1.1.1. – metody analityczne
i półanalityczne
6.8.2. – teoria plazmy

Jacek Zawistowski

WYZNACZENIE SYMETRII NIELINIOWEGO RÓWNANIA SCHRÖDINGERA

10/1995

WARSZAWA 1995

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 lutego 1995 r.

IPPT PAN

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 0,75 Ark. druk. 1,0
Oddano do drukarni w marcu 1995 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

Jacek Zawistowski
Samodzielna Pracownia Dynamiki Plazmy

WYZNACZENIE SYMETRII NIELINIOWEGO RÓNANIA SCHRÖDINGERA

Streszczenie

Posługując się zespolonym uogólnieniem metody Owsiannikowa wyznaczono generatory grupy symetrii nieliniowego równania Schrödingera. Przeprowadzono szczegółową analizę tego uogólnienia. Wyznaczono związki przemienności między generatorami grupy symetrii oraz jednoparametrowe grupy przekształceń odpowiadające poszczególnym generatorom. Wyjaśniono brak wpływu współczynnika w wyrazie nieliniowym na grupę symetrii.

1. Wstęp

Nieliniowe równanie Schrödingera (NLS)

$$0 = i\mathcal{E}_t + a\mathcal{E}_{xx} + b|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}^* \qquad a, b \in \mathrm{R}^1 \qquad \mathcal{E} \in \mathrm{C}^1 \tag{1}$$

odgrywa zasadniczą rolę w zagadnieniach modulacji nieliniowych fal. Opisuje ono ewolucję wolno zmiennej amplitudy drgań o wysokiej częstości [1],[2]. W fizyce plazmy, w ramach opisu hydrodynamicznego, równanie NLS opisuje tzw. solitony obwiedniowe Langmuira. W pracy [3] została wyznaczona grupa symetrii zmodyfikowanego równania NLS, które różni się od (1) występowaniem nielokalnego członu całkowego. Równanie to opisuje solitony obwiedniowe w ramach ogólniejszej kinetycznej teorii plazmy. Użyta w [3] nowa metoda jest uogólnieniem metody Owsiannikowa na przypadek równań różniczkowo-całkowych. Przygotowanie materiału porównawczego do testowania tej nowej metody jest głównym motywem podjęcia niniejszej pracy. Dla zachowania zgodności z pracą [3] zmienna zależna w równaniu (1) została oznaczona za pomocą litery $\mathcal{E}$. Fizycznie oznacza ona wolno zmienną amplitudę pola elektrycznego w wieloskładnikowej plazmie bezzderzeniowej, w jednowymiarowym przypadku bez pola magnetycznego.

Naszym celem jest wyznaczenie grupy przekształceń punktowych

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t + \tau\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \tilde{x} &= x + \xi\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{E} + \eta\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \tag{2}$$

zachowujących równanie (1), gdzie τ, ξ, η zależą od zmiennych t, x, $\mathcal{E}$, ale nie zależą od pochodnych zmiennej $\mathcal{E}$ względem t oraz x. Generatory tych przekształceń mają postać

$$G = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \tag{3}$$

W pracy [4] podano rozwiązanie tego zagadnienia

$$
(4)\quad \begin{aligned} \tau &= 2\alpha t + \gamma_2 \\ \xi &= \alpha x + \beta a t + \gamma_1 \qquad\qquad \alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\delta \in \mathbf{R}^1 \\ \eta &= \left(\frac{i}{2}\beta x - \alpha + i\delta\right)\mathcal{E} \end{aligned}
$$

ale bez rachunków do niego prowadzących. Uniemożliwia to pełne porównanie z pracą [3]. Ponadto wynik (4) jest zaskakujący – otrzymane wyrażenie nie zależy od parametru b występującego w członie nieliniowym w równaniu (1). Mogłoby to sugerować możliwość przyjęcia $b = 0$, co prowadziłoby do błędnego wniosku, że grupa symetrii równania NLS pokrywa się z grupą symetrii liniowego równania Schrödingera (swobodnego, tj. bez potencjału). Wyjaśnienie tego paradoksu wymaga dokładnego przeanalizowania drogi prowadzącej do (4). Jest to drugi powód podjęcia niniejszej pracy.

Trzeci z kolei powód wynika z faktu, że metoda Owsiannikowa, którą się posługujemy i której uogólnienia budujemy, stosuje się do równań w zmiennych rzeczywistych. Równanie NLS, podobnie jak wiele innych ważnych w fizyce równań, zawiera zmienne zespolone. Wymaga to zespolonego uogólnienia metody Owsiannikowa, najlepiej w sposób uniwersalny, stosujący się nie tylko do równania NLS. Postąpimy zgodnie z duchem metody Owsiannikowa stosując procedurę zespolonego rozszerzenia (przedłużenia) analogiczną do rozszerzenia na przestrzeń jetów, które jest istotą tej metody.

2. Zespolone uogólnienie metody Owsiannikowa

Często stosowana jest metoda pośrednia. Najpierw problem zespolony zostaje sprowadzony do równoważnego problemu rzeczywistego przez przejście do zmiennych $\Re\mathcal{E}$, $\Im\mathcal{E}$. Następnie, stosując zwykłą (rzeczywistą) metodę Owsiannikowa, wyznaczamy grupę symetrii tego pomocniczego problemu. Na koniec wracamy do starych zmiennych wyznaczając poszukiwaną grupę symetrii. Takie postępowanie ma typowe wady metod pośrednich — konieczność przejścia „tam i z powrotem", które w naszym przypadku nie jest zbyt skomplikowane, ale ogólnie może prowadzić do istotnych trudności interpretacyjnych. Głowny kłopot polega przede wszystkim na tym, że wyznaczenie pomocniczej grupy symetrii jest znacznie trudniejsze niż wyznaczenie grupy symetrii wyjściowego problemu bezpośrednio. Jest to związane z zastąpieniem naturalnej i prostej symetrii w przestrzeni funkcji „falowych" $\mathcal{E}$ sztuczną i skomplikowaną symetrią w zmiennych $\Re\mathcal{E}$, $\Im\mathcal{E}$. W przypadku tak prostych równań jak (1) ta komplikacja techniczna nie ma zasadniczego znaczenia, ale w trudniejszych przypadkach (np. zmodyfikowane równanie NLS [3]) może uniemożliwić efektywne rozwiązanie problemu. Ważne jest również to, że tracimy naturalną interpretację fizyczną występujących wielkości, umożliwiającą zrozumienie mechanizmów powstawania i łamania symetrii oraz stosowanie porównań z innymi przypadkami.

Próba prostego, mechanicznego uogólnienia metody Owsiannikowa na przypadek zespolony prowadzi do zasadniczych trudności. Fakt, że tylko zmienna zależna $\mathcal{E}$ w (1) jest zespolona $\mathcal{E} \in \mathbf{C}^1$, czyli sytuacja jest podobna do $\mathcal{E} \in \mathbf{R}^2$, mógłby sugerować możliwość zastosowania formalizmu Owsiannikowa wprost do równania (1). Wówczas infinitezymalne kryterium niezmienniczości dla równania NLS (1) względem grupy przekształceń (2) miałoby postać ([5],[6],[3]):

$$
(5)\quad G^{(2)}(i\mathcal{E}_t + a\mathcal{E}_{xx} + b|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}) = 0 \qquad\qquad \mathcal{E}\text{–rozwiązanie rów. (1)}
$$

gdzie rozszerzony do drugiego rzędu generator G

(6) $$G^{(2)} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} + \eta_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_t} + \eta_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_x} + \eta_{11}^{(2)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{tt}} + \eta_{22}^{(2)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{xx}} + \eta_{12}^{(2)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{tx}}$$

opisuje rozszerzone przekształcenia

(7) $$\begin{aligned} \tilde{t} &= t + \tau\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \tilde{x} &= x + \xi\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{E} + \eta\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \widetilde{\mathcal{E}_t} &= \mathcal{E}_t + \eta_1^{(1)}\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \widetilde{\mathcal{E}_x} &= \mathcal{E}_x + \eta_2^{(1)}\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \widetilde{\mathcal{E}_{tt}} &= \mathcal{E}_{tt} + \eta_{11}^{(2)}\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \widetilde{\mathcal{E}_{xx}} &= \mathcal{E}_{xx} + \eta_{22}^{(2)}\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \widetilde{\mathcal{E}_{tx}} &= \mathcal{E}_{tx} + \eta_{12}^{(2)}\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

w rozszerzonej przestrzeni (jetów) t, x, $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_{tt}$, $\mathcal{E}_{xx}$, $\mathcal{E}_{xt}$ (skorzystaliśmy z równości pochodnych mieszanych $\mathcal{E}_{tx} = \mathcal{E}_{xt}$, $\widetilde{\mathcal{E}_{tx}} = \widetilde{\mathcal{E}_{xt}}$). Zastosowanie kryterium (5) do równania (1) prowadzi do konieczności obliczenia

(8) $$\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}|\mathcal{E}|^2\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2 = ?$$

Ale ta pochodna nie istnieje, gdyż funkcja $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^*(\mathcal{E})$ jest nieróżniczkowalna. Nie istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}^*(\mathcal{E})}{d\mathcal{E}} &= \lim_{\triangle\to 0}\frac{\mathcal{E}^*(\mathcal{E}+\triangle) - \mathcal{E}^*(\mathcal{E})}{\triangle} = \lim_{\triangle\to 0}\frac{\mathcal{E}^* + \triangle^* - \mathcal{E}^*}{\triangle} = \\ &= \lim_{\triangle\to 0}\frac{|\triangle^*|e^{-i\phi}}{|\triangle|e^{+i\phi}} = \lim_{\triangle\to 0} e^{-2i\phi} = ? \end{aligned}$$

gdyż wynik zależy od drogi, dokładniej od dowolnego kąta granicznego ϕ_0: $\exp(-2i\phi) \longrightarrow \exp(-2i\phi_0)$. Formalne przyjęcie, że $\mathcal{E}^*$ nie zależy od $\mathcal{E}$ lub inaczej (i lepiej), że pochodna cząstkowa w (8) dotyczy tylko jawnej zależności wyrażenia $\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2$ od $\mathcal{E}$, tylko częściowo rozwiązuje problem. Usuwa trudności interpretacyjne związane z (8) ale to nie wystarcza jak się dalej okaże.

Nasuwa się pomysł by zgodnie z ogólną ideą metody Owsiannikowa, która polega na przejściu od równania różniczkowego (1) w zmiennych $t, x, \mathcal{E}$ do równania algebraicznego (ogólnie funkcyjnego) w rozszerzonej przestrzeni zmiennych $t, x, \mathcal{E}, \mathcal{E}_t, \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_{tt}, \mathcal{E}_{xx}, \mathcal{E}_{tx}$ (przestrzeń jetów), podobnie „wchłonąć" operację sprzężenia zespolonego w (1) dokonując dodatkowego rozszerzenia przestrzeni zmiennych dodając $\mathcal{E}^*, \mathcal{E}_t^*, \mathcal{E}_x^*$ itd. Nowe zmienne „sprzężone" traktujemy jako niezależne od starych zmiennych „niesprzężonych", w szczególności $\mathcal{E}^*$ nie zależy od $\mathcal{E}$ i nie występuje problem (8). Nowe zmienne muszą spełniać warunek zgodności wynikający z faktu, że otrzymujemy je przez sprzężenie zespolone wyjściowych zmiennych. Oznacza to, że zmienna $\mathcal{E}^*$ spełnia równanie które otrzymujemy przez sprzężenie zespolone równania (1) oraz, że zmienne „sprzężone" transformują się pod wpływem przekształceń poszukiwanej grupy symetrii jak sprzężenia zespolone zmiennych „niesprzężonych". Musimy więc oprócz równania (1) uwzględnić równanie do niego sprzężone na $\mathcal{E}$, a przekształcenia (7) uzupełnić związkami dla zmiennych „sprzężonych", które otrzymujemy przez sprzężnie zespolone (7), w szczególności

$$(9) \quad \widetilde{\mathcal{E}^*} = \mathcal{E}^* + \eta^*\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

itd. Odpowiada temu następująca postać rozszerzonego generatora

$$\begin{aligned}(10) \quad G^{(2)} &= \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} + \eta^*\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}^*} + \\ &+ \eta_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_t} + \eta_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_x} + \eta_1^{*(1)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_t^*} + \eta_2^{*(1)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_x^*} + \\ &+ \eta_{11}^{(2)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{tt}} + \eta_{22}^{(2)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{xx}} + \eta_{12}^{(2)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{tx}} + \eta_{11}^{*(2)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{tt}^*} + \eta_{22}^{*(2)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{xx}^*} + \eta_{12}^{*(2)}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{tx}^*}\end{aligned}$$

W (10) pojawiły się nowe wyrazy w stosunku do (6), z których dla równania (1) i sprzężonego do niego niezerowy wkład daje tylko wyraz $\eta^*\partial/\partial\mathcal{E}^*$. Zatem w miejsce (8) pojawi się wyrażenie

$$(11) \quad \left(\eta\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} + \eta^*\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}^*}\right)(\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2) = 2\eta\mathcal{E}^*\mathcal{E} + \eta^*\mathcal{E}^2 = 2\eta|\mathcal{E}|^2 + \eta^*\mathcal{E}^2$$

zmieniające postać kryterium niezmienniczości. Jak widać nie wystarczy tylko potraktowanie zmiennej $\mathcal{E}^*$ jako zmiennej niezależnej od $\mathcal{E}$.

Przedstawione rozumowanie ma heurystyczny charakter i nie może zastąpić ścisłego dowodu. Aby go uzyskać należy wrócić do źródeł, tzn. powtórzyć rozumowanie prowadzące od warunku niezmienniczości równania (1) do infinitezymalnego kryterium niezmienniczości (5) uwzględniając zespolone rozszerzenie czyli dołączając do przekształceń (7) przekształcenia (9) itd. Wystarczy to zrobić tylko dla wyrazu $b|\mathcal{E}|^2\mathcal{E} = b\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2$, który sprawił nam kłopoty. Dla pozostałych wyrazów nic się nie zmienia.

Pod wpływem rozszerzonych przekształceń (7) i (9) wyraz $b|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}$ zmienia się, z dokładnością do λ^2, następująco

$$\begin{aligned}(12) \quad b\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2 \longrightarrow\ & b(\mathcal{E}^* + \eta^*\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2))(\mathcal{E} + \eta\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2))^2 = \\ &= b(\mathcal{E}^* + \eta^*\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2))(\mathcal{E}^2 + 2\eta\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)) = \\ &= b[\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2 + (2\eta\mathcal{E}^*\mathcal{E} + \eta^*\mathcal{E}^2)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)]\end{aligned}$$

Współczynnik przy λ w (12) dający wkład do warunku niezmienniczości (niezmienniczość równania (1) z dokładnością do λ^2 oznacza znikanie wyrazu proporcjonalnego do λ)

$$(2\eta\mathcal{E}^*\mathcal{E} + \eta^*\mathcal{E}^2) + \cdots = o$$

jest zgodny z (11). Dowodzi to poprawności postaci (10) rozszerzonego generatora $G^{(2)}$ dla przekształceń (7) i (9). Zastosowanie do równania (1) kryterium (5) z generatorem (10) daje następujące kryterium niezmienniczości równania (1)

$$(13) \quad o = i\eta_1^{(1)} + a\eta_{22}^{(2)} + b(2|\mathcal{E}|^2\eta + \mathcal{E}^2\eta^*) \qquad \text{gdy } \mathcal{E} \text{ spełnia (1)}$$

Ze względu na prosty związek między zmiennymi „sprzężonymi" i „niesprzężonymi" zwykle nie trzeba wypisywać jawnie związków dla zmiennych „sprzężonych".

3. Wyznaczenie generatorów grupy symetrii równania NLS

Kryterium (13) stanowi równanie na τ, ξ, η. Aby znaleźć jego jawną postać trzeba wyrazić współczynniki $\eta_1^{(1)}$, $\eta_{22}^{(2)}$ przez τ, ξ, η. Ogólne rekurencyjne wzory na $\eta_1^{(1)}$, $\eta_{22}^{(2)}$ dane są w [5] i [6]. Nie musimy jednak z nich korzystać, gdyż równanie (1) spełnia (z nadmiarem) założenia twierdzenia 4.2.3-6 z monografii [5], tj. najwyższa pochodna występuje w równaniu (1) liniowo a stojący przy niej współczynnik jest stały. W takim przypadku współczynniki τ i ξ, określające generator (3), nie zależą od zmiennej zależnej $\mathcal{E}$: $\partial\tau/\partial\mathcal{E} = \partial\xi/\partial\mathcal{E} = 0$, a współczynnik η zależy od $\mathcal{E}$ conajwyżej liniowo: $\partial^2\eta/\partial\mathcal{E}^2$. Można więc ograniczyć się do poszukiwania współczynników τ, ξ, η w postaci

$$(14)\quad \tau = \tau(t,x), \qquad \xi = \xi(t,x), \qquad \eta = g(t,x)\mathcal{E}(t,x) + h(t,x)$$

a współczynniki $\eta_1^{(1)}$ i $\eta_{22}^{(2)}$ dane są wówczas wzorami (4.42) i (4.46) z monografii [5]:

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(1)} &= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}\mathcal{E} + \left(g - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right)\mathcal{E}_t - \frac{\partial \xi}{\partial t}\mathcal{E}_x \\
(15)\quad \eta_{22}^{(2)} &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathcal{E} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\mathcal{E}_t + \left(2\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\mathcal{E}_x + \\
&\quad - 2\frac{\partial \tau}{\partial x}\mathcal{E}_{tx} + \left(g - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\mathcal{E}_{xx}
\end{aligned}$$

Podstawiając (15) do kryterium (13) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
0 &= \left(i\frac{\partial h}{\partial t} + a\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) + \left(i\frac{\partial g}{\partial x} + a\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)\mathcal{E} + \left(ig' - i\frac{\partial \tau}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\right)\mathcal{E}_t + \\
(16)\quad &+ \left(-i\frac{\partial \xi}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathcal{E}_x - 2a\frac{\partial \tau}{\partial x}\mathcal{E}_{tx} + a\left(g - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\mathcal{E}_{xx} + \\
&+ bh^*\mathcal{E}^2 + 2bh\mathcal{E}^*\mathcal{E} + b(2g + g^*)\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2
\end{aligned}$$

Równanie (16) musi być spełnione pod warunkiem, że zachodzi równanie (1). Pozwala to wyeliminować z (16) najwyższą pochodną: $a\mathcal{E}_{xx} = -i\mathcal{E}_t - b\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2$. Tak uproszczone równanie (16) musi być spełnione tożsamościowo ze względu na zmienne t, x, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_{tx}$, $\mathcal{E}^*$ (tj. dla każdej wartości tych zmiennych). Muszą więc znikać współczynniki stojące przy niezależnych jednomianach zbudowanych z tych zmiennych. Otrzymujemy zatem, dla $b \neq 0$, następujący układ liniowych równań określających na współczynniki τ, ξ, g, h

(17a)	$0 = i\dfrac{\partial h}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$	wyraz stały
(17b)	$0 = i\dfrac{\partial g}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$	$\mathcal{E}$
(17c)	$0 = i\dfrac{\partial \tau}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - 2i\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$	$\mathcal{E}_t$
(17d)	$0 = i\dfrac{\partial \xi}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2a\dfrac{\partial g}{\partial x}$	$\mathcal{E}_x$
(17e)	$0 = \dfrac{\partial \tau}{\partial x}$	$\mathcal{E}_{tx}$

(17f) $\quad 0 = h^{*} \qquad\qquad \mathcal{E}^2$

(17g) $\quad 0 = h \qquad\qquad \mathcal{E}^{*}\mathcal{E}$

(17h) $\quad 0 = g + g^{*} + 2\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \qquad\qquad \mathcal{E}^{*}\mathcal{E}^2$

Zgodnie z $(17f,g)$ $h = 0$, więc równanie $(17a)$ jest spełnione tożsamościowo. Natomiast z równania $(17e)$ wynika, że τ nie zależy od x, a więc wyraz $a\partial^2\tau/\partial x^2$ w $(17c)$ znika i układ równań (17) sprowadza się do

(18a) $\quad 0 = i\dfrac{\partial g}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$

(18b) $\quad 0 = \dfrac{\partial \tau}{\partial t} - 2\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

(18c) $\quad 0 = i\dfrac{\partial \xi}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2a\dfrac{\partial g}{\partial x}$

(18d) $\quad 0 = g + g^{*} + 2\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

Ponieważ τ nie zależy od x, więc $\partial\tau/\partial t$ też nie zależy od x. Zatem na podstawie $(18b)$, $\partial\xi/\partial x$ nie zależy od x, tj. $\partial^2\xi/\partial x^2 = 0$. Znika więc odpowiedni wyraz w $(18c)$ i ostatecznie otrzymujemy następujący układ równań

(19a) $\quad 0 = i\dfrac{\partial g}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$

(19b) $\quad 0 = \dfrac{\partial \tau}{\partial t} - 2\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

(19c) $\quad 0 = i\dfrac{\partial \xi}{\partial t} - 2a\dfrac{\partial g}{\partial x}$

(19d) $\quad 0 = g + g^{*} + 2\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

gdzie $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(t,x)$, $\eta = g(t,x)\mathcal{E}(t,x)$.

Ponieważ $\partial\xi/\partial x$ nie zależy od x, więc na podstawie $(19d)$ również $2\Re g = g + g^{*}$ nie zależy od x:

(20) $\quad 0 = \partial_x(g + g^{*})$

Ogranicza to w istotny sposób dopuszczalne rozwiązania g równania $(19a)$, które jest swobodnym (bez potencjału) liniowym równaniem Schrödingera. Ogólna postać rozwiązania tego równania dla $g \in \mathrm{C}^1$ jest następująca

(21) $\quad g = e^{-i\omega t + \Gamma t}\psi(x) \qquad\qquad \omega, \Gamma \in \mathrm{R}^1, \quad \psi \in \mathrm{C}^1$

Podstawiając (21) do równania $(19a)$ otrzymujemy

(22) $\quad 0 = (\omega + i\Gamma)\psi(x) + a\dfrac{d^2\psi}{dx^2}$

Warunek (20) zastosowany do (21) daje

(23) $\quad 0 = e^{\Gamma t}\left(e^{-i\omega t}\partial_x\psi + e^{i\omega t}\partial_x\psi^{*}\right)$

Spełnienie równania (23) w każdym punkcie (t, x) jest możliwe tylko wtedy, gdy $\omega = 0$, a wówczas musi zachodzić $\Re d\psi/dx = 0$, tj.

$$(24)\quad \omega = 0 \qquad \Re\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi^*}{dx} = 0$$

Pozornie inna możliwość, polegająca na przyjęciu $d\psi/dx = d\psi^*/dx = 0$ dla dowolnego ω, skąd $\psi = \text{const} \in \mathrm{C}^1$, jest w istocie szczególnym przypadkiem (24), gdyż z równania (22) wynika , że i w tym przypadku $\omega = 0$, a warunek $d\psi/dx = d\psi^*/dx = 0$ jest mniej ogólny niż $d\psi/dx + d\psi^*/dx = 0$.

Zgodnie z (24) równanie (22) przyjmuje postać

$$(25)\quad 0 = i\Gamma\psi + a\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

a funkcję $\psi(x) \in \mathrm{C}^1$ można przedstawić jako

$$(26)\quad \psi(x) = i\varphi(x) + C \qquad C = C_1 + iC_2 \in \mathrm{C}^1, \quad C_1, C_2, \varphi \in \mathrm{R}^1$$

gdzie C_1, C_2 – dowolne stałe. Podstawienie (26) do (25) daje

$$0 = -\Gamma\varphi - \Gamma C_2 + ia\frac{d^2\varphi}{dx^2} + i\Gamma C_1$$

czyli

$$0 = \Gamma(\varphi(x) - C_2) \qquad 0 = a\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \Gamma C_1$$

skąd

$$(27)\quad \Gamma = 0 \qquad \varphi(x) = Ax + D \qquad A, D \in \mathrm{R}^1$$

Przypadek $\varphi(x) = C_2 = \text{const}$ dla dowolnego Γ jest zawarty w (27), gdyż wówczas $d^2\varphi/dx^2 = 0$ i z równania (25) znowu mamy $\Gamma = 0$.

Na podstawie (21), (24), (26), i (27) otrzymujemy

$$(28)\quad g = iAx + B \qquad A \in \mathrm{R}^1, \quad B \in \mathrm{C}^1$$

gdzie oznaczyliśmy $B = iD + C$.

Podstawiając (28) do równania (19d) otrzymujemy

$$(29)\quad \frac{\partial\xi}{\partial x} = -\Re B \equiv \alpha = \text{const} \in \mathrm{R}^1$$

skąd

$$(30)\quad \xi = \alpha x + h(t)$$

gdzie h nie zależy od x i jest rzeczywiste, gdyż ξ, α i x są rzeczywiste. Natomiast z (29) i (19b) wynika

$$\frac{d\tau}{dt} = -2\Re B = 2\alpha$$

skąd

$$(31)\quad \tau = 2\alpha t + \gamma_2$$

gdzie γ_2 – dowolna stała (rzeczywista, bo τ, α i t są rzeczywiste). Z kolei podstawiając (28) do (19c) otrzymujemy równanie

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 2aA = a\beta \qquad \beta \equiv A/2$$

które po uwzględnieniu (30) przechodzi w równanie na h

$$\frac{dh}{dt} = a\beta$$

skąd

$$(32)\quad h = \beta a t + \gamma_1$$

gdzie γ_1 – dowolna stała rzeczywista.

Wprowadzając oznaczenie $\Im B \equiv \delta$, tj. $b = -\alpha + i\delta$, otrzymujemy na podstawie (28), (30), (31) i (32) ostateczne rozwiązania na współczynniki τ, ξ, η

$$(33)\quad \begin{aligned} \tau &= 2\alpha t + \gamma_2 \\ \xi &= \alpha x + \beta a t + \gamma_1 \\ \eta &= g\mathcal{E} = \left(i\frac{\beta}{2}x - \alpha + i\delta \right) \mathcal{E} \end{aligned} \qquad \mathrm{R}^1 \ni \alpha,\ \beta,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \delta \ \text{– dowolne stałe}$$

co pokrywa się z wynikiem (4) Tajiri'ego [4].

Współczynniki τ, ξ, η dane wzorami (33) wyznaczają wszystkie dopuszczalne generatory (3). Otrzymaliśmy 5- parametrową grupę Liego przekształceń punktowych zachowujących równanie (1). Wybierając parametry α, β, γ_1, γ_2, δ tak, by tylko jeden z nich (po kolei γ_2, γ_1, δ, α, β) był różny od zera i równy 1 otrzymujemy pięć generatorów

$$(34)\quad \begin{aligned} G_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ G_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ G_3 &= i\mathcal{E}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \\ G_4 &= 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{E}\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \\ G_5 &= at\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}x\mathcal{E}\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

rozpinających algebrę Liego naszej grupy symetrii.

4. Związki przemienności dla generatorów oraz jednoparametrowe podgrupy przekształceń

Do wyznaczenia komutatorów między generatorami (34) skorzystamy z dwuliniowości i antysymetrii komutatora

$$
\begin{aligned}
[a+b,c] &= [a,c]+[b,c] \\
[a,b+c] &= [a,b]+[a,c] \qquad (35)\\
[a,b] &= -[b,a]
\end{aligned}
$$

oraz ze wzorów na rozwinięcie komutatora iloczynu

$$
\begin{aligned}
[ab,c] &= [a,c]b+a[b,c] \\
[a,bc] &= [a,b]c+b[a,c]
\end{aligned} \qquad (36)
$$

wynikających wprost z definicji komutatora.

Ponadto wykorzystamy fakt, że pochodne względem różnych zmiennych są przemienne (równość pochodnych mieszanych) oraz, że pochodna jest przemienna z dowolnym operatorem niezależnym od zmiennej, względem której różniczkujemy. Przypominamy, że wszystkie zmienne traktujemy jako niezależne w rozszerzonej przestrzeni (jetów) – różniczkowanie dotyczy tylko jawnej zależności od tych zmiennych (pochodne cząstkowe). Stąd od razu mamy

$$
\begin{aligned}
[G_1,G_2] &= 0 \\
[G_1,G_3] &= 0 \\
[G_2,G_3] &= 0
\end{aligned}
$$

Dalej skorzystamy z

$$[\partial_t,t]=\partial_t t-t\partial_t=1+t\partial_t-t\partial_t=1 \qquad (37)$$

oraz identycznych wzorów dla innych zmiennych. Obliczamy

$$
\begin{aligned}
[G_1,G_4] &= 2[\partial_t,t\partial_t]+\underbrace{[\partial_t,x\partial_x]}_{0}-\underbrace{[\partial_t,\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}]}_{0}= \\
&= 2\underbrace{[\partial_t,t]}_{1}\partial_t+2t\underbrace{[\partial_t,\partial_t]}_{0}=2G_1
\end{aligned}
$$

Przy okazji pokazaliśmy, że

$$[\partial_t,t\partial_t]=\partial_t$$

co wykorzystamy dalej.

$$
\begin{aligned}
[G_1,G_5] &= a[\partial_t,t\partial_x]+\frac{i}{2}\underbrace{[\partial_t,x\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}]}_{0}=a\underbrace{[\partial_t,t]}_{1}\partial_x=aG_2 \\
[G_2,G_4] &= 2\underbrace{[\partial_x,t\partial_t]}_{0}+\underbrace{[\partial_x,x\partial_x]}_{\partial_x}-\underbrace{[\partial_t,\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}]}_{0}=G_2 \\
[G_2,G_5] &= a\underbrace{[\partial_x,t\partial_x]}_{0}+\frac{i}{2}[\partial_x,x\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}]=\frac{i}{2}\underbrace{[\partial_x,x]}_{1}\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}=\frac{1}{2}G_3 \\
[G_3,G_4] &= 2i\underbrace{[\mathcal{E}\partial_\mathcal{E},t\partial_t]}_{0}+i\underbrace{[\mathcal{E}\partial_\mathcal{E},x\partial_x]}_{0}-i\underbrace{[\mathcal{E}\partial_\mathcal{E},\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}]}_{0}=0 \\
[G_3,G_5] &= ia\underbrace{[\mathcal{E}\partial_\mathcal{E},t\partial_x]}_{0}-\frac{1}{2}[\mathcal{E}\partial_\mathcal{E},x\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}]=-\frac{x}{2}\underbrace{[\mathcal{E}\partial_\mathcal{E},\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}]}_{0}=0
\end{aligned}
$$

Na podstawie (37) mamy $[t\partial_t, t] = t\underbrace{[\partial_t, t]}_{1} + \underbrace{[t, t]}_{0}\partial_t = t$ więc

$$\begin{aligned}
[G_4, G_5] &= 2a[t\partial_t, t\partial_x] + i\underbrace{[t\partial_t, x\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}]}_{0} + a[x\partial_x, t\partial_x] + \frac{i}{2}[x\partial_x, x\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}] - a\underbrace{[\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}, t\partial_x]}_{0} + \\
&- \frac{i}{2}[\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}, x\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}] = \\
&= 2a\underbrace{[t\partial_t, t]}_{t}\partial_x + at\underbrace{[x\partial_x, \partial_x]}_{-\partial_x} + \frac{i}{2}\underbrace{[x\partial_x, x]}_{x}\mathcal{E}\partial_\mathcal{E} - \frac{i}{2}x\underbrace{[\mathcal{E}\partial_\mathcal{E}, \mathcal{E}\partial_\mathcal{E}]}_{0} = G_5
\end{aligned}$$

Wyznaczyliśmy w ten sposób strukturę (stałe struktury) algebry Liego rozpiętej przez generatory (34):

$$\begin{aligned}
[G_3, G_i] &= 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots, 5 \\
[G_1, G_2] &= 0 \\
[G_1, G_4] &= 2G_1 \\
[G_1, G_5] &= aG_2 \\
[G_2, G_4] &= G_2 \\
[G_2, G_5] &= \frac{1}{2}G_3 \\
[G_4, G_5] &= G_5
\end{aligned} \tag{38}$$

Wyznaczymy teraz jednoparametrowe podgrupy przekształceń symetrii (2) odpowiadające poszczególnym generatorom (34). Ponieważ $\partial_t t = 1$, $\partial_t^2 t = 0$, $\partial_t^3 t = 0, \ldots$, więc

$$\tilde{t} = e^{\lambda G_1} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\partial_t^n t = t + \lambda$$

Natomiast z $\partial_t x = \partial_t \mathcal{E} = 0$ wynika, że

$$\tilde{x} = e^{\lambda G_1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\partial_t^n x = x$$

i podobnie dla zmiennej $\mathcal{E}$. Zatem G_1 generuje translację w czasie

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= e^{\lambda G_1} t = t + \lambda \\
\tilde{x} &= e^{\lambda G_1} x = x \\
\tilde{\mathcal{E}} &= e^{\lambda G_1} \mathcal{E} = \mathcal{E}
\end{aligned} \tag{39}$$

Niezmienniczość równania NLS (1) względem translacji w czasie wynika z jednorodności czasu (żadna chwila nie jest wyróżniona). Matematycznym wyrazem tego faktu jest brak zależności współczynników równania (1) od czasu.

Analogicznie dla generatora G_2 mamy $\partial_x x = 1$, $\partial_x^2 x = 0$, $\partial_x^3 x = 0, \ldots$ oraz $\partial_x t = \partial_x \mathcal{E} = 0$, zatem G_2 generuje translację w przestrzeni

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= e^{\lambda G_2} t = t \\
\tilde{x} &= e^{\lambda G_2} x = x + \lambda \\
\tilde{\mathcal{E}} &= e^{\lambda G_2} \mathcal{E} = \mathcal{E}
\end{aligned} \tag{40}$$

Niezmienniczość równania (1) względem tych przekształceń (jednorodność przestrzeni) wynika z braku zależności współczynników równania (1) od położenia.

Dla generatora G_3 zachodzi $i\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{E} = i\mathcal{E}$, $(i\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}})^2\mathcal{E} = i\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}} i\mathcal{E} = i^2\mathcal{E}$, $\ldots (i\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}})^n\mathcal{E} = i^n\mathcal{E}$ oraz $i\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}t = i\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}x = 0$. Zatem zmienne t i x nie zmieniają się natomiast $\mathcal{E}$ przechodzi w

$$\tilde{\mathcal{E}} = e^{\lambda G_3}\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!}(\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}})^n\mathcal{E} = \mathcal{E}e^{i\lambda}$$

tj. G_3 generuje następującą transformację cechowania

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= e^{\lambda G_3}t = t \\ \tilde{x} &= e^{\lambda G_3}x = x \qquad (41) \\ \tilde{\mathcal{E}} &= e^{\lambda G_3}\mathcal{E} = \mathcal{E}e^{i\lambda} \end{aligned}$$

Ta niezmienniczość równania (1) wynika z tego, że z punktu widzenia czynnika fazowego, w każdym wyrazie równania (1) pole $\mathcal{E}$ występuje liniowo ($|\mathcal{E}|^2$ nie zależy od fazy).

Dla generatora G_4 mamy $G_4t = 2t\partial_t t = 2t$, $G_4^2 t = G_4 2t = 2^2 t$, $\ldots$, $G_4^n t = 2^n t$ oraz $G_4 x = x\partial_x x = x$, $G_4^2 x = x$, $\ldots$, $G_4^n x = x$ i $G_4\mathcal{E} = -\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}\mathcal{E} = -\mathcal{E}$, $G_4^2\mathcal{E} = -\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}(-\mathcal{E}) = (-1)^2\mathcal{E}$, $\ldots$, $G_4^n\mathcal{E} = (-1)^n\mathcal{E}$, zatem G_4 generuje następującą transformację skalowania

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= e^{\lambda G_4}t = te^{2\lambda} \\ \tilde{x} &= e^{\lambda G_4}x = xe^{\lambda} \qquad (42) \\ \tilde{\mathcal{E}} &= e^{\lambda G_4}\mathcal{E} = \mathcal{E}e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Ta symetria nie jest oczywista na pierwszy rzut oka. Jednak biorąc pod uwagę, że różniczkowaniu względem danej zmiennej odpowiada dzielenie przez tę zmienną (iloraz różnicowy) zaś całkowaniu mnożenie (suma Riemanna) zauważamy, że pod wpływem (42) poszczególne wyrazy równania (1) zmieniają się jednakowo (o ten sam czynnik - oznaczamy $e^{\lambda} = \mu$)

$$\begin{array}{lllll} i\mathcal{E}_t & : & \mathcal{E} \longrightarrow \mu^{-1}, & \partial_t \longrightarrow \mu^{-2} & \mu^{-3} \\ a\mathcal{E}_{xx} & : & \mathcal{E} \longrightarrow \mu^{-1}, & \partial_x^2 \longrightarrow \mu^{-2} & \mu^{-3} \\ b\mathcal{E}|\mathcal{E}|^2 & : & \mathcal{E} \longrightarrow \mu^{-1}, & |\mathcal{E}|^2 \longrightarrow \mu^{-2} & \mu^{-3} \end{array}$$

czyli postać równania (1) nie zmienia się.

Przypadek generatora G_5 jest trudniejszy rachunkowo. Mianowicie $G_5 t = G_5^2 t = 0, \ldots$ oraz $G_5 x = at\partial_x x = at$, $G_5^2 x = 0$, $\ldots$, czyli zmienna t nie zmienia się, a dla x mamy translację $\tilde{x} = x + \lambda at$ zależną od czasu - propagacja sygnału z prędkością λa. Dla zmiennej $\mathcal{E}$ sytuacja jest bardziej skomplikowana:

$$\tilde{\mathcal{E}} = e^{\lambda G_5}\mathcal{E} = e^{\lambda at\partial_x + \lambda\frac{1}{2}x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}}\mathcal{E} = ?$$

Skorzystamy ze wzoru BCH (Baker, Campbell, Hausdorff - [7])

$$(43) \quad e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]-[B,[B,A]])+\ldots}$$

Dla

$$A = \lambda at\partial_x \qquad B = \lambda\tfrac{1}{2}x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}$$

obliczamy komutatory

$$[A,B] = [\lambda at\partial_x, \lambda\tfrac{i}{2}x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}] = \lambda^2\tfrac{i}{2}[\partial_x, x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}] = \lambda^2\tfrac{i}{2}\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}$$

$$\begin{aligned}[A,[A,B]] &= [\lambda at\partial_x, \lambda^2\tfrac{i}{2}\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}] = 0\\ [B,[B,A]] &= -[B,[A,B]] = -[\lambda\tfrac{i}{2}x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}, \lambda^2\tfrac{i}{2}\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}] = -\lambda^3(\tfrac{i}{2})^2[x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}, \mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}] = 0\end{aligned}$$

Zatem znikają wyższe komutatory i szereg w (43) się urywa

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

skąd

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B$$

gdyż komutator $[A,B]$ jest przemienny z $(A+B)$.

Mamy więc

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}} &= e^{\lambda G_5}\mathcal{E} = e^{\lambda at\partial_x + \lambda\frac{i}{2}x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}}\mathcal{E} = e^{\lambda at\partial_x} e^{\lambda\frac{i}{2}x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{i}{2}\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}}\mathcal{E} = e^{\lambda at\partial_x} e^{\lambda\frac{i}{2}x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{i}{2}}\mathcal{E} =\\ &= e^{-i\frac{\lambda^2}{4}} e^{\lambda at\partial_x} e^{\lambda\frac{i}{2}x\mathcal{E}\partial_{\mathcal{E}}}\mathcal{E} = e^{-i\frac{\lambda^2}{4}} e^{\lambda at\partial_x} e^{\lambda\frac{i}{2}x}\mathcal{E} = \mathcal{E}e^{-i\frac{\lambda^2}{4}} e^{\lambda^2 at\frac{i}{2}} e^{\lambda\frac{i}{2}x} =\\ &= \mathcal{E}e^{-i\frac{\lambda^2}{4}} e^{i\frac{\lambda}{2}(\lambda at+x)}\end{aligned}$$

Zatem G_5 generuje przekształcenie

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= e^{\lambda G_5}t = t\\ \tilde{x} &= e^{\lambda G_5}x = x + \lambda at \qquad (44)\\ \tilde{\mathcal{E}} &= e^{\lambda G_5}\mathcal{E} = \mathcal{E}e^{-i\frac{\lambda^2}{4}} e^{i\frac{\lambda}{2}(\lambda at+x)}\end{aligned}$$

opisujące propagację z prędkością λa z jednoczesną zmianą pola $\mathcal{E}$ o czynnik fazowy zależny liniowo od czasu i położenia.

5. Podsumowanie

Wyznaczyliśmy pięć generatorów (34) rozpinających algebrę Liego grupy symetrii równania (1), związki przemienności (38) między tymi generatorami oraz odpowiadające im jednoparametrowe podgrupy przekształceń (39), (40), (41), (42) i (44), z których można skonstruować dowolne przekształcenie symetrii równania NLS (1). Dostarczyliśmy w ten sposób materiału porównawczego dla pracy [3]. Grupa symetrii zmodyfikowanego równania NLS jest uboższa niż dla równania (1): nie występuje generator G_5 [3].

Bardzo szczegółowo została przeanalizowana procedura zespolonego uogólnienia formalizmu Owsiannikowa. Zaproponowano metodę zgodną z ogólną ideą teorii Owsiannikowa rozszerzania przestrzeni zmiennych.

Należy jeszcze wyjaśnić sprawę pozornego paradoksu, o którym była mowa we wstępie. Przedstawiona metoda wyznaczania generatorów (34) pokazuje, że nie wolno położyć $b = 0$. Z faktu, iż $b \neq 0$ korzystaliśmy w istotny sposób przy przejściu od równania (16) do układu równań (17). Dla $b = 0$ odpadły by równania (17f), (17g), (17h). Zatem b może być dowolne (wynik (34) nie zależy od b) pod warunkiem jednak, że $b \neq 0$.

Niezależność generatorów (34) od wartości współczynnika b dość łatwo zrozumieć. Ponieważ postać członu nieliniowego w równaniu (1) w tak zasadniczy sposób różni się od reszty tego równania, więc zachowanie postaci równania (1) przy przekształceniach symetrii (2) jest możliwa tylko przy jednoczesnym i niezależnym od siebie zachowaniu postaci obu części równania (1) przy tych przekształceniach. Skoro zachowana jest postać obu składników równania (1), to wartość stałego współczynnika przy jednym z nich jest nieistotna. Tylko musi on być różny od zera, żeby w ogóle ten składnik wystąpił i ograniczył dopuszczalne przekształcenia symetrii.

Literatura

1. R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris, Solitons and Nonlinear Waves, Academic Press, NY 1982
2. G.B. Witham, Linear and Nonlinear Waves, Wiley, NY 1974
3. J. Zawistowski, Praca IPPT nr 11/1991: Wyznaczenie symetrii zmodyfikowanego równania NLS dla plazmy.
4. M. Tajiri, J.Phys.Soc.Japan 52, No 6, 1908, (1983)
5. G.W. Bluman, S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Springer, NY 1989
6. J. Zawistowski, Praca IPPT nr 23/1992: Zastosowanie teorii grup do równań różniczkowo-całkowych fizyki plazmy.
7. D.H. Sattinger, O.L. Weaver, Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics, Springer, NY 1986

Spis treści