KILKA ZADAŃ
GEOMETRYI ANALITYCZNÉJ

WYŁOŻONYCH PODŁUG NAJNOWSZYCH METOD ANALIZY NOWOCZESNEJ

PRZEZ

A. SĄGAJŁĘ

Profesora Matematyki

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa dnia 7 kwietnia 1875 roku.

ZADANIE I. — ODLEGŁOŚĆ DWÓCH PUNKTÓW.

1. Mając dane spółrzędne (x, y) i (x', y') dwóch punktów M i M', znaleźć ich wzajemną odległość.

1^{sza} metoda. — Przypuśćmy dwa punkta odniesione do dwóch osi spółrzędnych jakichkolwiek Ox i Oy, których kątem jest θ; poprowadźmy spółrzędne tych punktów i złączmy MM'; otrzymamy tym sposobem dwa obwody wielokątów

$$OP'M' \text{ i } OPMM',$$

mających tęż samą wypadkowę OM'; O początek; M' koniec.

Jeżeli oznaczymy przez α i β kąty prostéj MM' z osiami Ox i Oy, i jeżeli rzucimy kolejno te dwa obwody na trzy osie Ox, Oy, MM', biorąc za kierunek dodatny rzutów na MM', kierunek w którym element MM' przypuszcza się być przebieżonym, otrzymamy:

$$\text{rzucając na } Ox: \quad x' + y' \cos\theta = x + y\cos\theta + l\cos\alpha,$$

$$\text{rzucając na } Oy: \quad x'\cos\theta + y' = x\cos\theta + y + l\cos\beta,$$

$$\text{rzucając na } MM': \quad x'\cos\alpha + y'\cos\beta = x\cos\alpha + y\cos\beta + l;$$

równości w których l przedstawia długość bezwzględną MM'.

Związki poprzedzające mogą się napisać :

$$(1)\quad \begin{cases} (x'-x)+(y'-y)\operatorname{dos}\theta = l\operatorname{dos}\alpha, \\ (x'-x)\operatorname{dos}\theta+(y'-y) = l\operatorname{dos}\beta, \\ (x'-x)\operatorname{dos}\alpha+(y'-y)\operatorname{dos}\beta = l. \end{cases}$$

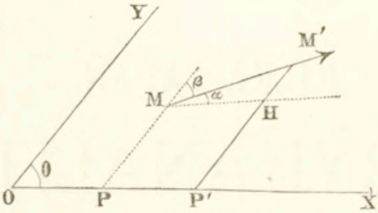

Fig. 1.

Między temi trzema równaniami wyrugujmy $\operatorname{dos}\alpha$ i $\operatorname{dos}\beta$; w tym celu pomnóżmy ostatnie przez l, i zastąpmy w niém $l\operatorname{dos}\alpha$, $l\operatorname{dos}\beta$ przez wartości, których dostarczyły dwa pierwsze, będzie

$$(1)\quad l^2=\overline{MM'}^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+2(x'-x)(y'-y)\operatorname{dos}\theta,$$

albo

$$(3)\quad l=MM'=\pm\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+2(x'-x)(y'-y)\operatorname{dos}\theta}.$$

W przypadku, w którym osie są prostopadłe, $\theta=\frac{\pi}{2}$; a zatém :

$$(4)\quad l^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2$$

albo

$$(5)\quad l=\overline{MM'}=\pm\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}.$$

2ga metoda. — Jeżeli zauważymy trójkąt MM'H, dostrzeżemy że :

$$\overline{MM'}^2=l^2=\overline{MH}^2+\overline{M'H}^2-2MH.M'H.\operatorname{dos}(\widehat{MHM'});$$

otóż

$$MH=x'-x,$$

$$M'H=y'-y,$$

$$\widehat{MHM'}=\pi-\theta;$$

więc

$$\overline{MM'}^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+2(x'-x)(y'-y)\operatorname{dos}\theta.$$

Pierwsza metoda jest prawdziwie korzystną z tego powodu, że prowadzi bezpośrednio do wzoru zupełnie ogólnego, ponieważ ona opiera się na teoryi ogólnéj rzutów; podczas gdy druga wymaga rozbioru różnych położeń względnych, jakie mogą przedstawiać punkta M i M' względem osi spółrzędnych.

2. Jeżeli jeden z punktów uważanych jest początkiem spółrzędnych, M' na przykład, potrzeba przypuścić $x'=0$, $y'=0$; wzory (2) i (4) przyjmą kształt szczególny :

(6) $$l^2=x^2+y^2+2xy \operatorname{dos}\theta \quad \text{(osie pochyłe)};$$

(7) $$l^2=x^2+y^2 \quad \text{(osie prostokątne)}.$$

Te wzory dają odległość punktu M czyli (x, y) od początku spółrzędnych.

3. Uwaga. — Wzory (3) i (5) dają wartość na l z podwójnym znakiem, co nie przedstawia niedogodności, jeżeli się tylko żąda bezwzględnéj wartości odległości. Lecz, w wielu przypadkach, odcinki leżące na jakiéjkolwiek prostéj powinny być uważane jako dodatne lub odjemne, stosownie czy się liczy w jednym kierunku lub w innym.

Otóż, związki (1) pozwolą napisać, bez dwuznaczności, odległość MM' co do wielkości i co do znaku; wypada ztąd w rzeczy saméj,

(8) $$\mathrm{MM'}=l=\frac{(x'-x)+(y'-y)\operatorname{dos}\theta}{\operatorname{dos}\alpha}=\frac{(x'-x)\operatorname{dos}\theta+(y'-y)}{\operatorname{dos}\beta};$$

dos α i dos β są dostawami kątów linii MM' z osiami dodatnemi Ox i Oy, i w tym przypadku wartość MM', przypuszczona dodatną, jest daną przez jedną lub drugą z równości (8). Dostawy kątów linii MM' z osiami będą oczywiście — dos α, — dos β; długość odcinka M'M, który podług naszéj umowy, jest odjemnym, ponieważ on jest przebieżonym w kierunku przeciwnym od poprzedzającego, będzie miała na wartość bezwzględną (— M'M albo — l); z drugiéj strony, ta wartość bezwzględna będzie dostarczoną przez wzory (8) w których zastąpi się dos α i dos β przez —dos α i — dos β; otrzyma się więc :

$$-l=\frac{(x'-x)+(y'-y)\operatorname{dos}\theta}{-\operatorname{dos}\alpha}=\frac{(x'-x)\operatorname{dos}\theta+(y'-y)}{-\operatorname{dos}\beta},$$

gdzie rozpoznaje się widocznie kształt (8).

Więc, przyjmując α i β za kąty kierunku dodatnego, jakiéjkolwiek prostéj z osiami spółrzędnych, długość odcinka MM' [*którego początkiem jest* M *czyli* (x, y) *a końcem* M' *czyli* (x', y')] *będzie daną co do wielkości i co do znaku przez wzory* :

(9) $$\mathrm{MM'}=l=\frac{(x'-x)+(y'-y)\operatorname{dos}\theta}{\operatorname{dos}\alpha}=\frac{(x'-x)\operatorname{dos}\theta+(y'-y)}{\operatorname{dos}\beta};$$

to jest że wartość na l, dostarczona przez te wzory, będzie dodatną lub odjemną, według tego jak odcinek MM' będzie skierowany w pewnym kierunku lub w innym na prostéj uważanéj.

W przypadku osi prostokątnych, to pytanie będzie rozwiązaném za pomocą wzorów :

(10) $$\mathrm{MM'}=l=\frac{x'-x}{\operatorname{dos}\alpha}=\frac{y'-y}{\operatorname{dos}\beta}.$$

Zadanie II. — Równanie prostéj pzzechodzącéj przez punkt stały.

Zadanie III. — Prosta równoległa do prostéj stałéj.

4. — 1° Przypuśćmy punkt stały wyznaczony przez jego spółrzędne x_1, y_1, i niech będzie :

(1°) $$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0,$$

równaniem ogólném prostéj. Punkt x_1, y_1 jest na prostéj, jego spółrzędne powinny sprawdzać równanie téj prostéj, być więc winno :

$$(2^\circ) \qquad \mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C} = 0.$$

Ta równość wyznaczy spółczynniki A, B, lub C; równanie szukane otrzyma się odejmując (1°) i (2°) stronami, co daje :

$$(1) \qquad \mathrm{A}(x - x_1) + \mathrm{B}(y - y_1) = 0,$$

jestto równanie ogólne prostych przechodzących przez punkt x_1, y_1; ono zamyka w sobie tylko jeden parametr zmienny, gdyż stałe A i B nie wchodzą do nich tylko przez ich stosunek. Można je napisać pod kształtem

$$(2) \qquad y - y_1 = a(x - x_1),$$

zakładając $a = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$; a jest spółczynnikiem kątowym nieoznaczonym.

2° Przypuśćmy punkt stały określony przecięciem się dwóch prostych takich jak :

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{M} = mx + m_1 y + m_2 = 0, \\ \mathrm{N} = nx + n_1 y + n_2 = 0; \end{cases}$$

równaniem ogólném prostych przechodzących przez przecięcie się dwóch prostych danych będzie :

$$(4) \qquad \mathrm{M} + \lambda \mathrm{N} = 0,$$

gdzie λ jest stałą nieoznaczoną.

W rzeczy saméj, równanie (4) będąc pierwszego stopnia względem x i y, przedstawia linię prostą; spółrzędne punktu przecięcia się prostych (3) znoszą M i N, a tém samém, sprawdzają równanie (4); więc prosta (4) przechodzi przez punkt przecięcia się dwóch prostych danych. Nakoniec równanie (4) jest równaniem ogólném prostych, zadosyć czyniących temu warunkowi; t. j., że ono przedstawia wszystkie proste przechodzące przez punkt dany. W rzeczy saméj, jakakolwiek z tych prostych będzie zupełnie wyznaczoną, gdy ją się zmusi do przejścia przez drugi punkt różny od punktu danego; otóż będzie można rozporządzić ilością λ w sposób, aby prosta (4) przeszła przez ten drugi punkt dowolnie wzięty; więc równanie (4) będzie mogło przedstawiać którąkolwiek bądź z prostych szukanych.

5. — Prosta równoległa do prostéj stałéj.

1° Kiedy dwie proste są równoległe, ich spółczynniki kątowe są równe.

Niech będzie, w rzeczy saméj, a spółczynnik kątowy pierwszéj prostéj, a α jéj kąt z osią Ox; a' spółczynnik kątowy drugiéj prostéj, a α' jéj kąt z Ox; θ wyznaczając kąt osi, ma się

$$a = \frac{\mathrm{wst}\,\alpha}{\mathrm{wst}\,(\theta - \alpha)}; \qquad a' = \frac{\mathrm{wst}\,\alpha'}{\mathrm{wst}\,(\theta - \alpha')}.$$

Gdy dwie proste są równoległe, będzie $\alpha = \alpha'$; a tém samém $a = a'$.

Odwrotnie, gdy spółczynniki kątowe są równe, proste są równoległe.

Ma się w rzeczy saméj według tego założenia,

$$\frac{\mathrm{wst}\,\alpha}{\mathrm{wst}\,(\theta-\alpha)}=\frac{\mathrm{wst}\,\alpha'}{\mathrm{wst}\,(\theta-\alpha')}\,;$$

albo

$$2\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{wst}\,(\theta-\alpha')=2\mathrm{wst}\,\alpha'\,\mathrm{wst}\,(\theta-\alpha)\,;$$

ztąd :

$$\mathrm{dos}\,(\theta-\alpha-\alpha')-\mathrm{dos}\,(\theta+\alpha-\alpha')=\mathrm{dos}\,(\theta-\alpha-\alpha')-\mathrm{dos}\,(\theta-\alpha+\alpha')\,;$$

i nakoniec

$$\mathrm{dos}\,(\theta+\alpha-\alpha')=\mathrm{dos}\,(\theta-\alpha+\alpha').$$

Dostawy są równe, summa lub różnica łuków jest równa liczbie całkowitéj okręgów; otóż summa nie może być równą ilości $2K\pi$, gdyż wynikłoby wtedy $\theta=K\pi$, co nie jest; mamy więc :

$$\alpha-\alpha'=K\pi\,;$$

warunek niezbędny aby proste były równoległe.

2° Wynika ztąd, że równanie prostéj, przechodzącéj przez punkt dany (x_1, y_1) i równoległéj do prostéj mającéj za spółczynnik kątowy a, jest :

$$y-y_1=a(x-x_1).$$

ZADANIE IV. — RÓWNANIE PROSTÉJ PRZECHODZĄCÉJ PRZEZ DWA PUNKTA.

6. Niech będą (x_1, y_1), (x_2, y_2) spółrzędne dwóch punktów danych, i

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

równanie prostéj. Ilości A, B, C są nieoznaczone; wyraźmy, że ta prosta przechodzi przez dwa punkta dane, otrzymamy warunki :

$$Ax_1+By_1+C=0, \tag{2}$$

$$Ax_2+By_2+C=0. \tag{3}$$

Z tych dwóch związków potrzeba wyciągnąć $\frac{A}{C}$ i $\frac{B}{C}$, potém tak otrzymane ich wartości wstawić w równaniu (1); albo, co na jedno wychodzi, wyrugować A, B, C, między trzema równaniami (1), (2), i (3), jednorodnemi i pierwszego stopnia względem stałych A, B, C; wypadkiem z rugowania jest :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{4}$$

lub, rozwijając ten wyznacznik,

$$x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0. \tag{4 bis}$$

Można jeszcze wyrugować w ten sposób : odejmijmy równanie (2) od rownania (1), następnie toż równanie od równania (3), będzie :

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0,$$

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0;$$

zkąd wynika dzieląc stronami, po przeniesieniu wyrazów co do B na drugą stronę,

(5) $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

lub jeszcze :

(5^{bis}) $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1);$$

równania (4), (4^{bis}), (5), (5^{bis}) są różnymi kształtami prostéj przechodzącéj przez dwa punkta dane.

Ostatni kształt pokazuje nam, że spółczynnikiem kątowym a prostéj przechodzącéj przez dwa punkta jest :

(6) $$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Spółczynnik kątowy może się otrzymać wprost sposobem następującym :

Niech będą dwa punkta M_1 i M_2, poprowadźmy ich spółrzędne i równoległą M_1H do osi odciętych ; trójkąt M_1HM_2 daje :

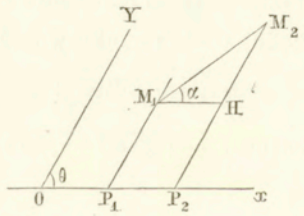

Fig. 2.

$$a=\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(\theta-\alpha)}=\frac{M_2H}{M_1H};$$

otóż :

$$M_2H=y_2-y_1; \quad M_1H=x_2-x_1;$$

więc

(6) $$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

7.—Równanie prostéj przechodzącéj przez punkt dany (x_1, y_1) i przez punkt przecięcia się dwóch prostych danych $M=0$, $N=0$.

Równaniem ogólném prostych przechodzących przez przecięcie się dwóch prostych danych jest : n° (4),

$$(mx+m_1y+m_2)+\lambda(nx+n_1y+n_2)=0;$$

wyznaczmy λ wyrażając, że prosta przechodzi przez punkt dany; równanie prostéj szukanéj będzie :

$$\frac{mx+m_1y+m_2}{mx_1+m_1y_1+m_2}=\frac{nx+n_1y+n_2}{nx_1+n_1y_1+n_2}. \tag{7}$$

8. — Warunek aby trzy punkta były w linii prostéj.

Niech będę (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), trzy punkta dane; równanie prostéj przechodzącéj przez dwa ostatnie, jest : n° (6)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

aby trzy punkta były w linii prostéj potrzeba, aby pierwszy był na prostéj łączącéj drugi z trzecim t. j., aby ich spółrzędne sprawdzały równanie poprzedzające; znajduje się tym sposobem *warunek szukany* :

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0; \tag{8}$$

ten związek rozwinięty przedstawi się pod kształtem następującym :

$$(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_0-x_0y_2)+(x_0y_1-x_1y_0)=0; \tag{8 bis}$$

dwa ostatnie nawiasy wyprowadzają się z pierwszego przez przemianę kołową.

Zadanie V. — Prosta w nieskończoności.

9.—Zastępując x i y przez $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ w równaniu :

$$Ax+By+C=0,$$

otrzymamy :

$$Ax+By+Cz=0; \tag{1}$$

jestto równanie jakiéjkolwiek prostéj w *spółrzędnych jednorodnych*; $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$ są stosunkami przedstawiającemi spółrzędne Kartezyańskie jakiegokolwiek punktu prostéj; x, y, z, są *spółrzędnemi jednorodnemi* tego punktu.

Spółrzędne początku prostéj (1) będą miały wartości następujące :

$$OM=\frac{x_1}{z_1}=-\frac{C}{A}, \quad ON=\frac{y_1}{z_1}=-\frac{C}{B};$$

otóż przypuśćmy, że stałe dowolne A i B zmniejszają się coraz bardziéj i dążą do zera, podczas gdy C nie staje się zerem, odległości OM i ON będą się coraz bardziéj zwiększać, i prosta MN oddali się nieograniczenie; kiedy A i B staną się zerami, powiemy że *prosta przeniosła się do nieskończoności* na płaszczyznie.

Z drugiéj strony; równanie (1) sprowadza się, gdy A i B są zerami, do

(2) $$z = 0$$

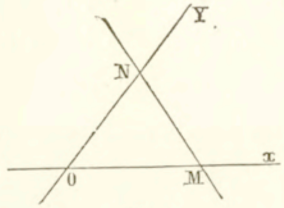

Fig. 3.

możemy więc uważać to równanie jako wyrażające, że prosta (1) oddaliła się do nieskończoności.

Zadanie VI. — przecięcie się prostych.

10. Niech będą dane równania dwóch prostych:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0; \end{cases}$$

spółrzędne ich punktu przecięcia muszą sprawdzać jednocześnie równania tych dwóch prostych; otrzymamy więc, rozwiązując układ (1); wartości następujące

(2) $$\begin{cases} x = \dfrac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}, \\[2ex] y = \dfrac{CA_1 - C_1A}{AB_1 - A_1B}. \end{cases}$$

Kiedy mianownik $(AB_1 - A_1B)$ jest różnym od zera, wzory (2) dają na x i y wartości skończone i wyznaczone; dwie proste przecinają się wtenczas oczywiście.

Jeżeli $AB_1 - A_1B = 0$, i gdy $AC_1 - A_1C \gtrless 0$; wartości na x i y są nieskończone; dwie proste są wtedy równoległe.

Związek przypuszczony można napisać:

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1},$$

wyraża on tym sposobem równość spółczynników kątowych dwóch linii prostych.

Jeżeli $AB_1 - A_1B = 0$, i gdy jednocześnie $AC_1 - A_1C = 0$, wartości na x i y są nieoznaczone; dwie proste zlewają się, t. j. przystają do siebie w całéj rozciągłości.

Aby dwie proste były równoległe, potrzeba i wystarczającym jest, aby spółczynniki zmiennych były proporcyonalne.

To podanie dowodzi się za pomocą wzorów (2), jak to już wykonaliśmy w roztrząsaniu poprzedzającém.

Można także je uzasadnić w sposób następujący:

Równanie ogólne prostych przechodzących przez punkt spotkania się dwóch prostych (1) jest:

$$Ax + By + C + \lambda\,(A_1x + B_1y + C_1) = 0,$$

albo, robiąc go jednorodném i porządkując :

(3) $$(A+\lambda A_1)x+(B+\lambda B_1)y+(C+\lambda C_1)z=0.$$

Otóż, jeżeli dwie proste (1) są równoległe, ich punkt przecięcia znajduje się w nieskończoności; równanie (3) musi więc módz przedstawiać prostę w nieskończoności, co wymaga żeby było: $A+\lambda A_1=0$; $B+\lambda B_1=0$; czyli :

(4) $$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=-\lambda\,;$$

ten warunek konieczny, jest oczywiście dostatecznym; gdyż, jeżeli on jest spełnionym, można kazać przejść prostéj w nieskończoności przez ich punkt spotkania się; ten punkt znajduje się więc w nieskończoności.

11. — Warunek, ażeby trzy proste spotkały się w jedny

Przypuśćmy, że równaniami trzech prostych są :

(1) $$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$

Jeżeli x i y są spółrzędnemi punktu wspólnego dla tych trzech prostych, potrzeba aby wartości na x i y wyciągnięte z dwóch pierwszych równań na przykład, i podstawione w trzeciém, przywiodły je do tożsamości; t. j. aby wypadek z rugowania zmiennych x i y między trzema równaniami był zerem, czyli że być powinno :

(2) $$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0,$$

albo rozwijając

(2 bis) $$A(B_1C_2-B_2C_1)+A_1(B_2C-BC_2)+A_2(BC_1-B_1C)=0\,;$$

takim jest warunek szukany.

12. — Jeżeli $M=0$, $N=0$, $P=0$, są równaniami trzech prostych nie zbiegających się, równanie jakiéjkolwiek prostéj będzie można zawsze sprowadzić do kształtu :

$$mM+nN+pP=0,$$

gdzie m, n, p są ilościami stałemi.

Niech będą naprzykład :

(1) $$\begin{cases} M=ax+a_1y+a_2=0, \\ N=bx+b_1y+b_2=0, \\ P=cx+c_1y+c_2=0, \end{cases}$$

równania trzech prostych stałych : i niech będzie :

$$(2) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

równanie jakiéjkolkiek prostéj dowolnie wziętéj ; α, β, γ, są danemi. Będzie można zawsze napisać równanie téj ostatniéj prostéj pod kształtem :

$$m\mathrm{M} + n\mathrm{N} + p\mathrm{P} = 0,$$

t. j., zastępując M, N, P, przez funkcye linijne (1), które one przedstawiają :

$$(3) \qquad m(ax + a_1 y + a_2) + n(bx + b_1 y + b_2) + p(cx + c_1 y + c_2) = 0.$$

Dla udowodnienia tego, dosyć jest pokazać, że można zawsze znaleźć na m, n, p wartości skończone i wyznaczone tak, aby dwa równania (2) i (3) przedstawiały tęż samą prostę. Wyraźmy w rzeczy saméj, że proste (2) i (3) zbiegają się, otrzymamy:

$$(3) \qquad \frac{ma + nb + pc}{\alpha} = \frac{ma_1 + nb_1 + pc_1}{\beta} = \frac{ma_2 + nb_2 + pc_2}{\gamma};$$

oznaczywszy przsz λ wartość wspólną tych stosunków, znajduje się do wyznaczenia wartości nieznanych $\frac{m}{\lambda}$, $\frac{n}{\lambda}$, $\frac{p}{\lambda}$, trzy równania :

$$(4) \qquad \begin{cases} ma + nb + pc = \lambda\alpha, \\ ma_1 + nb_1 + pc_1 = \lambda\beta, \\ ma_2 + nb_2 + pc_2 = \lambda\gamma. \end{cases}$$

Wyciągając z tych równań m, n, p, w funkcyi λ i podstawiając ich wartości w równaniu (3), ilość nieoznaczona λ zniknęłaby jako czynnik wspólny. Otóż warunek konieczny i dostateczny, aby wartości na m, n, p były skończone i wyznaczone jest, żeby mianownik wspólny t. j. wyznacznik :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

był różnym od zera; warunek ten ma miejsce sam przez się, gdyż jeśliby to wyrażenie było zerem, trzy proste M, N, P, byłyby zbiegającemi się (11); co jest przeciwném przyjętemu założeniu. Więc . . .

KĄTY I ODLEGŁOŚCI.

Zadanie VII. — Kąt jakiéjkolwiek prostéj z osiami spółrzędnych.

13. — Mając dane równanie jakiéjkolwiek prostéj

$$(1) \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0,$$

spółczynnikiem kątowym a téj prostéj jest $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, i ma się, na mocy dowodzenia podanego w jednym z numerów poprzedzających :

(2) $$a = -\frac{A}{B} = \frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}(\theta - \alpha)},$$

gdzie α jest kątem prostéj z osią odciętych.

Z równości (2) mamy

$$a(\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\alpha - \text{wst}\,\alpha\,\text{dos}\,\theta) = \text{wst}\,\alpha\,;$$

zkąd

$$\text{sty}\,\alpha = \frac{a\,\text{wst}\,\theta}{1 + a\,\text{dos}\,\theta};$$

ten wzór, daje wartość kąta α prostéj z osią odciętych, w funkcyi spółczynnika kątowego a.

Kiedy osie są prostokątne, $\theta = 90°$, a wówczas :

(3 bis) $$\text{sty}\,\alpha = a.$$

Dowodzi się bezpośrednio, za pomocą wzoru (3), że jeżeli spółczynniki kątowe a i a' dwóch prostych są równe, dwie proste są równoległe.

Mamy w rzeczy saméj, oznaczając przez α i α' kąty tych prostych z osią Ox,

$$\text{sty}\,\alpha = \frac{a\,\text{wst}\,\theta}{1 + a\,\text{dos}\,\theta},$$

$$\text{sty}\,\alpha' = \frac{a'\,\text{wst}\,\theta}{1 + a'\,\text{dos}\,\theta};$$

otóż jeśli $a' = a$, wypada oczywiście $\text{sty}\,\alpha' = \text{sty}\,\alpha$; lub

$$\alpha' = \alpha + k\pi.$$

Wynika także ze związku (2) że równaniami dwójsiecznych kątów pomiędzy osiami są :

$$y - x = 0, \quad y + x = 0;$$

pierwsze równanie daje dwójsieczną kąta części dodatnych osi ; drugie daje dwójsieczną kąta spełniającego kąt dany θ zawarty między osiami ; t. j. dwójsieczną kąta $(\pi - \theta)$.

14.—Związek między kątami jakiéjkolwiek prostéj z osiami ; wyznaczenie tych kątów.

Poprowadźmy przez początek spółrzędnych równoległą do prostéj uważanéj ; niech będą α i β kąty téj prostéj z osiami OX i OY, te kąty są określone jak to było powiedzianém powyżéj ; niech będzie M jakikolwiek punkt prostéj, i $OM = \rho$; rzućmy obwód OPM spółrzędnych x, y, tego punktu na OX, OY, i OM, otrzymamy (θ jest kątem pomiędzy osiami)

(4) $$\begin{cases} x + y\,\text{dos}\,\theta = \rho\,\text{dos}\,\alpha \\ x\,\text{dos}\,\theta + y = \rho\,\text{dos}\,\beta \\ x\,\text{dos}\,\alpha + y\,\text{dos}\,\beta = \rho. \end{cases}$$

Rugując x, y, i ρ między temi trzema równaniami, znajdujemy *związek szukany między kątami* α i β, to jest :

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{dos}\,\theta & \text{dos}\,\alpha \\ \text{dos}\,\theta & 1 & \text{dos}\,\beta \\ \text{dos}\,\alpha & \text{dos}\,\beta & 1 \end{vmatrix} = 0; \tag{5}$$

ta równość przedstawia się pod kształtem następującym :

$$\text{dos}^2\,\alpha + \text{dos}^2\,\beta - 2\,\text{dos}\,\alpha\,\text{dos}\,\beta\,\text{dos}\,\theta = \text{wst}^2\,\theta. \tag{6}$$

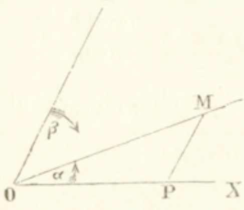

Fig. 4.

W wielu przypadkach będziemy mieli sposobność użycia tego związku.

Jeżeli dane równanie prostéj jest

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y = 0,$$

identyfikując to równanie z równaniem wynikającém z dwóch pierwszych równań (4), to jest :

$$\frac{x + y\,\text{dos}\,\theta}{\text{dos}\,\alpha} = \frac{x\,\text{dos}\,\theta + y}{\text{dos}\,\beta},$$

znajduje się :

$$\frac{\text{dos}\,\beta - \text{dos}\,\alpha\,\text{dos}\,\theta}{\mathrm{A}} = \frac{\text{dos}\,\beta\,\text{dos}\,\theta - \text{dos}\,\alpha}{\mathrm{B}} = k. \tag{7}$$

Z równości (7) wypada

$$\left\{ \begin{aligned} \text{dos}\,\alpha &= k\,\frac{\mathrm{A}\,\text{dos}\,\theta - \mathrm{B}}{\text{wst}^2\,\theta}, \\ \text{dos}\,\beta &= k\,\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}\,\text{dos}\,\theta}{\text{wst}^2\,\theta}. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Podstawiwszy te wartości w związku (6), wypada, po niektórych uproszczeniach,

$$k^2 = \frac{\text{wst}^4\,\theta}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\,\text{dos}\,\theta}. \tag{11}$$

Ostatecznie mamy więc

$$\left\{ \begin{aligned} \text{dos}\,\alpha &= \frac{\mathrm{A}\,\text{dos}\,\theta - \mathrm{B}}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\,\text{dos}\,\theta}}, \\ \text{dos}\,\beta &= \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}\,\text{dos}\,\theta}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\,\text{dos}\,\theta}}; \end{aligned} \right. \quad \text{zkąd} \quad \frac{\text{dos}\,\alpha}{\text{dos}\,\beta} = \frac{\mathrm{A}\,\text{dos}\,\theta - \mathrm{B}}{\mathrm{A} - \mathrm{B}\,\text{dos}\,\theta}. \tag{12}$$

Znaki górne i dolne powinny być brane razem; i jakiémkolwiek jest założenie wybrane, kierunek prostéj znajduje się bez dwuznaczności, jeśli się ma wzgląd na dwa równania (12) jednocześnie.

ZADANIE VIII. — KĄT DWÓCH PROSTYCH.

15. — Niech będą równaniami dwóch prostych

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} Ax+By+C=0 \\ A_1x+B_1y+C_1=0, \end{array}\right.$$

równania, te można jeszcze napisać

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} y=ax+b \\ y=a_1x+b_1 \end{array}\right., \quad \text{założywszy} \quad \left\{\begin{array}{ll} a=-\frac{A}{B}, & b=-\frac{C}{B}, \\ a_1=-\frac{A_1}{B_1}, & b_1=-\frac{C_1}{B_1}. \end{array}\right.$$

Jeżeli α i α_1 są kątami, części dwóch prostych, znajdujących się po nad osią odciętych, z kierunkiem osi dodatnéj, mamy

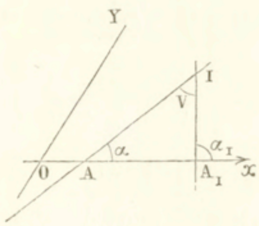

Fig. 5.

$$(3)\qquad V=\alpha_1-\alpha,$$

V jest kątem $\widehat{AIA_1}$.

Ztąd wypada

$$\text{sty } V=\frac{\text{sty }\alpha_1-\text{sty }\alpha}{1+\text{sty }\alpha\,\text{sty }\alpha_1}.$$

Otóż według n° (13)

$$\text{sty}\,\alpha=\frac{a\,\text{wst }\theta}{1+a\,\text{dos }\theta}, \quad \text{sty }\alpha_1=\frac{a_1\,\text{wst }\theta}{1+a_1\,\text{dos }\theta};$$

podstawiając te wartości we wzorze poprzedzającym, znajdujemy

$$(4)\qquad \text{sty } V=\frac{(a_1-a)\,\text{wst }\theta}{1+(a+a_1)\,\text{dos }\theta+aa_1};$$

albo, zastępując a i a_1 przez ich wartości $-\frac{A}{B}$, $-\frac{A_1}{B}$

$$(4\ \text{bis})\qquad \text{sty } V=\frac{(AB_1-A_1B)\,\text{wst}\,\theta}{AA_1+BB_1-(AB_1+A\,B)\,\text{dos }\theta}.$$

W przypadku osi prostokątnych, gdzie $\theta = 90^\circ$, te wzory stają się

$$\text{sty}\, V = \frac{a_1 - a}{1 + aa_1},$$

(5) $$\text{sty}\, V = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1}.$$

Dwie proste tworzą zawsze dwa kąty spełniające; jeżeli za pomocą tego wzoru chcemy znaleźć wartość bez dwuznaczności jednego z tych kątów, należy naprzód napisać związek (3) określający kąt uważany, pamiętając powyżéj wzmiankowane znaczenie kątów α, które daje wzór (3) numeru (**13**).

Roztrząsanie wzorów (4) i (5).

Uważmy naprzód, że licznik i mianownik sty V nie mogą być zerami jednocześnie dla wartości rzeczywistych na a i a_1.

W rzeczy saméj, wst θ jest różną od zera, przeto gdybyśmy mieli jednocześnie

$$a_1 - a = 0,$$

$$1 + aa_1 + (a + a_1)\,\text{dos}\,\theta = 0;$$

wypadłoby

$$1 + a^2 + 2a\,\text{dos}\,\theta = 0, \quad \text{lub} \quad (a + \text{dos}\,\theta)^2 + \text{wst}^2\,\theta = 0;$$

równość która nie może nigdy być sprawdzoną, albowiem wst θ jest różną od zera.

1° Aby dwie proste były równoległe, potrzeba i dosyć jest, ażeby sty V była zerem, t. j., aby spółczynniki kątowe były sobie równe.

2° Aby dwie proste były prostopadłe, trzeba i dosyć jest, aby sty V była nieskończoną; co według uwagi zrobionéj będzie miało miejsce, jeżeli

(6) $$1 + aa_1 + (a + a_1)\,\text{dos}\,\theta = 0;$$

a w przypadku osi prostokątnych

(6 bis) $$1 + aa_1 = 0.$$

Związek (6) albo (6 bis) jest warunkiem (koniecznym i dostatecznym) aby dwie proste przecinały się pod kątem prostym.

16. — Można jeszcze rozwiązać to zadanie sposobem następującym:

Niech będą α_1 i β_1 kąty prostéj OM_1 z osiami, α_2 i β_2 kąty prostéj OM_2; poprowadźmy spółrzędne

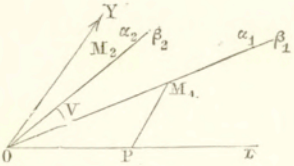

Fig. 6.

jakiegokolwiek punktu M_1 pierwszéj prostéj, i rzućmy obwód OPM_1 na Ox, Oy i OM_2, oznaczywszy przez V kąt $\widehat{M_1OM_2}$. Znajduje się tym sposobem, zakładając $OM_1 = l$:

$$x + y \operatorname{dos} \theta = l \operatorname{dos} \alpha_1,$$

$$x \operatorname{dos} \theta + y = l \operatorname{dos} \beta_1,$$

$$x \operatorname{dos} \alpha_2 + y \operatorname{dos} \beta_2 = l \operatorname{dos} V;$$

wyrugowawszy x, y, i l między temi trzema równaniami, znajduje się

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{dos} \theta & \operatorname{dos} \alpha_1 \\ \operatorname{dos} \theta & 1 & \operatorname{dos} \beta_1 \\ \operatorname{dos} \alpha_2 & \operatorname{dos} \beta_2 & \operatorname{dos} V \end{vmatrix} = 0,$$

albo

$$(1\ \text{bis}) \qquad \operatorname{wst}^2 \theta \operatorname{dos} V = \operatorname{dos} \alpha_1 \operatorname{dos} \alpha_2 + \operatorname{dos} \beta_1 \operatorname{dos} \beta_2 - (\operatorname{dos} \alpha_1 \operatorname{dos} \beta_2 + \operatorname{dos} \alpha_2 \operatorname{dos} \beta_1) \operatorname{dos} \theta;$$

a w przypadku osi prostokątnych

$$(2) \qquad \operatorname{dos} V = \operatorname{dos} \alpha_1 \operatorname{dos} \alpha_2 + \operatorname{dos} \beta_1 \operatorname{dos} \beta_2.$$

Jeżeli teraz równania dwóch prostych mają kształt

$$(3) \qquad \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0; \end{cases}$$

wyciągnie się naprzód, jedna po drugiéj, wartość $\operatorname{dos} \alpha_1$, $\operatorname{dos} \beta_1$, ; $\operatorname{dos} \alpha_2$, $\operatorname{dos} \beta_2$, za pomocą wzorów (12) numeru (**14**); a następnie podstawiając te wartości we wzorze (1 bis), otrzyma się

$$(4) \qquad \operatorname{dos} V = \frac{AA_1 + BB_1 - (A_1B + AB_1) \operatorname{dos} \theta}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \operatorname{dos} \theta}\ \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - 2A_1B_1 \operatorname{dos} \theta}}.$$

Ten wzór daje dwa kąty spełniające jakie tworzą dwie proste; ztądto pochodzi obecność znaku podwójnego.

Zadanie IX. — Równanie prostéj przechodzącéj przez punkt dany i prostopadłéj do linii prostéj danéj.

17. — Przypuśćmy naprzód punkt dany przez jego spółrzędne x_1 i y_1.

Równaniem ogólném prostych przechodzących przez ten punkt jest

$$y - y_1 = a' (x - x_1);$$

aby ta prosta była prostopadłą do prostéj danéj

$$(1) \qquad y = ax + b$$

potrzeba aby spółczynnik kątowy a' sprawdzał związek numeru (**15**)

$$1 + aa' + (a + a') \operatorname{dos} \theta = 0;$$

zkąd wypada

(2) $$a' = -\frac{1 + a \operatorname{dos}\theta}{a + \operatorname{dos}\theta}.$$

Równaniem prostopadłéj szukanéj jest więc

(3) $$y - y_1 = -\frac{1 + a \operatorname{dos}\theta}{a + \operatorname{dos}\theta}(x - x_1);$$

a w przypadku osi prostokątnych

(3 bis) $$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1).$$

18. — Przypuśćmy punkt dany przecięciem się dwóch prostych

(2) $$\begin{cases} \mathrm{M} = mx + m_1 y + m_2 = 0, \\ \mathrm{N} = nx + n_1 y + n_2 = 0; \end{cases}$$

i niech będzie równanie prostéj danéj

(2) $$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0.$$

Równaniem ogólném prostych przechodzących przez punkt (1), jest

(3) $$\mathrm{M} + \lambda \mathrm{N} = 0,$$

lub

$$(m + \lambda n)\,x + (m_1 + \lambda n_1)\,y + m_2 + \lambda n_2 = 0.$$

Wyraźmy że ta prosta jest prostopadłą do prostéj danéj (2); otrzymamy w przypadku osi prostokątnych

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \cdot \frac{m + \lambda n}{m_1 + \lambda n_1} = -1;$$

zkąd wypada

$$\lambda = -\frac{\mathrm{A}m + \mathrm{B}m_1}{\mathrm{A}n + \mathrm{B}n_1}.$$

Równanie prostopadłéj będzie zatém

(4) $$\frac{mx + m_1 y + m_2}{\mathrm{A}m + \mathrm{B}m_1} = \frac{nx + n_1 y + n_2}{\mathrm{A}n + \mathrm{B}n_1}.$$

ZADANIE X. — ODLEGŁOŚĆ PUNKTU DANEGO OD LINII PROSTÉJ DANÉJ.

19. — Przypuśćmy naprzód osie prostokątne.

1° Równanie prostéj ma kształt następujący

(1) $$x \operatorname{dos}\omega + y \operatorname{wst}\omega - p = 0,$$

niech będą x_0, y_0 spółrzędnemi punktu.

Przedstawiają się dwa przypadki :

1szy przypadek. — Punkt $M_0(x_0, y_0)$ i początek spółrzędnych są z obu stron prostéj. Poprowadźmy prostopadłę M_0I i spółrzędne punktu M_0, potém rzućmy obwód OP_0M_0IH na OH; otrzymamy

$$p = x_0 \operatorname{dos} \omega + y_0 \operatorname{wst} \omega + \delta_0 \operatorname{dos} (\widehat{M_0I, OH}),$$

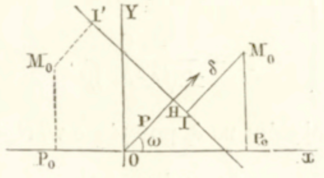

Fig. 7.

oznaczając przez δ_0 wartość bezwzględną odległości szukanéj. Kąt zawarty pomiędzy M_0I i OH jest równy 180°, więc

(2) $$\delta_0 = x_0 \operatorname{dos} \omega + y_0 \operatorname{wst} \omega - p.$$

2gi przypadek. — Punkt $M'_0(x'_0, y'_0)$ i początek O są z téjże saméj strony prostéj. Rzućmy jeszcze na OH obwód $OP'_0M'_0I'H$; otrzymamy

$$p = x'_0 \operatorname{dos} \omega + y'_0 \operatorname{wst} \omega + \delta'_0 \operatorname{dos}(\widehat{M'_0I', OH}),$$

oznaczywszy przez δ'_0 wartość bezwzględną odległości szukanéj. Kąt zawarty pomiędzy M'_0I' i OH jest tu równym 180°, albo racźej *zeru*, a zatém

(3) $$\delta'_0 = p - x'_0 \operatorname{dos} \omega - y'_0 \operatorname{wst} \omega.$$

Słowem, odległość punktu $M_0(x_0, y_0)$ od prostéj

(1) $$x \operatorname{dos} \omega + y \operatorname{wst} \omega - p = 0$$

jest daną, w wartości bezwzględnéj δ, przez wzór :

(4) $$\delta = \pm (x_0 \operatorname{dos} \omega + y_0 \operatorname{wst} \omega - p);$$

+ jeżeli początek i punkt M_0 są z obu stron prostéj; — jeżeli początek i punkt M_0 są z téjże saméj strony prostéj.

2° Równanie prostéj w ogólnym kształcie

(5) $$Ax + By + C = 0.$$

Może być sprowadzoném do kształtu

(6) $$x \operatorname{dos} \omega + y \operatorname{wst} \omega - p = 0,$$

założywszy warunki

(7) $$\frac{\operatorname{dos} \omega}{A} = \frac{\operatorname{wst} \omega}{B} = \frac{-P}{C}; \quad \operatorname{wst}^2 \omega + \operatorname{dos}^2 \omega = 1.$$

Otóż odległość punktu (x_0, y_0) od prostéj (6) jest

$$\delta = x_0 \operatorname{dos} \omega + y_0 \operatorname{wst} \omega - p.$$

Związek (7) daje nam wartości ilości nieznanych dos ω, i p, mamy bowiem

$$\begin{cases} \operatorname{dos} \omega = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \\ \operatorname{wst} \omega = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \\ p = \dfrac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \end{cases}$$

Podstawiając w wyrażeniu poprzedzającém na δ_0 powyższe wartości, będzie

(8) $$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Tak więc : *odległość punktu od prostéj jest równa pierwszéj stronie równania prostéj, w którém się zastąpiło x i y przez spółrzędne punktu danego, podzielonéj przez pierwiastek z summy kwadratów spółczynników ilości zmiennych.*

20. — Przypuśćmy teraz osie pochyłe.

1sza metoda. — Możemy przypuścić równanie prostéj danéj sprowadzone do kształtu

(1) $$x \operatorname{dos} \omega + y \operatorname{dos}(\theta - \omega) - p = 0.$$

Rzucając obwód OP_0M_0IH na prostę OH i rozumując jak w przypadku poprzedzającym, widzimy

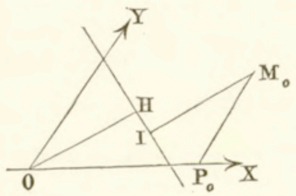

Fig. 8.

że odległość, w wartości bezwzględnéj, puntu $M_0(x_0, y_0)$ od prostéj (1) jest daną za pomocą wzoru

(2) $$\delta = \pm [x_0 \operatorname{dos} \omega + y_0 \operatorname{dos}(\theta - \omega) - p];$$

bierze się znak +, jeżeli punkt M_0 i początek są z obu stron prostéj ; bierze się znak —, jeżeli punkt M_0 i początek są z téjże saméj strony prostéj.

Jeżeli teraz równanie prostéj danéj jest

(3) $$Ax + By + C = 0,$$

sprowadzi się je do kształtu (1) zakładając

(4) $$\frac{\operatorname{dos}\omega}{A} = \frac{\operatorname{dos}(\theta - \omega)}{B} = -\frac{p}{C};$$

odległością szukaną będzie wtedy, nie zważając na znak,

$$\delta = x_0 \operatorname{dos} \omega + y \operatorname{dos}(\theta - \omega) - p.$$

Dla wyznaczenia ilości nieznanych dos ω, dos$(\theta - \omega)$, p, uważmy że ω i $(\theta - \omega)$ są kątami prostéj

OH z osiami spółrzędnych, i że między temi kątami zachodzi związek (6) numeru (**14**),

(0) $$\operatorname{dos}^2\omega + \operatorname{dos}^2(\theta-\omega) - 2\operatorname{dos}\omega\operatorname{dos}(\theta-\omega)\operatorname{dos}\theta = \operatorname{wst}^2\theta.$$

Oznaczywszy przez k wartość wspólną stosunków (4), wyciąga się ze związku (5)

(5) $$k = \frac{\operatorname{wst}\theta}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\operatorname{dos}\theta}}.$$

Ztąd wyciągniemy łatwo $\operatorname{dos}\omega$, $\operatorname{dos}(\theta-\omega)$; a podstawiając tak otrzymane wartości w wyrażeniu na δ, znajdziemy

(7) $$\delta = \frac{(Ax_0+By_0+C)\operatorname{wst}\theta}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\operatorname{dos}\theta}};$$

jestto wyrażenie odległości punktu (x_0, y_0) od prostéj

$$Ax+By+C=0.$$

2ga metoda. — Możemy przypuścić równanie prostéj danéj

(8) $$Ax+By+C=0$$

sprowadzone do kształtu

(9) $$y = ax+b,$$

założywszy

(10) $$a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

Równanie prostéj, poprowadzonéj przez punkt dany $M_0(x_0, y_0)$ prostopadle do prostéj (9) będzie numer (**17**)

(11) $$y-y_0 = -\frac{1+a\operatorname{dos}\theta}{a+\operatorname{dos}\theta}(x-x_0).$$

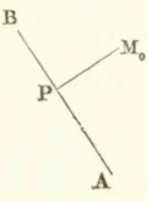

Fig. 9.

Niech będą x i y spółrzędnemi spodka P téj prostopadłéj, znajdziemy

$$\overline{MP}^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + 2(x-x_0)(y-y_0)\operatorname{dos}\theta;$$

otóż, otrzyma się spółrzędne x i y punktu przecięcia się dwóch prostych AB i M_0P, rozwiązując dwa równania (9) i (11); lecz, gdy wyrażenie $\overline{M_0P}$, zawiera w sobie tylko różnice $(x-x_0)$ i $(y-y_0)$ podobnie jak równanie (11), lepiéj więc będzie przekształcić także równanie (9) tak, aby ono zawierało w sobie tylko téż same różnice; otrzymamy to, pisząc je w sposób następujący

(12) $$y-y_0 = a(x-x_0) + (ax_0+b-y_0).$$

Rozwiązanie równań (11) i (12) względem $(x - x_0)$ i $(y - y_0)$ daje nam

$$x - x_0 = \frac{(y_0 - ax_0 - b)(a + \operatorname{dos}\theta)}{1 + a^2 + 2a \operatorname{dos}\theta},$$

$$y - y_0 = - \frac{(y_0 - ax_0 - b)(1 + a \operatorname{dos}\theta)}{1 + a^2 + 2a \operatorname{dos}\theta}.$$

Podstawiwszy te wartości w wyrażeniu na M_0P, otrzymamy

$$\delta^2 = \overline{M_0P}^2 = \frac{(y_0 - ax_0 - b)^2}{(1 + a^2 + 2a \operatorname{dos}\theta)^2} \left[(a + \operatorname{dos}\theta)^2 + (1 + a \operatorname{dos}\theta)^2 - 2(a + \operatorname{dos}\theta)(1 + a \operatorname{dos}\theta) \operatorname{dos}\theta\right];$$

po wykonaniu wszystkich uproszczeń, wypadnie wyciągając pierwiastek kwadratowy:

(13) $$\delta = \frac{(y_0 - ax_0 - b) \operatorname{wst}\theta}{\pm\sqrt{1 + 2a \operatorname{dos}\theta + a^2}};$$

albo, zastępując a i b przez ich wartości (10):

(14) $$\delta = \frac{(Ax_0 + By_0 + C) \operatorname{wst}\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \operatorname{dos}\theta}}.$$

21. Streszczenie i roztrząsanie.

1° Kiedy równanie prostéj ma kształt

(1) $$x \operatorname{dos}\omega + y \operatorname{dos}(\theta - \omega) - p = 0,$$

odległość, w wartości bezwzględnéj, punktu $M_0(x_0, y_0)$ od téj prostéj będzie daną za pomocą wzoru

(2) $$\delta = \pm(x_0 \operatorname{dos}\omega - y_0 \operatorname{dos}(\theta - \omega) - p).$$

W równaniu (2) należy brać znak $+$, gdy punkt M_0 i początek leżą z obu stron prostéj; należy zaś brać znak $-$, kiedy punkt i początek spółrzędnych leżą z téjże saméj strony prostéj.

W przypadku osi prostokątnych, równaniem prostéj będzie

(1 bis) $$x \operatorname{dos}\omega + y \operatorname{wst}\omega - p = 0,$$

a otrzyma się na wyrażenie odległości

(2 bis) $$\delta = \pm(x_0 \operatorname{dos}\omega + y_0 \operatorname{wst}\omega - p).$$

2° Jeżeli równanie prostéj ma kształt

(3) $$Ax + By + C = 0,$$

odległość punktu $M_0(x_0, y_0)$ od téj prostéj będzie daną za pomocą wzoru

(4) $$\delta = \frac{(Ax_0 + By_0 + C) \operatorname{wst}\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \operatorname{dos}\theta}} \quad \text{(osie pochyłe)}$$

(4 bis) $$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{(osie prostokątne).}$$

ZADANIE XI. — BIEGUNOWA PUNKTU WZGLĘDEM JAKIEGOKOLWIEK UKŁADU DWÓCH PROSTYCH.

I. — Określenie i równanie biegunowéj punktu.

22.— Mając dane dwie proste stałe SA i SB; przez punkt stały P prowadzi się jakąkolwiek sieczną, spotykającą w a i b dwie proste stałe; ne téj siecznéj bierze się punkt M taki że

$$\frac{2}{PM}=\frac{1}{Pa}+\frac{1}{Pb}; \tag{1}$$

kiedy sieczna obraca się około punktu P, punkt M opisuje prostą, która jest nazwaną *biegunową punktu* P, a punkt P nosi nazwisko *bieguna*.

W związku (1) odcinki są liczone od punktu P; co do znaków i co do znakowania będziemy postępowali podług prawa przyjętego w jednym z numerów poprzedzających.

To określenie jest przypadkiem szczególnym określenia więcéj ogólnego, które zobaczymy w nauce własności ogólnych krzywych.

Zauważmy zaraz, że związek (1) może przybierać następujące kształty :

$$\frac{1}{PM}-\frac{1}{Pa}=\frac{1}{Pb}-\frac{1}{Pa}, \quad \text{albo} \quad \frac{Pa-PM}{Pa}=\frac{PM-Pb}{Pb};$$

otóż

$$\left\{\begin{array}{ll} PM+Ma+aP=0, & \text{zkąd} \quad PM-Pa=-Ma; \\ PM+Mb+bP=0, & \text{zkąd} \quad PM-Pb=-Mb; \end{array}\right. \tag{1}$$

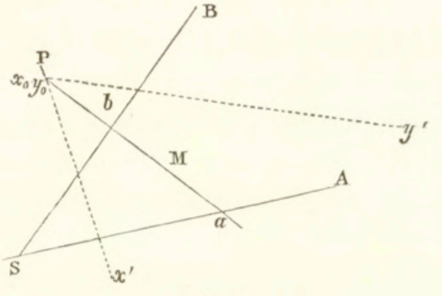

Fig. 10.

mamy więc, co do wielkości i co do znaku, drugi kształt

$$\frac{Ma}{Pa}+\frac{Mb}{Pb}=0, \quad \text{lub} \quad \frac{Ma}{aP}+\frac{Mb}{bP}=0. \tag{2}$$

Związki (1) lub (2) określają zarówno miejsce punktu M albo biegunowę punktu P.

23. — Dla znalezienia równania biegunowéj, weźmiemy naprzód związek (1) jako punkt wyjścia :

Niech będą (x_0 i y_0) spółrzędne punktu P zaś

$$\left\{\begin{array}{l} A=ax+a_1y+a_2=0 \\ B=bx+b_1y+b_2=0 \end{array}\right. \tag{3}$$

równania dwóch prostych SA i SB.

Spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu (x, y) prostéj PM będą

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda p \\ y &= y_0 + \mu p \end{aligned}$$

w tych wzorach p przedstawia odległość PM, a stałe λ i μ zależą od kątów α i β jakie tworzy prosta PM z osiami Ox i Oy.

To przypuściwszy, oznaczmy przez p, p_1, p_2 długości odcinków PM, Pa, Pb; związek (1) stanie się

$$(5)\qquad \frac{2}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}.$$

Otóż odległości p_1 i p_2 otrzymają się zastępując w równaniach (3) x i y przez ich wartości podane w równaniach (4); będzie więc, oznaczając przez A_0 i B_0, czém się stają A i B kiedy się w nich zastąpi x i y przez spółrzędne x_0 i y_0 punktu P:

$$(6)\qquad p_1 = -\frac{A_0}{\lambda a + \mu a_1}, \quad p_2 = -\frac{B_0}{\lambda b + \mu b_1};$$

związek poprzedzający staje się wtedy

$$(7)\qquad \frac{2}{p} + \frac{\lambda a + \mu a_1}{A_0} + \frac{\lambda b + \mu b_1}{B_0} = 0.$$

Dla wartości dowolnéj nadanéj λ lub μ, równania (4) i (7) wyznaczą punkt odpowiedni M; innemi słowy, spółrzędne jakiegokolwiekbądź punktu sprawdzą równania (4) i (7) i wszelkie ich połączenie a szczególniéj połączenie otrzymane rugując λ i μ, co prowadzi do następującego równania:

$$(8)\qquad 2 + \frac{(x - x_0)\,a + (y - y_0)\,a_1}{A_0} + \frac{(x - x_0)\,b + (y - y_0)\,b_1}{B_0} = 0.$$

To równanie, dając związek między stałemi i spółrzędnemi x i y jakiegokolwiek punktu miejsca, będzie równaniem miejsca punktu M; widzimy więc, że tém miejscem jest linia prosta.

Rozwijając równanie (8) biegunowéj będzie

$$\frac{ax + a_1 y + a_2 - ax_0 - a_1 y_0 + a_2}{A_0} + \frac{bx + b_1 y + b_2 - bx_0 - b_1 y_0 - b_2}{B_0} - 2 = 0;$$

to równanie sprowadza się, mając wzgląd na znaczenie ilości A_0 i B_0, do

$$(10)\qquad \frac{ax + a_1 y + a_2}{ax_0 + a_1 y_0 + a_2} + \frac{bx + b_1 y + b_2}{bx_0 + b_1 y_0 + b_2} = 0;$$

pisząc go pod kształtem skróconym będzie

$$(10^{\text{bis}})\qquad \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0.$$

24. — Można także znaleźć równanie biegunowéj biorąc za punkt wyjścia związek (2), to jest

$$(2)\qquad \frac{Ma}{aP} + \frac{Mb}{bP} = 0.$$

Niech będą, jak poprzednio,

$$A = ax + a_1y + a_2 = 0$$

$$B = bx + b_1y + b_2 = 0,$$

równania dwóch prostych; oznaczmy nadto przez x_0, y_0 spółrzędne punktu P; x, y spółrzędne punktu M.

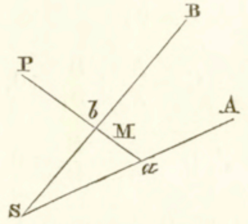

Fig. 11.

Według wzoru jednego z numerów poprzedzających, stosunki, w których SA i SB dzielą względnie odcinek PM, będą

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{Ma}{aP} &= -\frac{ax + a_1y + a_2}{ax_0 + a_1y_0 + a_2}, \\ \frac{Mb}{bP} &= -\frac{bx + b_1y + b_2}{bx_0 + b_1y_0 + b_2}; \end{aligned} \right.$$

podstawiając te wartości w związku (2), otrzymuje się bezpośrednio równanie (10) to jest, związek między spółrzędnemi punktu M, albo równanie biegunowéj.

25. — Równaniem biegunowéj punktu P (x_0, y_0) względem dwóch prostych A i B jest więc

$$(1) \quad C = \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0;$$

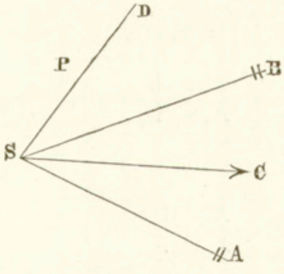

Fig. 12.

widzimy, że biegunowa przechodzi przez punkt spotkania się dwóch prostych.

Równanie jakiéjkolwiek prostéj przechodzącéj przez punkt S, jest

$$A + \lambda B = 0;$$

wyrażając że ona przechodzi przez punkt P, mamy

$$A_0 + \lambda B_0 = 0, \quad \text{albo} \quad \lambda = -\frac{A_0}{B_0};$$

równaniem prostéj SP jest więc

(2) $$D = \frac{A}{A_0} - \frac{B}{B_0} = 0.$$

Cztery proste

$$A = 0,$$

$$B = 0;$$

$$C = \frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0,$$

$$D = \frac{A}{A_0} - \frac{B}{B_0} = 0$$

tworzą co się zowie *pękiem harmonicznym;* proste *połączone* A i B są nazwane *sprzężonemi* względem pary dwóch prostych C i D; a proste *połączone* C i D są także *sprzężonemi* względem pary A i B.

Te nazwania, które znajdziemy później w teoryi więcéj ogólnéj, są usprawiedliwione przez własności następujące:

Prosta C *jest, względem pary* A *i* B, *biegunową jakiegokolwiek punktu prostéj* D; *a prosta* D *jest biegunową jakiegokolwiek punktu linii* C.

Prosta B *jest, względem pary* C *i* D, *biegunową jakiegokolwiek punktu linii* A; *a prosta* A *jest biegunową jakiegokolwiek punktu linii prostéj* B.

Dowiedźmy odwrotne twierdzenia tych własności:

1° Niech będzie P′ (x'_0, y'_0) jakikolwiek punkt prostéj SP albo D, biegunową tego punktu będzie

$$\frac{A}{A'_0} + \frac{B}{B'_0} = 0;$$

otóż jeżeli punkt P′ znajduje się na prostéj D, mamy

$$\frac{A'_0}{A_0} - \frac{B'_0}{B_0} = 0;$$

a zatém równanie poprzedzające staje się wtedy

$$\frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0;$$

równanie to przedstawia dokładnie prostę C.

2° Niech będzie Q (x_1, y_1) punkt prostéj C; biegunową tego punktu będzie

$$\frac{A}{A_1} + \frac{B}{B_1} = 0;$$

otóż jeżeli punkt Q (x_1, y_1) znajduje się na prostéj C, mamy

$$\frac{A_1}{A_0} + \frac{B_1}{B_0} = 0;$$

a zatém równanie poprzedzające staje się wtedy

$$\frac{A}{A_0} - \frac{B}{B_0} = 0;$$

równanie to przedstawia dokładnie D.

3° Niech będzie (x_2, y_2) punkt prostéj A; biegunową tego punktu będzie, względem układu (C i D),

$$\frac{C}{C_2} + \frac{D}{D_2} = 0;$$

otóż mamy

$$\left\{\begin{array}{l} C_2 = \dfrac{A_2}{A_0} + \dfrac{B_2}{B_0}, \\[2ex] D_2 = \dfrac{A_2}{A_0} - \dfrac{B_2}{B_0} \end{array}\right.$$

a ponieważ A_2 jest zerem, równanie poprzedzające sprowadza się do

$$C - D = 0, \quad \text{albo} \quad B = 0.$$

Gdy punkt (x_2, y_2) jest na prostéj B, ilość B_2 jest zerem, i równanie biegunowéj staje się

$$C + D = 0, \quad \text{lub} \quad A = 0.$$

Uważmy że równania *pęku harmonicznego*

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} A = 0, \\ B = 0; \end{array}\right. \\[3ex] \left\{\begin{array}{l} \dfrac{A}{A_0} + \dfrac{B}{B_0} = 0, \\[2ex] \dfrac{A}{A_0} - \dfrac{B}{B_0} = 0: \end{array}\right. \end{array}\right.$$

mogą jeszcze się napisać

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & A = 0, \\ (2) & B = 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (3) & A + kB = 0, \\ (4) & A - kB = 0; \end{array}\right.$$

proste *połączone* (1) i (2) są *sprzężonemi* względem układu (3), i (4); i odwrotnie, proste *połączone* (3) i (4) są *sprzężonemi* względem układu (1), (2).

II° — **Wykreślenie biegunowéj.**

26.— Biegunową punktu jest linia prosta, dosyć do jéj wykreślenia, wyznaczyć znajdujące się na niéj dwa jakiekolwiek punkta; a nawet jeden tylko, kiedy punkt spotkania się dwóch prostych układu jest wykreślony. Związki (1) i (2), określające biegunowę, dozwolą wykreślenia ustawionych na niéj tylu punktów ile się nam podoba; lecz własność następująca daje prostsze wykreślenie. Ta własność jest wreszcie ważną z punktu widzenia teoretycznego.

Mając dane dwie proste SA i SB *i punkt stały P; jeżeli, przez punkt* P, *poprowadzi się jakiekolwiek sieczne, i gdy się złączy pod przekątną punkta przecięcia się tych siecznych z dwiema prostemi; punkta spotkania się tych przekątnych są na biegunowéj punktu* P *względem dwóch prostych danych.*

To podanie może się dowieść analitycznie wielu sposobami; wskażemy tylko następujący.

Weźmy dwie proste stałe za osie spółrzędnych; i niech będą (x_0, y_0) spółrzędne punktu P; niech będą nadto

$$y - y_0 = \lambda (x - x_0)$$
$$y - y_0 = \lambda_1 (x - x_0)$$

równania dwóch siecznych Pa i Pa_1.

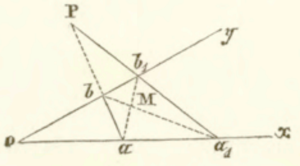

Fig. 13.

Robiąc kolejno w dwóch równaniach ostatnich, naprzód $y = 0$, otrzymamy

$$\left\{\begin{array}{l} 0a = x_0 - \dfrac{y_0}{\lambda} = \dfrac{\lambda x - y_0}{\lambda}, \\ \\ 0a_1 = x_0 - \dfrac{y_0}{\lambda_1} = \dfrac{\lambda_1 x_0 - y_0}{\lambda_1}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0b = y_0 - \lambda x_0, \\ 0b_1 = y_0 - \lambda_1 x_0. \end{array}\right.$$

Równaniami dwóch przekątnych ab_1 i $a_1 b$ będą

$$\frac{x}{0a} + \frac{y}{0b_1} = 1, \quad \frac{x}{0a_1} + \frac{y}{0b} = 1,$$

albo

(1) $$\frac{\lambda x}{\lambda x_0 - y_0} - \frac{y}{\lambda_1 x_0 - y_0} = 1,$$

(2) $$\frac{\lambda_1 x}{\lambda_1 x_0 - y_0} - \frac{y}{\lambda x_0 - y_0} = 1.$$

Spółrzędne punktu M przecięcia się tych przekątnych, sprawdzają te dwa równania jednocześnie, one sprawdzają więc wypadek otrzymany odejmując je stronami, to jest:

$$x\left[\frac{\lambda}{\lambda x_0 - y_0} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 x_0 - y_0}\right] - y\left[\frac{1}{\lambda_1 x_0 - y_0} - \frac{1}{\lambda x_0 - y_0}\right] = 0;$$

albo, sprowadzając do jednakowego mianownika

(3) $$\frac{(\lambda_1 - \lambda)\,[xy_0 + x_0 y]}{(\lambda x_0 - y_0)\,[\lambda_1 x_0 - y_0]} = 0.$$

Otóż λ_1 jest różném od λ, inaczéj dwie sieczne Pa i Pa_1 przystałyby do siebie, i otrzymałoby się nieoznaczoność; dwa równania (1) i (2) przedstawiałyby wtedy jednę i tę samą prostę; równanie sprowadza się więc do :

$$xy_0 + x_0 y = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 0. \tag{4}$$

To równanie, sprawdzone przez spółrzędne punktu M i niezależne od dowolnych λ i λ_1, przedstawia więc miejsce punktu M.

Widzimy że tém miejscem jest linia prosta; i według równania ogólnego (1) numeru [**25**], widoczném jest, że tą prostą jest biegunowa punktu P; gdyż, w przypadku obecnym

$$A = x, \quad B = y,$$

i równanie

$$\frac{A}{A_0} + \frac{B}{B_0} = 0.$$

staje się wtedy

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 0.$$

III° — Własności czworoboku zupełnego.

27.—Nazywa się *czworobokiem zupełnym* figura utworzona przez układ czterech prostych nieograniczonych; sześć punktów przecięcia tych czterech prostych tworzą *sześć wierzchołków* czworoboku; proste łączące dwa wierzchołki nie leżące na tymże samym boku są przekątnemi. Jest *trzy przekątne*.

Mamy wyprowadzić z tego co poprzedza kilka ważnych własności czworoboku zupełnego.

Niech będą A, B, C, D, E, F *sześć wierzchołków* czworoboku; AB, CD, EF, *trzy przekątne*; M, N, P przecięcia się tych przekątnych.

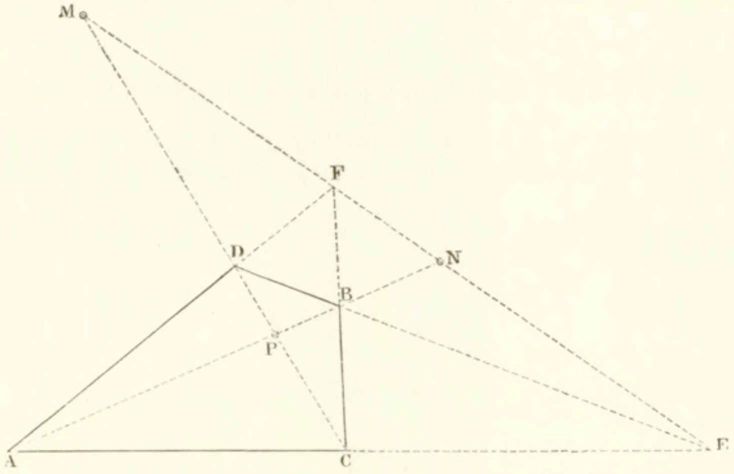

Fig. 14.

1° Czworobok zupełny przedstawia trzy pęki harmoniczne mające za wierzchołki M, N, P, to jest

(MA, MB; MP, MN),

(NC, ND; NP, NM),

(PE, PF; PN, PM);

albo, posługując się znakowaniem skróconém nader używaném w geometryi :

$$(M, \overline{AB}\ \overline{NP}),$$

$$(N, \overline{CD}\ \overline{PM}),$$

$$(P, \overline{EF}\ \overline{MN}),$$

podkreśliliśmy *proste połączone.*

Dowodzenie téj własności wyprowadza się bezpośrednio z twierdzenia, któreśmy dopiero co uzasadnili.

I tak, uważając punkt M i układ MN, NP, widzimy, że MB jest biegunową punktu A ; gdyż z punktu A wychodzą dwie sieczne A.CE, A.DF ; i przekątne FC i DE przecinają się w B ; ma się pęk harmoniczny utworzony przez dwie pary

(MN, MP); (MA, MB).

Uważmy punkt N i układ NP, NM ; widzimy, że ND jest biegunową punktu C ; gdyż z punktu C wychodzą dwie sieczne C.AE, C.BF ; i przekątne EB i AF przecinają się w D ; mamy więc pęk harmoniczny utworzony drzez dwie pary (NP, NM) ; (NC. ND).

Wyprowadzi się tymże samym sposobem istnienie trzeciego pęku harmonicznego, utworzonego przez dwie pary (PN, PM) ; (PE, PF).

2° Pęk harmoniczny dzieli harmonicznie poprzeczną jakąkolwiek ; zobaczymy poniżéj powód i znaczenie téj własności ; podług tego, podanie któreśmy dowiedli może się wysłowić w tych wyrazach :

W czworoboku zupełnym każda przekątna jest podzielona harmonicznie przez dwie inne.

3° Mamy jeszcze twierdzenie następujące :

W każdym czworoboku zupełnym, środki m, n, p trzech przekątnych AB, CD, EF, *są w linii prostéj.*

W rzeczy saméj, trzy proste $\beta\gamma$, $\gamma\varepsilon$, $\beta\varepsilon$, łączące środki boków trójkąta BCE, przechodzą względnie przez środki p, m, n, trzech przekątnych ; pytanie zależy od udowodnienia powyżéj już wyłożonéj równości

$$\beta p . \gamma m . \varepsilon n = + \beta n . \varepsilon m . \gamma p.$$

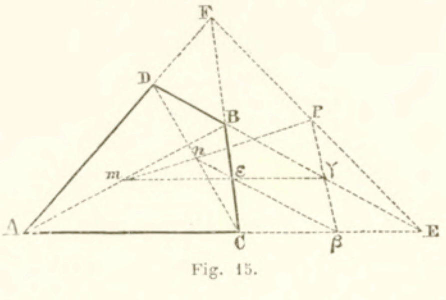

Fig. 15.

Otóż sześć długości, jakie zawiera powyższy związek są dokładnie połowami odcinków, które *poprzeczna* ADF oddziela na trójkącie BEC ; więc równość jest prawdziwą.

Paryż, dnia 23 czerwca 1875 roku.