

4.41 — optymalizacja konstrukcji
4.43 — struktura siatkowa

8 / 1982

Larysa Gawkowska

OPTYMALIZACJA
PRZEKRYĆ STRUKTURALNYCH
O ORTOGONALNEJ SIATCE PRĘTÓW

P. 269

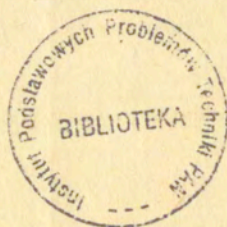


WARSZAWA 1982

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 lutego 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 8/1982

Opracowanie wykonano w ramach problemu
węzłowego 05.12., podt.08.1



57066



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd.2,8. Ark.druk. 5.

Oddano do drukarni w marcu 1982r.

Nr zamówienia 103/0/82 Z-108.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

Larysa Gawkowska
Zakład Mechaniki Budowli
i Wytrzymałości Materiałów
Politechnika Szczecińska

OPTIMALIZACJA PRZEKRYĆ STRUKTURALNYCH
O ORTOGONALNEJ SIATCE PRĘTÓW

1. WSTĘP

1.1. Cel pracy

Wzmoczone zainteresowanie przekryciami strukturalnymi spowodowane jest z jednej strony - możliwością przekrywania dużych powierzchni wolnych od podpór, z drugiej zaś - spełnieniem przez nie podstawowych wymogów budownictwa uprzemysłowionego, którymi są: uniwersalność zastosowania bez względu na funkcję spełnianą przez budowlę, seryjna i zautomatyzowana produkcja typowych elementów przekrycia, możliwość montażu blokowego oraz łatwa rozbiórka przy niemal pełnym odzysku materiału.

Na świecie powstało szereg systemów przekryć strukturalnych różniących się między sobą rozmieszczeniem prętów oraz sposobem ich łączenia. Opisy poszczególnych systemów oraz liczne przykłady realizacji można znaleźć między innymi w pracach [5, 6, 30, 31, 33]. Najczęściej stosowane są systemy o ortogonalnej lub diagonalnej siatce prętów. Analiza statyczna tych konstrukcji nie nastrocza szczególnych trudności dzięki zastosowaniu elektronicznych maszyn liczących. W związku z tym głównym problemem w projektowaniu przekryć staje się, nie jak dotychczas znalezienie sił i przemieszczeń dla układu wielokrotnie statycznie niewyznaczalnego, lecz optymalne ich konstruowanie.

Większość projektantów ogranicza się do przyjmowania a priori podstawowych wielkości projektowych takich jak : geometria, sposób podparcia, rodzaje kształtowników oraz wartości pól przekrojów prętów, a następnie kilkakrotnego powtórzenia obliczeń statycznych, jeśli przy założonych przekrojach poprzecznych elementów nie są spełnione warunki normowe. Taki tok postępowania nazywa się wymiarowaniem.

Natomiast optymalizacja konstrukcji budowlanych według A. Brandta i W. Marksa [3] " dotyczy zagadnień wyboru parametrów geometrycznych oraz wytrzymałościowych cech elementów konstrukcyjnych i całych konstrukcji. Wybór ten polega na poszukiwaniu rozwiązań ekstremalnych w sensie uprzednio określonych kryteriów, przy czym metody optymalizacji prowadzą do uzyskiwania informacji o parametrach i cechach konstrukcji w sposób obiektywny, a więc bez konieczności wykorzystywania cech indywidualnych projektanta takich jak intuicja i inwencja lub doświadczenie ".

W optymalizacji uwzględnia się tylko te cechy konstrukcji, które mogą mieć istotny wpływ na wielkości projektowe, toteż optymalizacja nie zastępuje wymiarowania lecz powinna je poprzedzać. Wielkości projektowe wyznaczone w procesie optymalizacji mogą być następnie korygowane, jeśli okaże się, że nie spełniają one wymagań, które nie zostały uwzględnione ani w funkcji celu, ani w warunkach ograniczających.

W niniejszej pracy podjęto próbę opracowania efektywnego algorytmu optymalizacji przekryć strukturalnych o ortogonalnej siatce prętów. Rozważania ograniczono do struktur swobodnie podpartych na obwodzie w węzłach warstwy górnej. Tego typu konstrukcje znajdują liczne zastosowanie do przekrywania pawilonów różnego przeznaczenia. Podparcie wzdłuż obwodu zapewnia minimalne zużycie materiału, gdyż pod względem statycznym jest najkorzystniejsze, jednakże nie zawsze jest możliwe ze względów użytkowych.

Jako kryterium optymalizacji przyjęto w opracowaniu minimum objętości materiału prętów. Zagadnienie sformułowano na zmiennych dyskretnych, którymi są pola powierzchni przekrojów prętów. Równowagę statyczną konstrukcji opisano układem równań różnicowych. Zastosowanie rachunku różnicowego w statyce w znacznym stopniu ułatwia rozwiązanie zadania.

Przedstawiono algorytm rozwiązania postawionego problemu, jak również programy na maszynę cyfrową. Korzystając z tych programów można wyznaczyć nie tylko optymalne wielkości pól przekrojów prętów, lecz również wysokość i moduł konstrukcji optymalnej.

1.2. Przegląd literatury

Opis stanu równowagi statycznej stanowi istotny element zadań optymalizacji konstrukcji, dlatego też poniżej wymienienia się najczęściej stosowane metody w analizie statycznej przekryć strukturalnych. Szczegóły dotyczące poszczególnych metod można znaleźć w niżej wymienionych publikacjach.

Istnieje szereg metod przybliżonych rozwiązywania struktur przestrzennych, do których należą między innymi metody oparte na teorii ośrodków włóknistych [36], teorii ośrodków siatkowych [11] teorii płyt [12, 13, 40] oraz metoda zaproponowana w pracy [32].

Ścisłe metody obliczania struktur jak metoda sił, przemieszczeń, metoda elementów skończonych lub metoda oparta na opisie różnicowo-macierzowym [40] prowadzą do układu równań liniowych, który w przypadku realnych konstrukcji ma znaczny wymiar. Metody te są nieprzydatne w optymalizacji przekryć strukturalnych, ponieważ zmiana jakiegokolwiek wielkości projektowej wymagałaby każdorazowo rozwiązywania tego układu.

Charakterystyczną cechą przekryć strukturalnych jest ich regularność, która umożliwia opisanie stanu równowagi całej konstrukcji przez określenie równowagi typowych jej elementów. Regularność ta jak również, odpowiadający rzeczywistości, dyskretny model konstrukcji pozwalają zastosować w analizie statycznej elementy rachunku różnic skończonych. Rachunek różnic skończonych wykorzystano do opisu równowagi statycznej struktur między innymi w pracach [14, 15, 32, 40].

Problem optymalizacji przekryć strukturalnych nie ma tak bogatej literatury jak na przykład optymalizacja kratownic płaskich.

W pracy [9] autor przedstawił program służący do projektowania ram, kratownic przestrzennych i rusztów. Konstrukcje rozwiązywane są metodą przemieszczeń. Początkowe dane fizyczne / przekroje prętów, momenty bezwładności itp. / są określone przez projektanta, a na koniec analizy wartości te są automatycznie poprawione w zależności od maksymalnych sił obliczonych przez komputer. W przypadku gdy różnice między wartościami początkowymi a końcowymi są duże obliczenia są powtarzane.

Autor niesłusznie mówi tutaj o optymalizacji, ponieważ tak zaprojektowana konstrukcja jest poprawna w sensie inżynierskim, ale nie można jej nazwać optymalną.

Optymalizacja przestrzennych prętowych ustrojów siatkowych wykonanych z danych objętości materiałów jest tematem prac [7,8]. Konstrukcje siatkowe opisano za pomocą ciągłego modelu ośrodka włóknistego. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum odkształcalności ustroju, którego miernikiem jest wartość energii odkształceń sprężystych. Parametrami są pola skalarnie rozmieszczenie materiałów oraz pola wektorowe kierunków głównych osi siatek prętowych. Zadanie sformułowano jako klasyczny problem rachunku wariacyjnego.

Algorytm wieloparametrowej optymalizacji przegubowych układów prętowych przedstawiono w pracach [18, 19]. Do analizy statycznej wykorzystano metodę sieciową mającą charakter metody przemieszczeń. Wielkości projektowe w zadaniu stanowią: kształt przekroju pojedynczego pręta, własności mechaniczne materiału, geometria i topologia kratownicy oraz schemat podparcia. Jako funkcję celu przyjęto objętość materiału prętów. Do rozwiązywania zadania zastosowano metodę systematycznego przeszukiwania i metodę Monte Carlo. Autor zaznacza, że w pracy rozpatrywane są dowolne układy prętowe zarówno płaskie jak i przestrzenne, jednakże przedstawione przykłady rozwiązyanych zadań obejmują tylko kratownice płaskie.

Różniczkowe równania statyki przekryć strukturalnych wprowadzone dla ciągłego modelu konstrukcji stanowią podstawę zadań optymalnego rozkładu prętów o różnych przekrojach [38, 39, 40] oraz optymalnych odkształceń początkowych / optymalnego zwierania/ [39].

Wynikiem rozwiązania zagadnienia optymalnego rozmieszczenia materiału, ze względu na najmniejszą odkształcalność ustroju, są ciągłe funkcje opisujące gęstość rozkładu materiałów w poszczególnych warstwach konstrukcji [38, 39, 40]. Zastosowanie zaproponowanej przez autorów metody określania rozmieszczenia prętów o różnych przekrojach zobrazowano przykładami optymalizacji przekryć typu Unistrut i Unibat sprężyscie podpartych, oraz struktury Unistrut swobodnie podpartej na obwodzie.

Rozwiązanie problemu najkorzystniejszego zwierania struktur, rozpatrzonego w pracy [39], polega na wyznaczeniu takich wartości odkształceń pierwotnych prętów, po wprowadzeniu których konstrukcja spełnia warunek minimalizacji stanu odkształcenia ustroju. Autorzy artykułu [39] w znacznym stopniu opierali się na ogólnych sformułowaniach zagadnienia optymalnego zwierania ustrojów strukturalnych przedstawionych w [16]. W pracy tej [16] rozważania

ogólne zilustrowano przykładem rozwiązania zadania dla dwuwarstwowej płyty strukturalnej, przyjmując jako kryterium optymalności - minimum stanu napięcia ustroju.

W publikacji [1] kryterium optymalności stanowi minimum zużycia materiału prętów, a zmiennymi decyzyjnymi są pola przekrojów prętów dobierane z katalogu. Szczegółowe rozważania przeprowadzono na przykładzie struktury typu Unistrut podzielonej na dwie strefy sztywności prętów. Do analizy statycznej autorzy przyjęli dyskretny, uproszczony model konstrukcji, której równowagę opisali równaniem różnicowym. Uproszczenie polegające na wyrażeniu wszystkich wielkości statycznych i geometrycznych w postaci funkcji pionowych przemieszczeń węzłów pozwoliło opisać równowagę struktury jednym równaniem. Dzięki wprowadzeniu zmiennych boolowskich otrzymano zadanie programowania zero - jedynkowego, które rozwiązano metodami programowania logicznego.

Optymalizacji kratownic przestrzennych poświęcony jest szereg publikacji Karczewskiego i Paczkowskiego [21, 22, 23, 24, 25] .

Celem pracy [21] jest wybór kratownicy przestrzennej o najmniejszym ciężarze spośród sześciu struktur o różnym rozmieszczeniu prętów. Zadanie podzielono na trzy etapy. W pierwszym etapie, dla wysokości kratownic 1.5 m i modułu 2.25 m, zwymiarowano wszystkie konstrukcje wykorzystując program dobierający iteracyjnie przekroje prętów. W drugim etapie, dla dwóch konstrukcji o najmniejszych wartościach funkcji celu określonych w poprzednim etapie, powtórzono obliczenia przyjmując stałą wysokość i zmienny moduł. W trzecim kroku dla zmiennej wysokości przekrycia zwymiarowano najlżejszą kratownicę otrzymaną w poprzednim etapie. Z przeprowadzonej analizy wynika, że najkorzystniejszą, oczywiście ze względu na przyjęte kryterium, jest konstrukcja o diagonalnej siatce prętów, na co zresztą już wcześniej zwracało uwagę wielu

autorów.

Prace [22, 23] dotyczą optymalizacji na minimum ciężaru kratownicy przestrzennej o ortogonalnej siatce prętów, przegubowo opartej na czterech słupach umieszczonych w narożach. Przeanalizowano w nich 25 konstrukcji o skokowo zmiennych wysokościach i modułach. W [22] dla każdej struktury policzono po dwie wartości funkcji celu, jedną - jako sumę ciężarów prętów i węzłów, drugą - uwzględniającą ponadto ciężar płatwi i blachy fałdowej pokrycia.

W pracy [23] porównano dodatkowo te dwie wielkości z ciężarem samych prętów. Autorzy stwierdzają, że korzystniejsze wyniki daje przypadek, w którym bierze się pod uwagę całkowity ciężar konstrukcji.

Ci sami autorzy zajmują się w [24] oceną efektywności metod Gaussa-Seidela, Hooka-Jeevesa, siatki, losowej, Monte Carlo i aproksymacji kwadratowej w optymalnym projektowaniu przekryć strukturalnych. Badanie poszczególnych metod przeprowadzono graficznie, a z analizy obliczonych miar efektywności wynika, że najkorzystniejszymi metodami są metody Gaussa-Seidela i siatki.

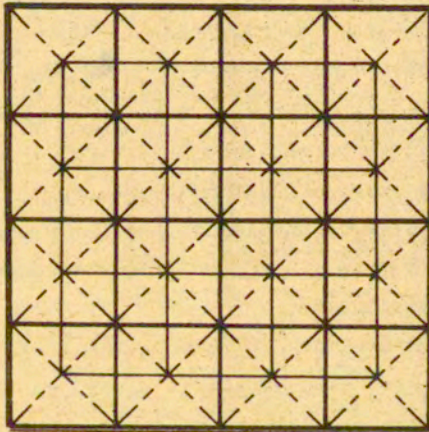
Ponieważ obliczenia statyczne kratownic przestrzennych stanowią najbardziej czasochłonną część zadania optymalizacji w publikacji [25] zaproponowano uproszczony sposób określenia sił wewnętrznych w konstrukcji i przeanalizowano wpływ uproszczeń na wynik optymalizacji.

Z kolei tematem pracy [2] jest optymalizacja systemów konstrukcyjnych przekryć strukturalnych z warunku minimum kosztów transportu i montażu. W analizie uwzględnia się między innymi takie czynniki jak : ilość różnych elementów wysyżkowych i ich gabaryty, wielkość powierzchni składowania i transportu, ilość łączników montażowych oraz odporność elementów wysyżkowych na odkształcenia postaciowe.

Należy tu jeszcze wspomnieć o pracy [4], która nie dotyczy bezpośrednio optymalizacji struktur, jednakże przedstawione w niej wyniki mogą być pomocne w doborze kształtowników na poszczególne rodzaje prętów, w zależności od występującego w nich stanu naprężenia. Autorzy zalecają stosować na ściskane pasy górne przekrycie strukturalnych przekroje rurowe, dwuteowniki, kątowniki lub ceowniki symetrycznie złożone, na krzyżulce - rury i kątowniki, a na rozciągane pręty pasów : kątowniki, pręty okrągłe i teowniki.

1.3. Podstawowe założenia i oznaczenia

Przedmiotem rozważań są pracujące w stanie sprężystym przekrycia strukturalne o ortogonalnej siatce prętów, swobodnie podparte na obwodzie w węzłach warstwy górnej.



— warstwa górna — warstwa dolna - - - krzyżulce

Rys.1. Przekrycie o ortogonalnej siatce prętów.

Zakłada się, że konstrukcja wykonana jest z prętów prostych, przyrzmatycznych, połączonych za pomocą idealnych, pozbawionych tarcia przegubów.

Obciążenie w postaci sił skupionych, przyłożone jest w węzłach w sposób statyczny.

Ponieważ przekrycia sktrukturalne, składające się z dużej liczby prętów, powinny spełniać wymagania seryjnej produkcji elementów składowych zaleca się podział konstrukcji na strefy jednakowych sztywności prętów. Jednakże, jak to podkreśla się w pracy [4], należy unikać zbyt dużej liczby podobszarów ze względu na duże prawdopodobieństwo zamiany prefabrykatów w czasie montażu oraz niezbędną, w związku z tym, drobiazgową kontrolą techniczną.

W niniejszym opracowaniu założono podział struktury na dwie podstrefy sztywności prętów. Przekroje tych prętów dobierane są z istniejących katalogów, przy czym nie czyni się zastrzeżenia dotyczącego rodzaju możliwych do zastosowania kształtowników /tzn. kształtu przekroju poprzecznego/.

Do analizy statycznej przyjęto dyskretny model konstrukcji, a jej stan równowagi opisano przy pomocy elementów rachunku różnic skończonych.

Oznaczenia przyjęte w pracy

V - objętość materiału prętów

$A_g^I, A_g^{II}, A_d^I, A_d^{II}, A_k^I, A_k^{II}$ - pola przekrojów prętów w podobszarach, odpowiednio dla prętów warstw górnej, dolnej i krzyżulców

l - długość prętów warstw górnej i dolnej

l_k - długość krzyżulców

h - wysokość struktury

a_1, a_2 - liczba modułów siatki w kierunkach x_1 i x_2

b, c - położenie granicy stref warstwy górnej w kierunkach x_1 i x_2

bd, cd - położenie granicy stref warstwy dolnej w kierunkach x_1 i x_2

F_1, F_2, \dots, F_p - katalog przekrojów prętów

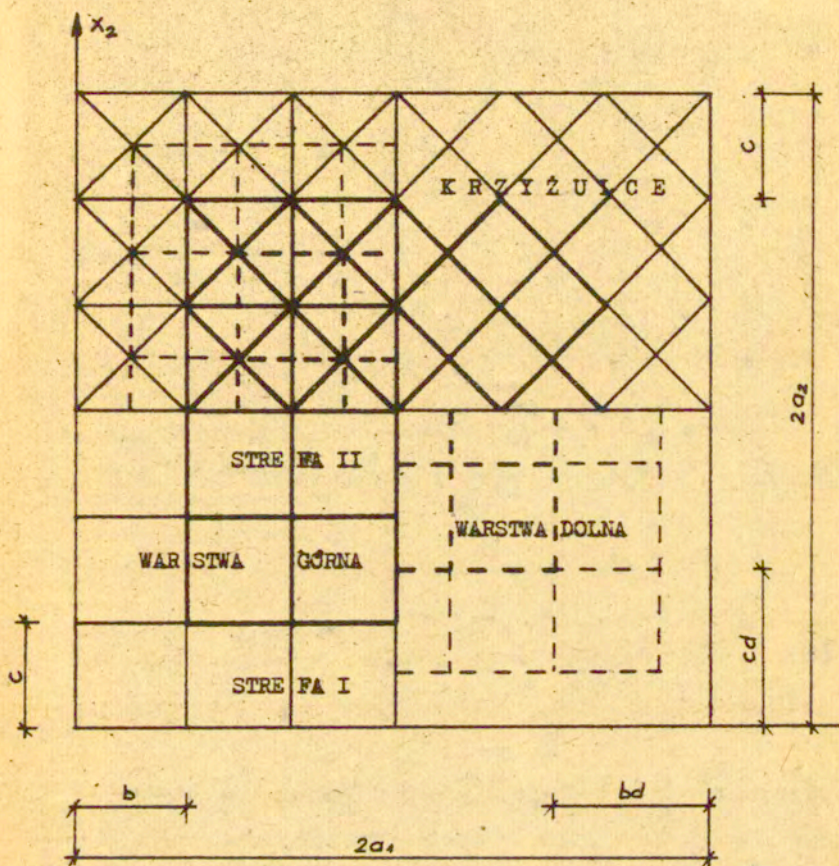
- C_g, C_d, C_k - sztywności prętów odpowiednio warstwy górnej, dolnej i krzyżulców
- $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}$ - składowe przemieszczeń węzłów warstwy górnej
- $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}$ - składowe przemieszczeń węzłów warstwy dolnej
- E - operator przesunięcia
- Δ - operator różnicy
- ∇ - operator sumy
- E_g, E_d, E_k - moduły sprężystości prętów

Pozostałe oznaczenia zawarte są w tekście.

1.4. Sformułowanie problemu

Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum objętości materiału prętów. Ograniczenia stanowią warunki nieprzekroczenia naprężeń obliczeniowych / w przypadku prętów ściskanych z uwzględnieniem niebezpieczeństwa wyboczenia/, warunek nieprzekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń węzłów oraz konieczność doboru przekrojów prętów z istniejących katalogów. Ponadto do warunków ograniczających należy również zaliczyć równania równowagi statycznej przekrycia.

Zmiennymi decyzyjnymi w zadaniu są pola przekrojów prętów w poszczególnych podstrefach, natomiast parametrami stałymi - wymiary globalne konstrukcji, długość elementów, wielkość obciążenia, granice podobszarów różnej sztywności prętów.



Rys. 2 Podział konstrukcji na strefy sztywności

Dla konstrukcji przedstawionej na rys. 2 zagadnienie sformułowano następująco

wyznaczyć

$$\min V = \sum_{i=1}^s A_i^I L_i + \sum_{j=1}^r A_j^II L_j \quad (1.1)$$

przy spełnieniu warunków

statyki

$$L W = P \quad (1.2)$$

wytrzymałościowych

$$G \leq R$$

ograniczenia przemieszczeń

$$W_{max} \leq W_{dop} \quad (1.3)$$

dyskretności zmiennych

$$A_i^I, A_j^{II} \in \{ F_1, F_2, \dots, F_p \}$$

gdzie

L - macierz współczynników układu równań równowagi

W - macierz przemieszczeń węzłów konstrukcji

G - macierz naprężeń w prętach

R - macierz wytrzymałości obliczeniowych

W_{dop} - dopuszczalne przemieszczenie

Zależność (1.2) przedstawia układ $3N$ równań równowagi statycznej przekrycia, gdzie N jest sumą liczby węzłów warstwy górnej i dolnej.

W przypadku rzeczywistych konstrukcji ograniczenia (1.2) prowadzą do bardzo dużego układu równań. Wykorzystując znaną metodę różnic skończonych przedstawioną w [14] można znacznie zmniejszyć liczbę ograniczeń, a tym samym zmniejszyć pracochłonność obliczeń. Szczegółową postać rozwiązań (1.2) przedstawiono w następnym rozdziale.

Ponieważ w równaniach statyki (1.2) występują iloczyny zmiennych ciągłych, jakimi są przemieszczenia węzłów, oraz zmiennych dyskretnych, którymi są pola przekrojów prętów, powyższe zadanie jest za-

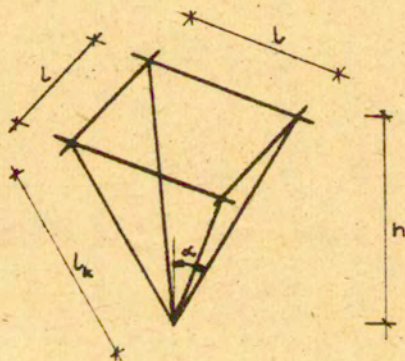
daniem programowania nieliniowego, dyskretno-ciągłego.

2. OPTIMALIZACJA PRZEKRYCIE STRUKTURALNYCH Z WYKORZYSTANIEM ANALITYCZNYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ STATYKI

2.1. Różnicowe równania równowagi statycznej typowego węzła struktury

Jak już wcześniej powiedziano statykę dyskretną i regularną konstrukcji, jaką jest przekrycie strukturalne, można opisać przy pomocy rachunku różnic skończonych.

Różnicowe równania równowagi typowych węzłów struktur o ortogonalnej siatce prętów zostały wyprowadzone w monografiach [14,40]. Przedstawione w nich równania dotyczą konstrukcji typu Unistrut o jednakowych długościach wszystkich prętów, co równoznaczne jest z nachyleniem krzywizłców do pionu pod kątem 45° .



Rys. 3

W niniejszym opracowaniu operuje się równaniami dla przekryć, w których krzywizłce mogą mieć długość różną od długości prętów warstwy górnej.

Ponieważ wykorzystywane w dalszej części pracy równania różnią się od tych przedstawionych w [14,40] tylko uwzględnieniem funkcji kąta nachylenia krzyżulców do pionu nie przedstawia się tu ich wyprowadzenia.

Dla oznaczeń jak na Rys. 3 równania te mają postać

$$\begin{aligned} \mu_+^2 [C_g \Delta_2^2 u_+ + \frac{1}{2} C_k s^2 (\nabla_2 \nabla_2 u_1 - 4u_+ + \Delta_2 \Delta_2 u_2) + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{2} C_k \operatorname{se} \Delta_2 \nabla_2 w] = -\mu_+ P_1 \\ \mu_+^2 [C_g \Delta_2^2 u_+^2 + \frac{1}{2} C_k s^2 (\Delta_2 \Delta_2 u_1 - 4u_+^2 + \nabla_2 \nabla_2 u_2) + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{2} C_k \operatorname{se} \nabla_2 \Delta_2 w] = -\mu_+ P_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\mu_+^2 C_k [\frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (\Delta_2 \nabla_2 u_1 + \nabla_2 \Delta_2 u_2) + e^2 (\nabla_2 \nabla_2 w - 4w_+)] = -\mu_+ P_3$$

$$\begin{aligned} \mu_-^2 [C_d \Delta_2^2 u_1 + \frac{1}{2} s^2 C_k (\nabla_2 \nabla_2 u_1 - 4u_1 + \Delta_2 \Delta_2 u_2) - \\ - \frac{1}{2} \sqrt{2} C_k \operatorname{se} \Delta_2 \nabla_2 w] = -\mu_- P_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_-^2 [C_d \Delta_2^2 u_2 + \frac{1}{2} s^2 C_k (\Delta_2 \Delta_2 u_1 + \nabla_2 \nabla_2 u_2 - 4u_2) - \\ - \frac{1}{2} \sqrt{2} C_k \operatorname{se} \nabla_2 \Delta_2 w] = -\mu_- P_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -C_k \mu_-^2 [\frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (\Delta_2 \nabla_2 u_1 + \nabla_2 \Delta_2 u_2) - e^2 (\nabla_2 \nabla_2 w - \\ - 4w)] = -\mu_- P_3 \end{aligned}$$

gdzie μ i μ są określone następująco

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{dla } x_1 = 2m, \quad x_2 = 2n \\ 0 & \text{dla } x_1 = 2m + 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{dla } x_1 = 2m + 1, \quad x_2 = 2n + 1 \\ 0 & \text{dla } x_1 = 2m \end{cases}$$

μ występuje w pierwszych trzech równaniach, a więc opisujących równowagę węzłów warstwy górnej, natomiast μ - w równaniach wyrażających równowagę węzłów warstwy dolnej.

$$C_g = \frac{E_g A_g}{L} \quad - \text{ sztywność pręta warstwy górnej}$$

$$C_d = \frac{E_d A_d}{L} \quad - \text{ sztywność pręta warstwy dolnej}$$

$$C_k = \frac{E_k A_k}{L_k} \quad - \text{ sztywność krzyżulców}$$

s, e - sinus i cosinus kąta nachylenia krzyżulca do pionu

W równaniach (2.1) $u_1, u_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2$ oznaczają poziome składowe przemieszczeń węzłów odpowiednio warstwy górnej i dolnej, a \underline{w} i \underline{w} - pionowe składowe przemieszczeń tychże węzłów.

Poniżej podano działanie na funkcje operatorów użytych w równaniach, a podstawy metody różnic skończonych jak również jej zastosowanie można znaleźć między innymi w pracach [14, 20, 26, 29].

Operator E_n^D jest ogólnie określony następująco

$$E_n^p f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_r) =$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+p}, x_{n+1}, \dots, x_r) \quad (2.3)$$

gdzie p jest liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną. Tak więc E_n^p działając na funkcję powoduje przyrost zmiennej x_n o stałą wartość p .

Dla $p = 0$

$$E_n^0 f(x) = f(x) \quad (2.4)$$

Operator różnicowy jest zdefiniowany wzorem

$$\Delta_n f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_r) =$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+1}, \dots, x_r) -$$

$$- f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_r) =$$

$$= (E_n - 1) f(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (2.5)$$

Operator sumy

$$\nabla_n f(x_1, x_2, \dots, x_r) = (E_n + 1) f(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (2.6)$$

Dla dwóch zmiennych x_1 i x_2

$$E_1 f(x_1, x_2) = f(x_1 + 1, x_2)$$

$$E_1^m E_2^n f(x_1, x_2) = f(x_1 + m, x_2 + n) \quad (2.7)$$

$$\Delta_1 f(x_1, x_2) = f(x_1 + 1, x_2) - f(x_1, x_2) = (E_1 - 1) f(x_1, x_2)$$

$$\nabla_2 f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + 1) + f(x_1, x_2) = (E_2 + 1) f(x_1, x_2)$$

$$\Delta_2 = E_1 - E_1^{-1} \quad \Delta_2 = E_2 - E_2^{-1}$$

$$\nabla_2 = E_1 + E_1^{-1} \quad \nabla_2 = E_2 + E_2^{-1} \quad (2.8)$$

$$\Delta_1^2 = E_1^2 - 2 + E_1^{-2} \quad \Delta_2^2 = E_2^2 - 2 + E_2^{-2}$$

Układ (2.1) jest układem równań różnicowych cząstkowych, drugiego rzędu. Po podstawieniu współrzędnych węzłów do (2.1) można otrzymać równoważny mu układ $3N$ liniowych równań algebraicznych gdzie N jest sumą węzłów warstwy górnej i dolnej.

2.2. Różnicowe równania równowagi statycznej dla węzłów leżących na granicy stref sztywności

W przypadku konstrukcji podzielonej na strefy różnej sztywności prętów równania równowagi dla węzłów leżących na granicy stref będą miały oczywiście inną postać niż przedstawione w punkcie 2.1.

Poniżej podano dla przykładu równania statyki dla niektórych z tych węzłów

- węzły górne $x_1 = b$, $x_2 \in [c+2, 2a_2 - c - 2]$

$$\begin{aligned}
 & C_9^I \mu_+^2 [E_1^{-2} u_+ - u_+] + C_k^I \mu_+^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (E_1^{-1} \nabla_2 u_+ - E_1^{-1} \Delta_2 u_2 - 2u_+) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \mathcal{R} \operatorname{se} (2w_+ - E_1^{-1} \nabla_2 w) \right] + C_9^{\bar{I}} \mu_+^2 (E_1^2 u_+ - u_+) + \\
 & + C_k^{\bar{I}} \mu_+^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (E_1 \nabla_2 u_+ - 2u_+ + E_1 \Delta_2 u_2) + \frac{1}{2} \mathcal{R} \operatorname{se} (E_1 \nabla_2 w - \right. \\
 & \left. - 2w) \right] = -\mu_+ P_1 \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & C_k^I \mu_+^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (-E_1^{-1} \Delta_2 u_+ - 2u_+ + E_1^{-1} \nabla_2 u_2) + \frac{1}{2} \mathcal{R} \operatorname{se} E_1^{-1} \Delta_2 w \right] + \\
 & + C_9^{\bar{I}} \mu_+^2 \Delta_2^2 u_+ + C_k^{\bar{I}} \mu_+^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (E_1 \Delta_2 u_+ - 2u_+ + E_1 \Delta_2 u_2) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \mathcal{R} \operatorname{se} E_1 \Delta_2 w \right] = -\mu_+ P_2
 \end{aligned}$$

$$C_k^I \mu^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (2u_+ - E_1^{-1} \nabla_2 u_+ + E_1^{-1} \Delta_2 u_+) + e^2 (E_1^{-1} \nabla_2 w - 2w) \right] + C_k^{\bar{I}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (-2u_+ + E_1 \nabla_2 u_+ + E_1 \Delta_2 u_+) + e^2 (-2w + E_1 \nabla_2 w) \right] = -\mu P_3$$

- węzły dolne $x_1 = bd$, $x_2 \in [cd+2, 2a_2 - cd - 2]$

$$C_d^I \mu^2 (E_1^{-2} u_+ - u_+) + C_d^{\bar{I}} \mu^2 [E_1^2 u_+ - u_+] + C_k^{\bar{I}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (\nabla_1 \nabla_2 u_+ + \Delta_1 \Delta_2 u_+ - 4u_+) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} \Delta_1 \nabla_2 w \right] = -\mu P_1$$

$$C_d^{\bar{I}} \mu^2 \Delta_2^2 u_+ + C_k^{\bar{I}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (\Delta_1 \Delta_2 u_+ + \nabla_1 \nabla_2 u_+ - 4u_+) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} \nabla_1 \Delta_2 w \right] = -\mu P_2 \quad (2.10)$$

$$-C_k^{\bar{I}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (\Delta_1 \nabla_2 u_+ + \nabla_1 \Delta_2 u_+) - e^2 (\nabla_1 \nabla_2 w - 4w) \right] = -\mu P_3$$

- węzeł górny $x_1 = b$, $x_2 = c$

$$C_g^I \mu^2 (E_1^{-2} u_+ - u_+) + C_k^I \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (E_1^{-1} \nabla_2 u_+ + E_1 E_2^{-1} u_+ + u_+ - E_1^{-1} \Delta_2 u_+ - E_1 E_2^{-1} u_+ - 3u_+) + \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (w - E_1^{-1} \nabla_2 w + E_1 E_2^{-1} w) \right] + C_g^{\bar{I}} \mu^2 (E_1^2 u_+ - u_+) + C_k^{\bar{I}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (-u_+ - u_+ + E_1 E_2 u_+ + E_1 E_2 u_+) + \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (E_1 E_2 w - w) \right] = -\mu P_1$$

$$C_g^I \mu^2 (E_2^{-2} u_+ - u_+) + C_k^I \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (u_+ - u_+ - E_1^{-1} \Delta_2 u_+ - E_1 E_2^{-1} u_+ + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+ E_1^{-1} \nabla_2 u_2 + E_1 E_2^{-1} u_2) + \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} \left(\underline{w} + E_1^{-1} \Delta_2 \underline{w} - E_1 E_2^{-1} \underline{w} \right) + \\
 &+ C_9^{\text{II}} \mu^2 (E_2^2 u_2 - u_2) + C_k^{\text{II}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (-u_1 + E_1 E_2 u_1 - u_2 + E_1 E_2 u_2) + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (E_1 E_2 \underline{w} - \underline{w}) \right] = -\mu P_2 \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &C_k^{\text{I}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (-E_1^{-1} \nabla_2 u_1 + E_1 E_2^{-1} u_1 + u_1 + u_2 + E_1^{-1} \Delta_2 u_2 - \right. \\
 &\left. - E_1 E_2^{-1} u_2) + e^2 (-3\underline{w} + E_1^{-1} \nabla_2 \underline{w} + E_1 E_2^{-1} \underline{w}) \right] + \\
 &+ C_k^{\text{II}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (E_1 E_2 u_1 + E_1 E_2 u_2 - u_1 - u_2) + e^2 (E_1 E_2 \underline{w} - \underline{w}) \right] = -\mu P_3
 \end{aligned}$$

- węzeł dolny $x_1 = bd, x_2 = cd$

$$\begin{aligned}
 &C_d^{\text{I}} \mu^2 (E_1^{-2} u_1 - u_1) + C_d^{\text{II}} \mu^2 (E_1^2 u_1 - u_1) + C_k^{\text{II}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (\nabla_1 \nabla_2 u_1 + \right. \\
 &\left. + \Delta_1 \Delta_2 u_2 - 4u_1) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} \Delta_1 \nabla_2 \underline{w} \right] = -\mu P_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &C_d^{\text{I}} \mu^2 (E_2^{-2} u_2 - u_2) + \mu^2 C_d^{\text{II}} (E_2^2 u_2 - u_2) + C_k^{\text{II}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 (\Delta_1 \Delta_2 u_1 + \right. \\
 &\left. + \nabla_1 \nabla_2 u_2 - 4u_2) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} \nabla_1 \Delta_2 \underline{w} \right] = -\mu P_2 \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &-C_k^{\text{II}} \mu^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{se} (\Delta_1 \nabla_2 u_1 + \nabla_1 \Delta_2 u_2) - e^2 (\nabla_1 \nabla_2 \underline{w} - \right. \\
 &\left. - 4\underline{w}) \right] = -\mu P_3
 \end{aligned}$$

$C_g^{\text{I}}, C_g^{\text{II}}, C_d^{\text{I}}, C_d^{\text{II}}, C_k^{\text{I}}, C_k^{\text{II}}$ - sztywność prętów w podobszarach odpowiednio warstwy górnej, dolnej i krzyżulców.

Równania równowagi dla pozostałych węzłów granicznych będą miały podobną postać do podanych wyżej.

2.3. Zastosowanie szeregów trygonometrycznych do rozwiązania zadania statyki

W sformułowanym w punkcie 1.4. w sposób ogólny zadaniu optymalizacji funkcje ograniczeń wytrzymałościowych nie występują w postaci jawnych funkcji zmiennych decyzyjnych, czyli przekrojów prętów, lecz w funkcji przemieszczeń węzłów. Składowe przemieszczenia węzłów, będące funkcjami pól przekrojów prętów, muszą spełniać równania równowagi, toteż każda zmiana przekrojów prętów pociąga za sobą konieczność rozwiązania układu równań.

Rozwiązanie zagadnienia optymalizacji będzie więc polegało na wielokrotnym rozwiązaniu zadania statycznego, sprawdzeniu warunków ograniczających i obliczeniu wartości funkcji celu.

Dlatego należy przyjąć takie rozwiązanie zadania statyki, które prowadziłyby do układu równań o możliwie małym wymiarze.

Powyższy warunek spełnia rozwiązanie w postaci skończonych, podwójnych szeregów trygonometrycznych zaproponowane w pracy [14].

Warunki brzegowe wynikające z przyjęcia swobodnego podparcia węzłów warstwy górnej

$$\begin{aligned} u_+ (0, x_2) = u_+ (2a_1, x_2) = u_+ (x_1, 0) = u_+ (x_1, 2a_2) = 0 \\ w_+ (0, x_2) = w_+ (2a_1, x_2) = w_+ (x_1, 0) = w_+ (x_1, 2a_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

spełniają składowe przemieszczenia węzłów wyrażone w sposób następujący:

$$u_+ = \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} Y_{mn} \cos \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_1 &= \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} Y2_{mn} \cos \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \\
 \underline{u}_2 &= \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} Y3_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2a_2} \\
 \underline{u}_2 &= \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} Y4_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2a_2} \\
 \underline{w}_+ &= \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} Y5_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \\
 \underline{w}_- &= \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} Y6_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Współczynniki rozwinięcia określa się z warunku aby suma szeregu spełniała układ równań równowagi.

Pionowe obciążenie skupione działające w węzłach można również wyrazić przy pomocy skończonych szeregów sinusowych

$$\begin{aligned}
 \underline{p}_3 &= \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} D5_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \\
 \underline{p}_3 &= \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} D6_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Sposób wyznaczania współczynników rozwinięcia funkcji obciążenia w szereg jest analogiczny jak w przypadku rozwinięcia funkcji ciągłych w nieskończone szeregi Furiera i został przedstawiony w [40].

Poniżej podaje się za [40] ostateczne wzory na te współczynniki

$$D5_{mn} = \frac{1}{a_1 a_2} \underline{p}_3 \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2a_1} \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{2a_2}$$

$$D_{6mn} = \frac{1}{a_1 a_2} P_3 \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \frac{1}{\sin \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2}} \quad (2.16)$$

Łatwo zauważyć, że współczynniki te są różne od zera tylko dla nieparzystych m i n , dlatego też sumowanie w szeregach (2.14) i (2.15) będzie przebiegać tylko po nieparzystych wartościach m i n . Po wstawieniu (2.14) do (2.1) otrzymano układ równań (2.17). Układ (2.17) jest słuszny dla konstrukcji, w których poszczególne warstwy prętów mają różne przekroje, jednakże w danej warstwie wszystkie elementy są jednakowe.

Aby wyznaczyć współczynniki rozwinięcia funkcji przemieszczeń w szereg należy układ (2.17) rozwiązać $m \cdot n / 4$ razy wstawiając odpowiednie wartości m i n .

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} \cos \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \left\{ 2 \left[C_g \left(\cos \frac{m\pi}{a_1} - 1 \right) - C_k s^2 \right] Y_{1mn} + 2 C_k s^2 \cos \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{2,m} - \right. \\
 & \left. - 2 C_k s^2 \sin \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2} Y_{4mn} + 2 \sqrt{2} C_k s e \sin \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{6mn} \right\} = -P_1 + \\
 & \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} \cos \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \left\{ 2 C_k s^2 \cos \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{1mn} + 2 \left[C_d \left(\cos \frac{m\pi}{a_1} - 1 \right) - C_k s^2 \right] Y_{2,mn} - \right. \\
 & \left. - 2 C_k s^2 \sin \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2} Y_{3mn} - 2 \sqrt{2} C_k s e \sin \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{5mn} \right\} = -P_1 \\
 & \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2a_2} \left\{ -2 C_k s^2 \sin \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2} Y_{2mn} + 2 \left[C_g \left(\cos \frac{m\pi}{a_2} - 1 \right) - C_k s^2 \right] Y_{3mn} + \right. \\
 & \left. + 2 C_k s^2 \cos \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{4mn} + 2 \sqrt{2} s e C_k \cos \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2} Y_{6mn} \right\} = -P_2 \\
 & \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2a_2} \left\{ -2 C_k s^2 \sin \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2} Y_{1mn} + 2 C_k s^2 \cos \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{3mn} + \right. \\
 & \left. + 2 \left[C_d \left(\cos \frac{n\pi}{a_2} - 1 \right) - C_k s^2 \right] Y_{4mn} - 2 \sqrt{2} C_k s e \cos \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2} Y_{5mn} \right\} = -P_2 \\
 & \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \left\{ -2 \sqrt{2} C_k s e \sin \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{2mn} - 2 \sqrt{2} C_k s e \cos \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2} Y_{4mn} - \right. \\
 & \left. - 4 e^2 C_k Y_{5mn} + 4 e^2 C_k \cos \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{6mn} \right\} = -P_3 \\
 & \sum_{m=0}^{2a_1} \sum_{n=0}^{2a_2} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \left\{ 2 \sqrt{2} C_k s e \sin \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{1mn} + 2 \sqrt{2} C_k s e \cos \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2} Y_{3mn} + \right. \\
 & \left. + 4 e^2 C_k \cos \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} Y_{5mn} - 4 C_k e^2 Y_{6mn} \right\} = -P_3
 \end{aligned}$$

(2.17)

Rozwiązanie tak postawionego zadania statycznego w przypadku konstrukcji o jednakowych przekrojach wszystkich prętów, przy uwzględnieniu wszystkich wyrazów szeregów daje wyniki idealnie zgodne z wynikami otrzymanymi z metody przemieszczeń / system STRAINS 71 opracowany w Instytucie Dróg i Mostów Politechniki Warszawskiej [41] / .

Dla konstrukcji o wymiarach $12,2 \times 12,2$ m i $a_1 = a_2 = 10$ przy uwzględnieniu 4 wyrazów szeregów maksymalne wartości przemieszczeń różnią się od ścisłych o 0,17 %, a maksymalne wartości sił o 0,75 %, natomiast w przypadku jednego wyrazu szeregu różnice te wynoszą odpowiednio 1,9 % i 6,35 %.

W przypadku konstrukcji podzielonej na strefy o różnych przekrojach prętów nie można obliczyć współczynników szeregów bezpośrednio z układu (2.17) . Można je określić stosując procedurę Galerkina. Zastosowanie metody Galerkina do obliczania współczynników rozwinięcia funkcji w szereg jest zazwyczaj przedstawiane na przykładzie jednego równania, które ta funkcja musi spełniać,

W niniejszej pracy należy rozwiązać zadanie, w którym mamy do czynienia z sześcioma funkcjami stanowiącymi rozwiązanie układu sześciu równań.

Zgodnie z fizyczną interpretacją metody Galerkina przedstawioną w pracy [34] poszczególne równania równowagi należy mnożyć

- sumę rzutów sił na kierunek x_1 przez

$$\cos \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2}$$

- sumę rzutów sił na kierunek x_2 przez

$$\sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \cos \frac{n\pi x_2}{2a_2}$$

- sumę rzutów sił na kierunek pionowy przez

$$\sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2}$$

i sumować po x_1 i x_2 w obszarach odpowiadających strefom sztywności prętów.

Wymiar otrzymanego w ten sposób układu równań zależy od przyjętej w rozważaniach liczby wyrazów szeregów.

I tak rozpatrywane zadanie optymalizacji można zapisać następująco

Funkcja celu

$$\begin{aligned} \min V(A_g^I, A_g^{II}, A_d^I, A_d^{II}, A_k^I, A_k^{II}) = & [(a_1+1)a_2 + (a_2+1)a_1 - \\ & - (a_1-b)(a_2-c+1) - (a_2-c)(a_1-b+1)] L A_g^I + [(a_1-b)(a_2-c+1) \\ & + (a_2-c)(a_1-b+1)] L A_g^{II} + [a_1(a_2-1) + (a_1-1)a_2 - \\ & - (a_1-bd+1)(a_2-cd) - (a_1-bd)(a_2-cd+1)] L A_d^I + \quad (2.18) \\ & + [(a_1-bd+1)(a_2-cd) + (a_1-bd)(a_2-cd+1)] L A_d^{II} + \\ & + 4[a_1a_2 - (a_1-b)(a_2-c)] L_k A_k^I + 4(a_1-b)(a_2-c) L_k A_k^{II} \end{aligned}$$

Warunki ograniczające

$$DY = S \quad (2.19)$$

$$G \leq R \quad (2.20)$$

$$\sum_{m=1}^{2a_1-1} \sum_{n=1}^{2a_2-1} Y_{5mn} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \leq W_{dop} \quad (2.21)$$

$$\sum_{m=1}^{2a_1-1} \sum_{n=1}^{2a_2-1} Y_{6mn} \sin \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \leq w_{dop}$$

$$A_g^I, A_g^{II}, A_d^I, A_d^{II}, A_k^I, A_k^{II} \in \{F_1, F_2, \dots, F_p\} \quad (2.22)$$

Υ - poszukiwana macierz współczynników szeregów

Zależność (2.19) przedstawia układ algebraicznych równań liniowych, otrzymany z równań równowagi statycznej po zastosowaniu procedury Galerkina.

Ponizej podano dla przykładu postać ograniczeń naprężeń (2.20) dla dwóch prętów warstwy górnej ze stref pierwszej i drugiej.

$$- \frac{E_g}{l} \sum_{m=1}^{2a_1-1} \sum_{n=1}^{2a_2-1} Y_{I mn} \sin \frac{n\pi t_2}{2a_2} \left[\cos \frac{m\pi(t_1+2)}{2a_1} - \cos \frac{m\pi t_1}{2a_1} \right] \leq \frac{R_g}{\beta_{II}} \quad (2.23)$$

$$- \frac{E_g}{l} \sum_{m=1}^{2a_1-1} \sum_{n=1}^{2a_2-1} Y_{II mn} \sin \frac{n\pi(c-2)}{2a_2} \left[\cos \frac{m\pi(t_1+2)}{2a_1} - \cos \frac{m\pi t_1}{2a_1} \right] \leq \frac{R_g}{\beta_I}$$

gdzie

$$t_1 = \begin{cases} a_1 & \text{dla } a_1 = 2r \\ a_1 - 1 & \text{dla } a_1 = 2r + 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$t_2 = \begin{cases} a_2 & \text{dla } a_2 = 2r \\ a_2 - 1 & \text{dla } a_2 = 2r + 1 \end{cases}$$

r - liczby całkowite

β_I, β_{II} - współczynniki wybočeníowe dla prętów warstwy górnej w obszarze pierwszym i drugim przyjmowane zgodnie z normą PN - 80/B - 03200.

W pracy przeprowadzono rozważania dla jednego oraz dla czterech wyrazów sześciu funkcji przemieszczeń (2.14), otrzymując w miejsce zależności (2.19) układy odpowiednio sześciu i dwudziestu czterech równań.

2.4. Optymalizacja przekrycia jako zadanie programowania liniowego

Uprzednio sformułowane zadanie rozwiązano dla czterech wariantów:

- 1/ przy pominięciu warunków równowagi na granicy stref, przyjmując w danym obszarze jednakowe przekroje dla warstw górnej, dolnej i krzyżulców.
- 2/ przy pominięciu warunków równowagi na granicy obszarów, przy założeniu, że każda warstwa prętów może mieć inny przekrój.
- 3/ przy uwzględnieniu warunków równowagi na granicy stref, zakładając w danym obszarze jednakowe przekroje dla wszystkich prętów.
- 4/ przy uwzględnieniu warunków równowagi na granicy obszarów, przyjmując dla każdej warstwy prętów różne sztywności.

W wariantach pierwszym i trzecim rozwiązanie stanowią dwie wartości pól przekrojów prętów, a w wariantach drugim i czwartym - sześć.

W przypadku pominięcia warunków równowagi na granicy stref, przy założeniu, że w danym obszarze wszystkie pręty /tzn. warstw

górnjej, dolnej i krzyżulców /mają ten sam przekrój, można równanie (2.17) podzielić przez pole przekroju prętów.

Po zastosowaniu procedury Galerkina otrzymuje się następujący układ równań :

$$\sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \varepsilon * L_1 \cos \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} = 0$$

$$\sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \psi * L_2 \cos \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} = 0$$

$$\sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \varepsilon * L_3 \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \cos \frac{l\pi x_2}{2a_2} = 0$$

$$\sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \psi * L_4 \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \cos \frac{l\pi x_2}{2a_2} = 0$$

$$\sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \varepsilon * L_5 \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} = \quad (2.25)$$

$$= \frac{1}{A^I} P_3 \left(\sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \varepsilon \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} - \sum_{x_1=b}^{2a_1-b} \sum_{x_2=c}^{2a_2-c} \varepsilon \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{A^I} P_3 \sum_{x_1=b}^{2a_1-b} \sum_{x_2=c}^{2a_2-c} \varepsilon \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2}$$

$$\sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \psi L_6 \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} =$$

$$= \frac{1}{A^I} P_3 \left(\sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \psi \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} - \sum_{x_1=bd}^{2a_1-bd} \sum_{x_2=cd}^{2a_2-cd} \psi \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{A^I} P_3 \sum_{x_1=bd}^{2a_1-bd} \sum_{x_2=cd}^{2a_2-cd} \psi \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2}$$

gdzie

$$k = 1, 3, 5, \dots, 2a_1 - 1 \quad l = 1, 3, 5, \dots, 2a_2 - 1$$

$L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ - oznaczają lewe strony równań (2.17) podzielone przez pola przekrojów prętów.

$$b \bar{d} = b + 1, \quad c \bar{d} = c + 1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} [(-1)^{x_1} + 1][(-1)^{x_2} + 1] \quad (2.26)$$

$$\psi = \frac{1}{4} [1 - (-1)^{x_1}][1 - (-1)^{x_2}]$$

W równaniach (2.25) wprowadzono funkcje (2.26) ponieważ sumowanie obejmuje tylko punkty, w których występują węzły, a więc w równaniach dotyczących węzłów górnych sumowanie przebiega po parzystych x_1 i x_2 , a dla węzłów dolnych - po nieparzystych x_1 i x_2 .

W powyższym układzie prawe strony pierwszych czterech równań równe są zeru, ponieważ zakłada się, że konstrukcja obciążona jest tylko siłami prostopadłymi do powierzchni przekrycia. Siły pionowe nie rozwijano w szeregi dlatego, że w rozwiązaniach uwzględniono tylko jeden lub cztery wyrazy szeregów funkcji przemieszczeń węzłów.

Przy uwzględnieniu tylko jednego wyrazu szeregu w układzie (2.25) należy podstawić $m = n = k = l = 1$, daje to następujący układ 6 równań :

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\cos \frac{\pi}{a_1} - 1 - \sqrt{2} s^3 \right) Y_1 + 2 \sqrt{2} s^3 \cos \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_2 - 2 \sqrt{2} s^3 \sin \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2} Y_4 + 4 s^2 e \sin \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_6 = 0 \\
& 2 \sqrt{2} s^3 \cos \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_1 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{a_1} - 1 - \sqrt{2} s^3 \right) Y_2 - 2 \sqrt{2} s^3 \sin \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2} Y_3 - 4 s^2 e \sin \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_5 = 0 \\
& -2 \sqrt{2} s^3 \sin \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2} Y_2 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{a_2} - 1 - \sqrt{2} s^3 \right) Y_3 + 2 \sqrt{2} s^3 \cos \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_4 + 4 s^2 e \cos \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2} Y_6 = 0 \\
& -2 \sqrt{2} s^3 \sin \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2} Y_1 + 2 \sqrt{2} s^3 \cos \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_3 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{a_2} - 1 - \sqrt{2} s^3 \right) Y_4 - 4 s^2 e \cos \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2} Y_5 = 0 \\
& -4 s^2 e \sin \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_2 - 4 s^2 e \cos \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2} Y_4 - 4 \sqrt{2} s e^2 Y_5 + 4 \sqrt{2} s e^2 \cos \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_6 = \\
& = -\frac{4L}{a_1 a_2 E A^2} P_3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2a_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2a_2} + \frac{4L}{a_1 a_2 E} P_3 \left(\cos \frac{\pi B}{2a_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2a_1} + \sin \frac{\pi B}{2a_1} \right) \left(\cos \frac{\pi C}{2a_2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2a_2} + \sin \frac{\pi C}{2a_2} \right) \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A^4} \right) \\
& 4 s^2 e \sin \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_1 + 4 s^2 e \cos \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2} Y_3 + 4 \sqrt{2} s e^2 \cos \frac{\pi}{2a_1} \cos \frac{\pi}{2a_2} Y_5 - 4 \sqrt{2} s e^2 Y_6 = \\
& = \frac{4L}{a_1 a_2 E A^2} P_3 \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2}} + \frac{4L}{a_1 a_2 E} P_3 \frac{\cos \frac{\pi B}{2a_1} \cos \frac{\pi C}{2a_2}}{\sin \frac{\pi}{2a_1} \sin \frac{\pi}{2a_2}} \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A^4} \right) \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Sumowanie szeregów przeprowadzono zgodnie ze wzorami podanymi w [14, 26]. Zestawienie sum wykorzystanych w pracy podano w dodatku.

W przypadku uwzględnienia czterech wyrazów szeregów z każdego równania układu (2.25) otrzymuje się 4 równania, ponieważ k i l mogą przyjmować wartości 1 i 3.

W ten sposób mamy do czynienia z układem 24 równań

$$\begin{bmatrix} B_{(k=1, l=1)}^{(m=1, n=1)} & B_{(k=1, l=1)}^{(m=1, n=3)} & B_{(k=1, l=1)}^{(m=3, n=1)} & B_{(k=1, l=1)}^{(m=3, n=3)} \\ B_{(k=1, l=3)}^{(m=1, n=1)} & B_{(k=1, l=3)}^{(m=1, n=3)} & B_{(k=1, l=3)}^{(m=3, n=1)} & B_{(k=1, l=3)}^{(m=3, n=3)} \\ B_{(k=3, l=1)}^{(m=1, n=1)} & B_{(k=3, l=1)}^{(m=1, n=3)} & B_{(k=3, l=1)}^{(m=3, n=1)} & B_{(k=3, l=1)}^{(m=3, n=3)} \\ B_{(k=3, l=3)}^{(m=1, n=1)} & B_{(k=3, l=3)}^{(m=1, n=3)} & B_{(k=3, l=3)}^{(m=3, n=1)} & B_{(k=3, l=3)}^{(m=3, n=3)} \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{bmatrix} Y(m=1, n=1) \\ Y(m=1, n=3) \\ Y(m=3, n=1) \\ Y(m=3, n=3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(k=1, l=1) \\ S(k=1, l=3) \\ S(k=3, l=1) \\ S(k=3, l=3) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

gdzie

B - macierz współczynników układu równań (2.25)

S - macierz prawych stron układu (2.25)

Współczynniki rozwinięcia funkcji przemieszczeń węzłów można wyrazić w postaci sumy dwóch rozwiązań dla dwóch prawych stron układu (2.27) - dla jednego wyrazu szeregów, układu (2.28) - dla czterech wyrazów szeregów

$$Y = \frac{1}{A^I} G + \frac{1}{A^{II}} H \quad (2.29)$$

G - rozwiązanie układu równań przy przyjęciu jako prawych stron współczynników stojących przy A^I

H - rozwiązanie układu przy przyjęciu jako prawych stron współczynników stojących przy A^{II}

Należy tu zaznaczyć, że obliczone w ten sposób współczynniki różnią się od współczynników wyznaczonych z układu, w którym pola przekrojów pozostają po lewej stronie równań. Różnice te wynikają stąd, że uwzględnia się tylko część wyrazów szeregów /jeden lub cztery/. W przypadku uwzględnienia wszystkich wyrazów szeregów współczynniki obliczone obydwiema metodami byłyby jednakowe.

Biorąc pod uwagę zależności (2.27) i (2.29) zagadnienie optymalizacji przy uwzględnieniu jednego wyrazu szeregów można sformułować następująco

$$\begin{aligned} \min V(A^I, A^{II}) = & 4 A^I (l + l_k) [a_1 a_2 - (a_1 - b)(a_2 - c)] \\ & + 4 A^{II} (l + l_k)(a_1 - b)(a_2 - c) \end{aligned} \quad (2.30)$$

przy ograniczeniach

ugięcia

$$\begin{aligned} (G_5 \frac{1}{A^I} + H_5 \frac{1}{A^{II}}) \sin \frac{\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{\pi x_2}{2a_2} &\leq W_{dop} \\ (G_6 \frac{1}{A^I} + H_6 \frac{1}{A^{II}}) \sin \frac{\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{\pi x_2}{2a_2} &\leq W_{dop} \end{aligned} \quad (2.31)$$

naprężeń

$$\sigma \leq R \quad (2.32)$$

dyskretności

$$A^I, A^{II} \in \{F_1, F_2, \dots, F_p\} \quad (2.33)$$

Ograniczenia (2.23) będą miały postać

$$\begin{aligned} - \frac{Eg}{l} (G_1 \frac{1}{A^I} + H_1 \frac{1}{A^{II}}) \xi &\leq \frac{R}{\beta_I} \\ - \frac{Eg}{l} (G_1 \frac{1}{A^I} + H_1 \frac{1}{A^{II}}) \eta &\leq \frac{R}{\beta_{II}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \xi &= \sin \frac{\pi t_2}{2a_2} \left[\cos \frac{\pi(t_1+2)}{2a_1} - \cos \frac{\pi t_1}{2a_1} \right] \\ \eta &= \sin \frac{\pi(c-2)}{2a_2} \left[\cos \frac{\pi(t_1+2)}{2a_1} - \cos \frac{\pi t_1}{2a_1} \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

t_1 i t_2 określone zależnością (2.24)

Wprowadzenie zmiennych boolowskich do (2.30)-(2.35) pozwala przekształcić powyższe zadanie w zadanie programowania liniowego zero - jedynkowego.

A zatem należy znaleźć

$$\begin{aligned} \min V &= \sum_{j=1}^p 4(l+l_k) \{ [a_1 a_2 - (a_1-b)(a_2-c)] z_j^I + \\ &+ (a_1-b)(a_2-c) z_j^{II} \} A_j \end{aligned} \quad (2.36)$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^P (G_5 z_j^I + H_5 z_j^{II}) \frac{1}{A_j} \sin \frac{\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{\pi x_2}{2a_2} \leq w_{dop} \quad (2.37)$$

$$\sum_{j=1}^P (G_6 z_j^I + H_6 z_j^{II}) \frac{1}{A_j} \sin \frac{\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{\pi x_2}{2a_2} \leq w_{dop}$$

$$G \leq R \quad (2.38)$$

$$\sum_{j=1}^P z_j^I = 1 \quad \sum_{j=1}^P z_j^{II} = 1 \quad (2.39)$$

$$z_j^I, z_j^{II} \in [0, 1]$$

przy czym

$$z_j^I, z_j^{II} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli dla danej strefy wybrano } j\text{-ty element z katalogu} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykładowe równanie (2.34) można teraz zapisać

$$-\frac{E_g}{l} \sum_{j=1}^P \frac{1}{A_j} G_1 z_j^I \xi - \sum_{j=1}^P \frac{1}{A_j} z_j^{II} \left(\frac{E_g}{l} H_1 \xi + \frac{R}{\beta_j} \right) \leq 0 \quad (2.40)$$

$$-\frac{E_g}{l} \sum_{j=1}^P \frac{1}{A_j} H_1 z_j^{II} \eta - \sum_{j=1}^P \frac{1}{A_j} z_j^I \left(\frac{E_g}{l} G_1 \eta + \frac{R}{\beta_j} \right) \leq 0$$

Podobną postać będzie miało zadanie, w którym w funkcjach opisujących przemieszczenia węzłów uwzględnia się cztery wyrazy szeregow.

W zależnościach (2.37) oraz ograniczeniach naprężeń o postaciach jak (2.40) będzie występowało sumowanie po m i n , przy czym będą one przebiegać wartości 1 i 3.

W powyższym zagadnieniu pola przekrojów prętów są parametrami stałymi, zmiennymi decyzyjnymi natomiast są z_j^I i z_j^{II} , a ich liczba równa jest liczbie elementów w przyjętych do optymalizacji katalogach przekrojów prętów.

Otrzymane zadanie można rozwiązać stosując standardowe algorytmy programowania całkowitoliczbowego. Próbowano wykorzystać program oparty na algorytmie Balasa zamieszczony w pracy [27], jednakże próby te nie powiodły się, ponieważ działa on tylko dla danych testowych, natomiast w przypadku innych danych maszyna sygnalizuje błąd w programie.

Zadanie rozwiązano metodą przeglądu sterowanego, której algorytm opisano w punkcie 3.1.

2.5. Optymalizacja przekrycia jako zadanie programowania nieliniowego.

W rozwiązaniu zadania dla drugiego wariantu, w którym zakłada się, że każda warstwa prętów może składać się z dwóch typów przekrojów, nie można przedstawić współczynników rozwinięcia w postaci (2.29).

Współczynniki szeregów należy wyznaczyć z układu równań algebraicznych (2.19) otrzymanego z równań równowagi statycznej (2.17) w wyniku zastosowania procedury Galerkina.

W celu zilustrowania przekształceń związanych z zastosowaniem metody Galerkina poniżej przedstawiono przykładowo sposób obliczania współczynników równań 2, 8, 14 i 20 /przy uwzględnieniu 4 wyrazów szeregów/.

$$d_{p+1, \tau} = 2s^2 \cos \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} [(\psi - \delta) C_k^I + \delta C_k^{\bar{I}}]$$

$$d_{p+1, \tau+1} = 2(\cos \frac{m\pi}{a_1} - 1) [(\psi - \delta) C_d^I + \delta C_d^{\bar{I}}] - 2s^2 [(\psi - \delta) C_k^I + \delta C_k^{\bar{I}}]$$

$$d_{p+1, \tau+2} = -2s^2 \sin \frac{m\pi}{2a_1} \sin \frac{n\pi}{2a_2} [(\psi - \delta) C_k^I + \delta C_k^{\bar{I}}]$$

$$d_{p+1, \tau+3} = d_{p+1, \tau+5} = 0 \quad (2.41)$$

$$d_{p+1, \tau+4} = -2\sqrt{2} s e \sin \frac{m\pi}{2a_1} \cos \frac{n\pi}{2a_2} [(\psi - \delta) C_k^I + \delta C_k^{\bar{I}}]$$

przy czym

$$\psi = \sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \psi \cos \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \cos \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2}$$

$$\delta = \sum_{x_1=bd}^{2a_1-bd} \sum_{x_2=cd}^{2a_2-cd} \psi \cos \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \cos \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} \quad (2.42)$$

$$\delta = \sum_{x_1=b+1}^{2a_1-b-1} \sum_{x_2=c+1}^{2a_2-c-1} \psi \cos \frac{m\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{2a_2} \cos \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2}$$

d - elementy macierzy **D** ze wzoru (2.19)

p i r przebiegają wartości 1, 7, 13, 19

Schemat podstawiania wartości m, n, k i l do wzorów (2.41) i (2.42)

podano w Tablicach 1 i 2

Tablica 1

P	1	7	13	19
k	1	1	3	3
l	1	3	1	3

Tablica 2

r	1	7	13	19
m	1	1	3	3
n	1	3	1	3

W analogiczny sposób można określić współczynniki pozostałych równań wyrażonych ogólnie zależnością (2.19).

Dla jednego wyrazu szeregów we wzorach (2.41) i (2.42) przyjmuje się $p = r = 1, m = n = k = l = 1$.

Prawe strony równań należy liczyć z zależności

$$\begin{aligned}
 S_{p+4} &= P_3 \sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \epsilon \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} \\
 S_{p+5} &= P_3 \sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} \psi \sin \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

ϵ i ψ zgodnie z (2.26)

S - elementy macierzy S ze wzoru (2.19)

Ogólną matematyczną postać zadania przedstawiają wzory (2.18)-(2.23)

Zależność (2.19) wyrażającą ograniczenia statyczne, należy rozpiścić w układ równań, którego współczynniki określa się w sposób opisany wyżej.

Otrzymane zadanie jest zadaniem programowania nieliniowego dyskretno - ciągłego.

Te same ogólne wzory opisują również zagadnienia optymalizacji w przypadku uwzględnienia warunków równowagi na granicy obszarów tzn. w wariantach trzecim i czwartym.

Czywiście w każdym przypadku układ równań, z którego wyznacza się współczynniki szeregów, będzie inny.

Przy wyprowadzaniu tych zależności uwzględnia się nie tylko układ (2.17), lecz także równania równowagi dla węzłów leżących na granicy stref o postaci jak (2.9) ÷ (2.12).

Przykładowo dla równania opisującego równowagę na kierunku x_1 dla węzłów górnych, sumowanie w metodzie Galerкина będzie przebiegało w następujących obszarach:

$$\begin{aligned} & \sum_{x_1=0}^{2a_1} \sum_{x_2=0}^{2a_2} L_1 \varepsilon \cos \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} - \sum_{x_1=b}^{2a_1-b} \sum_{x_2=c}^{2a_2-c} L_1 \varepsilon \cos \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} \\ & + \sum_{x_1=b+2}^{2a_1-b-2} \sum_{x_2=c+2}^{2a_2-c-2} L_1 \varepsilon \cos \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} + \\ & + 2 \sum_{x_1=b+2}^{2a_1-b-2} \varepsilon R_1(x_1, x_2=c) \cos \frac{k\pi x_1}{2a_1} \sin \frac{l\pi c}{2a_2} + \quad (2.44) \\ & + 2 \sum_{x_2=c+2}^{2a_2-c-2} \varepsilon R_1(x_1=b, x_2) \cos \frac{k\pi b}{2a_1} \sin \frac{l\pi x_2}{2a_2} + \\ & + 4 \cos \frac{k\pi b}{2a_1} \sin \frac{l\pi c}{2a_2} R_1(x_1=b, x_2=c) = 0 \end{aligned}$$

przy czym

L_1 - określa lewą stronę pierwszego równania układu (2.17)

$R_1(x_1=b, x_2)$ - równanie równowagi na kierunku x_1 dla węzłów górnych leżących na granicy $x_1=b$, $x_2 \in [c+2, 2a_2-c-2]$

$R_1(x_1, x_2=c)$ - równanie równowagi na kierunku x_1 dla węzłów górnych o współrzędnych $x_1 \in [b+2, 2a_2-b-2]$, $x_2=c$

$R_1 / x_1 = b, x_2 = c$ - równanie równowagi na kierunku x_1 dla węzłów górnych o współrzędnych $x_1 = b, x_2 = c$

Granice stref zmienności pól przekrojów prętów warstwy górnej i krzyżulców pokrywają się, toteż sumowanie dla współczynników mnożonych przez sztywności krzyżulców i prętów górnych będzie następowało w tych samych obszarach.

Granice stref prętów dolnych i krzyżulców w wariancie trzecim również pokrywają się, czyli $b d = b + 1, c d = c + 1$. (Rys.2) Natomiast w wariancie czwartym obszary zmienności krzyżulców i prętów warstwy dolnej są różne, a więc sumowanie dla współczynników mnożonych przez C_k i C_d będzie przebiegać w innych granicach.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że z równości pól przekrojów prętów poszczególnych warstw nie wynika równość ich sztywności. Przy jednakowych przekrojach pręty będą miały tę samą sztywność tylko wtedy, gdy i długości będą równe.

Prawe strony równań określających równowagę węzłów w kierunku prostopadłym do przekroczenia będą wyrażone zależnościami (2.43)

Zadanie, podobnie jak i dla poprzednich wariantów, rozwiązano dla jednego i czterech wyrazów szeregów funkcji przemieszczeń węzłów.

Jak już wcześniej stwierdzono, za wyjątkiem pierwszego wariantu, w którym otrzymano zadanie programowania liniowego, we wszystkich pozostałych przypadkach mamy do czynienia z zagadnieniem programowania nieliniowego o charakterze dyskretno - ciągłym.

2.6. Metoda rozwiązania zadania optymalizacji

W literaturze np. [10,37] można znaleźć szereg metod rozwiązywania określonego typu zadań nieliniowych, jednakże w większości z nich czyni się dodatkowe założenia dotyczące postaci funkcji celu i ograniczeń, ich ciągłości, a często również wymaga się aby funkcje te były różniczkowalne i posiadały ciągle pochodne.

W naszym przypadku mamy do czynienia z problemami, w których część zmiennych decyzyjnych jest elementami zbioru dyskretnego.

Formułowanie zagadnień optymalizacji konstrukcji na zbiorach ciągłych pozwala, co prawda, rozwiązać zadanie jedną ze znanych metod, jednakże otrzymuje się w ten sposób rozwiązanie ciągłe. Przyjęcie najbliższych wartości zmiennych decyzyjnych ze zbioru dyskretnego, większych lub równych wartościom rozwiązania ciągłego daje wyniki odległe od optimum dyskretnego. Dlatego też celowe jest zastosowanie w tych przypadkach metod, które badają obszar rozwiązań dopuszczalnych w sposób skokowy oraz nie stawiają żadnych ograniczeń w stosunku do występujących w zadaniu funkcji. Do metod tych należą metoda systematycznego przeszukiwania oraz metoda Monte Carlo [28].

W metodzie systematycznego przeszukiwania tworzy się wszystkie możliwe kombinacje zmiennych decyzyjnych i dla każdej z tych kombinacji sprawdza się warunki ograniczające w punktach, w których ograniczenia są spełnione liczy się wartości funkcji celu. Spośród ustalonych kombinacji zmiennych wybiera się tę, która daje najmniejszą wartość funkcji celu.

Zaletami tej metody są prostota oraz możliwość określenia ścisłego optimum dyskretnego.

Wadą metody jest konieczność przeszukiwania całego obszaru dopuszczalnego, co w przypadku dużej liczby zmiennych decyzyjnych i ograniczeń wymaga znacznego nakładu pracy.

W metodzie Monte Carlo bada się obszar rozwiązań dla wylosowanych wartości zmiennych decyzyjnych. Losowanie tych wartości odbywa się za pomocą liczb losowych zestawionych w tablicach, tworzonych przez specjalne programy. Liczba losowań zależy od żądanej dokładności rozwiązania.

Zaletą metody Monte Carlo - w porównaniu z metodą systematycznego przeszukiwania - jest mniejsza liczba koniecznych do przebadania kombinacji zmiennych, natomiast wadą jest to, że daje ona rozwiązania przybliżone.

W niniejszej pracy stosuje się metodę przeglądu sterowanego. W rozwiązaniu wprowadza się warunki, które pozwalają sprawdzić, czy w podobszarze, wydzielonym z obszaru dopuszczanego przez ustalone wartości jednej lub kilku zmiennych, istnieje kombinacja zmiennych, która może dać rozwiązanie lepsze od uprzednio otrzymanego.

Jeżeli odpowiedź na to pytanie jest negatywna cały ten podobszar rozwiązań jest wyłączone z przeszukiwania.

Wprowadzone warunki w znacznym stopniu zmniejszają liczbę punktów w których sprowadza się warunki ograniczające.

3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

3.1. Algorytmy obliczeń

Znalezienie rozwiązania zadania optymalizacji przekryć strukturalnych, sformułowanego w poprzednich punktach, wymaga tak dużej liczby obliczeń, że jest to możliwe tylko dzięki zastosowaniu maszyn matematycznych.

W celu przeprowadzenia obliczeń numerycznych uruchomiono cztery programy napisane w języku FORTRAN na maszynie Odra 1325.

Program OPT 3 optymalizuje konstrukcję dla jednego wyrazu szeregów funkcji przemieszczeń przy założeniu $A_G^I = A_d^I = A_k^I$, $A_G^{II} = A_d^{II} = A_k^{II}$.

Program OPT 4 optymalizuje przekrycie przy uwzględnieniu 4 wyrazów szeregów dla $A_G^I = A_d^I = A_k^I$, $A_G^{II} = A_d^{II} = A_k^{II}$.

Program OPT 1 wykonuje obliczenia dla jednego wyrazu szeregów przy założeniu różnych przekrojów dla poszczególnych warstw prętów. Program OPT 2 optymalizuje strukturę przy uwzględnieniu 4 wyrazów szeregów przy założeniu $A_G^I \neq A_d^I \neq A_k^I$, $A_G^{II} \neq A_d^{II} \neq A_k^{II}$. Przy pomocy każdego z tych programów można rozwiązać zadanie dla dwóch przypadków - zakładając uwzględnienie lub pominięcie w równaniach równowagi warunków równowagi w węzłach leżących na granicy stref sztywności.

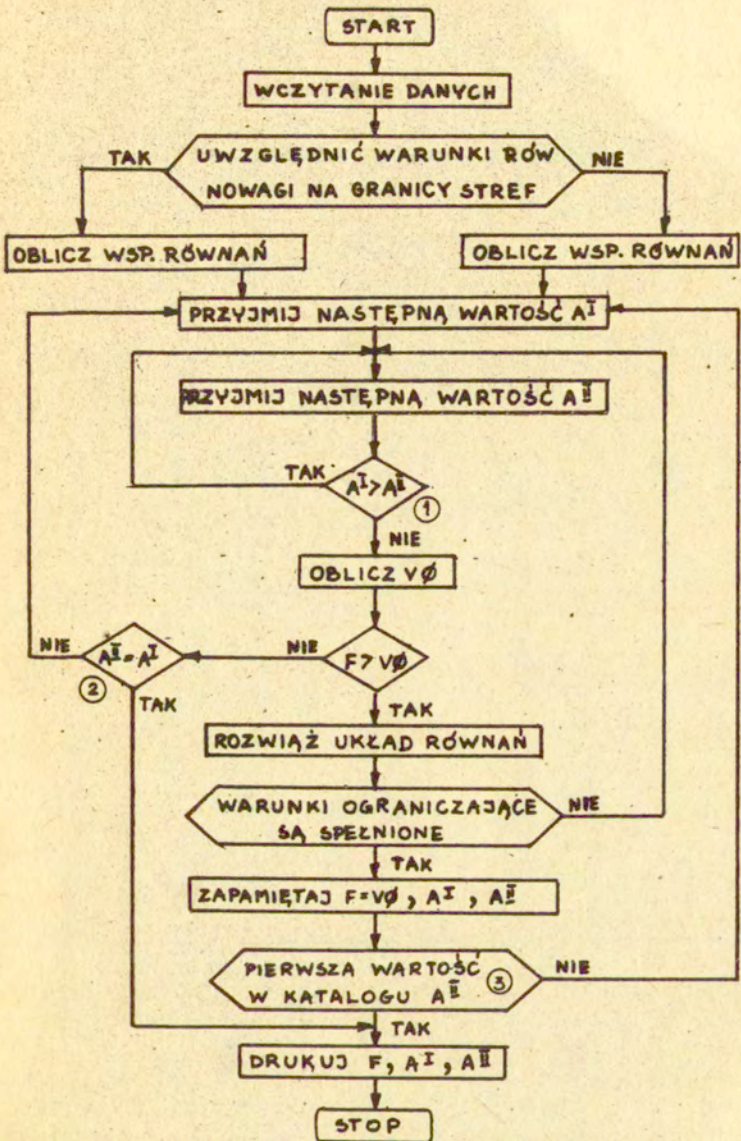
Kolejność wykonywanych w programach czynności obrazują algorytmy przedstawione na rys. 4 i 5.

Według algorytmu z rysunku 4 działają programy OPT3 i OPT4, natomiast algorytm zamieszczony na rysunku 5 dotyczy programów OPT 1 i OPT 2.

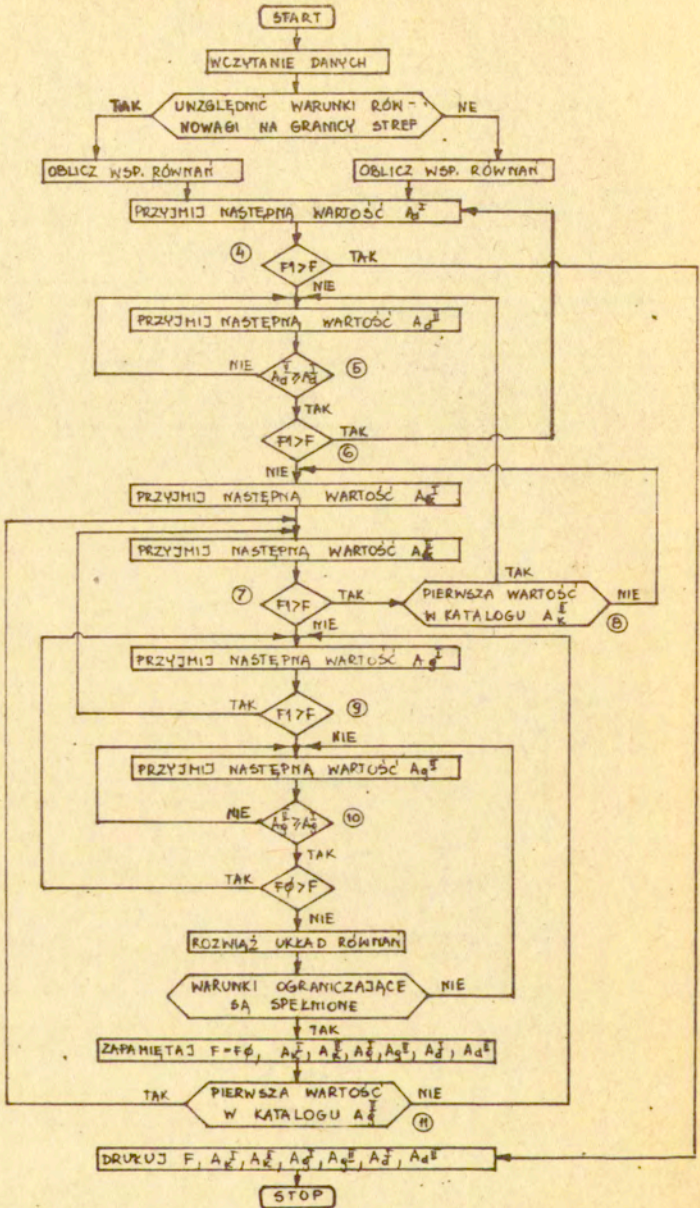
Obliczenia rozpoczynają się od wczytania danych dotyczących wymia

rów konstrukcji, własności materiału, katalogów pól przekrojów, obciążenia. Następnie liczone są współczynniki układu równań, którego niewiadomymi są współczynniki funkcji rozwinięcia przemieszczeń w szereg. Od tego momentu programy zaczynają działać w pętlach, przy czym programy OPT 3 i OPT 4 działają w 2 pętlach /poszukuje się 2 wartości pól przekrojów/, a programy OPT 1 i OPT 2 - w 6 pętlach.

Zakończenie obliczeń następuje w momencie gdy stwierdzi się, że dalsze zmiany przekrojów nie mogą dać wyników korzystniejszych od otrzymanych wcześniej.



Rys. 4 ALGORYTM PROGRAMÓW OPT3, OPT4



Rys 5 ALGORYTM PROGRAMÓW OPT 1 , OPT 2

3.2. Opis programów

Na początku każdego programu wczytywane są następujące dane:

- liczba modułów w kierunkach x_1 i x_2
- granice stref sztywności w przypadku gdy są one ustalone /w OPT 3 i OPT 4 - 2 liczby, w OPT 1 i OPT 2 - 2 liczby określające granice stref w warstwie górnej i 2 liczby dla warstwy dolnej/. Możliwe jest również wykonanie obliczeń, w których granice stref nie będą dane lecz będą przesuwają się. W ten sposób można określić najkorzystniejszy podział na obszary sztywności.
- długość prętów warstwy górnej, wysokość struktury, moduł sprężystości
- dopuszczalne ugięcie
- współczynnik obciążenia /przyjmowany przy sprawdzaniu stanów granicznych nośności/
- liczba elementów w katalogu przekrojów prętów / w OPT 3 i OPT 4 - 2 liczby całkowite, w OPT 1 i OPT 2 - 6 liczb/
- tablice pól przekrojów
- tablice współczynników wybojeniowych dla prętów warstwy górnej i krzyżulców
- tablice wytrzymałości obliczeniowych.

Ponadto wczytywany jest współczynnik NS, przy pomocy którego użytkownik programu deklaruje, czy w obliczeniach mają być uwzględnione warunki równowagi na granicy stref sztywności /NS=2/ czy też nie /NS=1/.

Następnym etapem jest obliczenie stałych /tzn. niezależnych od pól przekrojów prętów/ elementów współczynników układu równań.

W programach OPT 3 i OPT 4 w przypadku pominięcia warunków równowagi na granicy stref na współczynniki szeregów stosuje się wzór (2.29), a więc układ równań (2.27) lub (2.28) rozwiązuje się w całym programie tylko dwukrotnie.

W pozostałych sześciu przypadkach współczynniki układu równań zmieniają się wraz ze zmianą pól przekrojów prętów.

Każdy współczynnik można przedstawić jako sumę iloczynów

$$A/I,J/ = AL/I,J/ \times CK1 + BE/I,J/ \times CK2 + GA/I,J/ \times CP1 + DE/I,J/ \times CP2 \quad (3.1)$$

gdzie

AL/I,J/, BE/I,J/, GA/I,J/, DE/I,J/ - stałe elementy współczynników układu równań /tzn. niezależne od pól przekrojów prętów/

CK1, CK2 - sztywności krzyżulców w strefach

CP1, CP2 - sztywności prętów pasów, górnego lub dolnego w zależności od tego, czy równanie dotyczy węzła warstwy górnej czy dolnej.

Tak więc kolejnym etapem po wczytaniu danych w tych sześciu przypadkach jest obliczenie współczynników AL, BE, GA, DE.

W programie OPT 3 współczynniki te liczone są w segmencie głównym MASTER, w OPT 4 - w segmencie ALBE 1, w OPT 1 - w podprogramach WSP 1, WSP 2, a w OPT 2 - w podprogramie ALBE 1.

Następnie w pętłach przyjmowane są kolejne wartości pól przekrojów z katalogów i obliczane współczynniki rozwinięcia funkcji przemieszczeń. Oczywiście przed każdym rozwiązaniem układu równań obliczana jest wartość funkcji celu dla sprawdzenia, czy dana kombinacja zmiennych może dać rozwiązanie lepsze od poprzedniego.

Dla skrócenia czasu obliczeń w programach wprowadzono pewne warunki, które pozwalają zmniejszyć obszar przeszukiwań.

Na rys. 4 oznaczone są one numerami 1 - 3, a na rys. 5 - numerami 4 - 11.

Dla przykładu jeżeli oznaczymy przez L6 - nr elementu z katalogu przekrojów dla pierwszej strefy prętów warstwy dolnej, a przez L5 nr elementu z katalogu przekrojów dla drugiej strefy prętów warstwy dolnej, to F1 z warunku 6 przedstawia wartość funkcji celu obliczoną w sposób następujący:

$$F1 = FG1 * AG1(1) + FG2 * AG2(1) + FK1 * AK1(1) + FK2 * AK2(1) + FD1 * AD1(L6) + FD2 * AD2(L5) \quad (3.2)$$

gdzie

$$FG2 = [(a_1 - b)(a_2 - c + 1) + (a_2 - c)(a_1 - b + 1)] * l$$

$$FG1 = [(a_1 + 1)a_2 + (a_2 + 1)a_1] * l - FG2$$

$$FK2 = 4(a_1 - b)(a_2 - c) * l_k$$

(3.3)

$$FK1 = 4a_1a_2 * l_k - FK2$$

$$FD2 = [(a_1 - bd + 1)(a_2 - cd) + (a_2 - cd + 1)(a_1 - bd)] * l$$

$$FD1 = [a_1(a_2 - 1) + (a_1 - 1)a_2] * l - FD2$$

AG1(1), AK1(1), AG2(1), AK2(1) - są pierwszymi elementami katalogów przekrojów dla prętów warstwy górnej i krzyżulców odpowiednio w strefach pierwszej i drugiej.

Sprawdzenie warunków ograniczających w programach CPT 3 i OPT 4 następuje w segmencie głównym MASTER, natomiast w programach OPT 1 i OPT 2 - w podprogramach WARUNKI.

Programy kończą wydruki wyników, które zawierają współczynniki rozwinięcia funkcji przemieszczeń, wartości pól przekrojów, dla których, przy spełnieniu warunków ograniczających, funkcja celu przyjmuje wartość minimalną, wartość funkcji celu oraz liczbę iteracji.

3.3. Przykłady obliczeń numerycznych

We wszystkich przedstawionych poniżej przykładach przyjęto za [4] łączne, charakterystyczne obciążenie pionowe równe 2kN/m^2 . Na tę wartość składają się:

obciążenia stałe:

- ciężar własny przekrycia strukturalnego $0,3\text{ kN/m}^2$
- ciężar pokrycia dachowego $0,5\text{ kN/m}^2$

Obciążenia zmienne:

- obciążenie śniegiem jak dla II strefy $0,7\text{ kN/m}^2$
- obciążenie technologiczne $0,5\text{ kN/m}^2$

Razem $2,0\text{ kN/m}^2$

Założono, że obciążenie w postaci pionowych sił skupionych jest przekazywane równomiernie na wszystkie węzły konstrukcji, a więc

$$P_3 = P_3 = P$$

Ponieważ norma PN-80/B-03200 nie podaje dopuszczalnych ugięć dla konstrukcji przestrzennych, przyjęto jak w pracy [4], że maksymalne ugięcie przekrycia nie powinno przekraczać $1/200$ rozpiętości krótszego boku.

Współczynnik sprężystości wzdłużnej przyjęto zgodnie z normą PN-80/B-03200 równy 205 GPa .

Przekroje zostały uszeregowane wg wartości rosnących. Opracowane programy optymalizacji wykorzystano w następujących przykładach:

Przykład 1

Przekrycie o wymiarach 12,2 x 12,2 m wykonane z prętów firmy Unistrut. Przyjęto jak w publikacji [1] $a_1 = a_2 = 10$, $l = 1,22$ m, $h = 0,86$ m, $P = 5,92$ kN, $b = c = 4$ oraz wytrzymałość obliczeniową jak dla stali St3S równą $R = 215$ MPa.

Aby możliwe było porównanie wyników z wynikami uzyskanymi w pracy [1] przyjęto, wyjątkowo w tym przykładzie, dopuszczalne ugięcie równe $1/400$ rozpiętości boku, a więc $w_{dop} = 0,03$ m.

Katalog przekrojów prętów opracowany na podstawie [35] podany jest w Tablicy 3

Tablica 3

$A [m^2]$	0,000381	0,000762	0,001069	0,001324
$i_{min} [m^2]$	0,015	0,0166	0,0168	0,0172

Wyniki obliczeń podane są w Tablicach 4 i 5

Tablica 4

Lp.	Wariant rozwiązania, program	$A^I [m^2]$	$A^{II} [m^2]$	$V [m^3]$
1.	1 wyraz szeregu, OPT 3, NS = 1	0,000762	0,001069	0,852
2.	1 wyraz szeregu, OPT 3, NS = 2	0,000381	0,001069	0,614
3.	4 wyrazy szeregu, OPT 4, NS = 1	0,000381	0,001324	0,703
4.	4 wyrazy szeregu, OPT 4, NS = 2	0,000381	0,001069	0,614
5.	Bauer, Gutkowski, Iwanow [1]	0,000381	0,001324	0,703

NS = 2, odpowiada przypadkowi, gdy w równaniach równowagi uwzględnia się warunki równowagi w węzłach leżących na granicy stref sztywności; w przeciwnym przypadku NS = 1.

Tablica 5

Lp.	Wariant rozwiązania , program	$I \cdot 10^4$ A_g [m ²]	$II \cdot 10^4$ A_g [m ²]	$I \cdot 10^4$ A_d [m ²]	$II \cdot 10^4$ A_d [m ²]	$I \cdot 10^4$ A_k [m ²]	$II \cdot 10^4$ A_k [m ²]	V [m ³]
1	1 wyraz szeregu OPT 1 , NS = 1	3,81	10,69	3,81	3,81	3,81	10,69	0,563
2	1 wyraz szeregu OPT 1 , NS = 2	3,81	13,24	3,81	10,69	3,81	3,81	0,519
3	4 wyrazy szeregu OPT 2 , NS = 1	7,62	7,62	3,81	7,62	3,81	7,62	0,569
4	4 wyrazy szeregu OPT 2 , NS = 2	3,81	10,69	3,81	10,69	3,81	3,81	0,493

Przykład 2

W przykładzie tym przyjęto wymiary konstrukcji oraz rodzaje profili na poszczególne typy prętów jak w projekcie. "System konstrukcyjno-montażowy stalowych hal o przekryciach strukturalnych" opracowany w Centralnym Ośrodku Badawczo-Projektowym Konstrukcji Metalowych "Mostostal", a opisanych między innymi w [4].

I tak dla struktury o wymiarach 24 x 24 m przyjęto:

$$a_1 = a_2 = 12, \quad b = c = 4, \quad bd = cd = 5$$

$$l = 1,96 \text{ m} \quad h = 1,5 \text{ m} \quad l_k = 2,042 \text{ m}$$

$$P = 4,35 \text{ kN} \quad w_{\text{dop}} = 0,12 \text{ m}$$

Założono, że warstwa górna może być wykonana z dwóch kątowników równoramiennych, pas dolny - z prętów okrągłych, a krzyżulce z rur.

Przyjęte do optymalizacji przekroje podane są w tablicach:

6, 7 i 8.

Katalog przekrojów dla A_g^I obejmował pozycje 1 - 4 tablicy 6, natomiast dla A_g^{II} - pozycje 3 - 6 tejże tablicy.

Tablica 6

Katalog przekrojów dla warstwy górnej /2 kątowniki/

Lp.	Wyróżnik	A [m ²]	R [MPa]
1	45 x 45 x 4	0,000348	215
2	50 x 50 x 5	0,00048	215
3	60 x 60 x 5	0,000582	215
4	75 x 75 x 5	0,000738	215
5	80 x 80 x 6	0,000938	215
6	90 x 90 x 7	0,00123	215

Tablica 7

Katalog przekrojów dla warstwy dolnej /pręty okrągłe/

Lp.	Srednica mm	A [m ²]	R [MPa]
1	∅ 20	0,000314	295
2	∅ 24	0,000452	295
3	∅ 30	0,000707	295
4	∅ 35	0,000962	285

Tablica 8

Katalog przekrojów dla krzyżulców /rury R35/

Lp.	Średnica [mm]	Grubość ścianki [mm]	A [m ²]	R [MPa]
1	38	4	0,000427	210
2	44,5	4	0,000509	210
3	48	5	0,000675	210
4	54	6	0,000905	210

Ponieważ w przykładzie zakłada się różne przekroje dla poszczególnych warstw, obliczenia mogą być wykonywane tylko programami OPT 1 i OPT 2.

Otrzymane wyniki zestawione są w Tablicy 9.

Tablica 9

Lp.	Wariant rozwiązania, program	$A_g^I \cdot 10^4$ [m ²]	$A_g^{II} \cdot 10^4$ [m ²]	$A_d^I \cdot 10^4$ [m ²]	$A_d^{II} \cdot 10^4$ [m ²]	$A_k^I \cdot 10^4$ [m ²]	$A_k^{II} \cdot 10^4$ [m ²]	V [m ³]
1	1 wyraz szeregu OPT 1, NS = 1	6,96	14,76	4,52	4,52	4,27	5,09	1,425
2	1 wyraz szeregu OPT 1, NS = 2	6,96	14,76	3,14	4,52	4,27	5,09	1,384
3	1 wyraz szeregu OPT 2, NS = 1	9,61	11,64	3,14	3,14	4,27	6,754	1,439
4	1 wyraz szeregu OPT 2, NS = 2	6,96	14,76	3,14	4,52	5,09	5,09	1,437

Przykład 3

W tym i następujących przykładach założono, że wszystkie pręty wykonane są z rur R35 zestawionych w Tabelicy 10.

Tabelica 10

Lp.	Średnica grub.ścian.	A [m ²]
1	2	3
1	32/4	0,000352
2	34/4	0,000377
3	38/4	0,000427
4	42/4	0,000478
5	48/4	0,000553
6	48/5	0,000675
7	52/5	0,000738
8	54/6	0,000905
9	57/6	0,000961
10	60/6,5	0,00109
11	70/5,5	0,001114
12	70/6,5	0,00130
13	76/6	0,00132
14	83/6	0,00145
15	83/6,5	0,00157
16	89/6,5	0,00168
17	89/8	0,00188
18	89/8	0,00204
19	95/8	0,002199
20	102/8	0,00236
21	108/8	0,00251
22	127/8	0,00299
23	133/8	0,00314
24	140/8	0,00331
25	159/8	0,0038
26	168/8	0,00402

1	2	3
27	178/8	0,00427
28	194/8	0,00467
29	194/9	0,00524
30	194/10	0,00578
31	219/9	0,00594

Dla przekrycia o parametrach jak w poprzednim przykładzie, przy pomocy programów OPT 3 i OPT 4, wykonano obliczenia przesuwając granice stref co 2, tzn. $b = c$ przyjmowało kolejno wartości 2, 4, 6, 8.

Najkorzystniejsze wyniki uzyskano dla $b = c = 4$.

Zestawiono je w Tablicy 11.

Tablica 11

Lp.	Wariant rozwiązania, program	A^I [m ²]	A^{II} [m ²]	V [m ³]
1	1 wyraz szeregu NS = 1, OPT 3	0,000553	0,001114	1,850
2	1 wyraz szeregu NS = 2, OPT 3	0,000427	0,001114	1,688
3	4 wyrazy szeregu NS = 1, OPT 4	0,000553	0,001114	1,850
4	4 wyrazy szeregu NS = 2, OPT 4	0,000553	0,00109	1,825

Przykład 4

W przykładzie tym przeanalizowano szereg przekryć strukturalnych

o wymiarach 24 x 24 m przy zmiennych, podobnie jak w pracach [22,23] module i wysokości.

Obliczenia wykonano dla $a_1 = a_2 = 6, 8, 10, 12, 14, 16$ oraz wysokości zmieniającej się od 1,2 m do 3 m co 0,3 m. Ponadto dla każdej kombinacji a_1 i h szukano optymalnego położenia granicy stref sztywności, przyjmując $b = c = 4$ do $a_1 - 2$ co 2.

W Tablicach 12 i 13 zamieszczono część wyników otrzymanych z programu OPT 3 dla $NS = 1$. Najmniejsze wartości funkcji celu przy określonej wysokości konstrukcji otrzymano dla odległości międzywęzłowej l i granicy stref $b = c$ podanych w Tabelicy 12.

Tablica 12

Lp.	h [m]	l [m]	b	A^I [m ²]	A^{II} [m ²]	V [m ³]
1	1,2	1,71	4	0,000427	0,001114	2,081
2	1,5	2,0	4	0,000553	0,001114	1,877
3	1,8	2,4	4	0,000738	0,00132	1,847
4	2,1	2,4	4	0,000553	0,00132	1,691
5	2,4	2,4	4	0,000553	0,001114	1,612
6	2,7	2,4	4	0,000553	0,001114	1,688
7	3,0	2,4	4	0,000553	0,001114	1,766

Optymalne wartości funkcji celu przy określonej odległości międzywęzłowej l i zmiennej wysokości przekrycia podano w Tablicy 13

Tablica 13

Lp.	l [m]	h [m]	b	A^I [m ²]	A^{II} [m ²]	V [m ³]
1	1,5	2,4	6	0,000377	0,000553	1,882
2	1,71	2,4	6	0,000427	0,000738	1,822
3	2,0	2,1	6	0,000553	0,001114	1,810
4	2,4	2,4	4	0,000553	0,001114	1,612
5	3,0	3,0	4	0,000961	0,00145	1,851
6	4,0	3,0	4	0,00145	0,00235	1,814

Jak łatwo zauważyć rozwiązaniem optymalnym jest konstrukcja o parametrach:

$$l = 2,4 \text{ m}, \quad h = 2,4 \text{ m}, \quad b = c = 4 \text{ i przekrojach prętów}$$

$$A^I = 0,000553 \text{ m}^2, \quad A^{II} = 0,001114 \text{ m}^2.$$

Przykład 6

Podobnej analizie jak w poprzednim przykładzie poddano strukturę 36 x 36 m zakładając, że $a_1 = a_2$ może przyjmować wartości 12, 14, 16, 18, 20, 24, a wysokość zmienia się od 1,2 m do 3,0 co 0,3 m. Obliczenia przeprowadzono wykorzystując program OPT 3 dla $NS = 1$. Wartości pól przekrojów prętów oraz długości prętów warstwy górnej odpowiadającej optymalnym wartościom funkcji celu dla danej wysokości konstrukcji podane są w Tablicy 14, natomiast Tablica 15 zawiera pola przekrojów oraz wysokości przekrycia odpowiadające najmniejszej objętości materiału przy danej odległości międzywęzłowej.

Tablica 14

Lp.	h [m]	l [m]	b	A^I [m ²]	A^{II} [m ²]	V [m ³]
1	1,2	3,0	6	0,0013	0,00578	7,704
2	1,5	3,0	4	0,00145	0,00331	7,341
3	1,8	3,0	6	0,00157	0,00331	6,678
4	2,1	3,0	6	0,00145	0,00299	6,326
5	2,4	3,0	4	0,001114	0,00251	6,197
6	2,7	2,57	4	0,000905	0,00168	5,94
7	3,0	2,57	4	0,000675	0,00168	5,661

Tablica 15

Lp.	l [m]	h [m]	b	A^I [m ²]	A^{II} [m ²]	V [m ³]
1	1,5	3,0	12	0,000478	0,001114	6,871
2	1,8	2,7	8	0,000553	0,00132	6,348
3	2,0	3,0	6	0,000553	0,00132	6,159
4	2,25	3,0	6	0,000738	0,00145	5,874
5	2,57	3,0	4	0,000675	0,00168	5,661
6	3,00	3,0	8	0,00145	0,00236	5,963

Rozwiązaniem zadania jest konstrukcja o następujących parametrach

$l = 2,57$ m, $h = 3,0$ m, $b = 4$, $A^I = 0,000675$, $A^{II} = 0,00168$ m².

3,4, Analiza wyników

Analizując wyniki z przykładów 1 i 2 można zauważyć, że uwzględniając w równaniach równowagi warunki równowagi w węzłach leżących na granicy stref sztywności otrzymuje się rozwiązanie korzystniejsze, tzn. o mniejszej wartości funkcji celu, niż w przypadku pominięcia tych warunków. Z kolei z porównania wartości funkcji celu zamieszczonych w tablicach 4 i 5 oraz 9 i 11 wynika, że bardziej ekonomiczną konstrukcją, ze względu na ciężar prętów, jest przekrycie, w którym poszczególne warstwy prętów wykonane są z różnych przekrojów. Należy tu zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku tych konstrukcji dla krzyżulców ze strefy drugiej otrzymano przekroje większe lub równe przekrojom krzyżulców z pierwszej strefy.

Jest to o tyle interesujące, że w przekryciach o ortogonalnej siatce prętów podpartych na obwodzie, największe siły w krzyżulcach, występują w prętach przy brzegach struktury, natomiast ku środkowi konstrukcji siły te zmniejszają się. Należałoby więc przypuszczać, że A_k^{II} powinno być mniejsze od A_k^I . W Tablicy 16 podano maksymalne ugięcie oraz wartości sił w najbardziej wyciężonych prętach w poszczególnych strefach dla $A_g^I = 0,000381 \text{ m}^2$, $A_g^{II} = 0,000761 \text{ m}^2$, $A_d^I = 0,000381 \text{ m}^2$, $A_d^{II} = 0,001069 \text{ m}^2$ /z programu OPT 1 i dla $NS = 2$ /.

Tablica 16

Lp	$A_k^I [m^2]$ $A_k^{II} [m^2]$	Siły w strefie I [MPa]			Siły w strefie II [MPa]			w_{max} [m]
		warstwa górną	krzyżu lec	warstwa dolną	warstwa górną	krzyżu lec	warstwa dolną	
1	0,000381 0,000381	92,5	55,1	89,9	201	50,8	153	0,0327
2	0,000762 0,000381	93,7	31	91,2	204	25,9	155	0,0318
3	0,000381 0,000762	89,1	43,8	90	194	40,9	153	0,0314

Jak łatwo zauważyć zwiększenie pola przekroju krzyżulców w strefie I powoduje zmniejszenie sił w krzyżulcach i wzrost sił w pozostałych prętach, natomiast zwiększenie pola przekroju krzyżulców w strefie II powoduje zmniejszenie sił w krzyżulcach i w prętach warstwy górnej.

W niniejszej pracy jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum objętości materiału prętów co w przypadku przekrycia o założonym a priori module, równoznaczne jest z minimum ciężaru konstrukcji /ponieważ ciężar węzłów i pokrycia jest tu stały/.

Jeżeli odległość międzywęzłowa jest zmienna to suma ciężaru węzłów oraz ciężar pokrycia dachowego są funkcją tej odległości. Jako funkcję celu należy w tym przypadku, podobnie jak w pracach [22,25], przyjmować łączny ciężar przekrycia.

W celu sprawdzenia, jaki wpływ na wybór konstrukcji optymalnej ma uwzględnienie w funkcji celu ciężaru węzłów, obliczono dla struktur z przykładów 4 i 5 sumę ciężarów prętów i węzłów przyj-

mując ciężar objętościowy stali $\gamma_s = 77,0 \text{ kN/m}^3$ oraz ciężar jednego węzła równy $0,14 \text{ kN}$ [23].

Procentowy udział ciężaru węzłów w ogólnym ciężarze struktury maleje wraz ze wzrostem modułu. Dla konstrukcji o wymiarach 24×24 waha się on w granicach od $7,9 \%$ dla $l = 4 \text{ m}$ do $34,5 \%$ dla $l = 1,5 \text{ m}$, a dla konstrukcji $36 \times 36 \text{ m}$ - od $8,7 \%$ dla $l = 3,0 \text{ m}$ do 24% dla $l = 1,5 \text{ m}$.

Konstrukcja z przykładu 5 określona jako optymalna ze względu na ciężar prętów jest również optymalną ze względu na sumę ciężarów prętów i węzłów.

Natomiast położenie optimum dla przekrycia z przykładu 4 zmienia się. Strukturę $24 \times 24 \text{ m}$ o minimalnym ciężarze charakteryzują następujące wielkości

$$l = 4,0 \text{ m} , \quad h = 3,0 \text{ m} , \quad b = c = 4$$

$$A^I = 0,00145 \text{ m}^2 , \quad A^{II} = 0,00236 \text{ m}^2 , \quad G = 151,6 \text{ kN}$$

Konstrukcja ta jest o $2,3 \%$ lżejsza niż struktura optymalna ze względu na ciężar samych prętów.

4. WNIOSKI

Wykorzystanie metod rozwiązywania równań różnicowych opisujących równowagę regularnych konstrukcji prętowych pozwoliło na opracowanie efektywnych procedur optymalizujących powyższe konstrukcje. Najistotniejszą zaletą zastosowanych metod jest znaczne zmniejszenie liczby warunków ograniczających w porównaniu z zadaniem wyjściowym.

Rozwiązanie sformułowanego zagadnienia pozwala na wyznaczenie optymalnych pól przekrojów prętów przekrycia podzielonego na dwie strefy sztywności oraz optymalnych granic tych stref. Oczywiście rozważania można przeprowadzić dla większej liczby obszarów jednakowych przekrojów prętów. Przedstawione programy mogą również służyć do określenia najkorzystniejszych wysokości i modułu struktury.

Jeżeli jako zmienne decyzyjne przyjmie się nie tylko przekroje prętów lecz także odległość między węzłami warstwy górnej, należy jako funkcję celu przyjąć ciężar całej struktury a nie ciężar samych prętów. Wprowadzenie tej funkcji celu do opracowanych programów nie nastrocza żadnych trudności.

W przypadku traktowania ciężaru /Objętości/ materiału jako jedyne parametru decydującego o koszcie konstrukcji przedstawione rozważania są całkowicie uzasadnione. Natomiast, jeśli kryterium optymalizacji stanowić będzie minimum całkowitego kosztu konstrukcji, to pamiętać należy, że około 50% kosztu przekrycia przypada na produkcję węzłów [40] i wówczas uwzględnienie tego parametru w funkcji kosztu jest niezwykle istotne.

Na podstawie analizy otrzymanych wyników można sformułować następujące wnioski:

- przyjmowanie małych w stosunku do rozpiętości modułów i wysokości konstrukcji jest nieekonomiczne zarówno ze względu na kryterium minimum ciężaru prętów jak i minimum ciężaru całej struktury.
Wielkości te powinny być określane w zależności od rozpiętości konstrukcji.
Dla przykładu przekraczanie strukturalne pawilonu japońskiego na terenie wystawy światowej w Osaka o wymiarach w planie 108,0 x 291,6 m ma wysokość 7,637 m, a jego moduł wynosi 10,8m[5].
- przekryciami lżejszymi są struktury, w których poszczególne warstwy prętów wykonywane są z różnych typów przekrojów. Jeżeli takie różnicowanie przekrojów jest niemożliwe np. ze względów estetycznych, to dostosowanie pól powierzchni prętów do panujących w nich sił można osiągnąć przyjmując rury o tej samej średnicy zewnętrznej lecz różnych grubościach ścianek.
- granice stref sztywności dla rozwiązań optymalnych nie przekraczają zazwyczaj 1/4 rozpiętości konstrukcji.
- ograniczenie ugięcia $w \leq L/200$ jest aktywne przy małych wysokościach przekrycia /np. w przykładach 4 i 5 dla $h = 1,2$ m/ natomiast przy wysokościach większych o doborze przekroju prętów decydują panujące w nich siły.
- programy OPT 1 i OPT 3, w których funkcje przemieszczeń przybliża się jednym wyrazem szeregu, są znacznie szybsze niż pro

gramy OPT 2 i OPT 4. Dlatego dla określenia optymalnych wysokości i modułu konstrukcji należy korzystać z programów OPT 1 i OPT 3, natomiast programy OPT 2 i OPT 4 stosować przy optymalizacji przekryć o ustalonych wymiarach.

- większość czasu obliczeń numerycznych pochłania poszukiwanie pierwszego rozwiązania dopuszczalnego, bowiem liczba iteracji wykonywanych po znalezieniu tego rozwiązania do chwili zakończenia działania programów jest niewielka. Czas obliczeń zależy nie tylko od liczby elementów w katalogach przekrojów, lecz również od wielkości pól powierzchni. Zbyt małe wielkości pól pociągają za sobą konieczność przeglądu większej liczby kombinacji zmiennych, a tym samym powodują wydłużenie czasu obliczeń. Dlatego dla poprawnego ułożenia katalogu przekrojów może być celowe określenie niezbędnego pola powierzchni prętów dla konstrukcji wykonanej z elementów o jednakowych przekrojach.

W dalszych pracach przewiduje się wykorzystanie algorytmu przeglądu według rosnącej wartości funkcji celu [17], który znacznie skraca czas pracy emc.

Niewątpliwą zaletą opracowanych programów jest ograniczenie liczby danych do niezbędnego minimum. Większość programów rozwiązujących przekrycia strukturalne wymaga opisu każdego węzła i pręta, co w przypadku realnych konstrukcji jest niezwykle pracochłonne.

W programach opisanych w niniejszej pracy geometrię struktury określa zaledwie 8 liczb, a ponadto wykorzystuje się w nich tylko pamięć operacyjną maszyny.

Ponieważ w rozwiązaniach przedstawionych w pracy uwzględnia

się tylko jeden lub cztery wyrazy szeregów funkcji przemieszczeń, należy dla konstrukcji o parametrach określonych przez programy optymalizujące wyznaczyć ponownie siły i przemieszczenia jedną z metod ścisłych.

Zaprezentowany sposób rozwiązywania zadań optymalizacji przekryć strukturalnych o ortogonalnej siatce prętów może być również stosowany w przypadku struktur o siatce diagonalnej.

Składam serdeczne podziękowanie dr inż. Jackowi Bauerowi za opiekę i cenne wskazówki jakich udzielił mi przy opracowywaniu niniejszej pracy.

5. SPIS LITERATURY

- [1] - J. Bauer, W. Gutkowski, Z. Iwanow "Metody numeryczne w optymalizacji dyskretnej"
Mechanika i Komputer, Tom 4 s. 121-139, W-wa 1981
- [2] - A. Biegus, Z. Kowal "Optymalizacja strukturalnych przekryć warstwowych metodami analizy wartości"
V Konferencja Naukowo-Techniczna "Konstrukcje Metalowe"
W-wa 1974, tom II
- [3] - A. Brandt, W. Marks "Optymalizacja w projektowaniu konstrukcji" Inżynieria i Budownictwo 5/1974
- [4] - J. Bródka "System konstrukcyjno-montażowy stalowych hal o przekryciach strukturalnych"
Arkady, W-wa 1979
- [5] - J. Bródka, M. Kwśniewski, K. Łypacewicz "Przestrzenne przekrycia strukturalne" część IV, Prace COBPKM "Mostostal" 1/1975
- [6] - O. Büttner, H. Stenker "Lekkie budownictwo metalowe"
Arkady, W-wa 1975
- [7] - W. Dzieniszewski, "Optimization of lattice rod structures"
Archiwum Mechaniki Stosowanej, 2/1971
- [8] - W. Dzieniszewski "Optymalizacja prętowych ustrojów siatkowych" Prace I PPT 35/1971
- [9] - R. Dzielowski "Computer - aided design and optimization of structures" Symposium on Industrialized Spatial and Shell Structures, Kielce 1973

- [10] - W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki "Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji" PWN, W-wa 1980
- [11] - H. Frąckiewicz "Mechanika ośrodków siatkowych" PWN, W-wa 1970
- [12] - J. Gierliński "Przybliżone obliczanie płaskich prętowych przekryć strukturalnych" Mechanika teoretyczna i stosowana, 1/1975
- [13] - Gomuliński, Witkowski "Pewien sposób obliczania struktur siatkowych" Archiwum Inż. Lądowej, 1/1972
- [14] - W. Gutkowski "Regularne konstrukcje prętowe" PWN, W-wa 1973
- [15] - W. Gutkowski "Płyty kratowe z elementów powtarzalnych" Rozprawy Inżynierskie, 1/1975
- [16] - J. Holniecki - Szulc "Optymalne zwieranie powierzchniowych ustrojów strukturalnych", Rozprawy Inżynierskie, 4/1974
- [17] - Z. Iwanow : The enumeration method according to the increasing value of the objective funktion in the optimization of bar structures" Bull. Acad. Polon. Sc., Ser. sc. techn., vol. XIX, No 7/8, 1981
- [18] - M. Jackiewicz "Wieloparametrowa optymalizacja wybranej klasy ustrojów prętowych-szczególny przypadek wykorzystania teorii sieci" Politechnika Wroclawska, Wroclaw 1978, praca doktorska
- [19] - M. Jackiewicz "Model cyfrowy wieloparametrowej optymalizacji kratownic" Archiwum Inżynierii Lądowej, 2/1980
- [20] - C. Jordon "Calculus of finite differences" Chelsea, New York 1950

- [21] - J. Karczewski, W. Paczkowski " Analiza optymalizacyjna kratownicy przestrzennej " Inżynieria i Budownictwo ", 3/1978
- [22] - J. Karczewski, W. Paczkowski " Optymalizacja stalowej kratownicy przestrzennej " XXV Konferencja Naukowa, Krynica 1979. tom III
- [23] - J. Karczewski, W. Paczkowski " Optymalizacja kratownicy przestrzennej metodą pełnego przeglądu wariantów ", Inżynieria i Budownictwo, 3/1980
- [24] - J. Karczewski, W. Paczkowski " Analiza efektywności wybranych metod optymalizacji w kształtowaniu kratownic przestrzennych " XXVI Konferencja Naukowa, Krynica 1980 tom II
- [25] - J. Karczewski, W. Paczkowski " Efektywna metoda optymalizacji stalowych kratownic przestrzennych " XXVII Konferencja Naukowa, Krynica 1981, tom III
- [26] - J. Kozniewska " Równania rekurencyjne ", PWN W-wa 1972
- [27] - J.L. Kuester, J.H. Mizes " Optimization Techniques with Fortran " Mc Graw-Hill Book Company, New York 1973
- [28] - Z. Leśniak " Metody optymalizacji konstrukcji przy zastosowaniu ~~maszyn~~ maszyn matematycznych " Arkady , W-wa 1970
- [29] - H. Levy. F. Lessman " Równania różnicowe skończone ", PWN W-wa 1966
- [30] - Z.S. Makowski " Räumliche Tragwerke aus Stahl " Verlag Stahleisen m.b.H. Düsseldorf 1963
- [31] - M. Mengerinhausen " Raumbauwerke aus Stäben und Knoten " Bauferlag GMBH, Wiesbaden und Berlin , 1975

- [32] - J.D. Renton " General Properties of Space Grids " International Journal of Mechanical Sciences, Pergamon Press, September 1970
- [33] - Symposium on Industrialized Spatial and Shell Structures, Kielce 1973
- [34] - J.W. Swirskij " Metody tipa Bubnowa-Galerkina i posliedowatielnych približenij " Izdatielstwo " Nauka ", Moskwa 1968
- [35] - Unistrut Space - Frame and Building Code Regulations , Brochure SF-BCR3, Unistrut Corporation 1972
- [36] - C. Woźniak " Siatkowe.dźwigary powierzchniowe " PWN 1970
- [37] - W.J. Zangwill " Programowanie nieliniowe " WNT , W-wa 1974
- [38] - Praca zbiorowa pod red. A. Brandta " Podstawy optymalizacji elementów konstrukcji budowlanych " PWN, W-wa 1978
- [39] - Praca zbiorowa " Obliczenia statyczne płaskich prętowych przekryćstrukturalnych "część IV, Prace COBPKM "Mostostal " 5/1975
- [40] - Praca zbiorowa " Obliczenia statyczne przekryć strukturalnych " Arkady , W-wa 1980
- [41] - Praca zbiorowa Podręcznik użytkownika systemu STRAINS 71 Wyd. Wydziału Inż. Łąd.-Inst. Dróg i Mostów PW ,W-wa 1976

D O D A T E K

Zestawienie sum szeregów wykorzystanych w pracy

$$\varepsilon = \frac{1}{4} [(-1)^{x_1} + 1] [(-1)^{x_2} + 1]$$

$$\psi = \frac{1}{4} [1 - (-1)^{x_1}] [1 - (-1)^{x_2}]$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \varepsilon \sin \frac{k\pi x}{2a} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k=2m \\ \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2a} & \text{dla } k=2m+1 \end{cases}$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \psi \sin \frac{k\pi x}{2a} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k=2m \\ \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{2a}} & \text{dla } k=2m+1 \end{cases}$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \varepsilon \sin^2 \frac{k\pi x}{2a} = \frac{a}{2}$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \psi \sin^2 \frac{k\pi x}{2a} = \frac{a}{2}$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \varepsilon \cos^2 \frac{k\pi x}{2a} = \frac{1}{2} (a+2)$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \psi \cos^2 \frac{k\pi x}{2a} = \frac{a}{2}$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \varepsilon \sin \frac{k\pi x}{2a} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k=2m \\ \cos \frac{k\pi b}{2a} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2a} + \sin \frac{k\pi b}{2a} & \text{dla } k=2m+1 \end{cases}$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \psi \sin \frac{k\pi x}{2a} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k=2m \\ \frac{\cos \frac{k\pi b}{2a}}{\sin \frac{k\pi}{2a}} & \text{dla } k=2m+1 \end{cases}$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \varepsilon \sin^2 \frac{k\pi x}{2a} = \frac{1}{2} (a-b+1) + \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \frac{k\pi}{a} \sin \frac{k\pi b}{a} - \cos \frac{k\pi b}{a})$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \psi \sin^2 \frac{k\pi x}{2a} = \frac{1}{2} (a-b+1) + \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \frac{k\pi}{a} \sin \frac{k\pi b}{a} - \cos \frac{k\pi b}{a})$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \varepsilon \cos^2 \frac{k\pi x}{2a} = \frac{1}{2} (a-b+1) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{k\pi}{a} \sin \frac{k\pi b}{a} - \cos \frac{k\pi b}{a} \right)$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \psi \cos^2 \frac{k\pi x}{2a} = \frac{1}{2} (a-b+1) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{k\pi}{a} \sin \frac{k\pi b}{a} - \cos \frac{k\pi b}{a} \right)$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \varepsilon \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi x}{2a} = 0$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \psi \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi x}{2a} = 0$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \varepsilon \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a} = 1$$

$$\sum_{x=0}^{2a} \psi \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a} = 0$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \varepsilon \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi x}{2a} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi b}{a} - \cos \frac{2\pi b}{a} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi b}{a} - \cos \frac{\pi b}{a} \right)$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \psi \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi x}{2a} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi b}{a} - \cos \frac{2\pi b}{a} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi b}{a} - \cos \frac{\pi b}{a} \right)$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \varepsilon \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a} = \frac{1}{2} \left(-\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi b}{a} + \cos \frac{2\pi b}{a} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi b}{a} - \cos \frac{\pi b}{a} \right)$$

$$\sum_{x=b}^{2a-b} \psi \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a} = \frac{1}{2} \left(-\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi b}{a} + \cos \frac{2\pi b}{a} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi b}{a} - \cos \frac{\pi b}{a} \right)$$

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP	
1.1. Cel pracy	1
1.2. Przegląd literatury	3
1.3. Podstawowe założenia i oznaczenia	8
1.4. Sformułowanie problemu	10
2. OPTYMALIZACJA PRZEKRYĆ STRUKTURALNYCH Z WYKORZYSTANIEM ANALITYCZNYCH ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ STATYKI	
2.1. Różnicowe równania równowagi statycznej typowego węzła struktury	14
2.2. Różnicowe równania równowagi dla węzłów leżących na granicy stref sztywności	18
2.3. Zastosowanie szeregów trygonometrycznych do rozwiązania zadania statycznego	21
2.4. Optymalizacja przekrycia jako zadanie programowania liniowego	28
2.5. Optymalizacja przekrycia jako zadanie programowania nieliniowego	36
2.6. Metoda rozwiązania zadania optymalizacji	41
3. OBLICZENIA NUMERYCZNE	
3.1. Algorytmy obliczeń	43
3.2. Opis programów	47
3.3. Przykłady obliczeń numerycznych	50
3.4. Analiza wyników	63
4. WNIOSKI	66
5. SPIS LITERATURY	70
DODATEK	