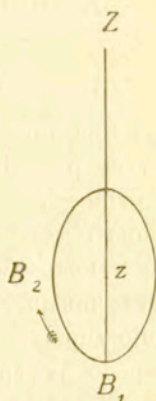
$$y = \Omega.$$

Podstawiając wartości na N i Ω ze wzorów (12) i postępując podobnie jak w innych analogicznych przypadkach wnet znajdziemy

$$\frac{x^2}{(17,234 \sin \varepsilon)^2} + \frac{y^2}{(9,21)^2} = 1.$$

Przeto biegun rzeczywisty opisuje naokoło średniego elipsę (w ciągu 18,6 lat), której większa półoś prostopadła do ekliptyki wynosi $9,21^1$ a mniejsza równoległa do ekliptyki $17,234 \sin \varepsilon = 6,86\dots$ Aby rozpoznać kierunek obiegu, rozpatrzmy dwie pozycje bieguna prawdziwego: jedną w chwili gdy $\Omega = 0$, drugą w chwili gdy $\Omega = -90^\circ$ [kąt Ω zmniejsza się, gdy czas wzrasta!]. W pierwszej pozycji $N = 0$, $\Omega = 9,21$, zatem biegun prawdziwy znajduje się w największym oddaleniu od bieguna ekliptyki Z [na rysunku Z oznacza biegun ekliptyki, z biegun średniego równika, B_1 , B_2 kolejne pozycje bieguna prawdziwego równika, wszystko widziane ze ziemi] w punkcie B_1 . W drugiej pozycji $\Omega = -90^\circ$, $\sin \varepsilon N = 6,86\dots$ $\Omega = 0$. Ponieważ N , które jest przyrostem długości, wypadło dodatnie a długości wzrastają od zachodu na wschód, więc druga pozycja bieguna ruchomego równika jest w B_2 . Tedy obieg bieguna prawdziwego naokoło średniego odbywa się w kierunku ruchu wskazówek zegarka (t. j. w kierunku wstecznym).

Pomijając różne szczegóły podaliśmy tu ważniejsze cechy tak precesji jak nutacyi. Warto jeszcze zastanowić się nad tem, jak kombinują się ze sobą obie perturbacje. Wskutek precesyi średni biegun opisuje w ciągu 18,6 lat kąt wynoszący $937''$, ale ponieważ



Ryc. 18.

¹⁾ Ta liczba to tak zwana „stała nutacyi“. Właściwie stała nutacyi jest może trochę większa (Newcomb podaje $9,214$), ale wartość $9,21$ przyjęła konferencya paryska w 1896 r.

sunie po łuku małego koła, którego promień jest $\sin \epsilon$, więc kładąc $\epsilon = 23^{\circ} 27,5$ znajdziemy, że długość przebieżonego łuku jest równoważna tylko $374''$ łuku wielkiego koła. Zawsze to jednak 40,8 razy więcej niż połowa większej osi elipsy nutacyjnej a 54,4 razy więcej niż połowa mniejszej osi; jeżeli zatem złączymy oba ruchy ze sobą, to o żadnych punktach podwójnych nie może być mowy. Wypadkowa droga rzeczywistego bieguna przedstawi się jako linia wężykowata o bardzo płaskich zarysach.

5. Eulerowska perturbacja. Zmiany geograficznych szerokości.

Prócz precesyi i nutacyi w ruchu obrotowym ziemi jest jeszcze jedna perturbacja, ale tak drobna, że choć już w XVIII wieku Euler przewidział ją teoretycznie, jednakże udało się wykryć jej istnienie dopiero w nowszych czasach dzięki udoskonalonym metodom obserwacyi. Amplituda jej dosięga zaledwo pół sekundy.

Dotąd uważaliśmy oś obrotu za sztywnie związaną ze ziemią. Teraz musimy rozstać się z tem wyobrażeniem. Oś obrotu nie zajmuje zupełnie stałego położenia wewnątrz ziemi: kołacze się w niej w podobny sposób, jak oś wozu w nazbyt szerokiej piaście. Ponieważ zaś, o ile nie uwzględniamy precesyi i nutacyi¹⁾, oś obrotu zajmuje w przestrzeni położenie stałe, więc właściwie ziemia kołysze się zlekka naokoło swej osi obrotu. Razem ze ziemią kołyszą się horyzonty miejsc obserwacyi, przeto szerokości geograficzne, które wedle definicyi są niczem innym jak wysokością bieguna osi obrotu nad horyzontem, muszą się zmieniać. Stąd też nazywają pomienioną perturbację po prostu „zmianami geograficznych szerokości“.

Teorią tej perturbacyi zajmujemy się na innem miejscu, tu zaś powiemy tylko, że zmiany geograficznych szerokości są dosyć nieregularne, że jednakże można w nich rozróżnić peryod wynoszący około 14 miesięcy i że całkowita amplituda zmian nie dosięga nawet sekundy²⁾. Z tego powodu uwzględniamy odpowiednią

1) Właściwie i to jeszcze nie jest zupełnie ściśle, ale chodzi tu o tak drobną różnicę [o wielkości rzędu $0,001$], że niema potrzeby o niej mówić.

2) Mówimy tu o całkowitej amplitudzie zmian od minimum do maximum. Nieco wyżej mówiliśmy o amplitudzie odchylenia od średniego położenia osi obrotu.

poprawkę tylko w tych przypadkach, w których chodzi o wyjątkową ścisłość. W następnym np. rozdziale mówiąc o redukcji obserwowanych pozycji ciał niebieskich będziemy stale pomijać poprawkę na zmiany geograficznej szerokości.

Literatura.

Oprócz poprzednio wymienionych dzieł:

G. W. Hill: On the derivation and Reduction of the places of the fixed stars. Tables of the American Ephemeris, 1869 oraz G. W. Hill's Collected math. Works, tom I, str. 59—76.

S. Newcomb: The Elements of the four inner planets and fundamental Constants of Astronomy, Washington, 1895.

Tenże: A new Determination of the Precessional Motion. Astron. Journal, tom XVII, str. 161—167.

Th. v. Oppolzer: Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen u. Planeten, dwa tomy: Lipsk, 1880 i 1882.

A. Souchon: Traité d'astronomie pratique, Paryż, 1883.



ROZDZIAŁ XII.

Redukcja pozycyi gwiazd od jednej epoki do drugiej.

1. Ruch własny gwiazd.

Refrakcyę uwzględniamy zazwyczaj już przy obliczeniu obserwacyi, przeto tak zwane „widome miejsca“ gwiazd są uwolnione od wpływu refrakcyi. Widome miejsca gwiazd są identyczne z geocentrycznymi, bo [rozd. IX, § 3] rozmiary ziemi są wobec odległości gwiazd zbyt znikome, aby różnica stanowiska między środkiem ziemi a obserwatoryum mogła odbić się na pozycyi gwiazdy. Zarazem widzimy, że widome miejsca są odniesione do chwilowego rzeczywistego bieguna i chwilowego rzeczywistego porównania dnia z nocą. „Średnie“ miejsca gwiazd są odniesione do środka słońca, do średniego bieguna i do średniego punktu wiosennego porównania dnia z nocą, wreszcie zazwyczaj bywają podawane dla początku pewnego roku. Z tej definicyi widzimy, że chcąc z widomego miejsca otrzymać średnie, musimy wyeliminować wpływ aberacyi, rocznej parallaksy, jeżeli ta ostatnia nie jest znikoma i jako tako znana, nutacyi, wreszcie precesyi za ten czas, który upłynął między epoką, do której ma być odniesione średnie miejsce a momentem obserwacyi. Ale oprócz tego bardzo często musimy jeszcze uwzględnić ruch własny gwiazd.

Gdyby gwiazdy były nieruchome względem słońca, to pozycye obserwowane w różnych epokach, poprawione na aberacyę, nutacyę, ewentualnie parallaksę i odniesione do współrzędnych z jednej i tej samej epoki byłyby identyczne; tymczasem skoro porównamy pozycye obserwowane w znacznych odstępach czasu np. po kilkudziesięciu latach, to przekonamy się, że bardzo często są niezgodne i to w sposób zupełnie niezależny od współrzędnych gwia-

zdy. Te zmiany położenia dowodzą, że gwiazdy poruszają się względem słońca. Naturalnie skoro gwiazdy poruszają się, to i słońce też zapewne porusza się, zatem zmiany pozycyi gwiazd zależą także od ruchu systemu słonecznego. Ale w obecnej chwili nie potrzebujemy wdawać się w kwestyę, jaka część przesunięcia gwiazdy zależy od jej własnego ruchu a jaka od ruchu słońca, — będziemy rozumować tak, jak gdyby słońce było nieruchome. Powstaje pytanie, jaką jest natura tych względnych ruchów?

Dotychczas wystarcza hipoteza, że te ruchy są prostoliniowe i jednostajne. Musimy tu zrobić zastrzeżenie co do systemów podwójnych, potrójnych i t. d. W tych systemach tylko środek masy porusza się prostoliniowo i jednostajnie, gwiazdy zaś należące do systemu opisują naokoło środka masy krzywoliniowe drogi.

Bezpośrednio obserwujemy tylko rzuty ruchu gwiazd na sklepienie niebieskie i to jest właśnie to, co nazywamy „ruchem własnym“; drugiej składowej: składowej wzdłuż promienia widzenia obserwować nie możemy, ale możemy z pomocą spektroskopu zmierzyć jej prędkość, tak zwaną „prędkość radyalną“. Ponieważ obie składowe zależą od kąta pomiędzy promieniem widzenia a kierunkiem ruchu gwiazdy i ponieważ ten kąt zmienia się z czasem, więc pomimo tego, że ruch trójwymiarowy jest prostoliniowy i jednostajny, jego składowe, specjalnie zaś ruch własny, powinny zmieniać się z czasem. Wszakże zmieniają się z taką powolnością, że — przynajmniej w obecnym stanie astronomii — nigdy nie potrzebujemy uwzględniać przyspieszenia ruchu własnego. Będziemy go przeto odtąd uważać za jednostajny. Można go też traktować tak, jak gdyby odbywał się wzdłuż łuku wielkiego koła.

Ruch własny oznaczamy przez μ^1). Jeżeli dalej oznaczymy przez H kąt pomiędzy kierunkiem ruchu własnego a południkiem gwiazdy, liczony od północy na wschód (i dalej w tym samym kierunku), a składowe ruchu własnego w rektascensyi i deklinacyi przez μ_α i μ_δ , to oczywiście będziemy mieli związki:

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \mu_\alpha &= \mu \sin H \\ \mu_\delta &= \mu \cos H. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹⁾ Ruchy własne są tak małe, że najczęściej wyrażamy je w sekundach kątowych na stulecie.

2. Redukcyja od miejsca średniego na początku roku do widomego w ciągu roku.

W poprzednim paragrafie dowiedzieliśmy się, że przy redukcji miejsce gwiazd prócz wpływów omówionych w poprzednich rozdziałach musimy jeszcze uwzględniać wpływ ruchu własnego. Tedy przy redukcji od miejsca średniego do widomego musimy uwzględnić:

1. Ruch własny gwiazdy między epoką, do której odnosi się miejsce średnie i epoką, do której odnosi się miejsce widome.
2. Precesyę między epoką, do której odnoszą się współrzędne miejsca średniego a epoką, do której odnosi się miejsce widome.
3. Nutacyę.
4. Aberacyę.
5. (Ewentualnie) roczną parallaksę.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy trzeba obliczyć współrzędne widome gwiazdy w pewnej chwili w ciągu roku a dane są współrzędne średnie na początku roku ¹⁾. Bywa to np. wtedy, gdy chodzi o gwiazdę, której średnie współrzędne są podane w efemerydach. Oznaczmy przez α i δ współrzędne widome, przez α_m i δ_m współrzędne średnie a przez t odstęp czasu od początku roku aż do chwili, dla której mamy obliczyć współrzędne widome ²⁾. Z poprzedniego rozdziału [wzory (8) i (9)] wiemy, że poprawki na precesyę dla krótkich odstępów czasu są:

$$(m + n \sin \alpha \operatorname{tang} \delta) t \\ n \cos \alpha t,$$

a na nutacyę [wzory (11) i (12) poprzedniego rozdziału]

$$(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tang} \delta) N - \cos \alpha \operatorname{tang} \delta \Omega \\ \sin \varepsilon \cos \alpha N + \sin \alpha \Omega.$$

Dalej wiemy z rozdziału X-go [wzory 14 bis], że poprawki na aberacyę roczną, o ile pominiemy drobne wyrazy ze współczynnikiem 0,34, są

$$- 20,47 (\sin \alpha \sin \odot + \cos \alpha \cos \odot \cos \varepsilon) \sec \delta \\ - 20,47 [\sin \delta \cos \alpha \sin \odot + (\cos \delta \sin \varepsilon - \sin \delta \cos \varepsilon \sin \alpha) \cos \odot].$$

¹⁾ Na początku roku Bessla!

²⁾ Ponieważ w tym rachunku przyjmujemy za jednostkę czasu rok, więc t będzie prawdziwym ułamkiem.

Wreszcie z obecnego rozdziału [wzory (1)] wiemy, że dla krótkich odstępów czasu poprawki na ruch własny są

$$\mu_{\alpha} t = \mu \sin H \sec \delta t$$

$$\mu_{\delta} t = \mu \cos H t.$$

Zbierzmy teraz wszystkie te poprawki grupując je w taki sposób, aby wyrazy mające t we współczynniku stały razem, a będziemy mogli napisać:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_m + (m + n \sin \alpha \operatorname{tang} \delta + \mu_{\alpha}) t + \\ &\quad + (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \tan \delta) N - \cos \alpha \operatorname{tang} \delta \Omega - \\ &\quad - 20,47 (\sin \alpha \sin \odot + \cos \alpha \cos \odot \cos \varepsilon) \sec \delta \\ \delta &= \delta_m + (n \cos \alpha + \mu_{\delta}) t + \sin \varepsilon \cos \alpha N + \sin \alpha \Omega - \\ &\quad - 20,47 [\sin \delta \cos \alpha \sin \odot + \\ &\quad + (\cos \delta \sin \varepsilon - \sin \delta \cos \varepsilon \sin \alpha) \cos \odot]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wszystkie argumenty figurujące po prawej stronie równań (2) odpowiadają chwili czasu t . Co do α i δ , to z konieczności musimy podstawić zamiast nich α_m i δ_m , ale błędy stąd wynikające są zupełnie znikome, bo α i α_m z jednej a δ i δ_m z drugiej strony mało różnią się między sobą a chodzi tylko o obliczenie drobnych poprawek. Wartości chwilowe ε [prawdziwego nachylenia ekliptyki], \odot [prawdziwej długości słońca], Ω [długości wstępującego węzła księżycy], od którego zależą głównie wyrazy N i Ω , oraz wartości innych argumentów znajdziemy w efemerydach¹⁾. Ale w praktyce szukać ich nie potrzebujemy, bo używamy wzorów (2) nie w pierwotnej, a w przekształconej formie.

Najpierw podamy przekształcenie Bessla. We formie Bessla wzory (2) przedstawiają się jako iloczyny pewnych wielkości A , B , ... zależnych od argumentów ε , \odot i t. d., wspólnych wszystkim gwiazdom, i wielkości a , b , ... i t. d., zależnych od współrzędnych samej gwiazdy. Wielkości A , B , ... a raczej ich logarytmy są podane w efemerydach na każdy dzień, przez co rachunek jest ogromnie ułatwiony. Podamy tutaj te znakowanie, które wprowadził Baily, a którego trzymają się „*Connaissance des Temps*“ i „*Nautical Almanac*“. „*Berliner Jahrbuch*“ i „*American Ephemeris*“ trzy-

¹⁾ ε i \odot są podane na każdy dzień, Ω co 10 dni.

mają¹⁾ się pierwotnego znakowania Bessla. Aby przejść od jednego znakowania do drugiego, dość jest zamienić litery (duże i małe) *A* z *C* oraz *B* z *D*.

Położmy

$$u = \frac{\sin \varepsilon}{n}, \quad v = \cos \varepsilon - \frac{m}{n} \sin \varepsilon$$

skąd odwrotnie

$$\sin \varepsilon = un, \quad \cos \varepsilon = v + um.$$

Po tem podstawieniu możemy po prawej stronie równań (2) ugrupować wyrazy zawierające *t* i *N* w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_m + vN + \mu_\alpha t + (t + uN)(m + n \sin \alpha \operatorname{tang} \delta) + \dots \\ \delta &= \delta_m + \mu_\delta t + (t + uN)n \cos \alpha + \dots \end{aligned}$$

Teraz zaś położmy:

$$(3) \left\{ \begin{array}{ll} -20',47 \cos \odot \cos \varepsilon = A, & \\ -20',47 \sin \odot = B & \\ t + uN = C & \\ -\Omega = D & \\ vN = E & \\ \cos \alpha \sec \delta = a, & \cos \delta \operatorname{tang} \varepsilon - \sin \alpha \sin \delta = a' \\ \sin \alpha \sec \delta = b, & \cos \alpha \sin \delta = b' \\ m + n \sin \alpha \operatorname{tang} \delta = c, & n \cos \alpha = c' \\ \cos \alpha \operatorname{tang} \delta = d, & -\sin \alpha = d', \end{array} \right.$$

a będziemy mogli napisać:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_m + \mu_\alpha t + Aa + Bb + Cc + Dd + E \\ \delta = \delta_m + \mu_\delta t + Aa' + Bb' + Cc' + Dd'. \end{array} \right.$$

Wzory (4) są szczególnie dogodne wtedy, gdy potrzebujemy obliczać pozycje widome jednej i tej samej gwiazdy kilka razy w ciągu tego samego roku, lub w ciągu kilku lat z rzędu, albowiem, osobliwie dla gwiazd bliskich równika, można używać tych samych wartości *a*, *b*, *c*, *d*, *a'*, *b'*, *c'*, *d'* w ciągu kilku lat z rzędu.

¹⁾ Oprócz tego „American Ephemeris“ w redukcji miejsc gwiazd trzyma się Struvego i Petersa a nie stałych poleconych przez konferencyę paryską 1896 r.

Ponieważ rektascensję wyrażają zwykle w godzinach, minutach i t. d., więc trzeba a, b, d i E dzielić przez 15. Współczynniki m i n wchodzące w c oraz μ_α bywają już zwykle wyrażone (w efemerydach) w sekundach czasu, więc dzielić ich przez 15 nie trzeba.

Przechodzimy teraz do drugiej metody, do metody „niezależnych codziennych liczb“ [*independent day numbers*], w której rachunki są krótsze. Z tego powodu, gdy chodzi o redukcję niewielu gwiazd, to dogodniej jest posługiwać się nią aniżeli metodą Bessla. Położmy we wzorach (4)

$$\left. \begin{aligned} A &= h \sin H, & B &= h \cos H, & i &= A \operatorname{tang} \varepsilon \\ nC &= g \cos G, & D &= g \sin G, & f &= mC, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

a otrzymamy natychmiast

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_m + f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tang} \delta + \\ &\quad + h \sin(H + \alpha) \sec \delta + \mu_\alpha t + E \\ \delta &= \delta_m + i \cos \delta + g \cos(G + \alpha) + \\ &\quad + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + \mu_\delta t. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wielkości f, g, h, G, H , względnie ich logarytmy są podane w efemerydach raz na dobę, np. na północ w Greenwichu. „*Connaissance des Temps*“ podaje f i $\frac{1}{15}f$, $\log g$ i $\log \frac{1}{15}g$, $\log h$ i $\log \frac{1}{15}h$ ¹⁾, a to dlatego, że pierwszy wzór (6) odnosi się do rektascensyi, którą pospolicie wyrażamy w jednostkach czasu. Inne efemerydy są nieco więcej skąpe. Wyraz E jest zawsze tak mały, że można go często pominąć. Naodwrot ponieważ przy obliczeniu C i D w pierwszym, a f, g i G w drugim systemie opuszczają niektóre małe wyrazy, więc w razie, gdy chodzi o wielką dokładność, trzeba nietylko zachować E , ale jeszcze dopisać do wzorów (4), względnie (6) niektóre wyrazy. Wyrazy te są podane w efemerydach, ich współczynniki [C' i D' w pierwszym, f', g' i G' w drugim systemie] są także podane na każdy dzień.

W najbliższem sąsiedztwie bieguna [aż do 1°—2° odległości] wzory (4), a więc tak samo pochodzące od nich wzory (4) i (6) są niedość dokładne. Musimy tam używać do redukcji innych, dokładniejszych wzorów. Obecnie prawie powszechnie, przynajmniej w biurach wydających kalendarze astronomiczne, używają wzorów

¹⁾ „*Connaissance des Temps*“ i „*American Ephemeris*“ podają obok G i H także $\frac{1}{15}G$ i $\frac{1}{15}H$.

Fabritiusa¹⁾. Bliższych wiadomości co do redukcji gwiazd około biegunowych podawać tu nie będziemy: odsyłamy czytelnika do traktatów specjalnych, np. S. Newcomba „Spherical Astronomy“, lub Th. v. Oppolzera „Lehrbuch zur Bahnbestimmung“.

3. Redukcja w przypadkach, gdy odstęp czasu między epoką miejsca średniego a epoką miejsca widomego wynosi więcej niż rok.

Jeżeli gwiazda, której miejsce widome mamy obliczyć, nie znajduje się w efemerydach, ale znajduje się w jakim katalogu, to najpraktyczniej jest przeprowadzić redukcję tak, aby o ile możliwości wyzyskać dane zawarte w efemerydach. Ponieważ katalogi podają średnie miejsca gwiazd dla początku pewnego roku, więc najlepiej jest ze średniego miejsca w epoce katalogu najpierw obliczyć średnie miejsce na początku tego roku, do którego należy epoka miejsca widomego, potem zaś metodami podanymi w poprzednim paragrafie przejść od średniego miejsca na początku roku do widomego w chwili danej. Widzimy stąd, że należy rozpatrzyć tylko pierwsze zadanie. Ponieważ we wzorach (2) wszystkie poprawki nie zawierające czynnika t zależą tylko od chwilowych wartości argumentów ϵ , \odot i t. d., więc przy przejściu od średniego miejsca na początku jednego roku do średniego miejsca na początku drugiego w rachubę wchodzi tylko poprawki pierwszej grupy zawierającej czynnik t , t. j. poprawki zależne od precesji i ruchu własnego. Naturalnie teraz pod t należy rozumieć tę całą liczbę lat, która oddziela epokę katalogu od początku roku, dla którego wykonujemy redukcję. Ale skoro tylko ta liczba lat jest nieco większa, albo skoro chcemy osiągnąć większą ścisłość, to prócz wyrazów pierwszego rzędu t. j. zawierających t trzeba wziąć jeszcze wyrazy drugiego rzędu t. j. zawierające t^2 . Że poprawki na precesję figurujące we wzorach (2) są tylko pierwszymi wyrazami szeregu, o tem wiemy już z poprzedniego rozdziału, co zaś do poprawek na ruch własny, to chociaż w pierwszym paragrafie obecnego rozdziału przyjęliśmy $\frac{d\mu}{dt} = 0$, jednakże składowe ruchu własnego nie

¹⁾ Ueber eine strenge Methode... Astr. Nachr., tom LXXXVII, str. 113—118, 129—134. We wzorze (4) na str. 131 wyraz po prawej stronie powinien mieć znak —. Por. Oppolzer, tom I, str. 259, uwaga u dołu.

są stałe, bo wskutek samego ruchu własnego kąta H , pod którym tor gwiazdy przecina południk, zmienia się z czasem, a oprócz tego wskutek precesyi biegun a z nim i południki zmieniają swe położenie. Ponieważ chodzi tu o drobne wielkości, więc możemy po pierwsze traktować przyrosty jak różniczki, po drugie możemy rozważać jedne zmiany oddzielnie od drugich. Zastanowimy się najpierw nad zmianami zależnymi od samego ruchu własnego.

Wedle wzorów (1) obecnego rozdziału składowe ruchu własnego w rektascensyi i deklinacyi są:

$$\left. \begin{aligned} \mu_\alpha &= \mu \sin H \sec \delta \\ \mu_\delta &= \mu \cos H. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

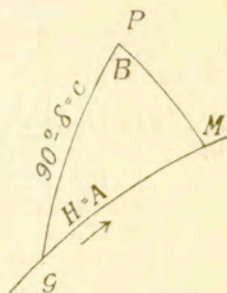
Utwórzmy pochodne względem czasu¹⁾ bacząc na to, że wedle założenia $\frac{d\mu}{dt} = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\mu_\alpha}{dt}\right)_1 &= \mu \cos H \sec \delta \frac{dH}{dt} + \mu \frac{\sin H}{\cos^2 \delta} \sin \delta \frac{d\delta}{dt} \\ \left(\frac{d\mu_\delta}{dt}\right)_1 &= -\sin H \frac{dH}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wyobraźmy sobie trójkąt sferyczny: P (biegun)²⁾, G (gwiazda) i trzeci punkt M położony gdziekolwiek na wielkiem kole, po którym odbywa się ruch własny, ale z tej strony, ku której gwiazda posuwa się. Wedle definicyi wewnętrzny kąt przy G to jest kąt H . Oznaczmy go chwilowo przez A , oznaczmy dalej chwilowo kąt przy P przez B , a bok $PG = \frac{\pi}{2} - \delta$ (odpowiednio) przez c .

Gdy gwiazda przesuwają się od G ku M , to oczywiście pozostałe elementy trójkąta nie zmieniają się, zmianom podlegają tylko trzy powyżej wymienione elementy; przeto drugi wzór (19) rozdziału I-go przywodzi się do

$$dA = -\cos c dB.$$



$W \rightarrow \mathcal{E}$

Ryc. 19.

¹⁾ Ponieważ to nie są zupełne pochodne, więc bierzemy je w nawiasy i przydajemy znaczek 1.

²⁾ Przypominamy, że w tym ustępie biegun jest uważany za nieruchomy.

Ale $A = H$, $c = \frac{1}{2}\pi - \delta$, zaś B oczywiście dopełnia rektascensyę do pewnego stałego kąta, t. j. $B + a = \text{const}$. Tedy ze wzoru powyższego wynika

$$dH = \sin \delta da,$$

a wzory (8) przechodzą na

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mu_\alpha}{dt}\right)_1 &= \mu \cos H \operatorname{tang} \delta \frac{da}{dt} + \mu \frac{\sin H}{\cos^2 \delta} \sin \delta \frac{d\delta}{dt} \\ \left(\frac{d\mu_\delta}{dt}\right)_1 &= -\mu \sin H \sin \delta \frac{da}{dt}. \end{aligned}$$

Rugując wreszcie $\mu \sin H$ i $\mu \cos H$ za pomocą wzorów (7) i kładąc

$$\frac{da}{dt} = \mu_\alpha, \quad \frac{d\delta}{dt} = \mu_\delta,$$

bo wedle założenia zmiany α i δ pochodzą tylko z ruchów własnych, otrzymamy

$$(9) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\mu_\alpha}{dt}\right)_1 = 2\mu_\alpha \mu_\delta \operatorname{tang} \delta \\ \left(\frac{d\mu_\delta}{dt}\right)_1 = -\mu_\alpha^2 \sin \delta \cos \delta. \end{cases}$$

Przechodzimy teraz do zmian składowych ruchu własnego spowodowanych przez precesyę

$$(10) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\mu_\alpha}{dt}\right)_2 = \mu \cos H \sec \delta \frac{dH}{dt} + \mu \frac{\sin H \sin \delta}{\cos^2 \delta} \cdot \frac{d\delta}{dt} \\ \left(\frac{d\mu_\delta}{dt}\right)_2 = -\mu \sin H \frac{dH}{dt}. \end{cases}$$

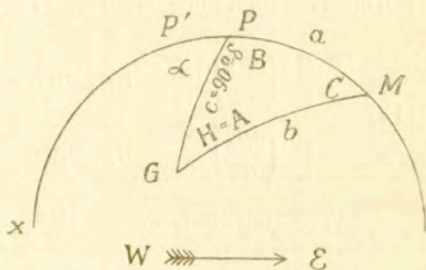
Zakładamy, że gwiazda nie rusza się, ale zato P zmienia swoje położenie, np. z P przechodzi do P' . Bierzemy znowu taki sam trójkąt sferyczny jak poprzednio, ale tym razem nie obieramy boku PM dowolnie, lecz bierzemy łuk wielkiego koła przechodzącego przez P i P' . Oznaczamy kąty i boki tak samo jak poprzednio. Ponieważ G jest nieruchome a P ruchome, więc nie zmieniają się tylko bok $b = GM$ i kąt C przy M . Stosując czwarty wzór (19) z rozdziału I-go zaraz otrzymamy

$$(11) \quad \sin c dA = \sin B da.$$

Znowu tak jak poprzednio $dA = dH$, zaś $\sin c = \cos \delta$, ale co znaczą $\sin B$ i da . O B wiemy już, że dopełnia się z α do stałego kąta. W danym razie dzięki umowie, aby trzeci bok trójkąta sferycznego przechodził nie tylko przez P ale także przez P' , mamy po prostu

$$B + \alpha = 180^\circ.$$

Rzeczywiście ruch bieguna nie zależy od prędkości kątovej r , bo [patrz poprzedni rozdział] to jest prędkość naokoło osi z , która wciąż przechodzi przez sam biegun, z drugiej strony $p=0$ wedle tego, co było powiedziane na początku § 3 ostatniego rozdziału. Przeto prędkość (kątowa) bieguna jest q a tor jego jest łukiem wielkiego koła prostopadłego do osi y . Stąd zaś wynika, że oś x leży w płaszczyźnie wielkiego koła MPP' , bo wedle umowy to wielkie koło¹⁾ jest identyczne z torem bieguna. Lecz przecięcie się dodatniej osi x z owym wielkim kołem to punkt wiosennego porównania dnia z nocą. Zatem punkt wiosennego porównania dnia z nocą leży na wielkim kole MPP' , kąt $xP'P$ przy P to rekstascensya α i, jak to było zapowiedziane,



Ryc. 20.

$$\alpha + B = 180^\circ.$$

Jednocześnie widzieliśmy, że prędkość bieguna to q , zatem

$$da = q dt = n dt,$$

bo umówiliśmy się oznaczać q przez n . Widzimy tedy, że równanie (11) przechodzi w równanie

$$\cos \delta dH = n \sin a dt. \quad (11 \text{ bis})$$

Co do pochodnej $\frac{d\delta}{dt}$ w pierwszym równaniu 10, to oczywistą jest rzeczą, że powinniśmy wziąć ją ze wzoru (3) w poprzednim

¹⁾ Naturalnie to wielkie koło uczestniczy w ruchu osi x, y, z .

rozdziale, bo $\frac{d\delta}{dt}$ zależy tu tylko od precesyi. Bacząc na to, że wedle założenia $p=0$ oraz, że umówiliśmy się oznaczać q przez n , otrzymamy

$$\frac{d\delta}{dt} = q \cos \alpha = n \cos \alpha.$$

Skoro podstawimy w równania (10) $\frac{dH}{dt}$ z równania (11 bis) a $\frac{d\delta}{dt}$ z przed chwilą napisanego, skoro jeszcze wyrugujemy $\mu \sin H$ i $\mu \cos H$ za pomocą wzorów (7), to otrzymamy ostatecznie:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\mu_\alpha}{dt}\right)_2 = n\mu_\delta \sin \alpha \sec^2 \delta + n\mu_\alpha \cos \alpha \tan \delta \\ \left(\frac{d\mu_\delta}{dt}\right)_2 = -n\mu_\alpha \sin \alpha. \end{array} \right.$$

Wreszcie dodając do siebie wzory (9) i (12) otrzymamy

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mu_\alpha}{dt} = (n\mu_\alpha \cos \alpha + 2\mu_\alpha \mu_\delta) \tan \delta + n\mu_\delta \sin \alpha \sec^2 \delta \\ \frac{d\mu_\delta}{dt} = -n\mu_\alpha \sin \alpha - \mu_\alpha^2 \sin \delta \cos \delta. \end{array} \right.$$

Utwórzmy teraz pochodne składowych precesyi względem czasu. Wedle wzorów (8) poprzedniego rozdziału te pochodne są:

$$\frac{dm}{dt} + \sin \alpha \tan \delta \frac{dn}{dt} + n \cos \alpha \tan \delta \frac{d\alpha}{dt} + n \sin \alpha \sec^2 \delta \frac{d\delta}{dt}$$

$$\cos \alpha \frac{dn}{dt} - n \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}.$$

Możemy tu wyrugować $\frac{d\alpha}{dt}$ i $\frac{d\delta}{dt}$, ale powinniśmy zamiast nich podstawić nietylko składowe precesyi [patrz wzór (8) poprzedniego rozdziału] ale także składowe ruchu własnego, bo α i δ zmieniają się tak wskutek jednej, jak wskutek drugiej przyczyny. Jeżeli jeszcze położymy dla krótkości

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} m + n \sin \alpha \tan \delta = p_\alpha \\ n \cos \alpha = p_\delta, \end{array} \right.$$

to będziemy mogli napisać wzory na pochodne w kształcie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_\alpha}{dt} &= \frac{dm}{dt} + \sin \alpha \operatorname{tang} \delta \frac{dn}{dt} + n(p_\alpha + \mu_\alpha) \cos \alpha \operatorname{tang} \delta + \\ &\quad + n(p_\delta + \mu_\delta) \sin \alpha \sec^2 \delta \\ \frac{dp_\delta}{dt} &= \cos \alpha \frac{dn}{dt} - n(p_\alpha + \mu_\alpha) n \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (15)$$

Jeżeli nareszcie dodamy do siebie równania (13) i (15), to otrzymamy całkowite wyrażenia drugich pochodnych rektascensyi i deklinacyi, mianowicie

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \frac{dm}{dt} + \sin \alpha \operatorname{tang} \delta \frac{dn}{dt} + n(p_\alpha + 2\mu_\alpha) \cos \alpha \operatorname{tang} \delta + \\ &\quad + n(p_\delta + 2\mu_\delta) \sin \alpha \sec^2 \delta + 2\mu_\alpha \mu_\delta \operatorname{tang} \delta \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} &= \cos \alpha \frac{dn}{dt} - n(p_\alpha + 2\mu_\alpha) \sin \alpha - \mu_\alpha^2 \sin \delta \cos \delta. \end{aligned} \right\} (16)$$

To są wyrażenia najogólniejsze. Jasną jest rzeczą, że w razie gdy odnosimy ruch do osi nieruchomych, to odpadną wszystkie wyrazy pochodzące z równań (12).

Przy podstawieniu liczb z reguły dzielimy prawą stronę pierwszego równania (16) przez 15, aby otrzymać drugą pochodną rektascensyi wyrażoną jako czas. Co do wartości liczbowych wielkości takich jak $\frac{dm}{dt}$, n i t. d., to te zależą od obranej jednostki czasu. Newcomb („Spher. Astr.“ str. 282) obiera stulecie jako jednostkę i podaje na rok 1900 następujące liczbowe wyrażenia (pierwszy wzór w sekundach czasu, drugi w sekundach kąta!)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= 0,317 - [6,6289] p_\alpha + [7,9876] (p_\alpha + 2\mu_\alpha) \cos \alpha \operatorname{tang} \delta + \\ &\quad + [6,8115] (p_\delta + 2\mu_\delta) \sin \alpha \sec^2 \delta + \\ &\quad + [4,9866] \mu_\alpha \mu_\delta \operatorname{tang} \delta \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} &= -[6,6289] p_\delta - [9,1637] (p_\alpha + 2\mu_\alpha) \sin \alpha - \\ &\quad - [6,7367] \mu_\alpha^2 \sin 2\delta. \end{aligned} \right\} (16 \text{ bis})$$

Pierwsze dwa wyrazy pierwszego wzoru (16 bis) i pierwszy wyraz drugiego wzoru wymagają pewnego objaśnienia. Powstały

one w ten sposób, że wyrugowano $\sin \alpha \operatorname{tang} \delta$ i $\cos \alpha$ za pomocą wzorów (14). Wskutek tego

$$\frac{dm}{dt} + \sin \alpha \operatorname{tang} \delta \frac{dn}{dt} \text{ przeszło na } \frac{dm}{dt} - \frac{m}{n} \cdot \frac{dn}{dt} + \frac{p_\alpha}{n} \cdot \frac{dn}{dt}$$

a

$$\cos \alpha \frac{dn}{dt} \quad " \quad " \quad \frac{p_\delta}{n} \cdot \frac{dn}{dt}$$

Liczby w kanciastych nawiasach wzoru (16 bis) oznaczają logarytmy, przyczem naturalnie od każdego logarytmu trzeba odjąć 10. Gdybyśmy zamiast stulecia wzięli jako jednostkę czasu rok, to trzeba by podzielić 0,317 przez 10000 a wszystkie charakterystyki logarytmów zmniejszyć o 4. Zdarza się też i to bardzo często, że podana jest roczna precesya, a drugie pochodne są podane na stulecie [stąd nazywają je wiekowemi zmianami: „*variations seculaires*“]. To znaczy, że podzielono wzory (16 bis) tylko przez 100.

Jeżeli więc napiszemy wzory służące do redukcji w kształcie

$$(17) \quad \alpha_m - \alpha_0 = t \frac{d\alpha}{dt} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \delta_m - \delta_0 = t \frac{d\delta}{dt} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2},$$

to w tym ostatnim przypadku musimy je przerobić stosownie do tego, czy chcemy użyć rok czy stulecie jako jednostkę czasu. W pierwszym razie musimy napisać:

$$(17 \text{ bis}) \quad \alpha_m - \alpha_0 = t \frac{d\alpha}{dt} + \frac{t^2}{200} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} \dots,$$

a w drugim

$$(17 \text{ ter}) \quad \alpha_m - \alpha_0 = 100 \left[t \frac{d\alpha}{dt} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right] \dots,$$

Obok współrzędnych katalogi gwiazd zazwyczaj podają już obliczone precesye, ruchy własne i wiekowe zmiany.

Metody wyłożone w dwóch ostatnich paragrafach zawodzą w pobliżu bieguna (por. to, co było powiedziane na końcu poprzedniego paragrafu). Trzeba by wprowadzić dalsze wyrazy szeregów, tymczasem zrobić tego nie można, bo zbieżność zostałaby zakwestyonowaną. Dlatego używamy w pobliżu bieguna innych metod, których atoli na tem miejscu wykładać nie możemy.

4. Przykład.

Zapożyczamy przykład z „Nautical Almanac“ na rok 1911 (str. 594), ale uzupełniamy go przez obliczenie miejsca widomego metodą Bessla. Bierzemy gwiazdę ι Persei, która nie znajduje się w efemerydach. Znajdujemy ją w katalogu [Greenwich Second Ten-Year Catalogue of 6892 Stars for 1890,0] na str. (XXII) N. 978. Współrzędne średnie na początku roku 1890,0 [roku Bessla!] są:

$$\alpha_0 = 3^h 1^m 7,744, \quad \delta_0 = 40^\circ 48' 26,76,$$

mamy zaś znaleźć jej widome współrzędne 7 Listopada 1911 r. o północy cz. śr. greenwichskiego.

W myśl tego, co było powiedziane na początku poprzedniego paragrafu, rozdzielamy zadanie na dwie części: najpierw przechodzimy od miejsca średniego w 1890,0 r. do miejsca średniego w 1911 r., a potem od tego ostatniego do miejsca widomego 7 Listopada 1911 r.

I. W katalogu znajdujemy:

$$\begin{array}{rcl} p_\alpha = 4,1727 & \text{na rok,} & p_\delta = -14,109 & \text{na rok} \\ \mu_\alpha = 0,1274 & \text{„ „} & \mu_\delta = 0,083 & \text{„ „} \\ \hline p_\alpha + \mu_\alpha = 4,3001 & \text{na rok,} & p_\delta + \mu_\delta = -14,026 & \text{na rok.} \end{array}$$

Ponieważ $t = 21$ lat, więc

$$t \frac{d\alpha}{dt} = t(p_\alpha + \mu_\alpha) = 21 \times 4,3001 = 1^m 30,302$$

$$t \frac{d\delta}{dt} = t(p_\delta + \mu_\delta) = 21 \times -14,026 = -4' 54,55.$$

Dalej znajdujemy w katalogu

$$100 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0,0497, \quad 100 \frac{d^2\delta}{dt^2} = 0,439.$$

Ponieważ

$$\frac{t^2}{200} = \frac{(21)^2}{200} = 2,205$$

przeto

$$\frac{t^2}{2} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0,0497 \times 2,205 = 0,110$$

$$\frac{t^2}{2} \frac{d^2\delta}{dt^2} = 0,439 \times 2,205 = 0,97.$$

czasu śr. greenwichskiego upłynęło 0,85018 roku od początku roku Bessla, który w r. 1911 zaczął się 0,978 Stycznia cz. śr. greenwichskiego¹⁾, zatem

$$t = 0,85018, \quad \mu_{\alpha} t = 0,1274 \times 0,85018 = 0,108 \dots,$$

$$\mu_{\delta} t = -0,083 \times 0,85018 = -0,070.$$

Tedy

$\alpha - \alpha_m =$	$\delta = \delta_m =$
4,318	18,986
— 0,001	— 0,070
+ 0,108	<hr/>
$\alpha - \alpha_m =$	$\delta = \delta_m =$
4,425	18,92
$\alpha_m =$	$\delta_m =$
3 ^h 2 ^m 38,156	40° 43' 33,18
<hr/>	<hr/>
przeto $\alpha = 3^h 2^m 42,581$	$\delta = 40^{\circ} 43' 52,10$

dnia 7 Listopada 1911 r. o półn. cz. śr. greenwichskiego.

II. bis. Powtarzamy rachunek II-gi drugą metodą²⁾. Wielkości f, g, h, G, H bierzemy z tablic

$G = 328^{\circ} 52'$	$H = 43^{\circ} 4'$
α (kąt) = 45 40	$\alpha = 45 40$
$G + \alpha = 14^{\circ} 32'$	$H + \alpha = 88^{\circ} 44'$

	Logarytmy	Liczby		Logarytmy	Liczby
f		2,013			
g	1,1861		g	1,1861	
$\sin(G + \alpha)$	9,3996		$\cos(G + \alpha)$	9,9859	
$\text{tang } \delta$	0,0650			<hr/>	14,86
$\frac{1}{15}$	8,8239		h	1,2929	
	<hr/>	0,298	$\cos(H + \alpha)$	8,3445	
h	1,2929		$\sin \delta$	9,8796	
$\sin(H + \alpha)$	9,9999			<hr/>	0,33
$\sec \delta$	0,1854		i	0,7644	
$\frac{1}{15}$	8,8239		$\cos \delta$	9,8146	
	<hr/>	2,005		<hr/>	3,79
$\frac{1}{15} E$	0,3021		$\mu_{\delta} t$	0,5790	
$\mu_{\alpha} t$		— 0,001	$\delta - \delta_m$		— 0,07
$\alpha - \alpha_m$		+ 0,108		<hr/>	18,91
		<hr/>			
		4,423			

¹⁾ T. j. 1 Stycznia o godz. 23, min. 28 i t. d. cz. śr. greenwichskiego [astronomicznego].

²⁾ Zachowujemy schemat „Nautical Almanac“.

Poprzednio otrzymaliśmy $\alpha - \alpha_m = 4,425$, $\delta - \delta_m = 18,92$.
 Drobną różnicą tłumaczy się tem, że cały rachunek drugą metodą
 został dokonany z pomocą logarytmów czterocyfrowych, podczas
 gdy w rachunku pierwszą metodą liczyliśmy logarytmami pięcio-
 cyfrowymi, które potem zaokrągliliśmy do czterech cyfr.

Odwrotnego zadania, jak przejść od miejsca widomego do
 średniego, oczywiście nie potrzebujemy oddzielnie rozważać.



$\alpha - \alpha_m$	$\delta - \delta_m$	$\alpha - \alpha_m$	$\delta - \delta_m$
0.00	0.00	0.00	0.00
0.10	0.10	0.10	0.10
0.20	0.20	0.20	0.20
0.30	0.30	0.30	0.30
0.40	0.40	0.40	0.40
0.50	0.50	0.50	0.50
0.60	0.60	0.60	0.60
0.70	0.70	0.70	0.70
0.80	0.80	0.80	0.80
0.90	0.90	0.90	0.90
1.00	1.00	1.00	1.00

ROZDZIAŁ XIII.

Przyciąganie i ruch Keplerowski.

1. Środek masy. Prawo przyciągania.

Wiadomo z cynematyki, że ruch każdego ciała daje się rozłożyć na ruch jednego, dowolnego zresztą punktu ciała i na ruchy innych punktów względem tego dowolnie obranego punktu. Jeżeli ciało jest sztywne, to ruchy pozostałych punktów będą kręceniem się naokoło punktu obranego. Ale bez względu na to, czy ciało jest sztywne, czy nie — w dynamice najdogodniej jest jako punkt, do którego odnosimy ruchy innych punktów ciała, obrać jego środek masy. Przypominamy tu definicyę środka masy. Niech $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ będą współrzędnymi prostokątnymi materialnych punktów ciała, a $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ ich masami. Środkiem masy ciała nazywa się taki punkt x_0, y_0, z_0 , dla którego są spełnione następujące trzy warunki

$$\Sigma m_i (x_i - x_0) = 0, \quad \Sigma m_i (y_i - y_0) = 0, \quad \Sigma m_i (z_i - z_0) = 0, \quad (1)$$

gdzie Σ oznacza sumowanie odnoszące się do wszystkich punktów, należących do uważanego ciała. Ponieważ x_0, y_0, z_0 są jedne i te same we wszystkich składnikach, więc można je wziąć za znak sumowania i kładąc jeszcze

$$\Sigma m_i = M,$$

gdzie M oczywiście oznacza masę całego ciała, można napisać:

$$Mx_0 = \Sigma m_i x_i, \quad My_0 = \Sigma m_i y_i, \quad Mz_0 = \Sigma m_i z_i. \quad (2)$$

W teoryi ruchów planet za wsze rozkładamy ruch na ruch środka masy i względny ruch samego ciała naokoło środka masy.

Zresztą tym drugim ruchem wcale się nawet nie zajmujemy, rozważamy tylko ruchy środków mas; ilekroć więc w teorii postępowego ruchu ciał niebieskich mówimy o słońcu, ziemi, planetach, to właściwie zawsze rozumiemy ich środki masy.

Załóżmy, że na punkty $m_1(x_1, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2)$... i t. d. ciała działają siły zewnętrzne o składowych $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \dots$ i t. d. Oprócz tego mogą działać i wogóle działają różne siły wewnętrzne. Niech np. składowe sił wewnętrznych działających na punkt m_1 będą $X'_1, Y'_1, Z'_1, X''_1, Y''_1, Z''_1 \dots$ i t. d.; wtedy równania ruchu punktów w kierunku x będą:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 + X'_1 + X''_1 + \dots \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = X_2 + X'_2 + X''_2 + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = X_n + X'_n + X''_n + \dots \end{array} \right.$$

Analogicznych równań dla kierunków y i z nie piszemy.

Dodajmy teraz do siebie równania (3) nie opuszczając żadnego punktu, a otrzymamy

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma (X'_i + X''_i + X'''_i + \dots)$$

Dzięki prawu równości między działaniem a przeciwdziałaniem druga suma po prawej stronie jest koniecznie równa zeru. Rzeczywiście, jeżeli punkt k -ty wywiera na punkt i -ty siłę X^k_i , to odwrotnie punkt i -ty wywiera na k -ty siłę X^i_k , przyczem

$$X^i_k = - X^k_i,$$

przeto wszystkie wyrazy w drugiej sumie poznoszą się parami i pozostanie tylko

$$\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \Sigma X_i.$$

Na mocy równań (2) możemy to napisać w kształcie:

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \Sigma X_i,$$

Oczywiście możemy też napisać:

$$M \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \Sigma Y_i,$$

$$M \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \Sigma Z_i.$$

(4)

Zatem zamiast nieskończonej mnogości równań (3) mamy tylko trzy równania odnoszące się do jednego punktu, mianowicie do środka masy. Z równań (4) widzimy, że można rozumować tak, jakby cała masa ciała była zebrana w środku masy a składowe siły nań działającej były po prostu algebraicznymi sumami wszystkich sił zewnętrznych działających na ciało. W dalszym ciągu zobaczymy, że środek masy ma jeszcze niektóre inne użyteczne własności.

Co do sił działających na ciała, to w astronomii mamy do czynienia przeważnie z przyciąganiem. Tylko w teorii ogonów komet musimy liczyć się z jakąś drugą, dotąd dobrze nie rozpoznaną siłą, prawdopodobnie z ciśnieniem światła. Przyjmujemy, że przyciąganie działa wedle prawa Newtona. Prawo to jest empiryczne i może nie absolutnie ściśle, ale sprawdza się w całej mechanice niebieskiej z taką dokładnością, że musimy je uważać co najmniej za nadzwyczaj trafne przybliżenie. Tylko w ruchach Wenus, Merkurego i księżyca konstatujemy pewne osobliwości, których dotąd nie umiemy dobrze wytłumaczyć; ale nie możemy twierdzić, aby owe, drobne zresztą, niezgodności świadczyły przeciw prawu Newtona, bo bardzo być może, że znajdzie się jeszcze tłumaczenie z tem prawem zgodne.

2. Teorya przyciągania. Ciała centrobaryczne.

W myśl tego, co było przed chwilą powiedziane, ΣX , ΣY , ΣZ po prawej stronie równań (4) będą składać się ze samych przyciągań. Załóżmy najpierw dla prostoty, że mamy tylko jedno ciało przyciągające i obliczmy składowe jego przyciągania. W tym celu weźmy element $d\mu$ przyciąganego ciała; podlega on przyciąganiu

wszystkich elementów przyciągającego ciała. Wedle prawa Newtona wzajemne przyciąganie punktów x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 o masach m_1 i m_2 wyraża się wzorem

$$k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gdzie k^2 oznacza stałą przyciągania. Dla prostoty założymy, że $k^2 = 1$, co zawsze można zrealizować odpowiednio dobierając jednostki czasu i długości. Z drugiej strony

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Chodzi jeszcze o znak siły. Ponieważ przyciąganie punktu m_1 na m_2 jest co do absolutnej wielkości takie same jak przyciąganie m_2 na m_1 , a tylko kierunek ma wręcz przeciwny, więc oczywiście jedno z nich musi mieć znak $+$ a drugie $-$ i trzeba się tylko umówić, kiedy i jakie znaki stawić należy. Jeżeli np. uważamy punkt x_2, y_2, z_2 za przyciągany, a x_1, y_1, z_1 za przyciągający i jeżeli, jak to się zwykle robi, uważamy kierunek od x_1, y_1, z_1 ku x_2, y_2, z_2 za dodatni; to przyciąganie musi mieć znak $-$, bo jest skierowane właśnie od x_2, y_2, z_2 ku x_1, y_1, z_1 . Piszemy więc wyrażenie siły w postaci

$$(5) \quad - \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

zaś wyrażenia jej składowych prostokątnych w postaci

$$- \frac{m_1 m_2}{r^2} \cos \alpha, \quad - \frac{m_1 m_2}{r^2} \cos \beta, \quad - \frac{m_1 m_2}{r^2} \cos \gamma,$$

gdzie $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ oznaczają dostawy kierunku od x_1, y_1, z_1 ku x_2, y_2, z_2 . Ale te dostawy są:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{r}.$$

Przeto składowe przyciągania punktu x_1, y_1, z_1 na punkt x_2, y_2, z_2 są:

$$(6) \quad - \frac{m_1 m_2}{r^3} (x_2 - x_1), \quad - \frac{m_1 m_2}{r^3} (y_2 - y_1), \quad - \frac{m_1 m_2}{r^3} (z_2 - z_1).$$

W danym przypadku przyciąganym jest element $d\mu$ o współrzędnych, dajmy na to ξ, η, ζ , przyciągającymi zaś są elementy dm o współrzędnych x, y, z , przeto będzie:

$$\left. \begin{aligned} X &= -d\mu \int \frac{dm}{r^3} (\xi - x) \\ \text{i tak samo} \\ Y &= -d\mu \int \frac{dm}{r^3} (\eta - y) \\ Z &= -d\mu \int \frac{dm}{r^3} (\zeta - z). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Znakiem \int oznaczyliśmy potrójne całkowanie po całej objętości zajętej przez ciało przyciągające.

Odrazu widać, że

$$X = d\mu \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad Y = d\mu \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad Z = d\mu \frac{\partial V}{\partial \zeta}, \quad (8)$$

gdzie

$$V = \int \frac{dm}{r}, \quad (9)$$

jest to tak zwany potencjał przyciągania na jednostkę masy znajdująca się w punkcie ξ, η, ζ .

Istnieją pewne ciała zwane „centrobarycznymi“, u których potencjał V a tak samo pochodne, t. j. składowe siły dają się w wewnętrznej przestrzeni zastąpić przez potencjał i pochodne potencjału przyciągania środka masy. Wzajemnie ciało centrobaryczne jest tak przyciągane przez inne ciała, jak gdyby cała jego masa była zebrana w środku masy. Ciało centrobaryczne jest cyntyecznie symetrycznym naokoło środka masy a jego momenty bezwładności naokoło wszystkich osi przechodzących przez środek masy są między sobą równe. Centrobarycznym ciałem jest np. kula jednorodna, dalej każde ciało zbudowane z jednorodnych warstw kulistych współśrodkowych; lecz oprócz tego jest mnóstwo innych centrobarycznych ciał.

Prawdopodobnie żadne ciało słonecznego systemu nie jest dokładnie centrobarycznym, ale np. słońce ma zapewne budowę [pomimo ruchów wewnętrznych] bardzo mało różną od centrobarycznej. Wszak kształt jego jest prawie dokładnie kulisty. Planety, osobliwie te, które mają większe spłaszczenie, więcej odbiegają od typu

centrobarycznych ciał. Księżyc jest nieco wydłużony w kierunku osi przechodzącej przez ziemię, ale to wydłużenie jest bardzo nieznaczne, jego budowa zbliża się więcej do budowy ciał centrobarycznych niż budowa planet.

W dodatku wszystkie ciała niebieskie znajdują się na znacznych odległościach. Skoro zaś odległość ciała jest znaczna w porównaniu z jego wymiarami, to zawsze można, przynajmniej w pierwszym przybliżeniu, zastąpić jego przyciąganie przez przyciąganie środka masy.

3. Rozwinięcie potencjału przyciągania w szereg.

Rozwiniemy potencjał [na jednostkę masy] V w szereg. W tym celu napiszemy figurujące w mianowniku r w nieco innym kształcie. Za punkt wyjścia weźmiemy tożsamość:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = [(x - x_0) - (\xi - x_0)]^2 + \\ + [(y - y_0) - (\eta - y_0)]^2 + [(z - z_0) - (\zeta - z_0)]^2.$$

Stąd

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - 2[(x - x_0)(\xi - x_0) + \\ + (y - y_0)(\eta - y_0) + (z - z_0)(\zeta - z_0)] + \\ + (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2.$$

Załóżmy, że x_0, y_0, z_0 są to współrzędne środka masy przyciągającego ciała. Wtedy oznaczając przez R odległość punktu przyciąganego ξ, η, ζ od środka masy ciała przyciągającego, przez ϱ odległość punktu przyciągającego x, y, z od tegoż środka masy przyciągającego ciała, a przez γ kąt między R i ϱ , mamy

$$(10) \quad \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varrho^2 \\ (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2 = R^2 \\ (x - x_0)(\xi - x_0) + (y - y_0)(\eta - y_0) + \\ + (z - z_0)(\zeta - z_0) = R\varrho \cos \gamma \end{cases}$$

oraz

$$r^2 = R^2 - 2R\varrho \cos \gamma + \varrho^2.$$

Ponieważ ϱ jest co najwyżej równe odległości powierzchni ciała przyciągającego od jego środka masy, więc we wszystkich

zastosowaniach w dziedzinie astronomii jest to wielkość bardzo mała w porównaniu z R . Dzięki temu, jeżeli napiszemy

$$r^2 = R^2 \left[1 - \frac{2\varrho}{R} \cos \gamma + \frac{\varrho^2}{R^2} \right],$$

to drugi i trzeci wyraz w nawiasie będą zawsze bardzo małe w porównaniu z jednostką.

Piszemy tedy:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sqrt[1]{1 - \frac{2\varrho}{R} \cos \gamma + \frac{\varrho^2}{R^2}}$$

i stosujemy wzór (8) z rozdziału V-go rozwijając $\frac{1}{r}$ w szereg

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \Sigma \left(\frac{\varrho}{R} \right)^n X_n, \quad (11)$$

t. j. „*explicite*“

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left[1 + \left(\frac{\varrho}{R} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\varrho}{R} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 \gamma - 1)}{2} + \dots \right] \quad (11 \text{ bis})$$

We wszystkich zastosowaniach szereg (11) będzie bardzo szybko zbieżnym, bo ułamek $\frac{\varrho}{R}$ jest zawsze bardzo mały; jeżeli np. chodzi o przyciąganie słońca na ziemię, to $\frac{\varrho}{R} < \frac{1}{200}$. Podstawmy teraz to rozwinięcie we wzór (9) i wykonajmy całkowanie pamiętając o tem, że R [por. drugi wzór (10)] jest niezależne od zmiennych podlegających całkowaniu. Masę ciała przyciągającego oznaczmy przez m . Otrzymamy natychmiast:

$$V = \frac{m}{R} + \frac{1}{R^2} \int \varrho \cos \gamma \, dm + \frac{1}{R^3} \int \varrho^2 \frac{(3 \cos^2 \gamma - 1)}{2} \, dm + \dots$$

Przekonamy się zaraz, że na mocy własności środka masy drugi wyraz po prawej stronie znika. Rzeczywiście, jeżeli podstawimy w drugim wyrazie zamiast $\varrho \cos \gamma$ jego wartość z trzeciego wzoru (10), to całka

$$\int \varrho \cos \gamma \, dm$$

przejdzie na sumę trzech wyrazów, z których wypisujemy tylko pierwszy, mianowicie

$$\frac{\xi - x_0}{R^3} S(x - x_0) dm.$$

Ale na mocy pierwszego wzoru (1) całka figurująca w tem wyrażeniu jest równa zeru; tak samo znikną też pozostałe dwa wyrażenia i wzór na potencyał V przywiedzie się do:

$$(12) \quad V = \frac{m}{R} + \frac{1}{R^3} S \varrho^2 \frac{(3 \cos^2 \gamma - 1)}{2} dm + \dots$$

Widzimy stąd, że jeżeli ograniczymy się do pierwszego wyrazu szeregu, to pominiemy tylko małe wyrazy drugiego i wyższych rzędów, bo dzięki własnościom środka masy wyrazy pierwszego rzędu są równe zeru. Zauważymy tu mimochodem, że gdyby ciało przyciągające było centrobarycznem, to wszystkie wyrazy szeregu (11) oprócz pierwszego (t. j. oprócz wyrazu $\frac{m}{R}$) byłyby równe zeru, gdy zaś jest tylko przybliżenie centrobarycznem, to dalsze wyrazy są małe nie tylko ze względu na to, że coraz to wyższe potęgi ułamka $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ są coraz to mniejsze, ale także ze względu na to, że elementy odjemne całek po większej części znoszą się z elementami dodatnimi. Odtąd będziemy przyjmować

$$(13) \quad V = \frac{m}{R},$$

t. j. będziemy traktować przyciągające ciała niebieskie tak, jakby cała ich masa była zebrana w środku masy, widzieliśmy bowiem, że to jest zupełnie usprawiedliwione.

Teraz możemy przystąpić do obliczenia składowych przyciągania na środek masy ciała przyciąganego. Potrzebujemy obliczyć tylko przyciąganie na środek masy, bo jeszcze w § 1 dowiedzieliśmy się, że teoria postępowego ruchu planet to teoria ruchu ich środków mas. Jednocześnie dowiedzieliśmy się, że składowe siły działającej na środek masy są sumami składowych sił działających na elementy ciała. Zatem oznaczając składowe przyciągania na śro-

dek masy ciała przyciąganego przez X_0, Y_0, Z_0 powinniśmy napisać [porównaj wzory (8)]

$$X_0 = \Sigma X = \Sigma \frac{\partial V}{\partial \xi} d\mu \dots \text{ i t. d.},$$

albo zastępując znak sumowania przez znak całkowania

$$X_0 = \int \frac{\partial V}{\partial \xi} d\mu, \quad Y_0 = \int \frac{\partial V}{\partial \eta} d\mu, \quad Z_0 = \int \frac{\partial V}{\partial \zeta} d\mu. \quad (14)$$

W te ostatnie wzory podstawimy V z ostatniego, już uproszczonego wzoru (13). Ale V we wzorze (13) zależy tylko od stałej m i od R , które zawiera ξ, η i ζ tylko w kombinacjach $\xi - x_0, \eta - y_0, \zeta - z_0$; przeto możemy napisać

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -\frac{\partial V}{\partial x_0} \text{ i t. d.}$$

Ponieważ zaś zmienne ξ, η, ζ , od których zależy $d\mu$, od x_0, y_0, z_0 nie zależą i wzajemnie x_0, y_0, z_0 ¹⁾ także nie zależą od ξ, η, ζ , więc możemy położyć

$$\int V d\mu = m \int \frac{d\mu}{R} = W \quad (15)$$

i napisać

$$X_0 = -\frac{\partial W}{\partial x_0}, \quad Y_0 = -\frac{\partial W}{\partial y_0}, \quad Z_0 = -\frac{\partial W}{\partial z_0}. \quad (16)$$

Teraz z kolei rozwinieśmy W w szereg. W tym celu napiszemy [por. drugi wzór (10)]:

$$R^2 = (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2 = [(\xi - \xi_0) - (x_0 - \xi_0)]^2 + [(\eta - \eta_0) - (y_0 - \eta_0)]^2 + [(\zeta - \zeta_0) - (z_0 - \zeta_0)]^2,$$

gdzie ξ_0, η_0, ζ_0 są to współrzędne środka masy przyciąganego ciała, następnie położymy:

$$\left. \begin{aligned} (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 &= \varrho_1^2 \\ (x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2 + (z_0 - \zeta_0)^2 &= D^2 \\ (\xi - \xi_0)(x_0 - \xi_0) + (\eta - \eta_0)(y_0 - \eta_0) + \\ &+ (\zeta - \zeta_0)(z_0 - \zeta_0) = \varrho_1 D \cos \gamma_1, \end{aligned} \right\} (17)$$

¹⁾ Przypominamy, że x_0, y_0, z_0 są to współrzędne środka masy przyciąganego ciała.

Tu ϱ_1 jest to odległość punktu ξ, η, ζ przyciąganego ciała od jego środka masy, D odległość między środkiem masy ciała przyciąganego i środkiem masy ciała przyciągającego, wreszcie γ_1 kąt między ϱ_1 a D . Teraz napiszemy R^2 w postaci

$$R^2 = D^2 - 2D\varrho_1 \cos \gamma_1 + \varrho_1^2,$$

następnie rozwinieemy $\frac{1}{R}$ w szereg zupełnie tak samo, jak poprzednio rozwinęliśmy $\frac{1}{r}$, wreszcie podstawimy je we wzór (15). Zupełnie tak samo jak tam znajdziemy, że dzięki własnościom środka masy drugi wyraz szeregu jest równy zeru i że wyrażenie na potencjał W przywodzi się do

$$(18) \quad W = \frac{m\mu}{D} + \frac{m}{D^3} \int \varrho_1^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma_1 - \frac{1}{2} \right) d\mu + \dots$$

Znowu dla tych samych powodów, które wyłuszczyliśmy w poprzednim przypadku, można ograniczyć się do pierwszego wyrazu szeregu (18) i przyjąć

$$(19) \quad W = \frac{m\mu}{D}.$$

To jest po prostu potencjał wzajemnego przyciągania dwóch punktów, dwóch środków masy, w których są skupione masy samych ciał przyciągających.

Teraz należy powrócić do wzorów (16) i podstawić w nie wyrażenie na W wzięte ze wzoru (19). Atoli korzystając ze symetryczności tego ostatniego wzoru względem x_0, y_0, z_0 z jednej, a ξ_0, η_0, ζ_0 z drugiej strony można napisać:

$$(16 \text{ bis}) \quad X_0 = \frac{\partial W}{\partial \xi_0}, \quad Y_0 = \frac{\partial W}{\partial \eta_0}, \quad Z_0 = \frac{\partial W}{\partial \zeta_0}.$$

Ostatecznie przyszlśmy do wniosku, że w teorii postępowego ruchu planet wolno zamiast ciał o skończonych rozmiarach rozważać punkty materialne. Że zaś to uproszczenie daje zadawalniające wyniki, to zawdzięczamy dwom przyczynom: I-sze — ogromnym w stosunku do rozmiarów odległościom między ciałami słonecznego

systemu¹⁾, II-gie. — ich zbliżonej do centrobarycznej budowie. Ta ostatnia uwaga stosuje się jednak tylko do większych ciał, ale o nie przedewszystkiem chodzi.

W teorii precesyi, w dokładnej teorii księżyców hipoteza punktów materyalnych utrzymać się nie daje: musimy uwzględnić figurę ciał, t. j. innymi słowy musimy uwzględnić zboczenia od centrobaryczności.

4. Równania ruchu.

Napiszmy teraz równania ruchu dwóch punktów materyalnych przyciągających się wzajemnie. Najpierw napiszemy je we współrzędnych absolutnych. Co możnaby rozumieć pod „współrzędnymi absolutnymi“, nad tem zastanawiać się nie będziemy. Możemy je uważać jako fikcyę służącą do wyprowadzenia równań ruchu względnego. Ponieważ te ostatnie mogą być sprawdzone, więc nic nie szkodzi, że za punkt wyjścia wzięliśmy fikcyę. Przyjmujemy tedy, że absolutne współrzędne punktu materyalnego posiadającego masę m są x, y, z , a punktu posiadającego masę m_1 są x_1, y_1, z_1 . Kwadrat ich wzajemnej odległości będzie

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

a potencjał wzajemnego przyciągania będzie

$$W = \frac{mm_1}{r}.$$

Jeżeli przypuścimy, że owe dwa punkty są zupełnie izolowane, t. j. że oprócz ich wzajemnego przyciągania żadne inne siły nie działają, to Newtonowskie równania ruchu pierwszego punktu będą:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{mm_1}{r^3}(x - x_1) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{mm_1}{r^3}(y - y_1) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{mm_1}{r^3}(z - z_1), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

¹⁾ We wielu systemach gwiazdowych podwójnych odległości są zupełnie porównywalne z rozmiarami ciał. Dla takich systemów teoria punktów materyalnych daje tylko grube przybliżenie.

a drugiego punktu

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x_1} = -\frac{mm_1}{r^3}(x_1 - x) \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial y_1} = -\frac{mm_1}{r^3}(y_1 - y) \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z_1} = -\frac{mm_1}{r^3}(z_1 - z). \end{array} \right.$$

Gdy dodamy do siebie równania (20) i (21), to otrzymamy

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0$$

i dwa drugie analogiczne równania dla y i z . Stąd wynika, że jeżeli weźmiemy punkt o współrzędnych

$$x_0 = \frac{mx + m_1 x_1}{m + m_1}, \quad y_0 = \frac{my + m_1 y_1}{m + m_1}, \quad z_0 = \frac{mz + m_1 z_1}{m + m_1},$$

to

$$(22) \quad \frac{d^2 x_0}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = 0.$$

Z równań (2) widać, że punkt x_0, y_0, z_0 jest niczem innym jak środkiem masy systemu dwóch punktów, zaś równania (22) powiadają nam, że ten środek masy porusza się ruchem prostoliniowym i jednostajnym. Jest to zresztą szczególny przypadek ogólniejszego twierdzenia. Gdybyśmy zamiast systemu dwóch punktów wzięli system wielu punktów i założyli, że ten system jest zupełnie izolowany, to dla jego środka masy otrzymalibyśmy te same równania (22).

Oczywiście możemy w równaniach (20) i (21) [a gdyby było więcej punktów materialnych, to we wszystkich równaniach ruchu] dodać po lewej stronie wyrazy w rodzaju: $m \frac{d^2 x_0}{dt^2} \dots$ i t. d., a po prawej stronie dodać x_0 do x i x_1 i t. d. ..., bo równania przez to nie zmieniają się: wszak $x + x_0 - (x_1 + x_0) = x - x_1 \dots$ i t. d. a $m \frac{d^2 x_0}{dt^2} = 0$. Wynika stąd, że wszystko jedno, czy środek masy systemu jest nieruchomy względem osi absolutnych, czy też porusza się ruchem prostoliniowym i jednostajnym choćby najszybszym.

Zatem położenia osi absolutnych określać nie potrzebujemy; dość powiedzieć, że to są takie osie, względem których system nasz porusza się prostoliniowo i jednostajnie.

5. Ruch względny.

Rozważmy ruch punktu $m_1(x_1, y_1, z_1)$ względem punktu $m(x, y, z)$. Musimy uformować równania zawierające tylko współrzędne względne

$$x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z.$$

Otrzymamy takie równania, jeżeli podzielimy równania (20) przez m , równania (21) przez m_1 a następnie odejmiemy pierwsze od drugich. Rzeczywiście równania

$$\begin{aligned} \frac{d^2(x_1 - x)}{dt^2} &= - (m_1 + m) \frac{(x_1 - x)}{r^3} \\ \frac{d^2(y_1 - y)}{dt^2} &= - (m_1 + m) \frac{(y_1 - y)}{r^3} \\ \frac{d^2(z_1 - z)}{dt^2} &= - (m_1 + m) \frac{(z_1 - z)}{r^3}, \end{aligned}$$

które w ten sposób otrzymamy, zawierają tylko trzy różnice $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, bo r jest, jak wiadomo, także funkcją tych trzech różnic. Oczywiście możemy przenieść początek współrzędnych do punktu $m(x, y, z)$ kładąc

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x &= \xi, \quad y_1 - y = \eta, \quad z_1 - z = \zeta \\ r^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Kierunki osi możemy obrać dowolnie, ale raz obrane kierunki musimy uważać za niezmiennie. Nasuwa się tu pytanie, jak to rozpoznać, gdy wedle założenia nasz system dwóch punktów jest kompletnie izolowany i gdy niema nic takiego, ku czemu możnaby skierować chociażby tylko jedną z osi współrzędnych. Odpowiedź na to pytanie damy nieco dalej a tymczasem położymy jeszcze

$$\frac{m + m_1}{r} = U \quad (24)$$

i napiszemy nasze równania ruchu względnego w kształcie:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\xi}{dt^2} = - (m + m_1) \frac{\xi}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = - (m + m_1) \frac{\eta}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = - (m + m_1) \frac{\zeta}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \end{array} \right.$$

Zwracamy uwagę na to, że w potencyale przyciągania występuje suma mas obu ciał. Napisałibyśmy równania (25) jednocześnie w dwóch kształtach, aby ułatwić sobie wyprowadzenie zasadniczych całek: całki zachowania energii i całki zachowania pól. Aby otrzymać pierwszą, weźmiemy równania (25) w kształcie

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \dots$$

Pomnóżmy pierwsze z tych równań przez $\frac{d\xi}{dt}$, drugie przez $\frac{d\eta}{dt}$, trzecie przez $\frac{d\zeta}{dt}$ i dodajmy je do siebie, a otrzymamy

$$\frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d\eta}{dt} \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dt}.$$

Zauważmy teraz, że U jest funkcją czasu tylko przez pośrednictwo współrzędnych ξ, η, ζ , że przeto po prawej stronie napisanego przed chwilą równania stoi zupełna pochodna U względem czasu. Ale i po lewej stronie stoi zupełna pochodna funkcji

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right],$$

zatem równanie jest całkowalne. Mianowicie mamy całkę „zachowania energii“

$$(26) \quad \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 = 2U - h,$$

gdzie h oznacza pewną stałą.

Aby otrzymać drugą całkę, weźmiemy równania (25) w kształcie

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = - (m + m_1) \frac{\xi}{r^3}, \dots$$

pomnożymy drugie równanie przez ζ a trzecie przez η i odejmiemy jedno od drugiego, potem pomnożymy trzecie równanie przez ξ a pierwsze przez ζ i odejmiemy jedno od drugiego i t. d. Otrzymamy w ten sposób równania

$$\eta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0, \quad \zeta \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 0, \quad \xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0,$$

z których zaraz wynikają całki „zachowania pól“:

$$\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} = c_1, \quad \zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt} = c_2, \quad \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = c_3, \quad (27)$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są to pewne stałe. Całki te dlatego noszą nazwę całek „zachowania pól“, że jeżeli oznaczymy przez A_1, A_2, A_3 pola wycinków opisywanych przez rzuty promienia wodzącego punktu m_1 na płaszczyznach $\eta\zeta, \zeta\xi$ i $\xi\eta$, to

$$\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} = 2 \frac{dA_1}{dt}, \quad \zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt} = 2 \frac{dA_2}{dt}, \quad \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = 2 \frac{dA_3}{dt}$$

i równania (27) przejdą w równania

$$2 \frac{dA_1}{dt} = c_1, \quad 2 \frac{dA_2}{dt} = c_2, \quad 2 \frac{dA_3}{dt} = c_3, \quad (27 \text{ bis})$$

co dostatecznie tłumaczy nazwę.

Z całek zachowania pól wynika ważny wniosek. Jeżeli pierwszą z nich [mówimy o równaniach (27)] pomnożymy przez ξ , drugą przez η , a trzecią przez ζ i dodamy je do siebie, to otrzymamy

$$c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta = 0. \quad (28)$$

Jest to równanie nieruchomej płaszczyzny przechodzącej przez początek współrzędnych, t. j. przez punkt m . Ponieważ zaś współrzędne ξ, η, ζ punktu m_1 czynią zadość równaniu (28), więc tor jego leży w owej płaszczyźnie nieruchomej. Otóż mamy — w części przynajmniej — odpowiedź na wyżej postawione pytanie co do kierunku osi. Wedle zasad mechaniki Newtonowskiej płaszczyzna drogi punktu m_1 naokoło punktu m jest nieruchoma, a więc jeżeli założymy, że — dajmy na to — oś ζ jest prostopadła do płaszczyzny (28), to „eo ipso“ kierunek jej będzie ustalony. Jak ustalić kierunki dwóch pozostałych osi, to zobaczymy dalej.

Założyliśmy, że oś ζ jest prostopadła do płaszczyzny (28) nie tylko dlatego, aby ustalić jej kierunek, ale także dlatego, aby za jednym zamachem uprościć dalszą analizę. Skoro bowiem oś ζ jest prostopadła do płaszczyzny (28), to możemy przyjąć tę płaszczyznę za płaszczyznę ξ, η . Wtedy

$$\zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

a wskutek tego lewe strony dwóch pierwszych równań (27) znikają i musimy położyć

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Oprócz tego r^2 przywodzi się do

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

całka energii przybiera kształt

$$(26 \text{ bis}) \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = 2U - h$$

a z równań (27) pozostaje tylko trzecie, mianowicie

$$(27 \text{ ter}) \quad \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = c.$$

Znaczek 3 opuściliśmy jako niepotrzebny. Nie potrzeba chyba dodawać, że równanie (28) jest również spełnione.

Teraz dogodnie jest wprowadzić współrzędne biegunowe r i u , przyczem

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad u = \text{arc tg } \frac{\eta}{\xi},$$

skąd

$$\xi = r \cos u, \quad \eta = r \sin u.$$

Skoro wykonamy podstawienie, to wzory (26 bis) i (27 ter) przybiorą postać

$$(29) \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2U - h$$

$$(30) \quad \frac{2dA}{dt} = r^2 \frac{du}{dt} = c.$$

Rugując z tych wzorów dt otrzymujemy różniczkowe równanie toru pod postacią

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{du} \right)^2 \right] = c^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \left[\frac{d}{du} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 \right\} = 2U - h. \quad (31)$$

Położmy chwilowo ¹⁾

$$\frac{1}{r} = z,$$

przypomnijmy sobie, że wedle równania (24)

$$U = \frac{(m + m_1)}{r} = (m + m_1) z,$$

położmy wreszcie

$$h = \frac{(m + m_1)}{a}. \quad (32)$$

Teraz możemy napisać równanie (31) w postaci

$$z^2 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2 = \frac{m + m_1}{c^2} \left(2z - \frac{1}{a} \right),$$

skąd zaraz wynika

$$\frac{dz}{\sqrt{\frac{m + m_1}{c^2} \left(2z - \frac{1}{a} \right) - z^2}} = \pm du.$$

Wprowadzamy nową stałą p określoną przez równanie

$$\frac{c^2}{m + m_1} = p, \quad (33)$$

poczem równanie nasze przybiera postać

$$\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{p} \left(2z - \frac{1}{a} \right) - z^2}} = \pm du.$$

Wprowadzamy jeszcze dla ułatwienia całkowania nową zmienną λ określoną przez równanie

$$z = \frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{pa}} \lambda.$$

¹⁾ Naturalnie nie należy myśleć tego z ze współrzędną z w poprzednim paragrafie.

Skoro za pomocą tego ostatniego równania wyrugujemy z , to otrzymamy

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \pm du.$$

Obieramy po prawej stronie znak $-$, całkujemy i otrzymujemy:

$$\lambda = \cos(u - \tilde{\omega}),$$

gdzie $\tilde{\omega}$ jest to stała całkowania. Podstawiamy napowrót w to równanie z albo raczej $\frac{1}{r}$, kładziemy

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 - \frac{e^2}{a(m + m_1)}} = e, \\ \text{to jest} \\ a(1 - e^2) = \frac{c^2}{m + m_1} = p, \end{array} \right.$$

a ponieważ

$$\lambda = \frac{pz - 1}{e},$$

przeto otrzymujemy

$$\frac{p}{r} - 1 = e \cos(u - \tilde{\omega}).$$

Wreszcie piszemy to równanie pod postacią

$$(35) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \tilde{\omega})}.$$

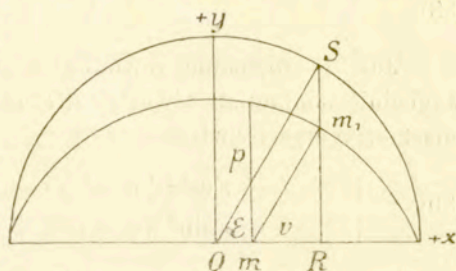
Jest to równanie przecięcia stożkowego we współrzędnych biegunowych, przyczem środek współrzędnych t. j. punkt m (powiedzmy: środek masy słońca) znajduje się w jednym z ognisk. Teraz widzimy, jakie geometryczne znaczenie mają wprowadzone przez równania (32), (33) i (34) stałe a , p i e . Stała e to mimośród krzywej, p jej parametr, wreszcie a to połowa jej większej osi. Między temi trzema stałemi zachodzi związek (34), przeto tylko dwie z nich są niezależne. Kąt $u - \tilde{\omega} = v$ nazywa się „anomalią prawdziwą“. W chwili, gdy $v = u - \tilde{\omega} = 0$, promień wodzący r osiąga minimum. Mówimy wtedy o planecie, że znajduje się w „perihelium“, o księżycu, że znajduje się w „perigaeum“.

Teraz możemy ostatecznie ustalić położenie osi współrzędnych. Orbita punktu m_1 , t. j. znalezione przez nas przecięcie stożkowe (35) zajmuje niezmiennie położenie w płaszczyźnie x, y , a więc możemy uciepić osie współrzędnych do orbity, możemy np. przyjąć, że oś x przechodzi przez perihelium. Ponieważ już wyżej przyjęliśmy, że oś z jest prostopadła do płaszczyzny orbity, więc kierunki osi są ustalone, bo trzecia oś musi być prostopadłą do dwóch pierwszych.

Przechodzimy do szczegółowego rozpatrzenia orbit eliptycznych, hyperbolicznych i t. d.

6. Orbity eliptyczne. Równanie Keplera.

Gdy $e < 1$, orbita punktu m_1 jest elipsą. Wprowadzamy nową zmienną, t. zw. „anomalie mimośrodową“, związaną z anomalią prawdziwą równaniem, które zaraz wyprowadzimy. — Zauważmy że z środka elipsy promieniem a koło, spuścimy przez punkt m_1 prostopadłą do wielkiej osi elipsy, która przetnie koło w punkcie S , połączmy S ze środkiem koła O ; kąt SOR (przy O) będzie to anomalia mimośrodowa E . Odrazu widać, że E staje się zerem razem z v . Dla pomocy nakreślmy jeszcze ze środka elipsy osie prostokątne: x_1 identyczną z osią główną elipsy i skierowaną ku perihelium, y_1 prostopadłą do niej i tak skierowaną, aby od dodatniej osi x_1 do dodatniej osi y_1 można było przejść przez obrót o 90° w kierunku obiegu punktu m_1 .



Ryc. 21.

Równanie elipsy względem osi x_1 i y_1 jest

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

albo, skoro wprowadzimy mimośród e

$$x_1^2 + \frac{y_1^2}{1 - e^2} = a^2.$$

Odcinek $m_1R = y_1 = r \sin v$, ale jednocześnie z równania elipsy wynika

$$r \sin v = y_1 = \sqrt{1 - e^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Lecz

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{przeto} \\ x_1 = a \cos E, \\ y_1 = r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{array} \right.$$

Z drugiej strony

$$(37) \quad r \cos v = Rm = OR - Om = a \cos E - ae.$$

Z równań (36) i (37) zaraz wynika

$$r^2 = a^2 (1 - e \cos E)^2,$$

stąd zaś zważywszy, że $r > 0$ a $e < 1$ wynika

$$(38) \quad r = a (1 - e \cos E).$$

Jest to równanie równoważne równaniu (35). Dodając doń, względnie odejmując równanie (37) oraz skracając przez 2 natychmiast otrzymamy związki

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \cos^2 \frac{1}{2} v = a (1 - e) \cos^2 \frac{1}{2} E \\ r \sin^2 \frac{1}{2} v = a (1 + e) \sin^2 \frac{1}{2} E, \end{array} \right.$$

z których zaraz wynika związek między v i E zależny tylko od mimośrod, mianowicie

$$(40) \quad \text{tang } \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{ tang } \frac{1}{2} E.$$

Pozostaje nam jeszcze wyrazić zależność anomalii mimośrodowej E od czasu. W tym celu powracamy do równania (27 bis) wyrażającego zasadę pól. Ponieważ $du = dv$, więc możemy napisać to równanie w kształcie

$$(41) \quad r^2 dv = c dt.$$

Podstawiamy zmienną E zamiast v posługując się ku temu równaniem (40). Z tego ostatniego równania otrzymujemy

$$\frac{dv}{\cos^2 \frac{1}{2} v} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{dE}{\cos^2 \frac{1}{2} E},$$

tu znowu rugujemy $\cos^2 \frac{1}{2} v$ za pomocą pierwszego równania (39) i dochodzimy do wzoru

$$dv = \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} dE.$$

Na mocy tego wzoru wzór (41) przechodzi na

$$ar \sqrt{1 - e^2} dE = c dt.$$

Rugujemy r za pomocą wzoru (38) i otrzymujemy ostatecznie

$$a^2 \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E) dE = c dt. \quad (41 \text{ bis})$$

Wzór ten daje się odrazu całkować. Skoro go scałkujemy, to otrzymamy „równanie Keplera“:

$$E - e \sin E = \frac{c}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} (t - t_0) = M, \quad (42)$$

Stała t_0 oznacza „epokę“, w której $E=0$, t. j. tę, w której planeta przechodzi przez perihelium. Prawa strona równania, którą dla krótkości oznaczyliśmy przez M , nosi nazwę „średniej anomalii“. Średnia anomalia jest, jak widzimy, proporcjonalna do czasu, a czynnik proporcjonalności

$$n = \frac{c}{a^2 \sqrt{1 - e^2}}, \quad (43)$$

który jest oczywiście kątową prędkością, nazywa się „średnim ruchem“. Jeżeli oznaczymy czas jednego obiegu przez T , to oczywiście

$$T = \frac{2\pi}{n}. \quad (44)$$

Równanie Keplera (42) wraz z równaniem (40) daje możliwość obliczyć położenie planety na orbicie w każdej chwili czasu, albowiem z równania Keplera znajdziemy odpowiadające danej chwili czasu E , znając zaś E obliczymy z równania (40) odpowiednie v .

Z równań (40) i (42) wypada, że wszystkie trzy anomalie: v , E i M razem przybierają wartości:

$$\dots - 360^\circ, - 180^\circ, 0^\circ, + 180^\circ, 360^\circ \dots \text{ i t. d.}$$

Równanie (42) przedstawia pewne trudności, bo jest to równanie względem E przestępne i — oprócz rozwijania w niedogodny do rachunku szereg — innej drogi do rozwiązania jak przez próby i kolejne przybliżenia niema. Można atoli te próby i przybliżenia usystematyzować w taki sposób, aby ułatwić rachunki i oszczędzić niepotrzebne wysiłki, t. j. można obmyśleć metodę rozwiązania równania Keplera. Metod takich jest kilka, wśród innych także metoda F. Karlińskiego¹⁾. Trudno powiedzieć, która metoda jest lepszą, bo po pierwsze każdy rachmistrz najbardziej zachwala tę, do której się przyzwyczaił, po drugie w pewnych przypadkach prędzej prowadzi do celu ta, a w innych tanta metoda. Zresztą istnieją rozmaite tablice dające E , nawet tablice, które pozwalają zupełnie ominąć rozwiązanie równania Keplera, t. j. dające od razu v odpowiadające danym M i e . Do pierwszej kategorii (tablice dające E) należą: J. J. Astrand: *Hülftafeln zur genauen und leichten Auflöschung des Keplerschen Problems* (Lipsk 1890), dalej tablice XI, XII i XIII w J. Bauschingera: *Tafeln z. theoretischen Astronomie* (Lipsk 1901), do drugiej (tablice dające wprost v) tablice wydane przez F. Tietjena we *Veröffentlichungen des Recheninstitutes Berlin* Nr. 1 (1892) sięgające aż do $e = 0,34748\dots$, tablice O. Callandreaux p. t.: *Tables numériques*²⁾ ... sięgające do $e = 0,407$ i t. d. Wobec tego sądzę, że na tem miejscu nie warto rozwijać żadnej specjalnej metody, że można poprzestać na rozwiązaniu najelementarniejszą metodą prób i na przykładzie.

Mamy rozwiązać równanie

$$E - e \sin E = M,$$

w którym dane są M i e , zaś E jest niewiadome. Ponieważ M jest zazwyczaj dane w mierze kątowej a E także ma być wyrażone w mierze kątowej, więc należy zamienić również e na kąt. Założmy, żeśmy to uczynili. Ponieważ wartości $E = 0$ odpowiada także $M = 0$, a wartości $E = 180^\circ$ odpowiada także $M = 180^\circ$, więc $\sin M$ i $\sin E$ mają ten sam znak i jeżeli $0 < M < 180^\circ$, to $\sin E > 0$, zaś E musi być zawarte między M i $M + e$. Z drugiej strony, jeżeli $180^\circ < M < 360^\circ$, to $\sin E < 0$, zaś E musi być zawarte między $M - e$ i M .

¹⁾ Ueber das Kepler'sche Problem... Astr. Nachr., tom LVII, str. 183—192.

²⁾ Bulletin astronomique, tom II (1885), str. 452—462, oraz „Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites...“.

Oczywiście rozwiązanie jest tem łatwiejsze, im e jest mniejsze. Zawsze jednak, bądź przez grube próby, bądź przy pomocy rysunku można zorientować się, czy E będzie bliższe do M , czy do drugiej granicy. Obieramy w końcu pewną przybliżoną wartość na E — powiedzmy E_1 . Ponieważ E_1 jest tylko przybliżone, więc oznaczając „poprawkę“ przez ΔE_1 mamy

$$E = E_1 + \Delta E_1.$$

Podstawiamy teraz w równanie Keplera, kładziemy $\cos \Delta E_1 = 1$, $\sin \Delta E_1 = \Delta E_1$ i otrzymujemy

$$E_1 + \Delta E_1 - e (\sin E_1 + \cos E_1 \Delta E_1) = M,$$

stąd zaś

$$\Delta E_1 = - \frac{(E_1 - M - e \sin E_1)}{1 - e \cos E_1}.$$

Należy pamiętać, że w liczniku tego równania e ma być wyrażone w mierze kątowej a w mianowniku w mierze łukowej, t. j. jako liczba nie posiadająca wymiarów. Naturalnie jedna poprawka nie wystarczy; trzeba z poprawioną wartością E , t. j. z drugim przybliżeniem ponowić cały proces, t. j. trzeba szukać drugiej poprawki i t. d. dopóty, dopóki nie osiągniemy pożądanej dokładności. Przy pierwszym przybliżeniu można, a dla oszczędzenia trudu należy zaokrąglać cyfry, liczyć czterocyfrowymi logarytmami i t. d.; dopiero w miarę tego, jak przechodzimy do coraz to dalszych przybliżeń, należy wprowadzać do rachunków coraz to większą ścisłość.

Przytaczamy przykład pierwotnie podany przez F. Karlińskiego, ale rachunek zapożyczamy u J. Kowalczyka¹⁾.

Mamy dane:

$$M = 25^\circ 12' 0''00, \quad \log e = 9,9281070 \quad (e = 0,847436 \dots)$$

a szukamy E . W pierwszym przybliżeniu wystarczy liczyć w stopniach, w tym celu dość jest pomnożyć e przez $57,3^2$). Czterocyfrowy logarytm tej liczby jest 1,7581. Mamy tedy

¹⁾ O sposobach wyznaczenia biegu ciał niebieskich, Kraków 1889, str. 31 i nast.

²⁾ Oto dokładne czynniki do zamiany miary łukowej na kątową: promień koła wynosi:

w stopniach:	57 ⁰ ,29578...	logarytm:	1,75812263
w minutach:	3437,7468...	"	3,53627388
w sekundach:	206264,806...	"	5,31442513.

$$M = 25^{\circ}20, \quad \log e = 9,9281$$

$$\log \text{czynnika} = + 1,7581$$

$$\log e_0 = 1,6862, \quad \text{skąd } e^0 = 48^{\circ}55,$$

Stosując podane wyżej kryterium widzimy, że E musi być zawarte między $M = 25^{\circ}20$ a $M + e = 73^{\circ}75$. Po paru próbach spostrzegamy, że E musi być bliskie górnej granicy i przyjmujemy

$$E_1 = 71^{\circ}.$$

Teraz liczymy w minutach i pięciocyfrowymi logarytmami. Obliczamy licznik wzoru na poprawkę

$$\log e = 9,92811$$

$$\log \text{czynnika} = 3,53627$$

$$\log \sin E_1 = 9,97567$$

$$\log e' \sin E_1 = 3,44005$$

$$\begin{array}{r} \text{stad: } e' \sin E_1 \quad = 2754,6 = 45^{\circ} 54,6 \\ \quad - E_1 \quad \quad \quad = - 71^{\circ} 00,0 \\ \quad + M \quad \quad \quad = 25^{\circ} 12,0 \\ \quad - (E_1 - M - e' \sin E_1) = \quad \quad 6,6 \end{array}$$

Obliczamy mianownik

$$\log e = 9,92811$$

$$\log \cos E_1 = 9,51264$$

$$\log e \cos E_1 = 9,44075, \quad \text{stad } e \cos E_1 = 0,2759, \quad 1 - e \cos E_1 = 0,7241.$$

Zatem

$$\Delta E_1 = \frac{6,6}{0,7241} = 9,11 \dots$$

Jako drugie przybliżenie przyjmujemy:

$$E_2 = E_1 + \Delta E_1 = 71^{\circ} 9,11 = (\text{kragło}) = 71^{\circ} 9' 10''$$

i powtarzamy rachunki wedle tego samego schematu, ale 7-mio cyfrowymi logarytmami

$$\log e = 9,9281070$$

$$\log \text{czynnika} = 5,3144251$$

$$\log \sin E_2 = 9,9760671$$

$$\log e'' \sin E_2 = 5,2185992, \quad e'' \sin E_2 = 165424,3 = 45^{\circ} 57' 4,3$$

$$\quad - E_2 \quad \quad \quad = - 71^{\circ} 9' 10,0$$

$$\quad M = \quad \quad \quad = 25^{\circ} 12' 0,0$$

$$\quad - (E_2 - M - e'' \sin E_2) = \quad \quad - 5,7$$

$$\begin{aligned} \log e &= 9,9281070 \\ \log \cos E_2 &= 9,5092641 \\ \log e \cos E_2 &= 9,4373711, \quad e \cos E_2 = 0,27376, \quad (1 - e \cos E_2) = 0,72624 \end{aligned}$$

$$\Delta E_2 = - \frac{5,7}{0,72624} = - 7,85.$$

Stąd

$$E_3 = 71^\circ 9' 10'' - 7,85 = 71^\circ 9' 2,15''.$$

Jeszcze raz poszukujemy poprawki. Ponieważ ścisłość, z którą wyraziliśmy e , jest dostateczna, więc wystarczy zastąpić $\sin E_2$ przez $\sin E_3$. Logarytm $\sin E_3$ jest o 0,0000057 mniejszy od $\log \sin E_2$, przeto

$$\begin{array}{rcl} \log e' \sin E_2 & = & 5,2185992 \\ & - & 57 \\ \log e' \sin E_3 & = & 5,2185935, \quad e' \sin E_3 = 165422,09 = 45^\circ 57' 2,09'' \\ & & - E_3 = - 71^\circ 9' 2,15'' \\ & & M = 25^\circ 12' 0,00'' \\ & - (E_3 - M - e' \sin E_3) & = - 0,06'' \end{array}$$

Możemy zostawić ten sam mianownik co poprzednio i napisać

$$\Delta E_3 = - \frac{0,06}{0,72624} = - 0,082.$$

Jako ostateczną wartość przyjmujemy tedy

$$E = 71^\circ 9' 2,15'' - 0,08 = 71^\circ 9' 2,07''.$$

7. Orbity paraboliczne.

Gdy $e = 1$, to przecięcie stożkowe jest parabolą. Szanse, aby e , które może mieć wszelkie wartości zawarte między zerem a nieskończonością, miało właśnie wartość 1, — są nieskończenie małe. To też faktycznie nie znamy bodaj ani jednej ściśle parabolicznej orbity. Ale pomiędzy kometami jest mnóstwo takich, które krążą po bardzo wydłużonych eliptycznych orbitach. Wtedy e jest mniejsze od jedności, ale już do niej bliskie. Rozróżnić na podstawie obserwacji taką orbitę od parabolicznej trudno, a więc najdogodniej jest traktować ją jako parabolę. Dlatego to dla praktyki

astronomicznej przypadek paraboli ma nie mniejsze znaczenie jak przypadek elipsy.

Gdy położymy $e=1$, to równanie (35) przywiedzie się do

$$(45) \quad r = \frac{p}{1 + \cos(u - \tilde{\omega})} = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}(u - \tilde{\omega})}.$$

Możemy to przekształcić na

$$(45 \text{ bis}) \quad r = \frac{p}{2} [1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}(u - \tilde{\omega})],$$

albo na

$$(45 \text{ ter}) \quad r = p \frac{d}{du} [\operatorname{tang} \frac{1}{2}(u - \tilde{\omega})].$$

Weźmy teraz znowu równanie (30), t. j. równanie

$$r^2 du = c dt$$

i podstawmy jedno r z równania (45 bis) a drugie z równania (45 ter). W ten sposób otrzymamy najpierw równanie różniczkowe

$$\frac{1}{2} p^2 [1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}(u - \tilde{\omega})] d \operatorname{tang} \frac{1}{2}(u - \tilde{\omega}) = c dt,$$

a następnie równanie całkowite

$$(46) \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}(u - \tilde{\omega}) + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2}(u - \tilde{\omega}) = \frac{2c}{p^2} (t - t_0),$$

w którym t_0 jest to ta „epoka“, w której $u - \tilde{\omega} = v = 0$. Spostrzegamy, że przypadek paraboli jest dużo łatwiejszy od przypadku elipsy: nie potrzebujemy wprowadzać anomalii mimośrodowej a zamiast przestępnego równania Keplera mamy równanie sześciennic (46). Skoro z tego równania znajdziemy v , to przejdziemy do równania (45) i wnet otrzymamy r .

Kładąc

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(u - \tilde{\omega}) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}v = x, \quad \frac{6c}{p^2} (t - t_0) = Q$$

przekształcamy równanie (46) na równanie

$$x^3 + 3x - Q = 0,$$

do którego bezpośrednio stosuje się znany sposób Cardana. Ponieważ

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{3^3}{27} = \frac{1}{4} Q^2 + 1$$

jest zawsze dodatnie, więc równanie ma zawsze jeden pierwiastek rzeczywisty a dwa zespolone sprzężone. Naturalnie chodzi tylko o rzeczywisty pierwiastek. Łatwo go znaleźć za pomocą trygonometrycznych funkcji; aby jednak wzory nasze uczynić przydatnymi bez względu na wybór jednostek, wyrażamy c przez p za pomocą wzoru (33), a jednocześnie przywracamy stałą przyciągania k^2 . Wtedy

$$c = k \sqrt{p(m + m_1)}.$$

Podstawiamy to we wzór (46), kładziemy jeszcze $\frac{1}{2}p = q$ [q jest to odległość komety od słońca w perihelium] i piszemy:

$$\frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} v + \operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \frac{k}{2^{1/2} q^{3/2}} \sqrt{(m + m_1)} (t - t_0) = n(t - t_0). \quad (46 \text{ bis})$$

I tu także współczynnik

$$n = \frac{k \sqrt{m + m_1}}{\sqrt{2} q^3}$$

nazywa się „średnim ruchem“. Jeżeli przyjmiemy na k wartość Gaussa (patrz § 11), to trzeba będzie liczyć czas w dobach średnich słonecznych oraz położyć m (masa słońca) = 1. Co do m_1 , to ponieważ w tym przypadku chodzi zawsze o komety, których masy są zupełnie znikome wobec masy słońca, więc można z a w s z e kłaść $m_1 = 0$. Przeto w zastosowaniach będzie zawsze

$$n = \frac{k}{\sqrt{2} q^3}.$$

Widzimy stąd, że skoro $t - t_0$ i q są znane, to niewiadomem pozostaje tylko v . Aby je znaleźć, wprowadzamy pomocnicze kąty α i β określone przez równania:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{3k(t - t_0)}{(2q)^{3/2}} = \frac{3}{2} n(t - t_0),$$

$$\operatorname{tang} \beta = \sqrt[3]{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha} = \sqrt[3]{-\operatorname{cotg} \alpha \pm \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}},$$

skąd wynika

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = 2 \operatorname{cotg} 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \beta}{\operatorname{tang} \beta}.$$

Ale o wiele prędzej dojdziemy do celu posługując się tablicami Barkera¹⁾ lub innymi podobnymi. Tablice Barkera podają wprost anomalię prawdziwą v dla argumentu M lub $\log M$, M zaś to nic innego jak

$$75n \sqrt{t - t_0} = \frac{75k}{\sqrt{2}q^3} (t - t_0).$$

Nprzykład dane jest $t - t_0 = 46,61284$ dób sr. słonecznych, $\log q = 0,0866406$; znaleźć v .

Mamy

$$\log \frac{75k}{\sqrt{2}} = 9,9601277.$$

$$\log (t - t_0) = 1,6685056$$

$$\text{Compl. } \log q^{3/2} = 9,8700391$$

$$\log M = 1,4986724$$

W tablicach Barkera zaraz znajdziemy:

$$v = 43^\circ 31' 8'' 54.$$

8. Orbity hyperboliczne.

Przypadek hyperboli jest podobny do przypadku elipsy, ale gdy w celu całkowania równania pól zechcemy wyrugować anomalię prawdziwą v , to spostrzeżemy, że w równaniu (40) prawa strona jest urojona, bo dla hyperboli $e > 1$. Możemy temu zaradzić pisząc $-iE$ ($i = \sqrt{-1}$) zamiast E , wtedy bowiem wzór (40) przejdzie na również realny wzór:

$$\text{tang } \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \text{ tang hyp } \frac{1}{2} E. \quad (47)$$

¹⁾ Gdy v zbliża się do 180° , tablice Barkera stają się niedogodne, bo różnice między kolejnymi wartościami M stają się nazbyt duże. Chcąc otrzymać dokładne rezultaty trzeba używać forteli. W tylko co cytowanym dziele Kowalczyka znajdują się tablice Barkera a na końcu ich znajduje się tablica pomocnicza dla obliczenia v bliskiego do 180° .

W znanem dziele Th. Oppolzera: „Lehrbuch zur Bahnbestimmung“ w tomie I-szym znajdują się powiększone tablice Barkera z dodatkiem osobnej tablicy dla wielkich anomalii. We wspomnianych wyżej J. Bauschingera „Tafeln zur theoretischen Astronomie“ znajdują się też tablice (wedle Leverriera) służące do rozwiązywania równania (46). Także w O. Callandreaux: „Aperçu... i t. d.“.

Przez to samo podstawienie wzór (38) przechodzi na

$$r = -a [e \cos \text{hyp } E - 1]. \quad (48)$$

Ponieważ $e > 1$, $\cos \text{hyp } E > 1$ a r musi być dodatnie, więc a musi być ujemne. Jednocześnie wzór (41 bis) przechodzi na

$$a^2 \sqrt{e^2 - 1} [e \cos \text{hyp } E - 1] dE = c dt.$$

Stąd zaraz wynika całkowite równanie

$$e \sin \text{hyp } E - E = n(t - t_0), \quad (49)$$

w którym

$$n = \frac{c}{a^2 \sqrt{e^2 - 1}}. \quad (50)$$

Ponieważ tablice funkcyi hyperbolicznych są mniej rozposzechnione niż tablice funkcyi kołowych, więc przekształcamy poprzednie wzory na wzory zawierające funkcyje kołowe. W tym celu wprowadzamy nową zmienną F kładąc

$$\sin \text{hyp } E = \tanh F, \quad (51)$$

skąd zaraz wynika¹⁾

$$e^E = \tanh F + \frac{1}{\cos F}, \quad \cos \text{hyp } E = \frac{1}{\cos F}. \quad (52)$$

Z pierwszego równania (52) przez łatwe przekształcenia otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} e^E &= \frac{\sin F + 1}{\cos F} = \frac{1 + 2 \sin \frac{1}{2} F \cos \frac{1}{2} F}{\cos^2 \frac{1}{2} F - \sin^2 \frac{1}{2} F} = \frac{(\cos \frac{1}{2} F + \sin \frac{1}{2} F)^2}{\cos^2 \frac{1}{2} F - \sin^2 \frac{1}{2} F} = \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} F + \sin \frac{1}{2} F}{\cos \frac{1}{2} F - \sin \frac{1}{2} F} = \tanh (45^\circ + \frac{1}{2} F). \end{aligned}$$

Stąd

$$E = \log \tanh (45^\circ + \frac{1}{2} F), \quad (53)$$

a następnie

$$\tanh \text{hyp } \frac{1}{2} E = \frac{e^{1/2 E} - e^{-1/2 E}}{e^{1/2 E} + e^{-1/2 E}} = \frac{e^E - 1}{e^E + 1} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} F}{2 \cos \frac{1}{2} F} = \tanh \frac{1}{2} F. \quad (54)$$

¹⁾ Tu e oznacza podstawę (basis) logarytmów naturalnych!

Podstawiając wartości ze wzorów (51), (52), (53) i (54) we wzory (47), (48) i (49) otrzymamy następujące wzory:

$$(47 \text{ bis}) \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} F$$

$$(48 \text{ bis}) \quad r = -a(e \sec F - 1)$$

$$(49 \text{ bis}) \quad e \operatorname{tang} F - \log \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} F) = n(t - t_0).$$

Orbit hyperbolicznych (u komet) znamy bardzo niewiele, a i u tych e jest zawsze tylko bardzo nieznacznie większe od jedności. Wielu sądzi, że ta przewyżka pochodzi z niedokładności obserwacyi, lub tłumaczy się przez pewne perturbacye, że zatem w rzeczywistości e jest zawsze trochę mniejsze od jedności, że wogóle niema orbit hyperbolicznych. Jednakże niektóre meteoryty może przychodzą do systemu słonecznego po drogach hyperbolicznych. Oprócz tego teoria ruchu hyperbolicznego bywa stosowana do lotu meteorytów w powietrzu pomimo tego, że z powodu jego oporu drogi meteorytów w atmosferze nie są przecięciami stożkowemi.

Weźmy na chwilę równanie (26 bis) lub (29). Lewa strona tego równania to nic innego jak kwadrat prędkości. Oznaczmy prędkość (całkowitą) przez V , podstawmy zamiast U jego wartość ze wzoru (24), a h ze wzoru (32), wreszcie przywróćmy stałą przyciągania. Otrzymamy w ten sposób równanie:

$$(55) \quad V^2 = k^2(m + m_1) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

U orbity eliptycznej $\frac{1}{a}$ jest dodatnie, u parabolicznej zero, a u hyperboli odjemne. Zatem na orbicie eliptycznej prędkość jest zawsze mniejsza niż $k \sqrt{\frac{2(m + m_1)}{r}}$, na orbicie parabolicznej równa się tej wielkości, a na hyperbolicznej jest większa. Stąd wniosek, że wpaść do systemu słonecznego i znowu zeń wylecieć może tylko takie ciało, którego prędkość jest większa niż $k \sqrt{\frac{2(m + m_1)}{r}}$. Naturalnie w tym razie należy pod m rozumieć masę całego systemu słonecznego, która zresztą jest niewiele większa od masy słońca. Jeżeli zaś zechcemy zastosować wzór (55) do meteorytów

przelatujących mimo ziemi, to trzeba będzie pod m rozumieć masę ziemi, a pod m_1 masę meteorytu. Tę ostatnią można zawsze pominąć.

9. Współrzędne prostokątne w ruchu eliptycznym. Równanie środka.

Jasną jest rzeczą, że w ruchu eliptycznym współrzędne są peryodycznymi funkcjami czasu, przyczem peryodem funkcji jest czas obiegu. Stąd wniosek, że współrzędne dadzą wyrazić się przez szeregi Fouriera z anomalią średnią jako argumentem, bo ta anomalia jest proporcjonalna do czasu i wzrasta o 2π po każdym obiegu. Zatem współrzędne prostokątne muszą dać się wyrazić przez szeregi kształtu

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_p \cos pM, \quad y = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_p \sin pM.$$

Chodzi tylko o wyznaczenie współczynników A_p i B_p . Nie jest to rzecz trudna, ale dla braku miejsca pominiemy wywód podając tylko rezultaty. Zakładamy, że oś x jest identyczna z wielką osią elipsy oraz że środek współrzędnych znajduje się w środku elipsy. Na mocy wzorów (36) w § 5

$$x = a \cos E, \quad y = b \sin E = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (36 \text{ bis})$$

zaś wyrażenia na $\cos E$ i $\sin E$ są:

$$\left. \begin{aligned} \cos E &= \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \frac{1}{p} J_{p-1}(pe) \cos pM \\ \sin E &= \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \frac{1}{p} J_{p-1}(pe) \sin pM. \end{aligned} \right\} (56)$$

J_p oznacza tu funkcję Bessla rzędu p ¹⁾. We wzorze na $\cos E$ należy zamiast wyrazu, w którym $p = 0$, napisać $-\frac{1}{2}e$, a we wzorze

$$\begin{aligned} 1) \quad J_n(w) &= \frac{w^n}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n} \left[1 - \frac{w^2}{2(2n+2)} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^i w^{2i}}{2^{2i} \cdot 1 \cdot 2 \dots i \cdot (n+1)(n+2) \dots (n+i)} + \dots \right] \end{aligned}$$

Wzór ten nie stosuje się do wskaźników ujemnych, ale gdy $n < 0$, to $J_{-n}(w) = (-1)^n J_n(w)$.

na $\sin E$ zero. Z drugiej strony, jeżeli umieścimy środek współrzędnych w tem ognisku, w którym znajduje się ciało centralne, to wyrażenie na $y = r \sin v$ pozostanie bez zmiany, zaś zamiast pierwszego wzoru (36 bis) będziemy mieli wzór (37) z § 5 t. j.

$$(37 \text{ bis}) \quad x = r \cos v = a [\cos E - e].$$

Widzimy stąd, że w rozwinięciu w szereg zmieni się tylko wyraz stały: zamiast $-\frac{1}{2}ae$ będzie $-\frac{3}{2}ae$. Rozpatrując wzory (56) widzimy, że prawe ich strony są funkcyjami anomalii średniej i mimośrodu. Ze wzoru (38) i pierwszego (56) możnaby wyprowadzić wzór na r . Naturalnie wzór ten będzie miał zupełnie ten sam charakter co wzory (56), t. j. będzie to szereg Fouriera ze współczynnikami, które są funkcyjami mimośrodu.

Wszystkie te rozwinięcia w szeregi są zbieżne od $e=0$ do $e=1$, o ile zachowamy porządek podany we wzorach (56). Gdybyśmy np. zechcieli skorzystać z tego, że współczynniki $J_{p-1}(pe)$ [patrz uwagę na poprzedniej stronie] są szeregami potęgowymi mimośrodu e i uporządkowali szeregi wedle potęg mimośrodu, to obszar zbieżności co do e zmniejszyłby się i dla $e=0,6627\dots$ szeregi przestałyby być zbieżne. Pochodzi to stąd, że anomalia mimośrodowa E uważana jako funkcyja mimośrodu e daje się rozwinać w szereg potęgowy e , który atoli pozostaje zbieżnym tylko do $e=0,6627\dots$ Rzeczywiście wedle równania Keplera

$$E - e \sin E = M$$

E jest funkcyją zmiennych e i M . Uważajmy M jako parametr, który zresztą może mieć jakąkolwiek realną wartość poczynając od $M=-\infty$ a kończąc na $M=+\infty$; wtedy E będzie funkcyją jednej zmiennej e i da się rozwinać w szereg potęgowy e . Aby poznać zbieżność tego szeregu, trzeba założyć, że tak e jak E mogą przybierać wszelkie rzeczywiste, urojone i sprzężone wartości i znaleźć¹⁾ punkty osobliwe funkcyi $E=F(e)$; albowiem wiadomo, że promień zbieżności sięga tylko do najbliższego punktu osobliwego.

Punkty osobliwe znajdziemy w następujący sposób. Różniczku-

¹⁾ W następującej dyskusyi idziemy za C. L. Charliera: *Mechanik des Himmels*, tom II str. 256 i nast., ale wiele skracamy, wiele też zmieniamy.

jąc równanie Keplera względem e (przyczem uważamy M za stały parametr) otrzymamy

$$\frac{dE}{de} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}.$$

Wedle twierdzenia Cauchy'ego $E - E_0$ jest rozwijalne w szereg potęgowy uszykowany wedle potęg $e - e_0$ oprócz najbliższej okolicy tych punktów, w których pochodna $\frac{dE}{de}$ staje się nieskończoną, t. j. oprócz tych punktów, w których

$$1 - e \cos E = 0.$$

Przyprowadzimy to ostatnie równanie do innego kształtu. Mianowicie wynika żeń

$$\cos E = \frac{1}{e}, \quad \sin E = \pm \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e},$$

a w dalszym ciągu

$$\exp(iE) = \cos E + i \sin E = \frac{1 \pm \sqrt{1 - e^2}}{e}. \quad (i = \sqrt{-1})$$

Podstawmy teraz zamiast E jego wartość wziętą z równania Keplera, a napisane przed chwilą równanie przybierze kształt

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - e^2}}{e} = \exp(ie \sin E + iM).$$

Wreszcie napiszmy zamiast $\sin E$ jego powyżej znaną wartość: $\pm \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}$ i pomnóżmy całe równanie przez e a otrzymamy

$$1 \pm \sqrt{1 - e^2} = e \cdot \exp(\pm \sqrt{1 - e^2} + iM). \quad (57)$$

Spostrzegamy zaraz, że równanie (57) jest spełnione dla $e = 0$, ale ponieważ pomnożyliśmy równanie przez e , więc to nie jest pierwiastek równania pierwotnego, t. j. $e = 0$ nie jest punktem osobliwym.

Aby ułatwić sobie dalsze badanie, wprowadźmy nową zmienną z określoną przez równanie

$$z = 1 \mp \sqrt{1 - e^2}.$$

Z równania tego zaraz wynika

$$e^2 = 2z - z^2,$$

a skoro wprowadzimy tę wartość na e^2 do równania (57) i podniemy je do kwadratu, to po łatwych przekształceniach i redukcjach otrzymamy

$$(57 \text{ bis}) \quad \frac{2-z}{z} \exp(2z) = \exp(2 + iM).$$

Przypominamy, że M jest zawsze realne, co do z , to wedle założenia może ono być, a nawet, jak to widać z równania (57 bis), powinno być wielkością sprzężoną. Piszemy tedy

$$z = u + iv,$$

gdzie u i v są realnymi zmiennymi, poczem oddzielamy wielkości realne od urojonych. W ten sposób równanie (57 bis) rozpada się na dwa równania [e oznacza funkcję wykładniczą!]

$$(2 - u) \cos 2v + v \sin 2v = e^{2(1-u)} [u \cos M - v \sin M]$$

$$(2 - u) \sin 2v - v \cos 2v = e^{2(1-u)} [u \sin M + v \cos M].$$

Podnosząc te równania do kwadratu i dodając otrzymamy równanie

$$(57 \text{ ter}) \quad (u^2 + v^2) [1 - e^{4(1-u)}] + 4(1 - u) = 0,$$

zaś mnożąc pierwsze przez $\cos M$, drugie przez $\sin M$ i dodając i t. d. znanym sposobem otrzymamy równania:

$$(2 - u) \cos(2v - M) + v \sin(2v - M) = u \cdot e^{2(1-u)}$$

$$(2 - u) \sin(2v - M) - v \cos(2v - M) = v \cdot e^{2(1-u)}.$$

Tu znowu mnożąc pierwsze przez v a drugie przez u i dodając a potem nieco redukując otrzymamy z łatwością

$$\text{tang}(2v - M) = \frac{2v}{u(2 - u - v)}.$$

Punkty osobliwe leżą na przecięciach krzywej (57 ter) z krzywą, której równanie napisaliśmy przed chwilą. Widzimy zaraz, że każdy

punkt krzywej (57 ter) może być punktem osobliwym. Rzeczywiście, jeżeli weźmiemy jakiegokolwiek dwie wartości u_1 i v_1 czyniące zadość równaniu (57 ter) i podstawimy w równanie drugiej krzywej, to zawsze znajdzie się odpowiednia realna wartość na M , bo równanie tej drugiej krzywej można uważać za równanie na M i z kształtu jego widać, że jeżeli tylko u i v są realne, to i M musi być realne, M zaś może przybierać wszelkie wartości realne od $-\infty$ do $+\infty$. Skoro do każdego punktu krzywej (57 ter) zawsze znajdzie się odpowiednie realne M , to każdy punkt krzywej (57 ter) może być punktem osobliwym. Dość więc rozpatrzyć krzywą (57 ter). Było to zresztą do przewidzenia, bo pierwotne równanie punktów osobliwych

$$1 - e \cos E = 0$$

parametru M nie zawierało, a krzywa (57 ter) tak samo go nie zawiera.

Równanie (57 ter) jest spełnione przy dowolnem v , jeżeli $u = 1$; przeto krzywa składa się z prostej $u = 1$ i oprócz tego z krzywej symetrycznej względem osi u , podobnej do leżącej ósemki [krzywa ta jest więc podobna do lemniskaty]; punkt $u = 1, v = 0$ jest punktem potrójnym. Jeżeli teraz wrócimy do równania

$$z - 1 = \mp \sqrt{1 - e^2},$$

jeżeli napiszemy

$$z = u + iv, \quad e = \xi + i\eta,$$

a potem podniesiemy do kwadratu i oddzielimy wielkości rzeczywiste od urojonych, to otrzymamy dwa równania

$$\xi^2 - \eta^2 = v^2 - u^2 + 2u$$

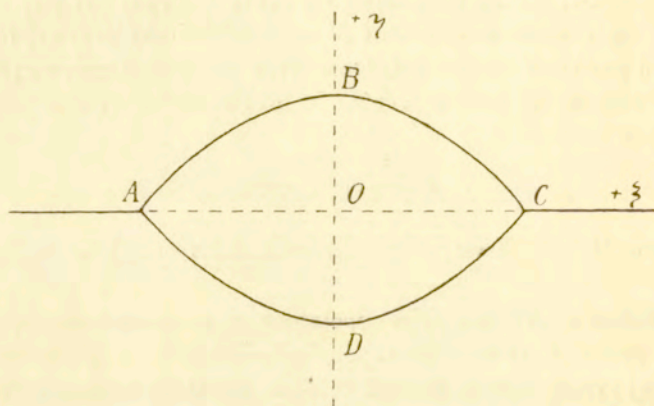
$$\xi\eta = v(1 - u).$$

Zaraz widać, że dla $u = 1$ musi być albo $\xi = 0$, albo $\eta = 0$. Wybieramy tę drugą ewentualność, bo jeżeli przyjmiemy $u = 1$ i $\xi = 0$, to v będzie mogło zmieniać się tylko w ciasnych granicach, tymczasem wzdłuż prostej: $u = 1, v = v$, v może przybierać wszelkie wartości. Zatem prostej: $u = 1, v = v$ w płaszczyźnie zmiennej z odpowiada — w płaszczyźnie zmiennej e — $\eta = 0$

t. j. oś ξ , ale, jak to zaraz zobaczymy, nie cała. Rzeczywiście, skoro położymy $\eta = 0$, $u = 1$, to pierwsze równanie przywiedzie się do

$$\xi^2 = v^2 + 1;$$

przeto wartości na ξ zawarte między $\xi = -1$ a $\xi = +1$ będą wykluczone. Owej leżącej ósemce w płaszczyźnie z tu odpowiada gałąź $ABCD$. Nakreślenie tej gałęzi nie jest rzeczą trudną, ale wymaga



Ryc. 22.

dość długich rachunków, bo trzeba najpierw z równania (57 ter), które można napisać w postaci [e oznacza znowu funkcję wykładniczą!]

$$v^2 = \frac{4(1-u)}{e^{4(1-u)} - 1} - u^2,$$

dla danego u znaleźć odpowiednie v , a potem mając już u i v obliczyć odpowiednie ξ i η . Jednym słowem trzeba obliczać gałąź $ABCD$ punkt po punkcie.

Ponieważ szeregi (56) zawierają potęgi e , więc w danym razie $e_0 = 0$ i należy rozwijać w szeregi naokoło punktu $\xi = 0$, $\eta = 0$. Oczywiście najbliższe punkty osobliwe znajdują się w B i D , zatem $OB = OD$ jest promieniem zbieżności. Trzeba go jeszcze obliczyć. Ponieważ B i D leżą na osi η , więc $\xi = 0$ i, jak to łatwo sprawdzić, $v = 0$. Wskutek tego dla obliczenia promienia zbieżności otrzymujemy system równań

$$\begin{aligned} u^2(1 - e^{4(1-u)}) + 4(1-u) &= 0 \\ \eta^2 &= u^2 - 2u. \end{aligned}$$

Podstawmy tu $s = u - 1$, a oba równania przywiodą się do prostego kształtu

$$e^{2\epsilon} = \frac{s+1}{s-1}$$

$$\eta^2 = s^2 - 1.$$

Trzeba więc najpierw rozwiązać równanie przestępne dla s , a potem z otrzymanego pierwiastka s obliczyć η . Znajdziemy tą drogą

$$\eta = 0,6627432\dots$$

Skoro mimośród e przekroczy tę wartość, to szeregi (56), (36 bis) i t. d. uporządkowane wedle potęg mimośrodu przestaną być zbieżne.

„Równaniem środka“ nazywamy różnicę $v - M$ między anomalią prawdziwą a średnią. Jasnym jest, że ta różnica musi być funkcją mimośrodu, bo gdyby mimośród był zerem, to równanie środka byłoby też zerem. Oprócz tego „równanie środka“ musi być funkcją peryodyczną anomalii średniej, bo za każdym obiegiem wartości jego muszą powtarzać się. Stąd wniosek, że $v - M$ da się przedstawić jako szereg Fouriera z argumentem: anomalia średnia, oraz współczynnikami znikającymi, gdy mimośród jest zerem. Oprócz tego łatwo jest domyśleć się, że szereg Fouriera będzie zawierać tylko sinusy, bo $v - M$ znika tak w perihelium jak w aphelium, t. j. tam, gdzie $M = 0^\circ, 180^\circ\dots$ Jednym słowem musi być

$$v - M = \Sigma C_n \sin nM,$$

przyczem C_n są to funkcje e znikające razem z niem. I tu nie będziemy obliczać współczynników C_n , natomiast na podstawie zachowania się pochodnej równania środka rozpatrzemy w ogólnych zarysach przebieg zmian, którym podlega to równanie.

$$\frac{d(v - M)}{dt} = \frac{dv}{dt} - n,$$

ale wedle równania (41)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c}{r^2},$$

zaś wedle równania (43)

$$c = na^2 \sqrt{1 - e^2},$$

przeto

$$\frac{d(v - M)}{dt} = n \left[\frac{a^2}{r^2} \sqrt{1 - e^2} - 1 \right].$$

Z równania tego widać, że pochodna równania środka przybiera wartości symetryczne względem głównej osi elipsy. Następnie widać, że ta pochodna zmienia znak w tych dwóch punktach, w których

$$r^2 = a^2 \sqrt{1 - e^2}.$$

Zresztą w perihelium, gdzie $r = a(1 - e)$, ta pochodna jest dodatnia, zaś w aphelium, gdzie $r = a(1 + e)$, odjemna. Przypomniawszy sobie, że w perihelium i aphelium równanie środka jest zerem, widzimy, że wzrasta ono od perihelium do punktu, w którym

$$r = a(1 - e^2)^{1/4},$$

odtąd zmniejsza się, w aphelium przechodzi przez zero, staje się odjemnem, przechodzi przez największą odjemną wartość w punkcie, gdzie znowu

$$r = a(1 - e^2)^{1/4}$$

i powraca do zera w perihelium.

10. Prawa Keplera.

Teorya wyłożona w poprzednich paragrafach może być zastosowana do ciał systemu słonecznego. Wprawdzie w systemie słonecznym mamy nie dwa, a całe mnóstwo wzajemnie przyciągających się ciał; ale centralne ciało: słońce — tak dalece przewyższa masą wszystkie inne ciała, że ruchy planet zależą przeważnie od jego przyciągania. Przyciągania innych ciał występują jako drugorzędne, nieznaczne siły, sprawiające tylko pewne zawichrzenia [perturbacye] w ruchu zależnym od przyciągania słońca. Przeto wzory poprzednich paragrafów przedstawiają ruchy planet (i komet) wcale dokładnie. Naturalnie współczesne obserwacye łatwo wykrywają zboczenia od ruchu po przecięciach stożkowych, ale np. spostrzeżenia Tycho na de Brahe, w których błędy wynosiły jeszcze około minuty (kątowej), zboczeń tych wykryć nie mogły, natomiast były już dostatecznie ścisłe, aby przekonać, że orbity planet nie są kołami. Z tych to obser-

wacyi Tycho na de Brahe Kepler drogą indukcji wyprowadził dla orbit zamkniętych trzy prawa. My zaś możemy podać te prawa (i to w ogólniejszej postaci) jako proste konsekwencye lub interpretacye powyższych wzorów.

I. prawo. Środek masy planety (lub komety) porusza się w płaszczyźnie przechodzącej przez środek masy słońca. Droga jego jest przecięciem stożkowym a środek masy słońca znajduje się w jednym z ognisk. Pierwsze zdanie wyraża to samo, co równanie (35). Kepler mówi tylko o elipsach, a nie o przecięciach stożkowych wogóle.

II. prawo. Pola opisane przez promień wodzący, łączący środek masy słońca ze środkiem masy planety (lub komety), są proporcjonalne do czasu, w ciągu którego zostały opisane. To znowu wynika wprost z równania (41) wyrażającego zasadę pól, albowiem jeżeli oznaczymy symbolem A pole wycinka opisanego przez promień wodzący, to

$$dA = \frac{1}{2} r^2 dv.$$

Zatem wedle równania (41)

$$dA = \frac{1}{2} c dt,$$

stąd zaś wynika

$$A = \frac{1}{2} c (t - t_0), \quad (58)$$

t. j. właśnie drugie prawo Keplera.

III. prawo. W tym kształcie, w którym wygłosił je Kepler, stosuje się ono tylko do orbit zamkniętych, w których czas obiegu jest skończony; wynika ono jednak z pewnego związku, który stosuje się zarówno do orbit zamkniętych jak niezamkniętych. Mianowicie z drugiego wzoru (34) i z napisanego przed chwilą wzoru (58) wynika

$$A^2 = \frac{1}{4} p (m + m_1) (t - t_0)^2. \quad (59)$$

Napiszmy to równanie dla wszystkich komet i planet zakładając, że czas $(t - t_0)$ jest we wszystkich równaniach jednaki. Niewątpliwie dopuszczamy się w ten sposób ekstrapolacji, bo cała teoria obecnego rozdziału stosuje się właściwie do dwóch ciał. Wiemy jednakże, że dzięki temu, iż masy wszystkich innych ciał słonecznego systemu są w porównaniu z masą słońca znikomo małe, wolno do ruchu planet stosować rezultaty teorii ruchu dwóch ciał.

Jeżeli przytem chcemy być konsekwentnymi, to powinniśmy stosując równanie (59) do wielu ciał pominać masy planet wobec masy słońca. Powinniśmy zatem napisać

$$\frac{A_1^2}{p_1} = \frac{1}{4} m (t - t_0)^2, \quad \frac{A_2^2}{p_2} = \frac{1}{4} m (t - t_0)^2 \dots \text{i t. d.}$$

Stąd zaś zaraz wynika

$$(60) \quad \frac{A_1^2}{p_1} = \frac{A_2^2}{p_2} = \frac{A_3^2}{p_3} = \dots = \frac{A_n^2}{p_n} = \dots$$

To znaczy, że kwadraty pól opisanych przez rozmaite komety i planety w ciągu tego samego czasu są proporcjonalne do parametrów tychże komet i planet. Skoro jednakże założymy, że orbity są zamknięte i wprowadzimy czasy obiegu $T_1, T_2 \dots$ i t. d., to otrzymamy trzecie prawo Keplera w jego pierwotnym Keplerowskim kształcie. Mianowicie wedle drugiego wzoru (34)

$$c^2 = (m + m_1) a (1 - e^2),$$

zaś wedle wzorów (43) i (44)

$$c = a^2 \sqrt{1 - e^2} \frac{2\pi}{T}.$$

Z porównania obu wzorów wynika:

$$(61) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m + m_1}.$$

Rozumując zupełnie tak samo jak poprzednio, widzimy, że stosując to równanie do wszystkich ciał słonecznego systemu posiadających zamknięte orbity, powinniśmy napisać

$$(62) \quad \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \dots = \frac{T_n^2}{a_n^3} = \dots = \frac{4\pi^2}{m} \dots$$

Wzór (62) wyraża trzecie prawo Keplera w jego pierwotnym kształcie. Mianowicie czytamy ze wzoru (62), że kwadraty czasów obiegu planet i komet o zamkniętych orbitach są odwrotnie proporcjonalne do sześciątów wielkich osi ich orbit. Jednocześnie jeżeli ze wzoru (61) wyłączymy pierwiastek kwadratowy i wyrazimy znowu T przez n

za pomocą wzoru (44), to z tego samego trzeciego prawa Keplera otrzymamy na ruch średni bardzo użyteczny wzór

$$n = \frac{\sqrt{m + m_1}}{a^{3/2}}.$$

Przywróćmy w tym wzorze stałą przyciągania. Figurowała ona we wzorze na przyciąganie jako współczynnik przy iloczynie mas. Gdybyśmy ją zachowali we wszystkich następnych wzorach, to przy przejściu do ruchu względnego (por. początek § 5) po podzieleniu wzorów (20) przez m oraz wzorów (21) przez m_1 i po odjęciu pierwszych od drugich okazałoby się, że ta stała jest współczynnikiem przy sumie mas: $m + m_1$. Zresztą doszlibyśmy do tego samego wniosku przez rozważanie wymiarów¹⁾. Piszemy tedy

$$n = \frac{k\sqrt{(m + m_1)}}{a^{3/2}}. \quad (61 \text{ bis})$$

11. Stała przyciągania.

Skoro mówimy o stałej przyciągania, to obliczmy ją w jednostkach popospolicie używanych w astronomii. Weźmy w tym celu równanie (61) i przywróćmy w niem stałą przyciągania:

$$k^2 (m + m_1) \frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2,$$

skąd

$$k^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{(m + m_1) T^2}.$$

Powtórzmy rachunek Gaussa. Gauss przyjął za jednostkę czasu dobę średnią słoneczną, za jednostkę długości połowę wielkiej osi orbity ziemskiej, wreszcie za jednostkę masy masę słońca, zatem położył $a=1$, $m=1$ i trzeba było tylko podstawić m_1 (masę ziemi) i T (rok gwiazdowy) wyrażone w przyjętych jednostkach. Otóż Gauss przyjął

$$m_1 = \frac{1}{354710} \quad T = 365,2563835 \dots$$

¹⁾ Wymiary stałej przyciągania są: sześcián długości podzielony przez iloczyn masy przez kwadrat czasu.

i otrzymał

$$k^2 = 0,000295912 \dots, \quad k = 0,017202099 \dots, \quad \frac{1}{k} = 58,13244087 \dots \\ = 3548,1877 \dots$$

Wartość na m_1 nie była dostatecznie dokładna. Aby jednak nie zmieniać stałej k Gaussa, która weszła do wielu tablic, umówiono się przyjęć, że astronomiczna jednostka długości nie jest równa połowie wielkiej osi orbity ziemskiej, ale właśnie taka, że stała grawitacyi ma wartość podaną przez Gaussa. Zatem astronomiczna jednostka długości jest określona pośrednio przez stałą grawitacyi. Jest ona zresztą tylko nieznacznie mniejsza od połowy wielkiej osi orbity ziemskiej.

12. Określenie masy planety mającej satelitę.

Zastosujemy trzecie prawo Keplera do określenia masy planety. Oznaczmy masę słońca przez m , planety przez m_1 a satelity przez m_2 ; oznaczmy czas obiegu planety naokoło słońca przez T_1 , a satelity naokoło planety przez T_2 ; oznaczmy połowę wielkiej osi orbity planety przez a_1 , a połowę wielkiej osi orbity satelity przez a_2 i napiszmy równanie (61) raz dla słońca i planety, drugi raz dla planety i satelity:

$$m + m_1 = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2}, \quad m_1 + m_2 = 4\pi^2 \frac{a_2^3}{T_2^2}.$$

Stąd

$$\frac{m_1 + m_2}{m + m_1} = \frac{a_2^3 T_1^2}{a_1^3 T_2^2}.$$

Zaniedbując masę planety wobec masy słońca a masę satelity wobec masy planety (dlatego to, jeżeli planeta ma kilku satelitów, to najlepiej wziąć najmniejszego) otrzymamy

$$(63) \quad \frac{m_1}{m} = \frac{a_2^3 T_1^2}{a_1^3 T_2^2}.$$

Czasy obiegu T_1 i T_2 oraz stosunek $\frac{a_2}{a_1}$ określamy z obserwacyi.

13. Ruch słońca naokoło ziemi. Ruch naokoło wspólnego środka masy.

W zadaniu dwóch ciał panuje najzupełniejsza wzajemność. Równania § 4 są najzupełniej symetryczne względem obu ciał i ich współrzędnych. Z chwilą, gdy przejdziemy do ruchu względnego słońca naokoło ziemi, dość jest założyć, że środek współrzędnych ruchomych znajduje się w środku ziemi i powiedzieć, że punkt $m(x, y, z)$ oznacza ziemię, a $m_1(x_1, y_1, z_1)$ słońce. Jeżeli zatem ziemia krąży naokoło słońca po elipsie, to słońce krąży naokoło ziemi po takiej samej elipsie. Na zasadzie tej uwagi wyprowadzimy wzory (64), na które powoływaliśmy się w rozdz. X-tym (§ 4) przy przejściu od wzorów (12) do wzorów (13).

Zwykle oznaczamy odległość słońca od ziemi przez R , zaś jego długość geocentryczną przez \odot ; przeto \odot jest to kąt zupełnie analogiczny do v . Ze wzoru (41) podstawiając wartość na e ze wzoru (43) oraz kładąc $e = \sin \varphi$ otrzymamy

$$R^2 \frac{d\odot}{dt} = na^2 \sqrt{1 - e^2} = na^2 \cos \varphi. \quad (64 a)$$

Z drugiej strony podstawiając wartość na p z drugiego wzoru (34) we wzór (35) możemy napisać ten ostatni wzór w kształcie

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\odot - \pi)},$$

gdzie π oznacza długość perihelium [t. j. tego punktu, w którym słońce jest najbliżej ziemi]. Różniczkując powyższy wzór otrzymamy

$$\frac{dR}{dt} = \frac{a(1 - e^2)}{[1 + e \cos(\odot - \pi)]^2} \cdot e \sin(\odot - \pi) \cdot \frac{d\odot}{dt},$$

to jest

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R^2}{a(1 - e^2)} \cdot e \sin(\odot - \pi) \cdot \frac{d\odot}{dt}.$$

Lecz tu możemy wyrugować: $R^2 \frac{d\odot}{dt}$ za pomocą wzoru (64 a).

Skoro to uczynimy, to otrzymamy

$$\frac{dR}{dt} = na \sqrt{1 - e^2} \sin(\odot - \pi) = na \cdot \text{tang } \varphi \cdot \sin(\odot - \pi). \quad (64 b)$$

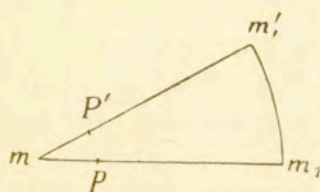
Wreszcie możemy oczywiście napisać sam wzór (35) w kształcie

$$(64c) \quad \frac{1 - e^2}{R} = \frac{1 + e \cos(\odot - \pi)}{a} = \frac{1 + \sin \varphi \cos(\odot - \pi)}{a}.$$

Rozważymy jeszcze pokrótce ruch obu ciał względem wspólnego środka masy. Środek masy dwóch punktów materialnych m i m_1 znajduje się zawsze na prostej łączącej oba te punkty — w punkcie P dzielącym odcinek mm_1 w takim stosunku, że

$$\overline{mP} : \overline{m_1P} = m_1 : m.$$

Jeżeli zatem przeniesiemy środek współrzędnych z m do P , to promień wodzący m_1P będzie stałe w stosunku $\frac{m}{m+m_1}$ mniejszy



Ryc. 23.

od promienia wodzącego mm_1 , a promień wodzący mP będzie stałe w stosunku $\frac{m_1}{m+m_1}$ mniejszy od promienia wodzącego mm_1 . Jednym słowem orbity punktów m i m_1 naokoło punktu P będą takimi samymi elipsami jak drogi punktu m_1 naokoło m , lub punktu m naokoło m_1 ,

tylko zmniejszonymi: jedna w stosunku $\frac{m}{m+m_1}$, druga w stosunku $\frac{m_1}{m+m_1}$. Że przy takim zmniejszeniu kąty nie ulegną zmianie, to jasne. Zatem równania biegunowe dróg punktów m_1 i m naokoło P będą [por. wzór (35)]:

$$(65) \quad r' = \frac{m}{m+m_1} \cdot \frac{p}{1+e \cos v}, \quad r'' = \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \frac{p}{1+e \cos(v+180^\circ)}.$$

W drugim równaniu powiększyliśmy anomalię o 180° , bo z punktu P widzimy m zawsze we wprost przeciwnym kierunku jak m_1 .

14. Elementy orbity.

Widzieliśmy, że całkowanie wprowadziło sześć stałych dowolnych, mianowicie h [równanie (26)], c_1, c_2, c_3 [równania (27)], $\tilde{\omega}$ [równ. (35)] i t_0 [równ. (42)], t. j. właśnie tyle, ile być powinno

wedle teorii równań różniczkowych. Jasną jest rzeczą, że poszczególne rozwiązania mogą różnić się między sobą tylko wartościami tych sześciu stałych, bo w zadaniu dwóch ciał orbita jest zawsze przecięciem stożkowem i nawet jej przynależność do tej lub owej grupy [orbita eliptyczna, paraboliczna, lub hyperboliczna] zależy od wartości stałych. Widzieliśmy też, jak należy interpretować niektóre z tych stałych z punktu widzenia teorii przecięć stożkowych. Wiemy już, że [porów. wzór (32) i końcowy ustęp § 8].

$$h = \frac{k^2(m + m_1)}{a}, \quad (66)$$

[przywróciliśmy w tym wzorze stałą przyciągania!]. Ponieważ a oznacza połowę wielkiej osi orbity, więc gdy $h > 0$, to orbita jest elipsą, gdy $h = 0$, to parabolą, gdy $h < 0$, to hyperbolą. Wiemy dalej, że $\tilde{\omega}$ to stała różnica między kątem biegunowym u a anomalią prawdziwą v , albo inaczej mówiąc wartość kąta u w perihelium. Wydawałoby się może komu, że od chwili, gdy wprowadziliśmy anomalię prawdziwą v a linię absydów przyjęliśmy za oś biegunową, kąty u i $\tilde{\omega}$ stały się niepotrzebne, że możnaby poprostu położyć $u = v$, t. j. $\tilde{\omega} = 0$. Przekonamy się jednak niebawem, że dobrze zrobiliśmy pozostawiając sobie te kąty do rozporządzenia. Wreszcie wiemy już, że t_0 to „epoka“ przejścia przez perihelium.

Podczas gdy względem stałej $\tilde{\omega}$ okazaliśmy się tak konserwatywnymi, że stałemi c_1, c_2, c_3 postąpiliśmy radykalnie. Umyslnie założyliśmy, że płaszczyzna $z = 0$ jest identyczna z płaszczyzną orbity, aby było:

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Dzięki temu okazało się, że $c_3 = c$ jest to stała pól [por. równ. (33) i drugie (34)]

$$c_3 = c = k \sqrt{(m + m_1) p} = k \sqrt{(m + m_1) a (1 - e^2)}. \quad (67)$$

Ale jeżeli płaszczyzna $z = 0$ nie jest identyczna z płaszczyzną orbity, to c_1 i c_2 są różne od zera a c_3 jest różne od stałej pól c . Jakie wtedy znaczenie mają stałe c_1, c_2, c_3 ? Wiemy [patrz równania (27 bis)], że

$$c_1 = 2 \frac{dA_1}{dt}, \quad c_2 = 2 \frac{dA_2}{dt}, \quad c_3 = 2 \frac{dA_3}{dt},$$

gdzie $\frac{dA_1}{dt}$, $\frac{dA_2}{dt}$, $\frac{dA_3}{dt}$ oznaczają rzuty prędkości wycinkowej

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{du}{dt}$$

na płaszczyzny współrzędnych. Tak samo c_1, c_2, c_3 są to rzuty stałej c na też same płaszczyzny. Tedy

$$(68) \quad c_1 = c \cos \alpha, \quad c_2 = c \cos \beta, \quad c_3 = c \cos \gamma,$$

przyczem α, β i γ są to kąty pomiędzy prostopadłą do płaszczyzny orbity a osiami x, y, z .

Załóżmy, że płaszczyzna orbity tworzy z płaszczyzną xy ($z=0$) kąt i oraz że kąt pomiędzy osią x a przecięciem się płaszczyzny orbity z płaszczyzną xy jest Ω . Jeżeli punkt, w którym prostopadła do orbity przebija sferę niebieską, oznaczymy przez R i jeżeli połączymy punkt R łukami wielkich kół z tymi punktami, w których osie $+x, +y$ i $+z$ przebijają sferę niebieską, to [patrz ryc. 24]

$$Rx = \alpha, \quad Ry = \beta, \quad Rz = \gamma.$$

Odrązu widać, że $\gamma = i$, następnie zaś z trójkątów sferycznych prostobocznych Rzx i Rzy znajdziemy¹⁾ [por. wzory (7 ter.) w rozdziale I-szym]

$$\cos \alpha = \sin i \cos (90^\circ - \Omega), \quad \cos \beta = \sin i \cos (180^\circ - \Omega).$$

Zatem

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \sin i \sin \Omega \\ \cos \beta = -\sin i \cos \Omega \\ \cos \gamma = \cos i, \end{array} \right.$$

a wskutek tego

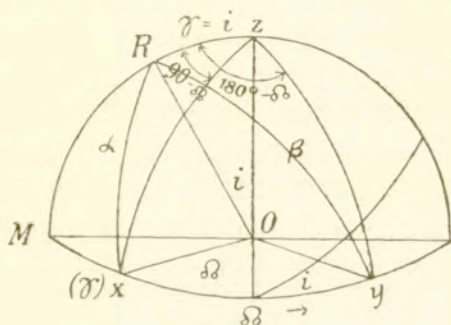
$$(68 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = c \sin i \sin \Omega \\ c_2 = -c \sin i \cos \Omega \\ c_3 = c \cos i, \end{array} \right.$$

przyczem c ma wartość podaną we wzorze (67). Jednocześnie widzimy, że można napisać wzór (28), t. j. równanie płaszczyzny orbity w postaci:

$$(70) \quad \sin i (x \sin \Omega - y \cos \Omega) + z \cos i = 0.$$

¹⁾ Zaraz widać, że odległość kątowa od M do x wynosi: $90^\circ - \Omega$, a od M do y : $180^\circ - \Omega$.

Przypatrzmy się wzorom (68 bis) mając jednocześnie na uwadze wzór (67). Spostrzeżemy, że stałe c_1, c_2, c_3 zależą po części od takich wielkości jak $m_1 + m_2$ i a , które figurowały już w innych stałych całkowania, mianowicie w h , po części zaś od wielkości, które w innych stałych całkowania nie figurują, jakoto od mimośrod e , od kąta Ω oraz od i , a które wyznaczają położenie płaszczyzny orbity względem osi współrzędnych x, y, z . Przyjmijmy, że płaszczyzna xy ($z=0$) to płaszczyzna ekliptyki (w pewnej określonej epoce), że środek współrzędnych znajduje się w słońcu, że punkt x to punkt wiosennego porównania dnia z nocą; wtedy punkt z jest identyczny z biegunem ekliptyki Π , kąt i jest to kąt nachylenia płaszczyzny orbity do ekliptyki, zaś kąt Ω to „długość wstępującego węzła“. „Węzłami“ nazywamy te punkty, w których tak zwana



Ryc. 24.

„linia węzłów“, t. j. przecięcie płaszczyzny orbity z płaszczyzną ekliptyki przebiega sferę niebieską. „Wstępującym węzłem“ (na ryc. 24 punkt Ω) nazywamy ten, przez który planeta przechodzi z południowej półkuli nieba (względem ekliptyki) na północną, „zstępującym“ ten, w którym przechodzi z północnej półkuli na południową.

Już z rozdziału VI-go (§ 5) wiemy, że długość liczy się ze zachodu na wschód przeciw wskazówkom zegarka (dla widza stojącego na północnej stronie ekliptyki). Kąt i uważamy za dodatni i mniejszy od 90° , jeżeli rozpatrywane ciało krąży naokoło słońca tak samo jak ziemia „ruchem prostym“ [*mouvement direct*], t. j. przeciw wskazówkom zegarka. Jeżeli ciało krąży „ruchem wstecznym“ [*mouvement rétrograde*], t. j. za wskazówkami zegarka ¹⁾, to kąt i jest

¹⁾ Zatem rysunek 24 odpowiada przypadkowi „ruchu prostego“. W systemie słonecznym „ruchem wstecznym“ krążą satelity Neptuna, Uranusa, jeden ze satelitów Saturna (Phoebe), ósmy księżyc Jowisza, wiele komet i rojów meteorytowych.

zawarty między 90° a 180° . Kątów zawartych między 180° a 360° rozważać nie potrzebujemy, bo wtedy i odnosiłoby się do zstępującego węzła; tymczasem uważamy „węzeł wstępujący“ za miarodajny.

Teraz zużytkujemy nieokreślony dotychczas kąt $\tilde{\omega}$. Załóżmy, że u to „argument szerokości“, t. j. kąt liczony w orbicie od węzła wstępującego Ω w kierunku obiegu planety; wtedy $\tilde{\omega}$ będzie to „argument szerokości perihelium“, inaczej mówiąc, będzie to kąt pomiędzy tą stroną linii węzłów, która idzie ku wstępującemu węzłowi a tą stroną linii absydów, która idzie ku perihelium. Będzie to zatem kąt zupełnie określony, wyznaczający położenie linii absydów względem linii węzłów. — W astronomii istnieje dawny zwyczaj, aby podawać nie kąt $\tilde{\omega}$ a sumę $\Omega + \tilde{\omega} = \pi$, zwaną „długością perihelium w orbicie“. Zwyczaj ten nie jest bynajmniej racjonalny, bo kąt Ω liczy się w płaszczyźnie ekliptyki, a kąt $\tilde{\omega}$ w płaszczyźnie orbity, ale astronomowie nie lubią zrywać z dawnymi tradycjami. Tak samo nazywają „długością planety w orbicie“ sumę

$$\Omega + u = \pi + v.$$

Tedy zamiast sześciu pierwotnych stałych całkowania: h , c_1 , c_2 , c_3 , $\tilde{\omega}$ i t_0 mamy również sześć stałych:

$$\Omega, i, \pi, a, e \text{ oraz } t_0,$$

których funkcjami są tamte pierwotne stałe i które nazywamy „elementami orbity“. Elementy orbity określają w zupełności położenie planety, bo Ω i i określają położenie płaszczyzny orbity względem ekliptyki, π określa położenie linii absydów, t. j. głównej osi orbity w jej własnej płaszczyźnie, a i e dają rozmiary orbity, zaś mając t_0 można dla każdej chwili czasu znaleźć położenie planety na orbicie. Wprawdzie do tego trzeba mieć anomalie prawdziwą, albo przynajmniej mimośrodową¹⁾, my zaś posiadamy tylko anomalie średnią, która jest proporcjonalna do czasu; ale znajdziemy anomalie mimośrodową rozwiązując równanie Keplera, poczem łatwo już przejdziemy do anomalii prawdziwej. Dla obliczenia średniej anomalii $M = n(t - t_0)$ potrzebny jest ruch średni n ,

¹⁾ Znajomość anomalii mimośrodowej wystarcza, bo możemy z jej pomocą obliczyć współrzędne prostokątne.

lecz ten ostatni jest zupełnie określony przez elementy orbity. Rzeczywiście wedle równania (61 bis) w § 10

$$n = k \sqrt{\frac{(m + m_1)}{a^3}}. \quad \left. \vphantom{n = k \sqrt{\frac{(m + m_1)}{a^3}}} \right\} \quad (61 \text{ ter})$$

Po prawej stronie oprócz a , które jest jednym z danych elementów, stoi tylko k i $m + m_1$. Otóż przyjmując na k wartość Gaussa „eo ipso“ przyjmujemy $m = 1$, zaś m_1 jest we wszystkich zastosowaniach¹⁾ zupełnie znikome wobec m . Zatem skoro a jest znane, to „eo ipso“ znanym jest też „ruch średni“ n . Zauważymy wreszcie, że dla dogodności częstokroć kładą:

$$e = \sin \varphi, \quad (71)$$

gdzie φ jest to zawsze kąt ostry. Odpowiednio do tego piszą:

$$\sqrt{1 - e^2} = \cos \varphi \text{ i t. d.}$$

Gdy orbita jest paraboliczną, to jeden z elementów jest z góry dany, bo wtedy $e = 1$ ($\varphi = 90^\circ$), pozostaje zatem do określenia pięć elementów. Jednocześnie także a ma z góry daną wartość ($a = \infty$), ale zato „parametr“ p określony przez drugie równanie (34)

$$p = a(1 - e^2) = \left(\frac{c}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{m + m_1}$$

pozostaje skończony i on to albo, co na jedno wychodzi, odległość od ogniska do perihelium: $q = \frac{1}{2}p$ występuje zamiast a jako piąty element orbity²⁾. Rolę równania Keplera odgrywa w tym razie sześcienné równanie (46).

15. Heliocentryczne i geocentryczne współrzędne planety (lub komety). Stałe Gaussa.

Na podstawie tego, co było powiedziane w poprzednim paragrafie, łatwo napisać wyrażenia na współrzędne prostokątne, heliocentryczne, ekliptyczne planety lub komety. Wiemy już, że mając

¹⁾ Przecie obliczamy zawsze albo orbity komet, albo orbity małych teleskopicznych planet.

²⁾ Związek: $q = \frac{1}{2}p$ jest właściwy tylko paraboli!

„elementy orbity“ możemy dla każdej chwili czasu obliczyć v i r . Zakładamy tedy, że prócz elementów orbity znane są v (anomalja prawdziwa) i r (promień wodzący ze słońca) planety. Oprócz tego zakładamy chwilowo, że oś x współrzędnych ekliptycznych, heliocentrycznych przechodzi przez węzeł wstępujący planety \varOmega (patrz ryc. 24). W takim razie dogodnie jest posługiwać się „argumentem szerokości“ t. j. kątem u liczonym tak jak w poprzednim paragrafie od linii węzłów. Też z poprzedniego paragrafu wiemy, że

$$(72) \quad u = \tilde{\omega} + v = \pi - \varOmega + v.$$

Z ryc. 24 zaraz¹⁾ widać, że

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \\ y &= r \sin u \cos i \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned}$$

Ale wedle powszechnego zwyczaj u we współrzędnych ekliptycznych oś x powinna przechodzić przez punkt wiosennego porównania dnia z nocą. Ponieważ nasza oś z jest prostopadła do ekliptyki a osie x i y leżą w ekliptyce, więc trzeba tylko obrócić te ostatnie osie w ich własnej płaszczyźnie o kąt $-\varOmega$ [dla tego *minus*, że musimy wykonać ruch wsteczny].

Jeżeli więc oznaczymy nowe współrzędne przez x', y', z' , to będziemy mieli związki

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varOmega - y \sin \varOmega \\ y' &= x \sin \varOmega + y \cos \varOmega \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Podstawiając wartości na x, y, z a następnie pomijając kreski jako niepotrzebne otrzymamy następujące wzory na współrzędne ekliptyczne, heliocentryczne zwyczajne (t. j. takie, w których dodatnia oś x jest skierowana ku wiosennemu porównaniu dnia z nocą)

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= r [\cos u \cos \varOmega - \sin u \sin \varOmega \cos i] \\ y &= r [\cos u \sin \varOmega + \sin u \cos \varOmega \cos i] \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \right.$$

¹⁾ Trzeba tylko pamiętać, że wedle umowy oś x przechodzi przez punkt \varOmega .

Przejdźmy teraz od współrzędnych ekliptycznych, heliocentrycznych do heliocentrycznych, równikowych. Oś x pozostanie niezmieniona, ale osie y i z trzeba obrócić w ich własnej płaszczyźnie o kąt $-\varepsilon$, gdzie ε oznacza nachylenie ekliptyki względem równika¹⁾. Postępujemy tedy zupełnie tak samo jak w poprzednim przypadku, tylko zamiast kąta Ω mamy kąt ε , zaś transformacja dotyczy nie współrzędnych x i y , a współrzędnych y i z . Po uporządkowaniu otrzymujemy następujące wyrażenia na współrzędne równikowe, heliocentryczne:

$$\left. \begin{aligned} x &= r [\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i] \\ y &= r [\cos u \sin \Omega \cos \varepsilon + \sin u (\cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon)] \\ z &= r [\cos u \sin \Omega \sin \varepsilon + \sin u (\cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon)]. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Jeżeli wreszcie zechcemy przenieść środek współrzędnych do środka ziemi, t. j. otrzymać współrzędne równikowe, geocentryczne, to dość dodać do współrzędnych (74) współrzędne prostokątne równikowe słońca względem ziemi, które są na każdy dzień podane w efemerydach. Oznaczając te ostatnie przez X, Y, Z a współrzędne geocentryczne, równikowe planety przez ξ, η, ζ otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + X \\ \eta &= y + Y \\ \zeta &= z + Z. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Jeżeli zaś oznaczymy odległość planety od ziemi przez Δ a jej geocentryczną deklinację i rektascensję przez α i δ , to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cos \delta \cos \alpha &= \xi = x + X \\ \Delta \cos \delta \sin \alpha &= \eta = y + Y \\ \Delta \sin \delta &= \zeta = z + Z. \end{aligned} \right\} \quad (75 \text{ bis})$$

Rozumie się, że tak we wzorach (75) jak we wzorach (75 bis) należy wyrazić x, y, z przez wartości podane we wzorach (74). Ale

¹⁾ Gdybyśmy chcieli przejść od osi równikowych do ekliptycznych, to musielibyśmy obrócić osie y i z o kąt $+\varepsilon$; tu przechodzimy od osi ekliptycznych do równikowych, musimy zatem dokonać obrotu we wręcz przeciwnym kierunku, t. j. o kąt $-\varepsilon$.

wzory te są niedogodne do rachunku logarytmicznego; aby je lepiej do logarytmowania przysposobić, położmy najpierw

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \Omega \cos i = n \cos N \\ \sin i = n \sin N, \end{array} \right.$$

a następnie

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \Omega = a \sin A \\ - \cos i \sin \Omega = a \cos A \\ \sin \Omega \cos \varepsilon = b \sin B \\ \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon = n \cos (N + \varepsilon) = b \cos B \\ \sin \Omega \sin \varepsilon = c \sin C \\ \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon + \sin i \sin \varepsilon = n \sin (N + \varepsilon) = c \cos C. \end{array} \right.$$

Podstawiając wartości ze wzorów (77) w (74) przekształcimy te ostatnie na

$$(74 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = ra \sin (u + A) \\ y = rb \sin (u + B) \\ z = rc \sin (u + C). \end{array} \right.$$

Wielkości A, B, C, a, b, c ¹⁾ jako zależne tylko od elementów orbity i od nachylenia ekliptyki ε są dla danej orbity stałe, noszą one nazwę stałych Gaussa. Dogodnie jest założyć, że a, b, c , a tak samo n w pomocniczych wzorach (76) są dodatnie (zresztą będą one zawsze mniejsze od 1), wtedy kąty A, B, C i N będą zupełnie określone.

W razie, gdy orbita jest eliptyczna, dogodnie jest wprowadzić anomalię mimośrodową E , aby uniknąć obliczania anomalii prawdziwej v . W tym celu podstawmy znowu zamiast „argumentu szerokości“ u jego wartość ze wzoru (72), mianowicie

$$u = \tilde{\omega} + v.$$

Stałą $\tilde{\omega}$ połączmy ze stałymi A, B, C kładąc np.

$$A' = \tilde{\omega} + A, \quad B' = \tilde{\omega} + B, \quad C' = \tilde{\omega} + C.$$

Wtedy np.

$$\sin (u + A) = \sin (A' + v) = \sin A' \cos v + \cos A' \sin v \dots \text{ i t. d.}$$

¹⁾ Naturalnie nie należy łączyć stałej Gaussa a z połową wielkiej osi elipsy!

Widzimy stąd, że po prawej stronie równań (74 bis) pojawiają się iloczyny: $r \cos v$ i $r \sin v$, które można wyrugować za pomocą wzoru (37) i drugiego wzoru (36). Jeżeli jeszcze w tych dwóch wzorach podstawimy $e = \sin \varphi$ (por. wzór 71), to otrzymamy

$$r \cos v = a (\cos E - \sin \varphi), \quad r \sin v = a \cos \varphi \sin E. \quad (78)$$

Samo rugowanie i następczające się potem zupełnie oczywiste redukuje pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Literatura.

Oprócz dzieł wyżej wymienionych: J. Kowalczyk: O sposobach wyznaczenia biegu ciał niebieskich (str. 414 + LXXIII). Kraków 1889.

ROZDZIAŁ XIV.

Pozorny ruch planet. Elementy planet głównych.

1. Pozorny ruch planet¹⁾.

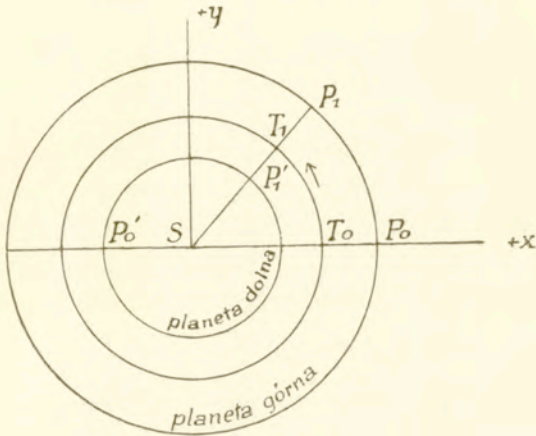
Podczas gdy pozorny ruch słońca po niebie oprócz niezna-
cznych zmian prędkości nie przedstawia nic osobliwego, pozorny
ruch planet jest wcale zawiły. Siedem wielkich planet oraz liczne²⁾
planety teleskopiczne (planetoidy) poruszają się zawsze w pobliżu
ekliptyki. Stąd wynika, że szerokości planet i planetoid są zawsze
małe i zawarte w stosunkowo ciasnych granicach, natomiast dłu-
gości geocentryczne wogóle wzrastają bezgranicznie, ale nie nieu-
stannie, bo są takie okresy czasu, w których długości zmniejszają
się [cofanie się]. Jednocześnie planety wewnętrzne (albo dolne),
t. j. Merkury i Wenus trzymają się w pobliżu słońca; pozostałe zaś
[górne albo zewnętrzne planety] bywają na wszelkich (kątowych)
odległościach od słońca. Jeżeli długość planety jest równa długości
słońca, albo, co na jedno wychodzi, o 360° , 720° i t. d. większa
lub mniejsza, to mówimy, że planeta jest w „konjunkcyi“ ze słoń-
cem; jeżeli długość planety różni się od długości słońca o 180°
(a więc także o 540° , 900° i t. d.), to mówimy, że jest w „opozyc-
cyi“ ze słońcem; jeżeli wreszcie różni się o 90° [450° , 810°] albo
 270° [630° , 990° ,...], to mówimy, że jest w „kwadraturze“ ze słoń-
cem. Planety dolne bywają tylko w konjunkcyi ze słońcem, górne
bywają w konjunkcyi, opozycyi i kwadraturach. Gdy planeta
w czasie konjunkcyi znajduje się między słońcem a ziemią, to mó-
wimy, że konjunkcyja jest „dolną“, gdy znajduje się po drugiej
stronie słońca, to mówimy, że konjunkcyja jest górną. Oczywiście

¹⁾ Większa część tego paragrafu jest naśladowaniem § 112 II-go tomu
„Cours d'astronomie“ B. Baillaud, Paryż 1896.

²⁾ Obecnie (Luty 1912) znamy około 700 planetoid.

górne planety mogą bywać tylko w górnej konjunkcyi a dolne mogą bywać i w dolnej i w górnej. Około czasu opozycyi planety są najlepiej widzialne, przechodzą bowiem przez południk około północy. Jest to zatem czas najdogodniejszy do obserwacyi. Małe planety bywają zazwyczaj odkrywane też około czasu opozycyi.

Pozorny ruch planet na sklepieniu niebieskiem jest nieregularny [stąd nazwa grecka *πλανήτης* od *πλανάω* = błędzę], to przyspieszony, to zwolniony¹⁾, to nawet wsteczny; pozorne ich drogi mają punkty podwójne, inaczej mówiąc tworzą jakby pętlice. Zaslugą Kopernika tak jak niegdyś Arystarcha ze Samosu



Ryc. 25.

było właśnie to, że zrozumiał on, iż wszystkie osobliwości pozornego ruchu planet dadzą się wytłómaczyć w prosty sposób, jeżeli założymy, że w środku systemu znajduje się słońce a wszystkie planety i ziemia krążą naokoło słońca z różnemi prędkościami. Zresztą Kopernik sądził, że ziemia i planety krążą ruchem jednostajnym po kołach. Wystarcza to do jakościowego objaśnienia wszystkich osobliwości ruchu planet, to też w celu czysto jakościowego objaśnienia pozornego ruchu planet nietylko przyjmujemy hipotezę Kopernika, ale dodamy nawet jeszcze drugie upraszczające założenie: przypuścimy, że orbity planet i ziemi leżą w jednej

¹⁾ Niekiedy planeta jest przez pewien czas jakby nieruchoma, t. j. ruch jej względem gwiazd jest prawie niedostrzegalny. Starożytni i średniowieczni astronomowie nazywali to: „postojem“, „stacyą“ planety.

i tej samej płaszczyźnie. Oznaczmy przez a promień orbity ziemskiej (uważanej za koło) a przez a_1 promień orbity jakiej innej planety. Jako chwilę $t = 0$ weźmy tę chwilę, w której ziemia i uważana planeta znajdują się na jednej prostej ze słońcem i po tej samej jego stronie. Powyższą prostą przyjmujemy za oś x kierując dodatnią jej stronę ku ziemi, środek współrzędnych umieścimy w słońcu a oś y umieścimy tak, aby od dodatniej strony osi x do dodatniej strony osi y można było przejść przez obrót o 90° w kierunku ruchu planety. Oznaczamy wreszcie przez n średni ruch ziemi a przez n_1 średni ruch planety. Oczywiście w tym idealnym przykładzie średni ruch jest identyczny z rzeczywistą prędkością kątową ziemi, względnie planety. Współrzędne prostokątne ziemi w chwili czasu t będą:

$$x = a \cos nt, \quad y = a \sin nt,$$

a planety

$$x = a_1 \cos n_1 t, \quad y = a_1 \sin n_1 t.$$

Skoro więc przeniesiemy środek współrzędnych do ziemi, to współrzędne planety będą:

$$\begin{aligned} x_1 - x &= a_1 \cos n_1 t - a \cos nt \\ y_1 - y &= a_1 \sin n_1 t - a \sin nt. \end{aligned}$$

Jeżeli oznaczymy przez Δ odległość planety od ziemi a przez λ jej geocentryczną długość liczoną od prostej Sx , to będziemy mieli

$$x_1 - x = \Delta \cos \lambda, \quad y_1 - y = \Delta \sin \lambda.$$

Stąd wynika

$$\begin{aligned} \Delta \cos \lambda &= a_1 \cos n_1 t - a \cos nt \\ \Delta \sin \lambda &= a_1 \sin n_1 t - a \sin nt, \end{aligned}$$

a wreszcie

$$(1) \quad \text{tang } \lambda = \frac{a_1 \sin n_1 t - a \sin nt}{a_1 \cos n_1 t - a \cos nt}.$$

Różniczkując to równanie względem t otrzymamy z łatwością

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{na^2 - (n + n_1)aa_1 \cos(n - n_1)t + n_1a_1^2}{a^2 - 2aa_1 \cos(n - n_1)t + a_1^2}.$$

Można stąd wyrugować a_1 za pomocą trzeciego prawa Keplera: mianowicie ze wzoru (62) skombinowanego ze wzorem (44) wynika:

$$a_1 = a \left(\frac{n}{n_1} \right)^{2/3}.$$

Po podstawieniu tej wartości i po skróceniu przez a znajdziemy:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{nn_1^{4/3} - (n + n_1)n^{2/3}n_1^{2/3} \cos(n - n_1)t + n_1n^{4/3}}{n^{4/3} - 2n^{2/3}n_1^{2/3} \cos(n - n_1)t + n_1^{4/3}}. \quad (2)$$

Mianownik ułamka stojącego po prawej stronie jest zawsze dodatni, bo oznacza pewną odległość, ale licznik może być zarówno dodatni jak ujemny. Zobaczmy, kiedy licznik zmienia znak i w jakich warunkach jest dodatni, a w jakich ujemny. Ponieważ n i n_1 są z natury rzeczy zawsze dodatnie, więc licznik zmienia znak wtedy, gdy

$$n^{1/3}n_1^{2/3} - (n + n_1) \cos(n - n_1)t + n^{2/3}n_1^{1/3} = 0.$$

Oczywiście jest to możliwe tylko wtedy, gdy \cos sinus jest dodatni, jeżeli więc oznaczymy przez ω pewien dodatni kąt mniejszy od 90° , to możemy powiedzieć, że powyższe równanie jest spełnione ilekroć

$$(n - n_1)t = 2k\pi \pm \omega$$

$$[k = \dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots],$$

przyczem ω jest to kąt ostry określony przez równanie

$$\cos \omega = \frac{(nn_1)^{1/3} (n^{1/3} + n_1^{1/3})}{n + n_1} = \frac{(nn_1)^{1/3}}{n^{2/3} - (nn_1)^{1/3} + n_1^{2/3}}. \quad (3)$$

Prawa strona równania (3) jest zawsze dodatnia i zawsze mniejsza od jedności, przeto licznik ułamka (2) zawsze zmienia znak i $\frac{d\lambda}{dt}$ jest zawsze ujemne w odstępach czasu zawartych między

$$(n - n_1)t = 2k\pi - \omega$$

a

$$(n - n_1)t = 2k\pi + \omega.$$

Przeto w tych odstępach czasu długość planety zmniejsza się, planeta cofa się po niebie, t. j. posuwa się od wschodu na zachód.

Chwile, w których $\frac{d\lambda}{dt}$ zmienia znak, są to chwile „postoju“ (chwile, gdy planeta jest „stacyonarną“). Pośrodku okresu cofania się

$$(n - n_1)t = 2k\pi.$$

A zatem tak górne jak dolne planety pośrodku okresu cofania się znajdują się na jednej prostej ze słońcem i po tej samej jego stronie co ziemia. Ale (patrz ryc. 25) ze ziemi widzimy górną planetę na przeciwnej stronie nieba jak słońce t. j. w opozycji ze słońcem a dolną na tej samej stronie nieba co słońce, zatem widzimy ją w konjunktce i to w konjunktce dolnej¹⁾, bo planeta znajduje się pomiędzy ziemią a słońcem. Mamy więc ogólną regułę: Okres cofania się towarzyszy opozycji u planet górnych, zaś dolnej konjunktce u planet dolnych.

2. Oddalanie się i zbliżanie się do słońca. Obieg synodyczny i gwiazdowy.

Weźmy teraz trójkąt płaski: słońce, ziemia, planeta. Oznaczmy kąt przy ziemi przez z , kąt przy słońcu przez α , a przy planecie przez β . Ze znanego twierdzenia „sinusów“ wynika:

$$\frac{\sin z}{a_1} = \frac{\sin \beta}{a}$$

ale

$$\beta = \pi - (\alpha + z)$$

więc

$$\frac{\sin z}{a_1} = \frac{\sin(\pi - \alpha - z)}{a} = \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos z - \cos(\pi - \alpha) \sin z}{a}$$

Stąd

$$\text{tang } z = \frac{a_1 \sin(\pi - \alpha)}{a + a_1 \cos(\pi - \alpha)}$$

¹⁾ Przymiotniki: „górnny, dolny“ są zabytkiem z dawnych czasów: używane były w tem znaczeniu, w jakim my mówimy: „daleki, bliski“. „Dolna planeta“ to planeta bliższa słońca niż ziemia, „dolna konjunktka“ to ta konjunktka, w czasie której planeta jest bliżej ziemi niż słońce i t. d. Jeszcze w XVI, XVII wieku mówiono „najwyższe gwiazdy“ w tem znaczeniu, w jakim my mówimy „najdalsze gwiazdy“.

Lecz

$$n_1 t = nt + \alpha,$$

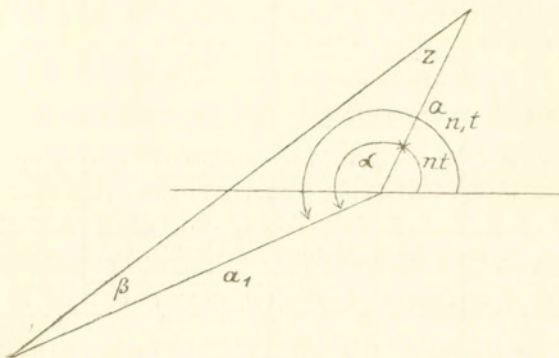
przeto

$$\pi - \alpha = \pi + (n - n_1) t$$

i równanie poprzednie przechodzi w

$$\operatorname{tang} z = \frac{-a_1 \sin (n - n_1) t}{a - a_1 \cos (n - n_1) t}. \quad (4)$$

Dla planet dolnych $a_1 < a$, przeto mianownik nie może stać się zerem, $\operatorname{tang} z$ nie może osiągnąć ani wartości $+\infty$, ani war-



Ryc. 26.

tości $-\infty$, a z nie może osiągnąć ani wartości 90° , ani wartości -90° . To znaczy, że planeta dolna nie może być ani w opozycji, ani w kwadraturze ze słońcem, możebną jest tylko konjunkcja. Dla planet górnych $a_1 > a$, więc mianownik przechodzi przez zero, $\operatorname{tang} z$ może przybierać wszelkie możliwe wartości, zatem z może przybierać wszelkie wartości od $z=0$ do $z=360^\circ$. To znaczy, że górna planeta może być w kwadraturach i opozycji tak samo jak w konjunkcji ze słońcem.

Pierwiastki równania

$$a - a_1 \cos (n - n_1) t = 0 \quad (5)$$

odpowiadają kwadraturom, można je zaś wyrazić w następujący sposób:

$$(n - n_1) t = 2k\pi \pm \omega_1,$$

gdzie ω_1 jest to kąt ostry określony przez równanie

$$(6) \quad \cos \omega_1 = \frac{a}{a_1} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^{2/3}.$$

Porównując ten wzór ze wzorem (3) łatwo spostrzeżemy, że z powodu nierówności $n > n_1$, która ma miejsce dla planet górnych

$$\cos \omega > \cos \omega_1,$$

przeto odwrotnie

$$\omega_1 > \omega,$$

a więc górna planeta wprzód bywa w kwadraturze a potem dopiero poczyna cofać się, oraz wzajemnie wprzód przestaje cofać się a potem dopiero bywa w kwadraturze ze słońcem.

Zobaczmy jeszcze, jak kąt z zmienia się z czasem. Ze wzoru (4) zaraz wynika

$$(7) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{(n - n_1) a_1 [a_1 - a \cos(n - n_1) t]}{a^2 + a_1^2 - 2aa_1 \cos(n - n_1) t}.$$

Jasną jest rzeczą, że mianownik wzoru (7) stać się zerem nie może i że zawsze pozostaje dodatnim, przeto znak pochodnej $\frac{dz}{dt}$ zależy tylko od licznika. Dla planet dolnych $n - n_1 < 0$, przeto $(n - n_1)$ jest stale ujemne i znak pochodnej $\frac{dz}{dt}$ zależy tylko od drugiego czynnika. Ponieważ dla planet dolnych $a_1 < a$, więc równanie

$$(8) \quad a_1 - a \cos(n - n_1) t = 0$$

ma zawsze rzeczywiste pierwiastki. Możemy o niem „*mutatis mutandis*“ powiedzieć to samo, co powiedzieliśmy wyżej o równaniu (5), ale już stąd, że pierwiastki równania (8) są rzeczywiste, wynika, że u planet dolnych $\frac{dz}{dt}$ zmienia znak, że zatem

kąt z między planetą i słońcem to zmniejsza się, to powiększa się. Jeżeli zaś wrócimy do równania (4), to spostrzeżemy, że ponieważ tang z a z niem i z zmienia znak, przeto planeta oscyluje koło słońca to w tę, to w tamtą stronę. Mija się ze słońcem w czasie konjunkcyi, ilekroć $(n_1 - n)t = i\pi$ [$i = 0, 1, 2 \dots$]. W czasie konjunkcyi dolnych i jest nieparzyste. Wiemy już, że około czasu

konjunkcyi dolnych planeta „dolna“ cofa się na niebie, zaś z równania (8) wynika, że największa zachodnia „dygresya“ [oddalenie] od słońca następuje, zanim planeta pocznie cofać się, a największa wschodnia „dygresya“ następuje po chwili, w której planeta znowu poczęła poruszać się ruchem prostym ze zachodu na wschód. — Dla planet górnych $a_1 > a$, więc czynnik (8) stać się zerem nie może. Z drugiej strony dla tych planet $n > n_1$, zatem $\frac{dz}{dt}$ jest stale dodatnie, kąt z wciąż zwiększa się. Pochodzi to stąd, że słońce wciąż wyprzedza planety górne i obiegłszy dokoła nieba znów dogania je od zachodu.

Wszystkie powyżej opisane cechy pozornego ruchu można obserwować w naturze. Cała różnica między naszym przykładem a naturą zasadza się na tem, że w naturze planety krążą w płaszczyznach wprawdzie słabo nachylonych do ekliptyki, ale jednak od niej różnych, oraz na tem, że w naturze prędkości kątowne planet nie są stałe.

Dygresye Merkurego od słońca dochodzą do 18° — 32° . Odstępy czasu między dwoma powrotami do tej samej pozycyi względem słońca, czyli „obiegi synodyczne“ wynoszą od 106 do 130 dni, średnio około 116 dni. Merkury cofa się w ciągu mniej więcej 23 dni i przebiega średnio około 15° . Zaczyna się to cofanie na odległości około 20° od słońca. Dygresye Wenusy dochodzą do 50° — 53° . Odstępy czasu pomiędzy dwoma powrotami do tej samej pozycyi względem słońca, czyli „obiegi synodyczne“ wynoszą średnio około 584 dni. Cofanie się planety na niebie trwa około 42 dni, zaczyna się o jakie 32° od słońca, zaś łuk cofania się, t. j. łuk przebieżony we wstecznym kierunku wynosi około 18° . — U planet „górných“ amplituda i okres cofania się a także średni obieg synodyczny (t. j. średni odstęp czasu między dwoma identycznymi pozycyjami względem słońca) mają następujące wartości:

Planeta:	Łuk cofania się:	Okres cofania się:	Różnica między długością słońca a planety na początku cofania się:	Średni okres synodycznego obiegu:
Mars . .	18°	73 dni	152°	780 dni
Jowisz . .	11°	121 „	128°	399 „
Saturn . .	7°	139 „	121°	378 „
Uranus . .	4°	151 „	115°	369 „
Neptun . .	3°	158 „	102°	368 „

Średni okres synodycznego obiegu daje się łatwo obliczyć, skoro znane są średnie ruchy n i n_1 . Z równania (4) zaraz widać, że z jest funkcją peryodyczną o peryodzie

$$\pm \frac{360^\circ}{n - n_1}.$$

Znak $+$ odnosi się do planet górnych, a $-$ do planet dolnych. Peryod kąta z to właśnie nic innego jak średni okres synodycznego obiegu, bo po upływie tego peryodu różnica długości planety i słońca przybiera tę samą wartość. Ale w naturze zadanie przedstawia się w innej postaci, bo n_1 bezpośrednio poznać nie możemy; natomiast możemy z obserwacji określić okres synodycznego obiegu. Jeżeli więc oznaczymy średni okres synodycznego obiegu planety przez τ_1 , to w równaniu

$$(9) \quad \tau_1 = \pm \frac{360^\circ}{n - n_1}$$

znane są: τ_1 i n a n_1 jest właśnie nieznane. Skoro ze średniego synodycznego okresu τ_1 i średniego ruchu ziemi określimy n_1 , to „eo ipso“ mamy też okres prawdziwego obiegu planety naokoło słońca, czyli tak zwanego okresu „gwiazdowego“, albowiem okres ten to

$$\frac{360^\circ}{n_1}.$$

Rok gwiazdowy (por. rozdz. VII § 4) to średni okres obiegu gwiazdowego ziemi, przeto

$$\text{Rok gwiazdowy} = \frac{360^\circ}{n}.$$

3. Elementy orbit planetarnych i inne daty dotyczące planet.

Wszystkie następne daty zaczerpnąłem z „Annuaire pour 1911 publié par le Bureau des Longitudes“. Są one obliczone dla epoki: południe średnie 1 Stycznia 1900 r. w Paryżu.

Tablica I.

Planeta:	Średni ruch dzienny n (gwiazdowy):	Okres obiegu gwiazdowego w latach juliańskich i dobach średnich słonecznych:	Półowa wielkiej osi orbity a :
Merkury .	14732,4197	87,96926	0,387098
Wenus . .	5767,6698	224,70080	0,723330

Planeta:	Średni ruch dzienny n (gwiazdowy):	Okres obiegu gwiazdowego w latach juliańskich i dobach średnich słonecznych:	Połowa wielkiej osi orbity a :
Ziemia . .	3548,1929	1 rok jul. + 0,00637	1,000001
Mars . .	1886,5183	1 " " + 321,72982	1,523678
Jowisz . .	299,1284	11 " " + 314,83817	5,202555
Saturn . .	120,4548	29 " " + 166,97634	9,554747
Uranus . .	42,2309	84 " " + 7,4263	19,21814
Neptun . .	21,5350	164 " " + 280,2340	30,10957

U w a g a I. Średni ruch dzienny n jest podany tak, jak go rozumieliśmy w obecnym rozdziale, t. j. w hipotezie, że liczymy długości od nieruchomego porównania dnia z nocą.

U w a g a II. Lata juliańskie liczą, jak wiadomo, po 365,25 dni, rok tropiczny zwrotnikowy: 365,24219 dni.

U w a g a III. Połowy wielkich osi są wyrażone w jednostkach astronomicznych [por. rozdz. XIII, § 11], przy obliczeniu ich nie uwzględniono perturbacji zależnych od przyciągania innych planet.

Tablica II.

Merkury.

$$\begin{aligned} \pi + v^1) &= 182^\circ 14' 41'',4 + 538106655'',62 t + 1'',129 t^2 \\ \pi^2) &= 75 53 49,5 + 5592,49 t + 1,111 t^2 \\ \Omega^3) &= 47 8 40,8 + 4265,13 t + 0,835 t^2 \\ i^4) &= 7 0 10,9 + 6,26 t - 0,056 t^2 \\ e^5) &= 0,2056147 + 0,00001990 t - 0,00000004 t^2 \end{aligned}$$

Wenus.

$$\begin{aligned} \pi + v &= 344^\circ 21' 33'',3 + 210669166'',17 t + 1'',129 t^2 \\ \pi &= 130 8 27,5 + 4940,30 t - 5,930 t^2 \\ \Omega &= 75 47 16,7 + 3290,50 t + 1,508 t^2 \\ i &= 3 23 37,1 + 4,51 t - 0,016 t^2 \\ e &= 0,0068164 - 0,00005397 t + 0,00000013 t^2 \end{aligned}$$

-
- 1) Średnia tropiczna długość planety.
 - 2) " " " perihelium.
 - 3) " " " węzła wstępującego.
 - 4) Nachylenie płaszczyzny orbity do ekliptyki.
 - 5) Mimośród.

Ziemia.

$$\begin{aligned} \pi + v &= 100^{\circ} 40' 33,7 + 129602768,95 t + 1,107 t^2 \\ \pi &= 101 13 6,8 + 6171,77 t + 1,823 t^2 \\ e &= 0,0167490 - 0,00004257 t - 0,0000014 t^2 \end{aligned}$$

Mars.

$$\begin{aligned} \pi + v &= 294^{\circ} 15' 40,7 + 68910106,51 t + 1,134 t^2 \\ \pi &= 334 13 5,7 + 6625,42 t + 1,209 t^2 \\ \Omega &= 48 47 12,6 + 2797,00 t - 2,170 t^2 \\ i &= 1 51 1,1 - 2,34 t + 0,094 t^2 \\ e &= 0,0933086 + 0,00009499 t - 0,00000012 t^2 \end{aligned}$$

Jowisz.

$$\begin{aligned} \pi + v &= 238^{\circ} 7' 44,2 + 10930688,42 t + 1,205 t^2 & - 0,0059 t^3 \\ \pi &= 12 43 13,5 + 5793,93 t + 3,594 t^2 & - 0,0173 t^3 \\ \Omega &= 99 26 35,3 + 3637,91 t + 1,268 t^2 & - 0,0306 t^3 \\ i &= 1 18 31,1 - 20,51 t + 0,014 t^2 \\ e &= 0,0483162 + 0,00016600 t - 0,00000047 t^2 - 0,000000002 t^3 \end{aligned}$$

Saturn.

$$\begin{aligned} \pi + v &= 266^{\circ} 35' 51,3 + 4404635,58 t + 1,168 t^2 & - 0,0021 t^3 \\ \pi &= 91 5 52,8 + 7050,30 t + 2,975 t^2 & + 0,0166 t^3 \\ \Omega &= 112 47 25,6 + 3143,50 t - 0,548 t^2 & - 0,0191 t^3 \\ i &= 2 29 33,1 - 14,11 t - 0,056 t^2 & + 0,0002 t^3 \\ e &= 0,0558632 - 0,00034477 t - 0,00000073 t^2 + 0,000000007 t^3 \end{aligned}$$

Uranus.

$$\begin{aligned} \pi + v &= 244^{\circ} 12' 32,7 + 1547508,77 t + 1,138 t^2 & - 0,0022 t^3 \\ \pi &= 171 32 55,1 + 5343,96 t + 0,854 t^2 & - 0,0022 t^3 \\ \Omega &= 73 28 36,4 + 1795,20 t + 4,722 t^2 \\ i &= 0 46 20,9 + 2,25 t + 0,142 t^2 \\ e &= 0,0463278 - 0,00002655 t + 0,000000077 t^2 \end{aligned}$$

Neptun.

$$\begin{aligned} \pi + v &= 84^{\circ} 27' 50,0 + 791589,29 t + 1,154 t^2 & - 0,0022 t^3 \\ \pi &= 46 43 38,2 + 5128,47 t + 1,407 t^2 & - 0,0022 t^3 \\ \Omega &= 130 40 52,8 + 3956,17 t + 0,899 t^2 & - 0,0170 t^3 \\ i &= 1 46 45,3 - 34,36 t - 0,033 t^2 \\ e &= 0,0089969 + 0,00000633 t - 0,000000002 t^3 \end{aligned}$$

U w a g a I. Ponieważ wszystkie elementy są podane dla pewnej określonej epoki, więc zamiast epoki przejścia przez perihelium t_0 podana jest długość samej planety $\pi + v$ w epoce: średnie południe w Paryżu pierwszego Stycznia 1900 r.

U w a g a II. Ponieważ ziemia sama krąży w ekliptyce, więc w tabliczce odnoszącej się do ziemi odpadło nachylenie płaszczyzny orbity do ekliptyki i i długość węzła drogi na ekliptyce Ω .

U w a g a III. Podane w tablicy II długości nazwaliśmy „średniemi tropicznemi“, co znaczy, że te długości są liczone od ruchomego punktu porównania dnia z nocą [por. rozdział XI-ty], przyczem jednakże uwzględniono tylko przesuwanie się porównania wskutek precesyi, a drobne peryodyczne przesunięcia zależne od nutacyi pominięto. Kąt π jest liczony tak, jak to wyjaśniliśmy w § 15 poprzedniego rozdziału.

U w a g a IV. Wszystkie elementy są podane dla jednej epoki: śr. południe w Paryżu 1 Stycznia 1900 r.; jednakże, aby umożliwić dokładne obliczenie elementów dla innych epok, podane są zmiany z czasem, przyczem czas t jest liczony w stuleciach juliańskich [po 36525 dni] od tejże samej epoki 1900,0. Zatem chcąc mieć wartość pewnego elementu właśnie w tej początkowej epoce należy poprostu położyć $t=0$, chcąc zaś mieć ją dla innej epoki należy wyrazić czas upłyniony jako ułamek juliańskiego stulecia, więc np. 4 Lutego 1912 r. w średnie paryskie południe [por. rozdział VII-my § 4] należy położyć

$$t = \frac{4417}{36525} = 0,12065 \dots$$

Że długość samej planety jest zmienna, to nikomu nie wyda się dziwne, ale że długości perihelium i węzła wstępującego, nachylenie i mimośród są także zależne od czasu, to może komu wydać się dziwnem i sprzecznem z tem, co mówiliśmy w poprzednim rozdziale. Wszak uważaliśmy tam „elementy orbity“ za stałe, za wielkości od czasu niezależne. Ale w poprzednim rozdziale rozważaliśmy zadanie „dwóch ciał“, przeto rozumowaliśmy tak, jak gdyby prócz słońca i planety nie istniało żadne inne przyciągające ciało; zaś w tablicy II figurują elementy planet słonecznego systemu, składającego się z wielu przyciągających ciał. Jeżeli więc do planet słonecznego systemu stosujemy terminologię teorii „dwóch ciał“, to chociaż przyciąganie słońca przemaga nad przyciąganiem

innych ciał i chociaż spycha je do rzędu zakłóceń, jednakże elementy planet nie mogą być od czasu niezależne. Łatwo jednak przekonać się, że zmiany ich (elementów) są nawet po setkach lat nieznaczne.

Tablica III.

Ciało:	Średnica równikowa na odległości jednostki astronom.:	Spłaszczenie:	Masa:	Czas obrotu naokoło osi:	
Merkury	6,61	—	$\frac{1}{4300000}?$	88 ^a	?
Wenus	17,55	—	$\frac{1}{412150}$	225 ^a	?
Ziemia	17,60	$\frac{1}{297}$	$\frac{1}{324439}$	23 ^h 56 ^m	4 ^s
Mars	9,35	—	$\frac{1}{3093500}$	24 37	23
Jowisz	196,00	$\frac{1}{17,11}$	$\frac{1}{1047,2}$	9 55	37
Saturn	164,77	$\frac{1}{9,12}$	$\frac{1}{3529,6}$	10 14	24
Uranus	75,02	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{24000}$	—	
Neptun	67,29	—	$\frac{1}{19700}$	—	
Słońce	1923,64	—	1	(25 ^a)	
Księżyc	4,8041	—	$\frac{1}{26442000}$	27 ^a 7 43	11

U w a g a I. Rozmiary średnic równikowych są podane na odległości jednostki astronomicznej. To znaczy, że gdyby uważane ciało znajdowało się na odległości równej jednostce astronomicznej to widzielibyśmy jego równikową średnicę pod kątem wynoszącym tyle sekund, ile podano w drugiej kolumnie. Zatem są to cyfry bezpośrednio między sobą porównywalne. Polegają one na bezpośrednich, odpowiednio zredukowanych do odległości 1 pomiarach. Ponieważ atoli pomiary te są trudne, więc rezultaty ich nie są bardzo pewne: za wyjątkiem księżyca setne są wszędzie, zaś dziesiątne, a nawet ostatnie liczby całe są we wielu przypadkach nie-

pewne. Tak np. wedle bardzo dobrych pomiarów Ambronna i Schura w Getyndze równikowa średnica słońca wynosi tylko 1920'', mianowicie:

z pomiarów Schura	wypada ¹⁾	1920,14 ± 0,040
„ Ambronna	„	1919,80 ± 0,036.

Wymiary równikowej średnicy ziemi naturalnie nie opierają się na takich samych pomiarach jak wymiary średnic pozostałych ciał. Liczba 17,60 to poprostu podwójna parallaksa słońca. Gdybyśmy zamiast parallaksy słońca przyjętej przez konferencję paryską 1896 r. [por. rozdz. IX-ty, § 3] przyjęli parallaksę Hinksa, to należałoby napisać: 17,612.

Uwaga II. Spłaszczenia słońca i księżyca są z wszelką pewnością znikome. Co do słońca, to niektórzy podejrzywają nawet, że biegunowa średnica jest, acz bardzo nieznacznie, dłuższa od równikowej. Co do planet, to podaliśmy spłaszczenia tylko w tych przypadkach, w których są mniej więcej pewne.

Uwaga III. Masy planet są wyrażone w stosunku do masy słońca, którą przyjęto za jedność. Najpewniejszą jest masa Jowisza. Obliczenia oparte na czasach obiegu satelitów [por. rozdz. XIII-ty, § 12], na perturbacjach w ruchu komet i małych teleskopicznych planet zgadzają się między sobą bardzo dobrze: po większej części dają w mianowniku 1047 z ułamkiem. Najbardziej niepewną jest masa Merkurego, albowiem satelity nie posiada, sam zaś jest tak mały, że perturbacje, które sprawia w ruchu innych planet, są nieznaczne. Właściwie tyle tylko można powiedzieć, że masa Merkurego jest zawarta między $\frac{1}{3000000}$ a $\frac{1}{10000000}$. O wiele pewniejszą jest masa Wenera, bo choć także nie posiada satelity, ale jako dużo cięższa sprawia o wiele znaczniejsze perturbacje w ruchu ziemi i innych planet. Aby pokazać granice niepewności, powiem, że Leverrier przyjmował $\frac{1}{401847}$ a Newcomb $\frac{1}{406690}$ jako masę Wenera. Dla różnych powodów, które trudno tu tłómaczyć, masy Saturna, Uranusa i Neptuna nie są dokładnie znane pomimo tego, że te planety mają satelitów. Naturalnie daleko tu od niepewności, jaka

¹⁾ Ch. L. Poor: An Investigation of the Figure of the Sun... Annals N. York Academy of Sc. tom XVIII (1908 r.) str. 400.

zachodzi w przypadku Merkurego, jednakże mianowniki ułamków wyrażających masy tych trzech planet są o całe dziesiątki (Saturn), nawet setki (Uranus, Neptun) niepewne. Pewniejszą jest masa Marsa określona z czasów obiegu jego dwóch malutkich satelitów.

Gdybyśmy przyjęli daty Newcomba¹⁾ a zarazem przyjęli stosunek masy ziemi do masy księżyca podany przez Hinksa²⁾, mianowicie 81,53, to otrzymalibyśmy: z parallaxą słońca 8",8: masa

ziemi z księżycem = $\frac{1}{328266}$, masa ziemi = $\frac{1}{332292}$ a masa księ-

życa = $\frac{1}{27091700}$, zaś z parallaxą 8",806: masa ziemi z księży-

cem = $\frac{1}{327595}$, masa ziemi = $\frac{1}{331613}$, masa księżyca = $\frac{1}{27036500}$.

Ale daty Newcomba zależą od długości sekundowego wahadła i od liniowych rozmiarów ziemi (Newcomb przyjął długość półosi równikowej podaną przez Clarke'ego), wiemy zaś [rozd. IX-ty § 1], że rozmiary liniowe ziemi są jeszcze o jaką trzydziestotysięczną swej wartości niepewne. W każdym razie masa ziemi, którą swego czasu przyjął Gauss [patrz rozdz. XIII-ty, § 11] była za małą.

Uwaga IV. Z powodu, że ani na powierzchni Merkurego, ani na powierzchni Wenusy nie można dostrzedz żadnych stałych, niezmiennych punktów, czasy obrotów tych planet są zupełnie niepewne. Rocznik „Bureau des Longitudes“ poszedł za twierdzeniem Schiaparelliego, że te planety stale zwracają się jedną stroną ku słońcu i podał czasy obrotu równe czasom obiegu, ale sam opatrzył swe daty znakami zapytania. Dla tych samych powodów nie znamy także czasów obrotu Neptuna i Uranusa. Inna sprawa ze słońcem: niema wątpliwości, że słońce, a przynajmniej dostępne obserwacyi jego powierzchniowe warstwy obracają się z różnemi kątowemi prędkościami; niema tu zatem mowy o żadnej wspólnej całemu ciału prędkości obrotu. Cyfrę 25 dni podaliśmy w nawiasie tylko dla zaznaczenia rzędu prędkości obrotu.

¹⁾ The elements of four inner planets... Washington 1895, str. 194.

²⁾ A. R. Hinks: The mass of the Moon. Monthly Notices R. Astr. Soc., tom LXX, str. 63—75. Rocznik „Bureau des Longitudes“ przyjmuje masę Hansena równą $\frac{1}{81,52}$ masy ziemi.

4. Niektóre wiadomości o satelitach.

O księżycu ziemskim mówiliśmy już w poprzednim paragrafie, tu podamy niektóre wiadomości o satelitach innych planet. Mars ma dwa księżyce odkryte 11 i 17 Sierpnia 1877 r. przez Asapha Halla i nazwane przez niego: pierwszy „Deimos“, drugi „Phobos“. Czasy obiegu wynoszą: $7^h 39^m 13^s,9$ (Phobos) i $30^h 17^m 54^s,9$ (Deimos) a połowy wielkich osi wynoszą 2,70 i 6,74 promieni równikowych planety. Widzimy stąd, że oba księżyce Marsa krążą bardzo blisko swojej planety. Masy ich są dotąd nieznanne, ale z pewnością bardzo małe. Nachylenia ich orbit do ekliptyki są prawie jednakowe, mianowicie $i = 27^\circ 28',5$ (Phobos), $27^\circ 24',4$ (Deimos). Cztery większe księżyce Jowisza: „Io, Europę, Ganymedesa“ i „Kallisto“ odkryli Galileusz i niezależnie od niego S. Marius (właściwie Mayer) w dniach 7 i 8 Stycznia 1610 r.¹⁾ Piątego księżycy odkrył Barnard 9 Września 1892 r., szóstego Perrine 3 Grudnia 1904 r., siódmego tenże Perrine 2 Stycznia 1905 r., wreszcie ósmego Melotte 17 Stycznia 1908 r. Nachylenia orbit pierwszych pięciu księżyców Jowisza są bardzo małe, szóstego i siódmego większe, a ósmego większe niż 90° , t. j. ósmy księżyc Jowisza krąży „ruchem wstecznym“. Jednocześnie ten ósmy księżyc jest najbardziej od swej planety oddalony, podczas gdy piąty jest najbliższy. Naturalnie wiadomości nasze o tych później odkrytych księżycach są szczuplejsze niż o czterech pierwszych. Są to wszystko w porównaniu z czterema pierwszymi bardzo małe ciała, np. piąty księżyc jest widzialny jako (teleskopiczna) gwiazda 13-tej wielkości, podczas gdy pierwsze cztery przedstawiają się jako gwiazdy 6-tej wielkości (przybliżenie). Oto zestawienie niektórych dat odnoszących się do satelitów Jowisza.

Tablica III. Satelity Jowisza.

Połowy wielkich osi orbit są wyrażone w taki sposób, że połowa równikowej średnicy Jowisza jest przyjęta za jedność. Tak samo jako jednostkę masy²⁾ przyjęto masę Jowisza.

¹⁾ Nie możemy tu wdawać się w kwestję pierwszeństwa: podobno rzecz się tak miała, że Galileusz odkrył wprzód, bo 7 Stycznia, ale tylko trzy (bez Europy) a S. Marius nazajutrz po nim, ale wszystkie cztery. Zresztą mniejsza o to.

²⁾ Masy satelitów V, VI, VII i VIII są z pewnością bardzo małe, masy czterech pierwszych nie są bardzo pewne. Wedle W. de Sitter'a [Publ. Astr.

	<i>i</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>T</i>	<i>m</i>
I. Jo	2° 8' 3''	—	5,933	1 ^d 18 ^h 27 ^m 33,50	0,000016877
II. Europa	1 38 57	—	9,439	3 13 13 42,04	0,000023227
III. Ganymedes	1 59 53	0,001316	15,057	7 3 42 33,39	0,000088437
IV. Kallisto	1 57 0	0,007243	26,486	16 16 32 11,20	0,000042475
V.	2 20 23	0,00501	2,55	0 11 57 22,68	—
VI.	28 56	0,156	160	251	—
VII.	31 0	0,0246	167	265	—
VIII.	148 52	0,33	357	26 miesięcy	—

Zauważmy, że mimośrod y I-go i II-go księżyc a są znikome, natomiast VI-go i VIII-go duże, mimośród VII-go księżyc a jest porównywalny z mimośrod em drogi ziemskiej.

Wkrótce po odkryciu satelitów Jowisza Galileusz spostrzegł, że Saturn ma niezwykłą postać, ale ani on, ani inni astronomowie pierwszej połowy XVII wieku nie mogli rozpoznać, co to takiego. Dopiero Huyghens (podobno w 1655 r.) domyślił się, że Saturn posiada pierścień wolno unoszący się koło planety. Odkrycie swoje ogłosił on w 1659 r. w dziele pod tyt. „Systema Saturnium“. Weześniej, bo już w 1655 r. ogłosił inne swoje odkrycie: 25 Marca 1655 r. odkrył Titana (VI) największego z księżyców Saturna. Cztery księżyc e odkrył J. D. Cassini: 25 Października 1671 r. Japeta (VIII), 23 Grudnia 1672 r. Rheę (V), a 21 Marca 1684 r. Tetydę (III) i Dione (IV). Tenże Cassini w 1675 r. spostrzegł, że pierścień Saturna jest podwójny. Mimas a (I) i Encelada (II) odkrył W. Herschel: pierwszego 18 Lipca a drugiego 29 Sierpnia 1789 r., Hyperiona (VII) odkrył G. P. Bond 16 Września 1848 r. [a we dwa dni później W. Lassell], Phoebe (IX) i Temidę (X) odkrył W. H. Pickering za pomocą fotografii. Pierwszą kliszę z Phoebe zdjął 16 Sierpnia 1898 r. a pierwszą kliszę z Temidą 16 Kwietnia 1904 r.

Możemy prawie napewno twierdzić, że pierścienie Saturna składają się z mnóstwa bardzo drobnych satelitów. Są to więc całe roje drobnych ciał tworzące jakby wieńce dokoła planety. Twierdzenie nasze opiera się na dwóch niezależnych od siebie argumentach. Z jednej strony badania nad stałością równowagi figur pierścieniowych [głównie badania J. C. Maxwella] pokazały, że ani sztywne, ani ciekłe pierścienie nie mogłyby się utrzymać. Z dru-

Laboratory Groningen Nr. 17 str. 116] masy trzech pierwszych satelitów są: 0,0000256, 0,0000231, 0,0000820.

giej strony badania spektroskopiczne [przedewszystkiem H. v. Seeliger] pokazały, że wewnętrzny brzeg każdego pierścienia ma inną kątową prędkość niż zewnętrzny. To zupełnie wyklucza hipotezę stałych pierścieni, źle godzi się z hipotezą ciekłych, a doskonale pasuje do hipotezy rojów drobnych ciał. Pierścienie Saturna są stosunkowo do pozostałych swych rozmiarów bardzo cienkie, są to więc płaskie krążki. Jeżeli przyjmiemy połowę równikowej średnicy Saturna za jedność, to promień wewnętrznego brzegu pierwszego pierścienia wynosi 1,482 a zewnętrznego 1,916, zaś promień wewnętrznego brzegu drugiego pierścienia wynosi 1,962 a zewnętrznego 2,229. Powyższe wymiary podaje O. Struve. Masę obliczył F. Tisserand na $\frac{1}{620}$ masy Saturna. Nachylenie do ekliptyki wynosi $28^{\circ}1'$, czas obrotu wedle W. Herschla $10^h 32^m 15^s$; ale wobec tego, że wewnętrzne i zewnętrzne brzegi pierścieni mają niejednakowe prędkości kątowe, cyfra Herschla ma tylko względne znaczenie.

Tablica IV. Satelity Saturna.

Połowy wielkich osi orbit są wyrażone w jednostkach równych połowie równikowej średnicy Saturna. Jako jednostkę masy przyjęto masę Saturna. Żresztą masy satelitów Saturna są bardzo niepewne.

	<i>i</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>T</i>			<i>m</i>
I. Mimas	27° 29,6	0,0190	3,07	0 ^d 22 ^h 37 ^m 5,3			0,00000007
II. Enceladus	28 4,3	0,0046	3,94	1 8 53	6,8		0,00000025
III. Tethys	28 40,5	—	4,87	1 21 18	26,2		0,00000110
IV. Dione	28 4,4	0,0020	6,25	2 17 41	9,5		0,00000187
V. Rhea	22 22,8	0,0009	8,73	4 12 25	12,2		0,00000400
VI. Titan	27 39,7	0,02886	20,22	15 22 41	27,0		0,00021277
VII. Hyperion	27 14,9	0,1291	24,49	21 6 38	23,9	<	0,00001
VIII. Japet	18 28,3	0,02836	58,91	79 7 56	22,7		—
IX. Phoebe	175 5	0,1659	214	550 10 34			—
X. Themis	39 6	0,23	24,2	20 20 24			—

Zwracamy jeszcze raz uwagę na to, że najdalszy satelita Phoebe (IX) obiega Saturna ruchem wstecznym, jest to koincydencya cech zupełnie taka sama jak u ósmego satelity Jowisza.

Dotychczas znamy cztery satelity Uranusa: Titanię i Oberona odkrytych przez W. Herschla 11 Stycznia 1787 r. oraz Ariela i Umbriela odkrytych 24 Października 1851 r. przez W. Lassella.

Wszystkie cztery poruszają się ruchem wstecznym w płaszczyznach prawie prostopadłych do ekliptyki.

Tablica V. Satelity Uranusa¹⁾.

	<i>i</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>T</i>	<i>m</i>
Ariel	97° 58'	0,020	7,04	2 ^d 12 ^h 29 ^m 21,1	—
Umbriel	98 21	0,010	9,91	4 3 27 37,2	—
Titania	97 47	0,00106	16,11	8 16 56 29,5	—
Oberon	97 54	0,00383	21,54	13 11 7 6,4	—

Jedynego dotąd znanego satelitę Neptuna odkrył W. Lassell 10 Października 1846 r. Krąży on także ruchem wstecznym, nachylenie jego orbity do ekliptyki wynosi 142° 40'. Połowa wielkiej osi orbity jest 14,73 razy większa od połowy średnicy równikowej Neptuna. Czas obiegu wynosi 5^d 21^h 2^m 38,4.

Warto porównać księżycy innych planet z księżycem ziemskim. Przedewszystkiem spostrzegamy, że żadna inna planeta nie posiada towarzysza, którego względna masa byłaby tak wielką jak względna masa księżyca. Podczas gdy stosunek masy księżyca do masy ziemi wyraża się liczbą $\frac{1}{81,53} = 0,012\dots$, stosunki mas innych księżyców do planet wyrażają się bez porównania mniejszymi liczbami. Jeżeli porównamy absolutne masy, to okaże się, że księżyc należy do najcięższych satelitów, bo przewyższają go co do masy tylko Ganimedes i Kallisto (III i IV) pomiędzy księżycami Jowisza i Titan pomiędzy satelitami Saturna. Zresztą nasz księżyc co do masy nie ustępuje tak dalece nawet jednej z głównych planet: Merkuremu. Średnica naszego księżyca równa się $\frac{8}{11}$ średnicy Merkurego a więcej niż połowie średnicy Marsa. Rozmiary liniowe Ganimedesa, Kallisto i Titana są jeszcze większe, Titan np. jest mało co mniejszy od Marsa. Następnie widzimy, że większość satelitów ma krótsze czasy obiegu niż nasz księżyc oraz że rozmiary ich orbit są w stosunku do rozmiarów planet mniejsze niż rozmiary orbity naszego księżyca.

Oprócz wymienionych tu ciał system słoneczny zawiera około 700 małych planet, krążących między orbitami Marsa i Jowisza, kilkaset komet o orbitach napewno eliptycznych i wiele rojów me-

¹⁾ Połowy wielkich osi orbit są wyrażone w jednostkach równych połowie średnicy równikowej Uranusa.

teorytowych. Liczba małych planet wciąż jeszcze powiększa się przez nowe odkrycia; tak samo poznamy z pewnością jeszcze mnóstwo nieznanych dotąd komet. Bardzo być może, że niedługo posłyszemy o odkryciu nowego satelity Jowisza, Saturna lub innej planety. Nie jest wykluczonem nawet odkrycie drugiego księżyca ziemi, ale byłoby to naturalnie jakieś bardzo małe ciało. Tak samo nie jest wykluczonem odkrycie planet poza Neptunem, choć wolno twierdzić, że prawdopodobnie byłyby to planety mniejsze od dotychczas znanych górnych planet. Możliwemi są także takie niespodzianki jak odkrycie małej planety *Eros* w 1898 r. przez G. De Witt'a. Orbita *Erosa* różni się od innych orbit planetarnych: posiada znaczne nachylenie i wielki mimośród. Większa część orbity *Erosa* leży wewnątrz orbity Marsa — mniejsza wykracza poza nią. Do ziemi *Eros* zbliża się od czasu do czasu więcej niż jakakolwiek inna planeta, bo na jakie 24 miliony km. Odkryta przez J. Palisę w Październiku 1911 r., nie mająca jeszcze nazwy planetoida 1911 M. T. zdaje się należeć do tego samego typu co *Eros*. Wedle obliczenia J. Franza w „Astr. Nachr.“ N. 4575 ta planetoida może zbliżyć się do ziemi jeszcze więcej niż *Eros*. Jest to bardzo małe ciało: średnica jego wynosi jakie 7—8 km. Wogóle wszystkie te nowo odkrywane księżyce, planety, komety i t. d. są to bardzo małe ciała. Masy ich są znikome nawet w porównaniu z masami głównych planet, cóż dopiero w porównaniu z masą słońca. Chyba tylko jakaś poza-neptunowa planeta mogłaby mieć masę porównywalną z masami głównych planet, ale wszelkie poszukiwania za takimi planetami nie doprowadziły dotąd do pożytywnego rezultatu.

Literatura.

Oprócz dzieł i rozpraw wymienionych bądź w tekście, bądź w uwagach do tekstu niniejszego rozdziału: R. Wolf: Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur, 2 tomy, Zürich 1890—1893.

W. H. Pickering: „A search for a planet beyond Neptune“ i „Statistical investigation of cometary orbits“. Annals of the astronomical observatory of Harvard College, tom LXI, część 2-ga i 3-cia.

ROZDZIAŁ XV.

Wyznaczenie orbit.

1. Metoda geometryczna.

Naturalnie nie chodzi nam o wyznaczenie orbit głównych planet, bo ruchy ich są o tyle znane, że np. współczesne obserwacje mają na celu już tylko kontrolę, względnie wydoskonalenie teorii; chodzi nam o wyznaczenie orbit nowoodkrytych komet lub małych planet.

Wyznaczamy orbity na podstawie hipotezy, że to są przecięcia stożkowe. Wprawdzie wiemy, że ściśle biorąc ani jedno ciało systemu słonecznego nie krąży po przecięciu stożkowem, ale równie dobrze wiemy, że w ogromnej większości przypadków orbity są bardzo podobne do mniej lub więcej wydłużonych elips. Przyjawszy, że orbity są przecięciami stożkowemi, w ognisku których znajduje się słońce, możemy traktować zadanie na różne sposoby, możemy np. stanąć na stanowisku czysto geometrycznem i zupełnie ignorować wszelkie dynamiczne związki.

Zapytajmy przedewszystkiem, jaka jest najmniejsza ilość obserwacji, z których można wyznaczyć orbitę czysto geometryczną metodą?

Obserwacje dają tylko kierunki; odległości planety (czy komety) pozostają nieznanne. Jedyna znana odległość, to odległość ogniska przecięcia stożkowego od ziemi, bo to ognisko znajduje się w środku słońca. Znając ją można obliczyć inne odległości z pewnych równań warunkowych; skoro zaś odległości będą znane, to będziemy mieli wszystkie trzy współrzędne każdego obserwowanego punktu orbity i zadanie sprowadzi się do znanych zadań geometrycznych. Jakie równania warunkowe można napisać? Przedewszystkiem możemy napisać równania wyrażające warunki, aby obserwowane

punkty znajdowały się w jednej i tej samej płaszczyźnie przechodzącej przez środek słońca. Ponieważ przez środek słońca i dwa dowolne punkty można zawsze przeprowadzić płaszczyznę, więc „przymus“ pojawi się dopiero wtedy, gdy napiszemy równanie wyrażające warunek, aby trzy punkty obserwowane leżały w tej samej płaszczyźnie przechodzącej przez środek słońca. Jeżeli mamy n obserwacyi, to możemy napisać $n - 2$ niezależnych od siebie równań zawierających po trzy obserwowane punkty. Następnie możemy napisać równania wyrażające warunki, aby obserwowane punkty leżały na jednym i tem samym przecięciu stożkowym mającym ognisko w środku słońca. Ponieważ ognisko i trzy punkty wyznaczają przecięcie stożkowe, więc można zawsze nakreślić przecięcie stożkowe mające dane ognisko i przechodzące przez jakiegokolwiek dane trzy punkty. Widzimy stąd, że równanie warunkowe musi wyrażać fakt, iż cztery obserwowane punkty leżą na tem samym przecięciu stożkowym mającym ognisko w środku słońca. Jeżeli mamy n obserwacyi, to niezależnych od siebie równań, zawierających po cztery obserwowane punkty możemy napisać: $n - 3$. Wnosimy stąd, że liczba równań warunkowych, które możemy napisać, jest: $n - 2 + n - 3 = 2n - 5$. Ale ponieważ ogólne równanie przecięcia stożkowego zawiera pięć niezależnych od siebie parametrów, więc potrzebujemy pięciu równań i musi być

$$2n - 5 = 5$$

skąd

$$n = 5.$$

A więc do wyznaczenia orbity metodą geometryczną trzeba mieć pięć kompletnych (t. j. dających obie sferyczne współrzędne) obserwacyi.

Założmy, że współrzędne heliocentryczne, prostokątne pięciu obserwowanych punktów orbity są:

$$x_1, y_1, z_1 \dots x_5, y_5, z_5$$

i napiszmy warunki pierwszej kategorii.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt x, y, z i przez środek słońca, t. j. przez środek współrzędnych, jest

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Ponieważ temu równaniu mają czynić zadość trzy punkty, więc napiszmy je trzykrotnie: raz dla punktu x_1, y_1, z_1 , drugi raz dla punktu x_2, y_2, z_2 , trzeci raz dla punktu x_3, y_3, z_3 i wyrugujmy z nich współczynniki A, B, C [wszystkie trzy punkty leżą w jednej płaszczyźnie, zatem A, B, C są we wszystkich trzech równaniach te same], a otrzymamy równanie warunkowe

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Równań takich jak (1), od siebie niezależnych możemy napisać jeszcze dwa, np. zmieniając wskaźniki 1, 2, 3 na 2, 3, 4, a potem na 3, 4, 5.

Zobaczmy przedewszystkiem jakiego stopnia są równania typu (1) względem niewiadomych odległości? Wszystko jedno jakie obierzemy współrzędne, ekliptyczne, czy równikowe; jednakże ze względu na to, że przy wyznaczeniu orbit zwykle posługujemy się ekliptycznymi współrzędnymi i tu przyjmujemy współrzędne ekliptyczne. Spostrzegamy zaraz, że na nicby się nie zdało wprowadzać heliocentryczną długość i szerokość, bo obserwujemy nie ze słońca a ze ziemi; trzeba więc wyrazić współrzędne prostokątne heliocentryczne ciała przez jego współrzędne geocentryczne i przez współrzędne ziemi względem słońca a potem dopiero podstawić współrzędne biegunowe zamiast prostokątnych. Piszemy tedy

$$x_h = x_g + X \text{ i t. d.},$$

podstawiamy zamiast współrzędnych prostokątnych biegunowe i otrzymujemy

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \Delta_1 \cos \beta_1 \cos \lambda_1 - R_1 \cos \odot_1 \cos B_1 \\ y_1 = \Delta_1 \cos \beta_1 \sin \lambda_1 - R_1 \sin \odot_1 \cos B_1 \\ z_1 = \Delta_1 \sin \beta_1 - R_1 \sin B_1. \end{cases}$$

Analogicznych równań dla współrzędnych pozostałych punktów wypisywać nie potrzebujemy. Przypominamy, że współrzędne ziemi względem słońca są równe współrzędnym słońca względem ziemi, tylko znaki mają przeciwne [dlatego drugie wyrazy po prawej stronie równań (2) mają znak —], następnie przypominamy, że geocentryczna szerokość słońca B jest tak mała, iż w podobnych

zadaniach można ją zawsze pominąć. Zresztą użyliśmy tego samego znakowania, co zwyczajnie, t. j. Δ oznacza odległość komety (względnie planety) od ziemi, R odległość słońca od ziemi, λ i β geocentryczną długość i szerokość komety (względnie planety), zaś \odot długość słońca. Spostrzegamy, że po prawej stronie równań (2) stoją same znane wielkości oprócz odległości Δ_1 , która jest nieznaną. Skoro zatem podstawimy w równanie (1) wartości na współrzędne z równań (2) i podobnych im, to okaże się, że równania (1) są względem $\Delta_1, \Delta_2 \dots$ i t. d. trzeciego stopnia.

Jeszcze wyższego stopnia są równania drugiej kategorii: są to sumy iloczynów odległości $\Delta_1, \Delta_2 \dots$ przez kwadratowe pierwiastki z wielomianów czwartego stopnia. P. Harzer¹⁾ oblicza, że jeżeli najwyższe wyrazy nie znoszą się, to po dokonaniem rugowania ostateczne równania, zawierające po jednej zmiennej, będą: $3^5 \cdot 2^{16}$ stopnia. O rozwiązaniu równań tak wysokiego stopnia nie można nawet marzyć, ale rozwiązanie samych pięciu równań warunkowych przez kolejne przybliżenia jest nietylko możliwe, ale nawet nie bardzo trudne. Jednakże przy kolejnych przybliżeniach występuje na jaw pewna wada, pewna niekorzystna własność geometrycznej metody. Oto wyrażenia na kolejne poprawki szukanych wielkości $\Delta_1, \Delta_2 \dots$ i t. d. przedstawiają się w postaci ułamków. W mianownikach tych ułamków figuruje wyznacznik, w którym wszystkie wyrazy niższych rzędów znoszą się a pozostają tylko wyrazy rzędów wyższych. Inaczej mówiąc, w mianowniku figurują małe różnice dużych wielkości. Dzięki tej okoliczności każdy błąd obserwacji wchodzi do poprawki *powiększony*. Wprawdzie metody mechaniczne mają tę samą wadę, ale w mniejszym stopniu, bo w metodzie geometrycznej błędy wchodzi do poprawek z małymi dzielnikami czwartego rzędu, a w metodach mechanicznych z małymi dzielnikami trzeciego rzędu. Błędy obserwacji dają się odczuć osobliwie wtedy, gdy odstęp czasu pomiędzy obserwacjami są stosunkowo do czasu obiegu małe [jak mówią astronomowie, wtedy, gdy ruch heliocentryczny jest mały], t. j. gdy punkty obserwowane leżą blisko jeden od dru-

¹⁾ Über die geometrische Methode, ... Astr. Nachr., tom CLXXXIV, str. 105—126. Podajemy tu stopień równań nie wedle błędnej liczby podanej w tekście na str. 107, ale wedle sprostowania, które Harzer podał w następnym tomie CLXXXV A. N. na str. 9.

Metoda geometryczna została opracowana właśnie przez Harzera, obecny paragraf jest poniekąd streszczeniem wyżej cytowanej jego pracy.

giego. W tym przypadku metody mechaniczne, o których będzie mowa dalej, — są dogodniejsze niżli metoda geometryczna. Ale metoda geometryczna jest niedogodna także wtedy, gdy odstępy czasu między obserwacjami są długie, t. j. gdy punkty obserwowane leżą daleko jeden od drugiego, bo wtedy daje się więcej odczuć niezgodność orbity rzeczywistej¹⁾ z przecięciem stożkowym: podczas gdy na małym kawałku przecięcie stożkowe może wcale dobrze przystawać do orbity (na nieskończenie małym kawałku możebnym jest zupełny kontakt), na długim jest to niemożliwe. Harzer sądzi, że metoda geometryczna powinna okazać się użyteczną i dogodną, gdy ruch heliocentryczny w ciągu obserwacji wynosi od $\frac{1}{8}$ do $\frac{1}{2}$ okresu obiegu [t. j. gdy obserwacje obejmują okres czasu wynoszący od $\frac{1}{8}$ do $\frac{1}{2}$ okresu obiegu]. Zresztą metoda geometryczna została wyrobiona (przez Harzera) bardzo niedawno i nie została jeszcze dostatecznie wypróbowana. Piszącemu te słowa zdaje się, że w żadnym razie nie zdoła ona wyprzeć metod mechanicznych, bo te ostatnie zostały w ostatnich czasach udoskonalone i przystosowane nawet do tych przypadków, w których musimy porzucić hipotezę, że orbita jest przecięciem stożkowym. O tych udoskonaleniach będziemy mówić niżej; tymczasem pozostaniemy przy hipotezie ruchu Keplerowskiego i zajmujemy się klasycznymi metodami „mechanicznymi“ Gaussa i Olbersa.

2. Metoda mechaniczna. Poprawki obserwacji.

W metodach mechanicznych do wyznaczenia orbity wystarczają trzy obserwacje, bo uwzględniamy związki dynamiczne rozdziału XIII-go, wskutek czego możemy przedstawić współrzędne planety jako funkcje czasu i sześciu elementów orbity (masę planetoidy lub komety można zawsze uważać za znikomą). Każda obserwacja daje wartości dwóch współrzędnych i odpowiedni czas; możemy zatem dla każdej obserwacji napisać dwa równania, w których prócz danych przez obserwację wielkości będą figurować tylko elementy orbity. Przeto trzy obserwacje dadzą sześć niezależnych równań, t. j. właśnie tyle, ile potrzeba dla określenia sześciu elementów.

¹⁾ Ta ostatnia uwaga stosuje się naturalnie tak samo do metod mechanicznych. Oprócz tego wychodzą tam na jaw kwestye zbieżności.

O ile prostą jest przewodnia myśl metody, o tyle niełatwym jest przełożenie jej na język analizy. Ponieważ związki między współrzednymi a elementami orbity nie są liniowe, ani nawet algebraiczne, więc następująca się rozmaite trudności; następnie ponieważ musimy odwracać równania, więc można z góry przewidzieć, że natrafimy na więcej rozwiązań niż na jedno. Jednakże przekonamy się niebawem, że po odrzuceniu rozwiązań urojonych, albo nieodpowiednich pozostaje jedno, niekiedy dwa rozwiązania, zaś w przypadku paraboli jedno albo trzy. W jakich przypadkach istnieje tylko jedno, a w jakich więcej rozwiązań, jak rozpoznać, które z nich odpowiada rzeczywistości, to okaże się w dalszym ciągu. Tymczasem zajmiemy się omówieniem poprawek, którym trzeba poddać obserwowane współrzedne.

Obserwacje dają widomą rektascensję i deklinację planety [lub komety], obie już poprawione na refrakcję i [zazwyczaj] na aberrację dzienną (por. rozdz. X-ty § 6). Oprócz tego dają odpowiedni czas miejscowy. Jeżeli obserwacje, z których zamierzamy wyznaczyć orbitę, były dokonane w różnych obserwatoryach, to trzeba sprowadzić czasy obserwacji do jednego południka, najlepiej do południka takiego obserwatorium, które wydaje efemerydy, bo przez to zmniejszymy sobie ilość redukcji.

Widome równikowe współrzedne są odniesione do ruchomego równika. Ze względu na równania dynamiczne, któremi mamy posługiwać się, nie możemy wiązać osi współrzednych z ruchomą płaszczyzną, trzeba łączyć je z jakąś stałą płaszczyzną. Ze względu na niektóre ułatwienia dogodniej jest wziąć stałą ekliptykę niż stały równik ¹⁾. Bierzemy tedy średnią ekliptykę z pewnej epoki, np. z początku roku za płaszczyznę fundamentalną i przekształcamy współrzedne równikowe, widome na ekliptyczne, średnie przez pośrednictwo bądź równikowych, średnich, bądź ekliptycznych, widomych. W pierwszym razie posługujemy się metodą wyłożoną w rozdziale XII tym § 2, tylko ponieważ dokonujemy redukcji wprost przeciwnej, więc poprawki będą miały znaki przeciwne. Naturalnie poprawki na ruch własny odpadną. Otrzymawszy współrzedne równikowe, średnie przechodzimy do ekliptycznych, średnich za pomocą wzorów (4) rozdz. VI-go, § 9 [właściwie za pomocą obliczal-

¹⁾ W. Klinkerfues, O. Callandreau twierdzą, że dogodniej jest wziąć stały równik.

nych przez logarytmy wzorów (4 bis)] biorąc na ε średnią jego wartość odpowiadającą obranej epoce. W drugim razie najpierw przekształcamy współrzędne równikowe, widome na ekliptyczne, widome za pomocą tychże samych wzorów (4) rozdz. VI-go, w których atoli kładziemy na ε jego widomą, chwili obserwacji odpowiadającą wartość [tak widome ε , jak średnie jest podane w efemerydach, pierwsze na każdy dzień]. Następnie odejmujemy od długości ciała niebieskiego nutację w długości N i precesję ogólną (por. rozdz. XI-ty koniec § 3 i § 4), które także znajdziemy w efemerydach. Czy w jednym, czy w drugim razie będziemy też potrzebować geocentrycznych współrzędnych słońca. I te współrzędne należy sprowadzić do obranej stałej ekliptyki. Zresztą jeżeli bierzemy stałą ekliptykę z początku roku, to znajdziemy w efemerydach już sprowadzone do niej współrzędne słońca.

Następnie należy obliczyć te momenty czasu, w których ciało niebieskie zajmowało obserwowane pozycje, t. j. trzeba odjąć „aberrację planetarną“ (por. rozdz. X-ty, § 1). Lecz jeżeli chodzi o całkiem nieznaną orbitę, to poprawek tych zrobić nie można, bo nie znamy odległości ciała niebieskiego. W takim razie musimy z początku pominąć aberrację planetarną. Innemi słowy — pozycje ciała niebieskiego będą odniesione do czasów późniejszych niż rzeczywiste. Gdyby to spóźnienie było jednakowe dla wszystkich pozycji, to nieby nie szkodziło; ale ponieważ odległości są wogóle w czasie różnych obserwacji różne, więc spóźnienia są też różne i trzeba wprowadzić poprawki na aberrację planetarną, skoro tylko znajdziemy przybliżone odległości. Co do aberracji rocznej i dziennej, które nie zależą od odległości; to poprawki na pierwszą mogą i muszą być dokonane na samym początku, zaś poprawki na aberrację dzienną prawie nigdy robić nie trzeba, albowiem przy obserwacjach południkowych obserwatorzy sami ją uwzględniają, a przy obserwacjach ekwatoryalnych, w których określamy pozycje ciała przez porównanie ze sąsiednimi gwiazdami, aberracje znoszą się same aż do zupełnie znikomych reszt. Wtedy odpadają nawet poprawki na aberrację roczną. Zresztą należy zauważyć, że redukcya do stałej ekliptyki metodą rozdz. XII-go uwzględnia aberrację roczną; jeżeli zaś robimy redukcję drugą metodą, a dane obserwacyjne nie są wolne od aberracji, to trzeba zastosować wzory (15) rozdz. X-go, w których jednakże można zazwyczaj pominąć drugie

wyrazy. Zestawiając poprawki, które należy w tym drugim przypadku wykonać, możemy napisać następujące wzory¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_a - N - P(t - T) + 20,47 \cos(\lambda_a - \odot_a) \sec \beta_a \\ \beta &= \beta_a && - 20,47 \sin(\lambda_a - \odot_a) \sin \beta_a \\ \odot &= \odot_a - N - P(t - T). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Nie potrzebujemy tłumaczyć znanych już symbolów, powiemy tylko, że literą a oznaczyliśmy współrzędne widome oraz, że P oznacza precesję ogólną, N nutację w długości, t czas obserwacji [sprowadzony już do wspólnego południka], zaś T epokę, do której odnoszą się: przyjęta przez nas stała ekliptyka i stały punkt wiosennego porównania dnia z nocą. Oczywiście jest rzeczą, że trzeci wzór (3) jest niepotrzebny, jeżeli bierzemy z efemerydy współrzędne słońca odniesione do stałej ekliptyki i stałego porównania dnia z nocą. Gdy chodzi o ciało, którego orbita jest już przybliżenie znana, to trzeba obok powyżej omówionych poprawek uwzględnić także poprawki na parallaksę, t. j. trzeba sprowadzić obserwacje do środka ziemi. Najlepiej zrobić te poprawki jeszcze przed przekształceniem współrzędnych, bo poprawki są wtedy prostsze [por. rozdz. IX-ty, § 4, wzory (20 bis)], gdy zaś mamy dane obserwacje południkowe, to poprawka w rektascensyi znika [poprawkę w deklinacyi daje wzór (22) IX-go rozdz.]. Zresztą poprawki te robią częstokroć sami obserwatorzy. Ale jeżeli orbita jest zupełnie nieznaną, to odległości i parallaksy są też nieznaną. Można wtedy w pierwszym przybliżeniu pominąć parallaksy, a skoro znajdziemy przybliżone odległości, wykonać redukcję do środka ziemi²⁾ i powtórzyć rachunki. Można też zupełnie obejść się bez redukcji do środka ziemi. Wszystko bowiem jedno, czy mamy kierunki do planety z trzech punktów orbity ziemskiej, czy też z trzech punktów nie leżących na orbicie, których położenie względem słońca jest równie dobrze znane jak położenie tamtych trzech punktów. Tylko ponieważ pozycje słońca w efemerydach są odniesione do środka ziemi, więc trzeba zredukować je do miejsc obserwacji, co nie przedstawia żadnych zasadniczych trudności, bo parallaksa słońca

¹⁾ Znak — w drugim wzorze (3) pochodzi stąd, że zamiast argumentu $\odot - \lambda$ wzięliśmy argument $\lambda - \odot$.

²⁾ Jednocześnie należy wykonać poprawkę na aberację planetarną, o której była wyżej mowa.

jest znana. Wykonujemy redukcję za pomocą przystosowanych do danego przypadku wzorów (20) rozdz. IX-go. Piszemy tedy odległość słońca R zamiast Δ a współrzędne ekliptyczne słońca \odot i B zamiast α i δ . Tak samo zamiast Θ i φ' piszemy geocentryczną długość i szerokość obserwatorium l i b . Obliczamy l i b za pomocą wzorów (4) rozdz. VI-go kładąc na ε widome nachylenie ekliptyki. Następnie od obliczonej w ten sposób długości odejmujemy nutację w długości N i precesję ogólną $P(t - T)$ [por. to, co było powiedziane nieco wyżej].

Możemy zresztą uprościć wzory (20) rozdz. IX-go nie tylko pomijając małe wyrazy w mianownikach i pisząc po lewej stronie kąty zamiast tangensów, ale także korzystając z tego, że szerokość słońca B jest zawsze bardzo mała i pomijając po prawej stronie $\sin B$. Dokonanie tych działań z pierwszym i drugim wzorem (20) rozdz. IX-go nie przedstawia żadnych trudności. Oznaczając współrzędne geocentryczne literami ze wskaźnikiem 0, a współrzędne przywiedzione do miejsca obserwacji literami bez wskaźników znajdziemy odrazu:

$$\odot - \odot_0 = \frac{\varrho}{R_0} \cos b \sin (\odot_0 - l)$$

$$B - B_0 = -\frac{\varrho}{R_0} \sin b.$$

Nad trzecim równaniem (20) rozdz. IX-go musimy trochę zastanowić się. Wynika zeń związek

$$\log R = \log R_0 - \log \left[\frac{\sin (B - \gamma_1)}{\sin (B_0 - \gamma_1)} \right].$$

Ale

$$\frac{\sin (B - \gamma_1)}{\sin (B_0 - \gamma_1)} = \sin (B - B_0) \operatorname{cotg} (B_0 - \gamma_1) + \cos (B - B_0),$$

przeto korzystając z tego, że tak B jak B_0 jest zawsze bardzo małe, możemy napisać

$$\frac{\sin (B - \gamma_1)}{\sin (B_0 - \gamma_1)} = 1 - (B - B_0) \operatorname{cotg} \gamma_1.$$

Podstawmy to we wzór na $\log R$ i rozwińmy funkcję logarytmiczną za pomocą znanego wzoru:

$$\log (1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots,$$

a urywając szereg na pierwszym wyrazie, otrzymamy

$$\log R = \log R_0 + (B - B_0) \cotg \gamma_1.$$

Skoro tu podstawimy wyżej podaną wartość na $B - B_0$ a jednocześnie użyjemy wzorów (21) rozdz. IX-go zastępując współrzędne równikowe przez ekliptyczne, to otrzymamy wzór:

$$\log R = \log R_0 - \frac{\varrho}{R_0} \cos b \cos (\odot_0 - l).$$

Zbierając wszystkie trzy wzory razem i pisząc w trzecim wzorze logarytmy Briggsa zamiast naturalnych otrzymamy następujące wzory służące do redukcji współrzędnych słońca do miejsca obserwacji

$$\left. \begin{aligned} \odot &= \odot_0 + \frac{\varrho}{R_0} \cos b \sin (\odot_0 - l) \\ B &= B_0 - \frac{\varrho}{R_0} \sin b \\ \log R &= \log R_0 - \frac{\varrho}{R_0} \cos b \cos (\odot_0 - l) \cdot M, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

gdzie $M = 0,43429448 \dots$ oznacza moduł logarytmów naturalnych.

Nie potrzebujemy chyba dodawać, że zamiast $\frac{\varrho}{R_0}$ należy podstawić $\frac{\tilde{\omega}}{206264,8 \dots}$, gdzie $\tilde{\omega}$ oznacza horyzontalną, równikową parallaksę słońca [por. wzór (17 bis) rozdz. IX-ty, § 3], która jest na każdy dzień podana w efemerydach.

Tak samo można obejść się bez parallaksy ciała, którego orbitę chcemy wyznaczyć, obierając drogę, którą wskazał Gauss. Można zastąpić miejsce obserwacji przez tak zwane „locus fictus“ i przywieść współrzędne, ale już nie do miejsca obserwacji, a do „locus fictus“. Jeżeli za stałą płaszczyznę odniesienia przyjmujemy płaszczyznę średniej ekliptyki, to metoda Gaussa jest dogodniejsza od tylko co wyłożonej; bo „locus fictus“ leży w ekliptyce, podczas gdy miejsce obserwacji leży poza ekliptyką, dzięki zaś temu, że „locus fictus“ leży w ekliptyce, osiągamy pewne uproszczenie.

3. Locus fictus.

Nazywamy tak punkt — powiedzmy — F' , w którym prosta przechodząca przez ciało niebieskie i przez miejsce obserwacji przebiega ekliptykę. Gdyby obserwator przeniósł się do F' , to widziałby ciało niebieskie w tym samym kierunku, w którym widzi je z obserwatorium, tylko w trochę innym czasie. Jeżeli zatem zastąpimy obserwatorium przez „locus fictus“, to będziemy musieli dodać, względnie odjąć ten czas, w ciągu którego światło przebiega drogę od F' do obserwatorium. Zupełnie tak samo jak w poprzednim paragrafie obliczamy współrzędne ekliptyczne obserwatorium l i b i piszemy jego współrzędne ekliptyczne, prostokątne:

$$x_0 = \varrho \cos b \cos l$$

$$y_0 = \varrho \cos b \sin l$$

$$z_0 = \varrho \sin b.$$

Jeżeli oznaczymy odległość ciała niebieskiego od obserwatorium przez Δ , a od punktu F' przez Δ' , to współrzędne ciała niebieskiego względem obserwatorium będą:

$$\Delta \cos \beta \cos \lambda, \quad \Delta \cos \beta \sin \lambda, \quad \Delta \sin \beta,$$

a względem punktu F'

$$\Delta' \cos \beta \cos \lambda, \quad \Delta' \cos \beta \sin \lambda, \quad \Delta' \sin \beta.$$

Pod λ i β rozumiemy tu już poprawione na aberację i sprowadzone do stałej ekliptyki [np. z pomocą wzorów (3)] współrzędne ekliptyczne. Stąd współrzędne obserwatorium względem punktu F' będą:

$$x' = (\Delta' - \Delta) \cos \beta \cos \lambda$$

$$y' = (\Delta' - \Delta) \cos \beta \sin \lambda$$

$$z' = (\Delta' - \Delta) \sin \beta.$$

W dalszym ciągu oznaczamy geocentryczną szerokość słońca przez B_0 , zaś długość i promień przez \odot_0 i R_0 . Wtedy heliocentryczne współrzędne środka ziemi będą:

$$X_0 = -R_0 \cos B_0 \cos \odot_0$$

$$Y_0 = -R_0 \cos B_0 \sin \odot_0$$

$$Z_0 = -R_0 \sin B_0,$$

a heliocentryczne współrzędne punktu F względem słońca będą:

$$\begin{aligned} X' &= -R' \cos \odot' \\ Y' &= -R' \sin \odot' \\ Z' &= 0. \end{aligned}$$

Długość słońca względem punktu F oznaczyliśmy przez \odot' , a odległość jego od punktu F przez R' . Szerokość słońca względem punktu F będzie zerem, bo założyliśmy, że punkt F znajduje się w płaszczyźnie ekliptyki. Widzimy stąd, że zastępując obserwatorium przez punkt F zyskujemy pewne uproszczenie.

Możemy teraz wyrazić heliocentryczne współrzędne obserwatorium na dwa sposoby, albo przez

$$X_0 + x_0, \quad Y_0 + y_0, \quad Z_0 + z_0,$$

albo przez

$$X' + x', \quad Y' + y', \quad Z' + z';$$

zatem zmieniając znaki możemy napisać

$$\begin{aligned} R' \cos \odot' - (\Delta' - \Delta) \cos \beta \cos \lambda &= R_0 \cos B_0 \cos \odot_0 - \varrho \cos b \cos l \\ R' \sin \odot' - (\Delta' - \Delta) \cos \beta \sin \lambda &= R_0 \cos B_0 \sin \odot_0 - \varrho \cos b \sin l \\ -(\Delta' - \Delta) \sin \beta &= R_0 \sin B_0 - \varrho \sin b. \end{aligned}$$

Stąd znanym i wielokrotnie używanym sposobem otrzymamy równania:

$$\left. \begin{aligned} R' \cos (\odot' - \odot_0) - (\Delta' - \Delta) \cos \beta \cos (\lambda - \odot_0) &= \\ &= R_0 \cos B_0 - \varrho \cos b \cos (l - \odot_0) \\ R' \sin (\odot' - \odot_0) - (\Delta' - \Delta) \cos \beta \sin (\lambda - \odot_0) &= \\ &= -\varrho \cos b \sin (l - \odot_0) \\ -(\Delta' - \Delta) \sin \beta &= R_0 \sin B_0 - \varrho \sin b. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Korzystając z tego, że B_0 i $(\odot' - \odot_0)$ są zawsze bardzo małe oraz kładąc

$$(\Delta' - \Delta) \cos \beta = D \quad (6)$$

[D jest to rzut odległości od obserwatorium do punktu F na płaszczyznę ekliptyki] możemy napisać uproszczone równania:

$$\left. \begin{aligned} R' &= R_0 + D \cos (\lambda - \odot_0) - \varrho \cos b \cos (l - \odot_0) \\ R' (\odot' - \odot_0) &= D \sin (\lambda - \odot_0) - \varrho \cos b \sin (l - \odot_0) \\ D \operatorname{tang} \beta &= -R_0 B_0 + \varrho \sin b. \end{aligned} \right\} \quad (5 \text{ bis})$$

Podstawiając D z trzeciego równania (5 bis) w dwa pierwsze, kładąc $\frac{\varrho}{R_0} = \tilde{\omega}$ [parallaksa słońca] i pomijając małe wielkości wyższych rzędów otrzymamy równania:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \odot' = \odot_0 + \frac{\tilde{\omega} \sin b - B_0}{\text{tang } \beta} \sin(\lambda - \odot_0) - \tilde{\omega} \cos b \sin(l - \odot_0) \\ R' = R_0 \left[1 + \frac{\tilde{\omega} \sin b - B_0}{\text{tang } \beta} \cos(\lambda - \odot_0) - \tilde{\omega} \cos b \cos(l - \odot_0) \right]. \end{array} \right.$$

Tak samo przekształcimy równanie (6) na

$$(6 \text{ bis}) \quad \Delta' - \Delta = \frac{R_0 (\tilde{\omega} \sin b - B_0)}{\sin \beta},$$

wreszcie napiszemy wyrażenie na czas, który trzeba dodać do czasu obserwacji (por. rozdz. X-ty, § 1), w postaci

$$(8) \quad 498;26 (\Delta' - \Delta) = 498;26 R_0 \frac{(\tilde{\omega} \sin b - B_0)}{\sin \beta}.$$

Za pomocą równań (7) i (8) wykonujemy redukcję współrzędnych słońca do „locus fictus“ i poprawkę czasu obserwacji [tak zwaną „redukcję czasu“]. Nie potrzebujemy chyba dodawać, że odległości mają być wyrażone w jednostkach astronomicznych oraz, że trzeba w drugim równaniu (7) i w równaniu (8) podzielić $\tilde{\omega}$ i B_0 przez 206264,8... Poprawka (8) jest częstokroć tak mała, że można ją zupełnie pominąć. Większą bywa tylko wtedy, gdy β jest bardzo małe, ale wtedy korzystniej jest nie wprowadzać „locum fictum“ a użyć metody wyłożonej w poprzednim paragrafie, t. j. sprowadzić pozycje słońca do miejsc obserwacji.

Przy obliczeniu orbit komet wogóle nie sprowadzamy pozycji słońca „ad locum fictum“, ani do miejsca obserwacji, ani nie troskamy się o parallaksy, bo zarysy tych ciał są tak niewyraźne, że ich pozycje nie mogą być dokładnie oznaczone. Natomiast warto uwzględnić wszystkie poprawki wtedy, gdy chodzi o planetę, szczególnie gdy dane są tak zwane „miejsca normalne“, t. j. miejsca planety określone przez interpolację z wielu obserwacji.

Odtąd będziemy mówić już tylko o odpowiednio poprawionych i przywiedzionych współrzędnych, przyczem dla uniknięcia niepotrzebnej pisaniny będziemy opuszczać wprowadzone w tym i w poprzednim paragrafie rozliczne znaczki.

4. Twierdzenie Eulera i Lamberta.

Twierdzenie to nosi nazwę aż dwóch autorów, bo choć znalazł je pierwszy Euler, ale tylko dla orbit parabolicznych. Później podał je Lambert w ogólniejszym kształcie dla wszystkich przebiegów stożkowych. Twierdzenie to opiera się na równaniach dynamicznych rozdz. XIII-go, daje zaś ważny związek między połową wielkiej osi orbity, czasem, w ciągu którego planeta (czy kometa) przebiega od punktu — powiedzmy — A do punktu — powiedzmy — B orbity, cięciwą łączącą te dwa punkty i sumą ich promieni wodzących.

Oznaczmy wszystko, co odnosi się do punktu A , literami ze wskaźnikiem 1, a wszystko, co odnosi się do punktu B , literami ze wskaźnikiem 2 i zachowajmy wprowadzone w rozdz. XIII-tym znakowania. Rozumować będziemy tak, jakby chodziło o elipsę, bo do przypadku hyperboli możemy przejść wprowadzając wielkości urojone, a przypadek paraboli możemy uważać za graniczny. Założymy, że obie pozycje należą do jednego obiegu, t. j. że $E_2 - E_1 < 360^\circ$.

Weźmy równanie (38) rozdz. XIII-go i napiszmy je tak dla punktu A , jak dla punktu B :

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1), \quad r_2 = a(1 - e \cos E_2),$$

W równaniu Lamberta występuje tylko suma: $r_1 + r_2$. Tworzymy ją i otrzymujemy

$$r_1 + r_2 = 2a[1 - e \cos \frac{1}{2}(E_2 - E_1) \cos \frac{1}{2}(E_2 + E_1)],$$

albo

$$r_1 + r_2 = 2a[1 - e \cos g \cos G], \quad (9)$$

jeżeli położymy

$$\frac{1}{2}(E_2 - E_1) = g, \quad \frac{1}{2}(E_2 + E_1) = G.$$

Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy długość cięciwy od A do B przez s , to

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Podstawmy tu na x i y wartości wzięte z równań (36) rozdziału XIII-go pisząc odrazu:

$$E_1 = G - g, \quad E_2 = G + g,$$

a otrzymamy:

$$s^2 = a^2 [\cos (G + g) - \cos (G - g)]^2 + \\ + a^2 (1 - e^2) [\sin (G + g) - \sin (G - g)]^2.$$

Stąd po łatwych przeróbkach wynika:

$$(10) \quad s^2 = 4a^2 \sin^2 g (1 - e^2 \cos^2 G).$$

Wreszcie z równania (4²) rozdz. XIII-go wynika

$$n(t_2 - t_1) = E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1),$$

to jest

$$(11) \quad n(t_2 - t_1) = 2g - 2e \sin g \cos G.$$

Położmy jeszcze chwilowo

$$e \cos G = \cos h,$$

przezem zawsze możemy założyć, że $0 < h < 180^\circ$, t. j. że $\sin h$ jest dodatni. Dzięki temu podstawieniu wzory (9), (10) i (11) przejdą na

$$(9 \text{ bis}) \quad r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos g \cos h)$$

$$(10 \text{ bis}) \quad s = 2a \sin g \sin h$$

$$(11 \text{ bis}) \quad n(t_2 - t_1) = 2g - 2 \sin g \cos h.$$

Dodając i odejmując równania (9 bis) i (10 bis) oraz kładąc

$$h - g = \delta, \quad h + g = \varepsilon.$$

możemy napisać

$$(12) \quad \begin{cases} r_1 + r_2 + s = 2a(1 - \cos \varepsilon) = 4a \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \\ r_1 + r_2 - s = 2a(1 - \cos \delta) = 4a \sin^2 \frac{1}{2} \delta \\ n(t_2 - t_1) = \varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta). \end{cases}$$

Oczywiście można w trzecim równaniu (12) wyrugować ε przy pomocy pierwszego równania (12) a δ przy pomocy drugiego. Otrzymamy wtedy równanie zawierające tylko czas t , połowę wielkiej osi a i dwie sumy: $r_1 + r_2 + s$ oraz $r_1 + r_2 - s$. Będzie to tak zwane równanie Lamberta. Swoją drogą rugowanie tak łatwym nie jest. Ponieważ kąty $\frac{1}{2} \varepsilon$ i $\frac{1}{2} \delta$ w równaniach pierwszym i drugim (12) są określone tylko przez kwadrat sinusa, więc mogą być wątpliwości co do wyboru kwadranta, w którym ma leżeć

ten lub ów kąt. O. Callandreau¹⁾ podał prosty ku temu środek: z pierwszej pozycyi prowadzimy przez oba ogniska cięciwy, które dzielą obwód elipsy na trzy części. Stosownie do tego, w której części leży druga pozycya, kąty ε i δ leżą w odmiennych kwadrantach. W jakich zaś, to łatwo zbadać rozpatrując rysunek i poprzednie wzory.

Po dokonaniem rugowania prawa strona trzeciego równania (12) przedstawi się w postaci pewnego szeregu. Można też przedstawić ją przez całkę. Rugowania tego wykonywać nie będziemy, bo równanie Lamberta nie będzie nam potrzebne; będziemy posługiwać się tylko specjalnym jego przypadkiem, równaniem Eulera odnoszącem się do paraboli. To zaś dogodniej jest wyprowadzić wprost aniżeli z równania Lamberta, bo przy przejściu do granicy wynikają różne wątpliwości co do zbieżności. Weźmy równanie (46 bis) rozdz. XIII-go, napiszmy je raz dla pierwszej, drugi raz dla drugiej pozycyi i odejmijmy pierwsze od drugiego, a otrzymamy

$$n(t_2 - t_1) = \frac{k(t_2 - t_1)}{\sqrt{2q^3}} = (\tan \frac{1}{2}v_2 - \tan \frac{1}{2}v_1) + \frac{1}{3}(\tan^3 \frac{1}{2}v_2 - \tan^3 \frac{1}{2}v_1).$$

Mnożąc przez 3 i korzystając ze związku

$$a^3 - b^3 = (a - b)[a^2 + ab + b^2]$$

przekształcimy to na

$$\frac{3k(t_2 - t_1)}{\sqrt{2q^3}} = (\tan \frac{1}{2}v_2 - \tan \frac{1}{2}v_1)[3 + \tan^2 \frac{1}{2}v_2 + \tan \frac{1}{2}v_2 \cdot \tan \frac{1}{2}v_1 + \tan^2 \frac{1}{2}v_1].$$

Lecz pamiętając, że $p = 2q$ a $u - \tilde{\omega} = v$, można przywieść wzór (45) rozdz. XIII-go do kształtu

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2}v}.$$

Stąd zaś wynika

$$\cos^2 \frac{1}{2}v = \frac{q}{r}, \quad \sin^2 \frac{1}{2}v = 1 - \frac{q}{r}, \quad \tan^2 \frac{1}{2}v = \frac{r}{q} - 1. \quad (13)$$

¹⁾ Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites. Annales de l'Observatoire de Paris, tom XXIII C, str. 3 i nast.

Możemy więc napisać

$$\frac{3k(t_2 - t_1)}{\sqrt{2q^3}} = (\tan \frac{1}{2}v_2 - \tan \frac{1}{2}v_1) \left[1 + \tan \frac{1}{2}v_2 \tan \frac{1}{2}v_1 + \frac{r_1 + r_2}{q} \right].$$

Teraz jeszcze zastąpimy $\tan \frac{1}{2}v$ przez iloraz: $\frac{\sin \frac{1}{2}v}{\cos \frac{1}{2}v}$ a przeprowadzając do jednego mianownika tak wyraz w nawiasie, jak poza nawiasem otrzymamy

$$\frac{3k(t_2 - t_1)}{\sqrt{2q^3}} = \frac{\sin \frac{1}{2}(v_2 - v_1)}{\cos \frac{1}{2}v_2 \cos \frac{1}{2}v_1} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1)}{\cos \frac{1}{2}v_2 \cos \frac{1}{2}v_1} + \frac{r_1 + r_2}{q} \right].$$

Korzystając jeszcze raz ze związków (13) i skracając q , o ile się da, otrzymamy

$$\frac{3k(t_2 - t_1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{q}} \sin \frac{1}{2}(v_2 - v_1) [r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1)].$$

Aby wyrugować $\cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$, użyjemy związku, któremu czyni zadość cięciwa trójkąta, w którym promienie wodzące są bokami:

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1) = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 \cos^2 \frac{1}{2}(v_2 - v_1).$$

Wynika stąd

$$(14) \quad \cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \pm \sqrt{\frac{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)}{4r_1 r_2}}.$$

Położmy chwilowo

$$r_1 + r_2 + s = m^2, \quad r_1 + r_2 - s = n^2,$$

co jest zawsze dozwolone, bo obie sumy są stale dodatnie. Wynika stąd

$$(15) \quad \begin{cases} r_1 + r_2 = \frac{1}{2}(m^2 + n^2) \\ 2 \cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1) \sqrt{r_1 r_2} = \pm mn. \end{cases}$$

Ponieważ m i n są dodatnie, więc oczywiście trzeba pisać znak $+$, gdy $v_2 - v_1 < 180^\circ$, zaś $-$, gdy $v_2 - v_1 > 180^\circ$. Zresztą, jak to zobaczymy później, dla praktyki tylko pierwszy przypadek ma znaczenie. Rugując $\cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$ otrzymamy

$$\frac{6k(t_2 - t_1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{q}} \sin \frac{1}{2}(v_2 - v_1) (m^2 + n^2 \pm mn).$$

W równaniu pozostał jeszcze: $\sin \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$; aby go wyrugować, piszemy

$$\sin \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \sin \frac{1}{2}v_2 \cos \frac{1}{2}v_1 - \cos \frac{1}{2}v_2 \sin \frac{1}{2}v_1,$$

podnosimy do kwadratu i przekształcamy w taki sposób, aby wyrazić $\sin^2 \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$ przez same cosinusy:

$$\sin^2 \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \cos^2 \frac{1}{2}v_2 + \cos^2 \frac{1}{2}v_1 - 2 \cos \frac{1}{2}v_2 \cos \frac{1}{2}v_1 \cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1).$$

Teraz podstawiamy $\cos \frac{1}{2}v_2$ i $\cos \frac{1}{2}v_1$ z równań (13) a $\cos \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$ z równania (14) i wyciągamy pierwiastek kwadratowy, poczem

$$\sin \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \sqrt{\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \mp \frac{qmn}{r_1 r_2}}.$$

Stąd zaś przy pomocy pierwszego równania (15) znajdujemy

$$\sin \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \sqrt{\frac{q}{2r_1 r_2}} \cdot (m \mp n).$$

Skoro to podstawimy, to otrzymamy równanie Eulera

$$6k(t_2 - t_1) = m^3 \mp n^3 = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2}. \quad (16)$$

Dwoistość znaku pochodzi stąd, że przez dwa dane punkty można przeprowadzić dwie parabole posiadające to samo ognisko [taka sama dwoistość miałyby też miejsce w przypadku elipsy lub hyperboli], ale, jak już wyżej wspomnieliśmy, tylko górny znak, odpowiadający hipotezie $v_2 - v_1 < 180^\circ$, ma znaczenie dla praktyki.

W praktycznem zastosowaniu równanie Eulera przedstawia się w takiej formie, że czas jest wiadomy, a r_1 , r_2 i s są wiadomymi funkcjami jednej niewiadomej. Ponieważ jednak równanie otrzymane po podstawieniu tej jednej niewiadomej jest nazbyt wysokiego stopnia, więc rozwiązujemy równanie Eulera przez kolejne przybliżenia — przyjmując na $r_1 + r_2$ prawdopodobne wartości a traktując s jako niewiadomą.

5. Metoda Eneke'go do rozwiązania równania Eulera.

Ponieważ cięciwa jest zawsze mniejsza¹⁾ niż suma promieni wodzących, więc zawsze można położyć:

$$\frac{s}{r_1 + r_2} = \sin \gamma, \quad (17)$$

¹⁾ Lub co najwyżej równa sumie promieni wodzących.

przyczem γ musi być zawarte między 0° a 180° , bo z natury rzeczy wynika, że lewa strona równania (17) może być tylko dodatnią. Skoro podstawimy wartość na s wziętą z równania (17) w równanie (16), to to ostatnie natychmiast przejdzie w

$$\frac{6k(t_2 - t_1)}{(r_1 + r_2)^{3/2}} = (1 + \sin \gamma)^{3/2} - (1 - \sin \gamma)^{3/2};$$

ponieważ zaś

$$1 \pm \sin \gamma = (\cos \frac{1}{2} \gamma \pm \sin \frac{1}{2} \gamma)^2,$$

przeto

$$(16 \text{ bis}) \quad \frac{6k(t_2 - t_1)}{(r_1 + r_2)^{3/2}} = (\cos \frac{1}{2} \gamma + \sin \frac{1}{2} \gamma)^3 \mp (\cos \frac{1}{2} \gamma - \sin \frac{1}{2} \gamma)^3.$$

Dla krótkości położmy:

$$(18) \quad \frac{2k(t_2 - t_1)}{(r_1 + r_2)^{3/2}} = \eta$$

i wykonajmy działania biorąc raz górny znak, a drugi raz dolny; otrzymamy w pierwszym razie

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^3 \frac{1}{2} \gamma - \frac{3}{2} \sin \frac{1}{2} \gamma + \frac{3}{4} \eta = 0, \\ \text{a w drugim:} \\ \cos^3 \frac{1}{2} \gamma - \frac{3}{2} \cos \frac{1}{2} \gamma + \frac{3}{4} \eta = 0. \end{array} \right.$$

Zatem w obu przypadkach mamy to samo sześcienné równanie

$$(20) \quad x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\eta = 0,$$

w którym atoli położono raz

$$x = \sin \frac{1}{2} \gamma,$$

a drugi raz

$$x = \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

Wynika stąd, że jeżeli pierwsze równanie (19) ma pierwiastek $\sin \frac{1}{2} \gamma'$, to drugie równanie (19) musi mieć pierwiastek $\cos \frac{1}{2} \gamma''$, przyczem musi być

$$\cos \frac{1}{2} \gamma'' = \sin \frac{1}{2} \gamma'.$$

Stąd zaś wynika:

$$\frac{1}{2} \gamma'' + \frac{1}{2} \gamma' = 90^\circ, \quad \gamma'' + \gamma' = 180^\circ.$$

Ale w takim razie:

$$\sin \gamma'' = \sin \gamma'$$

i wszystko jedno czy podstawimy γ' , czy γ'' w równanie (17), bo czy w jednym, czy w drugim razie otrzymamy tę samą wartość na $\frac{s}{r_1 + r_2}$. Zatem dość jest rozważać jedno, np. pierwsze równanie (19).

Ponieważ η jest z konieczności dodatnie a największa wartość, jaką $\frac{3}{4}\eta$ osiągnąć może, jest $\sqrt{2}^1$, więc wyróżnik równania (20), t. j. wyraz

$$\frac{1}{4}(\frac{3}{4}\eta)^2 + (-\frac{3}{2})^2 \frac{1}{27} = \frac{1}{8}(\frac{9}{8}\eta^2 - 1)$$

jest odjemny i równanie ma trzy pierwiastki rzeczywiste, z których dwa są dodatnie, a jeden odjemny. Wskutek tego, jeżeli położymy

$$\frac{3}{4}\eta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \quad (21)$$

to $\sin \theta$ będzie zawsze rzeczywisty i dodatni. Innemi słowy θ będzie zawarte pomiędzy 0 a 180°. Z drugiej zaś strony możemy łatwo znanym sposobem wyrazić pierwiastki równania (20) za pomocą tego samego kąta θ , mianowicie mamy:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sin \frac{1}{2}\gamma_1 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{1}{3}\theta \\ x_2 &= \sin \frac{1}{2}\gamma_2 = \sqrt{2} \sin \frac{1}{3}(180^\circ - \theta) \\ x_3 &= \sin \frac{1}{2}\gamma_3 = -\sqrt{2} \cdot \sin \frac{1}{3}(180^\circ + \theta). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Na podstawie tego, co było wyżej powiedziane, trzeci pierwiastek jest stale odjemny, a więc w rachubę nie wchodzi. Rozpatrzmy tedy pozostałe dwa pierwiastki. Ponieważ x_1 byłoby większe od jedności, gdyby $\frac{1}{3}\theta$ przekroczyło 45°, a x_2 byłoby większe od jedności, gdyby $\frac{1}{3}(180^\circ - \theta)$ przekroczyło 45°, przeto pierwszy pierwiastek jest możebny tylko między $\theta = 0$ a $\theta = 135^\circ$, a drugi między $\theta = 45^\circ$ a $\theta = 180^\circ$. Dla $\theta = 90^\circ$, t. j. dla $\frac{1}{3}\theta = 30^\circ$ oba pierwiastki są równe: mamy wtedy

$$x_1 = x_2 = \sin \frac{1}{2}\gamma_1 = \sin \frac{1}{2}\gamma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

¹⁾ Wynika to ze wzoru (16 bis), jeżeli założymy, że prawa strona osiąga największą możliwą wartość. Osiąga ją zaś przy $\gamma = 90^\circ$.

tedy

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 90^\circ, \quad \sin \gamma_1 = \sin \gamma_2 = 1,$$

a równanie (17) daje tak z jedną jak z drugą wartością na γ

$$s = r_1 + r_2.$$

To znaczy, że oba promienie wodzące leżą w jednej prostej, że różnica $v_2 - v_1$ między anomalią rzeczywistą w jednej a anomalią rzeczywistą w drugiej pozycji, czyli tak zwany „*ruch heliocentryczny*“ wynosi 180° . We wszystkich innych przypadkach jeden z dwóch kątów: θ i $180^\circ - \theta$ jest większy, a drugi mniejszy od 90° . Temu, który jest mniejszy, odpowiada ruch heliocentryczny mniejszy od 180° , a tamtemu większy od 180° . Ale, jak widzieliśmy wyżej, w odstępie od $\theta = 0$ do $\theta = 45^\circ$ możebnym jest tylko pierwszy pierwiastek, ponieważ zaś $\theta < 45^\circ$, więc mamy tylko pierwiastek odpowiadający ruchowi heliocentrycznemu mniejszemu od 180° . Zupełnie to samo możemy powiedzieć o odstępie między $\theta = 135^\circ$ a $\theta = 180^\circ$; tu możebnym jest tylko drugi pierwiastek, ponieważ zaś $180^\circ - \theta$ jest w tym odstępie mniejsze od 90° , więc znowu mamy tylko pierwiastek odpowiadający ruchowi heliocentrycznemu mniejszemu od 180° . Natomiast między $\theta = 45^\circ$ a $\theta = 135^\circ$ możebne są dwa pierwiastki, z których jeden odpowiada ruchowi heliocentrycznemu większemu, a drugi mniejszemu od 180° . Widzimy stąd, że dość jest uważać odstęp od $\theta = 0$ do $\theta = 90^\circ$, bo od $\theta = 90^\circ$ do 180° mamy to samo, tylko pierwiastki mieniają swe role. Ograniczając się tedy do odstępu między $\theta = 0$ a $\theta = 90^\circ$ możemy powiedzieć, że równanie (20) [względnie pierwsze (19)] ma między $\theta = 0$ a $\theta = 45^\circ$ tylko jeden pierwiastek możebny odpowiadający ruchowi heliocentrycznemu mniejszemu od 180° , zaś między $\theta = 45^\circ$ a $\theta = 90^\circ$ ma dwa pierwiastki możebne, z których mniejszy odpowiada ruchowi heliocentrycznemu mniejszemu od 180° ($v_2 - v_1 < 180^\circ$), a większy większemu od 180° ($v_2 - v_1 > 180^\circ$).

Jasną jest rzeczą, że skoro $r_1 + r_2$ jest dane, to łatwo znaleźć s . Mianowicie najpierw obliczamy η za pomocą wzoru (18), następnie θ za pomocą wzoru (21), który można oczywiście napisać tak:

$$(21 \text{ bis}) \quad \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{8}} \eta,$$

następnie obliczamy za pomocą wzorów (22) czy to $\sin \frac{1}{2} \gamma_1$, czy też $\sin \frac{1}{2} \gamma_1$ i $\sin \frac{1}{2} \gamma_2$ stosownie do tego czy $\theta < 45^\circ$, czy $\theta > 45^\circ$. W ten sposób znajdujemy γ_1 , ewentualnie γ_1 i γ_2 , a skoro je podstawimy we wzór (17), to otrzymamy szukaną wielkość s . Można sobie ułatwić rachunek za pomocą tablicy, którą podał Encke w „Berliner astr. Jahrbuch“ na rok 1833.

Zachodzi teraz pytanie, jaki jest cel metody Enckego, skoro nie tylko s ale także $r_1 + r_2$ jest nieznanne? Cel stanie się jasnym, jeżeli uprzytomnimy sobie tę okoliczność, że oprócz równania Eulera mamy jeszcze inne równania. Wszak już w końcu poprzedniego paragrafu mówiliśmy o tem, że zanim skorzystamy z równania Eulera, to już pozostaje właściwie jedna niewiadoma. Otóż posilkujemy się nie tylko równaniem Eulera, ale także temi innemi równaniami. Najpierw przyjmujemy na $r_1 + r_2$ pewną dowolną wartość i opisaną powyżej metodą z równania Eulera obliczamy odpowiednie s . Z tem s przechodzimy do innych równań i obliczamy r_1 i r_2 . W ten sposób otrzymujemy nową wartość na $r_1 + r_2$. Powracamy z nią do równania Eulera i ponownie obliczamy s i tak w kółko dopóty, dopóki nie osiągniemy pożądaney zgodności, t. j. dopóki przy nowej próbie nie otrzymamy tych samych wartości co poprzednio.

Tu słusznie mógłby kto zauważyć, że gdy orbita jest zupełnie nieznaną, to powyższy proceder mógłby trwać bardzo długo. Wszak mogłoby się zdarzyć, że przy pierwszej próbie źle trafimy, że weźmiemy $r_1 + r_2$ bardzo dalekie od rzeczywistości. Otóż w praktyce trudność ta nie przedstawia się tak straszną, jakby się to mogło wydawać na pierwszy rzut oka, albowiem we większości wypadków $r_1 + r_2$ jest zawarte w pewnych, niezbyt szerokich granicach. Pochodzi to stąd, że obserwacje, na podstawie których obliczamy orbity, bywają zwykle dokonywane wtedy, gdy kometa znajduje się niedaleko perihelium, wtedy zaś odległość komety od słońca nie bywa nigdy bardzo wielka a zatem i $r_1 + r_2$ nie przekracza pewnych niezbyt szerokich granic. W tych jednostkach, które przyjęliśmy w rozdz. XIII-tym, § 11, to jest w astronomicznych jednostkach długości, — suma $r_1 + r_2$ bywa zazwyczaj zawarta między 1 a 3; jeżeli więc niema absolutnie żadnych wskazówek, na podstawie których możnaby wymiarkować, jaką wartość powinno mieć $r_1 + r_2$; — to przy pierwszej próbie kładziemy $r_1 + r_2 = 2$.

Tak samo nie sprawia trudności dwoistość rozwiązania, o której była wyżej mowa. Jeżeli $\theta < 45^\circ$, to mamy tylko jedno rozwiązanie; jeżeli zaś $45^\circ < \theta < 90^\circ$, to mogą być dwa rozwiązania. Ale w praktyce prawie zawsze można odrazu rozstrzygnąć, które z nich odpowiada rzeczywistości: jeżeli odstęp czasu $t_2 - t_1$ jest mały, to ruch heliocentryczny nie może być większy od 180° i należy wziąć pierwszy pierwiastek; jeżeli odwrotnie $t_2 - t_1$ jest duże, to właśnie prawdopodobnie $v_2 - v_1 > 180^\circ$ i należy wziąć drugi pierwiastek. Należy jednak zauważyć, że w tym drugim przypadku wprowadzicie nie równanie Eulera, ale inne równania, o których wnet będzie mowa, dają zupełnie niepewne rezultaty. Jest to więc przypadek wysoce niekorzystny, którego też w praktyce unikamy.

6. Warunek, aby wszystkie trzy pozycje ciała niebieskiego znajdowały się w tej samej płaszczyźnie przechodzącej przez słońce.

Już w § 1 wyprowadziliśmy warunek (1), aby wszystkie trzy pozycje ciała niebieskiego znajdowały się w tej samej płaszczyźnie przechodzącej przez słońce. Oczywiście możemy napisać tylko jedno równanie (1), bo założyliśmy w § 2, że mamy tylko trzy obserwacje. Możemy jednak napisać je w trzech postaciach:

$$\begin{aligned} x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) &= 0 \\ y_1(z_2 x_3 - z_3 x_2) - y_2(\dots\dots\dots) + &= 0 \\ z_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) - &= 0. \end{aligned}$$

Wyrazy w nawiasach są to podwójne rzuty na płaszczyznę współrzędnych — pól trójkątów, zawartych między promieniami wodzącymi r_1 i r_2 , r_2 i r_3 , r_1 i r_3 a odpowiednią cięciwą. Ponieważ w każdym z poprzednich równań wszystkie trzy trójkąty są rzucane na tę samą płaszczyznę, np. w pierwszym na płaszczyznę yz , więc każde z tych równań można podzielić przez odpowiedni \cos kąta między płaszczyzną orbity a płaszczyznę współrzędnych, poczem oznaczając podwójne pola trójkątów przez $|r_1 r_2| \dots$ i t. d. otrzymamy

$$\begin{aligned} x_1 |r_2 r_3| - x_2 |r_1 r_3| + x_3 |r_1 r_2| &= 0 \\ y_1 |r_2 r_3| - y_2 |r_1 r_3| &= 0 \\ z_1 |r_2 r_3| - &= 0, \end{aligned}$$

albo kładąc

$$n_1 = \frac{|r_2 r_3|}{|r_1 r_3|}, \quad n_3 = \frac{|r_1 r_2|}{|r_1 r_3|} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= n_1 x_1 + n_3 x_3 \\ y_2 &= n_1 y_1 + n_3 y_3 \\ z_2 &= n_1 z_1 + n_3 z_3 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Równania (24), traktowane jako równania geometryczne, są naturalnie niczem innym, jak trzema różnymi postaciami jednego i tego samego równania; jednakże skoro wyrazimy n_1 i n_3 przez funkcyje czasu czyniące zadość prawom grawitacyi, t. j. skoro będziemy je traktować jako równania mechaniczne, to staną się one różne i niezależne od siebie.

Współrzędne x_1, y_1, \dots są to współrzędne heliocentryczne, tymczasem obserwacye dają nam współrzędne sferyczne geocentryczne; przeto we współrzędnych ekliptycznych — podobnie jak w § 1 [patrz równania (2)], ale pomijając szerokość słońca — mamy

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \Delta_1 \cos \beta_1 \cos \lambda_1 - R_1 \cos \odot_1 \\ y_1 &= \Delta_1 \cos \beta_1 \sin \lambda_1 - R_1 \sin \odot_1 \\ z_1 &= \Delta_1 \sin \beta_1 \\ &\text{i t. d., i t. d.} \end{aligned} \right\} \quad (2 \text{ bis})$$

Trzeba tylko podstawić te wartości w równania (24). Zaraz to uczynimy wprowadzając dla prostoty tak zwane „skrócone odległości“:

$$\varrho_1 = \Delta_1 \cos \beta_1, \quad \varrho_2 = \Delta_2 \cos \beta_2, \quad \varrho_3 = \Delta_3 \cos \beta_3, \quad (25)$$

poczem otrzymamy zasadnicze dla wyznaczenia orbit równania:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_2 \cos \lambda_2 - R_2 \cos \odot_2 &= n_1 (\varrho_1 \cos \lambda_1 - R_1 \cos \odot_1) + \\ &\quad + n_3 (\varrho_3 \cos \lambda_3 - R_3 \cos \odot_3) \\ \varrho_2 \sin \lambda_2 - R_2 \sin \odot_2 &= n_1 (\varrho_1 \sin \lambda_1 - R_1 \sin \odot_1) + \\ &\quad + n_3 (\varrho_3 \sin \lambda_3 - R_3 \sin \odot_3) \\ \varrho_2 \operatorname{tang} \beta_2 &= n_1 \varrho_1 \operatorname{tang} \beta_1 + n_3 \varrho_3 \operatorname{tang} \beta_3. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Trzy równania (26) zawierają aż pięć niewiadomych: $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, n_1$ i n_3 , ale możemy wyprowadzić nowe równania ze związków dynamicznych.

7. Wartości na n_1 i n_3 .

Będziemy musieli używać rozwinięć współrzędnych, uważanych jako funkcyjne czasu, w szeregi Maclaurina. Aby te szeregi były szybko zbieżne, trzeba, żeby argumenty, t. j. czasy, które upływały między obserwacją pierwszą a drugą oraz drugą a trzecią były niedługie, t. j. żeby były małymi ułamkami czasu obiegu. Jest to ograniczenie nieuniknione w tych metodach, o których teraz mówimy.

Położymy dla krótkości

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oraz} \\ k\sqrt{(1+m)}t = \tau \\ k\sqrt{(1+m)}(t_2 - t_1) = \tau_3 \\ k\sqrt{(1+m)}(t_3 - t_2) = \tau_1 \\ k\sqrt{(1+m)}(t_3 - t_1) = \tau_2. \end{array} \right.$$

Nie opuściliśmy masy ciała niebieskiego m pomimo tego, że we wszystkich zdarzających się w praktyce przypadkach jest ona w porównaniu z masą słońca (przyjętą za jednostkę) absolutnie znikoma; — a to dlatego, aby pochodzenie i znaczenie wzorów (27) były lepiej widoczne. Weźmy teraz współrzędne prostokątne, heliocentryczne ciała niebieskiego przyjmując płaszczyznę orbity za płaszczyznę xy . Są to zatem inne współrzędne aniżeli te, któremi posługiwaliśmy się w poprzednim paragrafie. Środkową pozycję przyjmijmy za początkową, odpowiadającą zeru czasu. Wtedy ze szeregu Maclaurina otrzymamy:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 - \frac{dx_2}{d\tau} \tau_3 + \frac{1}{1.2} \frac{d^2x_2}{d\tau^2} \tau_3^2 - \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3x_2}{d\tau^3} \tau_3^3 + \dots \\ x_3 = x_2 + \frac{dx_2}{d\tau} \tau_1 + \frac{1}{1.2} \frac{d^2x_2}{d\tau^2} \tau_1^2 + \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3x_2}{d\tau^3} \tau_1^3 + \dots \end{array} \right.$$

Na y_1 i y_3 otrzymamy podobne wzory; co do z_1 i z_3 , to w myśl naszego założenia obie te współrzędne równie jak z_2 będą zerami.

Równania ruchu, skoro wprowadzimy do nich τ zamiast t , przejdą na:

$$(29) \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{y}{r^3} = 0.$$

Różniczkując je i wciąż rugując $\frac{d^2x}{d\tau^2}$ i $\frac{d^2y}{d\tau^2}$ za pomocą tychże samych równań (29) znajdziemy

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = 3 \frac{x}{r^4} \frac{dr}{d\tau} - \frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{d^4x}{d\tau^4} = x \left\{ \frac{1}{r^6} - \frac{12}{r^5} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{3}{r^4} \frac{d^2r}{d\tau^2} \right\} + \frac{6}{r^4} \frac{dr}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} \dots$$

i podobne wyrażenia na:

$$\frac{d^3y}{d\tau^3}, \quad \frac{d^4y}{d\tau^4} \text{ i t. d.}$$

Skoro podstawimy te wartości we wzory (28) i skoro dla krótkości położymy

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{2} \frac{\tau_3^3}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{1}{2^4} \left[\frac{1}{r_2^6} - \frac{12}{r_2^5} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right)^2 + \frac{3}{r_2^4} \frac{d^2r_2}{d\tau^2} \right] \tau_3^4 + \dots \\ b_1 &= \tau_3 - \frac{1}{6} \frac{\tau_3^3}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_3^4}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} - \dots \\ a_3 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{2} \frac{\tau_1^3}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{1}{2^4} \left[\frac{1}{r_2^6} - \frac{12}{r_2^5} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right)^2 + \frac{3}{r_2^4} \frac{d^2r_2}{d\tau^2} \right] \tau_1^4 + \dots \\ b_3 &= \tau_1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_1^3}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1^4}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

to będziemy mogli napisać je w kształcie

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 x_2 - b_1 \frac{dx_2}{d\tau}, & x_3 &= a_3 x_2 + b_3 \frac{dx_2}{d\tau} \\ y_1 &= a_1 y_2 - b_1 \frac{dy_2}{d\tau}, & y_3 &= a_3 y_2 + b_3 \frac{dy_2}{d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (28 \text{ bis})$$

Stąd zaś wynika

$$\left. \begin{aligned} |r_1 r_2| &= y_2 x_1 - x_2 y_1 = b_1 \left(x_2 \frac{dy_2}{d\tau} - y_2 \frac{dx_2}{d\tau} \right) \\ |r_2 r_3| &= y_3 x_2 - x_3 y_2 = b_3 \left(x_2 \frac{dy_2}{d\tau} - y_2 \frac{dx_2}{d\tau} \right) \\ |r_1 r_3| &= y_3 x_1 - x_3 y_1 = (a_1 b_3 + a_3 b_1) \left(x_2 \frac{dy_2}{d\tau} - y_2 \frac{dx_2}{d\tau} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Już ze wzorów (31) widać, że n_1 i n_3 zależą tylko od b_1 , b_3 i $a_1 b_3 + a_3 b_1$, ale, zanim z tego skorzystamy, wprzód wyrazimy prawe strony równań (31) w inny sposób.

Ponieważ [por. pierwszy wzór (27)]

$$d\tau = k\sqrt{(1+m)} dt,$$

więc na mocy wzoru (27 bis) z rozdz. XIII-go

$$x_2 \frac{dy_2}{d\tau} - y_2 \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{k\sqrt{(1+m)}} \left(x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt} \right) = \frac{c}{k\sqrt{(1+m)}}.$$

Ale jeżeli np. we wzorze (33) rozdz. XIII-go przywrócimy stałą przyciągania, to znajdziemy

$$c = k\sqrt{(1+m)p}$$

przeto

$$x_2 \frac{dy_2}{d\tau} - y_2 \frac{dx_2}{d\tau} = \sqrt{p},$$

gdzie p oznacza parametr¹⁾ orbity. Tedy równania (31) przechodzą na

$$(31 \text{ bis}) \quad |r_1 r_2| = b_1 \sqrt{p}, \quad |r_2 r_3| = b_3 \sqrt{p}, \quad |r_1 r_3| = (a_1 b_3 + a_3 b_1) \sqrt{p}.$$

Podstawiając znowu wartości na b_1 , b_3 i t. d. ze wzorów (30) i uwzględniając to, że [patrz wzory (27)]

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$$

możemy napisać

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} |r_1 r_2| = \tau_3 \sqrt{p} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_3^3}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right] \\ |r_2 r_3| = \tau_1 \sqrt{p} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_1^2}{r_3^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1^3}{r_3^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right] \\ |r_1 r_3| = \tau_2 \sqrt{p} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2}{r_2^3} + \frac{1}{4} \tau_2^2 \frac{(\tau_1 - \tau_3)}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} \dots \right] \end{array} \right.$$

Ze wzorów (32) otrzymamy przez dzielenie

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[1 + \frac{1}{6} \tau_3 \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{r_2^3} + \frac{1}{4} \tau_3 \frac{(\tau_3^2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_1^2)}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} \dots \right] \\ n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left[1 + \frac{1}{6} \tau_1 \frac{(\tau_2 + \tau_3)}{r_3^3} - \frac{1}{4} \tau_1 \frac{(\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_3^2)}{r_3^4} \frac{dr_2}{d\tau} \dots \right] \\ \frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{(\tau_1^2 - \tau_3^2)}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1^3 + \tau_3^3}{r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} \dots \right] \end{array} \right.$$

¹⁾ Przypominamy, że parametrem nazywa się połowa cięciwy prostopadłej do osi głównej w ognisku.

Powyższe wartości na n_1 , n_3 i $\frac{n_1}{n_3}$ są ściśle aż do trzecich potęg czasu włącznie, ale gdy chodzi o orbitę ziemską, która jest prawie kołem, to można ograniczyć się do dwóch pierwszych wyrazów. Ze wzorów (33) widzimy, że tak n_1 i n_3 , jak ich stosunek zależą nietylko od odstępów czasu, które upłynęły pomiędzy obserwacjami, ale także od r_2 i $\frac{dr_2}{dt}$. Można obliczyć r_2 i $\frac{dr_2}{dt}$ skoro r_1 i r_3 są znane. Rzeczywiście, ponieważ

$$r_1 = r_2 - \frac{\tau_3}{k} \frac{dr_2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\tau_3^2}{k^2} \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \dots$$

$$r_3 = r_2 + \frac{\tau_1}{k} \frac{dr_2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\tau_1^2}{k^2} \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \dots,$$

więc zanedbując drugą pochodną mamy przez odejmowanie

$$r_3 - r_1 = \frac{\tau_1 + \tau_3}{k} \frac{dr_2}{dt}. \quad (34)$$

Jeżeli $\tau_1 = \tau_3$, to współczynnik przy drugiej pochodnej jest równy zeru a zatem wzór przed chwilą napisany jest o jeden rząd ściślejszy. Tak samo, też zanedbując drugą pochodną, mamy przez dodawanie

$$r_3 + r_1 = 2r_2 + \frac{\tau_1 - \tau_3}{k} \frac{dr_2}{dt}.$$

Stąd zaś po podstawieniu $\frac{dr_2}{dt}$ ze wzoru (34) otrzymamy

$$r_2 = \frac{1}{2}(r_3 + r_1) - \frac{1}{2}(r_3 - r_1) \frac{(\tau_1 - \tau_3)}{\tau_2}. \quad (35)$$

Gdy $\tau_1 = \tau_3$, t. j. gdy [por. wzory (27)] odstęp czasu między pierwszą a drugą i między drugą a trzecią obserwacją są równe, to drugi wyraz we wzorze (35) znika. Tak samo znika drugi wyraz w trzecim wzorze (33) i jeżeli przytem τ_1 i τ_3 są wogóle małe, to reszta szeregu jest o tyle mała, że hipoteza $\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$ daje wcale dobre przybliżenie. Ze względu na to obserwatorowie umyślnie starają się tak rozłożyć obserwacje, aby równość $\tau_1 - \tau_3 = 0$ była jak najdokładniej spełniona. Jeżeli zaś odstęp czasu są bardzo

nierówne, to z początku, gdy ani r_2 ani $\frac{dr_2}{dt}$ nie są jeszcze znane, lepiej jest poprostu położyć

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{N_1}{N_3},$$

gdzie N_1 , N_2 są to stosunki między odpowiednimi polami trójkątów w orbicie ziemi¹⁾, a otrzymana tą drogą wartość na $\frac{n_1}{n_3}$ będzie bliższa prawdy niż ta, którą otrzymalibyśmy z dwóch pierwszych wyrazów trzeciego wzoru (33).

8. Zbieżność szeregów wyrażających stosunki między polami trójkątów.

Jasnym jest, że podwójne pola trójkątów mogą być równe zeru. Widać to zaraz, skoro napiszemy znane wzory

$$(36) \quad \begin{cases} |r_1 r_2| = r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) \\ |r_1 r_3| = r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1) \\ |r_2 r_3| = r_2 r_3 \sin(v_3 - v_2). \end{cases}$$

Np. $|r_1 r_3|$ znika, gdy $v_3 - v_1 = 0, 180^\circ, 360^\circ$ i t. d.; ale $|r_1 r_3|$ właśnie figuruje w mianownikach wyrażeń na n_1 i n_3 , zatem dla $v_3 - v_1 = 0, 180^\circ, 360^\circ$, t. j. gdy ruch heliocentryczny wynosi $0^\circ, 180^\circ$ i t. d. stopni, to n_1 i n_3 stają się nieskończenie wielkie. Z drugiej strony stosunek $\frac{n_1}{n_3}$, który, jak to niebawem zobaczymy, nie-

małą odgrywa rolę przy wyznaczeniu orbit, staje się nieskończenie wielkim, gdy $v_2 - v_1 = 0$, bo w jego mianowniku stoi $|r_1 r_2|$. Co więcej, pola wszystkich trzech trójkątów mogą być od zera różne, a pomimo tego szeregi (33) mogą być rozbieżne, albo mało zbieżne. Ponieważ ścisłość w określeniu orbity przedewszystkiem od nich zależy, więc musimy zbadać ich zbieżność. Zbieżność szeregów (33) zależy od zbieżności²⁾ szeregów (28). Jeżeli szeregi na x i y są abso-

¹⁾ Oczywiście możemy obliczyć stosunki między polami trójkątów dla ziemi tak samo jak dla każdego innego ciała niebieskiego. Wszystkie wielkości, od których te stosunki zależą, są dla ziemi dokładnie znane.

²⁾ F. R. Moulton: The true radii of convergence... Astr. Journ., tom XXIII, str. 93—102.

Porównaj także w tym samym tomie tego samego czasopisma: W. A. Hamilton: On the Convergency of the Series..., str. 49—54.

lutnie zbieżne, to zbieżnemi będą też ich pochodne względem czasu, iloczyny współrzędnych i pochodnych, zatem także wyrażenia pól trójkątów a w końcu także ich stosunki n_1 i n_2 . Co więcej, jeżeli x i y są zbieżne w tym samym obrębie, to ich pochodne, pola trójkątów i t. d. będą zbieżne w tym samym obrębie.

Jeżeli umieścimy środek współrzędnych w ognisku, to współrzędne prostokątne w ruchu eliptycznym będą [wzory (36) rozdziału XIII-go odnoszą się do przypadku, gdy środek współrzędnych znajduje się w środku elipsy]

$$\begin{aligned} x &= r \cos v = a \cos E - ae \\ y &= r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{aligned} \quad (37)$$

Ponieważ w szeregach na n_1 , n_2 i t. d. zmienną niezależną jest czas, więc trzeba uważać x i y za funkcyje anomalii średniej M , która jest wprost proporcjonalna do czasu. Lecz x i y zależą od M przez pośrednictwo anomalii mimośrodowej E . Wiemy zresztą z równania Keplera:

$$E - e \sin E = M, \quad (38)$$

że anomalia mimośrodkowa zależy także od mimośrodu e , ale będziemy go tu uważać za parametr. Z równania Keplera wynika

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E}. \quad (39)$$

Prawa strona tego różniczkowego równania jest analityczną względem E i w sąsiedztwie każdego punktu E_0 , w którym jest regularną, $E - E_0$ daje się rozwinąć w szereg potęgowy z argumentem $M - M_0$. Przeto we wszystkich punktach, w których prawa strona równania (39) jest regularną, E będzie także regularną funkcyą M i naodwrot każdy punkt osobliwy prawej strony równania (39) będzie także osobliwym punktem funkcyi E . Zatem E posiada tylko te osobliwe punkty, które wynikają z równania

$$1 - e \cos E = 0. \quad (40)$$

Jeżeli położymy

$$E = u + iw, \quad (i = \sqrt{-1})$$

to równanie (40) rozpadnie się na dwa realne równania

$$(41) \quad \begin{cases} \sin u \cdot \sin \operatorname{hyp} w = 0 \\ 1 - e \cos u \cdot \cos \operatorname{hyp} w = 0. \end{cases}$$

Pierwszemu równaniu (41) czyni zadość $w=0$ oraz $u=n\pi$, gdzie n jest to jakakolwiek liczba cała. Jeżeli przyjmiemy $w=0$, to drugie równanie (41) przywiedzie się do

$$(42) \quad 1 - e \cos u = 0.$$

Ponieważ $0 < e < 1$, więc to równanie jest niemożliwe. Zato jeżeli położymy $u=n\pi$, to drugie równanie (41) obróci się w

$$(43) \quad 1 - (-1)^n \cdot e \cos \operatorname{hyp} w = 0.$$

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to równanie (43) jest możliwe. Zresztą ma zawsze tylko dwa pierwiastki równe co do absolutnej wielkości, ale różne co do znaku, mianowicie

$$w = \pm \log \operatorname{nat} \left[\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} \right].$$

Zatem punktami osobliwymi są te, w których

$$(44) \quad \begin{aligned} u &= 2m\pi \quad (m = \text{liczba cała}) \\ w &= \pm \log \operatorname{nat} \left[\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} \right]. \end{aligned}$$

Znaleźliśmy położenie punktów osobliwych w płaszczyźnie zmiennej E , ale nie wiemy jeszcze, jakim wartościom M one odpowiadają. Aby to zbadać, położymy w równaniu Keplera (38), $E = u + iw$, $M = \xi + i\eta$. Rozpadnie się ono na dwa realne równania, które zaraz napiszemy. Przytem ponieważ chodzi nam o punkty osobliwe, odrazu podstawimy u i w z równań (44). Otrzymamy wtedy

$$\xi = 2m\pi$$

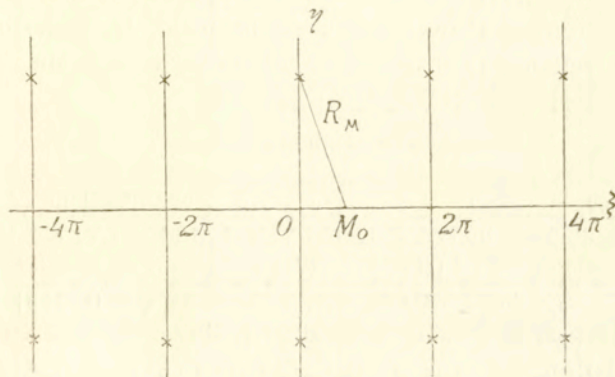
$$\eta = \pm \left\{ \log \operatorname{nat} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} \right) - e \sin \operatorname{hyp} \left[\log \operatorname{nat} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} \right) \right] \right\},$$

albo po łatwych przeróbkach

$$(45) \quad \begin{cases} \xi = 2m\pi \\ \eta = \pm \left[\log \operatorname{nat} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} \right) - \sqrt{1 - e^2} \right]. \end{cases}$$

Uciekając się do znanego graficznego sposobu znajdziemy, że w płaszczyźnie zmiennej M punkty osobliwe leżą na dwóch prostych równoległych do osi realnych wartości w równych odstępach wynoszących po 2π . Odległość od osi ξ do tych prostych jest właśnie η . Z drugiego wzoru (45) widzimy, że η jest tem większe im e jest mniejsze. Dla $e=0$ punkty osobliwe odsuwają się w nieskończoność, dla $e=1$ punkty osobliwe schodzą się na osi ξ .

Ponieważ co 2π wszystko powtarza się, więc dość jest rozważyć jeden odstęp, np. ten, który jest zawarty między $-\pi$ a $+\pi$



Ryc. 27.

i to tylko dla realnych wartości M , bo tylko z takimi mamy do czynienia w praktyce. Weźmy zatem na osi realnych wartości $M=M_0$, przyczem $0 < M_0 < \pi$. Odpowiedni promień zbieżności jest to odległość od punktu M_0 do najbliższego punktu osobliwego. Zatem jeżeli oznaczymy promień zbieżności przez R_M , to

$$R_M = \sqrt{M_0^2 + \eta^2}. \quad (46)$$

To znaczy, że jeżeli wartości M_0 odpowiada wartość E_0 i jeżeli rozwinemy $E - E_0$ w szereg potęgowy zmiennej $M - M_0$, to szereg ten będzie bezwzględnie zbieżnym dopóty, dopóki

$$M - M_0 < \sqrt{M_0^2 + \eta^2}.$$

Widzimy stąd, że przy tem samym η , t. j. przy tem samym e , bo η zależy tylko od e , największy promień zbieżności posiada¹⁾

¹⁾ Przypominamy, że E i M jednocześnie przybierają wartości $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ i t. d. Inaczej mówiąc, różnica $E - M$ znika we wszystkich punktach, w których M równa się wielokrotności π .

rozwiniecie $E - \pi$ w szereg potęgowy zmiennej $M - \pi$, a najmniej-
szy — rozwinięcie E w szereg potęgowy M . Inaczej mówiąc pro-
mień zbieżności wzrasta od perihelium do aphelium.

Na mocy równań (37) współrzędne x i y mogą być rozwinięte
w bezwzględnie zbieżne szeregi zmiennej $E - E_0$, przyczem pro-
mień zbieżności jest nieskończenie wielki, ale skoro podstawimy
 $M - M_0$, to zbieżność ulegnie ograniczeniu: na mocy pewnego
twierdzenia Weierstrassa¹⁾ promień zbieżności będzie ten sam
co dla funkcji $E - E_0$, t. j. także R_M .

W rozdz. XIII-tym § 9 mówiąc o rozwinięciu współrzędnych
 x i y w szeregi Fouriera z argumentem M znaleźliśmy, że
skoro uporządkujemy te szeregi wedle potęg mimośrodu e , to będą
one bezwzględnie zbieżne tylko póty, póki

$$e < 0,6627432 \dots$$

Z drugiej strony szeregi potęgowe z argumentem M są bez-
względnie zbieżne nietylko do powyższej wartości e , ale także dla
wartości większych od $0,6627 \dots$. Wprawdzie promień zbieżności jest
mały [np. wartości $e = 0,66274 \dots$ odpowiada $\eta = 0,2215$], ale nie-
równy zeru. Łatwo spostrzedz, skąd pochodzi to przeciwieństwo:
tam uważaliśmy M za parametr, a e za zmienną niezależną, tu od-
wrotnie e było parametrem, a M zmienną niezależną. Ponieważ za-
leżność funkcyjna E od M jest inna niż zależność od e , więc za-
chowanie się zmiennej zależnej E w rozwinięciach wedle potęg M
i w rozwinięciach wedle potęg e jest zgoła odmienne.

Wracamy teraz do promienia zbieżności R_M . Ponieważ M jest
wprost proporcjonalne do czasu $(t - t_0)$ ²⁾, mianowicie (por. wzory
(42), (43) i (61 bis) rozdz. XIII-go).

$$M = n(t - t_0) = \frac{k}{a^{3/2}}(t - t_0),$$

przeto jeżeli zamiast anomalii średniej wprowadzimy czas, to pro-
mień zbieżności R_t wyrazi się wzorem

$$(47) \quad R_t = \frac{R_M}{n} = \frac{a^{3/2}}{k} R_M.$$

¹⁾ Funktionenlehre, str. 73. Moulton wskazuje na to, że owo twierdzenie
Weierstrassa właściwie dotyczy szeregu Laurenta, ale szeregi potęgowe są
szczególnym przypadkiem szeregu Laurenta.

²⁾ t_0 oznacza czas przejścia przez perihelium.

Skorzystamy w dalszym ciągu z tego wzoru, tymczasem atoli przejdziemy do przypadku paraboli. Tu związki są o wiele prostsze niż w przypadku elipsy, bo współrzędne wyrażają się wprost przez anomalie rzeczywistą, ta zaś wyraża się jako funkcyja czasu bez pośrednictwa anomalii mimośrodowej. Związki te są:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos v = \frac{p \cos v}{1 + \cos v} = \frac{1}{2} p (1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v) \\ y &= r \sin v = \frac{p \sin v}{1 + \cos v} = p \operatorname{tang} \frac{1}{2} v \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

oraz [równ. (46) rozdz. XIII-go]

$$\frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} v + \operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \frac{2k(t - t_0)}{p^{3/2}}.$$

Równanie różniczkowe analogiczne do równania (39) wygląda tak [otrzymujemy je z trzeciego wzoru (48)]:

$$\frac{d}{dt} (\operatorname{tang} \frac{1}{2} v) = \frac{2k}{p^{3/2} (\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v + 1)}. \quad (49)$$

Tedy $\operatorname{tang} \frac{1}{2} v$ jest funkcyą regularną czasu oprócz punktów, w których

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} v + 1 = 0,$$

t. j. punktów, w których

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \pm i. \quad (i = \sqrt{-1})$$

Skoro to podstawimy w trzecie równanie (48), to otrzymamy

$$t - t_0 = \pm i \frac{p^{3/2}}{3k}. \quad (50)$$

Zatem w płaszczyźnie zmiennej $t - t_0$ mamy dwa punkty osobliwe, oba położone na osi urojonej: jeden na odległości $+\frac{p^{3/2}}{3k}$ od początku współrzędnych, a drugi na odległości $-\frac{p^{3/2}}{3k}$. Stąd wynika, że jeżeli na osi wielkości realnych weźmiemy punkt — powiedzmy $-t_1 - t_0$, to odpowiedni promień zbieżności R_i będzie

$$R_i = \sqrt{(t_1 - t_0)^2 + \frac{p^3}{9k^2}}. \quad (51)$$

Ze wzoru (51) widzimy, że promień zbieżności jest najmniejszy w samym perihelium, bo tam $t_1 - t_0 = 0$.

Obliczenie promieni zbieżności ze wzorów (47) i (46) dla elipsy, albo ze wzoru (51) dla paraboli jest bardzo łatwe. W powszechnie używanych jednostkach Gaussa [por. § 11, rozdz. XIII]

$$\frac{1}{k} = 58,13244087 \dots \text{ dób sr. słonecznych,}$$

więc np. dla komety Halleya¹⁾, u której $p = 1,1743 \dots$, znajdziemy

$$\frac{p^{3/2}}{3k} = 24,66 \dots \text{ dni.}$$

To znaczy, że w samym perihelium promień zbieżności wynosi tylko $24^{2/3}$ dni; zatem gdybyśmy rozwinęli współrzędne x i y w szeregi potęgowe czasu biorąc jako zero czasu moment przejścia przez perihelium, to te szeregi byłyby bezwzględnie zbieżne tylko dla okresu czasu wynoszącego $24^{2/3}$ dni przed, lub po przejściu przez perihelium. Wskutek tego wyrażenia na stosunki między polami trójkątów byłyby także zbieżne tylko na $24^{2/3}$ dni po przejściu przez perihelium oraz na $24^{2/3}$ dni przed przejściem przez perihelium i możnaby używać szeregów (33) tylko w pomienionym okresie czasu. Gdyby więc obserwacya środkowa (druga) przypadała właśnie na moment przejścia przez perihelium, to koniecznie trzeba, aby pierwsza była co najwyżej o $24^{2/3}$ dni wcześniejszą a trzecia co najwyżej o $24^{2/3}$ późniejszą od chwili przejścia przez perihelium. Ponieważ zaś w pobliżu kresu zbieżności trzeba wyliczać bardzo wiele wyrazów szeregów, więc odwrotnie chcąc mieć szeregi szybko zbieżne, t. j. takie, w których można ograniczyć się do wyliczenia kilku pierwszych wyrazów, trzeba mieć nie obserwacye o $24^{2/3}$ dni odległe od środkowej a znacznie bliższe, mianowicie tylko o kilka dni późniejsze i wcześniejsze.

Zapóżyczamy wreszcie z cytowanej wyżej rozprawy Moultona dwie tabliczki, które mogą przydać się w praktyce. Pierwsza tabliczka odnosi się do ruchu eliptycznego. Przyjęto w niej $a = 2,65$,

¹⁾ Kometa Halleya krąży po elipsie, ale mimośród jest bliski do 1, mianowicie $e = 0,967281$.

Tę datę — podobnie jak pozostałe — czerpiemy z „Connaissance des Temps„ na 1913 rok.

bo to jest średnia wartość większej półosi małych planet a obliczono ją ze wzorów (44) i (45)

Tabliczka I.

R_t w dniach, gdy $a = 2,65$

e	$M_1 = 0^\circ$	$M_1 = 60^\circ$	$M_1 = 120^\circ$	$M_1 = 180^\circ$
0,0	∞ dni	∞ dni	∞ dni	∞ dni
0,1	501,2	553,0	726,0	933,7
0,2	329,3	421,1	620,0	854,0
0,3	230,7	349,6	573,7	821,0
0,4	163,1	302,2	550,1	805,1
0,5	113,0	285,9	537,3	796,0
0,6	74,9	273,1	530,5	791,5
0,7	45,5	266,5	527,3	789,3
0,8	23,4	263,7	525,8	788,4
0,9	7,7	262,7	525,3	788,0
0,95	2,8	262,6	525,2	788,0

Widzimy dowodnie z tej tablicy, jak zmniejsza się promień zbieżności w miarę zbliżania się planety ku perihelium. Dla $e = 0,95$ mamy w perihelium 2,8 dni a w aphelium 788,0. To znaczy, że gdyby środkowa obserwacya przypadła na moment przejścia planety przez perihelium, to już obserwacya po trzech dniach wykonana nie mogłaby żadną miarą być wzięta w rachubę; gdyby zaś przypadła na moment przejścia planety przez aphelium, to obserwacya wykonana we dwa miesiące później byłaby jeszcze zupełnie przydatną. Naturalnie wzięliśmy ten przykład tylko ze względu na jego drastyczność, bo asteroidy mają niewielkie mimośrodki. Gdybyśmy powiększyli lub zmniejszyli a , to wszystkie liczby powyższej tablicy też wzrosłyby lub zmniejszyłyby się w stosunku $\left(\frac{a}{2,65}\right)^{3/2}$ [por. wzór (47)].

Druga tabliczka odnosi się do paraboli. Kładziemy tu $p = 2$, co także mniej więcej odpowiada średnim stosunkom.

Tabliczka II.

 R_i w dniach dla $p = 2$ ($q = 1$)

$e = 1$	$M_0 = 0$	$M_0 = 60^\circ$	$M_0 = 120^\circ$
R_i	54,8	102	180,7

Wprowadziliśmy tu zamiast czasu argument M analogiczny do M w ruchu eliptycznym a określony przez równanie

$$M = \frac{2k^2}{p^{3/2}} (t - t_0).$$

Gdy p jest większe lub mniejsze od 2, to należy pomnożyć odpowiednie R_i przez $p^{3/2}$.

ROZDZIAŁ XVI.

Wyznaczenie orbity parabolicznej z trzech obserwacji. Metoda Olbersa.

1. Przejście do przypadku paraboli.

Oprócz końca § 4 i całego § 5, które były poświęcone równaniu Eulera odnoszącemu się do paraboli, nasze rozumowania i wzory miały charakter ogólny, dotyczyły zarówno orbit eliptycznych jak parabolicznych. Odtąd zajmujemy się metodą Olbersa służącą do wyznaczenia dróg parabolicznych, będziemy przeto musieli przysposobić wzory poprzedniego paragrafu do wymagań tej metody. Chodzi tu o wzory (26), którym musimy nadać nieco inny kształt. Wyobraźmy sobie, że liczymy długości nie od porównania dnia z nocą, a od innego punktu, którego długość (względem porównania dnia z nocą) jest L . Oczywiście równania (26) poprzedniego rozdziału w niczem się nie zmieniają, tylko zamiast λ trzeba będzie napisać $\lambda - L$ i tak samo zamiast \odot trzeba będzie napisać $\odot - L$. Liczmy np. długości w pierwszym i drugim równaniu (26) od \odot_2 , potem znowu w drugim równaniu od λ_2 a otrzymamy zamiast równań (26) poprzedniego rozdziału

$$\left. \begin{aligned} \varrho_2 \cos(\lambda_2 - \odot_2) - R_2 &= n_1 [q_1 \cos(\lambda_1 - \odot_2) - R_1 \cos(\odot_1 - \odot_2)] + \\ &\quad + n_3 [q_3 \cos(\lambda_3 - \odot_2) - R_3 \cos(\odot_3 - \odot_2)] \\ \varrho_2 \sin(\lambda_2 - \odot_2) &= n_1 [q_1 \sin(\lambda_1 - \odot_2) - R_1 \sin(\odot_1 - \odot_2)] + \\ &\quad + n_3 [q_3 \sin(\lambda_3 - \odot_2) - R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2)] \\ - R_2 \sin(\odot_2 - \lambda_2) &= n_1 [q_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2) - R_1 \sin(\odot_1 - \lambda_2)] + \\ &\quad + n_3 [q_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) - R_3 \sin(\odot_3 - \lambda_2)] \\ \varrho_2 \operatorname{tang} \beta_2 &= n_1 q_1 \operatorname{tang} \beta_1 + n_3 q_3 \operatorname{tang} \beta_3. \end{aligned} \right\} (1)$$

Naturalnie cztery równania (1) są równoważne trzem równaniom (26) poprzedniego rozdziału. Wyprowadziliśmy aż cztery ró-

wnania dlatego, że w niektórych przypadkach dogodniej jest rugować ϱ_2 z jednych równań, a w innych przypadkach z drugich. Dlatego rugujemy właśnie ϱ_2 , to się później okaże. Obecnie weźmiemy pospolity przypadek, w którym najdogodniej jest rugować ϱ_2 z drugiego i czwartego równania (1), mnożymy tedy drugie równanie (1) przez $\text{tang } \beta_2$, a czwarte przez $-\sin(\lambda_2 - \odot_2)$ i dodajemy jedno do drugiego, poczem otrzymujemy równanie:

$$(2) \quad \begin{aligned} & n_3 \varrho_3 [\text{tang } \beta_2 \sin(\lambda_3 - \odot_2) - \text{tang } \beta_3 \sin(\lambda_2 - \odot_2)] - \\ & \quad - n_3 R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2) \text{ tang } \beta_2 \\ & + n_1 \varrho_1 [\text{tang } \beta_2 \sin(\lambda_1 - \odot_2) - \text{tang } \beta_1 \sin(\lambda_2 - \odot_2)] + \\ & \quad + n_1 R_1 \sin(\odot_2 - \odot_1) \text{ tang } \beta_2 = 0. \end{aligned}$$

Chociaż $R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2)$ jest wielkością znaną, jednakże zastąpimy je przez inne również znane wielkości, a to dlatego, aby doprowadzić równanie (2) do pewnego specjalnego kształtu, z którego zaraz się okaże, jakie można zrobić uproszczenia i ułatwienia.

Oznaczmy podwójne pola trójkątów pomiędzy promieniami wodzącymi ziemi przez $|R_1 R_2|$ i t. d., a będziemy mieli

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} |R_1 R_2| &= R_1 R_2 \sin(\odot_2 - \odot_1) \\ |R_1 R_3| &= R_1 R_3 \sin(\odot_3 - \odot_1) \\ |R_2 R_3| &= R_2 R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2). \end{aligned} \right.$$

Spostrzegamy, że drugi i czwarty wyraz w równaniu (2) zawierają właśnie te podwójne pola trójkątów, podzielone zresztą przez promienie wodzące. Lecz napiszemy jeszcze podobnie jak w równaniach (23) poprzedniego rozdziału

$$N_1 = \frac{|R_2 R_3|}{|R_1 R_3|}, \quad N_3 = \frac{|R_1 R_2|}{|R_1 R_3|},$$

poczem otrzymamy

$$N_3 R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2) = N_1 R_1 \sin(\odot_2 - \odot_1).$$

Położmy jeszcze

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} M' &= \frac{\text{tang } \beta_2 \sin(\lambda_1 - \odot_2) - \text{tang } \beta_1 \sin(\lambda_2 - \odot_2)}{\text{tang } \beta_3 \sin(\lambda_2 - \odot_2) - \text{tang } \beta_2 \sin(\lambda_3 - \odot_2)} \\ M'' &= \frac{\sin(\odot_2 - \odot_1) \text{ tang } \beta_2}{\text{tang } \beta_3 \sin(\lambda_2 - \odot_2) - \text{tang } \beta_2 \sin(\lambda_3 - \odot_2)} \end{aligned} \right.$$

a będziemy mogli napisać równanie (2) w kształcie

$$\varrho_3 = \frac{n_1}{n_3} M' \varrho_1 + \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3} \right) M'' R_1. \quad (2 \text{ bis})$$

Możemy tu podstawić $\frac{n_1}{n_3}$ z trzeciego wzoru (33) poprzedniego rozdziału. Jeżeli atoli szukana orbita jest zupełnie nieznaną, to z początku r_2 i $\frac{dr_2}{dt}$ są nieznanne, więc musimy przyjąć poprostu:

$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$. Jeżeli odstęp czasu $t_3 - t_2$ i $t_2 - t_1$ są małe a w dodatku równe, to, jak to już było wskazane w poprzednim rozdziale (§ 7), powyższa hipoteza daje wcale niezłe przybliżenie. Co do $\frac{N_1}{N_3}$, to naturalnie moglibyśmy je wyliczyć ze wszelką dokładnością ze wzorów (3), ale w pierwszym przybliżeniu należy określić je z tego samego trzeciego równania (33) poprzedniego rozdziału (podstawiając naturalnie R zamiast r) i z tą samą dokładnością co $\frac{n_1}{n_3}$, więc należy poprostu położyć także

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3}.$$

Widzimy stąd, że w pierwszym przybliżeniu różnica

$$\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}$$

poprostu znika i że równanie (2 bis) przywodzi się do równania

$$\varrho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3} M' \varrho_1, \quad (5)$$

w którym M' , τ_1 i τ_3 są znane, a zarazem spostrzegamy, dla jakiej racyi rugowaliśmy ϱ_2 z równania (2). Obecnie chodzi o to, aby z pomocą równania (5) wyrazić r_1 , r_3 i cięciwę s przez jedną zmienną ϱ_1 , — poczem można będzie zastosować równanie Eulera.

Oznaczmy w trójkącie płaskim: T (ziemia), S_1 (słońce), P_1 (kometę) przez ψ_1 — kąt przy ziemi (w czasie pierwszej obserwacji) a przez w_1 nachylenie płaszczyzny tego trójkąta do płaszczyzny ekliptyki. Oczywiście płaszczyzna trójkąta TP_1S_1 przecina się z płaszczyzną ekliptyki wzdłuż prostej, której długość jest to właśnie długość słońca \odot_1 w czasie pierwszej obserwacji. Popro-

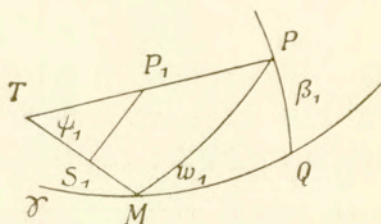
wadźmy jeszcze przez P_1 koło szerokości, które przetnie ekliptykę w punkcie Q . Długość punktu Q będzie λ_2 , przeto w trójkącie sferycznym prostokątnym [kąć prosty znajduje się przy Q] PMQ :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \psi_1 = \cos \beta_1 \cos (\lambda_1 - \odot_1) \\ \sin \psi_1 \cos w_1 = \cos \beta_1 \sin (\lambda_1 - \odot_1) \\ \sin \psi_1 \sin w_1 = \sin \beta_1. \end{array} \right.$$

Stąd

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } w_1 = \frac{\text{tang } \beta_1}{\sin (\lambda_1 - \odot_1)} \\ \text{tang } \psi_1 = \frac{\text{tang } (\lambda_1 - \odot_1)}{\cos w_1}. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} TP_1 &= \Delta_1 \\ TS_1 &= R_1 \\ S_1P_1 &= r_1 \\ PM &= \psi_1 \\ PQ &= \beta_1 \end{aligned}$$



$$MQ = \lambda_1 - \odot_1$$

Ryc. 28.

Można określić najpierw w_1 z pierwszego wzoru (7) a potem ψ_1 z drugiego; ale krócej będzie określić kąt ψ_1 wprost z pierwszego wzoru (6) przez \cos inus. Wątpliwości co do kwadrantu, w którym kąt ψ_1 jest położony, nie będzie, bo ψ_1 jest dodatnim kątem mniejszym od 180° a $\cos \psi_1$ musi mieć ten sam znak, co $\cos (\lambda_1 - \odot_1)$, albowiem $\cos \beta_1$ jest zawsze dodatni. Naturalnie można napisać zupełnie takie same wzory dla trzeciej obserwacji. Jednym słowem łatwo jest znaleźć kąty ψ_1 i ψ_3 . Ale

$$r_1^2 = \Delta_1^2 + R_1^2 - 2R_1\Delta_1 \cos \psi_1 = (\Delta_1 - R_1 \cos \psi_1)^2 + R_1^2 \sin^2 \psi_1,$$

co ze względu na związek

$$\rho = \Delta \cos \beta$$

można też napisać w postaci

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1^2 = (\rho_1 \sec \beta_1 - R_1 \cos \psi_1)^2 + R_1^2 \sin^2 \psi_1, \\ \text{tak samo} \\ r_3^2 = (\rho_3 \sec \beta_3 - R_3 \cos \psi_3)^2 + R_3^2 \sin^2 \psi_3. \end{array} \right.$$

Teraz w drugim równaniu (8) rugujemy ϱ_3 za pomocą równania (5) i otrzymujemy oba promienie wodzące r_1 i r_3 jako funkcyę samych znanych wielkości i jednej niewiadomej ϱ_1 . Pozostała jeszcze cięciwa s . Oczywiście

$$s^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2. \quad (9)$$

Ale na mocy wzorów (2) lub (2 bis) i (25) poprzedniego rozdziału

$$x_1 = \varrho_1 \cos \lambda_1 - R_1 \cos \odot_1$$

$$y_1 = \varrho_1 \sin \lambda_1 - R_1 \sin \odot_1$$

$$z_1 = \varrho_1 \operatorname{tang} \beta_1$$

i tak samo

$$x_3 = \varrho_3 \cos \lambda_3 - R_3 \cos \odot_3$$

$$y_3 = \varrho_3 \sin \lambda_3 - R_3 \sin \odot_3$$

$$z_3 = \varrho_3 \operatorname{tang} \beta_3.$$

Wyrugujmy teraz ϱ_3 za pomocą równania (5) kładąc jeszcze dla krótkości

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = M' \frac{r_1}{r_3} = M. \quad (10)$$

i napiszmy

$$x_3 - x_1 = \varrho_1 (M \cos \lambda_3 - \cos \lambda_1) - (R_3 \cos \odot_3 - R_1 \cos \odot_1)$$

Wyrażenia na $x_3 - x_1$ i t. d. zawierają oprócz ϱ_1 same tylko znane wielkości, moglibyśmy tedy na nich poprzestać; ale dla ułatwienia rachunków wprowadzimy jeszcze pewne pomocnicze wielkości określone przez równania

$$\left. \begin{aligned} R_3 \cos \odot_3 - R_1 \cos \odot_1 &= g \cos G \\ R_3 \sin \odot_3 - R_1 \sin \odot_1 &= g \sin G, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

które znanym i tyłokrotnie używanym sposobem przyprowadzamy do kształtu

$$\left. \begin{aligned} R_3 \cos (\odot_3 - \odot_1) - R_1 &= g \cos (G - \odot_1) \\ R_3 \sin (\odot_3 - \odot_1) &= g \sin (G - \odot_1). \end{aligned} \right\} \quad (11 \text{ bis})$$

Oczywiście g jest to cięciwa drogi ziemskiej od pozycyi ziemi w czasie pierwszej obserwacyi do pozycyi w czasie trzeciej obserwacyi a G jest to długość ziemi w pierwszej pozycyi widziana z trzeciej.

Tak samo położmy

$$(12) \quad \begin{cases} M \cos \lambda_3 - \cos \lambda_1 = h \cos \zeta \cos H \\ M \sin \lambda_3 - \sin \lambda_1 = h \cos \zeta \sin H \\ M \operatorname{tang} \beta_3 - \operatorname{tang} \beta_1 = h \sin \zeta. \end{cases}$$

Znowu znanym i tylokrotnie używanym sposobem przywieziemy te równania do kształtu dogodniejszego do rachunku:

$$(12 \text{ bis}) \quad \begin{cases} M - \cos(\lambda_3 - \lambda_1) = h \cos \zeta \cos(H - \lambda_3) \\ \sin(\lambda_3 - \lambda_1) = h \cos \zeta \sin(H - \lambda_3) \\ M \operatorname{tang} \beta_3 - \operatorname{tang} \beta_1 = h \sin \zeta \end{cases}$$

skąd znowu

$$\operatorname{tang}(H - \lambda_3) = \frac{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}{M - \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

i t. d. i t. d.

Ponieważ lewe strony równań (11) i (12), względnie (11 bis) i (12 bis) zawierają same tylko znane wielkości, więc możemy określić g i h , G i H oraz ζ bez żadnych wątpliwości, poczem napiszemy:

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 &= \varrho_1 h \cos \zeta \cos H - g \cos G \\ y_3 - y_1 &= \varrho_1 h \cos \zeta \sin H - g \sin G \\ z_3 - z_1 &= \varrho_1 h \sin \zeta. \end{aligned}$$

Skoro to podstawimy w równanie cięciwy (9), to otrzymamy je w postaci

$$(9 \text{ bis}) \quad s^2 = \varrho_1^2 h^2 - 2g\varrho_1 h \cos \zeta \cos(G - H) + g^2.$$

Dokonyamy jeszcze jednego podstawienia, mianowicie położmy

$$(13) \quad \cos \zeta \cos(G - H) = \cos \varphi,$$

przezem zauważymy, że łatwo obliczyć kąt φ , albowiem tak $\cos \zeta$ jak $\cos(G - H)$ są znane. Następnie w drugim równaniu (8) wyrugujemy ϱ_3 za pomocą wzoru (5) z uwagą na (10) i otrzymamy ostatecznie zamiast równań (8) i (9 bis)

$$(14) \quad \begin{cases} r_1^2 = (\varrho_1 \sec \beta_1 - R_1 \cos \psi_1)^2 + R_1^2 \sin^2 \psi_1 \\ r_3^2 = (\varrho_1 M \sec \beta_3 - R_3 \cos \psi_3)^2 + R_3^2 \sin^2 \psi_3 \\ s^2 = (\varrho_1 h - g \cos \varphi)^2 + g^2 \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

Widzimy, że r_1 , r_3 i s są wyrażone przez same znane wielkości i przez ϱ_1 ; gdybyśmy tedy podstawili je w równanie Eulera [patrz równanie (16) w poprzednim rozdziale]:

$$6\tau_2 = (r_1 + r_3 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_3 - s)^{3/2}, \quad (15)$$

to otrzymalibyśmy równanie zawierające tylko jedną niewiadomą ϱ_1 . Wiemy już, że ta droga byłaby i trudną i niepraktyczną, przeto rozwiązujemy system równań (14) i (15) przez kolejne przybliżenia. Wedle § 5 poprzedniego rozdziału z początku trzeba przyjąć na $r_1 + r_3$ przybliżoną wartość (zwykle 2) i obliczyć s . Z tem s trzeba przejść do równań (14). Oczywiście, skoro s będzie wiadome, to trzecie równanie (14) posłuży nam do obliczenia ϱ_1 , poczem z pierwszego i drugiego równania (14) znajdziemy r_1 i r_3 ; wtedy znów powrócimy do równania (15), znów określimy s i tak w kółko póty, póki przy nowem podstawieniu nie otrzymamy tych samych, co poprzednio, wartości, bo to będzie oznaczać, że już uczyniliśmy zadość równaniom. W celu ułatwienia rachunku kładą jeszcze ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \text{skąd} \quad \varrho h_1 - g \cos \varphi &= u, \\ \varrho_1 &= \frac{u + g \cos \varphi}{h}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

a zarazem kładą:

$$\left. \begin{aligned} g \sin \varphi &= A, \quad R_1 \sin \psi_1 = B_1, \quad R_3 \sin \psi_3 = B_3, \\ h \cos \beta_1 &= f_1, \quad \frac{h}{M} \cos \beta_3 = f_3, \\ g \cos \varphi - f_1 R_1 \cos \psi_1 &= c_1, \quad g \cos \varphi - f_3 R_3 \cos \psi_3 = c_3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

i piszą równania (14) w kształcie:

$$\left. \begin{aligned} s^2 &= u^2 + A^2 \\ r_1^2 &= \left(\frac{u + c_1}{f_1} \right)^2 + B_1^2 \\ r_3^2 &= \left(\frac{u + c_3}{f_3} \right)^2 + B_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (14 \text{ bis})$$

Obliczając u możemy mieć wątpliwość co do znaku pierwiastka

$$u = \pm \sqrt{s^2 - A^2}.$$

¹⁾ Naturalnie nie należy mięsząc tego u z argumentem szerokości.

Niekiedy można rozstrzygnąć tę wątpliwość odrazu. Ponieważ ϱ_1 , h i g są to dodatnie wielkości a $0 < \varphi < 180^\circ$, więc gdy $90^\circ < \varphi < 180^\circ$, to z pierwszego wzoru (16) wnosimy, że u jest dodatnie; ale jeżeli $0 < \varphi < 90^\circ$, to niekiedy trudno rozstrzygnąć, który znak wziąć należy. Jednakże najczęściej zdarza się, że u jest dodatnie a to dla następującego powodu. Cięciwa orbity komety i cięciwa orbity ziemi są mniej więcej w tym samym stosunku co liniowe prędkości komety i ziemi w czasie środkowej (drugiej) obserwacji. Wedle wzoru (55) rozdziału XIII-go prędkość komety

jest $\sqrt{\frac{2}{r_2}} k$ a ziemi (przybliżenie) k , zatem mamy przybliżenie

$$s = g \sqrt{\frac{2}{r_2}}.$$

Rzadko zdarza się, aby odległość komety od słońca w czasie drugiej obserwacji była większa niż podwójna odległość ziemi od słońca; zwykle bywa mniejsza, tedy z zwykle bywa:

$$s > g.$$

Lecz ze wzoru (9 bis), który z uwagi na wzór (13) można napisać w kształcie

$$s^2 = \varrho_1^2 h^2 - 2\varrho_1 h g \cos \varphi + g^2,$$

widać, że skoro

$$s > g,$$

to

$$\varrho_1 h > 2g \cos \varphi,$$

bo ϱ_1 i h są dodatnie. Więc wedle pierwszego wzoru (16)

$$u > \frac{1}{2} \varrho_1 h$$

i z pewnością dodatnie.

2. Usprawiedliwienie metody Olbersa. Przypadek, gdy trzeba zmienić bieg rachunku.

Wyłożyliśmy w poprzednim paragrafie metodę Olbersa w tej formie, jaką nadał jej J. F. Encke¹⁾. Atoli może się komu wydać

¹⁾ Über die Olbers'sche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen. Berl. astr. Jahrb. f. 1833. Rozprawa uważana za klasyczną; większość podręczników podaje jej treść z pewnemi tylko modyfikacyami.

dziwnem, dlaczego nie idziemy najprostszą, najnaturalniejszą drogą. Wszak możnaby w równania (26) poprzedniego rozdziału podstawić wartości na n_1 i n_3 z pierwszego i drugiego wzoru (33) poprzedniego rozdziału. W pierwszym przybliżeniu podstawilibyśmy $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ i $\frac{\tau_3}{\tau_2}$, w następnych uwzględnilibyśmy dalsze wyrazy szeregów. Równania (26) poprzedniego rozdziału są przecie liniowe, rozwiązanie ich byłoby łatwe i dałoby nam odrazu ϱ_1 , ϱ_2 i ϱ_3 . Mając zaś te trzy wielkości łatwo obliczylibyśmy $\Delta_1 \dots$ i t. d. za pomocą wzorów (25) poprzedniego rozdziału, potem $r_1 \dots$ i t. d. za pomocą wzorów (8) niniejszego rozdziału i t. d. i t. d. Jednakże w praktycznym zastosowaniu takie postępowanie byłoby niedogodnem a to dla następującego powodu. Trzy obserwacye dają sześć współrzędnych, tymczasem w przypadku paraboli mamy określić tylko pięć elementów. Gdybyśmy postępowali wedle przed chwilą nakreślonego programu, to wprowadzilibyśmy do rachunku wszystkie sześć obserwowanych współrzędnych. Atoli ze względu na błędy obserwacyi a także na błędy teoryi [wszak rozważana orbita w istocie nie jest ani parabolą, ani nawet stożkowem przecięciem] nadliczbowy warunek spełnionym być nie może, musielibyśmy tedy natrafić na sprzeczności. Aby ich uniknąć, należy obrać taką metodę, w której można obejść się pięciu datami obserwacyjnymi. Temu postulatowi czyni zadość metoda Olbersa, bo współrzędne komety w czasie środkowej obserwacyi λ_2 i β_2 służą tylko do obliczenia współczynników M' i M'' [patrz wzory (4)] i to w taki sposób, że zależność tych współczynników od λ_2 i β_2 jest równoważna zależności od jednej współrzędnej. Rzeczywiście λ_2 i β_2 wchodzą do współczynników M' i M'' tylko w kombinacyi

$$\frac{\text{tang } \beta_2}{\sin (\lambda_2 - \odot_2)};$$

z drugiej strony, jeżeli oznaczymy przez w_2 nachylenie pewnej płaszczyzny do ekliptyki, to równanie

$$\text{tang } w_2 = \frac{\text{tang } \beta_2}{\sin (\lambda_2 - \odot_2)}$$

będzie wyrażać warunek, aby owa płaszczyzna przechodziła przez pozycyę komety i słońca w czasie środkowej obserwacyi. Zatem możemy powiedzieć, że w metodzie Olbersa do wzorów wchodzi

tylko jedna funkcyja współrzędnych λ_2 i β_2 , następnie możemy powiedzieć, że w tej metodzie orbita musi przechodzić przez pierwszą i trzecią obserwowaną pozycyę komety, ale niekoniecznie przez drugą (środkową), że jednakże obliczona środkowa pozycyja komety musi leżeć na wielkiem kole przechodzącem przez obserwowaną środkową (drugą) pozycyę i przez ówczesne miejsce słońca. Należy teraz zastanowić się nad przypadkiem, w którym wyłożone w poprzednim paragrafie postępowanie zawodzi.

Gdy trzy obserwowane pozycyie komety leżą w jednej płaszczyźnie z drugą pozycyą słońca, to wspólny mianownik obu wzorów (4) i licznik pierwszego znikają na podstawie tylko co napisanego wzoru

$$\text{tang } w = \frac{\text{tang } \beta}{\sin(\lambda - \odot)},$$

albowiem wtedy

$$\text{tang } w = \frac{\text{tang } \beta_2}{\sin(\lambda_2 - \odot_2)} = \frac{\text{tang } \beta_1}{\sin(\lambda_2 - \odot_1)} = \frac{\text{tang } \beta_3}{\sin(\lambda_3 - \odot_2)}.$$

Z tego powodu M' staje się nieokreślonem a M'' nieskończenie wielkiem. Rzecz prosta, że wzory (2 bis) i (5) są w takim razie zgoła nieprzydatne. Co więcej nie można ich używać już wtedy, gdy M' jest stosunkiem dwóch bardzo małych wielkości a M'' jest duże, albowiem wtedy błędy obserwacyi mają nazbyt wielki wpływ na wartości M' i M'' a przez nie i na dalsze rachunki. W takim razie należy uciec się do trzeciego¹⁾ wzoru (1), który także wcale nie zawiera q_2 , albo też do wzoru, który otrzymamy rugując q_2 między pierwszym a czwartym wzorem (1). Dogodniejszym i pewniejszym jest trzeci wzór (1), albowiem zawodzi tylko wtedy, gdy ruch komety w długości jest bardzo mały. Dłaczego wtedy zawodzi, to zaraz okaże się, skoro rozwiążemy go względem q_3

$$q_3 = \frac{-\frac{n_1}{n_3} q_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{n_1}{n_3} R_1 \sin(\odot_1 - \lambda_2) - \frac{1}{n_3} R_2 \sin(\odot_2 - \lambda_2) + R_3 \sin(\odot_3 - \lambda_2)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_2)} \quad (18)$$

Zaraz widać, że jeżeli $\lambda_3 - \lambda_2$ jest małe, to mianownik jest mały a co gorsze, we wysokim stopniu zależny od błędów obserwacyi²⁾.

¹⁾ Teraz widzimy, dla jakiego celu ten wzór był potrzebny.

²⁾ Rzecz jasna, że ten sam błąd zmienia procentowo daną wielkość tem więcej, im sama owa wielkość jest mniejsza.

Gdyby jednak zdarzył się taki zbieg okoliczności, żeby normalne postępowanie było niemożliwe a jednocześnie ruch komety w długości był bardzo mały, to trzeba użyć wzoru, który wynika z rugowania ϱ_2 pomiędzy pierwszym a czwartym wzorem (1), a który wygląda tak:

$$\varrho_3 = \frac{\frac{n_1}{n_3} \varrho_1 \operatorname{tang} \beta_2 \cos(\lambda_1 - \odot_2) - \operatorname{tang} \beta_1 \cos(\lambda_2 - \odot_2) + \left[\frac{1}{n_3} R_2 - \frac{n_1}{n_3} R_1 \cos(\odot_2 - \odot_1) - R_3 \cos(\odot_3 - \odot_2) \right] \operatorname{tang} \beta_2}{\operatorname{tang} \beta_3 \cos(\lambda_2 - \odot_2) - \operatorname{tang} \beta_2 \cos(\lambda_3 - \odot_2)}. \quad (19)$$

Jak i skąd podstawić $\frac{n_1}{n_3}$, tem zajmować się nie potrzebujemy, bo już w poprzednim paragrafie była o tem mowa, ale trzeba zająć się wielkością $\frac{1}{n_3}$, która figuruje tak we wzorze (18) jak we wzorze (19). Na podstawie drugiego wzoru (33) z poprzedniego rozdziału

$$\frac{1}{n_3} = \frac{\tau_2}{\tau_3} \left[1 - \frac{1}{6} \tau_1 \frac{(\tau_2 + \tau_3)}{r_2^3} + \dots \right]$$

i zupełnie tak samo

$$\frac{1}{N_3} = \frac{\tau_2}{\tau_3} \left[1 - \frac{1}{6} \tau_1 \frac{(\tau_2 + \tau_3)}{R_2^3} + \dots \right]$$

Tedy

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{N_3} - \frac{1}{6} \frac{\tau_2}{\tau_3} \tau_1 (\tau_2 + \tau_3) \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) + \dots$$

Jeżeli to podstawimy we wzory (18) i (19), jeżeli we wyrazie nie zawierającym ϱ_1 położymy $\frac{n_1}{n_3} = \frac{N_1}{N_3}$, to po pewnych redukeyach, których tu przerabiać nie będziemy, możemy przywieść te wzory do postaci:

$$\varrho_3 = \varrho_1 \frac{n_1}{n_3} \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_2)} - \frac{1}{6} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_3} (\tau_2 + \tau_3) \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) R_2 \frac{\sin(\lambda_2 - \odot_2)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_2)} \quad (18 \text{ bis})$$

$$\varrho_3 = \varrho_1 \frac{\frac{n_1}{n_3} [\operatorname{tang} \beta_2 \cos(\lambda_1 - \odot_2) - \operatorname{tang} \beta_1 \cos(\lambda_2 - \odot_2)]}{\operatorname{tang} \beta_3 \cos(\lambda_2 - \odot_2) - \operatorname{tang} \beta_2 \cos(\lambda_3 - \odot_2)} - \frac{\frac{1}{6} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_3} (\tau_2 + \tau_3) \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) R_2 \operatorname{tang} \beta_2}{\operatorname{tang} \beta_3 \cos(\lambda_2 - \odot_2) - \operatorname{tang} \beta_2 \cos(\lambda_3 - \odot_2)}. \quad (19 \text{ bis})$$

niewielko prościej niż postać pierwotnych wzorów (18) i (19). Naturalnie z początku, gdy r_2 jest jeszcze nieznane, musimy opuścić wyraz zawierający $\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)$ a w dalszych przybliżeniach musimy odpowiednio zmodyfikować wzory (14), bo związek między q_3 i q_1 nie jest kształtu (10), t. j. $q_3 = Mq_1$, a kształtu $q_3 = Mq_1 + M_1$.

3. Obliczenie elementów parabolicznej orbity.

Po obliczeniu r_1 , r_3 i s można i należy obliczyć współrzędne heliocentryczne komety. Oznaczamy heliocentryczną długość i szerokość przez l i b , następnie piszemy prostokątne heliocentryczne współrzędne na dwa sposoby i łączymy je znakami równości

$$(20) \quad \begin{cases} r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \odot_1) = q_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1) - R_1 \\ r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \odot_1) = q_1 \sin(\lambda_1 - \odot_1) \\ r_1 \sin b_1 = q_1 \tan \beta_1. \end{cases}$$

Odpowiednich równań dla trzeciej pozycji nie piszemy, bo w nich nie różnią się od równań odnoszących się do pierwszej pozycji. Wszystko, co stoi po prawej stronie, jest znane; łatwo przeto znajdziemy r_1 , r_3 , l_1 , l_3 , b_1 i b_3 , ponieważ zaś r_1 i r_3 już są znane, więc jednocześnie sprawdzimy część rachunku. Jeżeli $l_3 > l_1$, to ruch komety jest prosty, jeżeli $l_3 < l_1$, to wsteczny.

Po obliczeniu heliocentrycznych współrzędnych możemy przystąpić do obliczenia elementów. Zaczynamy od długości węzła Ω i nachylenia i . Z trójkąta sferycznego prostokątnego [kąć prosty jest przy D] NKD wedle wzorów (7 bis) rozdz. I-go mamy:

$$(21) \quad \begin{aligned} \tan i \sin(l_1 - \Omega) &= \tan b_1 \\ \tan i \sin(l_3 - \Omega) &= \tan b_3. \end{aligned}$$

Możemy przekształcić te wzory w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \tan i [\sin(l_1 - \Omega) + \sin(l_3 - \Omega)] &= \tan b_1 + \tan b_3 \\ \tan i [\sin(l_1 - \Omega) - \sin(l_3 - \Omega)] &= \tan b_1 - \tan b_3. \end{aligned}$$

Stosując znane wzory

$$\sin m \pm \sin n = 2 \sin \frac{1}{2}(m \pm n) \cos \frac{1}{2}(m \mp n)$$

oraz

$$\tan m \pm \tan n = \frac{\sin(m \pm n)}{\cos m \cos n}$$

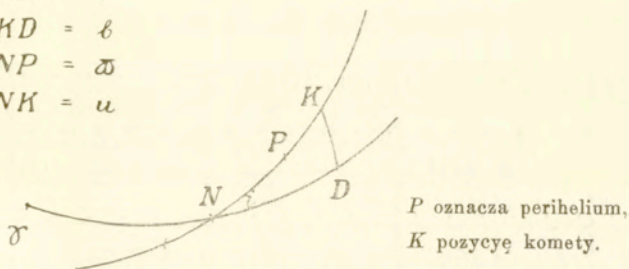
otrzymamy natychmiast:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} i \sin \left[\frac{1}{2} (l_3 + l_1) - \Omega \right] &= \frac{\sin (b_3 + b_1)}{2 \cos \frac{1}{2} (l_3 - l_1) \cos b_1 \cos b_3} \\ \operatorname{tang} i \cos \left[\frac{1}{2} (l_3 + l_1) - \Omega \right] &= \frac{\sin (b_3 - b_1)}{2 \sin \frac{1}{2} (l_3 - l_1) \cos b_1 \cos b_3} \end{aligned} \right\} (21 \text{ bis})$$

We wzorach (21) ilości niewiadome są w taki sposób związane z wiadomymi, że dalsze rachunki nie sprawiają żadnych trudności. Oczywiście należy najpierw dzielić pierwsze równanie przez drugie, aby otrzymać równanie na

$$\operatorname{tang} \left[\frac{1}{2} (l_3 + l_1) - \Omega \right],$$

$$\begin{aligned} \sigma N &= \delta \\ \sigma D &= \ell \\ KD &= \ell \\ NP &= \alpha \\ NK &= u \end{aligned}$$



Ryc. 29.

poczem można z któregokolwiek równania określić $\operatorname{tang} i$. Przypominamy, że $\operatorname{tang} i > 0$ przy ruchu prostym, zaś $\operatorname{tang} i < 0$ przy ruchu wstecznym.

Skoro będziemy mieli Ω oraz i , to będziemy mogli obliczyć „argument szerokości“ u . Z tego samego trójkąta NKD znajdujemy

$$\operatorname{tang} u_1 = \frac{\operatorname{tang} (l_1 - \Omega)}{\cos i}, \quad \operatorname{tang} u_3 = \frac{\operatorname{tang} (l_3 - \Omega)}{\cos i}.$$

Jednocześnie zaś mamy równania w rodzaju

$$\sin b_1 = \sin u_1 \sin i$$

oraz inne równania odnoszące się do trójkąta sferycznego NKD , z których można będzie określić znaki $\cos u$ i $\sin u$, t. j. określić w jakich kwadrantach znajdują się kąty u_1 i u_3 .

Następnie ponieważ

$$u_3 - u_1 = v_3 - v_1,$$

więc możemy określić $v_3 - v_1$, podstawić je w równanie

$$s^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(v_3 - v_1)$$

i sprawdzić wartość na s . Z drugiej strony $\tilde{\omega}$ [odległość perihelium od węzła, por. wzór (72) rozdziału XIII-go] jest określona przez równanie

$$u = v + \tilde{\omega}.$$

Otóż można znaleźć $\tilde{\omega}$ jednocześnie z q ($q = \frac{1}{2}p$ to jest odległość komety od słońca w perihelium) w następujący sposób. U paraboli [por. wzór (45) rozdz. XIII-ty]

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v},$$

tedy rugując v możemy napisać

$$r_1 = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2}(u_1 - \tilde{\omega})}, \quad r_3 = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2}(u_3 - \tilde{\omega})},$$

albo też

$$(22) \quad \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2}(u_1 - \tilde{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{r_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2}(u_3 - \tilde{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{r_3}}.$$

Przez dodawanie i odejmowanie otrzymujemy stąd najpierw

$$\frac{1}{\sqrt{q}} [\cos \frac{1}{2}(u_3 - \tilde{\omega}) + \cos \frac{1}{2}(u_1 - \tilde{\omega})] = \frac{1}{\sqrt{r_3}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}} [\cos \frac{1}{2}(u_3 - \tilde{\omega}) - \cos \frac{1}{2}(u_1 - \tilde{\omega})] = \frac{1}{\sqrt{r_3}} - \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

a potem przez łatwe przekształcenie

$$(22 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{q}} \cos [\frac{1}{4}(u_3 + u_1) - \frac{1}{2} \tilde{\omega}] \cos \frac{1}{4}(u_3 - u_1) = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_3}} \\ \frac{2}{\sqrt{q}} \sin [\frac{1}{4}(u_3 + u_1) - \frac{1}{2} \tilde{\omega}] \sin \frac{1}{4}(u_3 - u_1) = \frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{\sqrt{r_3}}. \end{cases}$$

Dzieląc drugie z tych równań przez pierwsze otrzymamy równanie, w którym jedyną niewiadomą będzie $\tilde{\omega}$, bo u_3 i u_1 są już znane. Obliczywszy $\tilde{\omega}$ znajdziemy q z któregokolwiek równania,

znając zaś q znamy tem samem p a więc rozmiary paraboli. Jednocześnie znajdziemy także długość perihelium π , albowiem przy ruchu prostym

$$\pi = \varrho + \tilde{\omega},$$

a przy wstecznym

$$\pi = \varrho - \tilde{\omega},$$

zaś długość węzła ϱ już jest znana.

Pozostaje jeszcze do określenia czas przejścia przez perihelium t_0 . Do określenia tego czasu możemy użyć wzoru (46) z rozdziału XIII-go, który możemy napisać tak:

$$t_0 = t_1 - \frac{\sqrt{2q^3}}{k} [\text{tang } \frac{1}{2} v_1 + \text{tang}^3 \frac{1}{2} v_1]. \quad (23)$$

Oczywiście możemy napisać taki sam wzór dla trzeciej obserwacji; obie wartości na t_0 powinny się zgadzać, mamy przeto nową próbę rachunków. Można obejść się bez obliczania prawej strony równania (23), bo za pomocą tablic Barkera [lub innych podobnych] można odrazu dla danej anomalii prawdziwej v znaleźć wartość dwumianu w nawiasie. Wspominałem już, że tablice Barkera (albo też tablice na nich wzorowane) znajdują się w rozmaitych podręcznikach traktujących o wyznaczeniu orbit.

4. Wielorakie rozwiązania.

Już w rozdziale XV-tym, § 2 wspominaliśmy, że w przypadku paraboli mogą być niekiedy trzy rozwiązania. Należy teraz nieco wyjaśnić tę sprawę. Równania, które dają powód do tej wieloznaczności, to równania (14) i (15) obecnego rozdziału. Widać zaraz, że gdybyśmy podstawili r_1 , r_3 i s z równań (14) w równanie (15), to otrzymalibyśmy równanie z jedną niewiadomą ϱ_1 . Uwalniając od pierwiastków otrzymalibyśmy równanie bardzo wysokiego stopnia a jednocześnie wprowadzilibyśmy wiele nowych pierwiastków, obcych samemu zadaniu. Ale jeżeli, jak to np. uczynił Oppolzer, pominiemy małe wielkości wyższych rzędów, to otrzymamy w końcu równanie algebraiczne szóstego stopnia względem ϱ_1 , które ma albo cztery, albo dwa urojone pierwiastki. Pozostają więc albo dwa, albo cztery pierwiastki rzeczywiste. W pierwszym razie jeden pierwiastek jest dodatni a drugi ujemny, w drugim mogą

być albo trzy odjemne oraz jeden dodatni, albo jeden odjemny oraz trzy dodatnie. Ostatecznie zatem mamy albo jeden, albo trzy pierwiastki dodatnie, t. j. jedno, albo trzy rozwiązania, bo tylko dodatnie pierwiastki mają fizyczne znaczenie. Przypadki, w których trzy systemy elementów rzeczywiście czynią zadość trzem obserwacyom, już zdarzały się w praktyce astronomicznej. Oppolzer wykazał, że taki przypadek zachodzi z kometą Cruksa, Czornyj skonstatował to samo co do komety 1910 *a* i t. d. i t. d. Charlier twierdzi nawet¹⁾, że ta wieloznaczność zachodzi co najmniej dla połowy komet?

Pospolicie do rozpoznania, który z trzech systemów odpowiada rzeczywistości, wystarcza porównanie obliczonej środkowej pozycyi z obserwowaną, gdyby zaś pozostawała jeszcze jaka wątpliwość, to rozstrzygnie ją czwarta obserwacya. Ale, jak to dowiódł Czornyj²⁾, można bez żadnych nowych obserwacyi drogą czysto analityczną rozpoznać, które z trzech rozwiązań jest zgodne z rzeczywistością. Jak to można zrobić, pokażemy dopiero w rozdziale XVIII-tym, gdy przejdziemy do rozpatrzenia tak zwanej analitycznej metody wyznaczenia orbit.

5. Przykład.

Zapożyczamy przykład z „Guide du calculateur“ J. Boccardiego³⁾, ale, aby go uczynić zrozumialszym, przeprowadzamy rachunki nieco obszerniej, niżli to się zwykle robi i opatrujemy komentarzami.

Obliczenie pierwszej orbity komety Zona⁴⁾ 1890 IV metodą Olbersa⁵⁾:

1890 r.:	Listopada 16:	Listopada 21:	Grudnia 5:
	$\alpha = 82^{\circ} 33' 1'',5$	$75^{\circ} 2' 1'',4$	$55^{\circ} 4' 41'',2$
	$\delta = 33 38 3,2$	$34 39 23,0$	$34 43 42,9$

¹⁾ Monthly Notices R. A. S., tom LXXI, str. 122.

²⁾ S. Tscherny: Mehrfache Lösungen des Kometenproblems. Astr. Nachr., tom CLXXVI, str. 365—370.

³⁾ Paryż 1902, cz. II, str. 63.

⁴⁾ „Zona“ nazwisko astronoma, który ją odkrył. Była to mała kometa.

⁵⁾ Schemat rachunku zapożyczony z berlińskiego „Rechenbureau“.

Zamieniamy współrzędne równikowe na ekliptyczne wedle wzorów (4 bis) rozdziału VI-go:

$\log \sin \alpha =$	9,996318	9,985012	9,913779
$\log \cos \delta =$	9,920432	9,915177	9,914798
$\log n \cos N =$	9,916750	9,900189	9,828577
$\log n \sin N = \log \sin \delta =$	9,743423	9,754848	9,755638
$-\log n \cos N =$	—9,916750	—9,900189	—9,828577
$\log \operatorname{tang} N =$	9,826673	9,854659	9,927061
$N =$	33° 51' 31",0	35° 35' 12",7	40° 12' 40",0
$-\varepsilon^1) =$	—23 27 12,9	—23 27 12,9	—23 27 12,9
$N - \varepsilon =$	10° 24' 18",1	12° 7' 59",8	16° 45' 27",1
$\log n \sin N = \log \sin \delta =$	9,743423	9,754848	9,755638
$-\log \sin N =$	—9,745968	—9,764876	—9,809967
$\log n =$	9,997455	9,989972	9,945671
$\log \sin (N - \varepsilon) =$	9,256731	9,322605	9,459878
$\log \sin \beta =$	9,254186	9,312577	9,405549
$\log \cos \delta =$	9,920432	9,915177	9,914798
$\log \cos \alpha =$	9,112785	9,412041	9,757744
$\log \cos \beta \cos \lambda =$	9,033217	9,327218	9,672542
$\log n =$	9,997455	9,989972	9,945671
$\log \cos (N - \varepsilon) =$	9,992799	9,990188	9,981154
$\log \cos \beta \sin \lambda =$	9,990254	9,980160	9,926825
$-\log \cos \beta \cos \lambda =$	—9,033217	—9,327218	—9,672542
$\log \operatorname{tang} \lambda =$	0,957037	0,652942	0,254283
$\lambda =$	83° 42' 0",6	77° 27' 49",1	60° 53' 23",8
$\log \sin \beta =$	9,254186 ²⁾	9,312577	9,405549
$-\log \cos \beta =$	—9,992884	—9,990640	—9,985469
$\log \operatorname{tg} \beta =$	9,261302	9,321937	9,420080

¹⁾ Średnie nachylenie ekliptyki na początku roku.

²⁾ Jeżeli posiadamy log jakiegokolwiek funkcji trygonometrycznej, to szukamy bezpośrednio inne funkcje trygonometryczne tego samego argumentu nie przechodząc przez kąt.

Bierzemy z efemeryd odpowiednie czasom obserwacji współrzędne słońca i tworzymy różnice $\lambda - \odot_2$

$t = 16,45337$	21,67413	35,49225
$\lambda = 83^\circ 42' 0,6$	$77^\circ 27' 49,1$	$60^\circ 53' 23,8$
$\odot = 234 32 5,1$	239 48 26,7	253 48 28,2
$\log R = 9,994912$	9,994438	9,993462
$\lambda - \odot_2 = 203^\circ 53' 33,9$	$197^\circ 39' 22,4$	$181^\circ 4' 57,1$
$\log \sin(\lambda - \odot_2) = 9,607483 n^1)$	9,481880 n	8,276291 n.

Obliczamy współczynnik M' równania (5) podany w pierwszym równaniu (4). Kładziemy [por. wzory (7)] dla krótkości

$$\frac{\operatorname{tang} \beta_2}{\sin(\lambda_2 - \odot_2)} = \operatorname{tang} w_2 = m$$

i piszemy zamiast pierwszego równania (4)

$$M' = \frac{m \sin(\lambda_1 - \odot_2) - \operatorname{tang} \beta_1}{\operatorname{tang} \beta_3 - m \sin(\lambda_3 - \odot_2)}$$

$\log \operatorname{tang} \beta_2 = 9,321936$	
$-\log \sin(\lambda_2 - \odot_2) = -9,481880 n$	
$\log m = 9,840056 n$	
$\log \sin(\lambda_1 - \odot_2) = 9,607483 n$	
$\log m \sin(\lambda_1 - \odot_2) = 9,447539$	$\log \operatorname{tang} \beta_1 = 9,261302$
$m \sin(\lambda_1 - \odot_2) = 0,280246$	$\operatorname{tang} \beta_1 = 0,182516$
$-\operatorname{tang} \beta_1 = -0,182516$	
$\text{licznik} = 0,097730$	$\log m = 9,840056 n$
	$\log \sin(\lambda_3 - \odot_2) = 8,276291 n$
$\log \operatorname{tang} \beta_3 = 9,420080$	$\log m \sin(\lambda_3 - \odot_2) = 8,116347$
$\operatorname{tang} \beta_3 = 0,263075$	$m \sin(\lambda_3 - \odot_2) = 0,013072$
$-m \sin(\lambda_3 - \odot_2) = 0,013072$	
$\text{mianownik} = 0,250003$	
$\log \text{licznika} = 8,990028$	
$-\dots \text{mianownika} = -9,397945$	
$\log M' = 9,592083$	

¹⁾ Litera n oznacza jak zwykle, że odpowiadająca logarytmowi liczba jest odjemną.

$t_2 = 21,67413$	$t_3 = 35,49225$	$t_3 = 35,49225$
$-t_1 = -16,45337$	$-t_2 = -21,67413$	$-t_1 = -16,45337$
$t_2 - t_1 = 5,22076$	$t_3 - t_2 = 13,81812$	$t_3 - t_1 = 19,03888$
$\log(t_2 - t_1) = 0,717734$	$\log(t_3 - t_2) = 1,140449$	$\log(t_3 - t_1) = 1,279641$
$\log M' = 9,592083$		
$\log(t_3 - t_1) = 1,140449$		
$-\log(t_2 - t_1) = -0,717734$		
$\log M = 0,014798$ [por. wzór (10)].		

Obliczamy teraz za pomocą pierwszego wzoru (6) wielkości B_1 i B_3 [por. wzory (17)]:

$\lambda_1 - \odot_1 = 209^\circ 9' 55'',5$	$\lambda_3 - \odot_3 = 167^\circ 4' 55'',6$
$\log \sin(\lambda_1 - \odot_1) = 9,687826 \text{ n}$	$\log \sin(\lambda_3 - \odot_3) = 9,349382$
$\log \cos(\lambda_1 - \odot_1) = 9,941122 \text{ n}$	$\log \cos(\lambda_3 - \odot_3) = 9,988867 \text{ n}$
$\log \text{tang}(\lambda_1 - \odot_1) = 9,746704$	$\log \text{tang}(\lambda_3 - \odot_3) = 9,360515 \text{ n}$
$\log \cos \beta_1 = 9,992884$	$\log \cos \beta_3 = 9,985469$
$\log \cos(\lambda_1 - \odot_1) = 9,941122 \text{ n}$	$\log \cos(\lambda_3 - \odot_3) = 9,988867 \text{ n}$
$\log \cos \psi_1 = 9,934006 \text{ n}$	$\log \cos \psi_3 = 9,974336 \text{ n}$
$\log R_1 = 9,994912$	$\log R_3 = 9,993462$
$\log R_1 \cos \psi_1 = 9,928918 \text{ n}$	$\log R_3 \cos \psi_3 = 9,967798$
$\log \sin \psi_1 = 9,709214$	$\log \sin \psi_3 = 9,523580$
$\log R_1 = 9,994912$	$\log R_3 = 9,993462$
$\log B_1 = \log R_1 \sin \psi_1 = 9,704126$	$\log B_3 = 9,517042$

Teraz obliczamy cięciwę ziemskiej orbity od pierwszej pozycji do trzeciej. Służą do tego wzory (11 bis).

$\odot_3 - \odot_1 = 19^\circ 16' 23'',1$	
$\log \cos(\odot_3 - \odot_1) = 9,974952$	
$\log R_3 = 9,993462$	
$\log R_3 \cos(\odot_3 - \odot_1) = 9,968414$	
	$\log R_1 = 9,994912$
	$-R_1 = -0,988352$
	$R_3 \cos(\odot_3 - \odot_1) = 0,929852$
	$g \cos(G - \odot_1) = -0,058500$
	$\log g \cos(G - \odot_1) = 8,767156 \text{ n}$

$$\begin{aligned}
 \log \sin (\odot_3 - \odot_1) &= 9,518608 \\
 \log R_3 &= 9,993462 \\
 \log g \sin (G - \odot_1) &= 9,512070 \\
 - \log g \cos (G - \odot_1) &= -8,767156 n \\
 \log \operatorname{tg} (G - \odot_1) &= 0,744914 n \\
 (G - \odot_1) &= 100^\circ 11' 58,9 \\
 G &= 334 \ 44 \ 4,0 \\
 \log g \cos (G - \odot_1) &= 8,767156 n \\
 - \log \cos (G - \odot_1) &= -9,248168 n \\
 \log g &= 9,518988
 \end{aligned}$$

Obliczamy h , ζ i H ze wzorów (12 bis)

$$\begin{aligned}
 \lambda_3 - \lambda_1 &= -22^\circ 48' 36,8 \\
 \log \cos (\lambda_3 - \lambda_1) &= 9,964634 \\
 M &= 1,034646 \quad \cos (\lambda_3 - \lambda_1) = 0,921794 \\
 - \cos (\lambda_3 - \lambda_1) &= -0,921794 \\
 h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) &= 0,112852 \\
 \log h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) &= 9,052510, \quad \log h \cos \zeta \sin (H - \lambda_3) = \\
 &= \log \sin (\lambda_3 - \lambda_1) = 9,588473 n \\
 \log M &= 0,014798 \\
 \log \operatorname{tang} \beta_3 &= 9,420080 \\
 \log M \operatorname{tang} \beta_3 &= 9,434878 \\
 M \operatorname{tang} \beta_3 &= 0,272194 \\
 - \operatorname{tang} \beta_1 &= -0,182517 \\
 h \sin \zeta &= 0,089677
 \end{aligned}$$

Ponieważ ζ jest szerokością trzeciej pozycyi komety względem punktu, którego współrzędne geocentryczne w chwili trzeciej obserwacji są $q_1 \cos \lambda_1$, $q_1 \sin \lambda_1$, $q_1 \operatorname{tang} \beta_1$, więc $\cos \zeta$ musi być dodatni. Stąd wynika, że $\sin (H - \lambda_3)$ jest ujemny a $\cos (H - \lambda_3)$ dodatni, t. j. kąt $H - \lambda_3$ leży w 4-tym kwadrancie. Tedy:

$$\begin{aligned}
 \log h \cos \zeta \sin (H - \lambda_3) &= 9,588473 n \\
 - \log h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) &= -9,052510 \\
 \log \operatorname{tang} (H - \lambda_3) &= 0,535963 n \\
 (H - \lambda_3) &= -73^\circ 46' 11,7 \\
 H &= -12 \ 52 \ 47,9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) &= 9,052510 \\ - \log \cos (H - \lambda_3) &= -9,446375 \\ \hline \log h \cos \zeta &= 9,606135 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log h \sin \zeta &= 8,952681 \\ - \log h \cos \zeta &= -9,606135 \\ \hline \log \operatorname{tang} \zeta &= 9,346546 \\ \log h \cos \zeta &= 9,606135 \\ - \log \cos \zeta &= -9,989544 \\ \hline \log h &= 9,616591 \end{aligned}$$

Teraz obliczamy $\cos \varphi$ [patrz wzór (13)] i A [wzory (17)]

$$G - H = 347^\circ 36' 51'' 9$$

$$\log \cos (G - H) = 9,989773$$

$$\log \cos \zeta = 9,989544$$

$$\log \cos \varphi = 9,979317$$

$$\log \sin \varphi = 9,479171$$

$$\log g = 9,518988$$

$$\log A = 8,998159$$

$$A^2 = 0,991557$$

Obliczamy f_1 i f_3 oraz c_1 i c_3 [wzory (17)]:

$$\begin{aligned} \log h &= 9,616591 \\ \log \cos \beta_1 &= 9,992884 \\ \log f_1 &= 9,609475 \\ \log R_1 \cos \psi_1 &= 9,928918 \text{ n} \\ \log f_1 R_1 \cos \psi_1 &= 9,538393 \text{ n} \\ \log g &= 9,518988 \\ \log \cos \varphi &= 9,979317 \\ \log g \cos \varphi &= 9,498305 \\ g \cos \varphi &= 0,314957 \\ - f_1 R_1 \cos \psi_1 &= 0,345456 \\ \hline c_1 &= 0,660413 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log h &= 9,616591 \\ \log \cos \beta_3 &= 9,985469 \\ - \log M &= -0,014798 \\ \hline \log f_3 &= 9,587262 \\ \log R_3 \cos \psi_3 &= 9,967798 \text{ n} \\ \log f_3 R_3 \cos \psi_3 &= 9,555060 \text{ n} \\ g \cos \varphi &= 0,314957 \\ - f_3 R_3 \cos \psi_3 &= 0,358972 \\ \hline c_3 &= 0,673929 \end{aligned}$$

6. Dalszy ciąg. Równanie Eulera.

Przystępujemy teraz do rozwiązania równania Eulera. Próba czterocyfrowymi logarytmami z wartością $r_1 + r_3 = 2$ (por. § 5 poprzedniego rozdziału) przekonuje nas, że suma promieni musi być

znacznie większa, bo znajdujemy: $r_1 = 2,7 \dots$, $r_3 = 2,9 \dots$. Tedy kładziemy w następnej próbie $r_1 + r_3 = 5$. Rachunek opiera się na wzorach (14 bis). Posiłkujemy się przy nim tablicami Enckego, które można znaleźć we wszystkich specjalnych podręcznikach poświęconych wyznaczeniu orbit. Aby mózdz korzystać z tych tablic, trzeba tylko obliczyć wielkość oznaczoną [w rozdz. XV-tym, § 5, wzór (18)] przez η , a określoną wzorem

$$\eta = 2k \frac{(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{3/2}}.$$

W tablicy Enckego znajdziemy odpowiedni $\log \mu$, poczem odrazu otrzymamy cięciwę ze wzoru

$$s = \frac{2k(t_3 - t_1)\mu}{(r_1 + r_3)^{1/2}}.$$

Stojącą w liczniku tego ostatniego wzoru wielkość $2k(t_3 - t_1) = 2r_2$ obliczamy siedmiocyfrowymi logarytmami, albowiem powtarza się we wszystkich próbach:

$$\begin{aligned} t_3 - t_1 &= 19,03888 \\ \log(t_3 - t_1) &= 1,2796414 \\ \log 2k &= 8,5366114 \\ \log 2k(t_3 - t_1) &= 9,8162528, \end{aligned}$$

ale pierwszą próbę wykonujemy z pomocą pięciocyfrowych logarytmów. W następnych próbach używamy już sześciocyfrowych¹⁾ logarytmów. Jednocześnie przestajemy zaokrąślać wartości na $r_1 + r_3$, natomiast podstawiamy przy każdej nowej próbie tę wartość, którą otrzymaliśmy w poprzedniej. Wkrótce spostrzegamy, że $\log \mu$ przestaje zmieniać się, mianowicie wciąż wypada $\log \mu = 0,000068$. Jednocześnie spostrzegamy, że wartości na r_1 i r_3 poczynają zbliżać się do określonych granic, wreszcie przestają zmieniać się, co oznacza, że już doszliśmy do wartości czyniących zadość równaniu Eulera. Zatrzymujemy się tedy i przyjmujemy owe ostatnie, już niezmiennające się wartości, mianowicie

$$\log r_1 = 0,374063, \quad \log r_3 = 0,396133, \quad \log(r_1 + r_3) = 0,686268.$$

¹⁾ Przykład rachunku podamy w § 9.

Aby obliczyć q_1 , stosujemy drugi wzór (16), potem zaś obliczamy q_3 ze wzoru (5), w którym [por. wzór (10)] kładziemy

$$M = M' \frac{\tau_1}{\tau_3}.$$

Rachunek przedstawia się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} u &= 0,280122 \\ g \cos \varphi &= 0,314957 \\ \underline{q_1 h} &= 0,595079 \\ \log q_1 h &= 9,774575 \\ -\log h &= -9,616591 \\ \log q_1 &= 0,157984 \\ \log M &= 0,014798 \\ \log q_3 &= 0,172782. \end{aligned}$$

7. Dalszy ciąg. Obliczenie elementów orbity.

Przedewszystkiem obliczamy wedle wzorów (20) współrzędne heliocentryczne komety w pierwszej i trzeciej pozycji¹⁾:

$l. q_1 = 0,157984$	$l. q_3 = 0,172782$
$l. \cos(\lambda_1 - \odot_1) = 9,941122n$	$l. \cos(\lambda_3 - \odot_3) = 9,988867n$
$l. q_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1) = 0,099106n$	$l. q_3 \cos(\lambda_3 - \odot_3) = 0,161649n$
$q_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1) = -1,256337$	$q_3 \cos(\lambda_3 - \odot_3) = -1,450940$
$-R_1 = -0,988352$	$-R_3 = -0,985058$
$r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \odot_1) = -2,244689$	$r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - \odot_3) = -2,435998$
$l. r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \odot_1) = 0,351156n$	$l. r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - \odot_3) = 0,386677n$
$l. q_1 = 0,157984$	$l. q_3 = 0,172782$
$l. \sin(\lambda_1 - \odot_1) = 9,687826n$	$l. \sin(\lambda_3 - \odot_3) = 9,349380$
$l. r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \odot_1) = 9,845810n$	$l. r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - \odot_3) = 9,522162$
$-l. r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \odot_1) = -0,351156n$	$-l. r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - \odot_3) = -0,386677n$
$l. \text{tg}(l_1 - \odot_1) = 0,494654$	$l. \text{tg}(l_3 - \odot_3) = 9,135485n$
$l_1 - \odot_1 = 197^\circ 20' 48'' 0$	$l_3 - \odot_3 = 172^\circ 13' 15'' 4$
$l_1 = 71 \ 52 \ 53,1$	$l_3 = 66 \ 1 \ 43,6$

¹⁾ Dla krótkości piszemy $l.$ zamiast \log .

$l. r_1 \cos b_1 \sin (l_1 - \odot_1) = 9,845810 \text{ n}$ $- l. \sin (l_1 - \odot_1) = -9,474438 \text{ n}$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $l. r_1 \cos b_1 = 0,371372$ $l. \varrho_1 = 0,157984$ $l. \text{tang } \beta_1 = 9,261302$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $l. r_1 \sin b_1 = 9,419286$ $- l. r_1 \cos b_1 = -0,371372$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $l. \text{tang } b_1 = 9,047914$ $l. r_1 \sin b_1 = 9,419286$ $- l. \sin b_1 = -9,045224$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $l. r_1 = 0,374062$	$l. r_3 \cos b_3 \sin (l_3 - \odot_3) = 9,522162$ $- l. \sin (l_3 - \odot_3) = -9,131470$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $l. r_3 \cos b_3 = 0,390692$ $l. r_3 = 0,172782$ $l. \text{tang } \beta_3 = 9,420080$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $l. r_3 \sin b_3 = 9,592862$ $- l. r_3 \cos b_3 = -0,390692$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $l. \text{tang } b_3 = 9,202170$ $l. r_3 \sin b_3 = 9,592862$ $- l. \sin b_3 = -9,196730$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $l. r_3 = 0,396132$
--	--

Porównując obecnie otrzymane wartości na r_1 i r_3 z temi, które znaleźliśmy w poprzednim paragrafie, widzimy prawie zupełną zgodność: logarytmy r_1 i r_3 różnią się tylko o jednostkę ostatniego miejsca dziesiątego, co tłumaczy się przez nieuniknione przy rachunku logarytmicznym zaokrąglanie liczb.

Teraz obliczamy ϱ i i za pomocą wzorów (21), albowiem wskutek tego, że kąty $b_3 - b_1$ i $\frac{1}{2}(l_3 - l_1)$ są bardzo małe, wzory (21 bis) dają niepewne rezultaty. Ze wzorów (21) wynika:

$$\text{tang } \varrho = \frac{\sin l_1 - F \sin l_3}{\cos l_1 - F \cos l_3},$$

przyczem

$$F = \frac{\text{tang } b_1}{\text{tang } b_3}, \quad l. F = 9,047914 - 9,202170 = 9,845744.$$

$l. \sin l_1 = 9,977913$	$l. \cos l_1 = 9,492739$
$l. \sin l_3 = 9,960827$	$l. \cos l_3 = 9,608823$
$l. F = 9,845744$	$l. F = 9,845744$
$l. F \sin l_3 = 9,806571$	$l. F \cos l_3 = 9,454567$

Za pomocą logarytmów Gaussa zaraz znajdziemy

$$l. (\sin l_1 - F \sin l_3) = 9,491133$$

$$- l. (\cos l_1 - F \cos l_3) = -8,417754$$

$$l. \text{tang } \varrho = 1,073379$$

$$\varrho = 85^\circ 10' 21,3$$

$$l_1 - \varrho = -13^\circ 17' 28,2 \quad l_3 - \varrho = -19^\circ 8' 37,7$$

$$\begin{array}{ll} \text{l. tang } b_1 = 9,047914 & \text{l. tang } b_3 = 9,202170 \\ - \text{l. sin } (l_1 - \varrho) = -9,361538 \text{ n} & - \text{l. sin } (l_3 - \varrho) = -9,515795 \text{ n} \\ \text{l. tang } i = 9,686376 \text{ n} & \text{l. tang } i = 9,686375 \text{ n} \end{array}$$

$$i = 154^\circ 5' 37,6.$$

Obliczamy argumenty szerokości u_1 i u_3 ze wzoru

$$\text{tang } u = \sec i \text{ tang } (l - \varrho)$$

$$\begin{array}{ll} \text{l. sec } i = 0,045993 \text{ n} & \text{l. sec } i = 0,045993 \text{ n} \\ \text{l. tang } (l_1 - \varrho) = 9,373330 \text{ n} & \text{l. tang } (l_3 - \varrho) = 9,540502 \text{ n} \\ \text{l. tg } u_1 = 9,419323 & \text{l. tang } u_3 = 9,586495 \\ u_1 = 14^\circ 42' 52,6 & u_3 = 21^\circ 6' 9,1. \end{array}$$

Obliczamy $\tilde{\omega}$ za pomocą wzorów (22 bis):

$$\frac{1}{4}(u_3 + u_1) = 8^\circ 57' 15,4 \quad \frac{1}{4}(u_3 - u_1) = 1^\circ 35' 49,1$$

$$\text{l. } \sqrt{\frac{r_3}{r_1}} = 0,011035$$

$$\sqrt{\frac{r_3}{r_1}} = 1,025735$$

$$\text{l. } \left(\frac{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1}} \right) = 8,103941$$

$$\text{l. cot } g \frac{1}{4}(u_3 - u_1) = \frac{1,554713}{9,658654}$$

$$\text{l. tg } \left[\frac{1}{4}(u_3 + u_1) - \frac{1}{2}\tilde{\omega} \right] = 9,658654$$

$$\frac{1}{4}(u_3 + u_1) - \frac{1}{2}\tilde{\omega} = 24^\circ 29' 51,1$$

$$\tilde{\omega} = -31^\circ 5' 11,4.$$

Stąd zważywszy, że ruch jest wsteczny, znajdziemy

$$\pi = \varrho - \tilde{\omega} = 116^\circ 15' 32,7.$$

Chociaż otrzymalibyśmy to samo ze wzorów (22 bis), jednakże obliczamy q ze wzorów (22) jako prostszych:

$$\frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}(u_1 - \tilde{\omega}) = 22^\circ 54' 2,0$$

$$2 \text{ l. cos } \frac{1}{2}v_1 = 9,928690$$

$$\text{l. } r_1 = 0,374062$$

$$\text{l. } q = 0,302752$$

Obliczamy wreszcie t_0 za pomocą tablicy Barkera [por. wzór (23)]

$v_1 = 45^{\circ} 48' 4'' 0$	$v_3 = 52^{\circ} 11' 20'' 5$
$1. M_1 = 1,525908$	$1. M_3 = 1,598477$
$\frac{3}{2} 1. q = 0,454128$	$\frac{3}{4} 1. q = 1,454128$
$1. \frac{\sqrt{2}}{75k} = 0,039872$	$1. \frac{\sqrt{2}}{75k} = 0,039872$
$1. (t_1 - t_0) = 2,019908$	$1. (t_3 - t_0) = 2,092477$
$t_1 - t_0 = 104,6908$	$(t_3 - t_0) = 123,7306$
$- t_1 = - 16,4534$	$- t_3 = - 35,4922$
$t_0 = - 88,2374$	$t_0 = - 88,2384$

Przyjmujemy średnią z obu wartości na t_0

$$t_0 = - 88,2379,$$

albo okrągło

$$t_0 = - 88,238,$$

co odpowiada dacie 3,762 Sierpnia 1890 r.

Zbierając wszystkie wyniki otrzymamy następujące wartości elementów ¹⁾:

$$\begin{aligned} \Omega &= 85^{\circ} 10' 21'' 3 \\ i &= 154 \quad 6 \quad 37,6 \\ \tilde{\omega} &= 328 \quad 54 \quad 48,6 \\ 1. q &= 0,302752 \\ t_0 &= 3,762 \dots \text{ Sierpnia 1890 r.} \end{aligned}$$

8. Obliczenie stosunku q_3/q_1 . Wybieg Carliniego.

Powyższe elementy nie są ostateczne, bo odstępy czasu pomiędzy obserwacjami są nierówne [$t_3 - t_2 = 13,8 \dots$, $t_2 - t_1 = 5,2 \dots$]; przeto wzór (5), z którego obliczyliśmy stosunek q_3/q_1 jest w danym razie z pewnością niedokładny. Ale obecnie możemy obliczyć ten stosunek ze ścisłego wzoru (2 bis), bo wszystkie wielkości wchodzące do tego wzoru albo są znane, albo dają się obliczyć z wiel-

¹⁾ Wartości te są nieco różne od wartości podanych przez Boccardiego.

kości znalezionych w poprzednich paragrafach. Właściwie brak nam tylko $\frac{n_1}{n_3}$. Moglibyśmy obliczyć je ze wzoru.

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{r_3 \sin(v_3 - v_2)}{r_1 \sin(v_2 - v_1)},$$

który wynika bezpośrednio ze wzorów (23) i (36) poprzedniego rozdziału. Ale drobny błąd we v_2 ma duży wpływ na prawą stronę powyższego równania, bo kąty $v_3 - v_2$ i $v_2 - v_1$ są małe. Tymczasem v_2 nie daje się dokładnie obliczyć, bo zależy od nieco niepewnej epoki przejścia przez perihelium. Zatem lepiej będzie uciec się do ostatniego wzoru (33) poprzedniego rozdziału. Możemy go zastosować, bo już znamy r_1 i r_3 , przeto możemy za pomocą wzorów (34) i (35) obliczyć r_2 i $\frac{dr_2}{dt}$.

Ponieważ

$$l. k = 8.235581,$$

przeto

$$l. \tau_1 = l. k (t_3 - t_2) = 9,376030$$

$$l. \tau_2 = l. k (t_3 - t_1) = 9,515222$$

$$l. \tau_3 = l. k (t_2 - t_1) = 8,953315.$$

Oprócz tego

$$l. (t_3 - t_1) = 1,279641$$

$$l. r_1 = 0,374063, \quad l. r_3 = 0,396133.$$

Stąd zaraz znajdziemy

$$r_2 = \frac{1}{2}(r_3 + r_1) - \frac{1}{2}(r_3 - r_1) \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2} = 2,40009, \quad l. r_2 = 0,380227$$

$$l. \left(\frac{dr_2}{dt} \right) = l. \left(\frac{r_3 - r_1}{t_3 - t_1} \right) = 7,811519.$$

Następnie znajdziemy z ostatniego wzoru (33) poprzedniego rozdziału

$$\frac{n_1}{n_3} = 2,645325, \quad l. \frac{n_1}{n_3} = 0,422479.$$

Co do $\frac{N_1}{N_3}$, to naturalnie najlepiej jest obliczyć je ze wzoru

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2)}{R_1 \sin(\odot_2 - \odot_1)},$$

wynikającego ze wzorów (3), bo wszystkie daty odnoszące się do ziemi są pewne. Znajdziemy wnet

$$\frac{N_1}{N_3} = 2,63338 \dots, \quad l. \frac{N_1}{N_3} = 0,418944.$$

Przechodzimy do wzoru (2 bis). Oprócz $\frac{n_1}{n_3}$ i $\frac{N_1}{N_3}$ wchodzą doń M' , M'' , R_1 i q_1 . Ostatnia z pomiędzy tych wielkości już została obliczona, R_1 znajduje się w efemerydach, M' i M'' zależą tylko od dat obserwacyjnych i mogą być obliczone ze wzorów (4). Zresztą M' już było obliczone, bo potrzebowaliśmy go do uproszczonego wzoru Olbersa (5). Oto logarytmy tych wielkości:

$$\begin{aligned} l. M' &= 9,592083, & l. M'' &= 9,406405 \\ l. q_1 &= 0,157984, & l. R_1 &= 9,994912. \end{aligned}$$

Podstawivszy wszystkie te wartości we wzór (2 bis) znajdziemy

$$l. q_3/q_1 = 0,012982.$$

Naturalnie i ta wartość na $l. q_3/q_1$ nie jest jeszcze zupełnie ścisła, jednakże jest z pewnością o wiele bliższa prawdy, aniżeli przyjęta w dotychczasowym rachunku a obliczona z uproszczonego wzoru Olbersa (5) wartość

$$l. q_3/q_1 = l. M = 0,014798.$$

Moglibyśmy też pójść inną drogą, wskazaną przez Carliniego. Oto jeżeli obliczymy z otrzymanych w poprzednim paragrafie elementów

$$m = \operatorname{tang} w_2 = \frac{\operatorname{tang} \beta_2}{\sin(\lambda_2 - \odot_2)},$$

to naturalnie okaże się, że ta nowa wartość m różni się od pierwotnej, obliczonej wprost z danych obserwacyjnych. Załóżmy, że nowy $l. m$ jest o x większy (mniejszy) od pierwotnego, wtedy zmniejszamy (zwiększamy) pierwotny $l. m$ o x i obliczamy ponownie M , ale znowu z uproszczonego wzoru Olbersa. Zastosujemy regułę Carliniego do naszego przypadku. Przedewszystkiem obliczymy v_2

$$t_2 - t_0 = 21,674 \dots + 88,238 \dots = 109,912$$

$$l. (t_2 - t_0) = 2,041042$$

$$l. 75 \frac{k}{\sqrt{2}} = 9,960128$$

$$- \frac{3}{2} l. q = -0,454128$$

$$l. M_2 = 1,547042$$

W tablicach Barkera znajdujemy odpowiednie v_2

$$v_2 = 47^\circ 37' 4'' 0$$

$$\frac{1}{2} v_2 = 23^\circ 48' 32'' 0$$

$$\tilde{\omega} = 328 \ 54 \ 48,6$$

$$l. \cos \frac{1}{2} v_2 = 9,961372$$

$$u_2 = 16^\circ 31' 52'' 6$$

$$l. \text{tang } u_2 = 9,472475$$

$$l. \cos i = 9,954007 \text{ n}$$

$$l. \text{tang } (l_2 - \mathcal{Q}) = 9,426482 \text{ n}$$

$$l. q = 0,302752$$

$$l. \sin (l_2 - \mathcal{Q}) = 9,411530 \text{ n}$$

$$-2 l. \cos \frac{1}{2} v_2 = -9,922744$$

$$l. \text{tang } i = 9,686375 \text{ n}$$

$$l. r_2 = 0,380008$$

$$l. \text{tang } b_2 = 9,097905$$

$$l. \cos b_2 = 9,996618$$

$$l_2 - \mathcal{Q} = 345^\circ 3' 6'' 2$$

$$l. r_2 \cos b_2 = 0,376626$$

$$\mathcal{Q} = 85 \ 10 \ 21,3$$

$$l_2 = 430^\circ 13' 27'' 5$$

$$l_2 - \odot_2 = 190 \ 25 \ 0,8$$

$$l. \cos (l_2 - \odot_2) = 9,992783 \text{ n}$$

$$l. \sin (l_2 - \odot_2) = 9,257220 \text{ n}$$

$$l. r_2 \cos b_2 = 0,376626$$

$$l. r_2 \cos b_2 = 0,376626$$

$$0,369409 \text{ n}$$

$$l. \varrho_2 \sin (\lambda_2 - \odot_2) = 9,633846 \text{ n}$$

$$\cos b_2 \cos (l_2 - \odot_2) = -2,341042$$

$$- l. \varrho_2 \cos (\lambda_2 - \odot_2) = -0,131544 \text{ n}$$

$$R_2 = 0,987275$$

$$l. \text{tang } (\lambda_2 - \odot_2) = 9,502302$$

$$\varrho_2 \cos (\lambda_2 - \odot_2) = -1,353767$$

$$\lambda_2 - \odot_2 = 197^\circ 38' 59'' 2$$

$$l. \sin b_2 = 9,094523$$

$$l. \varrho_2 \sin (\lambda_2 - \odot_2) = 9,633846 \text{ n}$$

$$l. r_2 = 0,380008$$

$$- l. \sin (\lambda_2 - \odot_2) = -9,481395 \text{ n}$$

$$l. \varrho_2 \text{tang } \beta_2 = 9,474531$$

$$l. \varrho_2 = 0,152451$$

$$- l. \varrho_2 = -0,152451$$

$$l. \text{tang } \beta_2 = 9,322080$$

$$- l. \sin (\lambda_2 - \odot_2) = -9,481395 \text{ n}$$

$$l. \text{tang } w_2 = l. m = 9,840685 \text{ n}$$

Warto porównać $\text{tang } \beta_2$, $\lambda_2 - \odot_2$ i t. d. z pierwotnymi wartościami wynikającymi wprost z danych obserwacyjnych, ale przede wszystkim chodzi o l. m. Widzimy, że nowa jego wartość jest o 0,000629 większa od dawnej. Stosownie do reguły Carliniego zmniejszamy dawną wartość l. m o 0,000629 i obliczamy $M = \frac{Q_3}{Q_1}$ z uproszczonego wzoru Olbersa (5) kładąc

$$l. m = 9,839427 n.$$

Ponawiając rachunek dokonany w § 5 znajdziemy

$l. m = 9,839427 n$	$l. m = 9,839427 n$
$l. \sin (\lambda_1 - \odot_2) = 9,607483 n$	$\sin (\lambda_3 - \odot_2) = 8,276291 n$
$l. m \sin (\lambda_1 - \odot_2) = 9,446910$	$l. m \sin (\lambda_3 - \odot_2) = 8,115718$
$l. \text{tang } \beta_1 = 9,261302$	$l. \text{tang } \beta_2 = 9,420080$

Stąd np. za pomocą logarytmów Gaussa wnet znajdziemy

$l. [m \sin (\lambda_1 - \odot_2) - \text{tang } \beta_1] =$	8,988219
$- l. [\text{tang } \beta_3 - m \sin (\lambda_3 - \odot_2)] =$	- 9,397978
$l. M' =$	9,590241
$l. \frac{\tau_1}{\tau_3} =$	0,422715
$l. M =$	0,012956

Otrzymałszy zatem tą drogą na $l. M = l. \frac{Q_3}{Q_1}$ wartość dość bliską do tej, która wynika ze wzoru (2 bis). Ponieważ jednak tamta wartość jest prawdopodobnie dokładniejsza, więc przechodzimy do drugiego przybliżenia z tamtą wartością.

9. Ponowne obliczenie wielkości wchodzących do równania Eulera i ponowne rozwiązanie tego równania.

Wielkości B_1, B_3 , kąt G , cięciwa g oraz kąt $\lambda_3 - \lambda_1$ pozostają bez zmiany, ale musimy na nowo obliczyć h i H :

$l. M = 0,012982$
$l. \text{tang } \beta_3 = 9,420080$
$l. M \text{ tang } \beta_3 = 9,433062, \quad l. \text{tang } \beta_1 = 9,261302,$
$l. \cos (\lambda_3 - \lambda_1) = 9,964634.$

Stąd [przez logarytmy Gaussa]

$$\begin{aligned} l. h \sin \zeta &= l. [M \operatorname{tang} \beta_3 - \operatorname{tang} \beta_1] = 8,947147 \\ l. h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) &= l. [M - \cos (\lambda_3 - \lambda_1)] = 9,035625. \end{aligned}$$

Następnie

$$\begin{aligned} l. h \cos \zeta \sin (H - \lambda_3) &= l. \sin (\lambda_3 - \lambda_1) = 9,588473 \text{ n} \\ - l. h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) &= - 9,035625 \\ \hline l. \operatorname{tang} (H - \lambda_3) &= 0,552848 \text{ n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H - \lambda_3 &= 285^\circ 38' 31,4 \\ + \lambda_3 &= 60 \ 53 \ 23,8 \\ \hline H &= 346^\circ 31' 55,2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} l. h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) = & 9,035625 & l. h \sin \zeta = & 8,947147 \\ - l. \cos (H - \lambda_3) = & 9,430762 & - l. h \cos \zeta = & - 9,604863 \\ \hline l. h \cos \zeta = & 9,604863 & l. \operatorname{tang} \zeta = & 9,342284 \\ - l. \cos \zeta = & - 9,989743 & & \\ \hline l. h = & 9,615120 & & \end{array}$$

Obliczamy $\cos \varphi$ i A

$$\begin{aligned} G - H &= 334^\circ 44' 4,0 + 13^\circ 28' 4,8 \\ &= 348 \ 12 \ 8,8 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} l. \cos (G - H) = & 9,990728 & & \\ l. \cos \zeta = & 9,989743 & & \\ \hline l. \cos \varphi = & 9,980471 & l. \sin \varphi = & 9,467271 \\ l. g = & 9,518988 & l. g = & 9,518988 \\ \hline l. g \cos \varphi = & 9,499459 & l. A = & 8,986259 \\ & & 2 l. A = & 7,972518 \end{array}$$

Obliczamy f_1 i f_3 oraz c_1 i c_3 [wzory (17)]; $R_1 \cos \psi_1$, $R_1 \sin \psi_1$ i t.d. pozostają bez zmiany

$$\begin{array}{ll} l. h = & 9,615120 & l. h = & 9,615120 \\ l. \cos \beta_1 = & 9,992884 & l. \cos \beta_3 = & 9,985469 \\ \hline l. f_1 = & 9,608004 & & 9,600589 \\ l. R_1 \cos \psi_1 = & 9,928918 \text{ n} & - l. M = & - 0,012982 \\ \hline l. f_1 R_1 \cos \psi_1 = & 9,536922 \text{ n} & l. f_3 = & 9,587607 \\ & & l. R_3 \cos \psi_3 = & 9,967798 \text{ n} \\ & & \hline l. f_3 R_3 \cos \psi_3 = & 9,555405 \text{ n} \end{array}$$

Stąd [przez logarytmy Gaussa]:

$$l. [g \cos \varphi - f_1 R_1 \cos \psi_1] = l. c_1 = 9,819626,$$

$$l. [g \cos \varphi - f_3 R_3 \cos \psi_3] = l. c_3 = 9,829362,$$

$$c_1 = 0,660125, \quad c_3 = 0,675090.$$

Przy rozwiązaniu równania Eulera podstawiamy z początku na $r_1 + r_3$ wartość otrzymaną w § 6, t. j. kładziemy

$$l. (r_1 + r_3) = 0,686268$$

i otrzymujemy w kolejnych trzech próbach wciąż podstawiając na $r_1 + r_3$ wartość otrzymaną w poprzedniej próbie:

$$l. (r_1 + r_3) = 0,687401 \begin{array}{r} \Delta^I \quad \Delta^{II} \\ - 182 \\ \dots 219 + 29 + 211 \\ \dots 248 \end{array}$$

Z tych trzech wartości możemy przez interpolację otrzymać czwartą dostatecznie dokładną, t. j. już czyniącą zadość równaniu Eulera. Załóżmy, że prawdziwa, t. j. czyniąca zadość równaniu Eulera wartość $l. (r_1 + r_3)$ jest Y a jakakolwiek przybliżona y , różnicę zaś między drugą a pierwszą oznaczmy przez Δ_v , t. j. połączmy

$$y = Y + \Delta_v.$$

Oznaczmy teraz przez y' nową przybliżoną wartość $l. (r_1 + r_3)$ otrzymaną rachunkiem z poprzedniej, t. j. z y . Mamy wtedy

$$y' - y = f(y) = f[Y + \Delta_v].$$

Jeżeli rozwiniemy prawą stronę tego wzoru w szereg potęgowy, to otrzymamy

$$y' - y = f(Y) + A\Delta_v + B\Delta_v^2 + \dots$$

Ale gdyby y było prawdziwą wartością $l. (r_1 + r_3)$ [t. j. gdyby było $y = Y$], to wtedy przy nowej próbie znów otrzymalibyśmy tę samą wartość, t. j. byłoby $y' - y = 0$ i prawa strona poprzedniego równania musiałaby być równą zeru. Ale, żeby to było możliwe, musi być stale

$$f(Y) = 0.$$

Tedy szereg nasz przywodzi się do

$$y' - y = A\Delta_v + B\Delta_v^2 + \dots$$

Skoro Δ_v jest małe, to można zaniedbać dalsze wyrazy i przyjąć

$$y' - y = A\Delta_v = A(y - Y).$$

Załóżmy teraz, że mamy trzy kolejne wartości: y , y' i y'' , oznaczymy różnicę $y' - y$ przez Δ_1^I , różnicę $y'' - y'$ przez Δ_2^I , a będziemy mieli

$$y' - y = \Delta_1^I = A(y - Y), \quad y'' - y' = \Delta_2^I = A(y' - Y).$$

Stąd rugując A otrzymamy

$$Y = \frac{y\Delta_2^I - y'\Delta_1^I}{\Delta_2^I - \Delta_1^I} = y' - \frac{\Delta_1^I\Delta_2^I}{\Delta_2^I - \Delta_1^I} = y'' - \frac{(\Delta_2^I)^2}{\Delta_2^I - \Delta_1^I}.$$

Ale $\Delta_2^I - \Delta_1^I$ to różnica drugiego rzędu Δ^{II} , tedy

$$Y = y'' - \frac{(\Delta_2^I)^2}{\Delta^{II}}.$$

W naszym przykładzie:

$$y'' = 0,687248, \quad \Delta_2^I = 29, \quad \Delta^{II} = 211;$$

zatem

$$Y = 0,687244.$$

Trzeba jednak sprawdzić, czy ta wyinterpolowana wartość rzeczywiście czyni zadość równaniu Eulera, bo całe nasze rozumowanie polegało na założeniu, że Δ_v już jest dostatecznie małe. Gdyby jeszcze nie było dostatecznie małe, to otrzymalibyśmy na- zbyt niedokładne przybliżenie i musielibyśmy ponowić próby.

Przystępujemy tedy do sprawdzenia

1. $2k(t_3 - t_1) =$	9,816253	
$-\frac{3}{2}l.(r_1 + r_3) =$	<u>-1,030866</u>	$-\frac{1}{2}l.(r_1 + r_3) =$
		<u>-0,343622</u>
1. $\eta =$	8,785387	
		9,472631
$\eta =$	0,061008	1. $\mu =$
		<u>0,000067</u>
		1. $s =$
		9,472698

$$2 \text{ l. } s = 8,945396, \quad 2 \text{ l. } A = 7,972518.$$

Stąd¹⁾

$$2 \text{ l. } u = 1. (s^2 - A^2) = 8,896517$$

$$\text{l. } u = 9,448259$$

¹⁾ Dodajemy i odejmujemy po większej części z pomocą logarytmów Gaussa.

$ \begin{array}{r} u = 0,280710 \\ c_1 = 0,660125 \\ \hline u + c_1 = 0,940835 \\ \\ 1. (u + c_1) = 9,973514 \\ - 1. f_1 = - 9,608004 \\ \hline 1. \left(\frac{u + c_1}{f} \right) = 0,365510 \\ \\ 2. 1. \left(\frac{u + c_1}{f_1} \right) = 0,731020, \\ 2. 1. B_1 = 9,408252, \end{array} $	$ \begin{array}{r} u = 0,280710 \\ c_3 = 0,675090 \\ \hline u + c_3 = 0,955800 \\ \\ 1. (u + c_3) = 9,980367 \\ - 1. f_3 = - 9,587607 \\ \hline 1. \left(\frac{u + c_3}{f_3} \right) = 0,392760 \\ \\ 2. 1. \left(\frac{u + c_3}{f_3} \right) = 0,785520, \\ 2. 1. B_3 = 9,034084. \end{array} $
---	---

Stąd

$$2. 1. r_1 = 1. \left[B_1^2 + \left(\frac{u + c_1}{f_1} \right)^2 \right] = 0,751198,$$

$$2. 1. r_3 = 1. \left[B_3^2 + \left(\frac{u + c_3}{f_3} \right)^2 \right] = 0,793150,$$

a stąd

$$1. r_1 = 0,375599, \quad 1. r_3 = 0,396575, \quad 1. (r_1 + r_3) = 0,687244.$$

Otrzymaliśmy więc na $1. (r_1 + r_3)$ tę samą wartość, z którą rozpoczęliśmy rachunek, co dowodzi, że ta wartość czyni zadość równaniu Eulera. Przyjmujemy tedy

$$1. r_1 = 0,375599, \quad 1. r_3 = 0,396575, \quad u = 0,280710$$

i obliczamy q_1 i q_3 .

$$\begin{array}{r}
 u = 0,280710 \\
 g \cos \varphi = 0,315834 \\
 \hline
 u + g \cos \varphi = q_1 h = 0,596544 \\
 \\
 1. q_1 h = 9,775643 \\
 - 1. h = - 9,615120 \\
 \hline
 1. q_1 = 0,160523 \\
 1. M = 0,012982 \\
 \hline
 1. q_3 = 0,173505
 \end{array}$$

10. Ponowne obliczenie elementów orbity.

Znowu obliczamy wedle wzorów (20) współrzędne heliocentryczne komety w I-szej i III-ciej pozycyi.

$l. \varrho_1 = 0,160523$	$l. \varrho_3 = 0,173505$
$l. \cos(\lambda_1 - \odot_1) = 9,941122 \text{ n}$	$l. \cos(\lambda_3 - \odot_3) = 9,988867 \text{ n}$
$l. \varrho_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1) = 0,101645 \text{ n}$	$l. \varrho_3 \cos(\lambda_3 - \odot_3) = 0,162372 \text{ n}$
$l. R_1 = 9,994912$	$l. R_3 = 9,993462$
$l. r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \odot_1) =$ $= l. [\varrho_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1) - R_1],$ $= 0,352580 \text{ n}$	$l. r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - \odot_3) =$ $= l. [\varrho_3 \cos(\lambda_3 - \odot_3) - R_3]$ $= 0,387108 \text{ n}$
$l. \varrho_1 = 0,160523$	$l. \varrho_3 = 0,173505$
$l. \sin(\lambda_1 - \odot_1) = 9,687826 \text{ n}$	$l. \sin(\lambda_3 - \odot_3) = 9,349380$
$l. r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \odot_1) = 9,848349 \text{ n}$	$l. r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - \odot_3) = 9,522885$
$-l. r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \odot_1) = -0,352580 \text{ n}$	$-l. r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - \odot_3) = -0,387108 \text{ n}$
$l. \text{tang}(l_1 - \odot_1) = 9,495769$	$l. \text{tang}(l_3 - \odot_3) = 9,135777 \text{ n}$
$l_1 - \odot_1 = 197^\circ 23' 18,9$	$l_3 - \odot_3 = 172^\circ 12' 56,7$
$+ \odot_1 = 234 \ 32 \ 5,1$	$+ \odot_3 = 253 \ 48 \ 28,2$
$l_1 = 71^\circ 55' 24,0$	$l_3 = 66^\circ 1' 24,9$
$l. r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \odot_1) = 9,848349 \text{ n}$	$l. r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - \odot_3) = 9,522885$
$-l. \sin(l_1 - \odot_1) = -9,475455 \text{ n}$	$-l. \sin(l_3 - \odot_3) = -9,131756$
$l. r_1 \cos b_1 = 0,372894$	$l. r_3 \cos b_3 = 0,391129$
$l. \varrho_1 = 0,160523$	$l. \varrho_3 = 0,173505$
$l. \text{tang} \beta_1 = 9,261302$	$l. \text{tang} \beta_3 = 9,420080$
$l. r_1 \sin b_1 = 9,421825$	$l. r_3 \sin b_3 = 9,593585$
$-l. r_1 \cos b_1 = -0,372894$	$-l. r_3 \cos b_3 = -0,391129$
$l. \text{tang} b_1 = 9,048931$	$l. \text{tang} b_3 = 9,202456$
$l. r_1 \sin b_1 = 9,421825$	$l. r_3 \sin b_3 = 9,593585$
$-l. \sin b_1 = -9,046228$	$-l. \sin b_3 = -0,197008$
$l. r_1 = 0,375597$	$l. r_3 = 0,396577$

Tak $l. r_1$, jak $l. r_3$ różnią się od przyjętych w końcu poprzedniego paragrafu tylko o dwie jednostki ostatniego miejsca dziesiętnego, co objaśnia się przez zaokrąglenie logarytmów.

Przystępujemy teraz do ponownego obliczenia elementów.

$$\begin{aligned} \text{l. tang } b_1 &= 9,048931 \\ -\text{l. tang } b_3 &= -9,202456 \\ \hline \text{l. } F &= 9,846475 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l. sin } l_1 &= 9,978017 & \text{l. sin } l_3 &= 9,960809 \\ & & + \text{l. } F &= 9,846475 \end{aligned}$$

$$\text{l. } F \text{ sin } l_3 = 9,807284$$

$$\begin{aligned} \text{l. cos } l_1 &= 9,491767 & \text{l. cos } l_3 &= 9,608911 \\ & & \text{l. } F &= 9,846475 \end{aligned}$$

$$\text{l. } F \text{ cos } l_3 = 9,455386$$

skąd

$$\begin{aligned} \text{l. } [\text{sin } l_1 - F \text{ sin } l_3] &= 9,489978 \\ -\text{l. } [\text{cos } l_1 - F \text{ cos } l_3] &= -8,396798 \end{aligned}$$

$$\text{l. tang } \varnothing = 1,093480$$

$$\varnothing = 85^\circ 23' 12,4$$

$$l_1 - \varnothing = -13^\circ 27' 48,4$$

$$l_3 - \varnothing = -19^\circ 21' 47,5$$

$$\text{l. tang } b_1 = 9,048931$$

$$\text{l. tang } b_3 = 9,202456$$

$$-\text{l. sin } (l_1 - \varnothing) = -9,367030 \text{ n} \quad -\text{l. sin } (l_3 - \varnothing) = -9,520556 \text{ n}$$

$$\text{l. tang } i = 9,681901 \text{ n}$$

$$\text{l. tang } i = 9,681900 \text{ n}$$

$$i = 154^\circ 19' 30,0$$

$$\text{l. sec } i = 0,045147 \text{ n}$$

$$\text{l. sec } i = 0,045147 \text{ n}$$

$$\text{l. tang } (l_1 - \varnothing) = 9,379131 \text{ n}$$

$$\text{l. tang } (l_3 - \varnothing) = 9,545843 \text{ n}$$

$$\text{l. tang } u_1 = 9,424278$$

$$\text{l. tang } u_3 = 9,590990$$

$$u_1 = 14^\circ 52' 33,5$$

$$u_3 = 21^\circ 18' 8,9$$

$$\frac{1}{4}(u_3 + u_1) = 9^\circ 2' 40,6$$

$$\frac{1}{4}(u_3 - u_1) = 1^\circ 36' 23,8$$

$$\text{l. } \sqrt{\frac{r_3}{r_1}} = 0,010490$$

$$\text{l. } \left(\frac{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1}} \right) = 8,081929$$

$$\text{l. cotg } \frac{1}{4}(u_3 - u_1) = 1,552096$$

$$\text{l. tang } \left[\frac{1}{4}(u_3 + u_1) - \frac{1}{2}\tilde{\omega} \right] = 9,634025$$

$$\frac{1}{4}(u_3 - u_1) - \frac{1}{2}\tilde{\omega} = 23^\circ 17' 39,7$$

$$\tilde{\omega} = -28^\circ 29' 58,2 = 331^\circ 30' 1,8$$

$$v_1 = u_1 - \tilde{\omega} = 43^\circ 22' 31,7 \quad v_3 = u_3 - \tilde{\omega} = 49^\circ 48' 7,1$$

$$1. \cos \frac{1}{2} v_1 = 9,968115$$

$$2 l. \cos \frac{1}{2} v_1 = 9,936230$$

$$1. r_1 = 0,375597$$

$$1. q = 0,311827$$

Za pomocą tablic Barkera znajdujemy l. M odpowiednie do v

$$1. M_1 = 1,496931$$

$$1. M_3 = 1,571897$$

$$\frac{3}{2} l. q = 0,467741$$

$$\frac{3}{2} l. q = 0,467741$$

$$1. \frac{\sqrt{2}}{75k} = 0,039872$$

$$1. \frac{\sqrt{2}}{75k} = 0,039872$$

$$1. (t_1 - t_0) = 2,004544$$

$$1. (t_3 - t_0) = 2,079510$$

$$t_1 - t_0 = 101,0519$$

$$t_3 - t_0 = 120,0908$$

$$- t_1 = - 16,4534$$

$$- t_3 = - 35,4922$$

$$- t_0 = 84,5985$$

$$- t_0 = 84,5986$$

Jak widzimy, obie wartości na t_0 dobrze zgadzają się ze sobą, co dowodzi, że rachunki zostały wykonane poprawnie. Moglibyśmy jeszcze dalej posunąć się w przybliżeniach, moglibyśmy jeszcze raz obliczyć l. $\frac{Q_3}{Q_1} = l. M$ i jeszcze raz powtórzyć rachunki, ale przy obliczeniu pierwszej orbity z trzech obserwacji niema celu dobijać się nadzwyczajnej ścisłości, bo przecie skoro zbierze się więcej obserwacji, to przy obliczeniu orbity uwzględniającem wszystkie obserwacje będziemy musieli zmodyfikować elementy. Przyjmujemy więc obliczone w tym paragrafie elementy za ostateczne i piszemy

$$\Omega = 85^\circ 23' 12,4$$

$$i = 154 \ 19 \ 30,0$$

$$\tilde{\omega} = 331 \ 30 \ 1,8$$

$$l. q = 0,311827$$

$$t_0 = - 84,59855 = 6,40145 \text{ Sierpnia } 1890 \text{ r.}$$

11. Porównanie obliczonej środkowej pozycyi z obserwowaną. Zbieżność.

Gdybyśmy obliczyli czy to z tych, czy też z otrzymanych w § 7 elementów skrajne pozycye komety, to okazałyby się zawsze zupełna zgodność, bo skrajne pozycye służyły za podstawę całego

rachunku. Natomiast, jak to już wiemy z § 2, obliczona z elementów środkowa pozycja wcale nie musi zgadzać się z obserwowaną, bo obserwowane współrzędne środkowej pozycji tylko częściowo, jednostronnie wchodzą w rachubę. Zgodność między obserwowaną a obliczoną środkową pozycją zależy w pierwszym rzędzie od tego, o ile uważana orbita jest zbliżona do parabolicznej. Gdyby to była orbita wybitnie różna od parabolicznej, to niepomogłyby najdalej idące przybliżenia, najściślejsze rachunki.

Obliczymy współrzędne geocentryczne, ekliptyczne komety w drugiej pozycji: λ_2 i β_2 , poczem porównamy je z obserwowanymi. Naturalnie cały rachunek odbywa się w odwrotnym porządku.

$$t_2 - t_0 = 84,59855 \dots + 21,67413 \dots = 106,2727$$

$$l. (t_2 - t_0) = 2,026422$$

$$l. 75 \frac{k}{\sqrt{2}} = 9,960128$$

$$- \frac{3}{4} l. q = - 0,467741$$

$$l. M_2 = 1,518809$$

W tablicach Barkera znajdujemy odpowiednie v_2

$$v_2 = 45^\circ 11' 59'', 1$$

$$v_2 + \bar{\omega} = u_2 = 16 \ 42 \ 0,9$$

$$l. \text{tang } u_2 = 9,477149$$

$$l. \cos i = 9,954853 n$$

$$l. \text{tang } (l_2 - \varrho) = 9,432002 n$$

$$l. \sin (l_2 - \varrho) = 9,416679 n$$

$$l. \text{tang } i = 9,681901 n$$

$$l. \text{tang } b_2 = 9,098580$$

$$l_2 - \varrho = - 15^\circ 7' 50'', 8$$

$$= 344 \ 52 \ 9,2$$

$$l_2 = 430 \ 15 \ 21,6$$

$$- \odot_2 = - 239 \ 48 \ 26,7$$

$$l_2 - \odot_2 = 190 \ 26 \ 54,9$$

$$l. \sin (l_2 - \odot_2) = 9,258525 n$$

$$l. r_2 \cos b_2 = 0,377833$$

$$l. \varrho_2 \sin (\lambda_2 - \odot_2) = 9,636358 n$$

$$- l. \varrho_2 \cos (\lambda_2 - \odot_2) = - 0,133565 n$$

$$l. \text{tang } (\lambda_2 - \odot_2) = 9,502793$$

$$\frac{1}{2} v_2 = 22^\circ 35' 59'', 6$$

$$l. \cos \frac{1}{2} v_2 = 9,965301$$

$$l. q = 0,311827$$

$$- 2 l. \cos \frac{1}{2} v_2 = - 9,930602$$

$$l. r_2 = 0,381225$$

$$l. \cos b_2 = 9,996608$$

$$l. r_2 \cos b_2 = 0,377833$$

$$l. \cos (l_2 - \odot_2) = 9,992742 n$$

$$l. r_2 \cos b_2 \cos (l_2 - \odot_2) = 0,370575 n$$

$$l. R_2 = 9,994438$$

Stąd

$$l. \varrho_2 \cos (\lambda_2 - \odot_2) =$$

$$= l. [R_2 + r_2 \cos b_2 \cos (l_2 - \odot_2)]$$

$$= 0,133565 n$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 - \odot_2 &= 197^\circ 39' 16''6 \\
 \odot_2 &= 239 48 26,7 \\
 \lambda_2 &= 77^\circ 27' 43''3 \\
 \\
 l. \varrho_2 \sin (\lambda_2 - \odot_2) &= 9,636358 \text{ n} \\
 - l. \sin (\lambda_2 - \odot_2) &= -9,481842 \text{ n} \\
 l. \varrho_2 &= 0,154516 \\
 \\
 l. \sin b_2 &= 9,095188 \\
 l. r_2 &= 0,381225 \\
 \\
 l. \varrho_2 \tan \beta_2 &= 9,476413 \\
 - l. \varrho_2 &= -0,154516 \\
 l. \tan \beta_2 &= 9,321897 \\
 \\
 \beta_2 &= 11^\circ 51' 4''6 \\
 \\
 l. \tan \beta_2 &= 9,321897 \\
 - l. \sin (\lambda_2 - \odot_2) &= -9,481842 \text{ n} \\
 l. \tan w_2 = l. m &= 9,840055 \text{ n}
 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy na $l.m$ tę samą wartość [właściwie o 0,000001 mniejszą], która w § 5 wynikła wprost z danych obserwacyjnych; to znaczy, że obliczona środkowa pozycja znajduje się już na wielkiem kole przechodzącem przez obserwowaną środkową pozycję i przez ówczesne miejsce słońca, jednakże obliczona pozycja nie jest identyczna z obserwowaną. Porównawszy obliczone tu współrzędne z obserwowanemi (§ 5) widzimy, że

obliczone $\lambda_2 = 77^\circ 27' 43''3$, $\beta_2 = 11^\circ 51' 4''6$,
 zaś obserwowane¹⁾ $\lambda_2 = 77 27 49,1$, $\beta_2 = 11 51 8,2$.

Zatem obserwowane współrzędne są nieco większe, mianowicie: $\cos \beta_2 \Delta \lambda_2 = 5''8$, $\Delta \beta_2 = 3''6$. Jeżeli wreszcie obliczymy $M = \frac{\varrho_3}{\varrho_1}$ tym samym sposobem, co w § 8, to znajdziemy: $l. M = 0,012991$, podczas gdy w § 8 znaleźliśmy: $l. M = 0,012982$. Wnosimy stąd, że ta ostatnia wartość — a ona to właśnie służyła za podstawę do obliczenia elementów — była już wcale dokładną. Jeszcze większą zgodność osiągniemy, jeżeli obliczymy $l. M$ znowu za pomocą wzoru

¹⁾ Nie podawaliśmy β , bo łatwo je obliczyć ze \sin lub \tan (str. 355).

(2 bis), ale używając w rachunku $\frac{n_1}{n_3}$ obliczonego nie z ostatniego wzoru (33) poprzedniego rozdziału a ze wzoru

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{r_3}{r_1} \frac{\sin(v_3 - v_2)}{\sin(v_2 - v_1)}.$$

Mianowicie znajdziemy wtedy: $l.M = 0,012985$, t. j. tylko o 0,000003 więcej niż w § 8. Biorąc w uwagę tę zgodność wartości na m i M możemy powiedzieć, że osiągnęliśmy już dostateczne przybliżenie i że pozostała niezgodność pomiędzy obserwowanymi a obliczonymi współrzędnymi w środkowej pozycji pochodzi właśnie stąd, że orbita uważanej komety nie jest dokładnie paraboliczna¹⁾. Jednakże, jak widzimy, różnica jest nieznaczną.

Na zakończenie sprawdzimy, czy warunki zbieżności, o których mówiliśmy w § 8 poprzedniego rozdziału, są w danym razie spełnione. Stosując podane w wymienionym paragrafie prawidła przekonamy się, że w danym przypadku szeregi na współrzędne, na stosunki między polami trójkątów i t. d. są bezwzględnie i szybko zbieżne dzięki temu, że odstęp czasu między obserwacjami (5 i 14 dni) są dużo mniejsze od promieni zbieżności. Rzeczywiście, nawet najmniejszy promień zbieżności w perihelium wynosi

$$\frac{p^{3/2}}{3k} = \frac{2^{3/2} q^{3/2}}{3k} = 1,3413 \dots \times 58,1324 \dots = 77,97 \dots \text{ dni}$$

a w chwili środkowej obserwacji, w 106,27... dni po przejściu przez perihelium wynosił

$$\sqrt{(106,27 \dots)^2 + (77,97 \dots)^2} \text{ t. j. około } 132 \text{ dni.}$$

¹⁾ Podczas gdy my tu obraliśmy za podstawę drugiego przybliżenia wartość na M obliczoną ze wzoru (2 bis) J. Boccardi wziął tę, którą otrzymaliśmy przez zastosowanie reguły Carliniego, mianowicie wziął $l.m = 9,839427 n$, znalazł $l.M = 0,012955$ (u nas 0,012956) i w przedstawieniu drugiej pozycji osiągnął jeszcze lepsze przybliżenie $[\cos \beta \Delta \lambda = 2''4, \Delta \beta = 3''0]$. Naturalnie otrzymane przezeń elementy są nieco różne od naszych a epoka przejścia przez perihelium różni się nawet o przeszło dobę. Jednakże orbita Boccardiego czyni nieco mniej dokładnie zadość danym, bo jego końcowy $l.m = 0,840040 n$, jest przeto o 0,000016 mniejszy od obserwowanego, podczas gdy nasz różni się tylko o 0,000001 od obserwowanego.

ROZDZIAŁ XVII.

Wyznaczenie orbity eliptycznej z trzech obserwacyi.

1. Zasadnicze wzory metody Gaussa.

Wyłożymy tu metodę Gaussa w tej formie, jaką nadał jej Encke¹⁾, bo wprawdzie metody Oppolzera, Gibbsa i t. d. są z teoretycznego punktu widzenia doskonalsze, ale w praktycznym zastosowaniu mniej dogodne. Wzory Oppolzera i Gibbsa są ściślejsze: od jednego przybliżenia otrzymujemy elementy równie dokładne, jak w metodzie Gaussa po dwóch przybliżeniach; aliści doświadczeni rachmistrze twierdzą²⁾, że to jedno przybliżenie pochłania więcej czasu niż dwa w metodzie Gaussa. Następnie ponieważ w metodzie Gaussa i Enckego wzory są prostsze i ponieważ częściej nadarzają się sposobności do kontroli rachunków, więc łatwiej można uniknąć błędu, ewentualnie łatwiej go wykryć. Wprawdzie metoda Gaussa ma tę samą wadę, co metoda Olbersa, mianowicie ścisłość w znacznym stopniu zależy od tego, czy odstępy czasu między obserwacyami są równe, czy nie; ale w praktyce ta wada rzadko kiedy daje się we znaki, bo zazwyczaj mamy pod dostatkiem obserwacyi, łatwo więc wybrać trzy równo od siebie odległe obserwacje, względnie łatwo utworzyć równo odległe miejsca normalne.

Ponieważ e może mieć jakąkolwiek wartość zawartą między 0 a 1, więc trzeba określić sześć elementów i liczba niewiadomych jest równa liczbie obserwowanych współrzędnych. Wskutek tego

¹⁾ Ueber die Bestimmung einer elliptischen Bahn... etc.... Berliner Astron. Jahrbach f. 1854.

²⁾ Cf. Boccardi: Guide du calculateur, cz. II-ga, str. 44.

musimy zużytkować wszystkie sześć równań i prowadzić rachunki inaczej niż przy wyznaczeniu orbity parabolicznej. Ale główna różnica między przypadkiem paraboli a przypadkiem elipsy pochodzi stąd, że przy wyznaczeniu orbity eliptycznej nie korzystamy z równania Lamberta, podczas gdy specjalny jego przypadek [równanie Eulera] odgrywa przy wyznaczeniu orbity parabolicznej metodą Olbersa¹⁾ tak ważną rolę.

Z początku musimy przygotować sobie niektóre wzory. Będziemy posługiwać się równaniem (35) z rozdz. XIII-go. Naturalnie równanie to musi być spełnione we wszystkich trzech pozycjach, t. j. musi być

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{r_1} = 1 + e \cos(u_1 - \tilde{\omega}) \\ \frac{p}{r_2} = 1 + e \cos(u_2 - \tilde{\omega}) \\ \frac{p}{r_3} = 1 + e \cos(u_3 - \tilde{\omega}). \end{array} \right.$$

Jeżeli pomnożymy pierwsze z tych równań przez $\sin(u_3 - u_2)$, drugie przez $\sin(u_1 - u_3)$, trzecie przez $\sin(u_2 - u_1)$ i dodamy do siebie, to suma wyrazów zawierających e będzie równa zeru i otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} \frac{p}{r_1} \sin(u_3 - u_2) + \frac{p}{r_2} \sin(u_1 - u_3) + \frac{p}{r_3} \sin(u_2 - u_1) = \\ = \sin(u_3 - u_2) + \sin(u_1 - u_3) + \sin(u_2 - u_1). \end{aligned}$$

Ale jeżeli po prawej stronie tego równania napiszemy

$$u_1 - u_3 = u_1 - u_2 + u_2 - u_3$$

i rozwiniemy $\sin(u_1 - u_3)$, to prawa strona przybierze postać:

$$\sin(u_3 - u_2) [1 - \cos(u_2 - u_1)] + \sin(u_2 - u_1) [1 - \cos(u_3 - u_2)].$$

Stąd po łatwych redukcjach wynika

$$\text{prawa strona} = 4 \sin \frac{1}{2}(u_3 - u_2) \sin \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cdot \sin \frac{1}{2}(u_3 - u_1).$$

¹⁾ Niektóre metody wyznaczenia orbit parabolicznych, np. metoda Pontécoulant'a nie korzystają z równania Eulera. Co zaś do przypadku elipsy, to nie posługujemy się równaniem Lamberta głównie dlatego, że rozwiązanie jego jest trudniejsze niż rozwiązanie równania Eulera.

Pomnożmy to i jednocześnie podzielmy przez

$$2r_1^2 r_2^2 r_3^2 \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_2) \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1).$$

Posługując się równością

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$$

i podstawiając wartości ze wzorów (36) rozdz. XV-go możemy przywieść prawą stronę do kształtu:

$$\frac{|r_1 r_2| \cdot |r_1 r_3| \cdot |r_2 r_3|}{2r_1^2 r_2^2 r_3^2 \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1) \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_2)}.$$

Przekształcamy także w podobny sposób lewą stronę równania. Jeżeli pomnożymy ją i jednocześnie podzielmy przez $r_1 r_2 r_3$, to po podstawieniu wartości z tych samych wzorów (36) rozdziału XV-go przywieziemy lewą stronę do kształtu:

$$\frac{p}{r_1 r_2 r_3} [|r_2 r_3| - |r_1 r_3| + |r_1 r_2|].$$

Stąd łącząc znowu obie strony równania znakiem równości, skracając przez $r_1 r_2 r_3$, wreszcie dzieląc obie strony przez pozostały przy p współczynnik otrzymamy

$$p = \frac{|r_1 r_2| \cdot |r_1 r_3| \cdot |r_2 r_3|}{|r_2 r_3| - |r_1 r_3| + |r_1 r_2|} \times \frac{1}{2r_1 r_2 r_3 \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_2) \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)}. \quad (2)$$

Obliczywszy p z równania (2) możemy wrócić do równań (1) i wyznaczyć z nich e i $\tilde{\omega}$.

Weźmy np. pierwsze i trzecie równanie (1) i napiszmy je w postaci

$$e \cos(u_1 - \tilde{\omega}) = \frac{p}{r_1} - 1$$

$$e \cos(u_3 - \tilde{\omega}) = \frac{p}{r_3} - 1.$$

Przez dodawanie i odejmowanie otrzymamy po łatwych redukcjach równania:

$$(3) \quad \begin{cases} 2e \cdot \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1) \cos [\frac{1}{2}(u_3 + u_1) - \tilde{\omega}] = \frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_3} - 2 \\ 2e \cdot \sin \frac{1}{2}(u_3 - u_1) \sin [\frac{1}{2}(u_3 + u_1) - \tilde{\omega}] = \frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_3}, \end{cases}$$

z których łatwo można wiadomym sposobem obliczyć najpierw $\tilde{\omega}$ a potem e .

Oprócz powyższych równań posługujemy się też równaniami (26) rozdziału XV-go, które służyły nam już do wyznaczenia orbit parabolicznych. Zupełnie tak samo jak w przypadku paraboli nie możemy odrazu dokładnie obliczyć skrócone odległości $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, bo z początku nie znamy ścisłych wartości stosunków między polami trójkątów. I tu zatem musimy uciec się do kolejnych przybliżeń, ale ze względu na inne warunki zadania, głównie ze względu na to, że nie posługujemy się równaniem Lamberta, obieramy inną drogę. Zamiast rugować ϱ_2 rugujemy ϱ_1 i ϱ_3 , następnie określamy ϱ_2 możliwie dokładnie przez kolejne przybliżenia, obliczywszy zaś ϱ_2 już z jego pomocą określamy ϱ_1 i ϱ_3 . Rugujemy ϱ_1 i ϱ_3 w następujący sposób; mnożymy pierwsze równanie (26) rozdz. XV-go przez

$$(\text{tang } \beta_1 \sin \lambda_3 - \text{tang } \beta_3 \sin \lambda_1),$$

drugie przez

$$(\text{tang } \beta_3 \cos \lambda_1 - \text{tang } \beta_1 \cos \lambda_3),$$

trzecie przez

$$\sin (\lambda_3 - \lambda_1),$$

dodajemy stronami odpowiedniami, poczem odpowiednio uporządkowawszy otrzymujemy:

$$(4) \quad \begin{cases} n_1 R_1 [\text{tang } \beta_3 \sin (\lambda_1 - \odot_1) - \text{tang } \beta_1 \sin (\lambda_3 - \odot_1)] \\ - R_2 [\text{tang } \beta_3 \sin (\lambda_1 - \odot_2) - \text{tang } \beta_1 \sin (\lambda_3 - \odot_2)] \\ + n_3 R_3 [\text{tang } \beta_3 \sin (\lambda_1 - \odot_3) - \text{tang } \beta_1 \sin (\lambda_3 - \odot_3)] \\ - \varrho_2 [\text{tang } \beta_1 \sin (\lambda_3 - \lambda_2) - \text{tang } \beta_2 \sin (\lambda_3 - \lambda_1) + \\ + \text{tang } \beta_3 \sin (\lambda_2 - \lambda_1)] = 0. \end{cases}$$

Można uprościć współczynniki tego równania wprowadzając wielkie koło przechodzące przez pierwszą i trzecią pozycję ciała. Oznaczmy przez K długość wstępującego węzła tego koła a przez J jego nachylenie do ekliptyki; wtedy

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \beta_1 &= \sin(\lambda_1 - K) \operatorname{tang} J^1) \\ \operatorname{tang} \beta_3 &= \sin(\lambda_3 - K) \operatorname{tang} J. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Skoro wyrugujemy $\operatorname{tang} \beta_1$ i $\operatorname{tang} \beta_3$ z równania (4) za pomocą równań (5), to ponieważ

$$\begin{aligned} \sin(\lambda_1 - \odot_1) \sin(\lambda_3 - K) - \sin(\lambda_3 - \odot_1) \sin(\lambda_1 - K) &= \\ &= \sin(\lambda_1 - \lambda_3) \sin(\odot_1 - K) \\ \text{i t. d.} \dots \quad \text{i t. d.} \dots \quad \text{i t. d.} \dots, \end{aligned}$$

więc równanie (4) podzielone jeszcze przez

$$\sin(\lambda_1 - \lambda_3) \operatorname{tang} J$$

przybierze postać

$$\varrho_2 [\sin(\lambda_2 - K) - \operatorname{tang} \beta_2 \operatorname{cotg} J] + n_1 R_1 \sin(\odot_1 - K) - \\ - R_2 \sin(\odot_2 - K) + n_3 R_3 \sin(\odot_3 - K) = 0. \quad (6)$$

Przekształcamy jeszcze współczynnik przy ϱ_2 . Jeżeli na tem samym wielkiem kole [przechodzącem przez pierwszą i trzecią pozycyę], weźmiemy punkt, którego długość jest λ_2 i oznaczmy jego szerokość przez β_0 , to

$$\operatorname{tang} \beta_0 = \sin(\lambda_2 - K) \operatorname{tang} J. \quad (7)$$

Skoro wyrugujemy $\sin(\lambda_2 - K)$ ze współczynnika przy ϱ_2 za pomocą tego ostatniego związku, to omawiany współczynnik po łatwych redukcjach przybierze postać:

$$\frac{\sin(\beta_0 - \beta_2)}{\cos \beta_2 \cos \beta_0 \operatorname{tang} J} {}^2)$$

a równanie (6) po przeniesieniu wyrazu zawierającego niewiadomą, przybierze ostatecznie postać

$$\frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)}{\cos \beta_2 \cos \beta_0 \operatorname{tang} J} \cdot \varrho_2 = n_1 R_1 \sin(\odot_1 - K) - R_2 \sin(\odot_2 - K) + \\ + n_3 R_3 \sin(\odot_3 - K). \quad (6 \text{ bis})$$

¹⁾ Oczywiście łatwo jest obliczyć dwie niewiadome K i J z równań (5) bo $\beta_1, \beta_2, \lambda_1$ i λ_3 są dane. W celu obliczenia K i J można przekształcić równania (5) w podobny sposób jak równania (21) rozdziału XVI-go, albo poprostu rozwiązać względem $\sin K \operatorname{tang} J$ i $\cos K \operatorname{tang} J$.

²⁾ Trzeba obliczać ten współczynnik ze szczególną dokładnością, bo jest mały, a po rozwiązaniu równania (6 bis) względem ϱ_2 wejdzie do mianownika.

Co do β_0 , to łatwo je obliczyć z równania (7), bo λ_2 jest dane, a K i J określamy z równań (5). Tedy wszystkie wielkości — oprócz naturalnie niewiadomej ϱ_2 — wchodzące w równanie (6 bis), względnie (6) są albo znane, albo dają się łatwo obliczyć. Trudności sprawiają tylko stosunki między polami trójkątów t. j. n_1 i n_3 . Chcąc osiągnąć jak największą dokładność powinniśmy w szeregach (33) rozdziału XV-go, wyrażających te stosunki, wziąć jak najwięcej wyrazów; ale dalsze wyrazy tych szeregów zawierają oprócz wiadomych odstępów czasu τ_1, τ_2, τ_3 także niewiadome r_2 i $\frac{dr_2}{d\tau}$. Wobec tego zdawałoby się, że w pierwszym przybliżeniu należy ograniczyć się do pierwszych wyrazów pomienionych szeregów, jako niezawierających ani r_2 ani $\frac{dr_2}{d\tau}$. Ale wprędce spostrzegamy, że to niemożliwe, bo jeżeli ograniczymy się do pierwszych wyrazów szeregów (33), to musimy tak samo ograniczyć się do pierwszych wyrazów szeregów (32) rozdz. XV-go, wyrażających same pola trójkątów, t. j. musimy przyjąć

$$|r_1 r_2| = \tau_3 \sqrt{p}, \quad |r_1 r_3| = \tau_2 \sqrt{p}, \quad |r_2 r_3| = \tau_1 \sqrt{p}.$$

Ale wtedy ze względu na równość

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$$

otrzymamy

$$|r_2 r_3| - |r_1 r_3| + |r_1 r_2| = 0,$$

a w następstwie z równania (2) obecnego rozdziału wyniknie

$$p = \infty.$$

Ostatecznie musimy obrać pośrednią drogę. Pomijamy w szeregach (33) wyrazy trzeciego rzędu względem τ i wyższych rzędów, jako zawierające nie dające się (z początku) obliczyć $\frac{dr_2}{d\tau}$, a zatrzymujemy wyrazy drugiego rzędu, bo r_2 , które one zawierają, daje się wyrazić jako funkcya tejże samej niewiadomej ϱ_2 . Mianowicie z trójkąta: ziemia, słońce i planeta (w drugiej pozycji) mamy

$$r_2^2 = R_2^2 - 2R_2\Delta_2 \cos \psi_2 + \Delta_2^2.$$

Ale [por. wzory (25) rozdz. XV-go]

$$\Delta_2 = \varrho_2 \sec \beta_2,$$

przeto możemy napisać to równanie w postaci:

$$r_2^2 = (\varrho_2 \sec \beta_2 - R_2 \cos \psi_2)^2 + R_2^2 \sin^2 \psi_2. \quad (8)$$

Oto jest równanie pomocnicze określające r_2 przez ϱ_2 . Nie wprowadza ono żadnej nowej niewiadomej, bo kąt ψ_2 między kierunkami idącymi od ziemi ku planecie i ku słońcu może być każdej chwili obliczony bądź z pierwszego wzoru (6) rozdz. XVI-go, bądź ze wzorów (7) tegoż rozdziału, właściwie ze wzoru

$$\cos \psi_2 = \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - \odot_3),$$

albo ze wzorów

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } w_2 &= \frac{\text{tang } \beta_2}{\sin (\lambda_2 - \odot_2)} \\ \text{tang } \psi_2 &= \frac{\text{tang } (\lambda_2 - \odot_2)}{\cos w_2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Jeżeli obliczamy ψ_2 z pierwszego wzoru (9), to wątpliwości co do kwadrantu, w którym ten kąt jest położony, nie będzie, bo musi być $0 < \psi_2 < 180^\circ$, zaś ze względu na to, że (zawsze) $\cos \beta_2 > 0$, $\cos \psi_2$ musi mieć ten sam znak, co $\cos (\lambda_2 - \odot_2)$, tylko gdy $\cos \psi_2$ jest bliski do $+1$ albo -1 , to kąt obliczony przez cosinus będzie niepewny.

Wyrugujemy teraz $\varrho_2 \sec \beta_2$ z równań (6 bis) i (8), dzięki czemu otrzymamy równanie zawierające tylko jedną niewiadomą r_2 . Przy sposobności, aby skrócić pisaninę, wprowadzimy do równania (6 bis) niektóre nowe symbole. Położymy mianowicie

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin (\beta_2 - \beta_0)}{\cos \beta_0 \text{ tang } J} &= a \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

i podzielimy całe równanie (6 bis) przez ¹⁾ a . Następnie położymy jeszcze

¹⁾ Przy podstawieniu liczbowych wartości należy obliczać a z jak największą dokładnością.

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_1 \sin (\odot_1 - K)}{a} = b \\ \frac{R_2 \sin (\odot_2 - K)}{a} = c \\ \frac{R_3 \sin (\odot_3 - K)}{a} = d. \end{array} \right.$$

Po wprowadzeniu tych symbolów równanie (6 bis) przybierze postać

$$(12) \quad \varrho_2 \sec \beta_2 = n_1 b - c + n_3 d,$$

przyczem b, c, d są wiadome. To równanie można też napisać tak:

$$(12 \text{ bis}) \quad \varrho_2 \sec \beta_2 = (n_1 + n_3) \frac{\left(b + \frac{n_3 d}{n_1}\right)}{1 + \frac{n_3}{n_1}} - c.$$

Z drugiej strony, jeżeli rozwiążemy równanie (8) względem $\varrho_2 \sec \beta_2$, to otrzymamy

$$(13) \quad \varrho_2 \sec \beta_2 = R_2 \cos \psi_2 \pm \sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin^2 \psi_2}.$$

Z równań (12) i (13) natychmiast wynika równanie

$$(14) \quad (n_1 + n_3) \frac{\left(b + \frac{n_3 d}{n_1}\right)}{1 + \frac{n_3}{n_1}} - c = R_2 \cos \psi_2 \pm \sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin^2 \psi_2},$$

które zawiera już tylko jedną niewiadomą r_2 , bo jeszcze w poprzednim paragrafie umówiliśmy się zatrzymać w n_1 i n_3 tylko te wyrazy, które zawierają r_2 a nie zawierają $\frac{dr_2}{d\tau}$. Widzimy zresztą, że n_1 i n_3 występują w równaniu (14) tylko w kombinacjach: $n_1 + n_3$ i $\frac{n_3}{n_1}$. Ze wzorów (33) rozdz. XV-go, jeżeli weźmiemy w uwagę równość

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_3,$$

wynika:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 + n_3 = 1 + \frac{1}{2r_2^3} \tau_1 \tau_3 \left\{ 1 - \frac{(\tau_1 - \tau_3)}{r_2} \frac{dr_2}{d\tau} + \dots \right. \\ \frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_2 (\tau_1 - \tau_3)}{r_2^3} + \dots \right. \end{array} \right.$$

Widzimy stąd, że jeżeli $\tau_1 = \tau_3$, t. j. jeżeli odstępy czasu między obserwacjami są równe, to we wyrażeniu na $n_1 + n_3$ współczynnik przy $\frac{dr_2}{d\tau}$ jest równy zeru. Zatem nie potrzebujemy go wtedy pomijać i wyrażenie na $n_1 + n_3$ jest o jeden rząd ściślejse. Tem się tłumaczy uwaga, którą zrobiliśmy w poprzednim paragrafie, że w metodzie Gaussa ściśłość zależy od tego, czy odstępy czasu pomiędzy obserwacjami są równe, czy nie. Jednocześnie widzimy, że w razie, gdy $\tau_1 = \tau_3$, to we wyrażeniu na $\frac{n_3}{n_1}$ odpada wyraz zawierający r_2 , zatem r_2 wchodzi wtedy do wzoru (14) tylko przez $n_1 + n_3$; jednocześnie wyrażenie na $\frac{n_3}{n_1}$ jest ściśle aż do wielkości drugiego rzędu włącznie. Załóżymy, że pomieniona równość jest, jeżeli nie ściśle, to z wielkiem przybliżeniem spełniona i przyjmujemy początkowo

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_3}{\tau_1}, \quad n_1 + n_3 = 1 + \frac{\tau_1 \tau_3}{2r_2^3}.$$

Gauss kładzie

$$\frac{n_3}{n_1} = P, \quad (n_1 + n_3 - 1) 2r_2^3 = Q, \quad (16)$$

odpowiednio do tego pisze równanie (14) w postaci

$$\left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right) \cdot \frac{b + Pd}{1 + P} - c = R_2 \cos \psi_2 \pm \sqrt{r_2^2 - R_2 \sin^2 \psi_2} \quad (14 \text{ bis})$$

i w pierwszym przybliżeniu przyjmuje

$$P = \frac{\tau_3}{\tau_1}, \quad Q = \tau_1 \tau_3,$$

a dopiero w następnych poprawia wartości na P i Q .

Położmy jeszcze dla krótkości

$$\left. \begin{aligned} \frac{b + Pd}{1 + P} &= c_0 \\ c_0 - c &= k_0 \\ \frac{1}{2} c_0 Q &= -l_0; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

25*

wtedy równanie (14 bis) przywiedzie się do kształtu

$$(18) \quad k_0 - \frac{l_0}{r_2^3} = R_2 \cos \psi_2 \pm \sqrt{r_2^3 - R_2^2 \sin^2 \psi_2}.$$

Jeżeli wreszcie w trójkącie: planeta, ziemia, słońce oznaczymy przez z_2 kąt u planety, to z twierdzenia sinusów otrzymamy bezpośrednio związek

$$(19) \quad r_2 = \frac{R_2 \sin \psi_2}{\sin z_2}.$$

Skoro wyrugujemy r_2 z równania (18) za pomocą wzoru (19), to zaraz otrzymamy

$$(k_0 - R_2 \cos \psi_2) \sin z_2 = \frac{l_0 \sin^4 z_2}{R_2^3 \sin^3 \psi_2} \pm R_2 \sin \psi_2 \cos z_2.$$

Kładziemy jeszcze

$$(20) \quad \begin{cases} k_0 - R_2 \cos \psi_2 = \eta_0 \cos q \\ R_2 \sin \psi_2 = \eta_0 \sin q \\ \frac{l_0}{\eta_0 R_2^3 \sin^3 \psi_2} = m_0 \quad (\text{przyczem } m_0 > 0), \end{cases}$$

poczem równanie nasze przybiera postać

$$(21) \quad \sin(z_2 \mp q) = m_0 \sin^4 z_2.$$

Równanie (21) jest naturalnie zupełnie równoważne równaniu (18). Rzeczywiście gdybyśmy uwolnili równanie (18) od pierwiastka i od mianownika, to otrzymalibyśmy równanie algebraiczne 8-go stopnia. Tak samo jeżeli położymy $\sin z_2 = x$ i zechcemy pozbyć się pierwiastka $\sqrt{1-x^2}$, to także otrzymamy równanie 8-go stopnia; ale przywodząc równanie (19) do kształtu (21) uzyskujemy znaczne uproszczenie i ułatwiamy sobie rozwiązanie.

Postawiliśmy warunek, żeby m_0 było dodatnie. Aby to osiągnąć, trzeba tak obrać kwadrant, w którym ma leżeć kąt q , żeby η_0 miało ten sam znak, co l_0 , bo $\sin \psi_2$ jest zawsze dodatni (bo zawsze $0 < \psi_2 < 180^\circ$). Również ze względu na to, że $\sin \psi_2$ jest zawsze dodatni i że tak samo r_2 i R_2 są z natury swojej dodatnie, z równania (19) wynika, iż z_2 zawsze musi być zawarte między 0 a 180° . Zresztą z płaskiego trójkąta: ziemia, słońce, planeta, w którym z_2

jest kątem przy planecie a ψ_2 kątem przy ziemi, wynika, że z_2 może być co najwyżej równe $180^\circ - \psi_2$.

Z tego samego trójkąta wynikają też związki

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \psi_2}{\sin z_2}, \quad \Delta_2 = R_2 \frac{\sin(180^\circ - z_2 - \psi_2)}{\sin z_2} = \frac{R_2 \sin(z_2 + \psi_2)}{\sin z_2}.$$

W drugim związku podstawiamy ϱ_2 zamiast Δ_2 i otrzymujemy

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \psi_2}{\sin z_2}, \quad \varrho_2 = R_2 \frac{\sin(z_2 + \psi_2)}{\sin z_2} \cos \beta_2. \quad (22)$$

Przekształcenie równania (18) na (21) zawodzi, gdy planeta (lub komety) znajduje się we węźle i jednocześnie w opozycji lub konjunkcji ze słońcem, bo wtedy $\beta_2 = 0$ a $\lambda_2 - \odot_2 = 180^\circ$, lub (w konjunkcji) $\lambda_2 - \odot_2 = 0$ i¹⁾ $\sin \psi_2 = 0$, $m_0 = \infty$. Ale wtedy równanie (18) znacznie upraszcza się. Mianowicie w przypadku opozycji $\cos \psi_2 = -1$ i równanie (18) przywodzi się do kształtu

$$k_0 - \frac{l_0}{r_2^3} = -R_2 + r_2. \quad (23)$$

Znak dolny przy pierwiastku w równaniu (18) jest wykluczony, bo lewa strona tego równania powinna być dodatnią. W przypadku konjunkcji $\cos \psi_2 = 1$, zaś równanie (18) przywodzi się do

$$k_0 - \frac{l_0}{r_2^3} = R_2 \pm r_2. \quad (24)$$

Oczywiście znak górny odpowiada przypadkowi, gdy planeta znajduje się poza słońcem, dolny przypadkowi, gdy znajduje się między słońcem a ziemią. Zresztą obserwacja w górnej konjunkcji, gdy jednocześnie $\beta_2 = 0$, jest oczywiście niemożliwą, pozostaje zatem tylko przypadek dolnej konjunkcji, t. j. ten, w którym należy pisać znak —. Wzór na ϱ_2 przywodzi się w przypadku opozycji do

$$\varrho_2 = r_2 - R_2, \quad (25)$$

a w przypadku dolnej konjunkcji do

$$\varrho_2 = R_2 - r_2. \quad (26)$$

¹⁾ Por. równanie (9).

W razie, gdy wielkie koło przechodzące przez dwie skrajne pozycje planety przechodzi także przez środkową, to $a=0$ ¹⁾, przeto b , c i d stają się nieskończenie wielkie. Ale jeżeli wtedy pomnożymy całe równanie (12) przez a , to lewa jego strona, t. j. $a \varrho_2 \sec \beta_2$ zniknie i pozostanie równanie, które po podstawieniu P i Q będzie wyglądać tak:

$$(27) \quad \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right) \frac{ab + Pad}{1 + P} - ac = 0.$$

W równaniu (27) współczynniki ab , ad i ac będą, jak to widać z równań (11), skończone. Oczywiście równanie (27) jest łatwiejsze od równania (18) lub (21), bo r_2 figuruje w niem tylko w jednym wyrazie i przez najprostsze algebraiczne operacye można je doprowadzić do kształtu

$$r_2 = \sqrt[3]{C}$$

przyczem C składać się będzie ze samych wiadomych wielkości. Gdyby jednakże przypadkiem było: $\sin(\odot_2 - K) = 0$, t. j. gdyby wielkie koło przechodzące przez trzy pozycje planety przechodziło także przez drugą pozycję słońca, to byłoby $ac=0$ i równanie (27) przywiodłoby się do $n_1 + n_3 = 0$, co oznacza, że wyznaczenie orbity z danych obserwacyi jest niemożliwe.

2. Dyskusya równania (21). Wielorakie rozwiązania.

Rozważając równanie (21) dość będzie pisać tylko górny znak w argumencie, albowiem jeżeli Z jest pierwiastkiem równania

$$\sin(z_2 - q) = m_0 \sin^4 z_2,$$

to równanie

$$\sin(z_2 + q) = m_0 \sin^4 z_2$$

ma pierwiastek $180^\circ - Z$.

Z drugiej strony łatwo przekonać się, że z 8-miu pierwiastków równania (21) co najwyżej cztery mogą być rzeczywiste, jeżeli bowiem napiszemy je w kształcie

$$m \sin^4 z_2 - \sin z_2 \cos q = -\cos z_2 \sin q,$$

a potem podniesiemy do kwadratu i położymy $\sin z_2 = x$, to po uporządkowaniu otrzymamy

$$(28) \quad m^2 x^8 - 2m x^5 \cos q + x^2 - \sin^2 q = 0.$$

¹⁾ bo $(\beta_2 - \beta_0) = 0$.

Zastosujmy regułę Descartes'a. Jeżeli $\cos q > 0$, to ponieważ m jest zawsze dodatnie, drugi wyraz jest odjemny. Tedy dla $x > 0$ mamy trzy przemiany znaków, a dla $x < 0$ jedną, stąd ilość pierwiastków dodatnich jest co najwyżej: trzy a odjemnych: jeden. Ponieważ zaś wyraz od x niezależny jest odjemny, więc musi być przynajmniej jeden pierwiastek odjemny a liczba pierwiastków dodatnich musi być nieparzysta. Przychodzimy tedy do wniosku, że przy $\cos q > 0$ musi być jeden pierwiastek odjemny i jeden lub trzy dodatnie, pozostałe sześć lub cztery pierwiastki są urojone. Gdy $\cos q < 0$, to rozumując zupełnie tak samo znajdziemy, że musi być koniecznie jeden pierwiastek dodatni, zaś liczba odjemnych jest: jeden albo trzy. Widzimy stąd, że liczba rzeczywistych pierwiastków tak dla $\cos q > 0$ jak dla $\cos q < 0$ wynosi 2 albo 4. Na granicy pomiędzy przypadkiem, gdy są dwa rzeczywiste pierwiastki i tym, gdy są aż cztery, stoi przypadek, gdy równanie (28), t. j. równanie (21) ma pierwiastek podwójny. Ponieważ podwójny pierwiastek musi czynić zadość równaniu powstającemu z danego przez różniczkowanie względem niewiadomej, więc równanie (21) musi wtedy mieć pierwiastek wspólny z równaniem

$$4m \sin^3 z \cos z = \cos(z - q). \quad (29)$$

Ponieważ dla wspólnego pierwiastka równania (21) i (29) są jednocześnie spełnione, przeto możemy wyrugować z nich m , po czem otrzymamy równanie

$$4 \sin(z - q) \cos z = \cos(z - q) \sin z.$$

Rozwinąwszy funkcyje kołowe argumentu $z - q$ i zastąpiwszy $\sin z \cos z$ przez $\frac{1}{2} \sin 2z$ a $\cos^2 z$ przez $\frac{1 + \cos 2z}{2}$ po łatwych redukeyach otrzymamy

$$\sin q = \frac{3}{8} \sin(2z_2 - q). \quad (30)$$

Wartość na z_2 czyniąca zadość temu równaniu to jest właśnie wartość pierwiastka podwójnego. Ponieważ atoli $\sin(2z_2 - q)$ nie może przekroczyć granic $+1$ i -1 , więc odrazu widzimy, że wartość na $\sin q$, przy której możebnym jest pierwiastek podwójny, nie może w żadnym razie przekroczyć granic $-\frac{3}{8}$ i $+\frac{3}{8}$. Wynika stąd, że jeżeli q nie leży w granicach $-36^\circ 52',2$ i $36^\circ 52',2$ oraz $143^\circ 7',8$ i $216^\circ 52',2$, to równanie (21) z pewnością posiada tylko

dwa pierwiastki rzeczywiste: jeden dodatni i jeden ujemny. Jeżeli zaś q leży w powyższych granicach, to trzeba zbadać wartość na m . Mianowicie obliczamy z równania (30) pierwiastek podwójny i znajdujemy naturalnie dwie wartości, bo jeżeli — powiedzmy — $z_2 = Z$ czyni zadość równaniu (30), to czyni mu także zadość $z_2 = 90^\circ - Z + q$. Następnie rozwiązujemy równanie (21) względem m , otrzymujemy

$$m = \frac{\sin(Z - q)}{\sin^4 z_2},$$

podstawiamy oba pierwiastki podwójne, t. j. kładziemy raz $z_2 = Z$, drugi raz $z_2 = 90^\circ - Z + q$ i otrzymujemy dwie wartości na m , np. m_1 i m_2 , przy których z danem q równanie (21) miałoby pierwiastki podwójne. Jeżeli dane m nie leży pomiędzy m_1 i m_2 , to równanie (21) ma tylko dwa pierwiastki rzeczywiste: jeden dodatni i jeden ujemny. Jeżeli zaś dane m leży pomiędzy m_1 i m_2 , to równanie (21) ma cztery pierwiastki rzeczywiste, z których stosownie do tego czy $\cos q$ jest dodatni czy ujemny, trzy lub tylko jeden jest dodatni. Znalezienie m_1 i m_2 jest ułatwione przez osobne tablice, w których m_1 i m_2 są obliczone dla wartości q co jeden stopień (lub gęściej), z których zatem łatwo je sobie wyinterpolować. Wogóle rozstrzygnięcie, czy w danym przypadku równanie (21) posiada 4, czy tylko 2 rzeczywiste pierwiastki, nie przedstawia trudności.

Pierwiastki ujemne ($\sin z_2 < 0$) nie mają fizycznego znaczenia, bo z definicyi kąta z_2 wynika, że kąt ten musi być zawarty między 0° a 180° , ale z pomiędzy pierwiastków dodatnich jeden także odpada a to dla następującego powodu. Stałe wchodzące do równania (21) zależą od wielkości P i Q , ale gdybyśmy zamiast wartości na stosunki między polami trójkątów odnoszących się do planety, wzięli wartości odnoszące się do ziemi, to [por. rozdz. XV-ty, § 7] w pierwszym przybliżeniu otrzymalibyśmy na P i Q te same wartości $\frac{\tau_3}{\tau_1}$ i $\tau_1 \tau_3$, które przyjmujemy dla planety. Stąd wynika, że pomiędzy dodatnimi pierwiastkami równania (21) znajduje się jeden, który odnosi się nie do planety, a do ziemi. Łatwo jest rozpoznać ten pierwiastek, bo dla orbity ziemskiej musi być $\varrho_2 = 0$, czemu wedle drugiego równania (22) odpowiada $z_2 = 180^\circ - \psi_2$ (rozwiązanie $z_2 = -\psi_2$ jest niemożliwe, bo oba kąty są dodatnie). Naturalnie argument owego odnoszącego się do orbity ziemskiej pierwiastka

równania (21) nie będzie dokładnie równy $180^\circ - \psi_2$, bo wartości na P i Q , które wchodzą do równania (21), nie odpowiadają ściśle orbicie ziemskiej, — ale będzie do $180^\circ - \psi_2$ bliski.

Widzimy stąd, że w tych razach, w których równanie (21) posiada tylko dwa rzeczywiste pierwiastki, wyznaczenie orbity jest wogóle niemożliwe, bo pierwiastek odjemny jest niemożliwy, a dodatni odnosi się nie do planety, a do ziemi. Dowodzi to, że obserwacje były błędne, albo nawet nie odnosiły się do jednego i tego samego ciała¹⁾. Możemy to samo powiedzieć o przypadku, w którym $\cos q$ jest odjemny i równanie (21) posiada trzy pierwiastki odjemne oraz jeden dodatni, bo znowu ten jedyny dodatni pierwiastek odnosi się do ziemi. Wyznaczenie orbity jest zatem możliwe tylko wtenczas, gdy równanie (21) ma trzy pierwiastki dodatnie a jeden odjemny, t. j. gdy $\cos q$ jest dodatni, q zawarte między $-36^\circ 52,2$ a $+36^\circ 52,2$, gdy wreszcie m jest zawarte pomiędzy m_1 i m_2 . Z trzech dodatnich pierwiastków jeden, mianowicie ten, którego argument jest bliski do $180^\circ - \psi_2$, jako odnoszący się do ziemi, odpada. Co do pozostałych dwóch, to łatwo rozstrzygnąć, który odnosi się do planety a to na podstawie następującego kryterium.

Ponieważ wszystkie pozostałe wielkości wchodzące w równania (22) są dodatnie, więc $\sin(z_2 + \psi_2)$ musi być także dodatni. Stąd wynika, że z_2 musi być mniejsze niż $180^\circ - \psi_2$ i że ten dodatni pierwiastek równania (21), którego argument jest mniejszy niż $180^\circ - \psi_2$, odnosi się do planety. Może się jednak zdarzyć, że obydwa nie odnoszące się do ziemi dodatnie pierwiastki równania (21) mają argumenty mniejsze od $180^\circ - \psi_2$. Wtedy rzeczywiście danym trzem obserwacyom odpowiadają aż dwie orbity i dopiero porównanie z innymi obserwacyami pozwoli rozstrzygnąć, która z nich odpowiada rzeczywistości.

Wspominaliśmy już, że w specjalnych podręcznikach zwykle znajduje się tablica granicznych wartości na m_1 i m_2 dla kolejnych wartości q , poczynając od $q = -\arcsin \frac{2}{3}$ aż do $q = \arcsin \frac{2}{3}$. Tablica ta podaje także granice, w których zawarte są argumenty z_2

¹⁾ J. C. Watson: Theoretical astronomy... (Filadelfia 1869 r.) str. 241 sądzi, że gdy P i Q znacznie różnią się od ścisłych wartości odnoszących się do ziemi, to ów jedyny dodatni pierwiastek może jednak odnosić się do planety. Jest to oczywiście błędne zapatrywanie, o ile mi zresztą wiadomo, przez innych autorów nie podzielane.

czterech rzeczywistych pierwiastków równania (21). Z jej pomocą łatwo jest zbadać, który pierwiastek należy do orbity planety, a kilka prób wystarczy, aby dokładnie określić jego wartość.

3. Obliczenie przybliżonych wartości na q_1, q_3, r_1, r_3 i t. d.

Obliczywszy właściwy pierwiastek równania (21) podstawiamy go w równania (22) i otrzymujemy q_2 i r_2 . Z drugiej strony z równań (16) wynikają związki:

$$(31) \quad n_1 = \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right) \cdot \frac{1}{1+P}; \quad n_3 = n_1 P.$$

Mając wartość na r_2 możemy obliczyć przybliżone n_1 i n_3 .

Mówimy „przybliżone“, bo przyjęte przez nas wartości: $P = \frac{\tau_3}{\tau_1}$, $Q = \tau_1 \tau_3$ są przybliżone. Tak samo obliczymy przybliżone q_1 i q_3 ze wzorów (26) rozdz. XV-go. Ponieważ są to liniowe wzory, więc nie potrzebujemy pokazywać jak wykonać rugowanie, powiemy tylko, że upraszczamy wyrażenia na q_1 i q_3 tak samo, jak uprościliśmy w § 1 wzór na q_2 .

Ostatecznie wzory te przedstawiają się w następującym kształcie ¹⁾:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = M'_1 \frac{q_2}{n_1} + M''_1 \left(1 - \frac{N_1}{n_1}\right) \\ q_3 = M'_3 \frac{q_2}{n_3} + M''_3 \left(1 - \frac{N_3}{n_3}\right) \end{array} \right.$$

przyczem

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} M'_1 = \frac{\sin(\lambda_3 - \lambda_2)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} + f \cdot \frac{R_3 \sin(\lambda_3 - \odot_3)}{d} \\ M''_1 = \frac{h \sin(\lambda_3 - K)}{d} \\ M'_3 = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} - f \cdot \frac{R_1 \sin(\lambda_1 - \odot_1)}{b} \\ M''_3 = \frac{h \sin(\lambda_3 - K)}{b} \end{array} \right.$$

¹⁾ W niektórych wyjątkowych przypadkach równania (32) zawodzą; np. któryś współczynnik staje się nieokreślonym, — ale zawsze można obliczyć q_1 i q_3 z pierwotnych równań (26) rozdz. XV-go.

b i d mają to samo znaczenie, co we wzorach (11), zaś

$$f = \frac{\sec \beta_2}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}, \quad h = \frac{R_1 R_3 \sin(\odot_3 - \odot_1)}{a \sin(\lambda_3 - \lambda_1)}. \quad (34)$$

Tu znowu a ma to samo znaczenie, co we wzorze (10).

Mając ϱ_1 i ϱ_3 obliczamy r_1 i r_3 ze wzorów (20) rozdz. XVI-go, z których korzystaliśmy już w metodzie Olbersa. Oto są te wzory [l_1 i b_1 są to współrzędne ekliptyczne, heliocentryczne] dla pierwszej pozycyi:

$$\left. \begin{aligned} r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - \odot_1) &= \varrho_1 \cos(\lambda_1 - \odot_1) - R_1 \\ r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \odot_1) &= \varrho_1 \sin(\lambda_1 - \odot_1) \\ r_1 \sin b_1 &= \varrho_1 \tan \beta_1. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Wzorów dla drugiej i trzeciej pozycyi pisać nie będziemy, bo są zupełnie do wzorów (35) podobne. Należy obliczyć nietylko r_1 i r_3 ale także r_2 . W ten sposób będziemy mieli pierwszą próbę rachunku, bo wartość na r_2 obliczona ze wzorów typu (35) powinna dokładnie zgadzać się z tą, którą poprzednio otrzymaliśmy z pierwszego wzoru (22). Następnie obliczamy Ω i i ze wzorów (21) rozdz. XVI-go, t. j. ze wzorów

$$\left. \begin{aligned} \tan i \cdot \sin(l_1 - \Omega) &= \tan b_1 \\ \tan i \cdot \sin(l_3 - \Omega) &= \tan b_3, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

albo ze wzorów (21 bis) tego samego rozdz. XVI-go. Tu nastęrcza się sposobność do drugiej próby rachunku, bo Ω i i obliczone ze wzorów (36) powinny czynić zadość równaniu tego samego typu odnoszącemu się do drugiej pozycyi, t. j. równaniu

$$\tan i \sin(l_2 - \Omega) = \tan b_2.$$

Ta druga próba jest nawet ważniejsza niż pierwsza, bo gwarantuje dokładność prawie wszystkich poprzednich rachunków¹⁾, podczas gdy pierwsza rozciąga się tylko na mniejszą ich część.

Wreszcie obliczamy argumenty szerokości z również już znanych z § 3 rozdz. XVI-go wzorów

$$\tan u_1 = \tan(l_1 - \Omega) \sec i \dots \text{ i t. d.} \quad (37)$$

¹⁾ Mianowicie warunek, żeby wszystkie trzy pozycye znajdowały się w tej samej płaszczyźnie przechodzącej przez słońce, musi być dokładnie spełniony.

Tu mamy sposobność do trzeciej próby, albowiem mając argumenty szerokości możemy obliczyć

$$(38) \quad n_1 = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}, \quad n_3 = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}$$

i porównać je z n_1 i n_3 obliczonymi ze wzorów (31). Powinniśmy znaleźć zgodność; ponieważ jednak kąty $u_3 - u_2$ i t. d. są zawsze małe, więc błąd wynoszący parę setnych sekundy ma duży wpływ na n i prosto wskutek niedokładności tablic logarytmicznych może okazać się pewna niezgodność. Jeżeli, jak to zwykle bywa, jeden z $\log n$ obliczonych ze wzorów (38) jest trochę większy od odpowiedniego $\log n$ obliczonego ze wzorów (31), a drugi mniejszy, to można usunąć, lub zmniejszyć niezgodność zmieniając nieco kąt u_2 , co jest dozwolone, bo setne sekundy są zawsze niepewne. Rzeczywiście, gdyby niezgodność pochodziła tylko z błędu w kącie u_2 , to mielibyśmy

$$\Delta \log n_1 = - \operatorname{cotg}(u_3 - u_2) \Delta u_2$$

$$\Delta \log n_3 = + \operatorname{cotg}(u_2 - u_1) \Delta u_2.$$

Jeżeli liczymy 7-mio cyfrowymi logarytmami a Δu_2 jest wyrażone w sekundach, to różnice logarytmów wyrażone w jednostkach siódmego miejsca dziesiętnego będą:

$$(39) \quad \begin{cases} \Delta \log n_1 = - \frac{0,4342944\dots}{206264,8\dots} \times 10^7 \cdot \operatorname{cotg}(u_3 - u_2) \Delta u_2 = \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = - 21,055\dots \operatorname{cotg}(u_3 - u_2) \Delta u_2 \\ \Delta \log n_3 = \dots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = + 21,055\dots \operatorname{cotg}(u_2 - u_1) \Delta u_2 \end{cases}$$

Podstawmy w lewe strony tych równań istotne różnice między logarytmami n a znajdziemy odpowiednie poprawki Δu_2 . Jeżeli obie poprawki są jednakowe, to możemy zupełnie usunąć niezgodność, jeżeli zaś są niejednakowe, to biorąc np. pierwsze Δu_2 doprowadzimy $\log n_1$ do zupełnej zgodności z $\log n_1$ pochodzącym ze wzorów (31), zaś różnica między $\log n_2$ nowym a dawnym tylko zmniejszy się. Możemy zresztą wziąć średnią z obu wartości Δu_2 , wtedy nie zniesiemy żadnej różnicy, ale zmniejszymy obie. Gdyby atoli które Δu_2 wynosiło duży ułamek sekundy, lub całe sekundy, to byłby znak, że popełniono gdzieś błąd rachunkowy, bo tak duża różnica nie może pochodzić z niedokładności logarytmów.

4. Drugie przybliżenie. Obliczenie stosunków między polami wycinków a polami trójkątów.

Dotychczasowe rezultaty nie są dość ściśle, ale możemy na ich podstawie znaleźć dokładniejsze P i Q i, co za tem idzie, inne wielkości. Przy obliczeniu P i Q będziemy teraz używać innej metody niż w pierwszym przybliżeniu, bo gdybyśmy chcieli w dalszym ciągu korzystać ze wzorów (15), to musielibyśmy uwzględnić wyrazy zawierające $\frac{dr_2}{dt}$. Moglibyśmy obliczyć tę pochodną za pomocą wzoru (34) rozdz. XV-go, z którego korzystaliśmy nawet w przykładzie na zastosowanie metody Olbersa (§ 8, rozdz. XVI), ale to wzór przybliżony, niezbyt dokładny; lepiej będzie obrać dokładniejszą metodę. Gauss obrał następującą: oblicza P i Q za pomocą stosunków pomiędzy polami wycinków a odpowiednich trójkątów, przyczem zużytkowuje także wzór (2), z którego dotąd korzystaliśmy tylko raz i to tylko dla wykazania, że nie można uważać pól trójkątów za proporcjonalne do odstępów czasu pomiędzy obserwacjami. Zato pola wycinków są wedle drugiego prawa Keplera proporcjonalne do pomienionych odstępów czasu [por. wzór (59)¹⁾ w rozdz. XIII-tym], mianowicie jeżeli pominiemy masę planety, co jest zawsze dozwolone, bo chodzi przecie o małe planety, to podwójne pole wycinka będzie:

$$\tau \sqrt{p}.$$

Oznaczmy stosunki między polami wycinków a polami odpowiednich trójkątów przez y_1, y_2, y_3 , a otrzymamy równania:

$$y_3 | r_1 r_2 | = \tau_3 \sqrt{p}, \quad y_2 | r_1 r_3 | = \tau_2 \sqrt{p}, \quad y_1 | r_2 r_3 | = \tau_1 \sqrt{p}. \quad (40)$$

Stąd

$$n_1 = \frac{|r_2 r_3|}{|r_1 r_3|} = \frac{\tau_1 y_2}{\tau_2 y_1}, \quad n_3 = \frac{|r_1 r_2|}{|r_1 r_3|} = \frac{\tau_3 y_2}{\tau_2 y_3} \quad (41)$$

wreszcie

$$P = \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{y_1}{y_3}, \quad Q = \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot \frac{y_2}{y_1} + \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{y_2}{y_3} - 1 \right) 2r_2^3. \quad (42)$$

¹⁾ We wzorze tym stała przyciągania była równa jedności, odwrotnie zaś masa słońca nie była przyjęta za jedność!

Jeżeli zaś weźmiemy wzór (2) i podstawimy weń wartości na $|r_1 r_3| \dots$ i t. d. wzięte ze wzorów (40), to otrzymamy najpierw

$$1 = \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{y_1 y_2 y_3 \left[\frac{\tau_1}{y_1} + \frac{\tau_3}{y_3} - \frac{\tau_2}{y_2} \right] 2 r_1 r_2 r_3 \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_2) \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)},$$

następnie zaś mnożąc po prawej stronie w liczniku i mianowniku przez $\frac{y_2}{\tau_2}$ po łatwych redukcjach i po podstawieniu z drugiego wzoru (42) otrzymamy dający się logarytmować wzór na Q , mianowicie

$$(43) \quad Q = \frac{\tau_1 \tau_3}{y_1 y_3} \cdot \frac{r_2^2}{r_1 r_3 \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_2) \cos \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)}.$$

Wzory te są zupełnie ściśle, ale wartości na r_1, r_3, u_1, u_3 i t. d., które w nie podstawimy, nie są zupełnie ściśle. Zresztą wszystko, co w nich figuruje, jest obecnie już znane oprócz y_1 i y_3 . Przeto najbliższem naszym zadaniem będzie obliczenie tych dwóch wielkości. Zanim jednakże przejdziemy do tego nowego zadania, musimy zrobić ważną uwagę. Będziemy poszukiwać jak najdokładniejszych wartości na P i Q , należy więc poprawić czasy obserwacji na aberację planetarną [por. rozdz. XV-ty, § 2]. Jeżeli chodzi o nowe ciało niebieskie, to na początku rachunku, gdy odległości były jeszcze zupełnie nieznanne, nie można było zrobić tych poprawek, ale obecnie, gdy odległości są już znane, należy odjąć od czasów obserwacji $498,26 \varrho \sec \beta$ [por. rozdz. X-ty, § 1] sekund. Ponieważ jednak czasy obserwacji są zwykle wyrażone w dniach, więc wypadnie odejmować $\frac{498,26}{86400} \varrho \sec \beta$ dni¹⁾. Wskutek tego także τ_1, τ_2 i τ_3 ulegną zmianom. Naturalnie należy podstawić we wzory (42) i (43) właśnie te poprawione τ_1 i τ_3 .

Wyprowadzimy teraz równania, z których można będzie określić liczby y_1, y_2 i y_3 . Jeżeli przyjmiemy jak wszędzie masę słońca za jedną a masę planety za znikomą, to ze wzorów (42) i (61 bis) rozdz. XIII-go wyniknie

$$E - e \sin E = a^{-3/2} k (t - t_0).$$

¹⁾ $\log \frac{498,26}{86400} = 7,760942.$

Napiszmy to równanie¹⁾ dwukrotnie, raz dla pierwszej, drugi raz dla trzeciej pozycyi planety, odejmijmy jedno równanie od drugiego, następnie pamiętając o tem, że masa planety jest znikomą, wprowadźmy to samo oznaczenie, które wprowadziliśmy już w rozdziale XV-tym [wzory (27)], t. j. położmy

$$k(t_3 - t_1) = \tau_2,$$

wreszcie zastąpmy po prawej stronie różnicę funkcyi kołowych przez iloczyn funkcyi kołowych o argumentach równych połowie sumy i różnicy pierwotnych argumentów, a otrzymamy

$$\tau_2 a^{-3/2} = E_3 - E_1 - 2e \sin \frac{1}{2}(E_3 - E_1) \cos \frac{1}{2}(E_3 + E_1). \quad (44)$$

Trzeba stąd wyrugować a , e i (o ile się da) anomalie mimośrodowe a wprowadzić y_2 i wielkości znane już z pierwszego przybliżenia, t. j. r_1 , r_3 , u_1 , u_3 . W tym celu najpierw mnożymy obie strony równania (44) przez

$$\sqrt{p} = \sqrt{a(1 - e^2)},$$

poczem otrzymujemy

$$\tau_2 \sqrt{p} = a^2 \sqrt{1 - e^2} [E_3 - E_1 - 2e \sin \frac{1}{2}(E_3 - E_1) \cos \frac{1}{2}(E_3 + E_1)], \quad (44 \text{ bis})$$

następnie bierzemy związki (39) z rozdz. XIII-go, t. j.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{1}{2} E_1 &= \sqrt{r_1} \sin \frac{1}{2} v_1 \\ \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{1}{2} E_1 &= \sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} v_1 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

oraz podobne związki dla trzeciej pozycyi, poczem posługując się jeszcze równością

$$v_3 - v_1 = u_3 - u_1$$

tworzymy z łatwością równania:

$$a \sqrt{1 - e^2} \sin \frac{1}{2}(E_3 - E_1) = \sqrt{r_1 r_3} \sin \frac{1}{2}(u_3 - u_1) \quad (46)$$

oraz

$$a [\cos \frac{1}{2}(E_3 - E_1) - e \cos \frac{1}{2}(E_3 + E_1)] = \sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1). \quad (47)$$

Jeżeli rozwiążemy to ostatnie równanie względem: $e \cos \frac{1}{2}(E_3 + E_1)$ i podstawimy rezultat we wzór (44 bis), jeżeli następnie podsta-

¹⁾ Jest to poprostu równanie Keplera, w którym wyraziliśmy ruch średni przez a i masy.

wimy w ten sam wzór: $a\sqrt{1-e^2} \sin \frac{1}{2}(E_3 - E_1)$ ze wzoru (46), [ale tylko w jeden wyraz], to otrzymamy:

$$(48) \quad \tau_2 \sqrt{p} = a^2 \sqrt{1-e^2} [E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1)] + r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1).$$

Aby z tego ostatniego wzoru, wyrugować $a^2 \sqrt{1-e^2}$, podnieśmy wzór (46) do trzeciej potęgi i znowu skorzystamy z równości

$$p = a(1 - e^2),$$

poczem otrzymamy

$$a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{p} \left[\frac{\sqrt{r_1 r_3} \sin \frac{1}{2}(u_3 - u_1)}{\sin \frac{1}{2}(E_3 - E_1)} \right]^3.$$

Napiszemy to ostatnie równanie w postaci:

$$(49) \quad a^2 \sqrt{1 - e^2} = \left[\frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)} \right]^3 \frac{1}{p \cdot \sin^3 \frac{1}{2}(E_3 - E_1)},$$

następnie z pomocą wzoru (49) wyrugujemy $a^2 \sqrt{1 - e^2}$ ze wzoru (48), wreszcie wprowadzimy do tak przekształconego równania (48) podwójne pola trójkątów [por. wzory (36) rozdz. XV], poczem otrzymamy zamiast (48)

$$(50) \quad \tau_2 \sqrt{p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1)}{\sin^3 \frac{1}{2}(E_3 - E_1)} \cdot \left[\frac{|r_1 r_3|}{2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)} \right]^3 + |r_1 r_3|.$$

Z tego ostatniego wzoru rugujemy podwójne pole trójkąta za pomocą drugiego wzoru (40) i skracamy przez τ_2 , wskutek czego wzór (50) przechodzi w

$$(51) \quad \frac{E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1)}{\sin^3 \frac{1}{2}(E_3 - E_1)} \cdot \frac{\tau_2^2}{[2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)]^3} \cdot \frac{1}{y_3^3} + \frac{1}{y_2} = 1.$$

Pozbyliśmy się tedy a i e , ale nie zdołaliśmy pozbyć się kąta $E_3 - E_1$; nie pozostaje nam zatem nic innego, jak utworzyć jeszcze drugie równanie, podobnie jak równanie (51) zawierające oprócz wielkości znanych z pierwszego przybliżenia tylko y_2 i kąt $E_3 - E_1$. Wyprowadzimy je ze związku (38) rozdz. XIII-go. Napiszmy go dwukrotnie t. j. dla pierwszej i dla trzeciej pozycji planety

$$r_1 = a - ae \cos E_1, \quad r_3 = a - ae \cos E_3.$$

Stąd

$$r_1 + r_3 = 2a - 2ae \cos \frac{1}{2}(E_3 + E_1) \cos \frac{1}{2}(E_3 - E_1).$$

Możemy wyrugować $ae \cos \frac{1}{2}(E_3 + E_1)$ za pomocą wzoru (47), poczem otrzymamy

$$r_1 + r_3 = 2a \sin^2 \frac{1}{2}(E_3 - E_1) + 2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1) \cos \frac{1}{2}(E_3 - E_1).$$

Tak samo możemy wyrugować z tego ostatniego wzoru $\sin^2 \frac{1}{2}(E_3 - E_1)$ za pomocą wzoru (46); $\cos \frac{1}{2}(E_3 - E_1)$ wyrugować nie możemy, ale przekształcamy go wprowadzając funkcję kołową argumentu $\frac{1}{4}(E_3 - E_1)$. Piszemy tedy

$$r_1 + r_3 = \frac{2r_1 r_3}{p} \sin^2 \frac{1}{2}(u_3 - u_1) + \\ + 2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1) [1 - 2 \sin^2 \frac{1}{4}(E_3 - E_1)]$$

Wreszcie — podobnie jak poprzednio do wzoru (48) — wprowadzamy podwójne pole trójkąta, potem wyrażamy je przez $\frac{r_2 \sqrt{p}}{y_2}$ i rozwiązujemy równanie względem $\sin^2 \frac{1}{4}(E_3 - E_1)$. W ten sposób otrzymujemy owo poszukiwane drugie równanie zawierające prócz wielkości znanych z pierwszego przybliżenia tylko y_2 i $E_3 - E_1$, mianowicie

$$\sin^2 \frac{1}{4}(E_3 - E_1) = \frac{r_2^2}{y_2^2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{r_1 r_3} \cdot \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)} \right)^2 - \\ - \frac{r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)}{4\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)}. \quad (52)$$

Wzory dla y_1 i y_3 są zupełnie podobne do wzorów (51) i (52); można je napisać bez żadnego wywodu kierując się symetrią.

Spostrzegamy, że zadanie znowu przywodzi się do rozwiązania pewnych równań, tylko nie jednego: (21) a dwóch: (51) i (52). Do tego rozwiązania wypadnie nam zaraz przystąpić; wprzód jednakże za przykładem Encke'go wprowadzimy pewien pomocniczy kąt, zależący od takich jedynie wielkości, które i tak już figurują w równaniach (51) i (52). Spojrzawszy na te równania spostrzegamy, że iloczyn $2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$ powtarza się w nich kilkakrotnie. Iloczyn ten jest w prostym związku z cięciwą łączącą obie skrajne

pozycje planety. Widać to zaraz, skoro trochę przekształcimy równanie cięciwy. Mianowicie

$$s^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(u_3 - u_1) = (r_1 + r_3)^2 - 4r_1 r_3 \cos^2 \frac{1}{2}(u_3 - u_1).$$

Ponieważ cięciwa jest zawsze mniejsza od sumy promieni wodzących, więc można położyć

$$(53) \quad s_2 = (r_1 + r_3) \sin \gamma_2$$

przyczem $0 < \gamma_2 < 180^\circ$. Stąd zaraz wypada

$$(54) \quad 2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1) = (r_1 + r_3) \cos \gamma_2.$$

Oczywiście można określić kąt γ_2 właśnie z tego ostatniego wzoru¹⁾, bo r_1, r_3, u_3 i u_1 są znane. Zdawałoby się nawet, że niema poco obliczać go, ale zaraz zobaczymy, że znajomość tego kąta będzie jednak przydatną. Skoro bowiem podstawimy w równania (51) i (52) prawą stronę równania (54) zamiast figurującej tam lewej, to spostrzeżemy, że w liczniku drugiego wyrazu po prawej stronie równania (52) pojawia się $\sin \frac{1}{2} \gamma_2$. Zatem dla obliczenia tego wyrazu trzeba mieć kąt γ_2 . Zresztą przez wprowadzenie kąta γ_2 wzory (51) i (52) przybierają prostszą formę, mianowicie:

$$(51 \text{ bis}) \quad \frac{E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1)}{\sin^3 \frac{1}{2}(E_3 - E_1)} \cdot \frac{r_2^2}{(r_1 + r_3)^3 \cos^3 \gamma_2} \cdot \frac{1}{y_2^3} + \frac{1}{y_2} = 1$$

$$(52 \text{ bis}) \quad \sin^2 \frac{1}{4}(E_3 - E_1) = \frac{1}{y_2^2} \cdot \frac{r_2^2}{(r_1 + r_3)^3 \cos^3 \gamma_2} - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \gamma_2}{\cos \gamma_2}.$$

5. Rozwiązanie systemu równań (51 bis) i (52 bis).

Położmy

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \frac{1}{4}(E_3 - E_1) = x, \quad \frac{E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1)}{\sin^3 \frac{1}{2}(E_3 - E_1)} = X \\ \frac{r_2^2}{(r_1 + r_3)^3 \cos^3 \gamma_2} = m^2, \quad \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \gamma_2}{\cos \gamma_2} = j, \end{array} \right.$$

¹⁾ Można go też określić w następujący sposób. Położmy

$$\sqrt{\frac{r_3}{r_1}} = \tan \chi_2,$$

wtedy

$$\log \cos \gamma_2 = \log [\cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1) \sin 2\chi_2].$$

przyczem m^2 i j są wiadome a X jest funkcją zmiennej x i wprowadźmy te nowe symbole do równań (51 bis) i (52 bis). Jednocześnie uogólnimy te równania, bo oczywiście można z nich określić nie tylko y_2 ale także y_1 i y_3 . Wyobraźmy sobie np. że chcemy określić y_1 ; wtedy trzeba poprostu w równaniach (53), (54) i (55) napisać $E_3 - E_2$, $u_3 - u_2$, r_2 i r_3 zamiast $E_3 - E_1$, $u_3 - u_1$, r_1 i r_3 , dalej trzeba napisać γ_1 , s_1 , y_1 , τ_1 zamiast γ_2 , s_2 , y_2 , τ_2 . Tak samo gdy chodzi o y_3 , to należy pisać $E_2 - E_1$, $u_2 - u_1$, r_1 , r_2 zamiast $E_3 - E_1$, $u_3 - u_1$, r_1 , r_3 i t. d... Przydając zatem równaniom naszym ogólne znaczenie napiszemy także ogólnie y zamiast y_2 , lub y_1 , lub y_3 , poczem równania te przybiorą kształt

$$m^2 \frac{X}{y^3} + \frac{1}{y} = 1 \quad (51 \text{ ter})$$

$$x = \frac{m^2}{y^2} - j. \quad (52 \text{ ter})$$

Można łatwo rozwinąć X w szereg potęgowy zmiennej x . W metodzie Encke'ego rozwinięcie to odgrywa ważną rolę, w metodzie Gaussa, którą tu właśnie podamy, mniej ważną; ponieważ jednak jest ono dosyć łatwe a przyda się nam potem do usprawiedliwienia pewnego podstawienia, więc wykonamy je. Położmy jeszcze

$$E_3 - E_1 = 2g \quad (56)$$

a będziemy mogli napisać

$$x = \sin^2 \frac{1}{2} g, \quad X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}. \quad (57)$$

Z drugiego wzoru (57) wynika

$$\frac{dX}{dg} \sin^3 g + 3X \sin^2 g \cos g = 2 - 2 \cos 2g = 4 \sin^2 g,$$

t. j. po skróceniu przez $\sin^2 g$

$$\frac{dX}{dg} \sin g + 3X \cos g = 4. \quad (58)$$

Ale z pierwszego wzoru (57) wynika

$$\frac{dx}{dg} = \sin \frac{1}{2} g \cos \frac{1}{2} g = \frac{1}{2} \sin g.$$

Przeto

$$\frac{dX}{dg} = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{dg} = \frac{dX}{dx} \frac{1}{2} \sin g$$

i można napisać równanie (58) w postaci

$$\frac{1}{2} \frac{dX}{dx} \sin^2 g + 3 X \cos g = 4,$$

albo też rugując funkcyę kąta g za pomocą związku: $x = \sin^2 \frac{1}{2} g$

$$(59) \quad 2(x - x^2) \frac{dX}{dx} + 3(1 - 2x)X - 4 = 0.$$

Położmy teraz

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

gdzie a_0, a_1, \dots i t. d. są to nieokreślone tymczasem współczynniki, podstawmy we wzór (59) i przyrównajmy do zera współczynniki przy oddzielnych potęgach x , a otrzymamy:

$$a_0 = \frac{4}{3}, \quad a_1 = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \dots \quad a_n = \frac{2n + 4}{2n + 3} \cdot a_{n-1} \dots$$

Zatem

$$(60) \quad X = \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} x + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^2 + \dots$$

Encke podstawia szereg (60) w równanie (51 ter), następnie ruguje x za pomocą równania (52 ter) i otrzymuje równanie, w którym figuruje już tylko y . My tu jednak wyłożymy metodę Gaussa. Ponieważ $\frac{1}{2} g$ jest zawsze bardzo małym kątem, więc x jest małe i szereg (60) jest zbieżny, ale współczynniki przy kolejnych potęgach x są coraz to większe. Dlatego to Gauss rozwinął w szereg nie X , a jego odwrotność

$$\frac{1}{X} = \frac{3}{4} \left[1 - \frac{6}{5} x + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 7} x^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} x^3 \dots \right]$$

Współczynniki tego ostatniego szeregu ubywają, podczas gdy współczynniki szeregu (60) wzrastały.

Z okazji pewnego rozwinięcia w ułamek łańcuchowy Gauss zauważył, że dogodniej niż $\frac{1}{X}$ wziąć $\frac{10}{9} \frac{1}{X}$. Pójdziemy za jego przy-

kładem, aby otrzymać tę samą substytucyę a w następstwie korzystać z jego tablic. Piszemy tedy

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{X} = \frac{5}{6} - x + \frac{2}{35} x^2 + \frac{52}{1575} x^3 + \dots,$$

następnie kładziemy

$$\frac{2}{35} x^2 + \frac{52}{1575} x^3 + \dots = \xi \quad (61)$$

i piszemy

$$\frac{10}{9} \frac{1}{X} = \frac{5}{6} - x + \xi. \quad (62)$$

Teraz rugujemy x między równaniami (62) i (52 ter), co prowadzi do równania

$$\frac{5}{6} + \xi + j - \frac{m^2}{y^2} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{X}. \quad (63)$$

Kładąc

$$\eta = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + \xi + j}$$

przyprowadzamy je do kształtu

$$Xm^2 \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{y^2} \right) = \frac{10}{9}.$$

Ale z równania (51 ter)

$$Xm^2 = y^2 (y - 1), \quad (64)$$

przeto ostatecznie

$$y^2 (y - 1) - (y + \frac{1}{9}) \eta = 0. \quad (65)$$

Samo rozwiązanie ma następujący przebieg: ponieważ ξ jest bardzo małe [z równania (61) widać, że jest mało co różne od $\frac{2}{35} x^2$], więc z początku kładziemy $\xi = 0$, obliczamy η z równania (63) i podstawiamy je w równanie (65). To ostatnie równanie jest sześcienne względem y , ale niema wątpliwości, jaki pierwiastek wziąć należy, albowiem y jest wedle definicyi dodatnie [co więcej jest zawsze większe od jednośc]; tymczasem równanie (65) ma tylko

jeden pierwiastek dodatni, bo η jest dodatnie¹⁾. Skoro znajdziemy y , to określamy x ²⁾ z równania (52 ter) a X z równania (64), poczem z pomocą tych dwóch wielkości otrzymujemy ξ z równania (62). Można też nie obliczać X i określić ξ z równania (61), skoro x jest znane. Jest to nawet pewniejsza droga. Mając ξ podstawiamy je z równania (63) i otrzymujemy nowe η , poczem ponawiamy rachunki w tym samym porządku co poprzednio i tak w kółko dopóty, dopóki nie otrzymamy na ξ tę samą wartość co poprzednio, bo to oznacza, że już uczyniliśmy zadość systemowi równań (51) i (52). Najmudniejszą częścią rachunku jest rozwiązanie sześciennego równania (65), ponieważ jednak równanie to zawiera tylko jeden współczynnik η , przeto można przedstawić y jako funkcję η . Gauss obliczył tablicę, powtarzaną w różnych podręcznikach, w której podane są $\log y^2$ odpowiadające kolejnym argumentom η . Dzięki tej tablicy rozwiązywanie równania (65) staje się zupełnie zbędne. Oprócz tego Gauss obliczył drugą, bardzo użyteczną pomocniczą tablicę. Mianowicie, jak to widać z równania (61), ξ zależy tylko od x . Otóż tablica Gaussa podaje ξ odpowiadające różnym wartościom x . Tedy obliczanie ξ staje się także zbędnem³⁾.

6. Dalsze przybliżenia i obliczenie elementów.

Skoro wyłożoną w poprzednim § metodą znajdziemy y_1 i y_2 , to powrócimy do pierwszego wzoru (42) oraz do wzoru⁴⁾ (43) i obliczymy z nich P i Q . Naturalnie zakładamy, że, jak to było powiedziane w § 4, czasy τ_1 i τ_3 zostały poprawione na aberację. Ale otrzymane w ten sposób wartości na P i Q nie są jeszcze ostateczne: trzeba dalej posunąć się w przybliżeniach, trzeba znowu

¹⁾ Kąt γ_2 jest zazwyczaj mały, przeto $\cos \gamma_2$ jest dodatni a wskutek tego j [por. wzory (55)] i η są dodatnie. Zresztą η mogłoby stać się ujemnem dopiero wtedy, gdyby γ_2 było bliskie 180° . Ale gdyby γ_2 było większe od 90° , to m^2 byłoby ujemne i trzeba by przekształcić równania. Przypadku tego, jako dla praktyki nie interesującego, bliżej rozważać nie będziemy.

²⁾ Z równań (55) widać, że x musi być dodatnie; gdyby x było ujemne, to mielibyśmy hyperbolę zamiast elipsy; $x = 0$ odpowiada paraboli.

³⁾ Tu spostrzegamy, do czego zmierzały napozór sztuczne przekształcenia Gaussa.

⁴⁾ Wzór (43) jest dogodniejszy od drugiego wzoru (42) bo daje się logarytmować.

obliczyć $r_1, r_2, r_3, u_1, u_2, u_3$, wreszcie trzeba obliczyć P i Q , słowem trzeba powtórzyć cały rachunek wyłożony w poprzednich paragrafach. Jeżeli drugie wartości P i Q nie zgadzają się z pierwszymi, to trzeba ponowić rachunki trzeci i czwarty raz i t. d. dopóty, dopóki nie osiągniemy zgodności. Wogóle trudniej jest osiągnąć zgodność pomiędzy kolejnymi wartościami Q niż między kolejnymi wartościami P ; ale też niezgodność w ostatnich dziesiętnych logarytmów Q jest dopuszczalna. Przecie chodzi nam właściwie nie o P i Q , a o n_1 i n_3 ; skoro kolejne dwie pary wartości na $\log n_1$ i $\log n_3$ już dokładnie zgadzają się ze sobą¹⁾, to można uważać rachunek za zakończony i przystąpić do obliczenia elementów. Zaraz zajmujemy się niem, tylko wprzód zrobimy jeszcze jedną uwagę. W miarę tego, jak obliczamy coraz to nowe wartości na r_1, r_2, r_3 , także skrócone odległości q_1, q_2, q_3 a więc także zależne od nich poprawki na aberację ulegają zmianom. Jednakże ponieważ te poprawki są małe, a o ile dotyczą τ_1 i τ_3 , tylko od różnic między skróconymi odległościami zależne, więc najczęściej zdarza się, że wystarczają obliczone na początku drugiego przybliżenia (drugiej hipotezy) poprawki, że przeto można poprawione na początku drugiego przybliżenia czasy τ_1 i τ_3 zatrzymać także w następnych przybliżeniach. Jednakże trzeba — np. podczas trzeciego przybliżenia — sprawdzić, czy tak jest w istocie.

Przechodzimy teraz do obliczenia pozostałych elementów. Mówimy „pozostałych“, bo zatrzymujemy te wartości na Q oraz i , które otrzymaliśmy podczas ostatniego przybliżenia. Najpierw określamy p ze wzorów (40). Przywracamy w nich „*explicite*“ wyrażenia pól trójkątów [por. wzory (36) rozdz. XV-go], podnosimy do kwadratu i otrzymujemy

$$p = \left[\frac{y_3 r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{\tau_3} \right]^2 = \left[\frac{y_3 r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{\tau_2} \right]^2 = \left[\frac{y_1 r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{\tau_1} \right]^2. \quad (66)$$

Mamy tu jednocześnie czwartą próbę poprzednich rachunków. Z powodu małych kątów $u_2 - u_1$ i t. d. może się jednak zdarzyć pewna drobna niezgodność. Należy zbadać ją i ewentualnie usunąć metodą podobną do tej, którą stosowaliśmy w końcu § 3

¹⁾ Wtedy oczywiście także logarytmy P będą zgodne.

do wartości na $\log n_1$ i $\log n_3$. W każdym razie średnia z pierwszej i trzeciej wartości p powinna być równa drugiej wartości.

Mając p obliczamy $\tilde{\omega}$ i e ze wzorów (3). Prawe strony tych wzorów nie dają się logarytmować, ale pierwszy z nich można doprowadzić do kształtu podlegającego logarytmowaniu przez podstawienie nie komplikujące drugiego. Jest to to samo podstawienie, o którym wspominaliśmy z powodu kąta γ_2 [por. § 4. Uwaga na str. 402]. Kładąc

$$\text{tang } \chi_2 = \sqrt{\frac{r_3}{r_1}}$$

otrzymamy

$$\frac{2r_1r_3}{r_1 - r_3} = \sqrt{r_1r_3} \text{ tang } 2\chi_2, \quad \frac{2r_1r_3}{r_1 + r_3} = \sqrt{r_1r_3} \sin 2\chi_2,$$

poczem podstawiając we wzory (3) przekształcimy je na

$$(67) \begin{cases} e \sin \frac{1}{2}(u_3 - u_1) \sin [\tilde{\omega} - \frac{1}{2}(u_3 + u_1)] = \frac{p}{\sqrt{r_1r_3} \text{ tang } 2\chi_2} \\ e \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1) \cos [\tilde{\omega} - \frac{1}{2}(u_3 + u_1)] = \frac{p}{\sqrt{r_1r_3} \sin 2\chi_2} - 1. \end{cases}$$

Istnieją też inne metody dla określenia $\tilde{\omega}$ i e , ale dla braku miejsca musimy je pominąć. Zresztą co do e , to możemy skontrolować wartość otrzymaną ze wzorów (67) przy określeniu wielkiej osi orbity. Jest to szczególnie ważne w przypadku, gdy e jest bliskie jedności, t. j. gdy chodzi o orbitę komety. Wiadomo, że dla wyrażenia e używamy kąta pomocniczego φ określonego przez równanie

$$\sin \varphi = e.$$

Otóż w niektóre wzory wchodzi $\cos \varphi = \sqrt{1 - e^2}$, a gdy e jest bliskie jedności, t. j. φ bliskie do 90° , to $\cos \varphi$ i sam kąt φ określone przez $\sin \varphi$ nie są dostatecznie pewne. Można atoli otrzymać $\cos \varphi$ jednocześnie z a w następujący sposób. Ponieważ x jest znane, więc z pierwszego równania (55), t. j. z równania

$$(55 \text{ bis}) \quad \sin \frac{1}{4}(E_3 - E_1) = \sqrt{x}$$

określamy $E_3 - E_1$ i podstawiamy je w równanie (46). Jednocześnie piszemy $\cos \varphi$ zamiast $\sqrt{1 - e^2}$ i rozwiązujemy to równanie względem $a \cos \varphi$

$$a \cos \varphi = \frac{\sqrt{r_1 r_3} \sin \frac{1}{2} (u_3 - u_1)}{\sin \frac{1}{2} (E_3 - E_1)}. \quad (46 \text{ bis})$$

Ale

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{p}{\cos^2 \varphi}, \quad (68)$$

przeto

$$\cos \varphi = \frac{p \cdot \sin \frac{1}{2} (E_3 - E_1)}{\sqrt{r_1 r_3} \sin \frac{1}{2} (u_3 - u_1)}. \quad (69)$$

Ponieważ p i wogóle wszystkie wielkości stojące po prawej stronie równania (69) już są znane, więc otrzymamy zeń $\cos \varphi$ a potem z równania (68) także a . Jednocześnie porównanie kąta φ otrzymanego przez $\cos \varphi$ z równania (69) z tą wartością, którą poprzednio otrzymaliśmy przez $\sin \varphi = e$ z równań (67) stanowi piątą próbę.

Obliczamy teraz długość perihelium ze wzoru

$$\pi = \Omega \pm \tilde{\omega}, \quad (70)$$

przyczem znak górny odpowiada ruchowi wprost, a dolny wstęcznemu, dalej obliczamy średni ruch dzienny ze wzoru

$$n = \frac{k}{a^{3/2}}, \quad (71)$$

poczem przystępujemy do obliczenia prawdziwych anomalii ze wzorów

$$v_1 = u_1 - \tilde{\omega}_1 \text{ i t. d.}$$

Przy sposobności możemy sprawdzić, czy wartości na r_1, r_2, r_3 obliczone ze wzorów

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos v_1} \text{ i t. d.},$$

zgadniają się z poprzednimi. Następnie obliczamy anomalie mimośrodowe ze wzoru (40) rozdz. XIII-go, który można uczynić dostępnym logarytmowaniu przez przekształcenie

$$\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} = \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi - \sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \varphi + \sin \frac{1}{2} \varphi} = \tan (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi),$$

albowiem po tem przekształceniu można go napisać w kształcie

$$\tan \frac{1}{2} E = \tan (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \tan \frac{1}{2} v. \quad (72)$$

Skoro obliczymy anomalie mimośrodowe, to zaraz znajdziemy anomalie średnie z równania Keplera

$$(73) \quad M = E - e \cdot \sin E,$$

pozem możemy wykonać szóstą i ostatnią a zarazem najogólniejszą próbę. Mianowicie jeżeli obierzemy jakąś dowolną epokę T_0 , to znalezione ze wzoru (73) średnie anomalie oraz czasy obserwacji t_1, t_2, t_3 [poprawione na aberację!] powinny zadość czynić równaniom:

$$(74) \quad M_0 = M_1 - n(t_1 - T_0) = M_2 - n(t_2 - T_0) = M_3 - n(t_3 - T_0).$$

7. Przykład.

Bierzemy przykład z J. C. Watsona¹⁾. Będziemy go traktować nieco krócej niż przykład podany w poprzednim rozdziale, mianowicie nie będziemy wykonywać wszystkich przejściowych rachunków. Watson oblicza elementy orbity małej planety Eurynome (79) z trzech obserwacji dokonanych w Ann Arbor w Stanach Zjednoczonych²⁾

	Czas śr. Ann Arbor		α	δ	
1863 r. Września	14	15 ^h 53 ^m 37,2	1 ^h 0 ^m 44,91	+ 9° 53' 30,8	
"	"	21	9 46 18,0	0 57 3,57	9 13 5 5
"	"	28	8 49 29,2	0 52 18,90	8 22 8 7

Nachylenia ekliptyki do równika w czasie obserwacji były:

23° 27' 20,75
. . . 20,71
. . . 20,65

Stąd przez wzory (4) [właściwie (4 bis)] rozdziału VI-go W. otrzymuje następujące widome, ekliptyczne współrzędne planety

λ	β
17° 47' 37,60	+ 3° 8' 45,19
16 41 36,20	2 52 27,46
15 16 56,35	2 32 42,98

¹⁾ Loc. cit. str. 264 i nast. W przeciwieństwie do przykładu w poprzednim rozdziale nie przerabiałem rachunków.

²⁾ Naturalnie Watson posługuje się wszędzie amerykańską Efemerydą, a ponieważ działo się to przed obu konferencjami paryskimi, więc używa starych wówczas w „American Ephemeris“ przyjętych. Stąd parallaksy słońca i t. d. są inne niż współcześnie przyjęte.

Jednoczesne rzeczywiste geocentryczne współrzędne słońca były:

\odot	(B) szerokość	$\log R$
172° 1' 42,1	— 0,07	0,0022140
178 37 17,2	+ 0,77	0,0013857
185 26 54,8	+ 0,67	0,0005174

Następnie W. poprawia pozycje planety na aberacyę za pomocą wzorów (15) rozdz. X-go [stała aberacyi wówczas w „American Ephemeris“ przyjęta była: 20,445] i znajduje następujące poprawki

$\Delta \lambda$	$\Delta \beta$
— 18,48	+ 0,47
— 19,49	+ 0,30
— 20,18	+ 0,14.

Teraz W. sprowadza współrzędne słońca do „*loca ficta*“. Do tego potrzebne są geocentryczne współrzędne obserwatorium: $\log \varrho = 9,99935$, φ' (geocentryczna szerokość odpowiadająca deklinacyi) = 42° 5,4, wreszcie czasy gwiazdowe obserwacyi (odpowiadające rektascensyom):

3 ^h 29 ^m 1 ^s	=	52° 15' 15''
21 48 17	=	327 4 15
21 18 55	=	319 43 45.

Stąd przez te same wzory 4 (4 bis) rozdz. VI-go W. znajduje następujące ekliptyczne, geocentryczne współrzędne obserwatorium w czasie obserwacyi

l_0	b_0
60° 33,9	+ 22° 25,0
347 0,4	50 15,0
342 59,2	53 41,6

Przez wzory (8) rozdz. XV-go wynikają stąd następujące poprawki współrzędnych słońca i czasów obserwacyi:

$\Delta \odot$	$\Delta \log R$	Δt
— 18,92	— 0,0001084	+ 0,15
— 36,94	— 0,0002201	+ 0,28
— 25,76	— 0,0002796	+ 0,34

Po dodaniu tych poprawek otrzymamy pozycye słońca widziane z „*loca ficta*“ i czasy obserwacyi w tychże miejscach. Zresztą poprawki czasów obserwacyi są tak małe, że można je zupełnie pominąć. Wreszcie W. sprowadza pozycye słońca i planety do średniego porównania dnia z nocą na początku 1863 r. Poprawki długości planety i słońca są

$$\begin{aligned} & - 50,95 \\ & - 51,52 \\ & - 52,14 \end{aligned}$$

Poprawki szerokości (tylko dla planety) są

$$\begin{aligned} & - 0,15 \\ & - 0,14 \\ & - 0,14 \end{aligned}$$

Widzimy, że W. posługiwał się drugą metodą redukcji [por. § 2, rozdz. XV-go], a ponieważ wziął współrzędne słońca odniesione do widomego punktu porównania dnia z nocą, więc musiał także przywieść te ostatnie do średniego porównania dnia z nocą na początku roku. Odpowiednio do tego oddzielił we wzorach (3) rozdz. XV-go poprawki na aberacyę od pozostałych.

Teraz W. zbiera poprawki, a jednocześnie zamiast czasu Ann Arbor wprowadza czas washingtonski [poprawka $+ 0^{\circ} 26^m 43,0$] i wyraża go w dniach liczonych od początku roku. W ten sposób otrzymuje następujące daty:

$$(A) \left\{ \begin{array}{lll} t_1 = 257,68079, & \lambda_1 = 17^{\circ} 46' 28,17, & \beta_1 = +3^{\circ} 8' 43,51 \\ t_2 = 264,42570, & \lambda_2 = 16 40 25,19, & \beta_2 = 2 52 27,62 \\ t_3 = 271,38625, & \lambda_3 = 15 15 44,03, & \beta_3 = 2 32 42,98 \\ & \odot_1 = 172 0 32,23, & \log R_1 = 0,0021056 \\ & \odot_2 = 178 35 48,74, & \log R_2 = 0,0011656 \\ & \odot_3 = 185 25 36,90, & \log R_3 = 0,0002378 \end{array} \right.$$

które posłużą za podstawę całego dalszego rachunku.

Z równań

$$N_1 = \frac{R_2 R_3 \sin(\odot_3 - \odot_2)}{R_1 R_3 \sin(\odot_3 - \odot_1)}, \quad N_3 = \frac{R_2 R_1 \sin(\odot_2 - \odot_1)}{R_1 R_3 \sin(\odot_3 - \odot_1)}$$

wynika

$$\log N_1 = 9,7087449, \quad \log N_3 = 9,6950091.$$

Następnie z równań (9) niniejszego rozdziału W. znajduje

$$\psi_2 = 161^\circ 42' 13'' 16.$$

Stąd i z tablicy (A)

$$\log(R_2 \sin \psi_2) = 9,4980010, \quad \log(R_2 \cos \psi_2) = 9,9786355 \text{ n.}$$

Z równań (5) Watson oblicza K i J , właściwie $\tan J$, bo samo J nie będzie potrzebne

$$K = 4^\circ 47' 29'' 48, \quad \log \tan J = 9,3884640,$$

potem ze wzoru (7) oblicza β_0 . Ponieważ ten kąt wchodzi do małej różnicy $\beta_0 - \beta_2$, od dokładnego określenia której zależy głównie dokładność współczynnika a przy q_2 , przeto W. oblicza go ze specjalną dokładnością i znajduje

$$\beta_0 = 2^\circ 52' 59'' \frac{215}{419}.$$

Z kolei oblicza [wzory (10) i (11)] a , b , c i d

$$\log a = 6,8013583 \text{ n}, \quad \log b = 2,5456342 \text{ n}, \quad \log c = 2,2328550 \text{ n}, \\ \log d = 1,2437914,$$

potem f i h ze wzorów (34)

$$\log f = 1,3587437 \text{ n}, \quad \log h = 3,9247691,$$

wreszcie M'_1 i t. d. ze wzorów (33)

$$\log M'_1 = 9,8946712, \quad \log M''_1 = 1,9404111 \\ \log M'_3 = 9,6690383, \quad \log M''_3 = 0,7306625 \text{ n.}$$

Wszystkie dotychczas obliczone wielkości nie zmieniają się przy kolejnych przybliżeniach [dlatego W. zgrupował je razem]; obecnie zaczynają się wielkości w kolejnych przybliżeniach zmienne.

Ponieważ

$$t_3 - t_2 = 6,96055, \quad t_2 - t_1 = 6,74491 \quad \text{a} \quad \log k = 8,2355814,$$

więc

$$\log \tau_1 = 9,0782249, \quad \log \tau_3 = 9,0645575.$$

Stąd kładąc w pierwszym przybliżeniu $P = \frac{\tau_3}{\tau_1}$, $Q = \tau_1 \tau_3$ [por. wzory (16) i nast.]

$$\log P = 9,9863326, \quad \log Q = 8,1427824,$$

następnie [wzory (17)]

$\log c_0 = 2,2298567$ n, $\log k_0 = 0,0704470$, $\log l_0 = 0,0716091$,
wreszcie [wzory (20)]:

$$q = 8^\circ 24' 49,74, \quad \log \eta_0 = 0,3326925, \quad \log m_0 = 1,2449134.$$

Teraz W. przystępuje do rozwiązania równania (21). Z tablicy, o której mówiliśmy na końcu § 2, zaraz okazuje się, że jeden argument pierwiastka jest większy od 180° a dwa więkzkie¹⁾ od $180^\circ - \psi_2$, zatem pozostaje tylko jeden pierwiastek wynoszący około 10° . Po kilku próbach W. znajduje

$$z_2 = 9^\circ 1' 22,96.$$

Skoro z_2 jest znane, to ze wzorów (22) wynika

$$\log r_2 = 0,3025672, \quad \log \varrho_2 = 0,0123991,$$

a ze wzorów (31)

$$\log n_1 = 9,7061229, \quad \log n_3 = 9,6924555.$$

Teraz można ze wzorów (32) obliczyć ϱ_1 i ϱ_3 . W. znajduje

$$\log \varrho_1 = 0,0254823, \quad \log \varrho_3 = 0,0028859,$$

poczem oblicza ze wzorów (35) heliocentryczne współrzędne planety²⁾ i otrzymuje

$$\begin{aligned} l_1 &= 5^\circ 14' 39,53, & \log \operatorname{tang} b_1 &= 8,4615572, & \log r_1 &= 0,3040994 \\ l_2 &= 7 \ 45 \ 11,28, & \text{„} \operatorname{tang} b_2 &= 8,4107555, & \text{„} \ r_2 &= 0,3025673 \\ l_3 &= 10 \ 21 \ 34,57, & \text{„} \operatorname{tang} b_3 &= 8,3497911, & \text{„} \ r_3 &= 0,301010 \end{aligned}$$

Widzimy, że $\log r_2$ różni się od poprzednio znalezionej tylko o jedną jednostkę siódmego miejsca dziesiątego, więc pierwsza

¹⁾ Z tych jeden jest bardzo bliski do $180^\circ - \psi_2$, wynosi mianowicie $18^\circ 20' 41''$ (przybl.). Jest to argument tego pierwiastka, który odnosi się do orbity ziemskiej.

²⁾ Szerokości b W. nie oblicza, bo potrzebne są tylko tang b .

próba rachunku wypadła pomyślnie. — Następnie ze wzorów (36) przywiedzionych do kształtu [por. wzory (21) i (21 bis) rozdz. XVI-go]:

$$\operatorname{tang} i \cdot \sin \left[\frac{1}{2} (l_3 + l_1) - \Omega \right] = \frac{\operatorname{tang} b_3 + \operatorname{tang} b_1}{2 \cos \frac{1}{2} (l_3 - l_1)}$$

$$\operatorname{tang} i \cdot \cos \left[\frac{1}{2} (l_3 + l_1) - \Omega \right] = \frac{\operatorname{tang} b_3 - \operatorname{tang} b_1}{2 \sin \frac{1}{2} (l_3 - l_1)}$$

W. znajduje

$$\Omega = 207^\circ 2' 38'',16, \quad i = 4^\circ 27' 23'',84$$

a ze wzorów (37)

$$u_1 = 158^\circ 8' 25'',78, \quad u_2 = 160^\circ 39' 18'',13, \quad u_3 = 163^\circ 16' 4'',42.$$

Niezbyt pomyślnie wypada druga próba, bo $\log \operatorname{tang} b_2$ obliczony ze wzoru typu (36) wynosi 8,4107514, t. j. o 0,0000041 mniej aniżeli poprzednio. Jest to za duża różnica pomimo tego, że odpowiada tylko różnicy o 0,05 w samym kącie b_2 . Również nie-pomyślnie wypada trzecia próba: ze wzorów (38) wynika

$$\log n_1 = 9,7061158, \quad \log n_3 = 9,6924683.$$

Oba logarytmy są za duże: pierwszy o 0,0000029, drugi o 0,0000128, zatem niezgodność z poprzednimi nie da się usunąć przez zmianę kąta u_2 .

Te niezgodności pochodzą nie z błędów w rachunku, bo rachunki były poprawne, ale stąd, że wielkie koło przechodzące przez skrajne pozycje planety przechodzi bardzo blisko trzeciej pozycji słońca: $180^\circ + K$ różni się tylko o 38' od \odot_3 , wskutek czego wzory (32) na ϱ_1 i ϱ_3 są niepewne¹⁾.

Trzeba wrócić do oryginalnych wzorów (26) rozdz. XV-go. Z nich to W. znajduje

$$\log \varrho_1 = 0,0254918, \quad \log \varrho_3 = 0,0028874$$

a następnie z tych samych wzorów co poprzednio, t. j. ze wzorów (35) oblicza

$$l_1 = 5^\circ 14' 40'',05, \quad \log \operatorname{tang} b_1 = 8,4615619, \quad \log r_1 = 0,3041042$$

$$l_3 = 10^\circ 21' 34'',19, \quad \log \operatorname{tang} b_3 = 8,3497919, \quad \log r_3 = 0,3011017$$

$$\Omega = 207^\circ 2' 32'',97 \quad i = 4^\circ 27' 25'',13$$

$$u_1 = 158^\circ 8' 31'',47, \quad u_2 = 160^\circ 39' 23'',31, \quad u_3 = 163^\circ 16' 9'',22.$$

¹⁾ To znaczy, że małe błędy we współczynnikach, np. takie, jakie pochodzą z niedokładności logarytmów, sprawiają wielkie błędy we wartościach na ϱ_1 i ϱ_3 .

Druga próba wypada teraz zupełnie pomyślnie, bo nowy $\log \operatorname{tang} b_2 = 8,4107555$, zatem zgadza się zupełnie dokładnie z wartością obliczoną ze wzorów (35). Co do trzeciej próby, to obecnie

$$\log n_1 = 9,7061144, \quad \log n_3 = 9,6924640.$$

Pierwszy logarytm jest o 0,0000085 mniejszy a drugi o tyleż większy od odpowiednich logarytmów obliczonych poprzednio ze wzorów (31). Można tedy zastosować poprawkę, o której była mowa w końcu § 3. Ze wzorów (39) wynika $\Delta u_2 = -0,18$. Po zastosowaniu tej poprawki otrzymamy

$$u_3 - u_2 = 2^\circ 36' 46'' 09, \quad u_2 - u_1 = 2^\circ 30' 51'' 66.$$

Teraz można przejść do drugiego przybliżenia, przedtem należy jednak wykonać poprawkę na aberację planetarną [por. § 4]. Naturalnie W. oblicza ją z inną wartością stałej niż ta, którą przyjęliśmy w tej książce, mianowicie kładzie $\log \operatorname{const} = 7,760523$ i otrzymuje poprawione czasy obserwacji

$$t_1 = 257,67467, \quad t_2 = 264,41976, \quad t_3 = 271,38044,$$

stąd zaś wynika

$$\log \tau_1 = 9,0782331, \quad \log \tau_2 = 9,3724848, \quad \log \tau_3 = 9,0645692.$$

Do wyznaczenia stosunków pomiędzy polami wycinków a polami trójkątów potrzebne są pomocnicze kąty oznaczone przez γ . Watson kładzie

$$\sqrt{\frac{r_3}{r_2}} = \operatorname{tang} \chi_1, \quad \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \operatorname{tang} \chi_3,$$

pisze wzory

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \gamma_1 \cos G_1 = \sin \frac{1}{2} (u_3 - u_2) \\ \sin \gamma_1 \sin G_1 = \cos \frac{1}{2} (u_3 - u_2) \cos 2\chi_1 \\ \cos \gamma_1 = \cos \frac{1}{2} (u_3 - u_2) \sin 2\chi_1 \end{array} \right.$$

i takie same wzory dla trzeciej pozycji. We wzorach tych G_1 i G_3 są to nowe pomocnicze kąty, które zresztą można później zużytkować. Kąty χ_1 i χ_3 są

$$\chi_1 = 44^\circ 57' 6'' 00, \quad \chi_3 = 44^\circ 56' 57'' 50.$$

Stąd zaś wynika

$$\gamma_1 = 1^\circ 18' 35''90, \quad \gamma_3 = 1^\circ 15' 40''69$$

a następnie [por. wzory (55)]

$$\begin{aligned} \log m_1^2 &= 6,3482114, & \log m_3^2 &= 6,3163548 \\ \log j_1 &= 6,1163135, & \log j_3 &= 6,0834230. \end{aligned}$$

W. najpierw poszukuje y_1 . Jeżeli położymy $\xi = 0$, to równanie (63) zastosowane do tego przypadku przywiedzie się do

$$\eta = \frac{m^2}{\frac{5}{8} + j} = 0,0002675.$$

W pierwszej tablicy Gaussa [o tych tablicach mówiliśmy w § 5] W. znajduje odpowiedni $\log y^2 = 0,0002581$, poczem z równania (52 ter) otrzymuje $x = 0,000092$. Teraz szuka w drugiej tablicy Gaussa odpowiedniego ξ i znajduje $\xi = 0,00000001$. To ξ jest tak małe, że nie warto kontynuować rachunek. Tedy W. przyjmuje

$\log y_1 = 0,0001290$ i tak samo znajduje $\log y_3 = 0,0001200$, poczem określa P z pierwszego wzoru (42) a Q ze wzoru (43):

$$\log P = 9,9863451, \quad \log Q = 8,1431341.$$

Teraz oblicza ponownie c_0 , k_0 , l , z_2 i t. d., bo wszystkie te wielkości zależą od P i Q . Ponieważ wzory (32) w pierwszym przybliżeniu zawiodły, przeto i tym razem nie posługuje się nimi, natomiast oblicza ϱ_1 i ϱ_3 wprost ze wzorów (26) rozdz. XV-go. Zresztą wszystkie wielkości wchodzące do współczynników tych ostatnich wzorów, oprócz n_1 i n_3 pozostają niezmienione. W ten sposób otrzymuje następujące rezultaty

$$\begin{aligned} \log c_0 &= 2,2298499 \text{ n}, & \log k_0 &= 0,0714280 \\ \log l_0 &= 0,0719540 & \log \eta_0 &= 0,3332233 \\ q &= 8^\circ 24' 12''48 & \log m_0 &= 1,2447277. \end{aligned}$$

Stąd tą samą co poprzednio metodą wynika

$$\begin{aligned} z_2 &= 9^\circ 0' 30''84 \\ \log r_2 &= 0,3032587, & \log \varrho_2 &= 0,0137621 \\ \log n_1 &= 9,7061153, & \log n_3 &= 9,6924604 \\ \log \varrho_1 &= 0,0269143, & \log \varrho_3 &= 0,0041748 \end{aligned}$$

Następnie

$$\begin{aligned} l_1 &= 5^\circ 15' 57''26, & \log \operatorname{tang} b_1 &= 8,4622524, & \log r_1 &= 0,3048363 \\ l_2 &= 7 \ 46 \ 2,76, & \log \operatorname{tang} b_2 &= 8,4114276, & \log r_2 &= 0,3032587 \\ l_3 &= 10 \ 22 \ 0,91, & \log \operatorname{tang} b_3 &= 8,3504332, & \log r_3 &= 0,3017481 \end{aligned}$$

$$\Omega = 207^\circ 0' 0''72 \quad i = 4^\circ 28' 35''20$$

$$u_1 = 158^\circ 12' 19''54, \quad u_2 = 160^\circ 42' 45''82, \quad u_3 = 163^\circ 19' 7''14.$$

I tym razem pierwsza próba wypada pomyślnie, bo oba $\log r_2$ t. j. tak znalezione z pierwszego wzoru (22), jak obecnie obliczony ze wzorów (35) są jednakowe. Tak samo udaje się druga próba, bo $\log \operatorname{tang} b_2$ obliczony ze wzoru

$$\operatorname{tang} b_2 = \operatorname{tang} i \cdot \sin (l_2 - \Omega)$$

wynosi 8,4114279, przeto różni się tylko o 3 jednostki siódmego miejsca dziesiętnego od $\log \operatorname{tang} b_2$ obliczonego ze wzorów (35). Wreszcie (trzecia próba) ze wzorów (38) Watson oblicza

$$\log n_1 = 9,7061156, \quad \log n_3 = 9,6924603.$$

Jak widzimy, pierwszy z tych logarytmów jest tylko o 0,0000003 za duży, a drugi tylko o 0,0000001 za mały. Są to tak drobne różnice, że nie ma po co poprawiać u_2 i można przyjąć

$$\begin{aligned} u_3 - u_2 &= 2^\circ 36' 21''32, & u_2 - u_1 &= 2^\circ 30' 26''28, \\ u_3 - u_1 &= 5^\circ 6' 47''60. \end{aligned}$$

Znowu tą samą metodą co poprzednio W. oblicza z pierwszych dwóch różnic

$$\log y_1 = 0,0001284, \quad \log y_3 = 0,0001193$$

a następnie

$$\log P = 9,9863452, \quad \log Q = 8,1431359.$$

Widzimy, że $\log P$ różni się już tylko o jednostkę ostatniego miejsca dziesiętnego. Co do $\log Q$, to ten ostatni różni się jeszcze o 18 jednostek ostatniego miejsca dziesiętnego od poprzedniej wartości, ale wiemy [por. § 6], że niezgodność $\log Q$ w ostatnich miejscach dziesiętnych jest dopuszczalna. Wobec tego W. uważa osią-

gnięte przybliżenie za wystarczające. Oblicza wszakże jeszcze y_2 , bo będzie ono potrzebne do określenia elementów. Kładzie więc

$$\sqrt{\frac{r_3}{r_1}} = \operatorname{tang} \chi_2$$

i metodą wyżej podaną znajduje

$$\chi_2 = 44^\circ 53' 53''25, \quad \gamma_2 = 2^\circ 33' 52''97, \quad \log \operatorname{tang} G_2 = 8,9011435$$

$$\log m_2^2 = 6,9332999, \quad \log j_2 = 6,7001345.$$

Znowu rozwiązuje system równań (51 bis) i (52 bis), otrzymuje:

$$\log y_2^2 = 0,0009908, \quad \log x_2 = 6,5494116,$$

poczem przystępuje do obliczenia p z równań (66). Równania te dają:

$$\log p = 0,3691814, \quad 0,3691818 \text{ i } 0,3691824.$$

Choć niema zupełnej zgodności, jednakże można uważać tę czwartą próbę za udatną, bo średnia wartość z dwóch skrajnych logarytmów jest prawie równa środkowemu [tam...19, tu...18]. Następnie z równań (55 bis), (46 bis), (69) i (68) znajduje

$$\frac{1}{4}(E_3 - E_1) = 1^\circ 4' 42''903, \quad \log(a \cos \varphi) = 0,3770319,$$

$$\log \cos \varphi = 9,9921503, \quad \log a = 0,3848816:$$

Zamiast równań (67) Watson pisze równoważne im równania

$$\left. \begin{aligned} e \sin [\tilde{\omega} - \frac{1}{2}(u_3 + u_1)] &= \frac{p}{\cos \gamma_2 \sqrt{r_1 r_3}} \operatorname{tang} G_2 \\ e \cos [\tilde{\omega} - \frac{1}{2}(u_3 + u_1)] &= \frac{p}{\cos \gamma_2 \sqrt{r_1 r_3}} - \sec \frac{1}{2}(u_3 - u_1). \end{aligned} \right\} (76)$$

Otrzymujemy je z równań (67) rugując $2\chi_2$, $\sin \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$ i $\cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$ za pomocą równań (75), w których naturalnie trzeba wprzódę przez przestawienia kołowe zastąpić γ_1 , G_1 i t. d. przez γ_2 , G_2 i t. d... Z równań (76) W. oblicza

$$\tilde{\omega} = 190^\circ 15' 39''57, \quad \log e = \log \sin \varphi = 9,2751434.$$

Stąd znowu

$$\varphi = 10^\circ 51' 39''62.$$

W celu przeprowadzenia piątej próby W. szuka w logarytmach $\cos \varphi$ przez $\sin \varphi$ i znajduje

$$\log \cos \varphi = 9,9921501,$$

co różni się tylko o 2 jednostki siódmego miejsca dziesiętnego od poprzednio znalezionej logarytmu $\cos \varphi$.

Ponieważ ruch jest prosty [kąty u tem większe, im czas późniejszy], przeto

$$\pi = \tilde{\omega} + \Omega = 37^{\circ} 15' 40'' 29.$$

Do obliczenia anomalii średniej potrzebny będzie średni ruch n ; możemy go otrzymać ze wzoru

$$n = \frac{k}{a^{3/2}},$$

ale ponieważ będziemy wyrażać anomalię w mierze kątowej, więc trzeba będzie wyrazić n , albo, co na jedno wychodzi, k w mierze kątowej. Mamy [por. § 11, rozdz. XIII-ty]

$$\log k = 8,23558144, \quad \log (206264,81 \dots) = 5,31442513,$$

przeto w mierze kątowej będzie

$$\log k = 3,5500066$$

a następnie

$$\log n = 2,9726842.$$

Anomalie prawdziwe są

$$v_1 = u_1 - \tilde{\omega} = 327^{\circ} 56' 39'' 97, \quad v_2 = u_2 - \tilde{\omega} = 330^{\circ} 27' 6'' 25,$$

$$v_3 = u_3 - \tilde{\omega} = 333^{\circ} 3' 27'' 57.$$

Ponieważ mamy teraz już p i e , więc ze znanego równania

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

możemy ponownie obliczyć r_1 , r_2 i r_3 . Znajdziemy:

$$\log r_1 = 0,3048367, \quad \log r_2 = 0,3032586, \quad \log r_3 = 0,3017481.$$

Po porównaniu z temi wartościami, które poprzednio otrzymaliśmy z q_1 , q_2 i q_3 , przekonamy się, że zgodność jest bardzo dobra [dwa pierwsze log. różnią się o jednostkę ostatniego miejsca

dziesiątego a trzeci wcale nie różni się], co świadczy, że poprzednie rachunki są poprawne.

Ze wzoru (72) W. znajduje

$$E_1 = 333^\circ 17' 28'', 18, \quad E_2 = 335^\circ 24' 38'', 00, \quad E_3 = 337^\circ 36' 19'', 78.$$

Tu znowu możemy przekonać się, że kąt $\frac{1}{3}(E_3 - E_1)$ obliczony z anomalii mimośrodowych różni się tylko o 0,003 od tego, który W. znalazł z $\sqrt{x_2}$. Wreszcie ze wzoru (73) wynikają następujące anomalie średnie:

$$M_1 = 338^\circ 8' 36'', 71, \quad M_2 = 339^\circ 54' 10'', 61, \quad M_3 = 341^\circ 43' 6'', 97.$$

Jako epokę T_0 we wzorach (74) W. przyjmuje 21,5 Września 1863 r. [cz. washingtonski], t. j. chwilę mało co różną od chwili drugiej obserwacji. Data 21,5 Września odpowiada 264,5 dniom od początku roku, przeto:

$$t_1 - T_0 = -6,81921, \quad t_2 - T_0 = -0,07430, \quad t_3 - T_0 = 6,88625.$$

Skoro podstawimy te liczby we wzory (74), to otrzymamy na M_0 trzy zupełnie zgodne liczby:

$$339^\circ 55' 25'', 97, \quad 339^\circ 55' 25'', 96, \quad 339^\circ 55' 25'', 96.$$

Ponieważ szósta i ostatnia próba wypadła równie pomyślnie jak poprzednie, więc możemy napisać następującą tabliczkę elementów:

epoka = 1863, Września 21,5, cz. śr. washingtonski

$$\left. \begin{array}{l} M_0 = 339^\circ 55' 25'', 96 \\ \pi = 37 \ 15 \ 40, 29 \\ \Omega = 207 \ 0 \ 0, 72 \\ i = 4 \ 28 \ 35, 20 \\ \varphi = 10 \ 51 \ 39, 62 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ekliptyka i średnie porównanie dnia} \\ \text{z nocą 1863,0} \end{array}$$

$$\log a = 0,3848816$$

$$\log n = 2,9726842$$

$$n = 939,04022 \text{ (dziennie).}$$

8. Porównanie pozycyi obliczonych z elementów z pozycjami obserwowanemi. Efemerydy.

Zobaczymy jeszcze, o ile pozycye planety obliczone z tych elementów są zgodne z pozycjami obserwowanemi. Ponieważ obserwujemy rektascensye i deklinacje, więc obliczamy również rektascensye i deklinacje, ale to będą rektascensye i deklinacje geocentryczne a zatem dla porównania trzeba będzie albo obliczone współrzędne sprowadzić do miejsca obserwacyi, albo odwrotnie obserwowane współrzędne sprowadzić do środka ziemi.

Obliczymy współrzędne planety za pomocą wzorów rozdziału XIII-go. Pierwsza rzecz, którą musimy dokonać, to obliczyć stałe Gaussa ze wzorów (77) rozdz. XIII-go, mianowicie ze wzorów

$$\begin{aligned} \cos \varrho &= a \sin A \\ - \cos i \sin \varrho &= a \cos A \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

kładąc

$$\varepsilon = 23^{\circ} 27' 24'' 96$$

Watson znajduje

$$\begin{aligned} \log a &= 9,9997272, & \log b &= 9,9744699, & \log c &= 9,5249539 \\ A &= 296^{\circ} 55' 46'' 05, & B &= 206^{\circ} 12' 42'' 79, & C &= 212^{\circ} 39' 14'' 62 \end{aligned}$$

Skoro podstawimy to we wzory (74 bis) rozdz. XIII-go (str. 280) a następnie położymy na r i u odpowiednie wartości, to otrzymamy następujące współrzędne równikowe, heliocentryczne, prostokątne¹⁾

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,0082481, & x_2 &= 1,9911821, & x_3 &= 1,9701122 \\ y_1 &= 0,1465251, & y_2 &= 0,2285303, & y_3 &= 0,3127578 \\ z_1 &= 0,1273134, & z_2 &= 0,1556576, & z_3 &= 0,1846367. \end{aligned}$$

Współrzędne ekliptyczne słońca odniesione do czasów obserwacyi poprawionych na aberacyę i do średniego porównania dnia z nocą na początku 1863 r. są:

¹⁾ Rachunku tego niema u Watsona.

Prawdziwa ¹⁾ $\odot = 172^{\circ} 0' 29,5$	$178^{\circ} 36' 4,5$	$185^{\circ} 25' 42,0$
$B = -0,07$	$+0,77$	$+0,67$
$\log R = 0,0022146$	$0,0013864$	$0,0005182.$

Stąd przez wzory

$$\left. \begin{aligned} X &= R \cos \odot \cos B \\ Y &= R \sin \odot \cos B \cos \varepsilon - R \sin B \sin \varepsilon \\ Z &= R \sin \odot \cos B \sin \varepsilon + R \sin B \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} (77)$$

obliczymy geocentryczne, równikowe, prostokątne współrzędne słońca ²⁾. $\log \cos B$ będzie we wszystkich pozycjach 0,0000000, co zaś do $\sin B$, to należy go obliczać ze wzoru

$$\sin B = \frac{B}{206264,81 \dots}$$

Oto współrzędne słońca wynikające ze wzorów (77)

$X_1 = -0,9953474$	$X_2 = -1,0028986$	$X_3 = -0,9967037$
$Y_1 = 0,1281940$	$Y_2 = 0,0224632$	$Y_3 = -0,0868877$
$Z_1 = 0,0556254$	$Z_2 = 0,0097512$	$Z_3 = -0,0376987.$

Tworząc teraz sumy: $\xi = x + X$ i t. d. otrzymamy prostokątne, geocentryczne, równikowe współrzędne planety

$\xi_1 = 1,0129007$	$\xi_2 = 0,9882835$	$\xi_3 = 0,9734085$
$\eta_1 = 0,2747191$	$\eta_2 = 0,2509935$	$\eta_3 = 0,2258701$
$\zeta_1 = 0,1829388$	$\zeta_2 = 0,1654088$	$\zeta_3 = 0,1469380,$

z których przez wzory

$$\begin{aligned} \xi &= \Delta \cos \delta \cos \alpha \\ \eta &= \Delta \cos \delta \sin \alpha \\ \zeta &= \Delta \sin \delta \end{aligned}$$

otrzymamy

$\alpha_1 = 15^{\circ} 10' 28,98$	$\alpha_2 = 14^{\circ} 15' 0,21$	$\alpha_3 = 13^{\circ} 3' 49,51$
$\delta_1 = 9 \ 53 \ 16,65$	$\delta_2 = 9 \ 12 \ 51,31$	$\delta_3 = 8 \ 21 \ 54,46$
$\log \Delta_1 = 0,0274797$	$\log \Delta_2 = 0,0140947$	$\log \Delta_3 = 0,0043282.$

¹⁾ Prawdziwa geometryczna długość, to znaczy że nie dodano do niej poprawki na aberację. Możemy powiedzieć, że to jest ta długość, którą obserwowalibyśmy, gdyby prędkość światła była nieskończenie wielką.

²⁾ Wartość kąta ε była podana nieco wyżej.

Watson zaś podaje:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 15^\circ 10' 29,06 & \alpha_2 = 14^\circ 15' 0',22 & \alpha_3 = 13^\circ 3' 49',47 \\ \delta_1 = 9\ 53\ 16,72 & \delta_2 = 9\ 12\ 51,29 & \delta_3 = 8\ 21\ 54,46 \\ \log \Delta_1 = 0,02726 & \log \Delta_2 = 0,01410 & \log \Delta_3 = 0,00433. \end{array}$$

Jak widzimy rektascensye i deklinacye zgadzają się zupełnie dobrze: drobne różnice o setne sekund kątowych tłumaczą się przez zaokrąglenie logarytmów i samych liczb. $\log \Delta_1$ u Watsona jest z pewnością błędny; widocznie ze względu na to, że odległości nie są potrzebne do porównania z obserwacyami, nie starał się o dokładne ich obliczenie, co widać zresztą choćby stąd, że podał logarytmy odległości tylko w pięciu cyfrach.

Powyższe współrzędne równikowe są odniesione do stałej ekliptyki i stałego porównania dnia z nocą na początku 1863 r. Aby uczynić je porównywalnymi z obserwacyami. W. sprowadza je do widomych porównań dnia z nocą i widomych ekliptyk w chwilach obserwacyi. Jest to redukcya odwrotna do tej, którą wykonał na początku rachunku, gdy sprowadzał pozycye planety do średniego porównania dnia z nocą. Robi ją tą samą metodą § 2, rozdz. XV-go, o której wspominaliśmy w § 7. Absolutne wartości poprawek są naturalnie inne, bo tam chodziło o długość i szerokość, a tu chodzi o rektascensyę i deklinacyę. Gdyby obecne poprawki dotyczyły tych samych współrzędnych, co tam, to absolutne wartości byłyby te same, albowiem różnice pochodzące stąd, że tam obliczał poprawki dla jeszcze niepoprawionych na aberacyę planetarną czasów obserwacyi, a tu obliczał dla już poprawionych, są zupełnie znikome.

Poprawki, o których mowa, są:

$$\begin{array}{lll} \text{w rektascensyi} & + 48'',14, & + 48'',54, & + 48'',91, \\ \text{w deklinacyi} & + 18,55, & + 18,92, & + 19,31. \end{array}$$

Dodawszy je i zamieniwszy kąty [w rektascensyi] na czas W. otrzymuje następujące *obliczone* współrzędne

Czas śr. washingtonski:		Obliczone współrzędne:	
1863, Wrzesień	14,67467	$\alpha_1 = 1^h\ 0^m\ 45,15$	$\delta_1 = 9^\circ\ 53'\ 35'',3$
"	"	$\alpha_2 = 0\ 57\ 3,25$	$\delta_2 = 9\ 13\ 10,2$
"	"	$\alpha_3 = 0\ 52\ 18,26$	$\delta_3 = 8\ 22\ 13,8.$

Lecz i te daty jeszcze nie są porównywalne z obserwacyami, bo to są współrzędne geocentryczne, a tamto widome. Można by współrzędne geocentryczne sprowadzić do miejsca obserwacji, ale robi się zwykle odwrotnie, sprowadza się obserwowane współrzędne do środka ziemi za pomocą wzorów (20 bis) rozdz. IX-go, które można uprościć i napisać w (przybliżonym) kształcie:

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha' &= -206264,8 \dots \frac{\varrho \cos \varphi' \sin(\alpha' - \Theta)}{\Delta' \cos \delta'} \\ \delta - \delta' &= -206264,8 \dots \frac{\varrho}{\Delta'} [\sin \delta' \cos \varphi' \cos(\alpha' - \Theta) - \sin \varphi' \cos \delta']. \end{aligned} \right\} (78)$$

Litery kreskowane oznaczają współrzędne widome, a niekreskowane odnoszą się do geocentrycznych. Naturalnie zamiast odległości planety od obserwatorium Δ' można podstawić odległość od środka ziemi Δ . Ze wzorów (78) wynikają następujące poprawki:

$$\begin{aligned} \text{w rektascensyi} &+ 0,24, \quad - 0,31, \quad - 0,34, \\ \text{w deklinacyi} &+ 4,5, \quad + 4,8, \quad + 5,1. \end{aligned}$$

Po dodaniu ich do obserwowanych współrzędnych otrzymamy wreszcie porównywalne z obliczonymi, bo sprowadzone do środka ziemi *obserwowane* współrzędne

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1^h \ 0^m \ 45,15 & \delta_1 &= 9^\circ \ 53' \ 35,3 \\ \alpha_2 &= 0 \ 57 \ 3,26 & \delta_2 &= 9 \ 13 \ 10,3 \\ \alpha_3 &= 0 \ 52 \ 18,56 & \delta_3 &= 8 \ 22 \ 13,8. \end{aligned}$$

Zgodność, osobliwie skrajnych pozycji jest zupełna. Swoją drogą nie można przypisywać elementom nazbyt wielkiej wagi, bo obserwacje, z których je obliczono, obejmują tylko około dwóch tygodni, podczas gdy okres obiegu planety wynosi około czterech lat. Z tego powodu szeregi na stosunki pomiędzy polami trójkątów są szybko zbieżne, z tego też powodu przy rozwiązaniu systemu równań (51 bis) i (52 bis) przez kolejne przybliżenia można było tak szybko dojść do celu, ale zato znaleziona elipsa tylko na małym kawałku przystaje do orbity.

Wogóle wyznaczenie orbity z trzech obserwacji, nawet z trzech miejsc normalnych służy tylko za wstęp do dokładnego wyznaczenia. Najpierw z pomocą elementów wyznaczonych z trzech obser-

wacyi obliczamy „efemerydę“ planety. Efemeryda to właściwie nie innego jak tablica przepowiadająca pozycyę planety zazwyczaj co cztery dni o północy [np. wedle czasu krakowskiego], ewentualnie z dodatkiem informacyi co do wielkości [blasku] planety i co do czasu opozycyi. Obliczamy przyszłe pozycyę planety z elementów tą samą metodą, którą posługiwaliśmy się przed chwilą mając zamiar porównać obliczone pozycyę z obserwowanemi. Tu spostrzegamy, jak wielkie ułatwienie dają stałe Gaussa. Skoro je raz obliczymy, to możemy następnie szybko otrzymać tyle pozycyi planety, ile się nam podoba. Jednakże przy obliczeniu rektascensyi i deklinacyi dla efemerydy musimy wykonać niektóre rachunki, które tu były zbędne. Mianowicie tu już przy wyznaczeniu elementów obliczyliśmy argumenty szerokości u odpowiadające chwilom obserwacyi; przeto mieliśmy je już gotowe w chwili, gdy przyszło podstawiać we wzory Gaussa. Tymczasem przy obliczeniu efemerydy nie mamy gotowych wartości u , musimy je dopiero obliczyć. Zaczynamy od obliczenia anomalii średnich ze wzoru

$$M = M_0 + n(t - T_0),$$

gdzie M_0 jest to średnia anomalia odpowiadająca „epoce“ T_0 [w naszym przykładzie $T_0 = 21,5$ Września 1863 r., $M_0 = 339^{\circ}55'25,96$] następnie z anomalii średnich przez równanie Keplera wyznaczamy odpowiednie anomalie mimośrodowe [tu spostrzegamy, że niedarmo obliczono tablice pomocnicze do rozwiązania tego równania], wreszcie z anomalii mimośrodkowych obliczamy anomalie prawdziwe, dodając zaś do tych ostatnich stałą ω otrzymujemy potrzebne nam argumenty szerokości.

Efemeryda dopomaga do odszukania planety i w ten sposób ułatwia dalsze jej obserwowanie. Jednocześnie porównując nowo obserwowane pozycyę z przepowiedzianemi przez efemerydę sprawdzamy pierwotne elementy i poprawiamy je w miarę gromadzenia się obserwacyi. Ostateczną orbitę astronomowie obliczają różnemi od poprzednio wyłożonych metodami i nie z trzech, a z wielu obserwacyi należących nie do jednego a do wielu obiegów planety. Tak przy ostatecznem wyznaczeniu orbity, jak przy wyznaczeniu i przy kolejnem poprawianiu pierwszych elementów — bliskie od siebie obserwacye [np. obserwacye zrobione w ciągu tej samej albo

kilku po sobie następujących nocy] łączymy w tak zwane „normalne miejsca“. O tworzeniu „miejsce normalnych“, o wyznaczeniu ostatecznych elementów powiemy potem słów kilka, wprzód jednakże omówimy pokrótce „analityczną“ metodę wyznaczania orbit oraz metodę Leuschnera.

Natomiast z powodu braku miejsca zupełnie pominiemy metodę wyznaczania orbity kołowej z dwóch obserwacji a eliptycznej z czterech oraz rozmaite specjalne przypadki. Czytelnika chcącego poinformować się o tem odsyłamy do dzieł specjalnych. [Spis literatury znajduje się na końcu rozdz. XVIII-go].



KONIEC TOMU PIERWSZEGO.

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

