

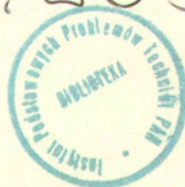
PRACA DOKTORSKA

Dariusz Burak

**PROPAGACJA SOLITONÓW PRZESTRZENNYCH
GENEROWANYCH WIĄZKAMI GAUSSA
W NIELINIOWYM OŚRODKU KERRA**

9/1995

P. 269



WARSZAWA 1995

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 lutego 1995 r.

Praca doktorska

recenzenci – Prof. dr hab. Jan Petykiewicz
Doc. dr hab. Andrzej Turski

promotor – Doc. dr hab. Wojciech Nasalski



56600



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 5,65 Ark. druk. 7,0
Oddano do drukarni w lutym 1995 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

Spis treści

I	Wstęp	6
II	Pojęcia podstawowe	11
1	Paraboliczne równanie propagacji – wiązki Gaussa–Hermita	11
2	Nieliniowe równanie Schrödingera (NSE)	17
3	Równania Zagadnienia Rozpraszania Odwrotnego (IST)	19
4	Rozwiązania jedno- i dwusolitonowe	26
5	Prawa zachowania związane z NSE	29
III	Propagacja podstawowej wiązki Gaussa w ośrodku Kerra	31
6	Problem propagacji nieliniowej	31
7	Wyznaczenie progów generacji solitonów dowolnego rzędu	34
	A Pobudzenie wiązką Gaussa	34
	B Pobudzenie wiązką <i>sech</i>	35
8	Parametry solitonu w granicy $\eta \ll 1$	36
9	Parametry solitonów dla nieskolimowanych wiązek Gaussa	39
10	Propagacja w nieliniowym ośrodku Kerra	51
IV	Opis wariacyjny problemu propagacji nieliniowej	55
11	Metoda wariacyjna	55

12	Równania Eulera–Lagrange dla podstawowej wiązki Gaussa	58
13	Wyznaczenie parametrów solitonu w metodzie wariacyjnej	61
	A Linearyzacja równań propagacji	62
	B Przybliżenie braku pola promieniowania	65
	C Przypadki graniczne	65
14	Opis wariacyjny propagacji – porównanie z IST i SSFFT	67
	A Procedura linearyzacji vs. IST	68
	B Przybliżenie braku pola promieniowania vs. IST	70
	C Propagacja nieliniowa – porównanie z metodą SSFFT	74
V Propagacja nieliniowa wiązek Gaussa–Hermita drugiego rzędu		78
15	Wyznaczenie parametrów generowanych solitonów	79
16	Opis wariacyjny zagadnienia propagacji	86
VI Podsumowanie		96
DODATKI		98
A	Metoda Split–Step FFT	98
B	Numeryczna implementacja IST	99

Streszczenie

W pracy przeanalizowano propagację jasnych solitonów przestrzennych (rzędu pierwszego i drugiego) generowanych wiązkami Gaussa–Hermita rzędu podstawowego i drugiego, w nieliniowym ośrodku Kerra. Wyznaczono numerycznie zależność parametrów pobudzanych solitonów od parametrów początkowych wiązek Gaussa–Hermita. Przy pobudzeniu podstawową wiązką Gaussa wyznaczono analitycznie amplitudy progowe do generacji solitonu dowolnego rzędu. Stwierdzono samoogniskowanie wiązek początkowych w polu bliskim, natomiast w polu dalekim formowanie się wiązek solitonowych. Wyznaczono parametry podstawowej wiązki Gaussa niezbędne do jej samopułapkowania w ośrodku Kerra (propagacji bez zmiany kształtu) oraz do maksymalnej konwersji mocy do wiązki solitonowej. Przy pobudzeniu ośrodka Kerra wiązką Gaussa–Hermita rzędu drugiego możliwa jest generacja jedynie parzystej liczby solitonów. W tym przypadku, poniżej amplitudy progowej wiązka początkowa ulega nieliniowej dyfrakcji, powyżej wartości progowej generowane są dwa solitony propagujące się symetrycznie w kierunkach od osi propagacji układu współrzędnych. Względny kąt propagacji solitonów maleje ze wzrostem amplitudy początkowej wiązki, aż do uformowania się solitonu pulsującego. Rozwinięto wariacyjne przybliżenie propagacji nieliniowej wiązek Gaussa–Hermita rzędu zerowego i drugiego. Znalaziono postać solitonu w przybliżeniu wariacyjnym wiązki Gaussa podstawowego rzędu. Analitycznie wyznaczono przybliżone parametry solitonu rzędu pierwszego generowanego przez wiązkę Gaussa. Przedyskutowano zgodność przybliżenia propagacji w ujęciu wariacyjnym z dokładnym (numerycznym) rozwiązaniem równania propagacji. Pokazano, że propagacja solitonów rzędu drugiego może być dobrze przybliżana przez propagację wiązek Gaussa–Hermita drugiego rzędu z wariacyjnie wyznaczonymi parametrami.

Część I

Wstęp

Istnienie samoprowadzących się wiązek pola elektromagnetycznego (self-guided beams) zostało przewidziane teoretycznie przez Chiao, Garmire i Townesa dokładnie przed trzema dekadami [1]. Są to takie wiązki, których dyfrakcja jest równoważona przez indukowaną nieliniowo refrakcję. Z matematycznego punktu widzenia, samoprowadzona wiązka, lub soliton przestrzenny (spatial soliton), jest rozwiązaniem (przybliżonym) równań Maxwella w ośrodku, w którym współczynnik załamania zależy od natężenia wiązki (ośrodek Kerra) [2,3]. Z perspektywy fizycznej natomiast, soliton przestrzenny jest liniowym modem światłowodu indukowanego przez ten soliton w ośrodku nieliniowym [4–9]. Zasadniczo, istnieją dwa rodzaje solitonów przestrzennych: jasne (bright) [2] i ciemne (dark) [3]. Jasny soliton ma postać zlokalizowanego obszaru pola elektromagnetycznego o dużym natężeniu, w kontraście do eksponencjalnie zanikającego tła. Ciemny soliton jest to zlokalizowany ciemny obszar (brak pola elektromagnetycznego) otoczony względnie jasnym regionem o nieskończonym rozmiarze (w modelu matematycznym). Jasne solitony propagują się w materiałach z samoogniskującymi nieliniowościami (współczynnik załamania ośrodka rośnie ze wzrostem natężenia pola oraz sieć krystaliczna materiału ma środek symetrii [10]), natomiast ciemne solitony propagują się w materiałach rozogniskowujących [11] (współczynnik załamania maleje ze wzrostem natężenia). W przypadku nieliniowości ogniskującej (rozważanej w niniejszej pracy) trójwymiarowa ($2 + 1$) propagacja wiązki laserowej jest niestabilna ze względu na zjawisko samoogniskowania pola [12]. Jednakże w przypadku dużych natężeń pola elektromagnetycznego materiał nieliniowy wykazuje nasycenie w wartości współczynnika załamania. Uwzględnienie tego efektu prowadzi do istnienia stabilnych analitycznie fal solitonowych (solitary waves) [5] w przypadku propagacji trójwymiarowej. Z nieliniowością typu Kerra, stabilne analitycznie rozwiązania równania propagacji związane są z symetrią planarną – propagacja ma charakter pseudodwuwymiarowy ($1 + 1$). W tym przypadku stabilne rozwiązania

równania propagacji mają postać solitonów jasnych [2] lub ciemnych [3], w zależności od charakteru nieliniowości (wpływ nasycenia nieliniowości na rozwiązania solitonowe był dyskutowany np. w [13] dla jasnych solitonów i w [14] dla solitonów ciemnych). Głównym obecnie powodem zainteresowania solitonami jest możliwość konstrukcji przełączników optycznych z zastosowaniem do przetwarzania sygnałów [15].

Niniejsza praca, poświęcona pobudzeniu i propagacji jasnych solitonów przestrzennych w pseudodwuwymiarowych strukturach planarnych $(1 + 1)$, stanowi dokumentację etapu szerszych badań przeprowadzonych przez autora w dziedzinach optyki nieliniowej [16–23] i fotoniki [24–32]. W opracowaniu podsumowano wyniki najnowszych badań [16–21], sprawdzające się w pierwszym rzędzie do opisu propagacji nieliniowej w terminach rozwiązań odpowiadających propagacji liniowej. Badania te sprowadzają się do znalezienia ścisłych (analitycznych lub numerycznych) rozwiązań nieliniowego równania propagacji z zadaniem (gaussowskim) warunkiem początkowym [16–18] a następnie określeniu optymalnego, przybliżonego rozwiązania (wiązki Gaussa–Hermita z argumentem zespolonym) w oparciu o równanie opisujące propagację w ośrodku liniowym [19–21]. Chodzi tu przede wszystkim o rozwinięcie wygodnych, (przybliżonych) metod analitycznych do badania złożonych matematycznie problemów optyki nieliniowej [33–35] i fotoniki [36,37]. Badania te mają podstawowe znaczenie dla rozwoju w pełni optycznych (all-optical) technik przetwarzania sygnałów i telekomunikacji, szczególnie w kontekście ostatnich, spektakularnych osiągnięć w tych dziedzinach: zbudowaniu optycznego komputera w OCSC, University of Colorado at Boulder, konstrukcji 32-bitowego, programowalnego optoelektronicznego komputera w OptiComp Corporation, Lake Tahoe, Nevada, oraz transmisji solitonowej z szybkością 100 Gb/s, przeprowadzonej w NTT, Japonia.

Z metodologicznego punktu widzenia, w pracy rozważane są dwa problemy. Pierwszy z nich związany jest ze ścisłym rozwiązaniem nieliniowego równania propagacji z zadaniem warunkiem początkowym w postaci funkcji Gaussa–Hermita rzędu zerowego (Część III) i drugiego (Rozdział 15). Posłużono się tutaj znanymi z literatury metodami analitycznymi (IST) i numerycznymi (SSFFT). Problem drugi sprowadza się do znalezienia analitycznego

przybliżenia rozwiązania ścisłego. Zaproponowano tutaj użycie wiązek Gaussa–Hermita z argumentem zespolonym, rzędu zerowego (Część IV) i drugiego (Rozdział 16), do modelowania nieliniowej propagacji – parametry wiązek wyznaczone z metody wariacyjnej.

Praca składa się z czterech części merytorycznych. W Części II zebrano podstawowe, znane z literatury [34,38–43] informacje o rozwiązaniach równania propagacji w ośrodku liniowym – wiązkach Gaussa–Hermita z argumentem zespolonym. Zbadano własności przybliżenia przyosiowego w nieliniowym ośrodku Kerra. Wyprowadzono nieliniowe równanie Schrödingera (NSE) oraz opisano metodę znajdowania jego ścisłych rozwiązań – Zagadnienie Rozpraszania Odwrotnego (IST). Podano przykłady rozwiązań ogólnych oraz przedyskutowano prawa zachowania związane z nieliniową propagacją.

Propagacja jasnych solitonów przestrzennych pobudzonych podstawową wiązką Gaussa badana jest w sposób ścisły w Części III [16–18]. Problem wyznaczenia parametrów solitonów (tzn. ich amplitud, szerokości, kątów propagacji) sprowadza się zasadniczo do rozwiązania tzw. zagadnienia rozpraszania prostego w metodzie IST. Tego typu podejście do badania propagacji nieliniowej wiązek Gaussa nie było dotychczas analizowane w literaturze (o ile jest to wiadome autorowi). Metoda ta pozwala wyznaczyć w sposób ścisły parametry rozwiązania w polu dalekim. W szczególności, możliwe jest podanie charakterystyki efektywności pobudzenia solitonów, poprzez badanie stosunku mocy prowadzonej w wiązkach solitonowych do mocy wiązki początkowej. Najistotniejszym jakościowym wynikiem Części III jest stwierdzenie niewielkich różnic ilościowych pomiędzy pobudzeniem ośrodka Kerra wiązkami: *sech* (odpowiadającej analitycznemu, asymptotycznemu rozwiązaniu NSE) i Gaussa (rozwiązanie równania propagacji w ośrodku liniowym), w zakresie propagacji solitonu pierwszego rzędu. W analogii do wyników znanych z teorii solitonów [44] stwierdzono: oscylacyjny charakter propagacji wiązki w polu bliskim i formowanie się solitonu przestrzennego w polu dalekim, liniową zależność amplitudy generowanych solitonów od amplitudy początkowej wiązki Gaussa, występowanie zjawiska samopułapkowania wiązki początkowej, możliwość generacji solitonów z niemal 100% efektywnością. W celu badania propagacji wiązki w polu bliskim opracowano dwie metody numeryczne: standardową Split-Step FFT,

oraz nową w literaturze [17] implementację metody IST, opisane odpowiednio w Dodatkach A i B. Praktyka pokazała, że metoda SSFFT pozwala uzyskać dokładne wyniki przy stosunkowo niskim koszcie numerycznym, natomiast numeryczna implementacja IST (zwłaszcza zagadnienia rozpraszania prostego) pozwala otrzymać pełną (i czytelną z fizycznego punktu widzenia) informację o rozwiązaniach solitonowych.

Część IV pracy zawiera przybliżoną analizę propagacji nieliniowej w ujęciu wariacyjnym [19,21]. W ośrodku liniowym rozwiązanie równania propagacji ma postać wiązki zbieżnej (przed talią) lub rozbieżnej (w przeciwnym przypadku). Z drugiej strony, solitony przestrzenne są rozwiązaniami przybliżonego równania falowego w ośrodku, gdzie nieliniowo indukowana zmiana współczynnika załamania jest mała w stosunku do współczynnika załamania bez obecności pola. Pozwala to przypuszczać, że rozwiązania w ośrodku liniowym i nieliniowym nie będą się znacznie od siebie różniły: zarówno propagacja nieliniowa jak i liniowa charakteryzują się podobnymi ilościowo zmianami krzywizny frontu falowego i szerokości wiązki. Z tego względu przyjęto, że propagacja solitonu rzędu pierwszego może być przybliżona przez propagację podstawowego rozwiązania w ośrodku liniowym, tzn. wiązki Gaussa, ale ze zmienionymi parametrami określonymi przez procedurę wariacyjną. Uzyskane wyniki potwierdziły zasadność tego założenia. Podobnie jak w teorii solitonów, przybliżenie składowej solitonowej pola całkowitego wyznaczono z warunku stałości parametrów rozwiązania (tzn. z punktów krytycznych wariacyjnych równań propagacji). Zaproponowano dwie niezależne metody wyznaczenia amplitud solitonu w przybliżeniu wariacyjnym. Uzyskano analityczne przybliżenie na stosunek efektywności pobudzenia solitonów, otrzymany numerycznie w Części III. W połączeniu z wynikami IST, podano pełną, analityczną charakterystykę rozwiązania solitonowego generowanego wiązką Gaussa, w zakresie propagacji solitonu pierwszego rzędu. Przedyskutowano zakresy zgodności przybliżonego rozwiązania wariacyjnego z dokładnym (numerycznym) rozwiązaniem NSE.

Część V pracy rozwija analogię pomiędzy rozwiązaniami NSE i liniowego równania propagacji na przykład rozwiązań wyższych rzędów [20]. Pokazano, że pobudzenie ośrodka Kerra wiązką Gaussa-Hermita rzędu drugiego, generuje solitony jedynie rzędów parzystych. W

zależności od amplitudy wiązki początkowej, solitony propagowały się w różnych, symetrycznych względem pobudzenia kierunkach, albo tworzyły rozwiązanie związane (tzw. breather soliton – soliton pulsujący). Wariacyjne przybliżenie rozwiązań wiązką Gaussa–Hermita rzędu drugiego z zespolonym argumentem pozwoliło bardzo dokładnie określić amplitudę progową do powstania solitonu typu breather. Porównanie numerycznego rozwiązania wariacyjnych równań propagacji z dokładnym (numerycznym) rozwiązaniem NSE pokazało bardzo dobrą zgodność dla amplitud pobudzających mniejszych od progę generacji solitonu pulsującego. Szczególnie dobrą zgodność uzyskano w przypadku modelowania propagacji wiązki, gdy w widmie zagadnienia rozpraszania prostego w metodzie IST nie występowały rozwiązania solitonowe.

Aktualność i waga zagadnienia nieliniowej propagacji związana jest obecnie z problemami konstrukcji fotonicznych przełączników solitonowych [15]. Szczególne znaczenie ma tu rozwijanie metod przybliżonych analizy propagacji i oddziaływania pomiędzy solitonami, szczególnie w przypadkach, dla których nie istnieje ścisła metoda IST. Zastosowanie czysto numerycznych metod analizy problemu ograniczone jest często przez złożoność zagadnienia, a tym samym przez znaczne zużycie czasu i pamięci komputera. Co więcej, numeryczne metody nie zapewniają globalnego zrozumienia fizyki problemu. Niezbędne jest zatem rozwijanie analitycznych metod przybliżonych, takich jak metoda wariacyjna, w celu skompensowania braku wyników dokładnych. Wydaje się, że rozwinięte w Samodzielnej Pracowni Fotoniki i Nieliniowej Optyki sformułowanie propagacji nieliniowej w terminach wiązek Gaussa–Hermita z zespolonym argumentem, jest z jednej strony dobrym, a z drugiej wystarczająco prostym, przybliżeniem rzeczywistości, umożliwiającym otrzymanie wartościowych wyników.

Obliczenia numeryczne przedstawione w pracy wykonane zostały na komputerach: Sparc Center 2000, pracującym w systemie SOLARIS 2.3 oraz IBM PC 486, pracującym w systemie LINUX. Poprawność obliczeń analitycznych sprawdzana była przy pomocy programu MATHEMATICA. Praca została złożona przy użyciu pakietu RevTeX

Część II

Pojęcia podstawowe

W tej części pracy podane zostaną pojęcia niezbędne do przeprowadzenia analizy propagacji solitonów przestrzennych w ośrodku Kerra. Wprowadzone zostaną przybliżenia równań Maxwella, prowadzące do rozwiązań w postaci wiązek o gaussowskim rozkładzie amplitudy w kierunku prostopadłym do kierunku propagacji w ośrodku linowym (Rozdz. 1), oraz parabolicznego równania propagacji (w przybliżeniu przyosiowym) w ośrodku nieliniowym (Rozdz. 2). Podana zostanie ogólna metoda znajdowania rozwiązań nieliniowego równania propagacji (Rozdz. 3), postać rozwiązań jedno- i dwusolitonowych (Rozdz. 4), oraz prawa zachowania związane z nieliniową propagacją (Rozdz. 5).

1. PARABOLICZNE RÓWNANIE PROPAGACJI – WIĄZKI GAUSSA-HERMITA

Propagacja fali elektromagnetycznej o częstotliwości drgań harmonicznycch ω w izotropowym dielektryku o przenikalnościach: dielektrycznej ośrodka ε i próżni ε_0 oraz magnetycznej ośrodka μ i próżni μ_0 , opisywana jest równaniami Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu\mathbf{H}, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\mathbf{E} + \mathbf{j}, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot (\mu\mathbf{H}) = 0, \quad (1.1d)$$

gdzie \mathbf{E} i \mathbf{H} oznaczają niezależne od czasu amplitudy pól elektrycznego i magnetycznego, σ – przewodnictwo ośrodka, ρ i \mathbf{j} – gęstości ładunku i prądu elektrycznego. Przyjęto harmoniczną

zależność pól od czasu postaci $\exp(-i\omega t)$. Zakładając że ośrodek jest bezstratny ($\sigma = 0$), brak prądów ($\mathbf{j} = 0$) i ładunków ($\rho = 0$) oraz na mocy tożsamości wektorowej

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} , \quad (1.2)$$

sprowadza się równania (1.1a)-(1.1b) opisujące propagację pola elektrycznego do

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -\mu_0(\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \epsilon_0 \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \epsilon) , \quad (1.3)$$

gdzie liczba falowa w ośrodku wyraża się przez

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} . \quad (1.4)$$

Prawą stroną równania (1.3) można zaniedbać przy założeniu wolnozmiennych stałych ośrodka na odcinku rzędu długości fali ($\nabla \epsilon / \epsilon \ll k$, $\nabla \mu / \mu \ll k$) [37]. W dalszym ciągu rozpatrywana będzie propagacja wiązek TE o polaryzacji liniowej ($\mathbf{E} = (0, E, 0)$) o jednorodnym rozkładzie pola w kierunku osi y . Przy tych założeniach otrzymuje się z równania (1.3) dwuwymiarowe skalarne równanie Helmholtza

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + k^2 E = 0 , \quad (1.5)$$

gdzie liczba falowa k jest w ogólności funkcją współrzędnych x' i z' . Zakładając wolnozmiennosc amplitudy pola w kierunku osi propagacji z' , tzn. przyjmując postać pola elektrycznego w postaci iloczynu wolnozmienniej amplitudy $V(x', z')$ i szybkozmiennego czynnika fazowego $e^{i\beta z'}$

$$E(x', z') = V(x', z') \times \exp(i\beta z') , \quad (1.6)$$

sprowadza się równanie (1.5) do parabolicznego równania propagacji

$$2i\beta \frac{\partial V}{\partial z'} + \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + (k^2 - \beta^2)V = 0 , \quad (1.7)$$

przy spełnieniu warunku wolnozmiennosci amplitudy w postaci

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} \right| \ll \left| \beta \frac{\partial V}{\partial z'} \right| . \quad (1.8)$$

Należy podkreślić dwa aspekty fizyczne przybliżeń prowadzących do parabolicznego równania propagacji (1.7). Pierwszy sprowadza się do faktu, że przybliżenie wolnozmiennnej amplitudy w ośrodku nieliniowym zaniedbuje fale mogące generować się i propagować w kierunku wstecznym do kierunku propagacji, tak jak zostało to pokazane w monografii [33]. Aspekt drugi związany jest z przybliżeniem przyosiowym. Jak zostanie pokazane, równanie (1.7) prowadzi do zlokalizowanych w kierunku prostopadłym do kierunku propagacji rozwiązań. Na mocy równania (1.1c) (w liniowym, izotropowym ośrodku bez ładunków) założenie poprzecznej polaryzacji liniowej pola jest w sprzeczności z ograniczonością poprzecznego przekroju wiązki. Innymi słowy, rozwiązanie równania (1.7) nie jest rozwiązaniem równań Maxwella. Problem ten został po raz pierwszy przedstawiony w pracy [46], natomiast w przypadku ośrodka z nieliniowością typu Kerra zostanie omówiony w Rozdziale 2.

W celu znalezienia rozwiązań równania (1.7) w jednorodnym ośrodku przyjmuje się stałą propagacji w ośrodku liniowym: $\beta = k_0 n_0$. Definiując najmniejszą szerokość wiązki (w tali wiązki) w_0 jako odległość mierzoną w kierunku poprzecznym (do kierunku propagacji) na której natężenie wiązki maleje e^{-1} razy, można wprowadzić przeskalowane zmienne x i ζ [34]

$$x = x'/w_0, \quad \zeta = z'/z_F, \quad (1.9)$$

gdzie współrzędna z' została przeskalowana przez parametr dyfrakcyjny (zwany dalej podwojonym zasięgiem Rayleigha lub Fresnela) z_F

$$z_F = \beta w_0^2. \quad (1.10)$$

W teorii laserów [38] pokazuje się, że skolimowana wiązka o szerokości w_0 propaguje się z prawie płaskimi frontami falowymi na odcinku $z_F/2$, po czym zaczyna ulegać dyfrakcji i jej szerokość zwiększa się.

Przy wprowadzonych oznaczeniach równanie (1.7) sprowadza się do

$$i \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \quad (1.11)$$

Rozwiązanie równania (1.11) w postaci wiązki Gaussa zerowego rzędu uzyskuje się poprzez przyjęcie gaussowskiego rozkładu pola w płaszczyźnie początkowej $\zeta = 0$

$$V(x, 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad (1.12)$$

gdzie A jest amplitudą pola. Transformata Fouriera warunku początkowego

$$\mathcal{F}\{V(x, 0)\}(k) \equiv \mathcal{V}(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x, 0)e^{-ikx} dx, \quad (1.13)$$

pozwała zapisać rozwiązanie równania (1.11) w przestrzeni transformaty Fouriera jako

$$\mathcal{V}(k, \zeta) = \mathcal{V}(k, 0) \times \exp\left(-\frac{1}{2}ik^2\zeta\right). \quad (1.14)$$

Odwrotna transformata Fouriera rozwiązania (1.14) daje rozwiązanie równania propagacji (1.11) z warunkiem początkowym (1.12)

$$V(x, \zeta) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{V}(k, \zeta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}(k, \zeta)e^{ikx} dk. \quad (1.15)$$

Wykonanie całkowania w rów. (1.15) prowadzi do

$$V(x, \zeta) = \frac{A}{v(\zeta)} \exp\left(-\frac{x^2}{2v^2(\zeta)}\right), \quad (1.16)$$

gdzie zespolona szerokość wiązki dana jest przez

$$v(\zeta) = \sqrt{1 + i\zeta}. \quad (1.17)$$

Rozwiązanie (1.16) jest funkcją rzeczywistą jedynie w talii wiązki: $\zeta = 0$. Wprowadza się [34] alternatywną postać zapisu wiązki Gaussa poprzez zdefiniowanie promieni przekrojów: poprzecznego $w(\zeta)$ i krzywizny frontu falowego $\mathcal{R}(\zeta)$ wiązki

$$v^{-2} = w^{-2} - iz_F \mathcal{R}^{-1}, \quad (1.18a)$$

gdzie

$$w(\zeta) = vv^* = \sqrt{1 + \zeta^2}, \quad (1.18b)$$

$$\mathcal{R}(\zeta) = z_F |v|^4 / \zeta = z_F (\zeta + \zeta^{-1}). \quad (1.18c)$$

Dodatkowo, człon $1/v(\zeta)$ w rozwiązaniu (1.16) modyfikuje fazę wiązki θ na osi ($x = 0$):

$$\exp(-i\theta/2) = \sqrt{v^*/v}, \quad (1.18d)$$

gdzie $\theta = \arctg(\zeta)$. Pozwala to na zapisanie wiązki Gaussa (1.16) w postaci

$$V(x, \zeta) = \frac{A}{\sqrt{w}} \exp \left[-\frac{x^2}{2w^2} - \frac{i}{2} \left(\theta - \frac{z_F x^2}{R} \right) \right]. \quad (1.19)$$

Jak wynika z (1.19) wiązka Gaussa ulega dyfrakcji w trakcie propagacji w ośrodku liniowym: jej promień przekroju poprzecznego rośnie, amplituda maleje zaś promień krzywizny frontu falowego jest nieskończony w talii (płaska wiązka), następnie maleje do minimalnej wielkości $2z_F$ dla $\zeta = \pm 1$ (wiązka ma maksymalną krzywiznę frontu falowego), a następnie rośnie do nieskończoności (front falowy wiązki wypłaszcza się). Ujemnemu (dodatniemu) ζ odpowiada ujemny (dodatni) promień krzywizny frontu falowego \mathcal{R} , oznaczający wiązkę zbieżną w kierunku talii (rozbieżną, propagującą się od talii).

Rozwiązanie (1.16) jest podstawowym rozwiązaniem gaussowskim równania propagacji (1.11) w ośrodku liniowym. Oprócz niego istnieje nieskończenie wiele rozwiązań które są generowane z funkcji (1.16) przy użyciu operatorów różniczkowych komutujących z operatorem parabolicznego równania propagacji (1.11), tzn. z operatorem $[\partial/\partial\zeta + \partial^2/\partial x^2]$ [39]. Wiązki Gaussa-Hermita wyższych rzędów [40,41,38] uzyskuje się poprzez n -krotne zróżniczkowanie rozwiązania podstawowego [42,43]

$$V_n(x, \zeta) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} V(x, \zeta). \quad (1.20)$$

W tej pracy rozważana będzie szczegółowo nieliniowa propagacja wiązek zerowego rzędu (1.16) oraz wiązek rzędu drugiego ($n = 2$)

$$V_2(x, \zeta) = \frac{A_0}{v^3(\zeta)} \times H_2\left(\frac{x}{v(\zeta)}\right) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2v^2(\zeta)}\right), \quad (1.21)$$

$$H_2\left(\frac{x}{v(\zeta)}\right) = -1 + \left(\frac{x}{v(\zeta)}\right)^2.$$

W ogólności, równanie własne definiujące wielomiany Hermita z zespolonym argumentem $H_n(x/v(\zeta))$ otrzymuje się z podstawienia postaci rozwiązania

$$V_n(x, \zeta) = \frac{1}{v^{n+1}(\zeta)} H_n\left(\frac{x}{v(\zeta)}\right) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2v^2(\zeta)}\right), \quad (1.22)$$

do równania propagacji (1.11), co, przy uwzględnieniu postaci zespolonej szerokości $v(\zeta)$ (1.17), prowadzi do

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{x}{v(\zeta)} \frac{d}{dx} + n\right] H_n\left(\frac{x}{v(\zeta)}\right) = 0. \quad (1.23)$$

Funkcje V_n są tworzą układ funkcji zupełnych [40], biortogonalnych w talii wiązek ($\zeta = 0$) [38]. Biortogonalność oznacza że, spełniona jest następująca relacja ortogonalności

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_n(x, \zeta) H_m(x/v^*(\zeta)) dx = C_{nm} \delta_{nm}, \quad (1.24)$$

gdzie C_{nm} jest stałą całkowania (człon gaussowski występuje jedynie w funkcji $V_n(x, \zeta)$). Należy w tym miejscu podkreślić, że nie jest stosowana normalizacja współczynników C_{nm} . Wynika to z tego, że ośrodku nieliniowym nie jest w ogólności spełniona relacja ortogonalności (1.24), w związku z czym ortonormalizacja układu (1.20) nie ma tu większego znaczenia.

Relacja (1.24) prowadzi do ciekawej własności funkcji $V_n(x, \zeta)$. Podstawowy wielomian Hermita $m = 0$: $H_0(x/v^*(\zeta)) = 1/v^*(\zeta)$, jest niezależny od zmiennej x , co sprowadza warunek (1.24), w talii wiązek ($\zeta = 0$), do postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_n(x, 0) dx = 0, \quad (1.25)$$

dla dowolnego $n \geq 1$. Warunek ten będzie odpowiedzialny za specyficzny sposób generacji solitonów przestrzennych wyższych rzędów wiązkami Gaussa-Hermita rzędu drugiego (1.21).

W Rozdziale tym ograniczono się jedynie do podania najistotniejszych (z punktu widzenia nieliniowej propagacji) faktów z bogatej teorii wiązek Gaussa-Hermita z argumentem zespolonym. Pełniejsze przedstawienie zagadnienia generacji i propagacji pola elektromagnetycznego o gaussowskim rozkładzie amplitudy można znaleźć np. w monografiach [38,34,45].

2. NIELINIOWE RÓWNANIE SCHRÖDINGERA (NSE)

Współczynnik załamania ośrodka n może być w ogólności funkcją współrzędnych. W przypadku nieliniowości typu Kerra współczynnik załamania jest zależy od natężenia fali elektromagnetycznej

$$n = n(x', z', F(|E(x', z')|^2)) = n_0(x', z') + n_2|E(x', z')|^2, \quad (2.1)$$

gdzie n_2 jest małe w porównaniu z n_0 : $n_2|E|^2 \ll n_0$. Równanie falowe opisujące propagację nieliniową wiązek w ośrodku Kerra uzyskuje się z równania (1.7) poprzez przyjęcia stałej propagacji β w ośrodku liniowym: $\beta = n_0 k_0$. Wprowadzając przeskalowanie wolnozmiennnej amplitudy pola

$$U(x, \zeta) = k_0 w_0 \sqrt{n_0 n_2} V(x, \zeta) \quad (2.2)$$

uzyskuje się bezwymiarowe nieliniowe równanie Schrödingera (NSE – nonlinear Schrödinger equation)

$$i \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |U|^2 U = 0. \quad (2.3)$$

Jak zostało wspomniane wyżej, rozwiązanie NSE (2.3) nie jest ścisłym rozwiązaniem równań Maxwella (1.1). Równanie Helmholtza (1.5) przyjmuje w ośrodku Kerra postać

$$\frac{1}{2z_F^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + i \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + |U|^2 U = 0, \quad (2.4)$$

gdzie amplituda pola jest sumą składowej transwersalnej U_T i podłużnej U_C

$$U(x, \zeta) = U_T(x, \zeta) + U_C(x, \zeta). \quad (2.5)$$

Przyjmując że szerokość wiązki jest dostatecznie duża w stosunku do długości fali ($z_F = 2\pi w_0^2/\lambda \gg 1$), postuluje się [34] poprawność rozwinięcia składowych U_T i U_C w postaci szeregów potęgowych względem z_F^{-1}

$$U_T = \sum_{n=0}^{\infty} z_F^{-2n} U^{(2n)}, \quad (2.6a)$$

$$U_{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} z_F^{-(2n+1)} U^{(2n+1)}. \quad (2.6b)$$

z zadanymi warunkami brzegowymi

$$U^{(0)}(x, 0) = U(x, 0) \quad (2.7a)$$

$$U^{(n)}(x, 0) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.7b)$$

Na mocy (2.5) oraz (2.6) można (stosując przemienność mnożenia względem dodawania) uporządkować człon nieliniowy w rów. (2.4) względem ujemnych potęg z_F

$$|U|^2 U = \sum_{n=0}^{\infty} z_F^{-n} \sum_{k=0}^n U^{(n-k)} \sum_{l=0}^k U^{*(k-l)} U^{(l)}, \quad (2.8)$$

gdzie parzyste człony $U^{(2i)}$ reprezentują składową poprzeczną pola (2.6a) zaś człony nieparzyste $U^{(2i+1)}$ składową podłużną (2.6b). Wstawiając rozwinięcia (2.6) i (2.8) do równania Helmholtza (2.4) oraz porównując wyrazy przy tej samej parzystej potędze z_F^{-1} otrzymuje się równania

$$i \frac{\partial U^{(0)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial x^2} + |U^{(0)}|^2 U^{(0)} = 0, \quad (2.9)$$

$$i \frac{\partial U^{(2n)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^{(2n)}}{\partial x^2} + |U^{(0)}|^2 U^{(2n)} + \sum_{k=1}^{2n} U^{(2n-k)} \sum_{l=0}^k U^{*(k-l)} U^{(l)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^{(2n-2)}}{\partial \zeta^2}. \quad (2.10)$$

Zerowy człon rozwinięcia (2.5) spełnia nieliniowe równanie Schrödingera (2.3) i stanowi poprzeczny składnik wolnozmiennnej amplitudy pola. Przybliżenie przyosiowe pola całkowitego polega zatem na uwzględnieniu zerowego przybliżenia rozwiązania nieliniowego równania Helmholtza (2.4). Z warunków brzegowych (2.7) wynika, że przybliżenie przyosiowe rekonstruuje pole całkowite w sposób ścisły jedynie w płaszczyźnie początkowej $\zeta = 0$. Jak wynika z (2.10), w przybliżeniu przyosiowym jedynie składową zerowego rzędu jest rozwiązaniem równania nieliniowego – pozostałe składowe spełniają *liniowe* niejednorodne równania różniczkowe cząstkowe. Składową podłużną pola wyznaczona jest z warunku zerowania się dywergencji pola elektrycznego (1.1c)

$$\frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \zeta} + i\beta z_F U_{\zeta} + \frac{z_F}{w_0} \frac{\partial U_T}{\partial x} = 0, \quad (2.11)$$

gdzie przyjęto, dla uproszczenia, niezależność przenikalności dielektrycznej ośrodka ε od natężenia pola elektromagnetycznego. Podstawienie rozwinięć (2.6) do (2.11) prowadzi do następującego równania rekurencyjnego

$$\frac{\partial U^{(2n+1)}}{\partial \zeta} + i\beta z_F U^{(2n+3)} + \frac{z_F}{w_0} \frac{\partial U^{(2n+2)}}{\partial x} = 0. \quad (2.12)$$

Śladowa podłużna pola elektrycznego, która na mocy równania (1.1c) nie może być zerowa dla wiązek o skończonej szerokości, wnosi wkład do pola całkowitego w postaci sumy składników o nieparzystych potęgach z_F^{-1} . Paraboliczne nieliniowe równanie propagacji (2.3) jest zatem *dobrym* przybliżeniem rozwiązań ścisłego równania falowego (2.4) tylko dla wiązek szerokich, tzn. takich dla których stosunek w_0^2/λ jest duży: $w_0^2/\lambda \gg 1$.

3. RÓWNANIA ZAGADNIENIA ROZPRASZANIA ODWROTNEGO (IST)

Nieliniowe równanie Schrödingera (2.3) zostało rozwiązane w sposób ścisły przez Zakhara i Shabata [2] metodą zagadnienia rozpraszania odwrotnego (IST - inverse scattering transform). Metoda ta (rozwinięta i uogólniona przez Ablowitz, Newella, Kaupa i Segura - AKNS [47,48]) sprowadza się do rozpatrzenia układu równań

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{X}\mathbf{v}, \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{v}_{\zeta} = \mathbf{Z}\mathbf{v}, \quad (3.1b)$$

gdzie \mathbf{v} jest 2-wymiarowym wektorem zaś \mathbf{X} i \mathbf{Z} są 2×2 -wymiarowymi macierzami. Warunek zgodności układu równań (3.1), wynikający z warunku $\mathbf{v}_{x\zeta} = \mathbf{v}_{\zeta x}$, ma postać

$$\mathbf{X}_{\zeta} - \mathbf{Z}_x + [\mathbf{X}, \mathbf{Z}] = 0, \quad (3.2)$$

gdzie $[\mathbf{X}, \mathbf{Z}]$ oznacza komutator macierzy \mathbf{X} i \mathbf{Z} . Rozpatruje się układ równań różniczkowych definiujący macierz \mathbf{X} postaci

$$\frac{dv_1}{dx} = -i\lambda v_1 + i U(x, \zeta) v_2, \quad (3.3a)$$

$$\frac{dv_2}{dx} = i U^*(x, \zeta) v_1 + \lambda v_2. \quad (3.3b)$$

gdzie wartość własna $\lambda = \xi + i\eta$ jest w ogólności zespolona, zaś funkcja $U(x, \zeta)$ spełnia warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n |U(x, \zeta)| dx < \infty, \quad (3.4)$$

dla dowolnego n . Jeżeli macierz \mathbf{Z} zostanie określona przez

$$\frac{dv_1}{d\zeta} = i \left(-\lambda^2 + \frac{|U(x, \zeta)|^2}{2} \right) v_1 + \left(i\lambda U(x, \zeta) - \frac{1}{2} \frac{\partial U(x, \zeta)}{\partial x} \right) v_2, \quad (3.5a)$$

$$\frac{dv_2}{d\zeta} = \left(i\lambda U^*(x, \zeta) + \frac{1}{2} \frac{\partial U^*(x, \zeta)}{\partial x} \right) v_1 + i \left(\lambda^2 - \frac{|U(x, \zeta)|^2}{2} \right) v_2, \quad (3.5b)$$

to warunek (3.2) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $U(x, \zeta)$ spełnia nieliniowe równanie Schrödingera (2.3) (warunek zgodności (3.2) ma wtedy zera na przekątnej oraz równanie (2.3) i jego sprzężenie zespolone na pozaprzekątnej). Użyteczność metody IST sprowadza się do faktu, iż dla określonej macierzy \mathbf{X} można znaleźć taką postać macierzy \mathbf{Z} że warunek zgodności (3.2) sprowadza się do spełnienia określonego nieliniowego równania różniczkowego. W ten sposób rozwiązano równanie Kordeweg de-Vries (KdV) [50] (historycznie pierwsze równanie rozwiązane metodą IST), zmodyfikowane równanie KdV (mKdV) [51], równanie Sine-Gordona [52] i wiele innych, ważnych z fizycznego punktu widzenia, równań [49].

Sprzężenie zespolone układu równań (3.3) oraz zamiana kolejności wierszy pokazuje, że jeżeli $[v_1(\lambda, x, \zeta), v_2(\lambda, x, \zeta)]^T$ jest rozwiązaniem, to jest nim także wektor

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_2^*(\lambda^*, x, \zeta) \\ -v_1^*(\lambda^*, x, \zeta) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Z założenia o zanikaniu funkcji $U(x, \zeta)$ w nieskończonościach można określić funkcje własne $\varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi}$ zagdnienia (3.3) z następującymi warunkami brzegowymi dla λ rzeczywistego: $\lambda = \xi$ (gdzie $\lambda = \xi + i\eta$ jest wartością własną), dla $x \rightarrow -\infty$

$$\varphi \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\xi x), \quad \bar{\varphi} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(i\xi x), \quad (3.7a)$$

oraz dla $x \rightarrow +\infty$

$$\psi \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\xi x), \quad \bar{\psi} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\xi x). \quad (3.7b)$$

Z liniowej niezależności funkcji ψ i $\bar{\psi}$ (oraz φ i $\bar{\varphi}$) dla dowolnego x [2] wynika związek pomiędzy obydwooma układami funkcji własnych

$$\varphi = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi, \quad (3.8a)$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi}. \quad (3.8b)$$

Znak minus w równaniu (3.8b) wynika z faktu iż $\bar{\bar{v}} = -v$ (por. rów. (3.6)). Ablowitz i Segur [53] wykazali analityczność funkcji $e^{i\lambda x}\varphi(x)$ i $e^{i\lambda x}\psi(x)$ w górnej półpłaszczyźnie wartości własnych λ ($\eta > 0$) oraz $e^{-i\lambda x}\bar{\varphi}(x)$ i $e^{-i\lambda x}\bar{\psi}(x)$ w półpłaszczyźnie dolnej ($\eta < 0$), co pozwala na analityczne przedłużenie obszarów określoności rozwiązań równania (3.3) na odpowiednie półpłaszczyzny. Z podstawienia warunków początkowych (3.7b) do rów. (3.8a) można określić współczynniki $a(\lambda)$ i $b(\lambda)$ jako wartości funkcji φ w $x = +\infty$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\lambda) \exp(-i\lambda x) \\ b(\lambda) \exp(i\lambda x) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

które są analityczne w półpłaszczyźnie górnej ($\eta > 0$). W podobny sposób można określić współczynniki $\bar{a}(\lambda)$ i $\bar{b}(\lambda)$ (analityczne w półpłaszczyźnie dolnej), co po zastosowaniu zależności (3.6) prowadzi do

$$\bar{a}(\lambda) = a^*(\lambda^*), \quad \bar{b}(\lambda) = b^*(\lambda^*). \quad (3.10)$$

Równanie (3.8a) można przepisać w postaci

$$\frac{1}{a(\lambda)} \varphi = \bar{\psi} + r(\lambda)\psi, \quad r(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}. \quad (3.11)$$

Postać warunków brzegowych dla funkcji φ (3.7a) oraz ψ , $\bar{\psi}$ (3.7b) sugeruje interpretację ostatniego równania jako równania rozpraszania, gdzie funkcja $\bar{\psi}$ przedstawia pole padające, $r(\lambda)\psi$ pole odbite zaś $1/a(\lambda)\varphi$ pole przechodzące. Z tego też względu przyjęto w literaturze określać współczynniki $a(\lambda)$ i $b(\lambda)$ – współczynnikami rozpraszania (scattering coefficients), wielkość $r(\lambda)$ – współczynnikiem odbicia (reflection coefficient), zaś równanie (3.3) pozwalające znaleźć wielkości $a(\lambda)$ i $b(\lambda)$ – prostym zagadnieniem rozpraszania (DSP–direct scattering problem). Funkcja $U(x, \zeta)$ spełniająca NSE nosi, w ujęciu IST, nazwę potencjału rozpraszania (scattering potential).

Kolejnym krokiem logicznym w metodzie IST jest określenie ewolucji w kierunku osi ζ funkcji $\varphi(\lambda, x, \zeta)$, otrzymanej z rozwiązania zagadnienia prostego (3.3), oraz wynikającą stąd ewolucję współczynników rozpraszania $a(\lambda)$ i $b(\lambda)$. Ponieważ w ogólności nie jest znana postać potencjału rozpraszania $U(x, \zeta)$ (oraz $\partial U(x, \zeta)/\partial x$) występującego jako współczynnik zależny od ζ w macierzy \mathbf{Z} , to nie jest możliwe znalezienie rozwiązania układu równań (3.5) w postaci jawnej. Ponieważ jednak (z założenia) $U(x, \zeta)$ oraz $\partial U(x, \zeta)/\partial x$ znikają dla $|x| \rightarrow \infty$, to możliwe jest określenie ewolucji współczynników rozpraszania $a(\lambda)$ i $b(\lambda)$, co jest wystarczające do znalezienia rozwiązania NSE metodą IST. Z asymptotycznej ($x = -\infty$) postaci macierzy \mathbf{Z} wynika, że funkcja φ (3.7a) nie spełnia równania ewolucji (rów. (3.5) dla $|x| \approx \infty$) w kierunku ζ ($\varphi_{1,\zeta} = -i\lambda^2\varphi_1$, $\varphi_{2,\zeta} = i\lambda^2\varphi_2$), co jest konieczne do prawidłowego określenia współczynników rozpraszania. Dlatego też należy zmodyfikować macierz \mathbf{Z} tak, aby element \mathbf{Z}_{11} w granicy $|x| \rightarrow \infty$ zerował się. Tak więc funkcja φ (3.7a) jest rozwiązaniem zmodyfikowanego równania ewolucji określonego przez macierz (w asymptotyce $x \rightarrow -\infty$)

$$\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} + i\lambda^2 \times \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} |U(x, \zeta)|^2 & i\lambda U(x, \zeta) - \frac{1}{2} \frac{\partial U(x, \zeta)}{\partial x} \\ i\lambda U^*(x, \zeta) + \frac{1}{2} \frac{\partial U^*(x, \zeta)}{\partial x} & 2i\lambda^2 - \frac{i}{2} |U(x, \zeta)|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową, co w asymptotyce $x \rightarrow \infty$ prowadzi do ewolucji współczynników rozpraszania $a(\lambda)$ i $b(\lambda)$

$$\begin{aligned} a(\lambda, \zeta) &= a(\lambda, 0), \\ b(\lambda, \zeta) &= b(\lambda, 0) \times \exp(2i\lambda^2\zeta). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wielkości $a(\lambda, 0)$ oraz $b(\lambda, 0)$ są rozwiązaniami DSP (3.3) dla potencjału rozpraszania $U(x, 0)$ będącego zadaniem warunkiem początkowym dla nieliniowego równania Schrödingera (2.3). Należy zauważyć, że macierz (3.12) także spełnia warunek zgodności (3.2) prowadzący do NSE (2.3) gdyż macierze \mathbf{X} i \mathbf{Z} określone są z dokładnością do macierzy jednostkowej.

Odwrotne zagadnienie rozpraszania sprowadza się do znalezienia potencjału rozpraszania $U(x, \zeta)$ ze znanych wartości współczynników rozpraszania $a(\lambda, \zeta)$ i $b(\lambda, \zeta)$. W tym celu rozważa się całkowite przedstawienie funkcji ψ i $\bar{\psi}$

$$\psi(x, \lambda; \zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\lambda x) + \int_x^\infty \mathbf{K}(x, s; \zeta) e^{i\lambda s} ds, \quad (3.14a)$$

$$\bar{\psi}(x, \lambda; \zeta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\lambda^* x) + \int_x^\infty \bar{\mathbf{K}}(x, s; \zeta) e^{-i\lambda^* s} ds, \quad (3.14b)$$

gdzie $\lambda = \xi + i\eta$, $\eta \geq 0$, oraz \mathbf{K} sa $\bar{\mathbf{K}}$ są wektorami o składowych określonych przez (3.6)

$$\mathbf{K}(x, s; \zeta) = \begin{pmatrix} K_1(x, s; \zeta) \\ K_2(x, s; \zeta) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}(x, s; \zeta) = \begin{pmatrix} K_2^*(x, s; \zeta) \\ -K_1^*(x, s; \zeta) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

W powyższych równaniach ζ (współrzędna w kierunku propagacji wiązki) jest parametrem, dlatego zależność od ζ została wyróżniona średnikiem. Powyższa całkowita reprezentacja spełnia warunki brzegowe (3.7b) dla $x \rightarrow \infty$. Równania (3.14) są określone poprawnie jeżeli jądro $\mathbf{K}(x, s; \zeta)$ jest postaci górno-trójkątnej, tzn. gdy $\mathbf{K}(x, s; \zeta) = 0$ dla $x > s$. Przy takiej konstrukcji funkcje \mathbf{K} i $\bar{\mathbf{K}}$ nie zależą od λ , jak to zostało pokazane w pracy [54]. Podstawiając (3.14a) do (3.3) oraz korzystając z

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^\infty f(x, s) ds = \int_x^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x, s) ds - f(x, x) + \lim_{s \rightarrow \infty} f(x, s), \quad (3.16)$$

sprowadza się równania (3.3) do postaci

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \right) K_1(x, s; \zeta) - iU(x, \zeta) K_2(x, s; \zeta) = 0, \quad (3.17a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s} \right) K_2(x, s; \zeta) + iU^*(x, \zeta) K_1(x, s; \zeta) = 0, \quad (3.17b)$$

z uwzględnieniem warunków brzegowych

$$K_1(x, x; \zeta) = \frac{i}{2} U(x, \zeta), \quad (3.18a)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} K(x, s; \zeta) = 0. \quad (3.18b)$$

Wstawienie warunku (3.18a) do (3.17b) prowadzi do

$$K_2(x, x; \zeta) = \frac{1}{2} \int_x^\infty |U(s, \zeta)|^2 ds. \quad (3.19)$$

Równanie (3.18a) definiuje związek pomiędzy rozwiązaniem NSE $U(x, \zeta)$ a jądrem całkowym K określonym przez rozwiązanie zagadnienia prostego (3.3). W celu uzyskania jawnych równań na jądro K (tzw. równań Gelfanda - Levitana - Marchenko) rozpatruje się zagadnienie rozpraszania (3.11). Podstawiając przedstawienie całkowe funkcji ψ (3.14a) do (3.11), mnożąc obie strony równania przez $(1/2\pi)e^{i\zeta y} d\zeta$, ($y > x$), całkując po konturze C (w płaszczyźnie zespolonej (ζ, η)) zaczynającym się w punkcie $-\infty + i0^+$, przechodzącym *nad* wszystkimi zerami $a(\lambda)$ i kończącym się w punkcie $+\infty + i0^+$, uzyskuje się następujący związek

$$I = \bar{K}(x, y; \zeta) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(x + y; \zeta) + \int_x^\infty K(x, s; \zeta) F(s + y; \zeta) ds, \quad (3.20)$$

gdzie skorzystano z całkowego przedstawienia δ -funkcji Diraca: $\delta(x) = (1/2\pi) \int_C e^{i\lambda x} d\lambda$, zaś funkcja $F(x; \zeta)$ oraz całka I dane są przez

$$F(x; \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_C r(\lambda; 0) e^{i\lambda x + 2i\lambda^2 \zeta} d\lambda, \quad (3.21)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\varphi(x, \lambda; \zeta)}{a(\lambda; \zeta)} e^{i\lambda y + 2i\lambda^2 \zeta} d\lambda. \quad (3.22)$$

Ponieważ funkcja $\varphi(x, \lambda)$ jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie ($\eta > 0$), to domknięcie konturu C od góry prowadzi do zerowania się całki I . Powtarzając tę procedurę dla funkcji $\bar{\psi}$ (3.14b), uwzględniając (3.10) oraz domykając kontur \bar{C} od dołu (gdyż funkcja $\bar{\varphi}$ jest analityczna w dolnej półpłaszczyźnie) otrzymuje się wyrażenie analogiczne do (3.20)

$$\mathbf{K}(x, y; \zeta) - \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) F^*(x + y; \zeta) - \int_x^\infty \bar{\mathbf{K}}(x, s; \zeta) F^*(s + y; \zeta) ds = 0, \quad (3.23)$$

Eliminując $\bar{\mathbf{K}}$ z równań (3.20), (3.23) otrzymuje się równanie Gelfanda – Levitana – Marchenka (GLM), wiążące jądro całkowe \mathbf{K} z funkcją danych rozpraszania $F(x; \zeta)$, w postaci

$$K_1(x, y; \zeta) + \int_x^{+\infty} K_1(x, z; \zeta) \int_x^{+\infty} F(z + s; \zeta) F^*(s + y; \zeta) ds dz = F^*(x + y; \zeta), \quad (3.24)$$

gdzie funkcja $F(x; \zeta)$, po scałkowaniu po konturze \mathcal{C} i uwzględnieniu zer współczynnika rozpraszania $a(\lambda)$, wyraża się przez

$$F(x; \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(\xi; 0) e^{i\xi x + 2i\xi^2 \zeta} d\xi - i \sum_{i=1}^N c(\lambda_i; 0) e^{i\lambda_i x + 2i\lambda_i^2 \zeta}, \quad (3.25)$$

oraz

$$c(\lambda_i; 0) = \frac{b(\lambda_i; 0)}{a'(\lambda_i; 0)}. \quad (3.26)$$

Można pokazać, że $c(\lambda_i; 0)$ wyraża się przez [55]

$$c(\lambda_i; 0) = -\frac{1}{2i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x, \lambda_i; 0) \psi_2(x, \lambda_i; 0) dx}. \quad (3.27)$$

Funkcja $F(x; \zeta)$ składa się z dwóch części. Pierwszą z nich jest odwrotna transformata Fouriera współczynnika odbicia $r(\xi; \zeta)$ i opisuje wkład tzw. pola promieniowania (radiation) do pola całkowitego. Jak zostanie pokazane w Części III, oddziaływanie tego pola z polem solitonu powoduje samoogniskowanie początkowej wiązki Gaussa w polu bliskim, natomiast w strefie dalekiej pole promieniowania ulega dyfrakcji i zanika. Drugi człon funkcji $F(x; \zeta)$ jest sumą po residuach współczynnika odbicia $r(\lambda; 0)$ i prowadzi on do rozwiązań solitonowych w asymptotyce pola dalekiego [2].

Z równań (3.18a), (3.24) i (3.25) wynika, że zbiór $\mathcal{S}(\lambda)$ danych rozpraszania, niezbędnych do odtworzenia potencjału rozpraszającego $U(x, \zeta)$, dla dowolnego ζ , ma postać

$$\mathcal{S}(\lambda) = \left[r(\xi; 0), -\infty < \xi < \infty; c(\lambda_i; 0), \lambda_i, i = 1..N \right]. \quad (3.28)$$

Reasumując, rozwiązanie nieliniowego równania Schrödingera metodą IST z zadaniem warunkiem początkowym $U(x, 0)$, sprowadza się do wykonania następujących trzech kroków:

1) Rozwiązaniu zagadnienia prostego (3.3), znalezieniu współczynników rozpraszania $a(\lambda; 0)$ i $b(\lambda; 0)$ z (3.9) oraz wyznaczeniu położenia zer λ_i współczynnika $a(\lambda; 0)$: $a(\lambda_i; 0) = 0$. Wielkości te określają zbiór danych rozpraszania $\mathcal{S}(\lambda)$ (3.28). 2) Obliczeniu funkcji $F(x; \zeta)$ (3.25) w płaszczyźnie ζ . Krok ten nosi nazwę "evolucji danych rozpraszania". 3) Rozwiązaniu całkowego równania Gelfanda – Levitana – Marchenko (3.24), co prowadzi do funkcji $U(x, \zeta)$ (3.18a) będącej rozwiązaniem NSE. Metoda IST stanowi uogólnienie transformaty Fouriera na przypadek nieliniowych równań różniczkowych. Krok pierwszy w metodzie IST odpowiada transformacie Fouriera warunku początkowego (1.13) w równaniu różniczkowym liniowym, krok drugi opisuje ewolucję w przestrzeni transformaty Fouriera (1.14) natomiast krok trzeci jest równoważny wykonaniu odwrotnej transformaty Fouriera (1.15).

4. ROZWIĄZANIA JEDNO- I DWUSOLITONOWE

Podstawowa trudność w realizacji przedstawionego powyżej schematu rozwiązania NSE metodą IST leży w analitycznej złożoności kroków 1) i 3). Niemniej jednak możliwe jest rozwiązanie równania GLM w pewnych szczególnych przypadkach, w których znika część związana z polem promieniowania w funkcji $F(x; \zeta)$ (3.25). Jest to możliwe gdy: 1) współczynnik odbicia $r(\xi; 0)$ jest zerem (przykład potencjału rozpraszania $U(x, 0)$ prowadzący do $r(\xi; 0)=0$ zostanie podany w Części III), 2) w strefie dalekiej pola, tzn. gdy $\zeta \gg 1$ (wyrażenie podcałkowe w (3.25) $r(\xi; 0)e^{2i\zeta^2}$ jest szybkozmienna funkcją ξ i jego transformata Fouriera znika).

Jednosolitonowe rozwiązanie NSE otrzymuje się z założenia, że w widmie zagadnienia prostego (3.3) występuje tylko jedna wartość własna $\lambda = \xi + i\eta$: $a(\lambda; 0) = 0$. Wówczas całkowanie po zmiennej s w rów. GLM (3.24) może zostać wykonane. Mnożąc obie strony otrzymanego w ten sposób równania przez $e^{i\lambda s}$, całkując od x do ∞ , otrzymuje się równanie algebraiczne

$$\hat{K}_1(x) = \frac{-i}{2\eta} \frac{c^*(\lambda; \zeta) \exp[i(\lambda - 2\lambda^*)x]}{1 + (|c(\lambda; \zeta)|^2/4\eta^2) \exp(-4\eta x)}, \quad (4.1)$$

gdzie funkcja pomocnicza $\hat{K}_1(x)$ została określona jako

$$\hat{K}_1(x) = \int_x^{\infty} K_1(x, y) e^{i\lambda y} dy. \quad (4.2)$$

Podstawienie wyrażenia (4.1) do scalkowanego po zmiennej s rów. (3.24) prowadzi do wyrażenia na funkcję $K_1(x, y)$, które, zgodnie z (3.18a), pozwala napisać rozwiązanie NSE w postaci

$$U(x, \zeta) = 2\eta \operatorname{sech}[2\eta x - 4\eta\zeta\zeta + x_0] \times \exp[2i(\eta^2 - \zeta^2)\zeta + 2i\zeta x - i(\psi_0 + \pi)], \quad (4.3)$$

gdzie przesunięcie poprzeczne solitonu x_0 jest funkcją danych rozpraszania w płaszczyźnie początkowej $\zeta = 0$

$$x_0 = \ln \frac{|c(\lambda; 0)|}{2\eta}, \quad (4.4)$$

zaś faza początkowa wyraża się przez: $\psi_0 = \operatorname{Arg}[c(\lambda; 0)]$. Rozwiązanie jednosolitonowe NSE ma zatem postać wiązki *sech* propagującej się *bez zmiany kształtu* w ośrodku nieliniowym pod kątem

$$\theta = \arctan(2\zeta), \quad (4.5)$$

do osi ζ układu współrzędnych i z płaskim frontem fazowym. Amplituda i szerokość wiązki określone są przez część urojoną η wartości własnej λ .

Ogólna postać rozwiązania jednosolitonowego (4.3) może być uzyskana bezpośrednio z niezmienniczości NSE względem transformaty Galileusza [44]. Jeżeli $U(x, \zeta)$ spełnia NSE, to także spełniają je funkcje: $AU(Ax, A^2\zeta)$ oraz $U(x - V\zeta, \zeta) \exp(iVx - iV^2\zeta/2)$, gdzie amplituda A oraz prędkość V są rzeczywiste, oraz ζ jest współrzędną czasową. Przyjmując rozwiązanie podstawowe $U(x, \zeta) = \operatorname{sech}(x)e^{i\zeta/2}$ oraz podstawiając $A = 2\eta$ i $V = 2\zeta$ uzyskuje się z przedstawionych transformacji rozwiązanie jednosolitonowe (4.3) z dokładnością do stałych.

Postać rozwiązań dwusolitonowych (a w ogólności wielosolitonowych) wynika z alternatywnego podejścia do zagadnienia odwrotnego, tak jak zostało to pokazane w oryginalnej

pracy Zakharova i Schabata [2]. Równania zagadnienia odwrotnego otrzymuje się na podstawie znajomości obszarów analityczności funkcji $\varphi, \psi, \bar{\psi}$ (opisanych w Rozdz. 3) oraz z zagadnienia Riemana–Hilberta dla równania (3.11). Przy założeniu nieobecności pola promieniowania znalezienie rozwiązania NSE sprowadza się do rozwiązania liniowego układu równań algebraicznych rzędu $2N$ (gdzie N jest liczbą dyskretnych wartości własnych $\lambda_i = \xi_i + i\eta_i$ w widmie zagadnienia prostego). Ogólna postać rozwiązania dwusolitonowego została podana w pracy [56]. Przy założeniu że solitony propagują się wzdłuż osi ζ układu współrzędnych, tzn. $\lambda_1 = i\eta_1, \lambda_2 = i\eta_2$, są centralnie symetryczne, oraz $\eta_2 > \eta_1$, rozwiązanie dwusolitonowe sprowadza się do [57]

$$U(x, \zeta) = \frac{4\eta_1(\eta_1 + \eta_2)e^{2i\eta_1^2\zeta} \left[\cosh(2\eta_2 x) + \frac{\eta_2}{\eta_1} e^{2i(\eta_2^2 - \eta_1^2)\zeta} \cosh(2\eta_1 x) \right]}{\cosh[2(\eta_1 + \eta_2)x] + \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_2 - \eta_1}\right)^2 \cosh[2(\eta_2 - \eta_1)x] + \frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_2 - \eta_1)^2} \cos[2(\eta_2^2 - \eta_1^2)\zeta]} \quad (4.6)$$

Funkcja (4.6) przedstawia zlokalizowaną przestrzennie wiązkę, której amplituda i szerokość oscylują z okresem

$$Z^{(per)} = \frac{\pi}{\eta_2^2 - \eta_1^2} \quad (4.7)$$

Rozwiązanie (4.6) nosi w literaturze nazwę "pulsującego solitonu" (breather soliton) ze względu na charakterystyczny sposób propagacji w ośrodku nieliniowym (przykłady zostaną podane w Częściach III i V niniejszej pracy). Należy podkreślić, że w przypadku niezerowych części rzeczywistych wartości własnych λ_i ($\xi_1 \neq \xi_2 \neq 0$) solitony nie mogą w ogólności tworzyć stanu związanego, tak jak ma to miejsce w przypadku rozwiązania (4.6). W takim przypadku oba solitony oddziałują (zderzają się) ze sobą w pewnym obszarze, gdzie siły oddziaływania zależą exponencjalnie od odległości pomiędzy solitonami i sinusoidalnie od przesunięcia fazowego pomiędzy nimi [56]. Natomiast daleko od obszaru oddziaływania oba solitony separują się i są opisywane przez rozwiązania jednosolitonowe (4.3).

W podsumowaniu do Rozdziałów 3 i 4 warto podkreślić fakt, że metoda IST pozwala znaleźć asymptotyczną postać *ogólnych* rozwiązań NSE (np. (4.3) i (4.6)). W rozwiązaniach tych występują nieznanne stałe całkowania λ_i oraz c_i . W dalszym ciągu niniejszej pracy analizowane będą rozwiązania *szczególne* NSE generowane wiązkami Gaussa–Hermita, gdzie stałe

całkowania określone zostaną z analitycznych i numerycznych rozwiązań prostego zagadnienia rozpraszania (3.3).

5. PRAWA ZACHOWANIA ZWIĄZANE Z NSE

Z nieliniowym równaniem Schrödingera związane jest nieskończenie wiele praw zachowania [2]. Wynika to ze stałości współczynnika $a(\lambda)$ w trakcie propagacji wiązki, jak zostało to przedyskutowane w Rozdziale 3. Niech $\lambda \neq \lambda_i$ oraz $\eta > 0$. Jak wynika z (3.9), współczynnik $a(\lambda)$ wyznaczony jest z

$$a(\lambda; 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1(x, \lambda) \exp(i\lambda x). \quad (5.1)$$

Wprowadzając funkcję ϕ poprzez relację:

$$\varphi_1 = \exp(-i\lambda x + \phi), \quad (5.2)$$

otrzymuje się

$$\phi(x, \lambda) \rightarrow \ln a(\lambda), \quad \text{dla } x \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Podstawiając (5.2) do zagadnienia prostego (3.3) oraz eliminując funkcję φ_2 otrzymuje się równanie

$$2i\lambda\phi' = (\phi')^2 + U(x, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi'}{U(x, \zeta)} \right) + |U(x, \zeta)|^2. \quad (5.4)$$

Z zagadnienia prostego (3.3) dla $\lambda \rightarrow \infty$, oraz $\eta > 0$, wynika: $a(\lambda) \rightarrow 1$, oraz $\phi(x, \lambda) \rightarrow 0$.

Pozwala to na rozwinięcie w szereg potęgowy względem λ^{-1} funkcji ϕ'

$$\phi'(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{(2i\lambda)^n}, \quad (5.5)$$

co po podstawieniu do rów. (5.4) prowadzi do równania rekurencyjnego

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) + U(x, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f^{(n)}(x)}{U(x, \zeta)} \right), \quad (5.6)$$

z warunkiem początkowym

$$f^{(1)}(x) = |U(x, \zeta)|^2 .$$

Funkcja $\phi = \ln a(\lambda)$ (w asymptotyce $x \rightarrow \infty$) może także zostać rozwinięta w szereg potęgowy względem $1/\lambda$

$$\ln a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(2i\lambda)^n} . \quad (5.7)$$

Ze stałości współczynnika $a(\lambda)$ w trakcie propagacji wynika stałość współczynników rozwinięcia C_n . Porównując (5.7) z (5.5) oraz rozwiązując równanie rekurencyjne (5.6) uzyskuje się zbiór nieskończenie wielu stałych całkowania związanych z NSE. Pierwszych kilka stałych można (poprzez całkowanie przez części współczynników $f^{(n)}(x)$) sprowadzić do postaci

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |U(x, \zeta)|^2 dx , \quad (5.8a)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(U(x, \zeta) \frac{\partial U^*(x, \zeta)}{\partial x} - U^*(x, \zeta) \frac{\partial U(x, \zeta)}{\partial x} \right) dx , \quad (5.8b)$$

$$C_3 = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial U(x, \zeta)}{\partial x} \right|^2 - |U(x, \zeta)|^4 \right) dx , \quad (5.8c)$$

$$C_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(3|U(x, \zeta)|^2 U(x, \zeta) \frac{\partial U^*(x, \zeta)}{\partial x} + U(x, \zeta) \frac{\partial^3 U^*(x, \zeta)}{\partial x^3} \right) dx , \quad (5.8d)$$

$$C_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial^2 U^*(x, \zeta)}{\partial x^2} \right|^2 + 2|U(x, \zeta)|^6 - \left(\frac{\partial}{\partial x} |U(x, \zeta)|^2 \right)^2 - 6 \left| \frac{\partial U(x, \zeta)}{\partial x} \right|^2 |U(x, \zeta)|^2 \right) dx . \quad (5.8e)$$

Interpretując NSE jako równanie Schrödingera z nieliniowym potencjałem, można traktować trzy pierwsze stałe (z dokładnością do czynników multiplikatywnych) jako prawa zachowania liczby cząstek, pędu i energii w układzie [2]. Przedstawiona metoda prowadząca do znalezienia nieskończenie wielu praw zachowania dla NSE została uogólniona na przypadek innych równań dla których sformułowano metodę IST [58]. Jedną z metod badania dokładności przybliżeń w problemach związanych z nieliniową propagacją jest badanie praw zachowania. Liczba spełnionych praw zachowania przez zapostulowane rozwiązanie przybliżone jest miarą dokładności stosowanej aproksymacji rozwiązania dokładnego.

Propagacja podstawowej wiązki

Gausa w ośrodku Kerra

W Części tej przedstawiono analizę pobudzenia i propagacji wiązek solitonowych w nieliniowym ośrodku Kerra, gdzie założono początkowy profil pola w postaci funkcji Gausa lub *sech*. Problem ten jest rozwiązany przy użyciu metody IST [16–18]. Analiza widma dyskretnego otrzymanego z prostego zagadnienia rozpraszania pozwala uzyskać *dokładną* informację o parametrach generowanych solitonów. Dla pobudzającej wiązki Gausa z płaskim frontem falowym przedstawiono analityczne wyrażenia na progi generacji solitonów dowolnego rzędu oraz na zależność amplitudy generowanego solitonu w funkcji amplitudy gaussowskiej. Przedstawiono numeryczny warunek generacji solitonów w funkcji zespolonej szerokości wiązki Gausa. Przy odpowiednim doborze parametrów wiązki Gausa ponad 99.5% energii jest transformowane do wiązek solitonowych. Jest to analogia do zjawiska samopułapkowania wiązek *sech* znanego z teorii solitonów. Numeryczna analiza zjawiska ewolucji profilu gaussowskiego do solitonowego pozwala znaleźć warunek na samopułapkowanie (selftrapping) wiązki w polu bliskim. Na poziomie generacji pierwszego solitonu (w widmie zagadnienia rozpraszania prostego) wyniki pobudzenia gaussowskiego i *sech* pokazują dużą zgodność zarówno jakościową jak i ilościową.

6. PROBLEM PROPAGACJI NIELINIOWEJ

Trójwymiarowa propagacja $(2 + 1)$ wiązek laserowych w nieliniowym ośrodku Kerra jest w ogólności niestabilna z powodu występowania zjawiska samoogniskowania promieniowania [33]. Istnieją jednakże wiązki o szczególnym poprzecznym rozkładzie amplitudy, dla których zmiana nieliniowego współczynnika załamania jest skompensowana przez dyfrakcję

wiązki (w strukturze $(2 + 1)$ wymiarowej). Analityczne wyrażenie, opisujące stabilne samooprowadzające się dwuwymiarowe wiązki w przypadku nieliniowości z nasyceniem, zostało zaproponowane w pracy [5]. W ośrodku z nieliniowością Kerra znane są statbilne rozwiązania nieliniowego równania Schrödingera jedynie w geometrii planarnej. W zależności od znaku nieliniowości znane są ciemne (dark) solitony (nieliniowość rozogniskowująca) oraz analizowane w tej pracy jasne (bright) przestrzenne solitony. Tego typu rozwiązania zostały ostatnio zaobserwowane w pseudodwuwymiarowych planarnych strukturach [59,60] oraz w półprzewodnikach [61–63]. Przeprowadzono badania dotyczące oddziaływań pomiędzy przestrzennymi solitonami, zarówno numerycznie [64] jak i eksperymentalnie [65–72], głównie ze względu na potencjalne zastosowanie tych zjawisk do w pełni optycznego (all-optical) przetwarzania sygnałów (ostatnio został opublikowany przegląd zastosowań przestrzennych i czasowych solitonów do fonicznego przetwarzania sygnałów [15]). Zaproponowano także projekt pamięci optycznej wykorzystującej formowanie fal solitonowych (solitary waves) w rezonatorze pierścieniowym wypełnionym ośrodkiem Kerra z nasyceniem [73].

Rozwinięto wiele metod do badania propagacji fal elektromagnetycznych w nieliniowym ośrodku Kerra. Miedzy innymi należy wymienić: metodę "potencjału promieni" (ray potential) [74], "transformacji soczewki Talanova" (Talanov lens transformation) [75], "propagacji wiązki Gaussa" (Gaussian beam propagation) [76], "bezaberracyjnego przybliżenia przyosiowego" (aberrationless paraxial-ray approximation) [77,78], "metodę momentów" (moment method) [79] oraz metode wariacyjną [80–85]. Szczegółone znaczenie posiada ostatnia metoda ze względu na swoją ogólność oraz prostotę interpretacji przewidywań jakościowych. Zastosowaniu tej metody poświęcone zostaną kolejne dwie części tej pracy. Niemniej jednak, podstawowym problemem każdej metody przybliżonej jest dokładność uzyskanych rezultatów. Z tego też względu użyto do badania pobudzenia solitonów wiązkami Gaussa o zespolonym profilu amplitudy *dokładnej* metody IST.

Jak wynika z dyskusji przedstawionej w Rozdz. 3, rozwiązania solitonowe scharakteryzowane są przez amplitudy ($2\eta_i$) oraz kąty propagacji od osi ζ ($\arctan(2\xi_i)$) solitonów (pominięto fazy φ_{0i} i przesunięcia początkowe x_{0i}). Stale te są określone przez położenie

zera współczynnika rozpraszania $a(\lambda)$: $a(\lambda_i) = 0$, $\lambda_i = \xi_i + i\eta_i$ ("i" oznacza numer solitonu).

Wyznaczenie parametrów solitonów przestrzennych generowanych wiązką o początkowym rozkładzie pola: $U(x, 0) = U_0(x)$, sprowadza się zatem do rozwiązania układu równań

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -i\lambda \varphi_1 + i U_0(x) \varphi_2, \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = i\lambda \varphi_2 + i U_0^*(x) \varphi_1. \quad (6.1b)$$

Warunki brzegowe dla $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\lambda x), \quad (6.2)$$

prowadzą do współczynników rozpraszania dla $x \rightarrow \infty$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\lambda) \exp(-i\lambda x) \\ b(\lambda) \exp(i\lambda x) \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

(w celu uproszczenia notacji pominięto funkcyjną zależność od ζ we współczynnikach rozpraszania). W ogólności, dowolne warunki początkowe $U_0(x)$ mogą prowadzić zarówno do widma dyskretnego jak i niezerowego widma ciągłego, lub mówiąc inaczej, do solitonów oraz pola promieniowania [86,87]. Ma to miejsce także w przypadku gaussowskiego warunku początkowego [16], jak zostanie to pokazane poniżej. Warunek początkowy, który jest *explicit* wymagany w prostym zagadnieniu rozpraszania (6.1), ma, w rozważanym w tej Części pracy przypadku, postać wiązki Gaussa z zespoloną szerokością $v(\zeta_i) = \sqrt{1 + i\zeta_i}$ (1.16)

$$U_0(x) = \frac{q_0}{v(\zeta_i)} \exp\left(-\frac{x^2}{2v^2(\zeta_i)}\right), \quad (6.4)$$

Zatem parametry solitonów λ_i zależą będą od dwóch parametrów wiązki początkowej: rzeczywistej amplitudy q_0 i znormalizowanej względem zasięgu Fresnela odległości od talii wiązki ζ_i . Należy podkreślić różnicę pomiędzy ζ_i a ζ . Podczas gdy ζ_i jest odległością talii wiązki padającej od punktu (0,0), tzn. jest miarą rozogniskowania wiązki wejściowej, to ζ oznacza znormalizowaną względem z_F odległość od płaszczyzny początkowej w ośrodku nieliniowym, jak wynika to z postaci NSE (2.3).

7. WYZNACZENIE PROGÓW GENERACJI SOLITONÓW DOWOLNEGO RZĘDU

Jak podano w Rozdz. 3, funkcje rozpraszania $\varphi(x, \lambda)$ i $\psi(x, \lambda)$, będące rozwiązaniami rów. (6.1), są analityczne w górnej półpłaszczyźnie wartości własnych λ : $\eta > 0$. Dla potencjałów rozpraszania odpowiednio szybko zanikających można obszar analityczności rozszerzyć dla $\eta > -R$, gdzie R jest pewną stałą dodatnią będącą miarą szybkości zanikania potencjału rozpraszania [53]. Niemniej jednak, fizyczny sens mają zera współczynnika rozpraszania $a(\lambda)$ dla $\eta \geq 0$, gdyż tylko one są uwzględniane w całce po konturze \mathcal{C} prowadzącej do równania GLM (3.24). W szczególności, warunki $a(\lambda_i) = 0$ oraz $\eta_i = 0$ oznaczają, że w polu dalekim propaguje się i -ty soliton o zerowej amplitudzie, tzn. jest to warunek progów generacji i -tego solitonu. Przedstawiona poniżej procedura znajdowania progów generacji solitonów bazuje na tej obserwacji.

A. Pobudzenie wiązką Gaussa

Zakładając, że potencjał rozpraszania $U_0(x)$ jest rzeczywisty (odpowiada to przypadkowi, gdy wiązka Gaussa pada na ośrodek nieliniowy w swojej talii: $\zeta_i = 0$), sprowadza się rów. (6.1) poprzez zmianę zmiennych

$$y(x) = \int_{-\infty}^x U_0(s) ds, \quad (7.1)$$

do układu równań

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = i\varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = i\varphi_1, \quad (7.2)$$

gdzie przyjęto $\lambda = 0$. Założenie to oznacza, że szukany jest soliton o zerowej amplitudzie propagujący się wzdłuż osi ζ układu współrzędnych. Rozwiązanie tego równania spełniające warunek brzegowy (6.2) jest postaci

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, 0) \\ \varphi_2(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y(x) \\ i \sin y(x) \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Na mocy (6.3) współczynniki rozpraszania $a(0)$ i $b(0)$ wyznaczone są jako

$$a(0) = \cos \left[\int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x) dx \right], \quad b(0) = i \sin \left[\int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x) dx \right]. \quad (7.4)$$

Podstawiając gaussowski rozkład amplitudy (6.4) (dla $\zeta_i = 0$) do (7.4) otrzymuje się

$$a(0) = \cos(\sqrt{2\pi}q_0), \quad b(0) = i \sin(\sqrt{2\pi}q_0). \quad (7.5)$$

skąd amplitudy progowe do generacji kolejnych solitonów dane są jako kolejne zera współczynnika rozpraszania $a(0)$

$$q_0^{(thr)} = \frac{2k-1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

Należy podkreślić, że przedstawioną metodę obliczania amplitud progowych można zastosować dla każdego rzeczywistego potencjału, o ile spełniony jest warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x) dx \neq 0. \quad (7.7)$$

B. Pobudzenie wiązką *sech*

W celu odniesienia otrzymanych wyników dla pobudzenia gaussowskiego, przytoczone zostaną bez dowodu rezultaty znane z teorii solitonów [44] dla pobudzenia funkcją *sech*

$$U_s(x) = A \operatorname{sech}(x). \quad (7.8)$$

Z rozwinięć w szereg potęgowy funkcji (7.8) oraz (6.4) z dokładnością do wyrazów rzędu drugiego

$$A \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \approx A \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \approx A \operatorname{sech}(x), \quad (7.9)$$

wynika, że obie funkcje mają ten sam rozkład amplitudy w pobliżu osi wiązki, tzn. tam, gdzie w ośrodku Kerra efekty nieliniowe są najsilniejsze.

Współczynniki rozpraszania dla potencjału (7.8) dane są przez [44]

$$a(\lambda) = \frac{[\Gamma(-i\lambda + 1/2)]^2}{\Gamma(-i\lambda + A + 1/2)\Gamma(-i\lambda - A + 1/2)}, \quad (7.10a)$$

$$b(\lambda) = i \frac{[\Gamma(i\lambda + 1/2)]^2}{\Gamma(A)\Gamma(1-A)} = i \sin(\pi A) \operatorname{sech}(\pi\lambda). \quad (7.10b)$$

Z rów. (7.10b) wynika, że warunek zerowego pola promieniowania $b(\lambda) = 0$ jest spełniony gdy amplituda wiązki wejściowej jest liczbą naturalną: $A = N$. Oznacza to, że funkcja $F(x; \zeta)$ (3.25) ma postać sumy po residuach współczynnika odbicia $r(\lambda; \zeta)$. Amplitudy generowanych solitonów wyznaczone są przez $a(\lambda) = 0$, co na mocy własności funkcji Gama w (7.10a) prowadzi do

$$2\eta_N = 2A - (2N - 1), \quad A > 1/2, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (7.11)$$

gdzie N jest numerem kolejnego solitonu obecnego w widmie zagadnienia prostego. W szczególności, progi generacji kolejnych solitonów dane są przez: $\eta_N = 0$, tzn.

$$A_N^{(thr)} = \frac{2N - 1}{2}. \quad (7.12)$$

Wyrażenia (7.5) i (7.12) mają tę samą strukturę, różnią się jedynie multiplikatywnym czynnikiem $\sqrt{\pi/2} \approx 1.2$ modyfikującym wyrażenie na amplitudy progowe dla pobudzenia gaussowskiego. Dla pobudzenia solitonu pierwszego rzędu amplitudy progowe wynoszą: $A_1^{(thr)} = 1/2$, $q_{01}^{(thr)} \approx 0.63$. Niewielka różnica ilościowa jest w istocie spowodowana tym, że profile Gaussa i sech są do siebie podobne, jak wynika to z (7.9).

8. PARAMETRY SOLITONU W GRANICY $\eta \ll 1$

Parametry solitonu generowanego w polu dalekim profilem gaussowskim (6.4) dane są przez położenie zera współczynnika rozpraszania $a(\lambda)$: $a(\lambda) = 0$ (patrz Rozdz. 3). Zakładając jak w poprzednim Rozdziale, że wejściowy gaussowski rozkład amplitudy pola (6.4) ma płaski front falowy ($\zeta = 0$), szuka się rozwiązania zagadnienia prostego (6.1) w postaci szeregu potęgowego [16]

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} f_n(x) \\ e^{i\lambda x} g_n(x) \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

gdzie założono $|\lambda| \ll 1$. Podstawienie (8.1) do układu równań (6.1), rozwinięcie eksponent w szereg potęgowe względem λ , oraz porównanie wyrażań przy tej samej potędze λ prowadzi do rekurencyjnego układu równań różniczkowych na funkcje $f_n(x)$ i $g_n(x)$

$$\begin{pmatrix} f_n'(x) \\ g_n'(x) \end{pmatrix} = iU_0(x) \left[\begin{pmatrix} g_n(x) \\ f_n(x) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^n \frac{(2ix)^k}{k!} \begin{pmatrix} g_{n-k}(x) \\ (-1)^k f_{n-k}(x) \end{pmatrix} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.2)$$

z warunkami brzegowymi w $x = -\infty$ wynikającymi z (6.2) oraz z (8.1)

$$\begin{pmatrix} f_0(x) \\ g_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_n(x) \\ g_n(x) \end{pmatrix} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.3)$$

Układ (8.2) jest układem równań liniowych niejednorodnych, z niejednorodnością opisywaną przez drugi człon prawej strony. Jednorodny układ równań ma taką samą postać dla dowolnego n (patrz rów. (7.1-7.2)). W Rozdz. 7 znaleziono jedno z rozwiązań tego układu równań. Liniowo niezależne rozwiązanie do rozwiązania (7.3) jest postaci

$$\begin{pmatrix} f_n(x) \\ g_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \sin y(x) \\ \cos y(x) \end{pmatrix}, \quad (8.4)$$

gdzie $y(x)$ jest zdefiniowane przez (7.1). Macierz rozwiązań podstawowych jest zatem postaci

$$\mathbf{W}(x) = \begin{pmatrix} \cos y(x) & i \sin y(x) \\ i \sin y(x) & \cos y(x) \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Z postaci warunków brzegowych (8.3) wynika następująca rekurencyjna postać rozwiązania niejednorodnego układu równań [88]

$$f_0(x) = \cos y(x), \quad g_0(x) = i \sin y(x),$$

$$\begin{pmatrix} f_n(x) \\ g_n(x) \end{pmatrix} = i \sum_{k=1}^n \mathbf{W}(x) \int_{-\infty}^x \frac{(2is)^k}{k!} U_0(s) \mathbf{W}^{-1}(s) \begin{pmatrix} g_{n-k}(s) \\ (-1)^k f_{n-k}(s) \end{pmatrix} ds, \quad n \geq 1 \quad (8.6)$$

W granicy $x \rightarrow \infty$ rozwiązanie (8.6) prowadzi do współczynników rozpraszania $a(\lambda)$ i $b(\lambda)$. Na mocy założenia $|\lambda| \ll 1$ można ograniczyć rozwinięcie (8.1) do wyrazów rzędu pierwszego w λ , co, po skorzystaniu z rozwiązania (8.6), pozwala zapisać

$$a(\lambda) = \cos \delta + i\lambda(B \sin \delta - A \cos \delta), \quad (8.7a)$$

$$b(\lambda) = i \sin \delta + \lambda(A \sin \delta + B \cos \delta), \quad (8.7b)$$

gdzie

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x U_0(x) \sin(2y(x)) dx, \quad (8.8a)$$

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x U_0(x) \cos(2y(x)) dx, \quad (8.8b)$$

$$\delta \equiv y(\infty) = \sqrt{2\pi} q_0. \quad (8.8c)$$

Przybliżając

$$\int_{-\infty}^x e^{-s^2/2} ds \approx \sqrt{2} \int_{-\infty}^x e^{-s^2} ds, \quad (8.9)$$

można wykonać całkowanie przez części w (8.8), otrzymując w rezultacie

$$A = \sqrt{2} q_0 \sin 2\delta, \quad B = \sqrt{2} q_0 (\cos 2\delta - 1). \quad (8.10)$$

Współczynniki rozpraszania w granicy $|\lambda| \ll 1$ mają zatem postać

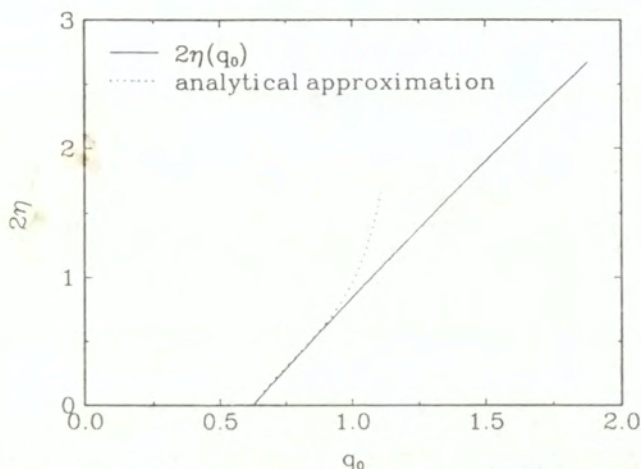
$$a(\lambda) = \cos \delta - 2\sqrt{2}i\lambda q_0 \sin \delta, \quad b(\lambda) = i \sin \delta. \quad (8.11)$$

Zero współczynnika odbicia $a(\lambda)$ położone jest na osi urojonej i wyznacza amplitudę generowanego solitonu

$$2\eta = -\sqrt{\pi} \frac{\text{ctg} \delta}{\delta}. \quad (8.12)$$

Na Rys. 1 porównano analityczne przybliżenie amplitudy solitonu generowanego przez wiązkę Gaussa o płaskim froncie falowym (8.12) z wynikiem dokładnym, otrzymanym przez

numeryczne rozwiązanie zagadnienia prostego (6.1), tak jak zostało to opisane w Dodatku B, w zakresie od progu generacji pierwszego solitonu do progu generacji rozwiązania dwusolitonowego. Wyrażenie (8.12) bardzo dobrze przybliża wynik numeryczny w zakresie małych amplitud generowanego solitonu, natomiast dla większych amplitud wiązki padającej wkład osobliwości funkcji $\text{ctg}\delta$ staje się istotny i przybliżenie $|\lambda| \ll 1$ przestaje obowiązywać.



Rys. 1. Porównanie przybliżenia analitycznego (8.12) na amplitudę generowanego solitonu (punkty) z numerycznie otrzymanym wynikiem dokładnym (linia ciągła).

Warto wspomnieć, że w granicy małego λ współczynnik rozpraszania $b(\lambda)$ dla pobudzenia wiązką sech (7.10b) ma tę samą postać ($\text{sech}(\pi\lambda) \approx 1$) co dla pobudzenia rzeczywistą wiązką Gaussa (6.4). Jest to jeszcze jedna konsekwencja faktu, że oba profile można przybliżyć tą samą funkcją (7.9) w pobliżu osi wiązek.

9. PARAMETRY SOLITONÓW DLA NIESKOLIMOWANYCH WIĄZEK GAUSSA

W poprzednich rozdziałach pokazano, że przestrzenny soliton, będący rozwiązaniem NSE, może być wygenerowany skolimowaną ($\zeta_i = 0$ w $\zeta = 0$) wiązką Gaussa jeżeli $q_0 > \sqrt{\pi/8}$ (patrz

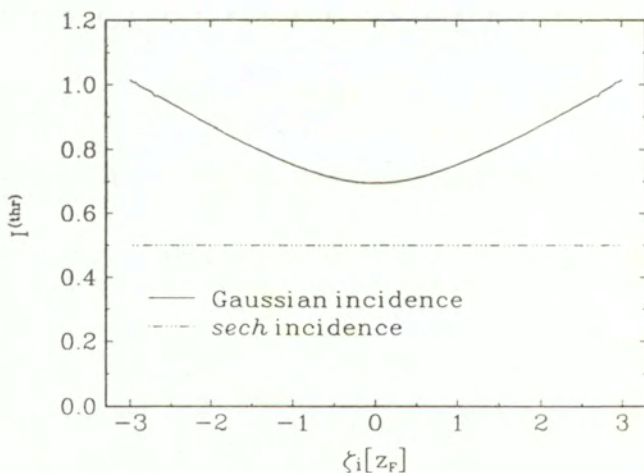
rów. (7.6)). Jest to konsekwencją faktu, że amplituda solitonu, znaleziona jako położenie zera współczynnika odbicia $a(\lambda)$, musi być dodatnio określona. Dla nieskolimowanej wiązki Gaussa (6.4) w płaszczyźnie początkowej, warunek zerowej amplitudy solitonu

$$\eta(q_0, \zeta_i) = 0, \quad (9.1)$$

definiuje funkcję $q_0^{(thr)}(\zeta_i)$, która może zostać wyznaczona numerycznie. Metoda numeryczna rozwiązująca ten problem została opisana w Dodatku B. Znając $q_0^{(thr)}(\zeta_i)$ można obliczyć progową moc wiązki Gaussa niezbędną do generacji solitonu przestrzennego

$$I^{(thr)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, 0)|^2 dx = \sqrt{\pi} |q_0^{(thr)}(\zeta_i)|^2, \quad (9.2)$$

w funkcji parametru rozkolimowania wiązki ζ_i . Wyniki obliczeń przedstawiono na Rys. 2.



Rys. 2. Moc progowa $I^{(thr)}$ niezbędna do pobudzenia solitonu wiązkami Gaussa (linia ciągła) i *sech* (linia ciągło-punktowana) w funkcji parametru rozkolimowania wiązki Gaussa ζ_i .

Moc progowa wiązki $I^{(thr)}$ jest najmniejsza gdy wiązka pobudzająca ośrodek nieliniowy jest skolimowana ($\zeta_i = 0$) i wzrasta przy wzroście rozkolimowania wiązki. Jakkolwiek wartość

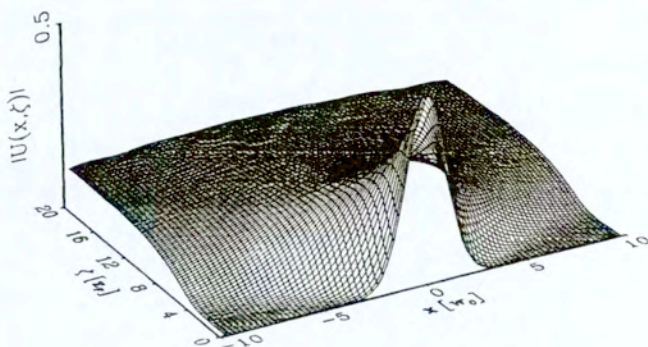
mocy progowej $I^{(thr)}$ nie zależy od znaku ζ_i , propagacja w ośrodku nieliniowym wiązek o zbieżnym froncie falowym ($\zeta_i < 0$) jest różna od propagacji o froncie początkowo rozbieżnym ($\zeta_i > 0$) (patrz Rozdział następny).

Dla wiązki o początkowym rozkładzie amplitudy w postaci funkcji *sech* (7.8) amplituda progowa generacji solitonu wynosi $A^{(thr)} = 1/2$ (7.12), co pozwala wyznaczyć wartość mocy progowej jako

$$I_s^{(thr)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |A \operatorname{sech}(x)|^2 dx = 2(A^{(thr)})^2 = \frac{1}{2}, \quad (9.3)$$

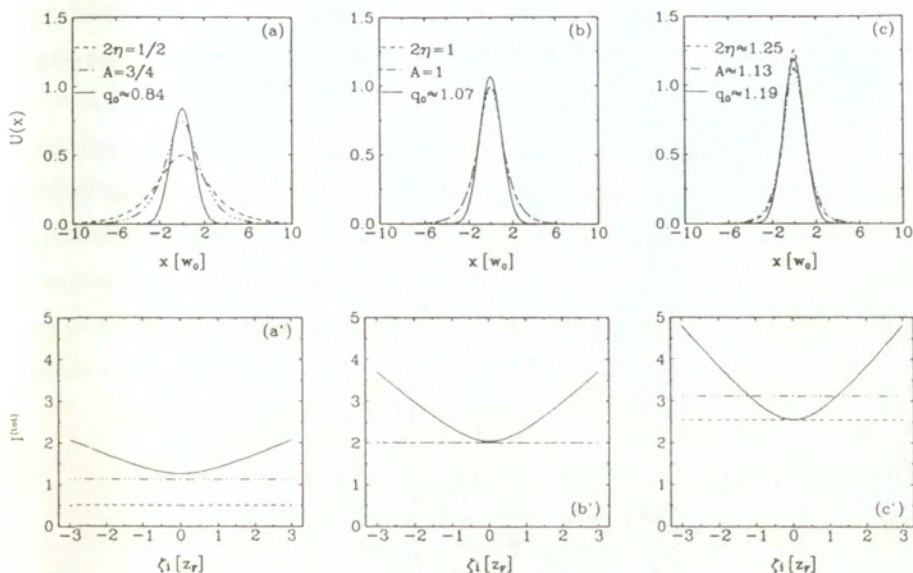
Z Rys. 2 wynika, że wiązka *sech* wymaga mniejszej mocy progowej do generacji solitonu w polu dalekim niż wiązka Gaussa. Wynika to z faktu, że funkcja *sech* jest w *naturalny* sposób związana z rozwiązaniem NSE - w polu dalekim rozwiązanie to jest algebraiczną sumą pola solitonu (4.3) i wkładu od pola promieniowania [87]. Funkcja (7.8) *nie* jest jednak rozwiązaniem NSE - *jedynie* w przypadku $A = 1$ stanowi ona rozwiązanie jednosolitonowe, jak było to dyskutowane w Rozdz. 7 B. W ogólnym przypadku początkowa wiązka $A \operatorname{sech}(x)$ pobudza solitony przestrzenne o amplitudach i szerokościach określonych przez (7.11).

Dla wiązki Gaussa o mocy mniejszej od mocy progowej, indukowana przez nią nieliniowa zmiana stałej dielektrycznej nie jest wystarczająco silna do skompensowania dyfrakcji: wiązka rozplywa się, lub w języku teorii solitonów, propaguje się jako pole promieniowania [86]. Funkcja $F(x; \zeta)$ (3.25) zawiera jedynie człon związany z transformacją Fouriera współczynnika odbicia $r(\lambda; 0)$, który zanika ze wzrostem ζ . W efekcie amplituda wiązki maleje zaś jej szerokość zwiększa się w trakcie propagacji, jak pokazano na Rys. 3.

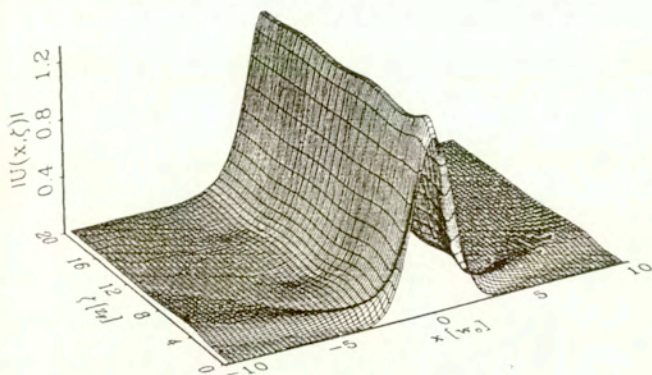


Rys. 3. Propagacja skolimowanej ($\zeta_i = 0$) wiązki Gaussa o amplitudzie $q_0 = 0.5$ ($q_0^{(thr)} \approx 0.62$).

Proces "dopasowywania" pola solitonu w $\zeta = \infty$ do rozkładów amplitudy początkowych ($\zeta = 0$) wiązek Gaussa (6.4) i *sech* (7.8) przedstawiono na Rys. 4a-c. Amplitudy solitonów w polu dalekim wynoszą odpowiednio: $2\eta = 1/2, 1$, oraz 1.25 . Zależność mocy $I^{(tot)}$ wejściowych wiązek Gaussa od parametrów rozkolimowania ζ_i przedstawiona została na Rys. 4a'-c'. Każda wiązka o mocy wyznaczonej przez tą krzywą generuje *taki sam* soliton o profilu przedstawionym na rysunku wyżej. Dla amplitud solitonów 2η mniejszych od 1, zarówno wiązka *sech* jak i Gaussa zmniejszają amplitudy i zwiększają szerokości w procesie formowania solitonu. Dla większych wartości 2η ma miejsce odwrotny proces. Niemniej jednak, wyróżnione są dwa przypadki z punktu widzenia wydajności energetycznej pobudzenia solitonu. *Calkowita* konwersja mocy dla wiązki początkowej o profilu *sech* ma miejsce dla $2\eta = 1$, tzn. wtedy gdy profil początkowy zostaje zachowany w trakcie propagacji (Rys. 4b, b'). Analogiczna sytuacja ma miejsce dla pobudzenia gaussowskiego - dla $2\eta \approx 1.25$; 99.5% energii wiązki pobudzającej jest prowadzone w wiązce solitonowej. Poza tym, początkowy rozkład pola jest niemal równy rozkładowi wzbudzonego solitonu (Rys. 4c, c'). Jest zatem możliwa niemal 100% konwersja mocy przy odpowiednio dobranych parametrach wiązki Gaussa. Nie jest to jednakże przypadek *samopulpowania* wiązki, ze względu na obecność oscylacji szerokości i amplitudy wiązki w trakcie propagacji.



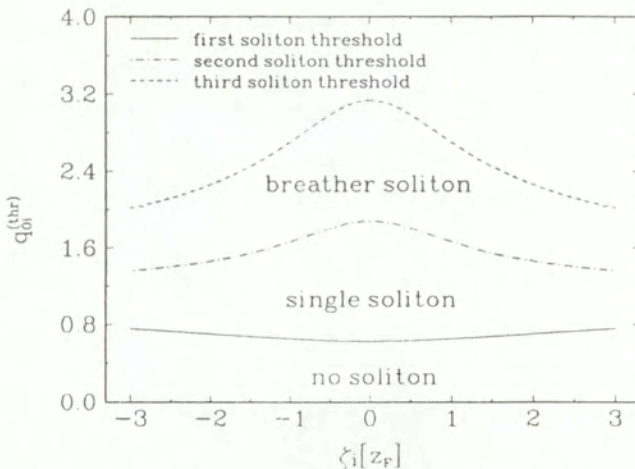
Rys. 4. Rozkłady pola w płaszczyźnie początkowej $\zeta = 0$ wiązek Gaussa (linia ciągła), i *sech* (linia przerywano-punktowana) oraz pole solitonu w strefie dalekiej (linia przerywana) dla amplitud solitonów: (a) $2\eta = 1/2$, ($q_0 \approx 0.84$, $A = 3/4$); (b) $2\eta = 1$ ($q_0 \approx 1.07$, $A = 1$); (c) $2\eta \approx 1.25$ ($q_0 \approx 1.19$, $A \approx 1.13$). Rys. a'-c' - zależność mocy $I^{(tot)}$ wiązek Gaussa i *sech* niezbędnych do generacji solitonu o amplitudzie 2η .



Rys. 5. Propagacja skolimowanej ($\zeta_1 = 0$) wiązki Gaussa; parametry jak na Rys. 4c.

Ilustruje to Rys. 5, gdzie pokazano formowanie się solitonu z wejściowej, skolimowanej ($\zeta_i = 0$) wiązki Gaussa o amplitudzie odpowiadającej przypadkowi maksymalnej konwersji mocy.

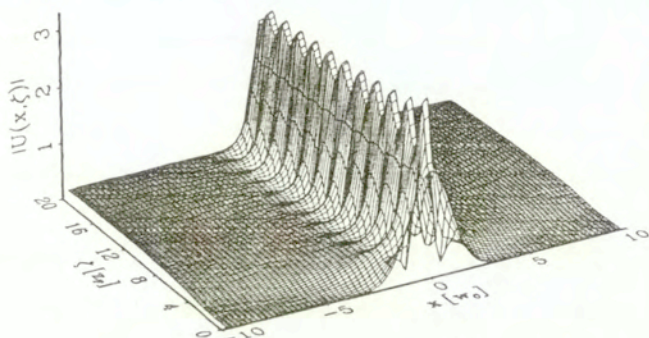
W Rozdz. 7 A znaleziono wartości amplitud progowych (7.6) niezbędnych do pobudzenia solitonów przestrzennych dowolnego rzędu skolimowaną ($\zeta_i = 0$) wiązką Gaussa. Rys. 6 przedstawia zależność amplitud progowych do pobudzenia solitonów drugiego (breather) i trzeciego rzędu od parametru rozkolimowania wiązki ζ_i . Przy wzroście odległości płaszczyzny padania wiązki na ośrodek nieliniowy od jej talii (wzroście ζ_i), amplituda progowa do generacji solitonów wyższych rzędów maleje w porównaniu do przypadku pobudzenia wiązką skolimowaną. Jest to efekt odwrotny do przypadku generacji pierwszego solitonu.



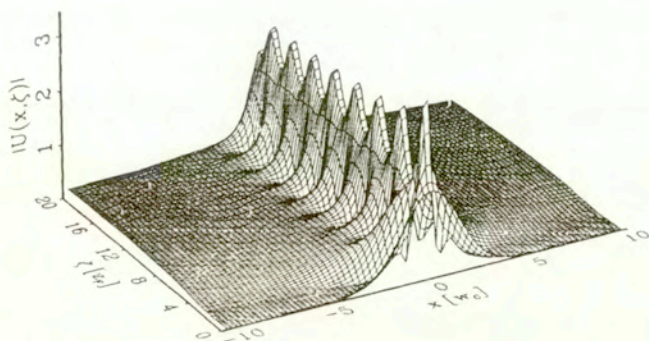
Rys. 6. Zależność amplitud progowych, niezbędnych do pobudzenia kolejnych solitonów wiązkami Gaussa, od parametru rozkolimowania ζ_i

Niemniej jednak fizyczny obraz propagacji wiązki o amplitudzie bliskiej wartości amplitudy generacji kolejnego solitonu nie pozwala ocenić ilości solitonów obecnych w widmie. Ilustrują to Rysunki 7 i 8, gdzie pokazano progację wiązki o amplitudzie $q_0 = (3/2)\sqrt{\pi/2}$ (próg generacji solitonu drugiego rzędu dla wiązki skolimowanej). Na Rys. 7 wiązka pobudza ośrodek

nieliniowy w swej talii – amplituda generowanego solitonu wynosi $2\eta \approx 2.66$. Rys. 8 przedstawia propagację tej samej wiązki, ale o zbieżnym froncie falowym w momencie pobudzenia ośrodka nieliniowego ($\zeta_i = -1$) – generowane są dwa solitony o amplitudach $2\eta_1 \approx 2.3$, $2\eta_2 \approx 0.48$. W obu przypadkach oddziaływanie solitonów z polem promieniowania ma ten sam charakter – oscylacji amplitudy i szerokości wiązki.



Rys. 7. Propagacja skolimowanej ($\zeta_i = 0$) wiązki Gaussa o amplitudzie: $q_0 = 1.87$; amplituda generowanego solitonu: $2\eta \approx 2.66$.



Rys. 8. Propagacja początkowo zbieżnej ($\zeta_i = -1$) wiązki Gaussa o amplitudzie: $q_0 = 1.87$; amplitudy generowanych solitonów: $2\eta_1 \approx 2.3$, $2\eta_2 \approx 0.48$.

Ponieważ rozwiązanie dwusolitonowe propaguje się wzdłuż osi ζ , powstaje problem rozseparowania obu solitonów poprzez zamianę amplitudy na inną wielkość fizyczną, np. na kąt propagacji od osi ζ układu współrzędnych. Podobny problem został ostatnio rozwiązany dla związanych solitonów (bound solitons) czasowych w światłowodach optycznych [89]. Autorzy wykorzystali fakt, że na skutek niewielkiego asymetrycznego zaburzenia potęjału rozpraszającego w IST (początkowego rozkładu amplitudy) początkowo związane solitony (o jednakowych prędkościach) uzyskują różne prędkości w zależności od swojej amplitudy [44] i w efekcie separują się w trakcie propagacji w światłowodzie. Zasygnalizowany tu problem jest podobnej natury (w dziedzinie solitonów przestrzennych) i należy się spodziewać, że można go rozwiązać w podobny sposób (np. przez wprowadzenie do układu dwu-fotonowej absorpcji [59]).

Położenie zera współczynnika rozpraszania $a(\lambda_i)$ wyznacza parametry generowanych solitonów. W przypadku rzeczywistego i symetrycznego potencjału $U_0(x)$ λ_i jest czysto urojone [44]. Obliczenia numeryczne pokazują, że fakt ten jest także prawdziwy dla symetrycznego potencjału zespolonego (6.4). W Rozdz. 8 pokazano zależność amplitudy generowanego solitonu w funkcji amplitudy wiązki Gaussa: $2\eta(q_0)$ (8.12) w granicy $\eta \ll 1$. Na Rys. 9 porównano amplitudy solitonów pobudzanych skolimowaną ($\zeta_i=0$) wiązką Gaussa o amplitudzie q_0 z analitycznym rezultatem otrzymanym dla pobudzenia funkcją *sech* (7.11), w zakresie do progu generacji solitonu czwartego rzędu. Amplitudy solitonów pobudzanych wiązką Gaussa są w przybliżeniu liniową funkcją (w zakresie numerycznej dokładności otrzymanego wyniku) amplitudy q_0 . Co więcej, dla pierwszego solitonu generowanego w widmie zagadnienia prostego, rów. (7.11) ma postać

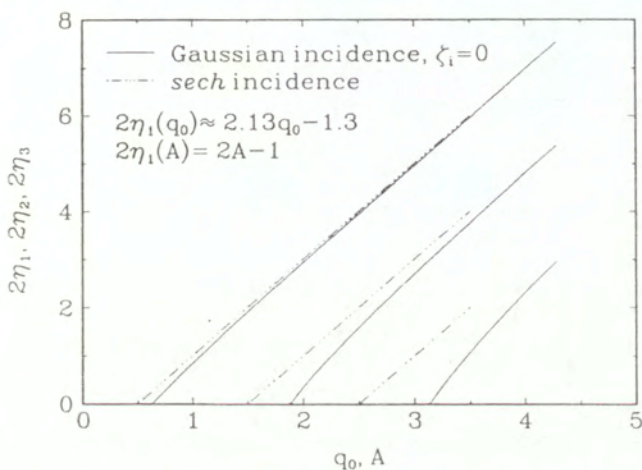
$$2\eta_1 = 2A - 1, \quad (9.4)$$

podczas gdy liniowa regresja numerycznego wyniku przedstawionego na Rys. 9 daje

$$2\eta_1 \approx 2.13q_0 - 1.3. \quad (9.5)$$

Zgodność pomiędzy tymi rezultatami jest wynikiem podobieństwa początkowych rozkładów amplitud w obu wiązkach (7.9). Dla solitonów wyższych rzędów jakościowa zgodność

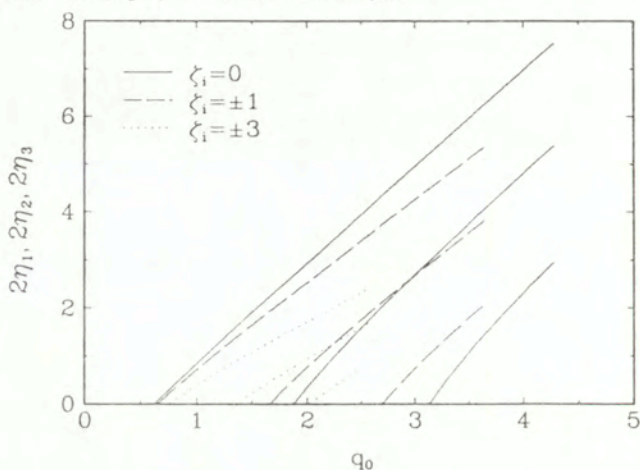
pomiędzy $2\eta_i(q_0)$ i $2\eta_i(A)$ jest także widoczna, niemniej jednak multiplikatywny czynnik $\sqrt{\pi}/2$ którym różnią się wyrażenia na amplitudy progowe dla obu rozkładów ((7.6) oraz (7.12)) powoduje znaczące różnice ilościowe.



Rys. 9. Amplitudy solitonów pobudzanych skolimowaną ($\zeta_1 = 0$) wiązką Gaussa (linie ciągłe) i wiązką *sech* (linie przerywano-punktowane).

Zależność amplitudy generowanych solitonów $2\eta_i$ od rozkolimowania początkowej wiązki Gaussa przedstawiono na Rys. 10. Wyniki obejmują zakres amplitud pobudzających q_0 do progu generacji solitonu czwartego rzędu w każdym przedstawionym przypadku. Amplitudy pobudzanych solitonów zależą niemal liniowo od amplitudy wiązki Gaussa, analogicznie do przypadku dyskusowanego na Rys. 9. Dla danej wartości amplitudy q_0 amplitudy solitonów $2\eta_i$ są największe dla wiązki skolimowanej i maleją przy wzroście parametru rozkolimowania ζ_i . Wzrost ζ_i powoduje także zmniejszenie pochylenia krzywych $2\eta_i(q_0)$ - pobudzenie solitonów staje się mniej efektywne dla wiązek które nie są zogniskowane w płaszczyźnie wejściowej do ośrodka nieliniowego. Jest to wynik "wyciekania" większej ilości mocy wiązki padającej do pola promieniowania w trakcie procesu formowania solitonu. W istocie, wiązka solitonowa posiada płaski front falowy, co powoduje że wejściowa nieskolimowana ($\zeta_i \neq 0$) wiązka Gaussa

zmienia nie tylko swój profil przekroju poprzecznego, ale także promień krzywizny frontu falowego w trakcie propagacji w ośrodku nieliniowym.



Rys. 10. Amplitudy solitonów w funkcji gaussowskiej amplitudy q_0 . Linie ciągłe – $\zeta_i = 0$; linie przerywane – $\zeta_i = \pm 1$; linie punktowane – $\zeta_i = \pm 3$.

Należy podkreślić, że nachylenia krzywych na Rys. 10 *nie zależą* od znaku parametru rozkołimowania ζ_i ; wiązki dla pobudzenia typu (6.4). Wynika to z symetrii zagadnienia prostego (6.1). Sprzęgając zespolenie równ. (6.1)

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x} = i\lambda^* \varphi_1^* - i U_0^*(x) \varphi_2^*, \quad (9.6a)$$

$$\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x} = -i\lambda^* \varphi_2^* - i U_0(x) \varphi_1^*, \quad (9.6b)$$

oraz uwzględniając: $\lambda = i\eta = -\lambda^*$ i $U_0(x; -\zeta_i) = U_0^*(x; \zeta_i)$ (patrz (6.4)) widać, że układ funkcji $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)^T$ jest rozwiązaniem układu (6.1) (z potencjałem rozpraszania $U_0(x; -\zeta_i)$). Ponieważ w $x = \infty$ wielkość η wyznacza położenie zera funkcji φ_1 , to wyznacza ona także zero funkcji φ_1^* , a tym samym zero współczynnika rozpraszania otrzymanego z potencjału rozpraszania $U_0(x; -\zeta_i)$, co kończy dowód.

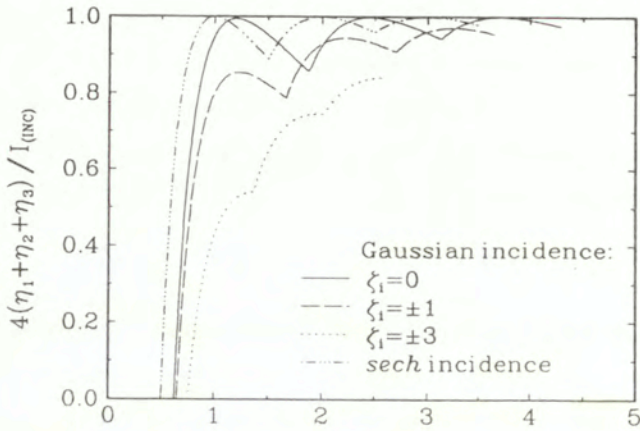
Pobudzenie solitonu jest zjawiskiem progowym. Wiązka *sech* o amplitudzie $A < 1/2$ nie pobudza wiązki solitonowej. Natomiast dla amplitudy $A = 1$ wiązka propaguje się bez

zmiany kształtu: straty na pole promieniowania są zerowe. Podobny efekt ma miejsce dla pobudzających wiązek Gaussa, jak zostało to pokazane na Rys. 4c. Wynik ten jest potwierdzony na Rys. 11, gdzie pokazano wydajność pobudzenia solitonów wiązkami Gaussa, tzn. stosunek mocy prowadzonej w solitonach do mocy wejściowej wiązki Gaussa, w funkcji amplitudy q_0 wiązki Gaussa:

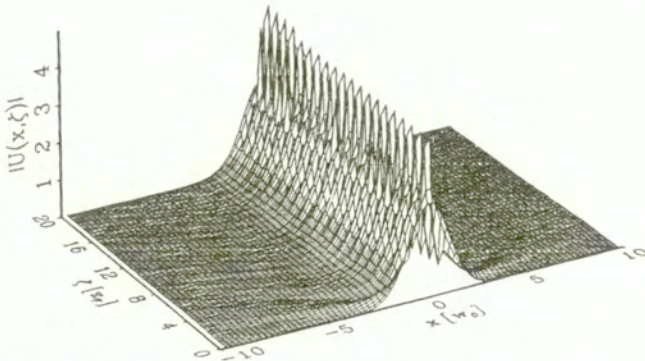
$$R_{IST} = \frac{\sum_{i=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} 4\eta_i^2 \operatorname{sech}^2(2\eta_i x) dx}{I_{(INC)}} = \frac{4(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)}{\sqrt{\pi} q_0^2}, \quad (9.7)$$

gdzie $I_{(INC)}$ jest mocą wiązki padającej (9.2). Wyniki przedstawiono dla wiązki skolimowanej ($\zeta_i = 0$) oraz wiązek rozkolimowanych z parametrami rozkolimowania: $\zeta_i = \pm 1$ oraz $\zeta_i = \pm 3$. Przy wzroście $I_{(INC)}$ od wartości progowej stosunek wydajności R_{IST} rośnie gwałtownie aż do osiągnięcia wartości maksymalnej, następnie zmniejsza się aż do pojawienia się kolejnego solitonu w widmie. Przy dalszym wzroście $I_{(INC)}$ proces ten powtarza się dla solitonów wyższych rzędów. Dla wiązki skolimowanej ($\zeta_i = 0$) maksima mają wartości bliskie jedności, tzn. prawie cała (ponad 99.5% dla pierwszego maksimum w $q_0 \approx 1.19$ i ponad 99.8% dla kolejnych) moc wiązki padającej jest prowadzona w solitonach. Niemniej jednak ta analogia do 100% konwersji energii przy pobudzeniu wiązką *sech* ma miejsce dla wyższych mocy padającej wiązki Gaussa niż dla wiązki *sech* (rezultat zaznaczono linią przerywano-punktowaną, dla porównania). Dla wiązek początkowo rozkolimowanych maksima w wydajności pobudzenia solitonów występują także, jednak nie są tak bliskie 1. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że zjawisko występowania maksimum w R_{IST} dla pobudzenia solitonu pierwszego rzędu wiązką Gaussa zostało zmierzone *doświadczalnie* (Rys. 3a w [59] oraz Rys. 3a w [66]), natomiast wyjaśnienie teoretyczne nie zostało podane.

Rys. 12 pokazuje propagację nieliniową skolimowanej ($\zeta_i = 0$) wiązki Gaussa o amplitudzie $q_0 \approx 2.45$, co odpowiada drugiemu maksimum w funkcji $R_{IST}(q_0)$ ($R_{IST} \approx 0.998$) na Rys. 11. Amplitudy pobudzanych solitonów wynoszą: $2\eta_1 = 3.85$, $2\eta_2 = 1.48$. Ponieważ straty na pole promieniowania są znikome oraz oba zera współczynnika rozpraszania $a(\lambda)$ są urojone, to rozwiązanie NSE przedstawione na Rys. 12 jest pulsującym solitonem (breather soliton) opisywanym funkcją (4.6).



Rys. 11. Stosunek wydajności pobudzenia solitonów R_{IST} (9.7) w funkcji amplitudy pobudzającej wiązki Gaussa: linia ciągła - $\zeta_i = 0$; linia przerywana - $\zeta_i = \pm 1$; linia punktowana - $\zeta_i = \pm 3$. Linia przerywano-punktowana - stosunek wydajności $R_{IST} = 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)/A^2$ dla pobudzenia wiązką *sech*



Rys. 12. Propagacja breather soliton (4.6) pobudzanego wiązką Gaussa o amplitudzie $q_0 \approx 2.45$. Solitony o amplitudach $2\eta_1 \approx 3.85$, $2\eta_2 \approx 1.48$ prowadzą 99.8% mocy wiązki początkowej.

Samopułkowanie (selftrapping) wiązki *sech* (7.8) określone jest jako zjawisko polegające na propagacji wiązki bez zmiany kształtu. Amplituda generowanego solitonu jest równa amplitudzie wiązki pobudzającej: $2\eta = 1 = A$. Podobny przypadek równości am-

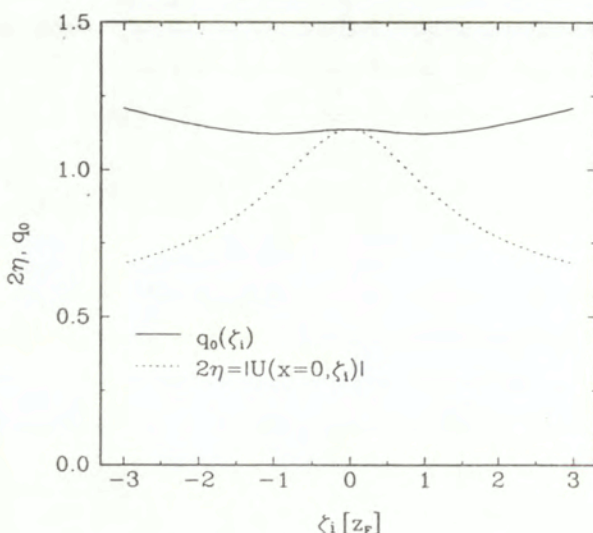
plitud solitonu i wiązki początkowej ma miejsce dla pobudzenia gaussowskiego, niezależnie od skolimowania wiązki. Jest to zilustrowane na Rys. 13, gdzie amplituda generowanego solitonu jest wyznaczona w warunku równości wartości pól na osi wiązki w płaszczyźnie padania

$$2\eta = |U_0(0; \zeta_i)|, \quad (9.8)$$

(z postaci funkcji (6.4) wynika, że wartość pola na osi wiązki zanika jak $q_0/\sqrt{1 + \zeta_i^2}$). Wyrażenie (9.8) definiuje funkcję $q_0(\zeta_i)$, przedstawioną jako linia ciągła na Rys. 13. Dla danego parametru rozkolimowania ζ_i wiązka o Gaussa o amplitudzie $q_0(\zeta_i)$ pobudza soliton o amplitudzie 2η równej wartości pola na osi wiązki $|U_0(x=0)|$ w płaszczyźnie padania $\zeta = 0$. W przypadku pobudzenia wiązką skolimowaną ($\zeta_i = 0$) amplitudy obu wiązek są sobie równe dla: $q_0 = 2\eta \approx 1.14$. W tym przypadku stosunek efektywności pobudzenia solitonu wynosi: $R_{IST} \approx 0.991$ co oznacza, że wiązka Gaussa traci w trakcie propagacji ok. 1% swojej mocy na pole promieniowania. Wzrost rozkolimowania wiązki padającej powoduje konieczność zwiększenia amplitudy q_0 w celu zapewnienia spełnienia warunku (9.8).

10. PROPAGACJA W NIELINIOWYM OŚRODKU KERRA

Metoda IST w naturalny sposób rozkłada dowolny początkowy rozkład amplitudy na część solitonową i pole promieniowania. Oddziaływanie pola promieniowania z polem solitonu może być rozumiane jako samoogniskowane wiązki początkowej [16]. Na Rys. 14 przedstawiono formowanie się solitonu z początkowych wiązek Gaussa i *sech*. Parametry rozkładów zostały tak dobrane, aby pobudzane przez nie solitony miały tą samą amplitudę. W każdym przedstawionym przypadku amplituda pola na osi wiązek $|U(0, \zeta)|$ oscyluje wokół stałej wartości 2η w trakcie propagacji. Dla danej wartości q_0 okres oscylacji jest stały, natomiast amplituda oscylacji maleje podczas propagacji [87]. Co więcej, zarówno okresy jak i amplitudy oscylacji są prawie takie same dla wiązki Gaussa i *sech* o odpowiedniej amplitudzie.

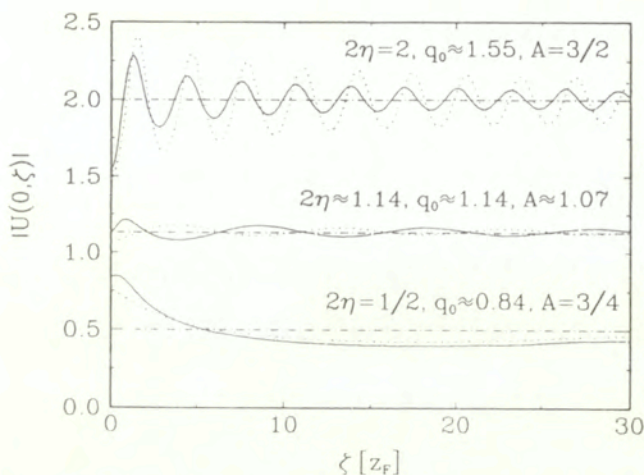


Rys. 13. Zależności $q_0(\zeta_i)$ (linia ciągła) i $2\eta(q_0)$ (linia punktowana) wyznaczające parametry samopułkowania wiązek Gaussa.

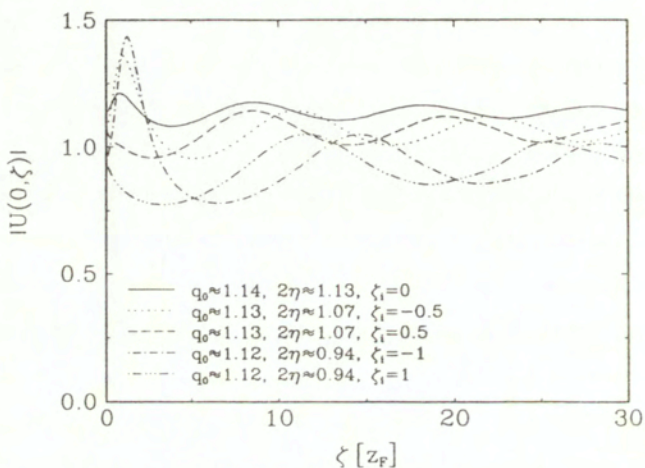
Przypadek $q_0 \approx 1.14 \approx 2\eta$ może być rozpatrywany jako przypadek samopułkowania wiązki Gaussa, gdyż amplituda oscylacji jest najmniejsza oraz profil przekroju poprzecznego pola je niemal stały w trakcie propagacji (przez analogię do samopułkowania wiązek *sech*). Nie jest to jednak przypadek maksymalnej konwersji mocy z wiązki Gaussa do wiązki solitonowej: jak zostało wspomniane, w tym przypadku $R_{IST} \approx 0.991$. Wydaje się jednak, że nie jest możliwe odróżnienie obu przypadków w eksperymencie, głównie ze względu na niewielką różnicę w wartościach amplitud wiązek pobudzających.

Dyfrakcja wiązki Gaussa, która nie jest zogniskowana w płaszczyźnie wejściowej, tzn. dla $\zeta_i \neq 0$, nie może być zrównoważona tak dobrze jak ma to miejsce w przypadku $\zeta_i = 0$. Rys. 15 ilustruje propagację pola w centrum wiązek dla $\zeta_i = 0, \pm 0.5, \pm 1$. Amplitudy wiązek określone są przez krzywą $q_0(\zeta_i)$ z Rys. 13 – oznacza to, że pole całkowite oscyluje wokół wartości początkowej pola $|U(0,0)|$ (równej amplitudzie solitonu w polu dalekim). Propagacja wiązki początkowo skolimowanej ($\zeta_i = 0$) przedstawiona została dla porównania. Propaga-

cja wiązek o zespolonej szerokości w płaszczyźnie początkowej ($\zeta_i \neq 0$) zależy zarówno od znaku jak i wartości parametru rozkolimowania ζ_i . Wiązka Gaussa zbieżna w płaszczyźnie początkowej ($\zeta_i < 0$) jest w ośrodku nieliniowym ogniskowana, następnie rozogniskowywana, itd.. Wiązka początkowo rozbieżna ($\zeta_i > 0$) w ośrodku nieliniowym ulega nieliniowej dyfrakcji w strefie bliskiej, natomiast w trakcie dalszej propagacji ogniskuje się, itd.. Zarówno amplituda jak i okres oscylacji nie zależą od znaku ζ_i , ale wzrastają przy wzroście wartości ζ_i . Wyniki przedstawione na Rys. 11 wskazują, że dla danej amplitudy q_0 amplituda solitonu generowanego przez tą wiązkę maleje ze wzrostem ζ_i . Wyniki te są potwierdzone przez numeryczne rozwiązanie NSE pokazane na Rys. 15. Co więcej, porównując propagację wiązek dla tej samej wartości ζ_i , ale dla przeciwnych znaków widać, że istnieje stałe przesunięcie wzdłuż osi ζ w oscylacji amplitudy $|U(0, \zeta)|$; jest to analogia do przesunięcia frontu falowego wiązek padających o $2z_F \zeta_i$.



Rys. 14. Amplituda pola na osi wiązek $|U(0, \zeta)|$: linie ciągłe – początkowo skolimowana ($\zeta_i = 0$) wiązka Gaussa; linie punktowane – początkowy profil *sech*; linie przerywano–punktowane – wartość amplitudy solitonu generowanego wiązkami. Amplitudy wiązek Gaussa (q_0), *sech* (A), oraz solitonowych (2η), podane na rysunku.



Rys. 15. Amplituda pola na osi wiązek $|U(0, \zeta)|$ dla różnych wartości parametru rozkolimowania ζ_i : linia ciągła - $q_0 \approx 1.14$, $2\eta \approx 1.14$, $\zeta_i = 0$; linia kropkowana - $q_0 \approx 1.13$, $2\eta \approx 1.07$, $\zeta_i = -0.5$; linia przerywana - $q_0 \approx 1.13$, $2\eta \approx 1.07$, $\zeta_i = 0.5$; linia przerywano - kropkowana - $q_0 \approx 1.13$, $2\eta \approx 0.94$, $\zeta_i = -1$; linia kropkowo - przerywano - kropkowana - $q_0 \approx 1.13$, $2\eta \approx 0.94$, $\zeta_i = 1$.

Część IV

Opis wariacyjny problemu propagacji nieliniowej

Część IV pracy poświęcona jest wariacyjnemu przybliżeniu propagacji solitonu pierwszego rzędu pobudzanego wiązką Gaussa. Analiza wariacyjnych równań propagacji otrzymanych z nieliniowego równania Schrödingera pozwala wyznaczyć parametry solitonu (amplitudę i szerokość) w przybliżeniu profilu gaussowskiego. Przybliżone rozwiązania równań wariacyjnych pokazują oscylacje pola całkowitego wokół pola solitonu, jak zostało to pokazane w Części III. Wyniki pokazują bardzo dobrą zgodność z rezultatami otrzymanymi przy użyciu Metody Zagadnienia Odwrotnego.

11. METODA WARIACYJNA

Propagacja wiązki elektromagnetycznej w nieliniowym ośrodku Kerra z symetrią płanną opisywana jest nieliniowym równaniem Schrödingera (2.3), jak zostało to opisane w Rozdz. 2. W Części III dyskutowano nieliniową propagację wiązek Gaussa. Pokazano, że przy odpowiednim doborze parametrów wiązki gaussowskiej, propaguje się ona w podobny sposób jak wiązka *sech*. Z drugiej strony, funkcja *sech* jest w naturany sposób związana z NSE; w polu dalekim jest jego asymptotycznym rozwiązaniem, natomiast w polu bliskim pole całkowite jest superpozycją pól solitonu i promieniowania. Niemniej jednak, pełne analityczne rozwiązanie NSE metodą IST możliwe jest jedynie w pewnych szczególnych przypadkach (patrz Rozdz. 7B). Powstaje zatem pytanie, czy możliwe jest modelowanie propagacji wiązki Gaussa w ośrodku nieliniowym, łącznie z wyznaczeniem pewnych charakterystycznych parametrów tej propagacji. W Części III pokazano, że wielkościami charakteryzującymi nieliniową propagację są: amplitudy i szerokości pobudzanych solitonów,

wydajność pobudzenia solitonów, amplitudy (moce) progowe generacji kolejnych solitonów oraz amplituda i okres oscylacji parametrów wiązki w trakcie propagacji. W tej Części podany zostanie przybliżony, analityczny opis nieliniowej propagacji (dla przypadku propagacji solitonu pierwszego rzędu) w ujęciu teorii wiązek Gaussa z zespolonym argumentem.

Główny wkład do zrozumienia własności rozwiązań NSE i pokrewnych równań [49] optyki nieliniowej [90] pochodzi z badań numerycznych. Jednakże obliczenia numeryczne, obok znacznego zużycia czasu komputera, nie zapewniają pełnej interpretacji obserwowanych zjawisk fizycznych. Należy zatem rozwijać przybliżone metody analityczne w celu skompensowania braku dokładnych wyników. W przypadku NSE kilka metod zostało wymienionych we wstępie do Części III. Ze względu na powszechność stosowania w literaturze wydaje się, że wyróżniona jest metoda wariacyjna, głównie z powodu dokładności otrzymywanych wyników, uniwersalności, prostoty interpretacji oraz możliwości ocenienia *a priori* dokładności otrzymanych rezultatów [81]. Metoda ta została wykorzystana do badania czaso-przestrzennego pułapkowania promieniowania w ośrodku z uwzględnieniem nieliniowości, dyfrakcji i dyspersji [91]. Zastosowano ją także do analizy układu sprzężonych NSE's opisujących propagację i wzajemne oddziaływanie impulsów w dwumodowym nieliniowym światłowodzie [92,93], oraz w światłowodzie z optyczną dwójłomnością [94]. Ostatnio opublikowano pracę, w której metoda wariacyjna uzupełniała numeryczne badania przełączania optycznego pomiędzy bistabilnymi stanami solitonu [13].

W wariacyjnym podejściu do propagacji wiązki w nieliniowym ośrodku Kerra zakłada się, że poprzeczny przekrój pola wiązki przyjmuje określoną postać, natomiast parametry opisujące ten przekrój, takie jak (zespolona) amplituda pola, szerokość i promień krzywizny frontu falowego zmieniają się w trakcie propagacji. To założenie transformuje NSE do problemu ze zredukowaną funkcją Lagrange'a. Obliczając wariację Lagrangianu względem każdego z parametrów wiązki otrzymuje się równania Eulera-Lagrange'a, będące równaniami propagacji parametrów. W ten sposób otrzymuje się skończenie wymiarowy układ równań różniczkowych zwyczajnych (ODE model) w miejsce nieskończenie wymiarowego równania różniczkowego cząstkowego. Jednakże zastosowanie metody wariacyjnej wymaga zapostulo-

wania funkcji próbnej (trial function), tak że zmiany kształtu pola mogą być modelowane jedynie przez zmianę parametrów kształtu. Z rozwiązaniem ścisłym NSE związana jest funkcja *sech* (4.3). Z tego też powodu modelowano tą funkcją rozwiązania przybliżone NSE [91,13], oraz rozwiązania sprzężonych NSE's [92–94,96]. Przy takim założeniu możliwe było znalezienie analitycznego rozwiązania modelu ODE w postaci eliptycznych funkcji Jacobiego [93,94]. Naturalnym wyborem do modelowania NSE z gaussowskim warunkiem początkowym jest przyjęcie funkcji próbnej w postaci funkcji Gaussa wystarczająco uniwersalnej, aby umożliwić zmiany w zespolonej amplitudzie wiązki oraz szerokości i krzywiznie jej frontu falowego [80–82]. Główny rezultat w tym wypadku ma postać równania nieliniowego oscylatora harmonicznego na rzeczywistą szerokość wiązki, które po scałkowaniu prowadzi do sformułowania problemu propagacji w ujęciu funkcji potencjału. Zapewnia to sugestywny, fizyczny opis propagacji solitonu w postaci rozwiązania równania nieliniowego oscylatora.

W Części III pokazano formowanie się solitonów z początkowej wiązki Gaussa. Pole promieniowania zanikało w polu dalekim, co pozwalało wyodrębnić składową solitonową pola całkowitego. Sformułowanie propagacji nieliniowej przy użyciu funkcji potencjału łączy pole promieniowania do pola całkowitego i efekcie *nie* jest możliwe wyodrębnienie pola solitonu. Jednym z najważniejszych i wciąż otwartych problemów w podejściu wariacyjnym do propagacji solitonowej jest właściwe wprowadzenie pola promieniowania do funkcji próbnej. Wstępne rozwiązanie tego problemu zostanie przedstawione w Części V.

W tej Części pracy zostanie wyodrębniona solitonowa składowa pola całkowitego w ujęciu wariacyjnym nieliniowej propagacji wiązek Gaussa. Podana zostanie *pełna* charakterystyka pobudzanego solitonu w zakresie propagacji solitonu pierwszego rzędu (4.3). Przedstawione zostanie także porównanie wyników metody wariacyjnej z rezultatami IST i bezpośredniego (numerycznego) rozwiązania NSE.

12. RÓWNIANIA EULERA-LAGRANGE DLA PODSTAWOWEJ WIĄZKI GAUSSA

Podejście wariacyjne do propagacji krótkich impulsów światła w nieliniowych włóknach optycznych zostało po raz pierwszy przedstawione w fundamentalnej pracy D. Andersona [80]. Nieliniowe równanie Schrödingera (2.3) może zostać określone jako równanie Eulera-Lagrange'a otrzymane z gęstości Lagrangianu

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left[U^* \frac{\partial U}{\partial \zeta} - U \frac{\partial U^*}{\partial \zeta} \right] - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} |U|^4. \quad (12.1)$$

Pierwsza wariacja funkcji Lagrange'a (12.1)

$$\delta \iint \mathcal{L} \left(U, U^*, \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \frac{\partial U^*}{\partial \zeta}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U^*}{\partial x} \right) dx d\zeta = 0, \quad (12.2)$$

ze względu na funkcję $U^*(x, \zeta)$ prowadzi do równania Eulera-Lagrange'a w postaci NSE (2.3).

Rozpatrywana będzie propagacja nieliniowa skolimowanej ($\zeta_i = 0$) wiązki Gaussa tzn. wiązki o rozkładzie amplitudy w płaszczyźnie wejściowej do ośrodka Kerra danym przez

$$U(x, \zeta) = q_0 \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right), \quad (12.3)$$

gdzie q_0 jest wartością przeskalowanej amplitudy, jak jest to opisane w Rozdz. 2. W ośrodku liniowym rozwiązanie parabolicznego równania propagacji w przybliżeniu przyosiowym ma postać podstawowej wiązki Gaussa (1.16). W Części III pokazano, że propagacja wiązek o rozkładzie początkowym amplitudy w postaci funkcji *sech* i Gaussa ma podobny charakter, zarówno z jakościowego jak i ilościowego punktu widzenia. Pozwala to na założenie, że ogólna postać rozwiązania w ośrodku liniowym może dobrze przybliżać rozwiązanie w ośrodku nieliniowym (w istocie, współczynnik nieliniowości n_2 jest mały: $n_2|E|^2/n_0 \ll 1$). Z tego powodu przyjęto funkcję próbną w postaci [19,21]

$$U(x, \zeta) = \frac{A(\zeta)}{v(\zeta)} \times \exp \left(-\frac{x^2}{2v^2(\zeta)} \right), \quad (12.4)$$

gdzie dopuszczono zmienność zespolonej amplitudy i szerokości (w ośrodku liniowym $A(\zeta)$ jest stałe, $v(\zeta) = \sqrt{1+i\zeta}$). Warunki początkowe zapewniające zgodność (12.4) z początkowym rozkładem amplitudy (12.3) są następujące

$$A(0) = q_0, \quad v(0) = 1. \quad (12.5)$$

Wstawiając (12.4) do (12.1), oraz korzystając z jawnej zależności od zmiennej x , można wykonać całkowanie w płaszczyźnie x w celu otrzymania "zredukowanej" zasady wariacyjnej

$$\delta \int \langle \mathcal{L} \rangle d\zeta = 0, \quad (12.6)$$

ze "zredukowanym" Lagrangianem

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{v^2 + v^{*2}}} \left[i (A^* \dot{A} - A \dot{A}^*) + i |A|^2 \frac{v^* \dot{v}^* - v \dot{v}}{v^2 + v^{*2}} - \frac{|A|^2}{v^2 + v^{*2}} + \frac{|A|^4}{\sqrt{2}|v|^2} \right], \quad (12.7)$$

gdzie "·" oznacza różniczkowanie po zmiennej ζ . "Zredukowane" równania Eulera - Lagrange'a

$$\frac{\partial \langle \mathcal{L} \rangle}{\partial u_i} - \frac{d}{d\zeta} \frac{\partial \langle \mathcal{L} \rangle}{\partial \dot{u}_i} = 0, \quad (12.8)$$

gdzie $u_i = A, A^*, v, v^*$, prowadzą do układu równań na zmienne $A(\zeta)$ i $v(\zeta)$, oraz ich zespolone sprzężenia, które mogą być przepisane w postaci układu sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{v} = \frac{i}{2v} - \frac{i|A|^2}{4\sqrt{2}} \left(\frac{v^2}{v^{*3}} + \frac{1}{v^*} \right), \quad (12.9)$$

$$\dot{A} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{v^2}{4v^{*2}} \right) \left| \frac{A}{v} \right|^2. \quad (12.10)$$

Mnożąc pierwsze i drugie z równań (12.8) odpowiednio przez A i A^* , oraz odejmując stronami, uzyskuje się równanie prowadzące do pierwszej stałej całkowania związanej z NSE (5.8a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x, \zeta)|^2 dx = \frac{|A|^2}{\sqrt{v^2 + v^{*2}}} = const = \frac{q_0^2}{\sqrt{2}}. \quad (12.11)$$

Wstawiając (12.11) do układu (12.9)–(12.10) otrzymuje się układ równań różniczkowych determinujący nieliniową propagację wiązki (model ODE)

$$\dot{v} = \frac{i}{2v} - \frac{i}{8} q_0^2 \left(1 + \frac{v^2}{v^{*2}}\right)^{3/2}, \quad (12.12)$$

$$\dot{A} = \frac{i}{2} q_0^2 \sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^{*2}}} \left(1 - \frac{v^2}{4v^{*2}}\right) A. \quad (12.13)$$

Ze znajomości zredukowanej funkcji Lagrange'a (12.7) można poprzez transformatę Legendre'a wyznaczyć funkcję Hamiltona dla NSE

$$\mathcal{H}_{NSE} = \sum_{i=1}^4 \dot{u}_i \frac{\partial \langle \mathcal{L} \rangle}{\partial \dot{u}_i} - \langle \mathcal{L} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial U(x, \zeta)}{\partial x} \right|^2 - |U(x, \zeta)|^4 \right) dx, \quad (12.14)$$

gdzie drugi człon prawej strony jest równoważny trzeciej stałej całkowania (5.8c) otrzymanej z IST. Dla funkcji próbnej (12.4) funkcja Hamiltona (12.14) przyjmuje postać

$$\mathcal{H}_{NSE} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|A|^2}{(v^2 + v^{*2})^{3/2}} \left[1 - \frac{|A|^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{v}{v^*} + \frac{v^*}{v} \right) \right]. \quad (12.15)$$

W przedstawianych obliczeniach nie wykorzystuje się funkcji potencjału do opisu nieliniowych oscylacji promienia przekroju poprzecznego wiązki, tak jak jest to standardowo robione w podejściu wariacyjnym [80,91,93,13,95]. Opis w terminach funkcji potencjału jest bardzo wygodny, gdyż dynamiczne zależności pomiędzy dyfrakcją i nieliniowością odzwierciedlone są bezpośrednio w zachowaniu funkcji potencjału. W ten sposób możliwe było wyznaczenie progów samoogniskowania i amplitudy niezbędnej do samopulapkowania wiązki Gaussa (szczegóły opisane są w pracy [80]). W podejściu przedstawionym w tej pracy uczyniono krok dalej. Wyseparowano składową solitonową pola całkowitego poprzez badanie dynamiki opisanej równaniami (12.12)–(12.13) oraz wyznaczono *a priori* próg samoogniskowania z funkcji Hamiltona (12.15). Wykorzystano analogię mechaniczną z której wynika, że dla $\mathcal{H}_{NSE} < 0$ parametry wiązki podlegają periodycznym oscylacjom, dla $\mathcal{H}_{NSE} > 0$ wiązka ulega dyfrakcji oraz $\mathcal{H}_{NSE} = 0$ wyznacza próg pomiędzy tymi zachowaniami [92].

13. WYZNACZENIE PARAMETRÓW SOLITONU W METODZIE WARIACYJNEJ

W sformułowaniu funkcji potencjału [80] jasny soliton interpretowany był jako rozwiązanie równania nieliniowego oscylatora z zerową amplitudą oscylacji promienia przekroju poprzecznego wiązki (szerokości rzeczywistej). W takim przypadku nieliniowość i dyfrakcja równoważyły się nawzajem. W tym Rozdziale wynik ten zostanie uogólniony na przypadek, gdy taka równowaga nie jest osiągnięta i pole promieniowania ma niezerowy wkład do pola całkowitego.

Zmiana zmiennych w rów. (12.12)

$$v(\zeta) = r(\zeta)e^{i\varphi(\zeta)}, \quad v^*(\zeta) = r(\zeta)e^{-i\varphi(\zeta)}, \quad (13.1)$$

proceedzi do równań dynamicznych na moduł i argument zespolonej szerokości wiązki

$$\dot{r} = \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[\frac{1}{r} + \frac{q_0^2}{\sqrt{2}} \cos^{3/2}(2\varphi) \right] = P(r, \varphi), \quad (13.2a)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2r} \cos(2\varphi) \left[\frac{1}{r} - \frac{q_0^2}{\sqrt{2}} \cos^{3/2}(2\varphi) \right] = Q(r, \varphi). \quad (13.2b)$$

Punkt krytyczny (lub równowagi, critical or equilibrium point) układu (13.2) to taki punkt (r_0, φ_0) , dla którego zachodzi: $P(r_0, \varphi_0) = 0 = Q(r_0, \varphi_0)$ [97]. Układ równań (13.2) posiada jeden punkt krytyczny w skończonej części płaszczyzny (r, φ)

$$r_s = \frac{\sqrt{2}}{q_0^2}, \quad \varphi_s = 0, \quad (13.3a)$$

oraz drugi w części nieskończonej

$$\frac{1}{r_0} = 0, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (13.3b)$$

Punkt krytyczny (13.3a) opisuje solitonową składową pola, jak zostanie to pokazane poniżej. Istnieją dwie możliwe metody do wyznaczenia parametrów solitonu z wariacyjnych równań propagacji (12.12)–(12.13). Pierwsza metoda bazuje na procedurze linearyzacji równań dynamicznych (12.12)–(12.13), zaś druga wykorzystuje pierwszy niezmiennik NSE (12.11).

A. Linearyzacja równań propagacji

Dla warunków początkowych (12.5) położonych w otoczeniu punktu (r_s, φ_s) , zachowanie układu (12.12) opisywane jest przez zachowanie jego zlinearyzowanej części

$$\dot{r} = \frac{\partial P}{\partial r}(r_s, \varphi_s)(r - r_s) + \frac{\partial P}{\partial \varphi}(r_s, \varphi_s)(\varphi - \varphi_s), \quad (13.4a)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial Q}{\partial r}(r_s, \varphi_s)(r - r_s) + \frac{\partial Q}{\partial \varphi}(r_s, \varphi_s)(\varphi - \varphi_s). \quad (13.4b)$$

Bezpośrednie obliczenia pokazują, że diagonalne składniki $\partial P/\partial r$ i $\partial Q/\partial \varphi$ zerują się w (r_s, φ_s) i układ równań (13.4) równoważny jest

$$\dot{r} = \frac{2}{r_s} \varphi, \quad (13.5a)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{2r_s^3}(r - r_s). \quad (13.5b)$$

Wielomian charakterystyczny układu (13.5) posiada dwa czysto urojone pierwiastki

$$\lambda_{1,2} = \frac{i|q_0|^4}{2} = -\lambda_2. \quad (13.6)$$

Ten rodzaj punktów w przestrzeni fazowej (r, φ) nosi nazwę centrum i oznacza, że wszystkie trajektorie początkowo bliskie punktu (r_s, φ_s) pozostają w jego sąsiedztwie i oscylują wokół niego nieskończenie wiele razy. Przyjmując początkowy rozkład amplitudy w postaci funkcji Gaussa (12.3), tzn: $r(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$, można znaleźć rozwiązanie równań (13.5) w postaci

$$r(\zeta) = r_s + \delta_0 \cos\left(\frac{\zeta}{r_s^2}\right), \quad (13.7a)$$

$$\varphi(\zeta) = -\frac{\delta_0}{2r_s} \sin\left(\frac{\zeta}{r_s^2}\right), \quad (13.7b)$$

gdzie amplituda oscylacji szerokości wiązki dana jest przez

$$\delta_0 = r(0) - r_s = 1 - \frac{\sqrt{2}}{q_0^2}. \quad (13.8)$$

Postać rozwiązania (13.7) uzasadnia wybór punktu krytycznego (13.3a) jako odpowiadającego szerokości solitonowej składowej pola. W trakcie propagacji zespolona szerokość wiązki $v(\zeta)$ oscyluje nieskończenie wiele razy wokół wartości $v_s = r_s$, w analogii do wyników przedstawionych w Rozdz. 10, Rys. 14. Niemniej jednak, w obecnym przypadku amplituda oscylacji nie maleje, jak ma to miejsce w rzeczywistości, gdyż w postaci funkcji próbnej (12.4) nie zapostulowano postaci pola promieniowania.

Rozwiązanie (13.7) jest rozwiązaniem przybliżonym wariacyjnego równania (12.12) w granicy małej amplitudy oscylacji δ_0 : $\delta_0 \ll 1$. Z tego też względu można zlinearyzować równanie opisujące ewolucję zespolonej amplitudy (12.13). Rozwinięcie prawej strony równ. (12.13) ze względu na małe δ_0 , przy uwzględnieniu $v(\zeta) = r(\zeta) \times \exp[i\varphi(\zeta)]$, gdzie $r(\zeta)$ i $\varphi(\zeta)$ dane są przez (13.7), otrzymuje się następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d \ln A(\zeta)}{d\zeta} = \frac{3i}{4r_s^2} - \frac{\delta_0}{4r_s^3} \left(3i \cos\left(\frac{\zeta}{r_s^2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\zeta}{r_s^2}\right) \right). \quad (13.9)$$

Po scałkowaniu otrzymuje się

$$A(\zeta) = C \exp \left[\frac{3i}{4} \frac{\zeta}{r_s^2} + \frac{\delta_0}{2r_s} \left(\cos\left(\frac{\zeta}{r_s^2}\right) - \frac{3}{2} i \sin\left(\frac{\zeta}{r_s^2}\right) \right) \right], \quad (13.10)$$

gdzie stała całkowania $C = q_0 \exp[-\delta_0/(2r_s)]$ wyznaczona została z warunku początkowego: $A(0) = q_0$. Ponieważ rozwiązanie (13.10) jest prawdziwe dla $\delta_0 \ll 1$, to można zlinearyzować ze względu na δ_0 to wyrażenie i wstawić do postaci funkcji próbnej (12.4), z członami gaussowskim $\exp[-x^2/2v^2(\zeta)]$ i modyfikującym amplitudę $1/v(\zeta)$, także zlinearyzowanymi względem δ_0 . Wówczas, rozwiązanie wariacyjnych równań propagacji ma postać

$$U(x, \zeta) = [q_1 + q_2(x, \zeta)] \times \exp\left(-\frac{x^2}{2r_s^2}\right) \times \exp\left(\frac{3i}{4} \frac{\zeta}{r_s^2}\right), \quad (13.11)$$

gdzie, w granicy małej amplitudy oscylacji szerokości wiązki $\delta_0 \ll 1$, wariacyjne rozwiązanie nieliniowego problemu propagacji separuje się na część solitonową o amplitudzie

$$q_1 = \frac{q_0}{r_s} \left(1 - \frac{\delta_0}{2r_s} \right), \quad (13.12a)$$

oraz wkład pola promieniowania o amplitudzie

$$q_r(x, \zeta) = \delta_0 \frac{q_0}{2r_s^2} \left\{ \left[2 \left(\frac{x}{r_s} \right)^2 - 1 \right] \cos \left(\frac{\zeta}{r_s^2} \right) - \frac{i}{2} \left[2 \left(\frac{x}{r_s} \right)^2 + 1 \right] \sin \left(\frac{\zeta}{r_s^2} \right) \right\}, \quad (13.12b)$$

w amplitudzie $[q_1 + q_r(x, \zeta)]$ pola całkowitego. Pole całkowite oscyluje wokół rozwiązania solitonowego (o amplitudzie q_1 , gdzie indeks "1" oznacza procedurę linearyzacyjną), gdzie amplituda i okres oscylacji dane są przez człon $q_r(x, \zeta)$, opisujący wkład pola promieniowania. Przy interpretacji rozwiązania (13.11) wykorzystano analogię do postaci funkcji $F(x; \zeta)$ (3.25), występującą w metodzie IST, gdzie soliton i wkład od pola promieniowania mają addytywny wkład na tym etapie procedury rozwiązania NSE. Należy podkreślić, że wyrażenie na wkład pola promieniowania (13.12b) zawiera człon x^2 . Sugeruje to, że funkcje próbne w postaci wiązki Gaussa-Hermita drugiego, lub wyższych, rzędów *mogą* modelować pole promieniowania. Funkcja (13.12b) *nie* przedstawia pola promieniowania w ścisłym znaczeniu. Jak wynika z obliczeń numerycznych przedstawionych w Części III, pole promieniowania w ośrodku nieliniowym propaguje się w kierunku od osi wiązki, natomiast funkcja (13.12b) przedstawia jedynie oscylacje z amplitudą proporcjonalną do δ_0 wokół amplitudy solitonu (13.12a). Pełniejsza dyskusja dotycząca modelowania pola promieniowania przedstawiona zostanie w Części V.

Wyrażając r_s i δ_0 przez amplitudę wiązki Gaussa q_0 , uzyskuje się amplitudę pobudzanego solitonu q_l w postaci

$$q_l = \frac{q_0^3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{q_0^2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right). \quad (13.13)$$

Rozwiązanie solitonowe w przybliżeniu funkcji Gaussa można zatem zapisać jako

$$U_s(x, \zeta) = q_l \exp \left(-\frac{x^2}{2r_s^2} \right) \exp \left(\frac{3}{4} \frac{\zeta}{r_s^2} \right). \quad (13.14)$$

Znormalizowana względem zasięgu Rayleigha z_F kzywizna frontu falowego (1.18c) wiązki solitonowej (13.14)

$$\mathcal{R}^{-1} \equiv -\text{Im} \left(\frac{1}{v_s^2} \right) = \frac{\sin(2\varphi_s)}{2r_s^2}, \quad (13.15)$$

jest nieskończona, tzn. soliton określony przez metodę wariacyjną propaguje się z płaskim frontem falowym. Szerokość wiązki dana jest przez (13.3a). Okres oscylacji przestrzennych parametrów gaussowskiej funkcji próbnej, zgodnie z (13.7) i (13.14), dany jest przez

$$Z_p \equiv \frac{2\pi}{r_s^2} = \frac{4\pi}{q_0^4} \quad (13.16)$$

B. Przybliżenie braku pola promieniowania

Na Rys. 11 pokazano, że w wyjątkiem amplitud początkowej wiązki Gaussa w zakresie wielkości progowych generacji pierwszego solitonu, moc wiązki tracona na pole promieniowania jest niewielka (rzędu 10%). Zakładając że wkład pola promieniowania jest zaniedbywalnie mały, można alternatywnie wyznaczyć amplitudę pobudzanego solitonu z zasady zachowania energii (12.11). Wówczas początkowa amplituda wiązki q_0 determinuje szerokość r_s (13.3a) i amplitudę q_v solitonu

$$q_v \equiv \left| \frac{A}{v_s} \right| = \frac{q_0^2}{\sqrt{2}} \quad (13.17)$$

Przy tym założeniu można rozwiązać równanie różniczkowe (12.13) ze stałą szerokością $v_s = r_s$, co prowadzi do solitonowej składowej pola całkowitego

$$U_s(x, \zeta) = q_v \exp\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}(q_v x)^2\right) \times \exp\left(\frac{3i}{4\sqrt{2}}q_0^2 \zeta\right) \quad (13.18)$$

Rozwiązanie (13.18) ma tę samą postać co rozwiązanie otrzymane w wyniku procedury linearyzacyjnej (13.14), różnią się one *jedynie* wartością amplitudy. Postać funkcyjna rozwiązania (13.18) przypomina postać rozwiązania dokładnego NSE (4.3) poropagującego się wzdłuż osi ζ ($\xi = 0$)

$$U(x, \zeta) = 2\eta \operatorname{sech}(2\eta x) \times \exp(2i\eta^2 \zeta) \quad (13.19)$$

W obu przypadkach amplituda rozwiązania w podobny sposób modyfikuje jego szerokość oraz czynnik fazowy. Niemniej jednak, w przeciwieństwie do analitycznego wyniku wariacyjnego (13.17), zależność $2\eta(q_0)$ może być wyznaczona jedynie z obliczeń numerycznych.

C. Przypadki graniczne

Przypadek opisywany przez Andersona jako "soliton gaussowski" (gaussian soliton) odpowiada propagacji wiązki w przypadku zerowej amplitudy oscylacji szerokości wiązki:

$\delta_0 = 0$. Z (13.8) wynika, że ma to miejsce gdy amplituda wejściowej wiązki Gaussa q_0 jest równa $\sqrt[3]{2}$. Wówczas, w trakcie propagacji, wiązka Gaussa zachowuje swój kształt

$$U_{gs}(x, \zeta) = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(\frac{3}{4}i\zeta\right). \quad (13.20)$$

W Rozdz. 14 pokazane zostanie, że przypadek ten odpowiada przypadkowi maksymalnej konwersji mocy z początkowej wiązki Gaussa do solitonu, dyskutowanemu w Części III. Należy podkreślić, że z wyjątkiem przypadku "solitonu gaussowskiego" (13.20) pole całkowite *nigdy* nie przyjmie postaci rozwiązania (13.18) (lub (13.14)) – szerokość i amplituda pola będą oscylowały nieskończenie wiele razy wokół tego rozwiązania gdyż pole promieniowania nie zostało włączone do postaci funkcji próbnej (12.4).

Należy także zaznaczyć, że przybliżone wyrażenie na okres oscylacji Z_p (13.16) w funkcji q_0 ważne jest dla małych wartości δ_0 (13.8), tzn. wtedy gdy początkowa amplituda wiązki q_0 różni się niewiele od amplitudy "solitonu gaussowskiego" $\sqrt[3]{2}$. Okres oscylacji $Z_p^{(ODE)}$ wariacyjnego modelu ODE (12.12)–(12.13) otrzymany został przez Andersona w pracy [80] przy użyciu formalizmu z funkcją potencjału jako

$$Z_p^{(ODE)} = \frac{\sqrt{2}\pi q_0^2}{|1 - \sqrt{2}q_0^2|^{3/2}}. \quad (13.21)$$

Jakkolwiek w ogólności oba wyrażenia są różne, dla wartości amplitudy odpowiadającej "solitonowi gaussowskiemu" $q_0 = \sqrt[3]{2}$ przyjmują tę samą wielkość 2π (mierzone w jednostkach odpowiadających zasięgowi Rayleigha z_F).

Jak pokazano, punkt krytyczny (13.3a) opisuje rozwiązanie solitonowe w przestrzeni fazowej (r, φ) . Drugi punkt krytyczny (13.3b) odpowiada przypadkowi, gdy nieliniowość współczynnika załamania indukowana przez wiązkę przeciwdziała jej dyfrakcji, jednak nie jest wystarczająco silna by ją przewyciężyć. Wejściowa wiązka Gaussa (12.3) ulega dyfrakcji w ośrodku nieliniowym, front falowy wypłaszcza się (w analogii do dyfrakcji w ośrodku liniowym), zaś jej szerokość $v(\zeta)$ dąży do nieskończoności – tzn. do punktu krytycznego (13.3b) (przykład takiego procesu jest zilustrowany na Rys. 3).

Amplituda progowa do generacji solitonu w ujęciu wariacyjnym może być obliczona jako punkt, gdzie funkcja Hamiltona (12.15) zmienia znak z dodatniego ($v(\zeta)$ dąży do (13.3b) w

przestrzeni fazowej (r, φ) na ujemny ($v(\zeta)$ oscyluje wokół punktu (13.3a)). Podstawiając $A = q_0$ i $v = 1$ do funkcji Hamiltona (12.15) oraz znajdując jej zero, otrzymuje się amplitudę progową generacji solitonu $q_0^{(thr)} = 1/\sqrt[3]{2}$, która różni się o ok. 25% od wartości $\sqrt{\pi/8}$ przewidywanej przez IST (patrz (7.6)). Zestawienie wyników liczbowych otrzymanych z metody wariacyjnej i IST znajduje się w Tabeli I).

14. OPIS WARIACYJNY PROPAGACJI – PORÓWNANIE Z IST I SSFFT

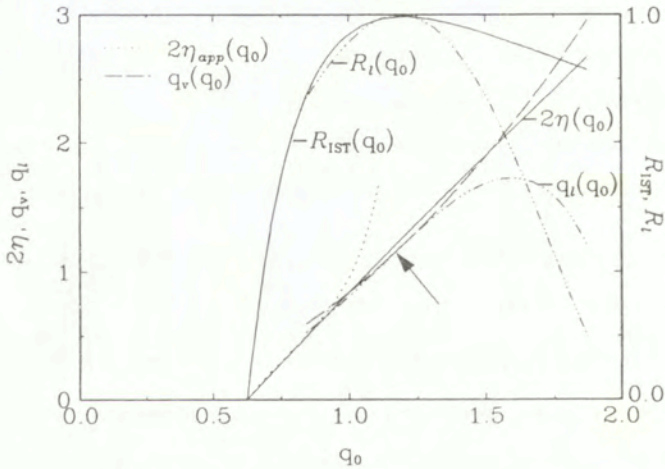
Szczegółowa analiza propagacji rozwiązań solitonowych pobudzanych wiązką Gaussa przedstawiona została w Części III. W tym Rozdziale porównane zostaną wyniki dokładnej dotyczącej propagacji solitonu pierwszego rzędu z wynikami przybliżonymi otrzymanymi z metody wariacyjnej w formalizmie wiązek Gaussa. W Tabeli I porównano wartości amplitudy solitonu 2η i amplitudy solitonowej składowej pola otrzymanej w przybliżeniu braku pola promieniowania q_v (13.18) w funkcji amplitudy wiązki początkowej q_0 .

Tabela I. Amplitudy solitonów q_v (rów. (13.17)) i 2η (patrz Część III) otrzymane z metody wariacyjnej i IST, pobudzanych wiązką Gaussa o amplitudzie q_0 (12.3).

	Metoda wariacyjna		IST	
	q_0	q_v	q_0	2η
próg samoogniskowania	$1/\sqrt[3]{2} \approx 0.84$	$1/\sqrt[3]{4\sqrt{2}} \approx 0.59$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 0.63$	0
maksymalna konwersja mocy	$\sqrt[3]{2} \approx 1.189$	$\sqrt[3]{2}$	1.195	1.25
próg pobudzenia 2-go solitonu	nie istnieje		$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.88$	2.67

A. Procedura linearyzacji vs. IST

Zestawienie wyników otrzymanych dla pobudzenia solitonu pierwszego rzędu skolimowaną ($\zeta_i = 0$) wiązką Gaussa o amplitudzie q_0 zilustrowano na Rys. 16. Porównano wariacyjnie otrzymane funkcje $q_l(q_0)$ (13.13) i $q_v(q_0)$ (13.17) z numerycznie obliczoną zależnością $2\eta(q_0)$. Strzałka na Rys. 16 oznacza punkt, gdzie linearyzacja dynamicznych równań (12.12)–(12.13) prowadzi do rozwiązania dokładnego, tzn. oznacza przypadek "solitonu gaussowskiego". W celu uzupełnienia wyników, pokazano także analityczną aproksymację amplitudy solitonu (8.12) otrzymaną z rozwiązania zagadnienia prostego w granicy $\eta \ll 1$.



Rys. 16. Przybliżenia parametrów pobudzanego solitonu w funkcji amplitudy wiązki pobudzającej q_0 : $2\eta(q_0)$ – linia ciągła; amplituda solitonu q_l (13.13) w procedurze zlinearyzowanej – linia przerywano-punktowana; amplituda q_v (13.17) w przybliżeniu braku pola promieniowania – linia przerywana; amplituda $2\eta_{app}(q_0)$ w przybliżeniu $\eta \ll 1$ (8.12) – linia punktowana. Efektywność pobudzenia solitonu: $R_I(q_0)$ – linia przerywano-punktowana; $R_{IST}(q_0)$ – linia ciągła. Strzałka – amplituda "gaussowskiego solitonu"

Jak wspomniano w Rozdz. 9, liniowa regresja numerycznej zależności $2\eta(q_0)$ pozwala zapisać

$$2\eta \approx 2.13q_0 - 1.3. \quad (14.1)$$

Styczna do krzywej $q_I(q_0)$ w punkcie $q_0 = \sqrt[3]{2}$, oznaczonym strzałką na Rys. 16, może być wyznaczona analitycznie (patrz rów. (13.13) i prowadzi do zbliżonego rezultatu

$$q_I(q_0) = 2q_0 - \sqrt[3]{2} \approx 2q_0 - 1.18 \quad (14.2)$$

Warto przypomnieć, że w przypadku pobudzenia solitonu funkcją $Asech(x)$ (7.8), zależność ta ma postać (7.11)

$$2\eta = 2A - 1. \quad (14.3)$$

Z Tabeli I wynika, że metody wariacyjna i IST przewidują nieco różne wartości amplitud odpowiadające "gaussowskiemu solitonowi". Jest to spowodowane różnym opisem asymptotycznego rozwiązania solitonowego w obu podejściach. W ścisłej metodzie IST soliton ma postać funkcji $sech$ podczas gdy w przybliżonym podejściu wariacyjnym soliton ma postać funkcji Gaussa z odpowiednio dobranymi parametrami (patrz także Rys. 17c).

Różnica pomiędzy wynikami: wariacyjnym $q_I(q_0)$ i IST $2\eta(q_0)$, dla amplitud początkowych znacznie większych od wartości odpowiadającej "gaussowskiemu solitonowi" może być wytłumaczona w następujący sposób. Startując z $q_0 = \sqrt[3]{2} = q_I$ szerokość solitonu $v_s = r_s$ (13.3a) maleje (wzrasta) przy wzroście (zmaleniu) początkowej amplitudy wiązki q_0 . Wielkość v_s wyznacza punkt krytyczny równań (13.2), zatem linearyzacja jest przeprowadzona w tym punkcie. Z drugiej strony, dokładność linearyzacji jest określona przez δ_0 (13.8), tzn. poprzez różnicę pomiędzy początkową szerokością wiązki $v(0) = 1$ a "asymptotyczną" szerokością solitonu v_s odpowiadającą amplitudzie początkowej q_0 . Zatem dla amplitud początkowych różniących się znacznie do wartości $\sqrt[3]{2}$, odpowiadającej "gaussowskiemu solitonowi", zlinearyzowane rozwiązanie (13.14) nie jest dokładne, jak jest to widoczne z porównania relacji $q_I(q_0)$ i $2\eta(q_0)$. Progi samoogniskowania (pobudzenia pierwszego solitonu w widmie zagadnienia prostego) są znacząco różne w obu metodach, dlatego relacje $2\eta(q_0)$ i $q_I(q_0)$ zaczynają się od różnych amplitud początkowych wiązki q_0 . Co więcej,

dla amplitudy progowej $q_0 = 1/\sqrt{2}$ metoda wariacyjna przewiduje niezerową amplitudę solitonu $q_l \approx q_v = 1/\sqrt[3]{2}$. Jest to powtórnie konsekwencją faktu, że linearyzacja nieliniowych równań propagacji (12.13) i (13.2) jest dokładna jedynie dla warunków początkowych w sąsiedztwie punktu krytycznego (13.3a) w przestrzeni fazowej (r, φ) .

W Rozdziale 9 numerycznie stwierdzono występowanie maksimum w stosunku efektywności pobudzenia solitonów R_{IST} (9.7). Przypadek "gaussowskiego solitonu" przewidywany po raz pierwszy przez Andersona [80], odpowiada przypadkowi występowania pierwszego maksimum (dla skolimowanej ($\zeta_i = 0$) wiązki Gaussa) we współczynniku R_{IST} , widocznemu na Rys. 11. zilustrowano to na Rys. 16, gdzie zamieszczono porównanie współczynnika R_{IST} ze stosunkiem efektywności pobudzenia solitonu R_l obliczonego dla amplitudy q_l (13.13) (otrzymanej z rozwiązania zlinearyzowanych równań wariacyjnych)

$$R_l = \frac{q_0^2}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{q_0^2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right)^2. \quad (14.4)$$

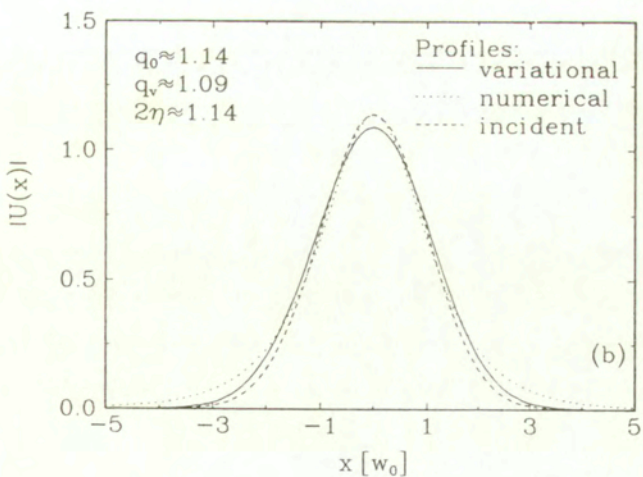
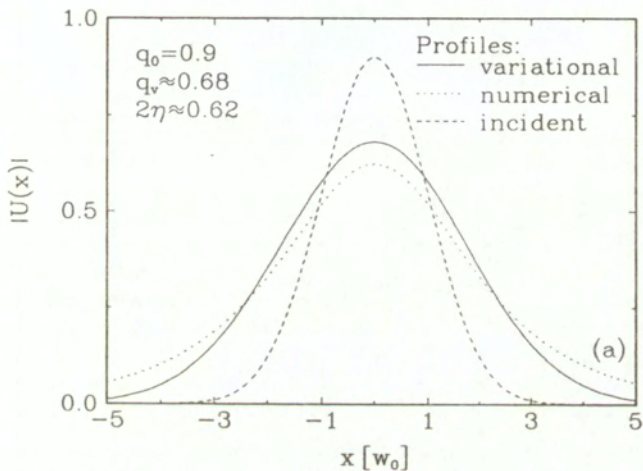
Porównanie wyników pokazuje, że metoda wariacyjna bardzo dobrze przybliżyła straty mocy na pole promieniowania w trakcie propagacji wiązki w ośrodku Kerra, w zakresie od progu pobudzenia solitonu (w podejściu wariacyjnym) do amplitud odpowiadających pobudzeniu "solitonu gaussowskiego". Należy podkreślić bardzo dobrą zgodność obu metod w ilościowym określeniu amplitud początkowych wiązki q_0 prowadzących do maksimum efektywności pobudzenia solitonu.

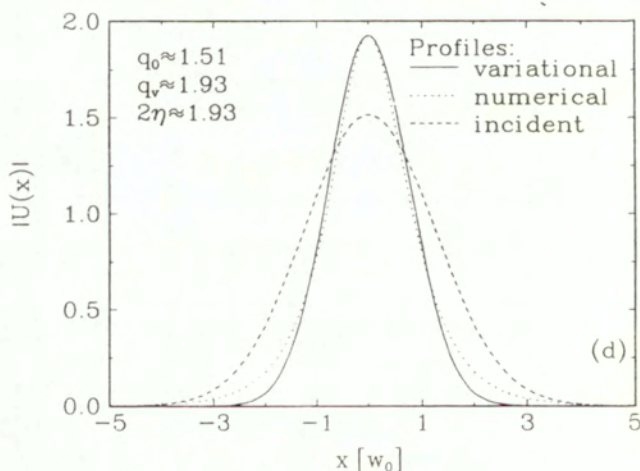
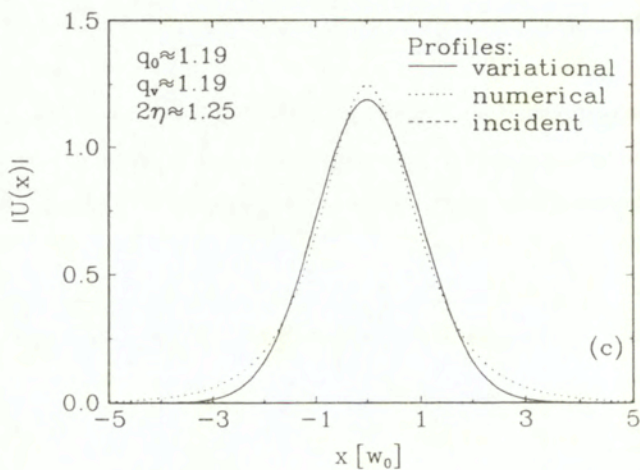
B. Przybliżenie braku pola promieniowania vs. IST

Krzywa $R_{IST}(q_0)$ pokazana na Rys. 16 potwierdza zasadność założenia uczynionego w Rozdz. 13 B o niewielkich stratach mocy wiązki początkowej na pole promieniowania. Fakt ten powoduje zgodność amplitud solitonu w przybliżeniu bez pola promieniowania $q_v(q_0)$ (13.17) z numeryczną zależnością $2\eta(q_0)$ w zakresie amplitud q_0 , gdzie pobudzany soliton prowadzi ponad 90% mocy wiązki początkowej. "Wprowadzenie" pola promieniowania do procedury oszacowana amplitudy solitonu (patrz Rozdz. 13 B) zwiększa dokładność wyniku,

szczególnie dla amplitud pobudzającej wiązki Gaussa w górnym zakresie q_0 pokazanym na Rys. 16.

Dotychczas analizowano wariacyjne przybliżenie na amplitudę pobudzanego solitonu. Na Rys. 17 porównano przekroje poprzeczne pól: gaussowskiej wiązki początkowej (12.3), solitonu (13.19) i gaussowskiego przybliżenia składowej solitonowej pola całkowitego (13.18).





Rys. 17. Przekroje pola poprzecznego skolimowanej ($\zeta_i = 0$) wiązki Gaussa (linia przerywana) (12.3), solitonu w wariacyjnym przybliżeniu bez pola promieniownia (linia ciągła) (13.18) oraz dokładnego solitonu o parametrach otrzymanych z IST (linia punktowana) (13.19). Amplitudy wiązek: (a) $q_0 = 0.9$, $q_v \approx 0.68$, $2\eta \approx 0.62$; (b) $q_0 \approx 1.14$, $q_v \approx 1.09$, $2\eta \approx 1.14$; (c) $q_0 \approx 1.19$, $q_v \approx 1.19$, $2\eta \approx 1.25$; (d) $q_0 \approx 1.51$, $q_v \approx 1.93$, $2\eta \approx 1.93$.

Dla początkowej amplitudy wiązki poniżej poziomu "gaussowskiego solitonu" ($q_0 = 0.9$), pokazanego na Rys. 17a, soliton i "wariacyjny soliton" mają wyraźnie różne amplitudy, aczkolwiek podobieństwo w przekrojach pól jest widoczne. W tym wypadku w polu promieniowania znajduje się ok. 15% mocy pola całkowitego. Ponieważ w przybliżeniu bez pola promieniowania całkowita moc wiązki skupiona jest w jej centrum, profil rozwiązania przybliżonego przebiega wyraźnie ponad dokładnym asymptotycznym rozwiązaniem NSE.

Z analizy widma zagadnienia prostego przedstawionej w Części III wynika, że przy pobudzeniu skolimowaną ($\zeta_i = 0$) wiązką Gaussa mają miejsce dwa charakterystyczne zjawiska: samopułapkowania wiązki dla $q_0 \approx 1.14$ i maksymalnej konwersji mocy wiązki padającej do solitonu dla $q_0 \approx 1.19$. Przekroje pól odpowiadające tym przypadkom pokazano odpowiednio na Rys. 17b i 17c. W przypadku samopułapkowania wiązki Gaussa (Rys. 17b) początkowa i asymptotyczna wiązka mają bardzo podobne profile (co uzasadnia nazwę tego przypadku). Procedura wariacyjna przewiduje, że warunek początkowy i "wariacyjny soliton" są opisywane przez tę samą funkcję dla amplitudy początkowej $q_0 = \sqrt[3]{2} \approx 1.19$ (Rys. 17c). Niemniej jednak w tym przypadku dokładna asymptotyczna postać pola różni się lekko od przewidywano wariacyjnie przekroju, głównie w centrum wiązki. Wynik ten można traktować jako uzupełnienie do rezultatu Andersona (Rys. 5 w pracy [80]), gdzie nie zostały podane parametry pobudzanego solitonu w przypadku "gaussian soliton" ($q_0 = \sqrt{2}$).

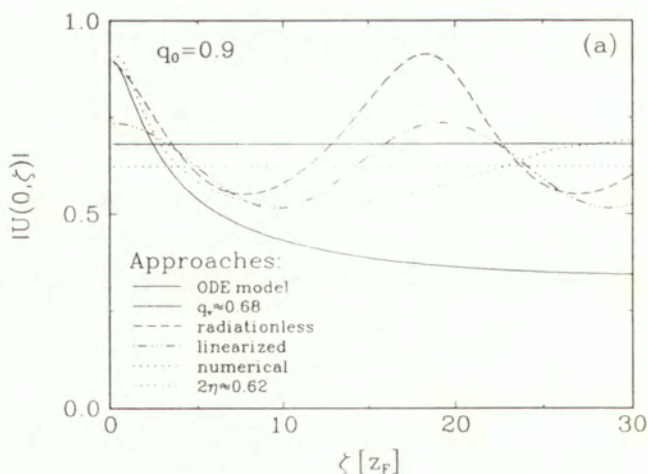
Z Rys. 16 wynika, że istnieją dwa szczególne przypadki, gdy metody wariacyjna i IST przewidują tę samą wartość amplitudy generowanego solitonu: dla początkowej amplitudy wiązki $q_0 \approx 1$, oraz dla $q_0 \approx 1.51$. Rys. 17d pokazuje bardzo dobrą zgodność pomiędzy dokładnym, asymptotycznym rozwiązaniem NSE (13.19) a jego wariacyjnym przybliżeniem o amplitudzie $q_v = 2\eta \approx 1.93$, generowanym wiązką Gaussa o amplitudzie $q_0 \approx 1.51$. Należy podkreślić, że w tym przypadku linearyzacja równań wariacyjnych (12.12) i (12.13) nie może być stosowana (jak wynika to z Rys. 16).

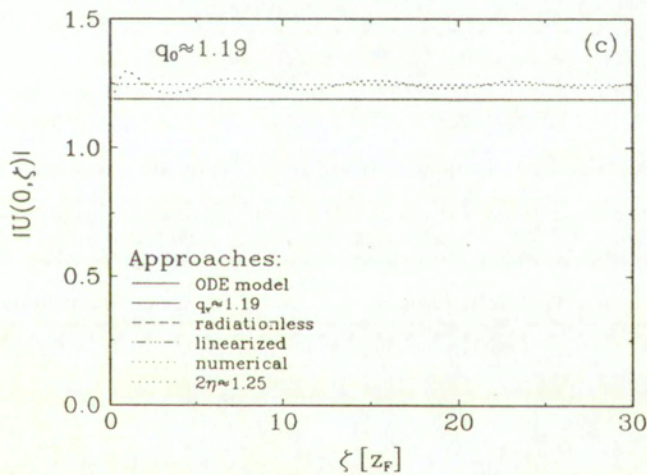
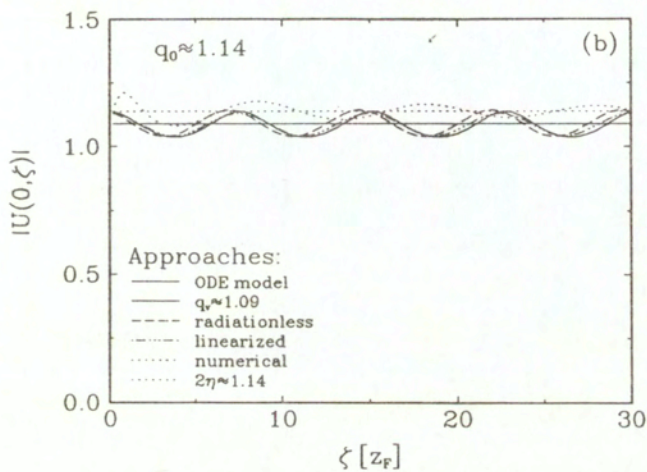
C. Propagacja nieliniowa – porównanie z metodą SSFFT

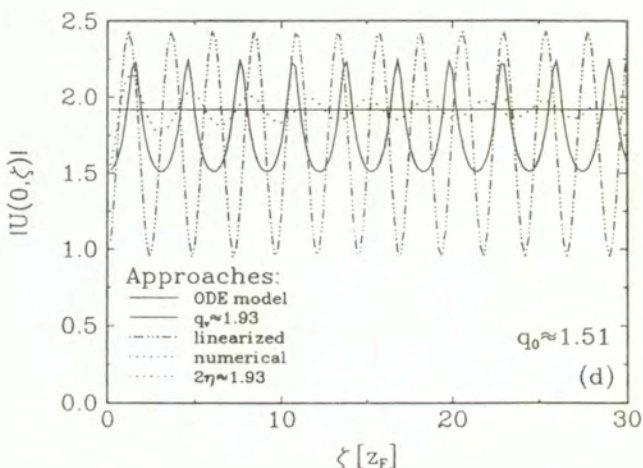
Nieliniowa propagacja wiązek Gaussa przedstawiona została w Rozdz. 10. W tym Rozdziale przedstawione zostanie zestawienie wyników otrzymanych z wariacyjnego przybliżenia propagacji w ośrodku Kerra oraz numerycznego rozwiązania NSE. Konwencja przedstawiania wyników na Rys. 18 jest następująca. Linie proste oznaczają wartości amplitud solitonu otrzymanego z metody wariacyjnej (linia ciągła) i IST (linia punktowana). Numerycznie rozwiązano równania modelu ODE dla NSE (12.13)–(12.12) (linia ciągła) oraz ściśle NSE (2.3) (linia punktowana). Przedstawiono analityczne rozwiązanie równań modelu ODE w przybliżeniu małej amplitudy oscylacji szerokości wiązki $\delta_0 \ll 1$ (13.11) (linia przerywano-punktowana). W przybliżeniu braku pola promieniowania ewolucja zespolonej amplitudy wiązki $A(\zeta)$ określona jest przez zasadę zachowania energii dla NSE (12.11), co prowadzi do ewolucji amplitudy pola na osi wiązki (linia przerywana)

$$|U(0, \zeta)| \equiv \left| \frac{A(\zeta)}{v(\zeta)} \right| = q_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{v(\zeta)}{v^*(\zeta)} + \frac{v^*(\zeta)}{v(\zeta)} \right)}, \quad (14.5)$$

gdzie $v(\zeta)$ wyznaczone jest przez (13.7). Amplitudy wiązek odpowiadają amplitudom z Rys. 17.







Rys. 18. Porównanie przybliżenia wariacyjnego nieliniowej propagacji z numerycznym rozwiązaniem NSE (opis w tekście). Amplitudy wiązek takie jak na Rys. 17.

Propagację gaussowskiego warunku początkowego przedstawionego na Rys. 17a ilustruje Rys. 18a. W strefie bliskiej pola metoda wariacyjna poprawnie aproksymuje rzeczywistą propagację wiązki, natomiast w strefie dalekiej jedynie globalne parametry propagacji (tzn. takie jak poziom wokół którego oscyluje amplituda na osi wiązki) są podobne. Rozwiązanie zlinearyzowane (13.11) (linia przerywano punktowana) nie spełnia warunku początkowego $U(0,0) = q_0$. Jest to rezultat pominięcia w rozwinięciu amplitudy $A(\zeta)/v(\zeta)$ w funkcji próbnej (12.4) wyższych członów rozwinięcia względem δ_0 : $\delta_0 \approx -0.7$ dla $q_0 = 0.9$ i warunek $\delta_0 \ll 1$ nie jest spełniony.

Przypadek samopulpowania początkowej wiązki Gaussa pokazano na Rys. 18b. W tym wypadku $\delta_0 \approx -0.08$ ($q_0 \approx 1.14$) i założenie $\delta_0 \ll 1$ jest uzasadnione. Potwierdzają to wyniki obliczeń numerycznych. Oba analityczne rozwiązania przybliżone oraz numeryczne rozwiązanie modelu ODE są do siebie zbliżone. Rozwiązania te różnią się od numerycznego rozwiązania NSE, niemniej jednak okresy i amplitudy oscylacji wokół rozwiązań solitonych, określonych przez obie metody (wariacyjną i IST), są podobne.

W przypadku maksymalnej konwersji mocy z początkowej wiązki Gaussa do solitonu, metoda wariacyjna przewiduje zerową amplitudę oscylacji szerokości wiązki: $\delta_0 = 0$, jak jest to widoczne na Rys. 18c. Faktycznie jednak, w trakcie propagacji amplituda oscylacji jest niezerowa, aczkolwiek bardzo szybko ulega wytlumieniu. Metoda wariacyjna przewiduje, że w tym przypadku okres oscylacji przestrzennych Z_p (13.16) wynosi $2\pi z_F$, co bardzo dobrze zgadza się z wynikami numerycznymi (metody SSFFT) z Rys. 18c.

Propagacja warunku początkowego diskutowanego na Rys. 17d, pokazana została na Rys. 18d. Jest to przypadek, w którym metoda wariacyjna przewiduje dokładnie amplitudę solitonu (wszystkie przedstawione rozwiązania oscylują wokół tej samej wartości amplitudy). W tym wypadku $\delta_0 \approx 0.38$ ($q_0 \approx 1.51$) i rozwiązanie zlinearyzowanych równań wariacyjnych (13.11) nie jest dobrym przybliżeniem rozwiązania modelu ODE (na Rys. 18d nie pokazano rozwiązania (14.5) ze względu na jego duży błąd). W polu bliskim rozwiązanie modelu ODE daje zbliżone rezultaty do numerycznego rozwiązania NSE. Niemniej jednak w trakcie propagacji amplituda faktycznych oscylacji pola wokół amplitudy solitonu maleje, gdyż pole promieniowania propaguje się w kierunku od osi wiązki i jego wkład do rozwiązania całkowitego staje się coraz mniejszy. Okres oscylacji przestrzennych Z_p (13.16) dobrze przybliża rzeczywisty okres oscylacji pola wokół amplitudy solitonu.

W podsumowaniu do niniejszego Rozdziału należy podkreślić, że metoda wariacyjna dobrze przybliża globalne aspekty propagacji nieliniowej, tzn. wartości amplitud solitonów, wokół których oscyluje pole całkowite, okres oscylacji, oraz, dla początkowych amplitud wiązki q_0 zbliżonych od wartości odpowiadającej "gaussowskiemu solitonowi" ($q_0 \approx \sqrt{2}$), amplitudę oscylacji. Zasadnicza różnica pomiędzy dokładnym rozwiązaniem numerycznym a rozwiązaniem wariacyjnym polega na tym, że w metodzie wariacyjnej pole promieniowania nie zostało uwzględnione w postaci funkcji próbnej (12.4). Powoduje to, że oscylacje pola całkowitego wokół pola solitonu, przewidziane przez metodę wariacyjną, nie mają charakteru zanikającego, jak ma to miejsce w rzeczywistości. Rozwiązanie tego problemu zostanie wstępnie zaproponowane w Części V.

Propagacja nieliniowa wiązek

Gausa–Hermita drugiego rzędu

Rozwiązania parabolicznego równania propagacji w liniowym dielektryku mogą być analizowane przy użyciu funkcji Gausa–Hermita z zespolonym argumentem. W tej Części pracy rozważano nieliniową propagację wiązek Gausa–Hermita drugiego rzędu. Pokazano, że wiązka Gausa–Hermita drugiego rzędu, traktowana jako warunek początkowy dla NSE, pobudza *parzystą* liczbę solitonów w ośrodku Kerra. Parametry pobudzanych solitonów, takie jak amplitudy i kąty propagacji, są wyznaczone numerycznie z widma zagadnienia prostego. Stwierdzono następujący scenariusz generacji solitonów: dla małych natężeń wiązki pobudzającej generowane jest jedynie pole promieniowania. Przy wzroście amplitudy początkowej pobudzają się *dwa* solitony, propagujące się symetrycznie od osi ζ układu współrzędnych. Wzrost amplitudy wiązki początkowej powoduje zmniejszenie względnego kąta propagacji solitonów i powyżej pewnej określonej wartości powstaje soliton pulsujący (breather soliton). Dalszy wzrost amplitudy powoduje generację kolejnych dwóch solitonów i proces powtarza się. Przedstawiono wariacyjne modelowanie nieliniowej propagacji przy użyciu funkcji próbnej w postaci wiązki Gausa–Hermita drugiego rzędu, z zespolonym argumentem. Pokazano bardzo dobrą zgodność pomiędzy metodą wariacyjną a bezpośrednim numerycznym rozwiązaniem NSE dla początkowych amplitud wiązki poniżej progu generacji solitonu pulsującego, a w szczególności, dla przypadku propagacji "czystego" pola promieniowania (poniżej progu generacji solitonów).

15. WYZNACZENIE PARAMETROW GENEROWANYCH SOLITONÓW

W ośrodku liniowym rozwiązaniem parabolicznego (w przybliżeniu przysosoiwym) równania propagacji jest biortogonalny układ funkcji Gaussa-Hermita o zespolonym argumentie (patrz Rozdz. 1). Funkcje te tworzą układ zupełny [38,40]. Z drugiej strony, propagacja w ośrodku nieliniowym określona jest przez nieliniowe równanie Schrödingera, którego N-solitonowa postać rozwiązania ogólnego podana została w pracy [2]. Co więcej, można oszacować liczbę solitonów generowanych przez dowolny potencjał rozpraszający (warunek początkowy dla NSE) [98] (w istocie, wynik sprowadza się do badania wartości całki z potencjału rozpraszania w zagadnieniu prostym, tak jak to pokazano w Rozdz. 7 A – autorzy znaleźli ogólną postać oszacowania ilości solitonów dla kilku nieliniowych równań, dla których istnieje IST). W Części III pokazano, że warunki początkowe w postaci funkcji Gaussa i *sech* prowadzą do podobnych ilościowych zależności pomiędzy amplitudami wiązek początkowych a amplitudami pobudzanych solitonów, szczególnie w zakresie solitonu pierwszego rzędu. W Części IV posunięto tą analogię dalej: pokazano, że w zakresie pobudzenia solitonu pierwszego rzędu rozwiązanie NSE może być *bardzo dobrze* przybliżone przez rozwiązanie podstawowe liniowego równania propagacji, ale z odpowiednio dobranymi parametrami. Parametry te (zespoloną amplitudę i szerokość wiązki) otrzymano z procedury wariacyjnej. Powstaje zatem pytanie, czy *można* rozwinąć tego typu odpowiedniość, pomiędzy rozwiązaniami podstawowymi równań nieliniowego i liniowego, na rozwiązania wyższych rzędów [19,20]. W tej Części pracy analizowany będzie przypadek nieliniowej propagacji wiązki Gaussa-Hermita drugiego rzędu (osiowo-symetryczne rozwiązanie najniższego niezerowego rzędu liniowego równania propagacji (1.11)).

Rozpatrywany będzie przypadek pobudzenia solitonów skolimowaną ($\zeta = 0$) wiązką Gaussa-Hermita drugiego rzędu (1.21)

$$U(x, 0) = q_0 \left[-1 + x^2 \right] \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right). \quad (15.1)$$

Z własności biortogonalności rozwiązań parabolicznego równania propagacji w ośrodku liniowym (1.11) wynika zerowanie się całki z warunku początkowego (1.25)

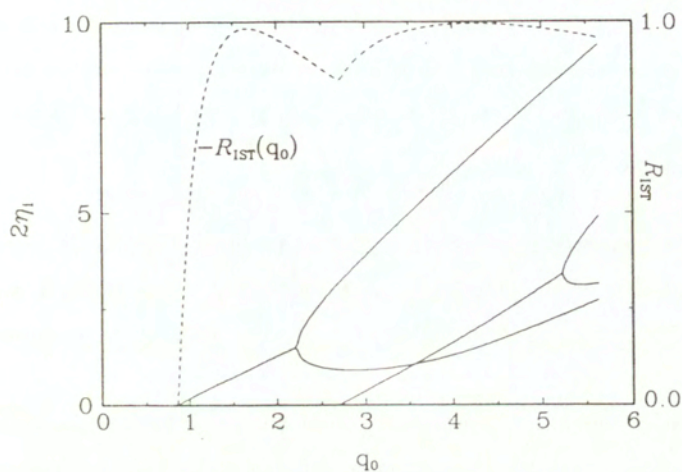
$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) dx = 0, \quad (15.2)$$

Konsekwencją tego wyniku jest fakt, że nie można zastosować analitycznych rozważań Rozdziałów 7 i 8 w celu obliczenia amplitud progowych i oszacowania parametrów generowanych solitonów.

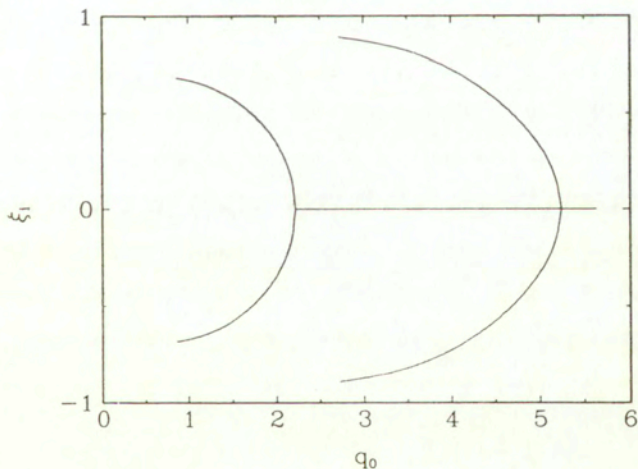
Rozwiązania jedno- (4.3) i dwusolitonowe (4.6) stanowią rozwiązania ogólne NSE w polu dalekim. Rozwiązanie te zawierają nieznanne stałe η_i oraz ξ_i które mogą być wyznaczone z warunku początkowego (15.1) przy użyciu zagadnienia prostego (6.1) – są one określone jako położenie zera współczynnika rozpraszania $a(\lambda_i)$: $a(\lambda_i) = 0$, $\lambda_i = \xi_i + i\eta_i$. Przy pobudzeniu ośrodka Kerra wiązką Gaussa z zespolonym argumentem (12.3), położenie zer współczynnika rozpraszania $a(\lambda_i)$ było czysto urojone: generowane solitony propagowały się wzdłuż osi ζ układu współrzędnych, zaś różniły się jedynie wartościami amplitud η_i . Przy pobudzeniu wiązką Gaussa-Hermita drugiego rzędu (15.1) fakt ten w ogólności nie zachodzi: istnieje składowa rzeczywista położenia zera współczynnika rozpraszania $a(\lambda_i)$: $\xi_i \neq 0$. Co więcej, dla rzeczywistego potencjału rozpraszania $U(x, 0)$ spełnione jest: $a(\lambda_i) = a^*(-\lambda_i^*)$ [2], co oznacza, że zera $a(\lambda_i)$ położone są symetrycznie względem osi urojonej η . W przedstawionych obliczeniach numerycznych wykorzystano metodę badania widma zagadnienia prostego opisaną w Dodatku B.

Na Rys. 19 przedstawiono amplitudy $2\eta_i$ pobudzanych w ośrodku nieliniowym solitonów w funkcji amplitudy q_0 pobudzającej wiązki Gaussa-Hermita (15.1), w zakresie do progów generacji solitonów 6-go rzędu. Linia przerywaną zaznaczono stosunek mocy prowadzonej w pobudzonych solitonach do mocy wiązki padającej (stosunek wydajności pobudzenia solitonów)

$$R_{IST} = \frac{\sum_{i=1}^4 \int_{-\infty}^{+\infty} 4\eta_i^2 \operatorname{sech}^2(2\eta_i x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, 0)|^2 dx} = \frac{16(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4)}{3\sqrt{\pi}q_0^2}. \quad (15.3)$$



Rys. 19. Amplitudy solitonów $2\eta_i$ pobudzanych wiązką Gaussa-Hermita drugiego rzędu (15.1) (linie ciągłe). Linia przerywana – stosunek efektywności pobudzenia solitonów R_{IST} w funkcji początkowej amplitudy q_0 wiązki Gaussa-Hermita – prawostronna oś rysunku.



Rys. 20. Części rzeczywiste położenia zer współczynnika rozpraszania $a(\lambda_i)$ (kąty propagacji solitonów od osi układu współrzędnych: $\theta_i = \arctan(2\xi_i)$) w funkcji amplitudy początkowej q_0 wiązki Gaussa-Hermita (15.1).

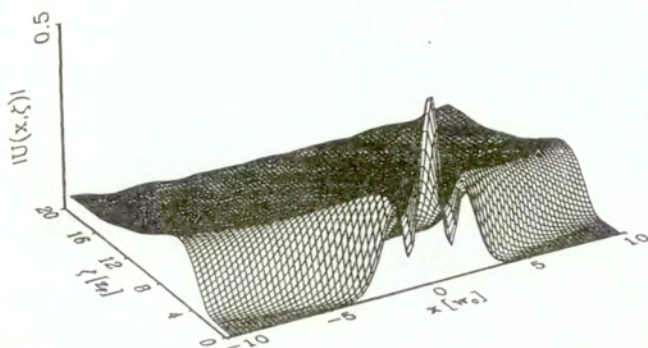
Rys. 20 przedstawia położenie części rzeczywistej ξ_i ; zer współczynnika odbicia $a(\lambda_i)$ w funkcji amplitudy q_0 wiązki początkowej. Z postaci rozwiązania jednosolitonowego (4.3) wynika, że w polu dalekim wielkości ξ_i wyznaczają kąty propagacji θ_i ; generowanych solitonów

$$\theta_i = \arctan(2\xi_i). \quad (15.4)$$

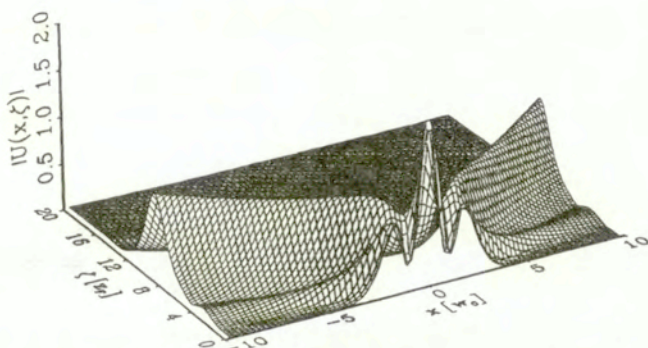
W celu potwierdzenia wyników otrzymanych z analizy widma zagadnienia prostego (6.1), przeprowadzono symulacje numeryczne procesu propagacji nieliniowej wiązki przy użyciu metody SSFFT (opisanej w Dodatku A). Wyniki tych obliczeń przedstawiono na Rys. 21-24.

Amplituda progowa do generacji solitonów wynosi $q_0^{(thr)} \approx 0.86$. Wiązka o amplitudzie mniejszej od $q_0^{(thr)}$ ulega w ośrodku nieliniowym dyfrakcji, jak zostało to pokazane na Rys. 21. Sytuacja jest analogiczna do przedstawionej na Rys. 5, gdzie całkowitej dyfrakcji ulegała podstawowa wiązka Gaussa. Wzrost amplitudy wiązki padającej powoduje generację *dwóch* solitonów w widmie zagadnienia prostego. Dla amplitudy progowej $q_0^{(thr)} \approx 0.86$ solitony o zerowej amplitudzie propagują się pod kątami $\theta_{1,2} \approx \pm 53.7^\circ$ ($\xi_i = \pm 0.68$), jak wynika to z Rys. 19 i 20.

Podobnie jak zostało to zaobserwowane dla pobudzenia solitonów podstawową wiązką Gaussa, istnieją maksima w stosunku efektywności pobudzenia solitonów R_{IST} (15.3). Pierwsze maksimum pokazane na Rys. 19 ($R_{IST} \approx 0.984$) występuje dla początkowej amplitudy wiązki: $q_0 \approx 1.67$. Pobudzone solitony o amplitudach: $\eta_1 = \eta_2 \approx 0.89$, propagują się pod kątami: $\theta_{1,2} \approx \pm 46.1^\circ$ ($\xi_{1,2} \approx \pm 0.52$), jak pokazuje to Rys. 22. Wzrost amplitudy wiązki początkowej powoduje wzrost amplitud pobudzanych solitonów oraz zmniejszenie względnego kąta propagacji pomiędzy nimi.

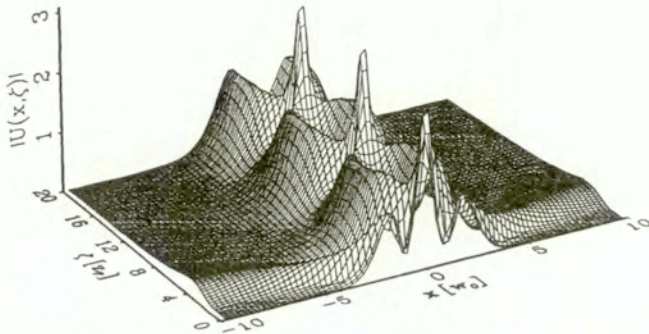


Rys. 21. Nieliniowa propagacja wiązki Gaussa-Hermita (15.1) o początkowej amplitudzie $q_0 = 0.5$ (poniżej progu generacji solitonów).



Rys. 22. Nieliniowa propagacja wiązki Gaussa-Hermita (15.1) o początkowej amplitudzie $q_0 = 1.67$. Solitony o amplitudach $2\eta_1 = 2\eta_2 \approx 0.89$, prowadzą ok. 98.4% mocy wiązki początkowej. Kąty propagacji wiązek solitonowych: $\theta_{1,2} \approx \pm 46.1^\circ$ ($\xi_{1,2} \approx \pm 0.52$).

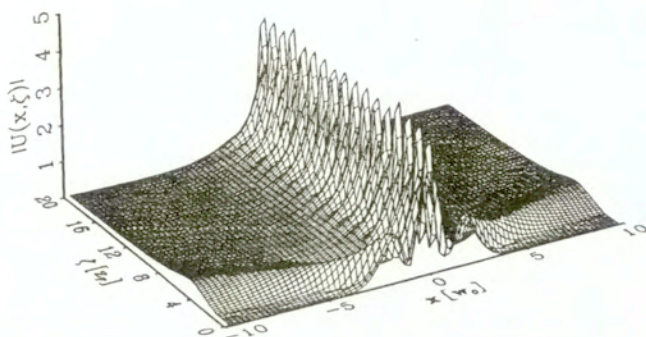
Gdy amplituda wiązki pobudzającej osiągnie wartość: $q_0 \approx 2.22$, oba solitony zaczynają tworzyć stan związany (breather soliton) propagujący się wzdłuż osi ζ układu współrzędnych. Dalszy wzrost amplitudy powoduje zwiększenie amplitudy jednego z solitonów natomiast zmniejszenie amplitudy drugiego (patrz Rys. 19): zera współczynnika rozpraszania $a(\lambda_i)$ nie są zdegenerowane (z wyjątkiem *jednego* punktu, odpowiadającego amplitudzie początkowej $q_0 \approx 2.22$).



Rys. 23. Tak samo jak na Rys. 22. Amplituda wiązki pobudzającej: $q_0 = 2.25$, amplitudy solitonów: $2\eta_1 \approx 3.2$, $2\eta_2 \approx 0.9$. Solitony tworzą stan związany: $\xi_1 = 0 = \xi_2$.

Dla amplitudy wiązki początkowej $q_0 \approx 2.22$, tzn. gdy położenie zer współczynnika rozpraszania $a(\lambda)$ staje się czysto urojone, przestrzenny okres solitonu pulsującego $Z^{(per)}$ jest nieskończony (patrz rów. (4.7)), gdyż w tym przypadku $\eta_1 = \eta_2 (\approx 0.75)$. Wzrost amplitudy q_0 powoduje wzrost różnicy amplitud pomiędzy pobudzonymi solitonami, a tym samym zmniejszenie okresu oscylacji. Sytuacja ta została przedstawiona na Rys. 23, gdzie pokazano propagację wiązki Gaussa-Hermita (15.1) o amplitudzie $q_0 = 2.25$. W tym przypadku amplitudy generowanych solitonów wynoszą $2\eta_1 \approx 1.78$, $2\eta_2 \approx 1.29$ zaś okres oscylacji przestrzennych $Z^{(per)} \approx 8.3z_F$. Solitony prowadzą ok. 92% mocy wiązki pobudzającej.

Analiza przedstawiona na Rys. 19 i 20 pokazuje, że kolejna para solitonów generuje się z początkowej wiązki Gaussa-Hermita (15.1) o amplitudzie: $q_0 \approx 2.7$. Kąty propagacji pobudzonych solitonów o zerowej amplitudzie wynoszą: $\theta_{3,4} \approx \pm 60.7^\circ$ ($\xi_{3,4} \approx \pm 0.68$) i są one większe od kątów pierwszej pary solitonów pobudzanych, wiązką o amplitudzie $q_0 \approx 0.86$. Zostało to pokazane na Rys. 24, gdzie widoczne jest "rozplywanie się" wiązek propagujących się od osi ζ układu współrzędnych (w polu dalekim wiązki te tworzą solitony o zerowej amplitudzie).



Rys. 24. Tak samo jak na Rys. 22. Próg generacji drugiej pary solitonów. Amplituda wiązki pobudzającej: $q_0 \approx 2.7$, amplitudy solitonów: $2\eta_1 \approx 3.2$, $2\eta_2 \approx 0.9$, $2\eta_3 = 2\eta_4 = 0$. Pierwsza para solitonów tworzy stan związany: $\xi_1 = 0 = \xi_2$. Druga para solitonów propaguje się pod kątami: $\theta_{3,4} \approx \pm 60.7^\circ$ ($\xi_{3,4} \approx \pm 0.68$).

Podobnie jak w przypadku pobudzenia solitonów podstawową wiązką Gaussa (patrz Część III), proces generacji solitonów wyższych rzędów wiązką Gaussa-Hermita drugiego rzędu ma podobny przebieg. Jednakże w obecnie analizowanym przypadku rolę kolejnych generowanych solitonów spełniają pary solitonów. W obu przypadkach, w zakresie generacji kolejnego solitonu / pary solitonów, istnieje maksimum efektywności pobudzenia wiązek solitonowych kolejnych rzędów. Jest to widoczne z porównania Rys. 19 i Rys. 11. Dla pobudzenia wiązką (15.1) drugie maksimum we współczynniku R_{IST} (15.3) ma miejsce dla amplitudy pobudzającej $q_0 \approx 4.22$. Solitony prowadzą ok. 99.5% mocy wiązki początkowej. Konfiguracja parametrów solitonów jest następująca: dwa solitony o amplitudach $2\eta_1 \approx 6.5$ i $2\eta_2 \approx 1.4$ tworzą soliton pulsujący ($\xi_1 = \xi_2 = 0$). Dwa pozostałe solitony o amplitudach $2\eta_3 = 2\eta_4 \approx 1.9$ propagują się od osi ζ układu współrzędnych pod kątami $\theta_{3,4} \approx \pm 53.3^\circ$ ($\xi_{3,4} \approx \pm 0.67$).

16. OPIS WARIACYJNY ZAGADNIENIA PROPAGACJI

W Części IV pokazano, że propagacja podstawowej wiązki Gaussa w nieliniowym ośrodku Kerra może być bardzo dobrze przybliżona przez propagację wiązki o funkcyjnej postaci zadanej przez rozwiązanie równania propagacji w ośrodku liniowym. W tym Rozdziale rozwinięte zostanie wariacyjne przybliżenie propagacji wiązki Gaussa-Hermita drugiego rzędu (15.1).

Właściwy wybór funkcji próbnej ma w metodzie wariacyjnej znaczenie podstawowe. Funkcja próbna o zbyt skomplikowanej postaci lub zbyt dużej liczbie parametrów opisujących proces propagacji prowadzić będzie do równań wariacyjnych o postaci uniemożliwiającej jakąkolwiek analizę zjawiska. Z drugiej strony, zbyt "prosta" funkcja próbna (tzn. o zbyt małej liczbie parametrów lub niedopasowana do przebiegu zjawiska) nie będzie właściwie opisywała przebiegu propagacji oraz prowadzić będzie do błędnych wniosków. Konieczne jest zatem znalezienie właściwej równowagi pomiędzy prostotą a dokładnością opisu.

Wydaje się, że w przypadku ośrodka Kerra o małej nieliniowości, $n_2|E|^2/n_0 \ll 1$, warunki te spełniają rozwiązania liniowego, parabolicznego równania propagacji. Co więcej, ponieważ dowolne rozwiązanie w ośrodku liniowym można przedstawić w postaci superpozycji funkcji Gaussa-Hermita o zespolonym argumente, to można się spodziewać że podobny fakt mógłby mieć miejsce (w sensie przybliżenia wariacyjnego) w ośrodku nieliniowym, chociaż w ogólności liniowa zasada superpozycji nie jest w tym przypadku spełniona. Na mocy tych rozważań przyjęto funkcję próbną w postaci wiązki Gaussa-Hermita drugiego rzędu, z argumentem zespolonym

$$U(x, \zeta) = \frac{A(\zeta)}{v^3(\zeta)} \left[-1 + \left(\frac{x}{v(\zeta)} \right)^2 \right] \exp \left(-\frac{x^2}{2v^2(\zeta)} \right), \quad (16.1)$$

z warunkami początkowymi zapewniającymi zgodność (16.1) z (15.1)

$$A(0) = q_0, \quad v(0) = 1. \quad (16.2)$$

Wstawienie funkcji próbnej (16.1) do funkcji Lagrange'a (12.1) oraz wycalkowanie po zmiennej x prowadzi do zredukowanego Lagrangianu

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{3\pi}{(v^{*2} + v^2)^{9/2}} \left\{ \frac{i|A|^2(v^{*2} - v^2)}{\sqrt{2}} (v^* v' + v v'^*) + \frac{i(v^{*2} + v^2)^2}{\sqrt{2}} (A^* A' - A A'^*) \right. \\ \left. - |A|^2 \left[\frac{5}{\sqrt{2}} (v^{*2} + v^2) - \frac{|A|^2}{8|v|^{10}} \left(v^{*8} + |v|^4 [v^4 + v^{*4} + \frac{35}{4} |v|^4 + v^8] \right) \right] \right\}. \quad (16.3)$$

Podobnie jak w Części IV, można znaleźć zredukowaną funkcję Hamiltona jako

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{3\pi|A|^2}{(v^{*2} + v^2)^{9/2}} \left[\frac{5}{\sqrt{2}} (v^{*2} + v^2) - \frac{|A|^2}{8|v|^{10}} \left(v^{*8} + |v|^4 [v^4 + v^{*4} - \frac{35}{4} |v|^4 + v^8] \right) \right]. \quad (16.4)$$

Równania Eulera-Lagrange'a określające ewolucję zespolonej szerokości $v(\zeta)$ i amplitudy $A(\zeta)$, otrzymane ze zredukowanego Lagrangianu (16.3), można zapisać w postaci

$$v' = \frac{i}{2v} - \frac{i}{8} q_0^2 \left(1 + \frac{v^2}{v^{*2}} \right)^{3/2} \left[\frac{43}{320} + \frac{7}{80} \frac{v^2}{v^{*2}} + \frac{5}{80} \frac{v^4}{v^{*4}} - \frac{1}{80} \frac{v^2}{v^{*2}} - \frac{5}{80} \frac{v^{*4}}{v^4} - \frac{4}{80} \frac{v^{*6}}{v^6} \right], \quad (16.5)$$

$$A' = \frac{i}{2} q_0^2 \sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^{*2}}} \left[\frac{9}{16} - \frac{27}{256} \frac{v^2}{v^{*2}} + \frac{9}{64} \frac{v^2}{v^{*2}} - \frac{3}{64} \frac{v^4}{v^{*4}} + \frac{1}{8} \frac{v^{*4}}{v^4} - \frac{5}{64} \frac{v^6}{v^{*6}} \right] A. \quad (16.6)$$

W celu otrzymania postaci równań (16.5) i (16.6) wykorzystano, podobnie jak w przypadku wariacyjnych równań propagacji dla podstawowej wiązki Gaussa, postać prawa zachowania energii wynikającej z równań wariacyjnych

$$\frac{|A|^2}{\sqrt[3]{v^2 + v^{*2}}} = \text{const} = \frac{q_0^2}{\sqrt[3]{2/2}}. \quad (16.7)$$

Należy podkreślić podobną strukturę otrzymanych wariacyjnych równań propagacji (16.5)–(16.6) do struktury równań otrzymanych dla podstawowej wiązki Gaussa (12.12)–(12.13). W istocie, oba układy różnią się jedynie fazowym (tzn. nie zależącym od $|v|$) członem występującym w nawiasach kwadratowych w rów. (16.5)–(16.6). Co więcej, dynamika układu jest określona przez wariacyjne równanie na zespoloną szerokość wiązki. Znając jawną postać $v(\zeta)$ można, przynajmniej formalnie, podać rozwiązanie determinujące propagację zespolonej amplitudy $A(\zeta)$.

W celu znalezienia punktów krytycznych układu dynamicznego określonego przez równanie (16.5), stosuje się przedstawienie funkcji $v(\zeta)$ we współrzędnych biegunowych (13.1), co prowadzi do nieliniowego układu równań

$$\dot{r} = \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \left[\frac{1}{r} + \frac{q_0^2}{\sqrt{2}} \cos^{3/2}(2\varphi) \right] \left[\frac{47}{320} + \frac{12 \sin(6\varphi)}{80 \sin(2\varphi)} + \frac{9 \sin(10\varphi)}{80 \sin(2\varphi)} \right] = P(r, \varphi), \quad (16.8a)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2r} \cos(2\varphi) \left[\frac{1}{r} - \frac{q_0^2}{\sqrt{2}} \cos^{3/2}(2\varphi) \right] \left[\frac{39}{320} + \frac{1 \cos(6\varphi)}{40 \cos(2\varphi)} + \frac{1 \cos(10\varphi)}{80 \cos(2\varphi)} \right] = Q(r, \varphi). \quad (16.8b)$$

Istnieją dwa punkty krytyczne (r_0, φ_0) funkcji P i Q , tzn. punkty, w których $P(r_0, \varphi_0) = 0 = Q(r_0, \varphi_0)$: jeden w skończonej części przestrzeni fazowej (r, φ)

$$r_1 = \frac{320\sqrt{2}}{51q_0^2}, \quad \varphi_1 = 0, \quad (16.9a)$$

oraz drugi w części nieskończonej

$$\frac{1}{r_2} = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4}. \quad (16.9b)$$

Punkt krytyczny (16.9a), podobnie jak w przypadku podstawowej wiązki Gaussa, jest *centrum* [97], tzn. dwie wartości własne zlinearyzowanego wokół punktu (r_1, φ_1) układu równań (16.8a)–(16.8b) są czysto urojone, o wartości numerycznej

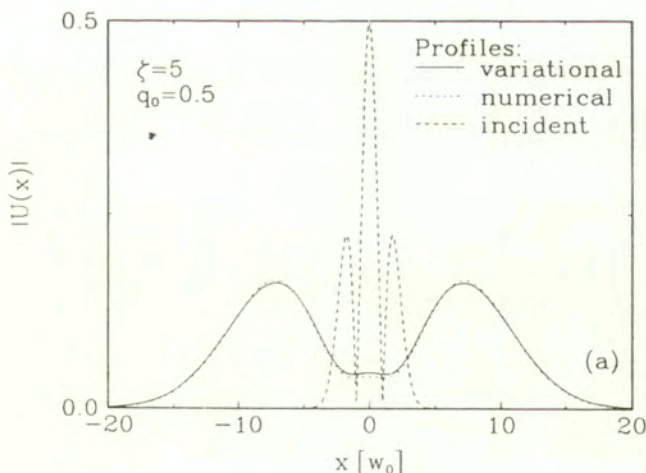
$$\lambda_{1,2} \approx \pm 0.02 i q_0^4. \quad (16.10)$$

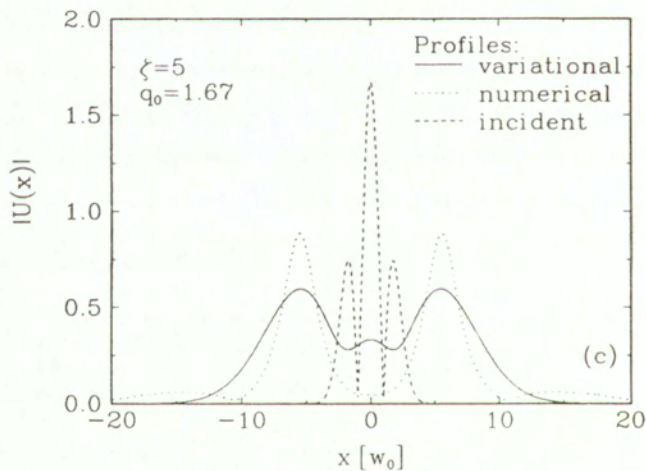
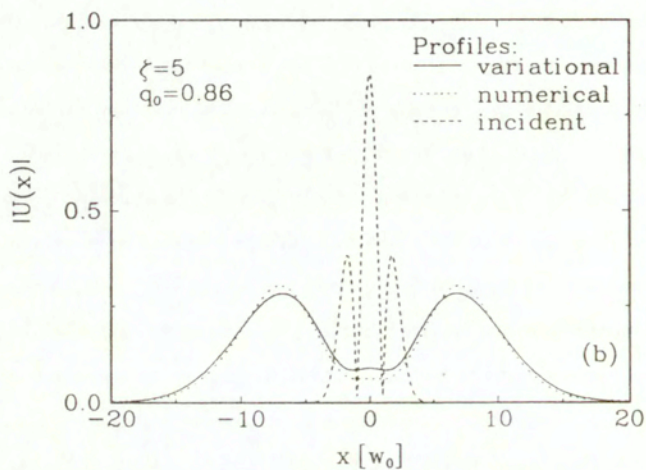
Sugeruje to, że można spodziewać się podobnego zachowania systemu dynamicznego, jak opisano to w Części IV.

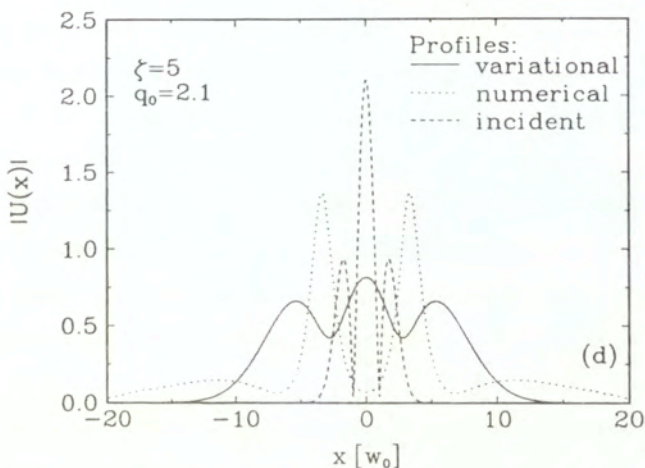
Z istnienia dwóch punktów krytycznych układu równań (16.8) wynika, że dla określonych przedziałów wartości początkowych amplitud q_0 wiązki pobudzającej, trajektorie układu w przestrzeni fazowej (r, φ) determinowane są przez jeden z tych dwóch punktów. Punkt (16.9a) opisuje periodyczne oscylacje szerokości (a tym samym amplitudy) wiązki, natomiast punkt (16.9b) odpowiada wiązce o nieskończonej szerokości i zerowej amplitudzie, tzn. wiązce która uległa całkowitej dyfrakcji w ośrodku nieliniowym. Wartość amplitudy $q_0^{(thr)}$ wiązki pobudzającej wyznaczającej próg pomiędzy tymi zachowaniami, może być wyznaczona z zerowania się funkcji Hamiltona (16.4) [92]. Podstawiając warunki początkowe (16.2) do (16.4) otrzymuje się

$$q^{(thr)} = 8\sqrt{\frac{5}{51\sqrt{2}}} \approx 2.1. \quad (16.11)$$

Należy podkreślić, że wielkość (16.11) nie wyznacza progu samogniskowania (lub generacji solitonów), jak to miało miejsce w przypadku wariacyjnej aproksymacji propagacji wiązki Gaussa rzędu podstawowego, opisaney w Części IV. Jak pokazują wyniki poprzedniego Rozdziału, oscylacja parametrów wiązki ma miejsce w przypadku propagacji solitonu pulsującego (Rys. 23–24). Próg powstania solitonu pulsującego zanlezionej został z obliczeń numerycznych (bazujących na IST) jako $q_0 \approx 2.22$, i jest on bardzo dobrze przybliżony przez amplitudę progową wyznaczoną z metody wariacyjnej (16.11). Natomiast poniżej tej amplitudy, propagacja wiązki Gaussa–Hermita (15.1) nie miała charakteru oscylującego – pobudzone solitony propagowały się od osi ζ układu współrzędnych praktycznie bez zmiany kształtu (Rys. 22). Z określenia szerokości wiązki Gaussa–Hermita (patrz Rozdz. 1) wynika, że odpowiada to zwiększaniu szerokości do nieskończoności, a więc istotnie, trajektorie systemu w przestrzeni fazowej (r, φ) dążą do punktu (16.9b). Z tego też względu wydaje się, że przy użyciu funkcji próbnej postaci (16.1) nie jest możliwe oszacowanie amplitudy progowej $q_0 \approx 0.86$ generacji solitonów – zarówno pole promieniowania (Rys. 21) jak i rozchodzące się solitony (Rys. 22) prowadzą do podobnego obrazu propagacji w przestrzeni fazowej (r, φ) . Poniżej przedstawiono numeryczną analizę rozwiązań zbiegających do tego punktu.







Rys. 25. Porównanie profili przekroju poprzecznego pól w płaszczyźnie $\zeta = 5z_F$ otrzymanych z numerycznego rozwiązania wariacyjnych równań propagacji (16.5)–(16.6) (linie ciągłe) z numerycznym rozwiązaniem NSE (linie punktowane). Profile początkowe pola – linie przerywane. Parametry wiązek: (a) $q_0 = 0.5$; (b) $q_0 \approx 0.86$, $2\eta_1 = 2\eta_2 = 0$, $\xi_{1,2} \approx \pm 0.68$; (c) $q_0 \approx 1.67$, $2\eta_1 = 2\eta_2 = 0.89$, $\xi_{1,2} \approx \pm 0.52$; (d) $q_0 \approx 2.1$, $2\eta_1 = 2\eta_2 = 1.38$, $\xi_{1,2} \approx \pm 0.26$

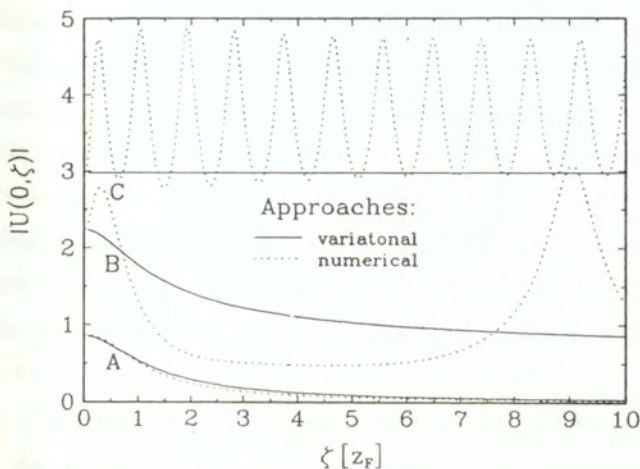
Rys. 25 przedstawia porównanie numerycznych rozwiązań wariacyjnych równań propagacji (16.5)–(16.6) z rozwiązaniami NSE metoda SSFFT (patrz Dodatek A). Profile rozwiązań przedstawiono w płaszczyźnie $\zeta = 5z_F$. Przedstawiono przypadki, gdy amplituda q_0 pobudzającej wiązki Gaussa–Hermita (15.1) jest mniejsza od amplitudy progowej pobudzenia solitonu pulsującego (w metodzie wariacyjnej). Dynamikę układu określa punkt krytyczny (13.3b). Rys. 25a przedstawia przypadek amplitudy pobudzającej mniejszej od progu generacji solitonów ($q_0 = 0.5$ – 3D obraz propagacji pokazano na Rys. 21) – w ośrodku Kerra propaguje się jedynie pole promieniowania. Widoczna jest *znakomita* zgodność wyników obu metod. Podobną zgodność uzyskano dla amplitudy progowej pobudzenia solitonów w ośrodku Kerra ($q_0 \approx 0.86$) – ilustruje to Rys. 25b. W tym przypadku, jak było to dyskutowane, solitony o zerowej amplitudzie (w polu dalekim) propagują się pod kątami

$\theta_{1,2} \approx 53.7^\circ$. Dla amplitud wiązki pobudzającej o wartościach powyżej progu generacji solitonów pogarsza się ilościowa zgodność przybliżenia wariacyjnego z faktycznym obrazem propagacji. Jak wynika z Rys. 25c (pobudzenie wiązką o amplitudzie $q_0 \approx 1.67$ – przypadek pierwszego maksimum we współczynniku R_{IST} , pokazany na Rys. 22), metoda wariacyjna pozwala dokładnie określić kąt propagacji solitonów, pomimo różnic ilościowych w przedstawionych przekrojach. Jakościowy obraz propagacji jest jednakże zachowany. Przy dalszym wzroście amplitudy wiązki pobudzającej obserwowane jest dalsze pogorszenie dokładności przybliżenia wariacyjnego. Dla amplitudy początkowej równej amplitudzie progowej do generacji solitonu pulsującego $q_0 = 2.1$ (w oszacowaniu wariacyjnym), metoda wariacyjna przestaje ilościowo przybliżać nieliniową propagację wiązki, jak ilustruje to Rys. 25d.

Amplituda wiązki pobudzającej, prowadząca do powstania "solitonu gaussowskiego" drugiego rzędu, określona jest z warunku $r_1 = r(0) = 1$ i wynosi

$$q_{2*2} = 8\sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{51}} \approx 2.98. \quad (16.12)$$

Podobnie jak w przypadku "solitonu gaussowskiego" znalezione przez Andersona [80] w przypadku propagacji podstawowej wiązki Gaussa (13.20), początkowa wiązka (15.1) o amplitudzie (16.12) propaguje się w ośrodku Kerra bez zmiany kształtu. Jest to w sprzeczności z wynikami dokładnej metody IST – z Rys. 19 wynika, że pulsujący soliton pobudzany wiązką o amplitudzie $q_0 \approx 2.98$ ma skończony okres oscylacji przestrzennych, Fakt ten jest konsekwencją zbytniej "prostoty" funkcji próbnej (16.1), jak zostało to wspomniane we wstępie do niniejszego Rozdziału. Funkcja próbna (16.1) może poprawnie aproksymować rozchodzące się wiązki w ośrodku nieliniowym (jak pokazano to na Rys. 25) oraz jakościowo oddawać charakter oscylacji solitonu pulsującego dla początkowych amplitud wiązki *poniżej* progu generacji drugiej pary solitonów ($q_0 \approx 2.7$, patrz Rys. 24). Dla amplitud powyżej tego progu w ośrodku Kerra propagują się cztery solitony oraz pole promieniowania, zatem uwzględnienie tych zjawisk wymaga zmodyfikowania (rozszerzenia) funkcji próbnej (16.1).



Rys. 26. Porównanie przybliżenia wariacyjnego (linie ciągłe) nieliniowej propagacji wiązki Gaussa-Hermita (15.1) z numerycznym rozwiązaniem NSE (linie przerywane). Amplitudy początkowe wiązek: A) $q_0 \approx 0.86$; B) $q_0 = 2.24$; C) $q_0 \approx 2.98$.

Na Rys. 26 porównano wyniki ilustrujące propagację pola na osi wiązki $|U(0, \zeta)|$, otrzymane z numerycznego rozwiązania wariacyjnych równań propagacji (16.5)–(16.6) oraz z bezpośredniego, numerycznego rozwiązania NSE, przy założeniu warunku początkowego w postaci (15.1). Dla amplitudy progowej do generacji solitonów ($q_0 \approx 0.86$) (przypadek A) metoda wariacyjna jest bardzo dokładna (patrz także Rys. 25b). W przypadku amplitudy wiązki początkowej o wartości nieco powyżej progu generacji solitonu pulsującego (przypadek B) metoda wariacyjna jakościowo przewiduje istnienie oscylacji pola na osi wiązki. Przypadek propagacji "solitonu gaussowskiego" ($q_0 \approx 2.98$) pokazany jest przez krzywe oznaczone literą C. Jak wspomniano powyżej, poprawny opis oddziaływania obu solitonów dla tego zakresu amplitud wymaga modyfikacji funkcji próbnej, np. poprzez wprowadzenie dodatkowych parametrów (szerokości i amplitud w dodatkowych wiązkach).

Dokładność metody wariacyjnej jest testowana przez porównanie z wynikami otrzymanymi z obliczeń numerycznych. Możliwe jest jednak stwierdzenie *a priori* jak dokładna jest

funkcja próbna poprzez badanie zachowania niezmienników NSE [81]. Ponieważ NSE posiada nieskończenie wiele praw zachowania (patrz Rozdz. 5), to powinny one być zachowane także w przybliżeniu wariacyjnym. Względnie małe odchylenia w wyższych niezmiennikach (dla danej amplitudy początkowej wiązki) sugerują, że metoda wariacyjna dobrze przybliża faktyczną propagację. Analizując obszary, w przestrzeni parametrów, gdzie zachowany był piąty niezmiennik NSE (5.8e), badano dokładność aproksymacji rozwiązania funkcją próbną w postaci podstawowego rozwiązania gaussowskiego [81]. W trakcie badań nad propagacją wiązek Gaussa–Hermita drugiego rzędu analizowano cztery pierwsze niezmienniki NSE: (5.8a)–(5.8d). Bezpośredni rachunek pokazuje, że $C_2 = 0 = C_4$. Jest to konsekwencją faktu, że symetryczny warunek początkowy pozostaje funkcją symetryczną w trakcie propagacji. Numeryczna analiza niezmienników C_1 i C_3 pokazała, że są one stałe (w zakresie dokładności numerycznej rozwiązania) w każdym rozpatrywanym przypadku. Stałość C_1 reprezentuje prawo zachowania energii i w sposób ścisły wynika z wariacyjnych równań propagacji. Natomiast zachowanie C_3 odzwierciedla fakt, że Hamiltonian (16.4) jest stałą ruchu, gdyż Lagrangian nie zależy w sposób jawny od współrzędnej propagacji ζ .

Z Rys. 25 i Rys. 26 wynika, że wiązki Gaussa–Hermita rzędu drugiego mogą, przy odpowiednim doborze parametrów, przybliżać rozwiązania propagujące się w kierunku *od* osi ζ układu współrzędnych. Dotyczy to zarówno nieliniowej dyfrakcji wiązki początkowej, jak i propagacji solitonowej. Z drugiej strony, z wariacyjnej analizy propagacji podstawowej wiązki Gaussa, przedstawionej w Części IV, wynika, że rozwiązanie zlinearyzowanych równań propagacji wyróżnia funkcje Gaussa–Hermita drugiego rzędu jako opisujące oddziaływanie pola promieniowania z polem całkowitym. Co więcej, numeryczne badania nad propagacją podstawowej wiązki Gaussa opisane w Części III pokazały (Rys. 5, 7), że pole promieniowania, w zasadniczej swej części, ma postać wiązek propagujących się symetrycznie w kierunku *od* osi ζ układu współrzędnych. Fakty te pozwalają przypuszczać, że *pełna* wariacyjna analiza propagacji podstawowej wiązki Gaussa (tzn. dla całego zakresu amplitud wiązki pobudzającej) może być przeprowadzona dla funkcji próbnej w postaci superpozycji wiązek Gaussa–Hermita (12.4) i (16.1). Głównym problemem w tak postawionym zagadnie-

niu jest złożoność obliczeń analitycznych prowadzących do wariacyjnych równań propagacji.

Analiza wariacyjna propagacji wiązek Gaussa–Hermita drugiego rzędu w nieliniowym ośrodku Kerra, przedstawiona w niniejszym Rozdziale, uzasadnia ogólną koncepcję aproksymacji dokładnych rozwiązań problemów nieliniowych poprzez rozwiązania zagadnień liniowych, ale ze zmodyfikowanymi, zależnymi w ogólności od ζ , parametrami. W zakresie metody wariacyjnej istnieje duża dowolność w wyborze ilości parametrów opisujących problem. Co więcej, możliwe jest zapostulowanie funkcji próbnej w postaci *liniowej* superpozycji kilku funkcji – na poziomie nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego (np. NSE) możliwa jest jedynie nieliniowa superpozycja rozwiązań – transformata Bäcklunda [99–101].

Podsumowanie

W pracy przedyskutowano propagację solitonów przestrzennych w nieliniowym ośrodku Kerra. Pole pobudzające przyjęto w postaci wiązek Gaussa–Hermita podstawowego i drugiego rzędu. Zaproponowano nowy, przybliżony opis jasnych solitonów przestrzennych jako modów liniowego równania propagacji, związanego z równaniem nieliniowym.

Dla pobudzenia nieliniowego ośrodka Kerra podstawową wiązką Gaussa znaleziono analityczną postać warunku generacji solitonów dowolnego rzędu, oraz przybliżenie na parametry solitonu pierwszego rzędu w granicy małej jego amplitudy. Moc progowa wiązki pobudzającej, niezbędna do generacji solitonów w ośrodku Kerra, nie zależy od znaku krzywizny frontu falowego wiązki. Amplitudy generowanych solitonów zależą liniowo (w zakresie dokładności numerycznej) od amplitudy wiązki pobudzającej. Przewidziano numerycznie przypadek pobudzenia solitonu (do trzeciego rzędu włącznie) bez (istotnych) strat mocy początkowej wiązki na pole promieniowania. Określono warunki na samopulpkowanie podstawowej wiązki Gaussa: wiązka pobudza ośrodek nieliniowy w swojej talii oraz jej amplituda jest równa amplitudzie generowanego solitonu.

Zgodność jakościowych i ilościowych wyników przy pobudzeniu wiązkami: Gaussa i *sech* umożliwiła postawienie hipotezy, że propagacja wiązki Gaussa w ośrodku nieliniowym (gdzie podstawowe, asymptotyczne rozwiązanie ma postać funkcji *sech*) może być przybliżona przez podstawowe rozwiązanie w ośrodku liniowym (rozwiązanie jest funkcją Gaussa z argumentem zespolonym). Ewolucję parametrów rozwiązania przybliżonego w ośrodku nieliniowym określono z metody wariacyjnej. Znaleziono analityczną postać składowej solitonowej pola całkowitego. Szerokość solitonu jest określona jako punkt równowagi wariacyjnych równań propagacji. Zaproponowano dwie metody do określenia amplitudy solitonu. Pierwsza bazuje na linearyzacji równań propagacji wokół punktu równowagi i pozwala oszacować moc wiązki początkowej traconą na pole promieniowania. Analitycznie potwierdzono występowanie

maksimum w stosunku efektywności pobudzenia solitonu (odpowiada ono "solitonowi gausowskiemu", znanemu z wcześniejszych prac [80,13]). Druga metoda oszacowania wartości amplitudy wykorzystuje fakt, że moc tracona na pole promieniowania w trakcie propagacji wiązki Gaussa jest zanedbywalnie mała dla szerokiego zakresu amplitud pobudzających. Obie metody zgadzają się bardzo dobrze z numerycznymi przewidywaniami na amplitudę solitonu. W połączeniu z oszacowaniem amplitudy solitonu w granicy $\eta \ll 1$, stanowi to pełną, analityczną charakterystykę parametrów solitonu pierwszego rzędu.

Zasadność hipotezy o odpowiedniości pomiędzy rozwiązaniami liniowego i nieliniowego równania propagacji potwierdzają wyniki uzyskane dla nieliniowej propagacji wiązek Gaussa-Hermita drugiego rzędu. Stwierdzono pobudzenie parzystej liczby solitonów skolimowaną wiązką Gaussa-Hermita rzędu drugiego: konsekwencją biortogonalności warunku początkowego do podstawowej wiązki Gaussa jest nieobecność solitonów pierwszego rzędu w ośrodku nieliniowym. Wariacyjne przybliżenie nieliniowej propagacji, w oparciu o wiązki Gaussa-Hermita drugiego rzędu z argumentem zespolonym, pozwala podać bardzo dokładne oszacowanie progu formowania solitonu pulsującego. Numeryczne rozwiązanie wariacyjnych równań propagacji dobrze przybliży faktyczną propagację wiązki, w zakresie amplitud wiązki pobudzającej do progu generacji solitonu związanego. Otrzymane wyniki sugerują, że pole promieniowania w ośrodku Kerra może być modelowane przez wiązki Gaussa-Hermita rzędu drugiego i/lub wyższych.

DODATEK A: METODA SPLIT-STEP FFT

Metoda Split-Step FFT (SSFFT) polega na rozseparowaniu propagacji na małym odcinku $\delta\zeta$ na część liniową i nieliniową [102]. Zapisując NSE w postaci

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = i(L + N)U(x, \zeta), \quad (\text{A1})$$

gdzie $L = (1/2)\partial^2/\partial x^2$ oraz $N = |U|^2$ są operatorami reprezentującymi odpowiednio liniową i nieliniową część równania, można znaleźć formalne rozwiązanie w płaszczyźnie $\zeta + \delta\zeta$ w terminach rozwiązania U w płaszczyźnie ζ

$$U(x, \zeta + \delta\zeta) = e^{i(L+N)\delta\zeta}U(x, \zeta). \quad (\text{A2})$$

Operator całkowania określony jest przez rozwinięcie Taylora

$$T = e^{i(L+N)\delta\zeta} \approx I + i(L + N)\delta\zeta + \dots + \frac{i^n(L + N)^n(\delta\zeta)^n}{n!} + \dots \quad (\text{A3})$$

Operator ten może być przybliżony przez

$$e^{i(L+N)\delta\zeta} \approx e^{iL\delta\zeta/2} e^{iN\delta\zeta} e^{iL\delta\zeta/2}. \quad (\text{A4})$$

z błędem aproksymacji rzędu $\mathcal{O}((\delta\zeta)^3)$ [102]. Pierwszy człon po prawej stronie operatora T jest równoważny rozwiązaniu równania

$$\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} = iLU_1(x, \zeta), \quad (\text{A5})$$

na odcinku $\delta\zeta/2$ z warunkiem początkowym $U(x, \zeta)$. Rozwiązanie ściśle tego równania można wyrazić przez transformatę Fouriera

$$U_1(x, \zeta + \delta\zeta/2) = \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-ik^2\delta\zeta/4}\mathcal{F}\{U(x, \zeta)\}\right\}. \quad (\text{A6})$$

Numeryczna implementacja FFT wprowadza błąd rzędu $\mathcal{O}((\delta x)^n)$, gdzie δx jest odległością pomiędzy punktami w dyskretyzacji osi x , zaś n jest liczbą modów w transformacie Fouriera. Następnym członem operatora T opisuje nieliniową propagację rozwiązania $U_1(x, \zeta)$ na odcinku $\delta\zeta$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \zeta} = iNU_2(x, \zeta) , \quad (A7)$$

co prowadzi do przybliżonego rozwiązania

$$U_2(x, \zeta + \delta\zeta) \approx \exp [i |U_1(x, \zeta + \delta\zeta/2)|^2 \delta\zeta] \times U_1(x, \zeta + \delta\zeta/2) , \quad (A8)$$

Pierwszy człon po prawej stronie operatora T prowadzi, po analogicznej do (A6) procedurze, do znalezienia przybliżonego rozwiązania NSE na całym odcinku $\delta\zeta$.

Metoda SSFFT wykorzystywana była do symulacji numerycznych nieliniowej propagacji wiązek Gaussa–Hermita w ośrodku Kerra. Metoda ta była o ok. dwa rzędy wielkości szybsza od numerycznej implementacji IST, opisaney w Dodatku B. Dopiero w strefie dalekiej pola ($\zeta \sim 50z_F$) metoda SSFFT stawała się niestabilna, czego nie zaobserwowano w metodzie bazującej na IST. W obliczeniach używano sieci $\delta x \approx 0.06$, $\delta\zeta \approx 0.01$ przy 1024-punktowej FFT [103].

DODATEK B: NUMERYCZNA IMPLEMENTACJA IST

Numeryczna procedura rozwiązująca NSE metodą IST bazuje na równaniach przedstawionych w Rozdz. 3. Położenia zer współczynnika rozpraszania $a(\lambda; 0)$ określone jest przez zmodyfikowane zagadnienie rozpraszania prostego

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -i\lambda\varphi_1 + i U_0(x)\varphi_2 , \quad (B1a)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = i\lambda\varphi_2 + i U_0^*(x)\varphi_1 , \quad (B1b)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 , \quad (B1c)$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial x} = 0 , \quad (B1d)$$

ze zmodyfikowanymi, dwupunktowymi warunkami brzegowymi, określonymi w $x = -X_0$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \\ \lambda \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda^{(\text{guess})} \\ q_0^{(\text{guess})} \end{pmatrix} \exp(-i\lambda x), \quad (\text{B2})$$

oraz w $x = X_0$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \\ \lambda \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(\lambda) \exp(i\lambda x) \\ \lambda^{(\text{guess})} \\ q_0^{(\text{guess})} \end{pmatrix}. \quad (\text{B3})$$

Całkowanie równań (B1) przeprowadzano w skończonym obszarze $([-X_0, X_0])$, gdzie X_0 jest wystarczająco duże do znikania potencjału rozpraszającego: $U(X_0, \zeta) \approx 0$, przy użyciu metody strzału [103]. Parametry solitonu pobudzanego z wiązki o danej amplitudzie q_0 (równiej $q_0^{(\text{guess})}$), określone z równania $a(\lambda; 0) = 0$, znajdowane są procedurą strzału iteracyjnie, ze znajomości "zgadniętej" (guess) wartości $\lambda^{(\text{guess})}$. Ponieważ metoda strzału jest w istocie implementacją metody Newtona-Raphsona znajdującej zera funkcji wielu zmiennych, podstawowe znaczenie ma dokładność początkowego "strzału" $\lambda^{(\text{guess})}$. Wartości amplitud progowych do pobudzenia solitonów znajduje się z rów. (B1) poprzez przyjęcie $\lambda^{(\text{guess})} = \zeta^{(\text{guess})} + i0$ (parametry solitonu o zerowej amplitudzie) oraz szukaniu $q_0^{(\text{thr})}$ spełniającego warunki brzegowe (B2)–(B3) (zgadywana jest tu wartość amplitudy $q_0^{(\text{guess})}$).

W celu otrzymania danych rozpraszania (3.28) rozwiązywano numerycznie proste zagadnienie rozpraszania (6.1) metodą Bulirsch-Stoera [103]. Zapamiętując dyskretny zbiór wartości współczynnika odbicia $r(\xi; 0)$ obliczano funkcję $F(x; \zeta)$ (3.25) przy użyciu szybkiej transformaty Fouriera (FFT). Do analizy przypadków opisywanych w Części III stosowano 4096 punktową FFT. Zasadniczym (z punktu widzenia czasu procesora) problemem w numerycznym rozwiązaniu NSE metodą IST było znalezienie rozwiązania równania GLM (3.24). Jest to równanie całkowe Volterry drugiego rodzaju, określone w pół-płaszczyźnie $y > x$. Stosując metodę Simpsona do tego równania na sieci z niejednorodnym rozkładem punktów

otrzymuje się następujący schemat różnicowy

$$K_{ij}^{(m)}(\zeta) + \sum_{l=i}^{N^{(m)}-1} (x_{l+1}^{(m)} - x_l^{(m)}) f_{lj}(\zeta) K_{il}^{(m)}(\zeta) = F^*(x_i^{(m)} + x_j^{(m)}, \zeta), \quad (B4)$$

$i = 1, 2 \dots N^{(m)} - 1$

$$K_{N^{(m)}N^{(m)}}^{(m)}(\zeta) = F^*(2x_{N^{(m)}}^{(m)}, \zeta),$$

oraz

$$f_{lj}(\zeta) = \int_{x_i^{(m)}}^{+\infty} F(x_i^{(m)} + s, \zeta) F^*(s + x_j^{(m)}, \zeta) ds, \quad (B5)$$

gdzie $x_i^{(m)} = x$, $x_{N^{(m)}}^{(m)} = X_0$, $K_{ij}^{(m)}(\zeta) = K(x_i^{(m)}, x_j^{(m)}, \zeta)$ w punktach sieci, $m = 1 \dots M$ oznacza kolejną m -tą sieć zaś $N^{(m)}$ jest numerem punktów na tej sieci. Sekwencja sieci umożliwiła przeprowadzenie ekstrapolacji wielomianowej. Współczynniki $f_{lj}(\zeta)$ są znalezione przez numeryczne całkowanie na skończonym przedziale $[x_i^{(m)}, x_\infty]$ gdzie $|F(x, \zeta)|$ jest zanedbywalnie mały dla $x > x_\infty$ (x_∞ jest zazwyczaj o jeden rząd wielkości większe od X_0). $K_{ij}^{(m)}(\zeta)$ znajdowane jest z układu równań algebraicznych (B4) przy użyciu rozkładu na górną- i dolnotrójkątne macierze [103]. W celu poprawienia dokładności obliczeń, znajduje się $K(x, x, \zeta) = K_{ii}^{(m)}(\zeta)$ dla kolejnych sieci. Następnie stosuje się ekstrapolację wielomianową do obliczenia wartości $K(x, x; \zeta)$ jaka była by otrzymana przy nieskończonym podziale sieci. Metodę testowano na sieciach z $N^{(1)} = 11$, $N^{(2)} = 21$, $N^{(3)} = 31$ punktami. Dla początkowego profilu w postaci *sech*(x) (rozwiązanie jednosolitonowe NSE) odchylenie od znanego rozwiązania na osi wiązki dla $\zeta = 50z_F$ było mniejsze od 0.1%.

Podstawową zaletą tej metody nad metodami bezpośredniego całkowania numerycznego, tzn. nad metodami propagacji wiązki (BMP – beam propagation method), jest możliwość *niezależnego* obliczenia składowych: solitonowej i promieniowania, pola całkowitego. Profil pola dla dowolnego ζ określony jest *tylko* przez zbiór danych rozpraszania (3.28) w płaszczyźnie początkowej $\zeta = 0$. Co więcej, parametry charakteryzujące rozwiązania solitonowe: λ_0 i c_0 , otrzymywane są w pierwszym kroku w trakcie procedury rozwiązywania, przy względnie małym koszcie numerycznym (ostatnio opublikowany został bardzo efektywny algorytm rozwiązujący numerycznie proste zagadnienie rozpraszania [104]).

Numeryczna implementacja IST została ostatnio wykorzystana do badania propagacji solitonów optycznych w nieliniowych światłowodach [105,106]. Niemniej jednak jedna z metod numerycznego (iteracyjnego) rozwiązania GLM opracowana przez autorów okazała się rozbieżna w okolicy centrum impulsu solitonowego [105], natomiast zbieżność drugiej testowana była jedynie na paru szczególnych przypadkach [106].

Inny rodzaj numerycznej implementacji IST dla NSE został przedstawiony w pracy [107]. Startując z dyskretnej postaci prostego zagadnienia rozpraszania możliwe jest (poprzez metodę AKNS [53]) znalezienie różnicowej wersji NSE równoważnej rów. (2.3) dla zerowego kroku sieci [108,109] (dalsze uogólnienia tego podejścia do innych równań różniczkowych można znaleźć w [110]). Metoda ta okazała się szybsza od standardowych schematów różnicowych, ale wolniejsza od metod pseudospektralnych bazujących na FFT, (patrz Dodatek A).

Literatura

- [1] R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, "Self-trapping of optical beams", *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 479 (1964).
- [2] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media," (in Russian) *Zh. Exp. Teor. Fiz.* **61**, 118-134 (1971).
- [3] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, "Interactions between solitons in a stable medium", (in Russian) *Zh. Exp. Teor. Fiz.* **64**, 1627 (1973).
- [4] A. W. Snyder, D. J. Mitchell, L. Poladian, "Linear approach for approximating spatial solitons and nonlinear guided modes", *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 1618 (1991).
- [5] A. W. Snyder, L. Poladian, D. J. Mitchell, F. Labouceur, "Self-induced optical fibers: spatial solitary waves", *Opt. Lett.*, **16**, 21-23 (1991).
- [6] A. W. Snyder, L. Poladian, D. J. Mitchell, "Stable black self-guided beams of circular symmetry in a bulk Kerr medium", *Opt. Lett.*, **17**, 789-791 (1992).
- [7] A. W. Snyder, D. J. Mitchell, "Spatial solitons of the power-law nonlinearity", *Opt. Lett.*, **18** 101-103 (1993).
- [8] A. W. Snyder, D. J. Mitchell, B. Luther-Davies, "Dark spatial solitons constructed from modes of linear waveguides", *J. Opt. Soc. AM. B*, **10**. 2341-2352 (1993).
- [9] A. W. Snyder, S. J. Hewlett, D. J. Mitchell, "Dynamic spatial solitons", *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1012-1015 (1994).
- [10] J. Petykiewicz, *Podstawy fizyczne optyki scalonej* (PWN, Warszawa, 1989).
- [11] W. Zhao, E. Bourkhoff, "Generation, propagation and amplification of dark solitons", *J. Opt. Soc. Am. B*, **9**, 1134 (1992).

- [12] V. I. Bespalov, V. I. Talanov, "Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids", *Sov. Phys. JETP Lett.*, **3**, 307-310 (1966).
- [13] S. L. Eix, R. H. Enns, "Optical switching between bistable soliton states of the 2nd kind", *Phys. Rev. A* **47**, 5009-5016 (1993).
- [14] W. Królikowski, N. Akhmediev, B. Luther-Davies, "Darker than dark solitons: Dark solitons with total phase shift greater than π ", *Phys. Rev. E* **48**, 3980-3987 (1993).
- [15] E. M. Wright (Ed.), "All-optical Switching Using Solitons", *Opt. Quantum Electr.* **24**, 1215-1337 (1992) – wydanie specjalne.
- [16] D. Burak, "Gaussian beam propagation in nonlinear Kerr medium" *Optica Applicata* **21**, 3-8 (1991).
- [17] D. Burak, W. Nasalski, "Gaussian beam to spatial soliton formation in Kerr medium", *Appl. Opt.*, **33**, w druku.
- [18] D. Burak, W. Nasalski, "Soliton formation from the incident Gaussian beam in Kerr medium", *Prace IPPT* 35/1991.
- [19] D. Burak, W. Nasalski, "Variational estimation of soliton contribution to nonlinear propagation of Gaussians", do opublikowania.
- [20] D. Burak, W. Nasalski, "Spatial solitons excited by the second - order Hermite - Gaussian beams", do opublikowania.
- [21] D. Burak, W. Nasalski, "Estimation of soliton parameters in variational analysis of nonlinear propagation", *CLEO/EUROPE'94 - EQEC'94 Conference Digest*, Amsterdam 1994, The Netherlands, w druku
- [22] D. Burak, W. Samborski, W. Nasalski, "Spatial solitons from Gaussian beams in Kerr media", *Abstract Book of the EPS9 General Conference*, 150 (Florence 1993, Italy), poster.

- [23] D. Burak "Gaussian beam propagation in nonlinear media" Abstract Book of the EPS8 General Conference, E.Peitler (ed.), 81 (Amsterdam 1990, The Netherlands), poster.
- [24] D. Burak, J. Grohs, H. Issler, C. Klingshirn, "Optical bistability and transverse inhomogeneities in diffusive systems with induced absorption", *International Journal of Nonlinear Optical Physics*, **3**, No.1, w druku
- [25] J. Grohs, S. Apanasevich, P. Jung, H. Issler, D. Burak, C. Klingshirn, "Noise induced switching and stochastic resonance in optically nonlinear CdS crystals", *Phys. Rev. A*, **49**, 2199-2203 (1994).
- [26] D. Burak, J. Grohs, U. Zimmermann, K-H. Schlaad, H. Issler, C. Klingshirn, "Transverse effects in thermally induced bistability in AlGa/(AlGa)As quantum wells", *Optical Materials*, **2**, 83 (1993).
- [27] U. Zimmermann, D. Burak, K-H. Schlaad, C. Klingshirn, "Thermally induced absorptive optical bistability in AlGa/(Al,Ga)As - multiple quantum wells", *Solid State Technology*, **8**, 1399-1407 (1993).
- [28] D. Burak, J. Grohs, U. Zimmermann, C. Klingshirn, "An analytical approximation to switching intensities in bistable diffusive systems with induced absorption", Abstract Book of the EPS9 General Conference, 51 (Florence 1993, Italy), poster.
- [29] J. Steffen, J. Grohs, H. Issler, F. Zhang, D. Burak, C. Klingshirn "Selfoscillations of an optically bistable element in two coupled hybrid resonators" - przedstawione na: Spring Meeting of German Physical Society, Regensburg'93, Germany.
- [30] D. Burak, J. Grohs, H. Issler, C. Klingshirn "Optical bistability versus transverse inhomogeneities in diffusive systems with induced absorption" post-deadline poster przedstawiony na OSA Nonlinear Dynamics in Optical System Topical Meeting, Alpbach 1992, Austria.
- [31] D. Burak, "Zastosowanie zjawiska bistabilności w czujnikach i przełącznikach optycz-

nych", Prace IPPT 9/1990.

- [32] D. Burak, W. Nasalski, "Optyczny czujnik odbiciowy – zasady działania i własności", Prace IPPT 19/1989.
- [33] Y. R. Shen, *The principles of nonlinear optics* (A Wiley-Interscience Publication, New York, 1984)
- [34] W. Nasalski *Niespekularne odbicie pola elektromagnetycznego na granicy dwu dielektryków*, praca habilitacyjna (Prace IPPT 32, Warszawa, 1990).
- [35] J. Satsuma (Ed.), *Optical solitons*, (Springer, Berlin, 1992)
- [36] "Integrated Photonics Research", Vol. 10 of 1992 OSA Technical Digest Series (Optical Society of America, Washington, D. C. 1992).
- [37] T. K. Gustafson, P. W. Smith *Photonic switching* (Springer, Berlin, 1988).
- [38] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Book, Mill Valey, 1986).
- [39] A. Wünche, "Generalized Gaussian beam solutions of paraxial optics and their connection to a hidden symmetry", *J. Opt. Soc. Am. A*, **6**, 1320–1329 (1989).
- [40] A. E. Siegman, "Hermite-gaussian functions of complex argument as optical-beam eigenfunctions", *J. Opt. Soc. Am.*, **63**, 1903–1904 (1973).
- [41] R. Pratesi, L. Ronchi, "Generalized gaussian beams in free space", *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 1274–1276 (1977).
- [42] W. Nasalski, "Nonspecular bistability versus diffraction at nonlinear hybrid interfaces," *Opt. Commun.* **77**, 443–450 (1990).
- [43] W. Nasalski, "Ray analysis of Gaussian beam nonspecular scattering," *Opt. Commun.* **92**, 307–314 (1992).
- [44] J. Satsuma, N. Yajima, "Initial value problems of one-dimensional self-modulation

- of nonlinear waves in dispersive media," *Suppl. Prog. Theor. Phys.* No.55, 284-306 (1974).
- [45] A. Kujawski, *Lasery, kurs podstaw fizycznych* (Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1986)
- [46] M. Lax, W. H. Louisell, W. B. McKnight, "From Maxwell to paraxial wave optics", *Phys. Rev. A*, **11**, 1365-1370 (1975).
- [47] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, "Nonlinear evolution equations of physical significance", *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 125-127 (1973).
- [48] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, "The inverse scattering transform - Fourier analysis of nonlinear problems", *Stud. Appl. Math.*, **53**, 249-315 (1974).
- [49] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [50] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, "Method for solving Korteweg de-Vries equation", *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1095-1097 (1967).
- [51] N. Wadati, "The modified Korteweg de-Vries equation", *J. Phys. Soc. Japan*, **32**, 1681 (1972).
- [52] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, "Method for solving the Sine-Gordon equation", *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1262-1264 (1973).
- [53] M. J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981)
- [54] N. I. Gelfand, B. M. Levitan, "On the determination of a differential equation from its spectral function", *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, **1**, 235-304 (1955).
- [55] C. J. Lamb, *Elements of Soliton Theory*, (Mir, Moscow, 1983), pp. 32-121.

- [56] J. P. Gordon, "Interaction forces among solitons in optical fibers", *Opt. Lett.*, **8**, 596-598 (1983).
- [57] H. A. Haus, M. N. Islam, "Theory of the soliton laser", *I.E.E.E. QE* **21**, 1172-1188 (1985).
- [58] K. Konno, H. Sanuki, Y. H. Ichikawa, "Conservation laws of nonlinear evolution equations", *Prog. Theor. Phys.*, **52**, 886-889.
- [59] J. S. Aitchison, Y. Silberberg, A. M. Weiner, D. E. Learid, M. K. Oliver, J. L. Jackel, E. M. Vogel, P. W. E. Smith, "Spatial optical solitons in planar glass waveguides," *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 1290-1297 (1991).
- [60] S. Maneuf, R. Desailly, C. Froehly, "Stable self-trapping of laser beams: observation in nonlinear planar waveguide," *Opt. Commun.* **65**, 193-198 (1988).
- [61] G. R. Allan, S. R. Skinner, D. R. Andersen, A. L. Smirl, "Observation of fundamental dark spatial solitons in semiconductors using picosecond pulses," *Opt. Lett.* **16**, 156-158 (1991).
- [62] S. R. Skinner, G. R. Allan, D. R. Andersen, A. L. Smirl, "Dark spatial soliton propagation in bulk ZnSe," *IEEE QE* **27**, 2211-2219 (1991).
- [63] G. Khitrova, H. M. Gibbs, Y. Kawamura, H. Iwamura, T. Ikegami, J. E. Sipe, L. Ming, "Spatial solitons in a self-focusing semiconductor gain medium," *Phys. Rev. Lett.* **70**, 920-923 (1993).
- [64] Tiang-Tsornng Shi, Sien Chi, "Nonlinear photonic switching by using the spatial soliton collision," *Opt. Lett.* **15**, 1123-1125 (1990).
- [65] R. De La Fuente, A. Barthelemy, "Spatial solitons pairing by cross phase modulation," *Opt. Commun.* **88**, 419-423 (1992).
- [66] J. S. Aitchison, A. M. Weiner, Y. Silberberg, D. E. Leaird, M. K. Oliver, J. L. Jackel,

- P. W. E. Smith, "Experimental observation of spatial solitons interactions," *Opt. Lett.* **16**, 15-17 (1991).
- [67] B. Luther-Davies, X. P. Yang, "Waveguides and Y-Junctions formed in bulk media by using dark spatial solitons" *Opt. Lett.* **17**, 496-498 (1992).
- [68] F. Reynaud, A. Barthelemy, "Optically controlled interaction between two fundamental soliton beams", *Europhys. Lett.* **12**, 401 (1990).
- [69] R. De La Fuente, A. Barthelemy, C. Froehly "Spatial soliton-induced guided waves in homogeneous nonlinear Kerr medium", *Opt. Lett.* **16**, 783 (1991).
- [70] M. Shalaby, A. Barthelemy, "Experimental spatial soliton trapping and switching", *Opt. Lett.* **16**, 1472 (1991).
- [71] M. Shalaby, F. Reynaud, A. Barthelemy, "Experimental observation of spatial soliton interactions with a $\pi/2$ relative phase difference". *Opt. Lett.* **17**, 778 (1992).
- [72] A. Barthelemy, C. Froehly, S. Maneuf, F. Reynaud, "Experimental observation of beams self-deflection apperaring with two-dimensional spatial soliton propagation in bulk Kerr material", *Opt. Lett.* **17**, 844 (1992).
- [73] G. S. McDonald, W. J. Firth, "Spatial solitary-wave optical memory," *J. Opt. Soc. Am. B* **7**, 1328-1335 (1990).
- [74] W. G. Wagner, H. A. Haus, J. H. Marburger, "Large-scale self-trapping of optical beams in the paraxial ray approximation", *Phys. Rev.* **175**, 256-266 (1968).
- [75] L. Gagnon, C. Pare, "Nonlinear radiation modes connected to parabolic graded-index profiles by the lens transformation," *J. Opt. Soc. Am.* **A8**, 601-607 (1991).
- [76] A. Yariv, A. Yech, "The application of Gaussian beam formalism to optical propagation in nonlinear media," *Opt. Commun.* **27**, 295-298 (1978).
- [77] J. T. Manassah, B. Gross, *Opt. Lett.* "Comparison of the paraxial- ray approximation

- and the variational method solutions to the numerical results for a beam propagating in a self-focusing Kerr medium" **17**, 976-978 (1992).
- [78] J. T. Manassah, "Collapse of two - dimensional spatial soliton in a parabolic - index material", **18**, 1259-1261 (1992).
- [79] F. H. Berkshire, J. D. Gibbon, "Collapse in the n-dimensional nonlinear Schrödinger equation - a parallel with Sundman's results in the N-body problem", *Stud. Appl. Math.* **69**, 229-262 (1983).
- [80] D. Anderson, "Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers", *Phys. Rev. A* **27**, 3135-3145 (1983).
- [81] M. Desaix, D. Anderson, M. Lisak, "Accuracy of an approximate variational solution procedure for the nonlinear Schrödinger equation", *Phys. Rev. A* **40**, 2441 (1989).
- [82] F. Cooper, C. Lucheroni, H. Shepard, "Variational method for studying self-focusing in a class of nonlinear Schrödinger equations", *Phys. Lett. A* **170**, 184-188 (1992).
- [83] A. W. Snyder, D. J. Mitchell, L. Poladin, "Linear approach for approximating spatial solitons and nonlinear guided modes," *J. Opt. Soc. Am.* **B8**, 1618-1620 (1991).
- [84] Q. Y. Li, C. Pask, R. A. Sammut, "Simple model for spatial optical solitons in planar waveguides," *Opt. Lett.* **16**, 1083-1085 (1991).
- [85] R. A. Sammut, C. Pask, Q. Y. Li, "Theoretical study of spatial solitons in planar waveguides," *J. Opt. Soc. Am.* **B10**, 485-491 (1993).
- [86] H. Segur, M. J. Ablowitz, "Asymptotic solutions and conservation laws for the nonlinear Schrödinger equation. I," *J. Math. Phys.* **17**, 710-713 (1976).
- [87] H. Segur, "Asymptotic solutions and conservation laws for the nonlinear Schrödinger equation. II," *J. Math. Phys.* **17**, 714-716 (1976).
- [88] K. Maurin, *Analiza*, (PWN, Warszawa, 1971).

- [89] S. R. Friberg, K. W. DeLong, "Breakup of bound higher-order solitons", *Opt. Lett.*, **17**, 979-981 (1992).
- [90] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics* (Academic Press, Boston, 1989).
- [91] M. Desaix, D. Anderson, M. Lisak, "Variational approach to collapse of optical pulses", *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 2082-2086 (1991).
- [92] T. Ueda, W. L. Kath, "Dynamics of coupled solitons in nonlinear optical fibers", *Phys. Rev. A* **42**, 563-571 (1990).
- [93] C. Pare, M. Florjanczyk, "Approximate model of soliton dynamics in all-optical couplers", *Phys. Rev. A* **41**, 6287-6295 (1990).
- [94] A. I. Maimistov, S. O. Elyutin, "Propagation of short pulses in nonlinear birefringent fibre", *J. Mod. Opt.* **39**, 2193-2200, 1992.
- [95] D. Anderson, M. Lisak, "Bandwidth limits due to incoherent soliton interaction in optical-fiber communication system", *Phys. Rev. A* **32**, 2270 (1985).
- [96] Q. Wang, P. K. A. Wai, C. J. Chen, C. R. Menyuk, "Numerical modeling of soliton logic gates", *J. Opt. Soc. Am. B*, **10**, 2030 (1993).
- [97] O. Bogolyavlensky *Methods in the Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics* (Springer Verlag, Berlin, 1985).
- [98] P. J. Hansen, K. E. Lonngren, "On the prediction of the number of solitons excited by an arbitrary potential: an observation from inverse scattering", *Physica D*, **68**, 12-17 (1993).
- [99] K. Porsezian, "Bäcklund transformations and explicit solutions of certain inhomogeneous nonlinear Schrödinger-type equations", *J. Phys. A*, **24**, L337-343 (1991).
- [100] J. G. Kingston, C. Sophocleous, "Bäcklund transformations for generalized nonlinear Schrödinger equations", *J. Math. Phys. A*, **31**, 2597-2602 (1990).

- [101] M. Lakshmanan, K. Porsezian, "Planar radially symmetric Heisenberg spin system and generalized nonlinear Schrödinger equation - gauge equivalence, Bäcklund transformations and explicit solutions", *Phys. Lett. A.*, **146**, 329-334 (1990).
- [102] A. B. Aceves, J. V. Moloney, A. C. Newell, "Theory of light-beam propagation at nonlinear interfaces. I. Equivalent-particle theory for a single interface", *Phys. Rev. A.* **39**, 1809-1827 (1989).
- [103] H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, 2 nd ed. (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992).
- [104] G. Boffetta, A. R. Osborne, "Computation of the direct scattering transform for the nonlinear Schrödinger equation," *J. Comput. Phys.* **102**, 252-264 (1992).
- [105] P. V. Frangos, D. J. Frantzeskakis, C. N. Capsalis, "Pulse propagation in a optical fibre of parabolic index profile by direct numerical solution of the Gelfand-Levitan integral equations," *IEE Proc. J* **140**, 141-149 (1993).
- [106] P. Frangos and D. Jaggard, "A numerical solution to the Zakharov-Schabat inverse scattering problem", *IEEE Trans. Ant. Prop.* **39**, 74-79 (1991).
- [107] T. R. Taha, M. J. Ablowitz, "Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations," *J. Comput. Phys.* **55**, 192-230 (1984).
- [108] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, "Nonlinear differential-difference equations," *J. Math. Phys.* **16** (1975), 598-603 (1975).
- [109] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, "On the solution of a class of partial differential equations," *Stud. Appl. Math.* **57**, 1-12 (1977).
- [110] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, "Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis," *J. Math. Phys.* **17**, 1011-1018 (1976); "A nonlinear difference scheme and inverse scattering," *Stud. Appl. Math.* **55**, 213-229 (1976).

Podziękowania

W pierwszym rzędzie pragnę podziękować promotorowi, doc. dr hab. Wojciechowi Nasalskiemu, za stałą i rzeczową opiekę merytoryczną w trakcie powstawania tej pracy, gotowość do dyskusji nad pojawiającymi się trudnościami i wskazywanie sposobów skutecznego ich pokonania.

Profesorowi Dr. Clausowi Klingshirnowi z Uniwersytetu w Kaiserslautern składam serdeczne podziękowania za wprowadzenie w tematykę współczesnej fotoniki oraz nakierowanie na praktyczne aspekty prowadzonych badań. Praca w Jego grupie "dynamików z Kaiserslautern" była nie tylko owocna naukowo, ale także przyjemna emocjonalnie.

Praca naukowa jest działalnością zespołową. Dziękuję "nieliniowym optykom", Witoldowi Samborskiemu z SPFiNO, Jürgenowi Grohowski i Thomasowi Breilkopffowi z Uniwersytetu Kaiserslautern, za stworzenie szczególnie milej, duchowo podniecającej atmosfery, tak sprzyjającej prowadzeniu badań i odkrywaniu nowych zjawisk.

Współczesna optyka nieliniowa opiera się na obliczeniach numerycznych. Pracownikom Laboratorium Komputerowego, a w szczególności Panom: dr Jerzemu Supłowi i Markowi Pokulniewiczowi, dziękuję za zapewnienie stałego i bezproblemowego dostępu do komputerów Pracowni oraz za Ich gotowość do pomocy w rozwiązywaniu pojawiających się problemów technicznych.

Nauka jest droga. Składam podziękowanie IPPT za finansowanie badań prowadzących do powstania tej pracy, oraz Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) za sfinansowanie 14-miesięcznego pobytu na Uniwersytecie Kaiserslautern, RFN.

