TEORYA LICZB ZŁOŻONYCH
I ICH FUNKCYJ

(*CZĘŚĆ PIERWSZA*) (*).

PRZEZ

K. HERTZA I S. DICKSTEINA

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych, dnia 6 lutego 1875 roku.

WSTĘP

Uogólnienie pojęć matematycznych. — Cztery działania arytmetyczne. — Liczby odjemne i ułamkowe. — Ogólne pojęcie liczby. — Zasada zachowania działań.

1. — Każda nauka z pewnéj liczby danych związków pomiędzy przedmiotami lub pojęciami, które bada, wyprowadza nowe związki drogą rozumowania. Rozumie się, że szukane związki są już z konieczności ukryte w związkach danych, lecz poznanie ich i ujawnienie staje się możebném dopiéro po przeprowadzeniu całego szeregu rozumowań, co stanowi właśnie treść badania naukowego. Wypada ztąd, że wszelkie wyniki rozumowań otrzymane z założeń drogą logiczną, są z natury rzeczy prawdziwe i konieczne. W badaniach tego rodzaju zdarza się często, że wychodząc z danych pojęć i poddając je rozbiorowi, dochodzimy do przekonania, że pewne związki pomiędzy pojęciami nie przestają być prawdziwemi nawet i wtedy, gdy pojęcia pierwotne uogólnimy, chociażby przez takie uogólnienie związki pomiędzy pojęciami nie miały już tego znaczenia, jakie miały pierwotnie. Z samego określenia zadania nauki wynika, że i takie związki

(*) Część pierwszą naszéj pracy ułożyliśmy z pewnemi zmianami, na wzór nieukończonego z przyczyny śmierci autora dzieła, matematyka niemieckiego Hankla, p. t.: *Theorie der complexen Zahlensysteme und ihrer Functionen.* Następne części naszéj pracy obejmą naukę rozciągłości (*Ausdehnungslehre*) Grassmana; kwaterniony Hamiltona; badania Weierstrassa; wreszcie teoryę funkcyj liczb złożonych.

http://rcin.org.pl

stanowić powinny materyał jéj badań. Zadaniem matematyki czystéj jest badanie takich związków pomiędzy przedmiotami, które opierają się na pojęciu wielkości, miary i liczby, przy czém na naturę i istotę tych przedmiotów nie zwraca się uwagi. Wyniki matematyczne, otrzymane z danych pojęć drogą dedukcyi, są zawsze prawdziwe, i jakkolwiek uogólnimy pierwotne pojęcia, nie przestają mieć istotnéj wartości w zakresie badania. By rzecz tę jaśniéj przedstawić, zajmijmy się badaniem uogólnień, którym uległy pierwotne pojęcia matematyczne. W tym celu zbadać przedewszystkiém należy fundamenta, na których wznosi się gmach naszéj nauki. Przy tém badaniu ograniczymy się na czterech pierwszych działaniach z liczbami zwyczajnemi, co zdaniem naszém, wystarczy do wyjaśnienia wyżéj postawionéj zasady.

2. — Pierwotnym materyałem matematyki jest szereg liczb całkowitych i dodatnych :

(1) $$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

Każda z tych liczb oznacza właściwie, ile razy pewien przedmiot p został wziętym, tak że np. 5 oznacza $5p$. Że zaś przedmiot p jest zupełnie dowolnym, to możemy go obrać za jednostkę i ną jego miejsce postawić jedność liczebną. Tym sposobem szereg pierwotny należałoby właściwie tak pisać :

$$1.1, \quad 2.1, \quad 3.1, \quad 4.1, \ldots\ldots;$$

lecz jeżeli zamiast 1.1 napiszemy 1, zamiast 2.1 — 2, i t. d., wrócimy do szeregu (1).

Ztąd wypada, że znaki oznaczające liczby wyrażają dwa odmienne, lubo bliskie siebie pojęcia. Raz można je uważać jako liczby kardynalne, i w takim razie oznaczają ile razy pewna jednostka jest powtórzoną; drugi raz jako liczby porządkowe, i wtedy oznaczają porządek miejsca, jakie pewna wielkość zajmuje w uporządkowanym szeregu wielkości. Odpowiednio do tych dwóch sposobów zapatrywania się na liczby, mamy dwa działania proste : *dodawanie* i *mnożenie*.

Dodawanie. — Wyobraźmy sobie, że pewien przedmiot wzięliśmy najprzód a razy, następnie b razy. Wypadek jednego działania jednorodnego z poprzedzającemi i w zupełności obadwa zastępującego nazywa się *summą* i oznacza się przez $a+b$. Z saméj genezy summy wypada, że :

(α) $$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c,$$

(β) $$a+b=b+a.$$

Równanie (α) wyraża prawo, które W. R. Hamilton nazywa *prawem łączności* (*associative Law*); równanie zaś (β) wyraża prawo, nazwane przez Servois *prawem przemienności* (*commutativ Law*). Dodawanie jest działaniem jednowartościowém, t. j. że wypadek dodawania $(a+b)$ jest zupełnie określonym; oprócz tego łatwo widziéć, że summa zmienia się ze zmianą jednéj z liczb danych. Przytoczone własności dodawania wystarczają w zupełności do jego określenia, t. j. wystarczają do wyprowadzenia wszelkich dalszych wniosków o własnościach i sposobach otrzymywania summy.

Mnożenie jest działanie, za pomocą którego liczbę porządkową b powtarzamy a razy. Wypadek tego działania, który nazywamy *iloczynem* i oznaczamy przez ab, może być uważany jako powstały z b w ten sam sposób, w jaki a powstało z jedności liczebnéj. Prawo przemienności, które dla tego działania wyrazi się przez równanie

$$ab=ba,$$

nie jest koniecznym wynikiem określenia i dlatego potrzebuje oddzielnego dowodzenia, zupełnie

http://rcin.org.pl

tak samo jak i prawo łączności wyrażone równaniem

$$a(bc) = (ab)c.$$

Oprócz tego dla mnożenia ma jeszcze miejsce trzecie prawo, nazwane przez Servois *prawem rozdzielności* (*distribution*), które wyraża się dwoma następującemi równaniami :

$$(b + c)a = ba + ca; \quad a(b + c) = ab + ac.$$

Jeżeli jeszcze do powyższych własności mnożenia dodamy, że $1 \, . \, a = a$ i że działanie, o którém mowa, jest jednowartościowém, to będziemy mieli wszystkie warunki potrzebne do określenia mnożenia.

3. Odejmowanie. — Jeśli wyobrazimy sobie, że liczba c jest summą dwóch liczb : jednéj wiadoméj a i drugiéj niewiadoméj x, to działanie, za pomocą którego wyznaczamy niewiadomę x, nazywa się *odejmowaniem*. Ponieważ dodawanie jest działaniem jednowartościowém, więc istnieje jedna tylko liczba x czyniąca zadość równaniu $a + x = c$; tę liczbę oznaczymy przez

$$x = c - a.$$

Dopóki liczba $c > a$, to w szeregu (1) znajdzie się zawsze jedna taka liczba, która czyni zadość powyższemu równaniu. Jeżeli zaś $c < a$, to oczywiście w szeregu liczb (1), nie ma liczby czyniącéj zadość równaniu $a + x = c$. Jeśli więc będziemy chcieli ograniczyć się na liczbach całkowitych i dodatnych, to równanie nasze nie będzie miało rozwiązania, i odejmowanie w tym przypadku będzie niemożebném. Takiego rodzaju ograniczenia tamowałyby dalszy rozwój nauki. Scieśnienie usuniemy, jeśli różnicę $c - a$ w przypadku $c < a$ uważać będziemy za nową liczbę, czyniącą zadość równaniu

$$(c - a) + a = c,$$

którą poddać możemy tym samym działaniom, co i liczby szeregu (1). W skutek takiego uogólnienia otrzymamy nowy szereg liczb, który łatwo zredukować można do szeregu analogicznego z szeregiem (1). Jakoż, oznaczając przez 0 liczbę czyniącą zadość równaniu $a + 0 = a$, czyli $a - a = 0$, możemy różnicę $c - a$ (gdzie $a = c + b$) napisać w kształcie

$$c - (c + b) = (c - c) - b = 0 - b,$$

a przez skrócenie $- b$.

Liczbom odjemnym możemy nadać następujące znaczenie. Jeśli pewne przedmioty A, B, C, D,.. wyobrazimy sobie uporządkowane w pewien szereg i jeśli założymy, że położenie przedmiotu A względem B jest takie same, jakiém jest położenie B względem C, lub C względem D i t. d. to rzecz jasna, że jeśli stosunek położenia A względem B, czyli innemi słowy, proces przejścia od A do B oznaczymy przez $+1$, to proces przejścia od B do A musimy oznaczyć przez -1.

Wynika to z natury różnicy $c - a$. Jakoż, na zasadzie równania $a + 0 = a$, 0 oznacza zostawanie w tém samém miejscu. Ponieważ zaś przejście od przedmiotu A do przedmiotu jakiegoś M, i na powrót od M do A jest równoważném z pozostawaniem w miejscu, więc oznaczając przejście od A do M przez $+ a$, znajdziemy, że przejście od M do A należy oznaczyć przez $- a$, gdyż tylko

$$+ a - a = 0.$$

4. Dzielenie jest działanie, za pomocą którego wyznaczamy liczbę x, czyniącą zadość równaniu,

$$ax = b,$$

http://rcin.org.pl

w którém a i b są liczbami całkowitemi, t. j. taką liczbę, która powtórzona a razy staje się równą b. Oczywiście, że nie zawsze szukana liczba x znajdzie się w szeregu liczb całkowitych. Jeżeli więc ograniczymy się na takich liczbach, to dzielenie w wielu razach mogłoby być niemożebném. Dla usunięcia tego ograniczenia, zmuszeni jesteśmy wprowadzić do nauki nowe liczby dane przez równanie

$$x=\frac{b}{a},$$

które określają się w ten sposób, że

$$a\frac{b}{a}=b.$$

Taka jest geneza liczb ułamkowych, które przedewszystkiém występują w matematyce, jako liczby wprowadzone do nauki w celu umożebnienia dzielenia bez wszelkich ograniczeń. Tym liczbom ułamkowym możemy nadać znaczenie istotne (aktualne). Jeśli bowiem wyobrazimy sobie, że jednostkę liczebną $+1$ podzieliliśmy na a równych części, i taką część oznaczymy przez $\frac{1}{a}$, to oczywiście $a\frac{1}{a}=1$. Każdą taką część możemy uważać jako nową jednostkę, a zatém mnożenie zastosowane do tych nowych jednostek, będzie miało takie same istotne znaczenie, jakie miało pierwotnie, kiedyśmy je stosowali do liczb całkowitych. Iloczyn $b.\frac{1}{a}$ oznacza, żeśmy część $\frac{1}{a}$ powtórzyli b razy. Ponieważ zaś z tego określenia wypada, że $b\left(a.\frac{1}{a}\right)=a\left(b.\frac{1}{a}\right)=b$, więc porównywając to równanie z powyższém, otrzymujemy

$$\frac{b}{a}=b.\frac{1}{a}.$$

Określiwszy iloczyn $b\frac{1}{a}$, nie wiemy jeszcze co znaczy $\frac{1}{a}b$. Otóż w tym celu określamy $\frac{1}{a}b$ jako działanie, za pomocą którego b dzielimy na a równych części. Przy takiém określeniu będzie:

$$b.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.b=\frac{b}{a},$$

czyli innemi słowy, przy mnożeniu liczb ułamkowych przez całkowite otrzymuje się zasada przemienności.

Możnaby także założyć równanie

$$xa=b,$$

t. j. zapytać, ile razy ma być powtórzoną liczba całkowita a, by wypadek ztąd powstały równał się liczbie b. Oznaczając rozwiązanie tego równania przez $\frac{b}{a}$, znajdziemy, że liczby tak oznaczone nie zawsze znajdują się w naszym szeregu, że więc $\frac{b}{a}$ oznacza w wielu przypadkach nową liczbę, która jest liczbą ułamkową. Liczba ułamkowa określi się tedy przez równanie

$$\frac{b}{a}.a=b,$$

http://rcin.org.pl

a stosując potém zasadę zachowania, przyjmujemy że

$$\frac{b}{a}a = a\frac{b}{a}.$$

5. Ogólne pojęcie liczby.— To co dotąd powiedzieliśmy, wystarcza do wykazania, że gdy chcemy by działania odwrotne zawsze mogły być wykonywane, to trzeba uogólnić pojęcie liczby. Hankel w dziele, które służyło za podstawę niniejszéj pracy, daje następujące określenie liczby istotnéj (aktualnéj) : « *Liczba istotna wyraża wzajemną zależność dwóch przedmiotów, o ile zależność ta daje się ilościowo wyznaczyć* ».

Właściwe wyniki ilościowe wypadające z porównania dwóch przedmiotów, pod względem pewnego rodzaju zależności (która w przypadku liczb aktualnych jest wielkością), wyrażają się liczbami bezwzględnemi. Jeśli liczba składa się z wielu takich liczb bezwzględnych, nazywa się *liczbą złożoną*. Ponieważ bez względu na charakter zależności dwóch przedmiotów od siebie, jedynie przy warunku, że zależność ta daje się ilościowo wyznaczyć, zawsze możemy znaleźć jednostkę zależności, więc wypadek porównania dwóch przedmiotów pod względem uważanéj zależności wyraża się liczbą, która będzie wielokrotnością jednostki zależności. Tym sposobem oznaczając jednostkę zależności przez j_m, a przez a_m liczbę bezwzględną, znajdziemy, że wypadek porównania dwóch przedmiotów pod względem pewnego rodzaju zależności, wyraża się przez $a_m j_m$. Jeśli dwa przedmioty mogą być porównywane ze sobą pod wieloma rodzajami wzajemnéj od siebie zależności, to wypadek tego porównania wyrazi się liczbą

$$l = \sum_{m=1}^{m=n} a_m j_m (*).$$

Uogólnione określenie liczby zrodziło pytanie, czy wszystkie liczby są możebne? Bliżéj się zastanawiając nad tém pytaniem, przekonywamy się, że ono nie ma żadnego znaczenia. Liczby bowiem nie istnieją niezależnie od nas i od przedmiotów, które ze sobą porównywamy. Jeśli z porównania dwóch przedmiotów, idealnych lub realnych pod względem pewnego rodzaju wzajemnych ich od siebie zależności, którą w nich upatrujemy, otrzymaliśmy liczbę, to ona zawsze będzie możebną, bylebyśmy tylko przy jéj otrzymaniu nie popełnili błędu logicznego; dla matematyka bowiem niemożebném jest tylko to, co jest logicznie niemożebném. Pytanie powyższe może tylko wtedy mieć znaczenie, gdy przez wyrażenie «liczba jest możebną lub niemożebną», rozumiéć będziemy pytanie, czy w rzeczywistości znajdują się lub nie znajdują przedmioty, zostające w takiéj od siebie zależności, że wypadek porównania pod względem téj zależności da się wyrazić przez otrzymaną liczbę. Innemi słowy, pytanie o możebności lub niemożebności liczb redukuje się do pytania, czy można odnaleźć przedmioty, które byłyby podścieliskiem (substratem) dla danych liczb? Lecz wzgląd ten nie może mieć wpływu na wprowadzanie lub niewprowadzanie do matematyki liczb ogólnych. Każdemu bowiem wiadomo, że i liczbom odjemnym i ułamkowym nie zawsze odpowiada coś konkretnego, a jednak liczby te oddawna już uzyskały prawo obywatelstwa w matematyce i nikomu na myśl nie przyjdzie nazwać je niemożebnemi. Co więcéj, historya matematyki uczy nas, że liczby, które dawniéj uważano za niemożebne, z powodu że nie umiano ich stosować do przedmiotów konkretnych, stały się dziś możebnemi, gdy przekonano się, że mogą być uzmysłowione. Tak np. liczby $a + b\sqrt{-1}$, które otrzymują się przy rozwiązywaniu równań stopnia drugiego

(*) Jako przykłady mogą służyć zwyczajne liczby urojone $z = x + iy$ i kwaterniony Hamiltona $\xi = x_0 + x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3$.

http://rcin.org.pl

nazwano dawniéj *urojonemi* lub *niemożebnemi* (gdyż sądzono że nie mogą być uzmysłowione), znalazły teraz zastosowanie w geometryi i mechanice, a zatém stały się *możebnemi* (w dawném znaczeniu tego wyrazu). Przekonawszy się tym sposobem, że w świecie realnym nie zawsze znajdujemy przedmioty, które byłyby przedstawicielami danych liczb, zmuszeni jesteśmy uciekać się do przedmiotów idealnych, umysłowych. Dla uniknienia wszelkiéj niejasności pojęć, dobrze będzie, liczby które są doskonale określone, lecz które nie mogą być uzmysłowione nazwać liczbami *idealnemi*, dla odróżnienia ich od liczb istotnych (aktualnych), które znajdują uzmysłowienie w dziedzinie rzeczywistych wielkości. Pomiędzy temi dwoma rodzajami liczb możnaby pomieścić liczby, o których *à priori* nie można twierdzić, że nie mają odpowiedniego uzmysłowienia. Z tego, co powiedziano, widać jednak, że nie można ustanowić ścisłéj granicy między liczbami tych trzech kategoryj, że przeciwnie, podział ten nie jest stałym; gdyż postęp nauki sprawić może, że liczby idealne stać się mogą liczbami aktualnemi.

6. Zasada zachowania praw działań. — Niech głoski a, b, c, ... oznaczają pewne przedmioty idealne lub pewne zależności. Wyobraźmy sobie, że przedmioty a i b połączyliśmy ze sobą w jakikolwiek sposób, a wypadek tego połączenia uważamy jako nowy przedmiot c. Przedmiot ten we wszystkich działaniach, jakie wykonywać będziemy nad przedmiotami, zastępuje połączenie a i b, i dlatego téż nazywamy go *równym* temu połączeniu. Rzecz oczywista, że jeśli przedmioty łączyć będziemy ze sobą według pewnych, stałych prawideł, to pomiędzy wypadkami różnych połączeń otrzymamy pewne, związki, które wynikają z saméj natury połączeń, bez względu na istotę przedmiotów łączonych z sobą które zatém dadzą się wyprowadzić z samych założeń drogą dedukcyi. Wypadki takich połączeń możemy wyrazić przez pewne znaki, które według tego, cośmy wyżéj powiedzieli, możemy nazwać liczbami ogólnemi. Naukę zajmującą się badaniem związków, wynikających z saméj natury połączeń, możemy nazwać *matematyką formalną*, dla odróżnienia od *arytmetyki ogólnéj*, zajmującéj się badaniem związków zachodzących pomiędzy wielkościami. Zachodzi teraz pytanie, jakie znaczenie należy nadać działaniom w matematyce formalnéj, i jak te działania wykonywać. Znaczenia działań nad liczbami istotnemi wypadają z saméj natury połączeń, jakim poddajemy przedmioty realne, znaczenia zaś te określają już prawidła działań. Inaczéj się rzecz ma, gdy chodzi o działania nad liczbami czysto formalnemi, które, jak widzieliśmy, są wypadkiem porównania przedmiotów idealnych. Ponieważ natura połączenia takich przedmiotów jest zupełnie dowolną i od nas zależną, to i określenia działań, które wykonywać mamy nad liczbami ogólnemi, są także zupełnie dowolnemi, z tém tylko zastrzeżeniem, ażeby określenia te nie wyłączały się wzajemnie i nie zawierały się jedne w drugich. Pomimo jednak téj zupełnéj dowolności wyboru rodzaju połączeń, jakim przedmioty idealne poddać mamy, a tém samém i dowolności znaczenia działań tym połączeniom odpowiadających, istnieje ważna zasada, która tę dowolność pod pewnym względem ogranicza. Widzieliśmy wyżéj, że jedynym warunkiem, jakiemu działania formalne podlegać mają jest ten, aby prawidła ich były konieczne i dostateczne dla ich określenia. Warunkowi temu stanie się zadość, jeśli prawidła działań będą zupełnie od siebie niezależnemi. Otóż algebra przedstawia nam szereg takich prawideł niezależnych. Jeśli więc chcemy aby badania nasze miały stałą podstawę i nie zamieniły się w czcze spekulacye filozoficzne, to działania nad liczbami ogólnemi powinniśmy poddać takim prawidłom, któreby jako szczególny przypadek zawierały w sobie działania nad liczbami istotnemi. Wypadki więc połączenia przedmiotów idealnych powinny zamienić się na wypadek zwyczajnych działań algebraicznych, gdy w miejsce przedmiotów idealnych podstawimy wielkości, których wzajemne zależności wyrażają się liczbami istotnemi. Zasadę powyższą nazwiemy wraz z Hanklem *zasadą zachowania praw działań*. Zasada ta ciągle będzie kierowała naszemi krokami, ona będzie dla nas nicią przewodnią przy określaniu ogólnych prawideł działań formalnych. Przy czém, jak to nie jednokrotnie pokaże się późniéj,

http://rcin.org.pl

nie wszystkie szczegóły działań nad liczbami istotnemi zatrzymamy i dla działań formalnych; przeciwnie, zmiany w pewnych szczegółach działań stanowią właśnie charakter różnych układów liczb złożonych (*).

ROZDZIAŁ PIERWSZY

Zasady nauki o działaniach formalnych.

I. — DZIAŁANIA ŁĄCZNOŚCIOWE BEZ PRZEMIENNOŚCI.

7. — Niechaj głoski a, b, c,... przedstawiają przedmioty, które poddawać zamierzamy rozmaitego rodzaju połączeniom czyli działaniom. Działania te mają posiadać pewne formalne własności, stanowiące określenia każdego z nich i wyróżniające jedne z nich od drugich.

Połączenie dwóch przedmiotów oznaczać będziemy najczęściéj za pomocą symbolu $\Delta(a, b)$, lub téż $\nabla(a, b)$. W przypadku gdy działań różnych będzie więcéj, wtedy pisać będziemy:

$$\Delta_1(a, b),\ \ \Delta_2(a, b),\ \ldots\ldots,\ \ \nabla_1(a, b),\ \ \nabla_2(a, b),\ \ldots\ldots \text{ i t. d.}$$

Znak $\Delta(a, b, c)$ oznaczać będzie pewne połączenie trzech przedmiotów, $\Delta(a, b, c, d)$, połączenie

---

(*) Myśli wyłożone w poprzednich ustępach, a szczególniéj zasada zachowania praw działań, oprócz wysokiéj wartości filozoficznéj, okazały się jeszcze niezmiernie ważnemi dla rozwoju nauk matematycznych.

Rzecz oczywista, że elementy przestrzenne, jako to: punkty, linie, powierzchnie i ciała poddane być mogą działaniom formalnym, których prawidła ustanawiają się na wzór zwyczajnych prawideł algebraicznych. Otóż pokazało się, że działania te i ich wypadki w sposób bardzo naturalny odpowiadają prawom przekształceń i ruchów, jakim elementy przestrzenne poddać możemy. Formalna więc algebra zastosowana do elementów przestrzennych, daje nam w sposób bardzo naturalny wszystkie prawdy geometryczne (Kwaterniony Hamilton'a, wielkości wymiarowe Grasmann'a punkty i linie urojone Poncelett'a, rachunek barycentryczny Möbius'a, prace Argand'a, Français'go, Poncelett'a, Cauchy'ego, Scheffler'a, Żmurki i innych). Pojęcia mechaniki, jako to siły, pary sił, momenty prędkości, gęstość i t. p., nie tylko poddane być mogą działaniom formalnym, lecz jeszcze za pomocą takich działań rozwiązujemy najrozmaitsze zadania mechaniki aktualnéj.

Na zasadzie zachowania praw działań opiera się jeszcze tak nazwany *rachunek działań*, czyli rachunek symboliczny (Calculus of operation). Wiadomo, że niektóre równania zwyczajnéj algebry mają pierwiastkowo znaczenie tylko dla liczb całkowitych. Tak np. równanie

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

pierwiastkowo ma tylko znaczenie dla m i n całkowitych i dodatnych. Rozwój jednak matematyki wykazał potrzebę i konieczność rozszerzenia tego równania do wykładników ułamkowych, ujemnych a nawet urojonych. Inne znowu równania dały nam możność rozszerzenia pojęcia różniczkowania i całkowania, jak to później zobaczymy w części historycznéj téj pracy.

Wspomnieć tu jeszcze należy o pewnéj gałęzi matematyki którą *geometryą formalną* nazwać możemy. Wychodząc z pewnych *elementów* przestrzeni idealnéj, i poddając je pewnym działaniom podobnym do działań geometryi zwyczajnéj, otrzymano wypadki, które znacznie rozszerzają nasze wiadomości geometryczne. (Prace Łobaczewskiego, Gauss'a, Bolay'a a szczególniéj Riemann'a i Helmholtz'a.) W części historycznéj, która zakończy naszą pracę, postaramy się obszerniéj rozwinąć i przedstawić wyłożone tu myśli.

http://rcin.org.pl

czterech przedmiotów i t. d. Znaczenie takiego połączenia większéj liczby przedmiotów będzie dopiero ustanowione i wyjaśnione po ułożeniu prawideł łączenia dwóch przedmiotów.

Jeśli napiszemy równanie

$$\Delta(a, b) = c,$$

to oznaczać ono będzie, że wypadek połączenia jest pewnym przedmiotem c. Równanie

$$\nabla(a, b) = d$$

oznaczać będzie, że wypadek innego połączenia tychże przedmiotów jest inny przedmiot d, równy poprzedniemu lub różny od niego.

Niechaj będą dwa działania różne Δ i ∇. Zastosujmy pierwsze do dwóch przedmiotów m i n, drugie do dwóch przedmiotów a i b, i niechaj będzie :

(1) $$\Delta(m, n) = p,$$

(2) $$\nabla(a, b) = c.$$

Między temi dwoma działaniami ustanówmy następujący związek : *gdy w równaniu* (1) *zastąpimy* m *przez* c, n *przez* b, *to* p *równać się będzie* a. Założenie to daje się wyrazić w ten sposób :

(3) $$\Delta\{\nabla(a, b),\ b\} = a,$$

i stanowić ma pierwszą formalną własność naszych połączeń.

Połączeniom związanym z sobą w ten sposób damy oddzielne nazwy. Jedno z nich, np. Δ, nazwijmy działaniem *prostém*, drugie ∇ — odpowiadającém mu działaniem *odwrotném*, przy czém wyraźną pod tym względem różnicę ustanowimy dopiéro późniéj; teraz od naszéj woli zależy, które z tych działań uważać zechcemy za proste, które zaś za odwrotne.

Do powyższéj własności formalnéj stanowiącéj określenie jednego z działań, gdy dane jest drugie, dołączymy jeszcze drugą własność, a mianowicie założymy, że działania Δ i ∇ są *jednowartościowemi*. Własność ta ma oznaczać, że jeżeli pałączenie $\Delta(a, b)$ doprowadziło raz do wypadku c, drugi raz do wypadku c', to przedmioty c i c' należy uważać za równe, t. j. mogące zupełnie jeden drugi zastąpić we wszystkich połączeniach, jakim je poddajemy. Toż samo rozumie się co do działania $\nabla(a, b)$.

Z tych dwóch założeń, to jest zasadniczych własności naszych działań daje się wyprowadzić nowa własność wyrażona następującém twierdzeniem :

« Jeżeli w połączeniu $\Delta(a, b)$ lub $\nabla(a, b)$ pierwszy przedmiot zmienia się, gdy drugi pozostaje niezmienionym, to wypadek połączenia zmieniać się musi. »

W saméj rzeczy, niechaj będzie $\nabla(a, b) = c$, $\nabla(a', b) = c'$, gdzie a' różne od a ; twierdzimy że c' różne od c. Gdyby bowiem c' równało się c, wtedy byłoby

$$\nabla(a', b) = \nabla(a, b).$$

Łącząc obie strony b za pomocą działania Δ, otrzymać winniśmy wypadki równe, t. j.

$$\Delta\{\nabla(a', b), b\} = \Delta\{\nabla(a, b), b\}.$$

Wedle równania (3) pierwsza strona ostatniego równania równa się a', druga równa się a; byłoby zatém a' równe a, co się sprzeciwia założeniu.

http://rcin.org.pl

Tym sposobem twierdzenie nasze zostało dowiedzionêm dla działania Δ. Wynika ztąd, że równanie

$$\nabla(x, b) = c,$$

może mieć tylko jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to można znaleźć, łącząc obie strony z b za pomocą działania Δ. Otrzymamy wtedy

$$\Delta \{ \nabla(x, a), b \} = \Delta(c, b).$$

Ponieważ pierwsza strona tego równania według (3) równa się x, będzie zatém

(4) $$x = \Delta(c, b).$$

Wstawiając tę wartość w dane równanie, otrzymujemy następujący związek

(4) $$\nabla \{ \Delta(c, b), b \} = c.$$

Związek ten analogiczny ze związkiem (3), określa działanie ∇ gdy dane jest działanie Δ, co usprawiedliwia wyżéj wyrzeczone zdanie, że którekolwiek z dwóch działań może być uważane za proste.

W podobny sposób dowiedziemy twierdzenia odnośnie do działania Δ. Gdyby bowiem przy a' różném od a było

$$\Delta(a', b) = \Delta(a, b),$$

wtedy łącząc obie strony z b przy pomocy działania ∇, otrzymalibyśmy

$$\nabla \{ \Delta(a', b), b \} = \nabla \{ \Delta (a, b), b \},$$

czyli $a' = a$, co się sprzeciwia założeniu.

Uwaga. — Jako określenie działań Δ i ∇ przyjęliśmy równanie (3) i ich jednowartościowość. Z tego przyjęcia wynikło powyższe twierdzenie i związek (4). Jest rzeczą jasną, że gdybyśmy w miejsce równania (3) przyjęli jako określenie równanie (4), to równanie (3) byłoby wtedy wynikiem tego przyjęcia i jednowartościowości działań. Można zresztą zrobić jeszcze inne założenia, np. przyjąć za określenie równanie (3) i założyć, że jedno z działań Δ jest jednowartościowém i posiada własność wyrażoną równaniem (3). Ztąd wyniknie związek (4) i takaż sama własność działania ∇. W saméj rzeczy, gdyby przy tém założeniu mogła mieć miejsce równość.

$$\nabla(a', b) = \nabla(a, b),$$

gdy a' różne od a, wtedy łącząc obie strony z b przy pomocy działania Δ, otrzymalibyśmy

$$\Delta \{ \nabla(a', b), b \} = \Delta \{ \nabla(a, b) b \},$$

a więc na zasadzie równania (3), $a' = a$, co się sprzeciwia założeniu. Podobnież nie może być $\nabla(a, b)$ wielowartościowém, t. j. nie może być raz $\nabla(a, b) = c$, drugi raz $\nabla(a, b) = c'$, gdzie c' różne od c.

Możnaby wreszcie przyjąć jako określenie działań dwa równania (3) i (4), a ztąd wynikłaby własność obu wyrażona powyższém twierdzeniem.

(*) Liczby zwyczajne (całkowite i dodatne) i ich działania posłużą jako przykłady wyjaśniające rzecz wyłożoną w tym paragrafie. Przyjąwszy dodawanie za działanie proste, należy uważać odejmowanie za działanie odwrotne i przeciwnie, gdyż $(\alpha + \beta) - \beta = \alpha$, $(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$ zgodnie z równaniem (3) i (4). Działanie $\alpha + \beta$ jest jednowartościowém i wypadek jego zmienia się gdy α się zmienia, toż samo stosuje się i do β, tak jak być powinno według wyło-

http://rcin.org.pl

8. Połączenie proste większéj liczby przedmiotów. — Rozszerzymy teraz określenie naszych działań do większéj liczby przedmiotów. W tym celu załóżmy, że do połączeń trzech przedmiotów stosuje się prawo łączności, t. j. że otrzymujemy jeden i ten sam wypadek, łącząc pierwszy przedmiot z rezultatem połączenia drugiego i trzeciego, czy też rezultat połączenia pierwszego i drugiego przedmiotu z przedmiotem trzecim. Działanie, dla którego przyjmujemy tę własność, nazwijmy *prostém*. W ten sposób z działań Δ i ∇ to należy raz na zawsze uważać za proste, które posiada własność wyrażoną równaniem :

$$\Delta\{a,\ \Delta(b, c)\} = \Delta\{\ \Delta(a, b), c\ \}.$$

Równanie to ustanawia zatém różnicę między działaniem prostém i odwrotném, która do téj pory nie była jeszcze ustanowioną.

Pod $\Delta(a,\ b,\ c)$ rozumiéć będziemy jeden z wypadków równych $\Delta\ \{a, \Delta(b,\ c)\}$ lub $\Delta\ \{\Delta(a,\ b),\ c\}$, tak że napisać możemy :

$$\Delta(a,\ b,\ c) = \Delta\{a,\ \Delta(b,\ c)\} = \Delta\{\Delta(a,\ b),\ c\} \tag{5}$$

Przy takiém założeniu można już dowieść, że prawo łączności stosuje się do połączenia prostego czterech i większéj liczby przedmiotów. W saméj rzeczy, na zasadzie równania (5) będzie

$$\Delta[a, \Delta(b,\ c,\ d)] = \Delta[a, \Delta\ \{\ \Delta(b, c),\ d\ \}] = \Delta[\Delta\{a,\ \Delta(b, c)\ \},\ d] = \Delta[a,\ \Delta(b,\ c),\ d].$$

Z drugiéj strony, na zasadzie tego samego równania jest :

$$\Delta[a,\ \Delta(b,\ c,\ d)] = \Delta[a,\ \Delta\ \{b,\ \Delta\ (c,\ d)\}] = \Delta[\Delta(a,\ b),\ \Delta(c,\ d)].$$

Każde z tych sześciu równych sobie wyrażeń nazwiemy połączeniem $\Delta(a,\ b,\ c, d)$. W podobny sposób otrzymać można połączenia pięciu i większéj liczby przedmiotów. Do wszystkich tych połączeń stosuje się prawo łączności, jeżeli założymy, że ono wedle (5) stosuje się do trzech i jeżeli połączeniem n przedmiotów nazwiemy połączenie jednego przedmiotu z wypadkiem połączenia $n-1$ innych przedmiotów.

9. Własności działań. — Określiwszy w ten sposób działania proste łącznościowe, wyprowadzimy

---

żonego twierdzenia. Daléj, jeżeli z pozostałych działań, t. j. mnożenia i dzielenia, jedno przyjmiemy za proste, to drugie należy uważać za odwrotne, gdyż $\frac{\alpha}{\beta}\,.\,\beta = \alpha$ i także $\frac{\alpha\beta}{\beta} = \alpha$. Niżéj pokaże się, że przyjmując dodawanie za działanie proste, należy także za działanie proste uważać mnożenie. Mnożenie jest działaniem jednowartościowém, toż samo stosuje się do dzielenia, jak być powinno. Lecz mnożenie nie czyni zadość twierdzeniu, w przypadku gdy jeden z mnożników jest zerem, jest bowiem $\alpha.0 = 0$, $\alpha'.0 = 0$, przy α' różném od α; dzielenie w tym przypadku $\frac{\alpha}{0}$ nie jest oznaczone, jak też być powinno wedle naszéj teoryi.

(*) Za przykład wyłożonéj teoryi mogą znów służyć dodawanie i mnożenie liczb zwyczajnych. Albowiem z własności działań wynika : $\alpha+\beta+\gamma = (\alpha+\beta)+\gamma, = \alpha+(\beta+\gamma)$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \alpha+(\beta+\gamma+\delta) = \alpha+\beta+(\gamma+\delta) = (\alpha+\beta+\gamma)+\delta$; $\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, $\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\beta)\gamma\delta = \alpha(\beta\gamma)\delta = \alpha\beta(\gamma\delta)$. Następujące działanie : $\Delta(\alpha, \beta) = \frac{\alpha+\beta}{2}$ nie jest łącznościowém ; albowiem prawo łączności nie stosuje się do trzech przedmiotów, gdyż

$$\Delta\{\Delta(\alpha,\ \beta),\ \gamma\} = \Delta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \gamma\right) = \frac{\alpha+\beta+2\gamma}{4}.$$

$$\Delta\{\alpha,\ \Delta(\beta,\ \gamma)\} = \Delta\left(\alpha, \frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \frac{2\alpha+\beta+\gamma}{4}.$$

http://rcin.org.pl

z tego określenia rozmaite twierdzenia, które wyrażać będą wynikające z tych własności naszych działań. Własności te dają się wyrazić trzema następującemi równaniami :

(6) $$\Delta[a, \nabla(b, c)] = \nabla[\Delta(a, b,) c],$$

(7) $$\nabla[a, \Delta(c, b)] = \nabla[\nabla(a, b), c],$$

(8) $$\nabla[\Delta(a, c), b] = \nabla[a, \nabla(b, c)].$$

i przedstawiają związki między działaniem prostém i odpowiadającém mu odwrotném.

Dowód pierwszéj własności. — Załóżmy,

$$x = \Delta[a, \nabla(b, c)].$$

Połączywszy obie strony z c przy pomocy działania Δ, otrzymamy

$$\Delta(x, c) = \Delta\{\Delta[a, \nabla(b, c)], c\} = \Delta\{a, \Delta[\nabla(b, c), c]\} = \Delta(a, b).$$

Stosując teraz do obu stron działanie ∇, otrzymamy

$$\nabla[\Delta(x, c), c] = \nabla[\Delta(a, b), c],$$

$$x = \nabla[\Delta(a, b), c],$$

$$\Delta[a, \nabla(b, c)] = \nabla[\Delta(a, b), c],$$

co należało dowieść.

Dowód drugiéj własności. — Załóżmy

$$x = \nabla[\nabla(a, c), b].$$

Połączenie z b przy pomocy działania Δ zastosowane do obu stron daje :

$$\Delta(x, b) = \Delta\{\nabla[\nabla(a, c), b], b\}.$$

Położywszy na chwilę $\nabla(a, c) = d$, otrzymujemy na stronie drugiéj $\Delta\{\nabla(d, b), b\} = d = \nabla(a, c)$, a zatém

$$\Delta(x, b) = \nabla(a, c).$$

Połączenie obu stron za pomocą działania ∇ z c daje

$$\Delta[\Delta(x, b), c] = \Delta[\nabla(a, c), c],$$

czyli

$$\Delta[\Delta(x, b), c] = a.$$

Ztąd na zasadzie równania (5) otrzymujemy

$$\Delta[x, \Delta(b, c)] = a.$$

Połączenie obu stron za pomocą działania ∇ z $\Delta(b, c)$ i podstawienie za x jego wartości daje rezultat

$$\nabla[\nabla(a, c), b] = \nabla[a, \Delta(b, c)],$$

jak i należało otrzymać.

http://rcin.org.pl

Dowód trzeciéj własności. — Załóżmy

$$x = \nabla[\Delta(a, c), b],$$

i połączmy obie strony z b przy pomocy działania Δ :

$$\Delta(x, b) = \Delta\{\nabla[\Delta(a, c), b], b\}.$$

Położywszy na chwilę $\Delta(a, c) = d$, otrzymujemy na stronie drugiéj $\Delta\{\nabla(d, b), b\} = d = \Delta(a, c)$, a zatém :

$$\Delta(x, b) = \Delta(a, c).$$

Połączmy obie strony z c przy pomocy ∇, to otrzymamy

$$\nabla[\Delta(x, b), c] = \nabla[\Delta(a, c), c] = a.$$

Ztąd na zasadzie pierwszéj dowiedzionéj własności

$$\Delta[x, \nabla(b, c)] = a.$$

Łącząc obie strony z $\nabla(b, c)$ przy pomocy działania ∇ i podstawiając za x jego wartość, otrzymamy żądany związek:

$$\nabla[\Delta(a, c), b] = \Delta[a, \nabla(b, c)] \text{ (*)}.$$

10. Zupełna jednowartościowość działań. — Z jednowartościowości działań Δ i ∇ wyprowadziliśmy własność, że gdy w każdém z tych połączeń drugi przedmiot pozostaje stałym, pierwszy zaś zmienia się, wtedy wypadek połączenia zmienia się. Teraz przyjmujemy, co i w dalszym ciągu wciąż zachowamy, że działanie $\Delta(a, b)$ jest zupełnie jednowartościowém, t. j. że wypadek jego zmienia się także, gdy pierwszy przedmiot pozostaje stałym, drugi zaś ulega zmianie. Przy takiém przyjęciu, z równania

$$\Delta(\mu, b') = \Delta(\mu, b).$$

wnieść należy, że $b' = b$. Z zupełnéj jednowartościowości działania Δ wynika takaż sama własność działania ∇. Gdyby bowiem przy b różném od b' było

$$\nabla(a, b) = \nabla(a, b'),$$

to łącząc pierwszą stronę z b, drugą z b', za pomocą działania Δ, otrzymalibyśmy

$$\Delta[\nabla(a, b), b] = a; \quad \Delta[\nabla(a, b'), b'] = a,$$

a zatém

$$\Delta[\nabla(a, b), b] = \Delta[\nabla(a, b'), b'];$$

a ponieważ $\nabla(a, b) = \nabla(a, b')$, więc ztąd wynikłoby $b = b'$, co się sprzeciwia założeniu.

11. O zwrotnikach działań. — Przyjmijmy, że istnieje przedmiot m, który połączony za pomocą działania prostego z jakimkolwiek przedmiotem a, daje na wypadek ten sam przedmiot a. Przedmiot m posiadający tę własność nazwiemy *zwrotnikiem* (**) działania prostego.

(*) Trzem wyprowadzonym własnościom odpowiadają, jak to później zobaczymy, znane własności liczb odjemnych i ułamkowych.

(**) Hankel temu przedmiotowi m daje nazwę modulu działania. Lecz wyraz *moduł* używa się w matematyce już w tylu różnorodnych znaczeniach, iż uważaliśmy za stosowne przyjąć tu powyższą nazwę, tém odpowiedniejszą, że niejako wyobraża ona własność wprowadzonego pojęcia.

http://rcin.org.pl

Określenie zwrotnika zawiera się zatém w następującém równaniu :

$$\Delta(a, m) = a. \tag{9}$$

Ponieważ według prawa łączności :

$$\Delta[a, \Delta(m,c)] = \Delta[\Delta(a, m), c],$$

będzie zatém na zasadzie określenia:

$$\Delta[a, \Delta(m, c)] = \Delta(a, c),$$

a ztąd :

$$\Delta(m, c) = c. \tag{10}$$

Równananie (10) jest wynikiem równania (9) i odwrotnie równanie (9) uważać można za wynik równania (10). Jedno i drugie może być uważane jako określenie zwrotnika. Porządek, w jakim przy pomocy działania prostego łączymy przedmiot ze zwrotnikiem, nie ma wpływu na wypadek działania.

Pytamy teraz, jaki będzie wypadek działania $\nabla(a, m)$. Oznaczmy

$$x = \nabla(a, m)$$

i połączmy obie strony z m przy pomocy działania Δ; będzie zatém

$$\Delta(x, m) = \Delta[\nabla(a, m), m].$$

Strona pierwsza wedle równania (9) równa się x, strona druga według równania (3) równa się a, będzie zatém $x = a$, czyli

$$\nabla(a, m) = a. \tag{11}$$

Z rownania (4)

$$\nabla \{ \Delta(c, b), b \} = c,$$

gdy w niém położymy $c = m$, mieć będziemy

$$\nabla \{ \Delta(m, b), m \} = m,$$

czyli

$$\nabla(b, b) = m. \tag{12}$$

Równanie (12) pokazuje, że zwrotnik działania możemy otrzymać, łącząc jakikolwiek przedmiot z samym sobą przy pomocy działania odwrotnego.

Tym sposobem wedle naszego przyjęcia

$$\Delta(b, m), \quad \Delta(m, b); \quad \nabla(b, m),$$

są równe sobie i dają wypadek b. Pozostaje jeszcze rozpatrzéć działanie

$$\nabla(m, b).$$

Porównywając to działanie z działaniém $\Delta(m, b)$, widzimy że wypadek pierwszego powstaje za pomocą działania odwrotnego z dwóch przedmiotów m i b, w ten sposób w jaki wypadek drugiego powstaje

http://rcin.org.pl

z tychże przedmiotów przy pomocy działania prostego. Z tego powodu wypadek działania

$$\nabla(m, b)$$

nazwijmy *odwrotnością* wypadku działania $\Delta(m, b)$. Ponieważ $\Delta(m, b) = b$, a zatém $\nabla(m, b)$ jest odwrotnością b, co oznaczymy w ten sposób :

$$\nabla(m, b) = b_m.$$

Łatwo dowieść, że jeżeli wypadek działania $\nabla(m, c)$ będziemy uważali za wypadek *prosty*, to wypadek działania $\Delta(m, c)$ należy uważać za odwrotny, czyli że

$$(c_m)_m = c.$$

W saméj rzeczy, z równania (8), t. j. z równania

$$\nabla[a, \nabla(c, c)] = \nabla[\Delta(a, c), b],$$

gdy w niém podstawimy : $a = m$, $b = m$, mieć będziemy

$$\nabla[m, \nabla(m, c)] = \nabla[\Delta(m, c)\, m],$$

czyli

$$\nabla(m, c_m) = \nabla(c, m), \text{ t. j. } (c_m)_m = c,$$

co należało dowieść.

(*) Lubo niżéj wyłożymy zastosowania tych twierdzeń, dla łatwiejszego jednak zrozumienia wyłożonéj tu teoryi podajemy znów przykłady z teoryi działań arytmetycznych z liczbami rzeczywistemi. Najprzód, jeżeli działanie Δ jest dodawaniem, wtedy zwrotnikiem jest zero, czyniące zadość równaniu

$$\alpha + 0 = \alpha, \tag{9^a}$$

zkąd wynika także

$$0 + \alpha = \alpha, \tag{10^a}$$

$$\alpha - 0 = \alpha, \tag{11^a}$$

$$\beta - \beta = 0. \tag{12^a}$$

Przedmiotem odwrotnym jest tu $0 - \beta$, t. j. *liczbą odjemną* którą oznacza się przez $-\beta$. Jest też zgodnie z powyższą teoryą: $-(-\beta) = \beta$.

Jeżeli działanie Δ jest mnożeniem, to zwrotnikiem jest jedność, gdyż

$$\alpha . 1 = \alpha.$$

Zkąd wynikają równania

$$1 . \alpha = \alpha; \tag{10^b}$$

$$\frac{\alpha}{1} = \alpha, \tag{11^b}$$

$$\frac{\beta}{\beta} = 1. \tag{12^b}$$

Przedmiot odwrotny oznacza się przez $\frac{1}{\alpha}$ i zgodnie z wyłożoném twierdzeniem jest

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \alpha.$$

http://rcin.org.pl

Wprowadzenie odwrotności daje nam możność zamiany każdego działania prostego na odwrotne i przeciwnie. W samej rzeczy, równanie (6), gdy w niém założymy $b = m$, daje

$$\Delta [a, \nabla (m, c)] = \nabla [\Delta (a, m), c],$$

t. j.

(13) $$\Delta (a, c_m), = \nabla (a, c).$$

Równanie (8) w témże założeniu daje:

$$\nabla [\Delta (a, c), m] = \nabla [a, \nabla (m, c)],$$

t. j.

(14) $$\Delta (a, c) = \nabla (a, c_m).$$

Z równań (8) i (6) przy założeniu $a = m$, mieć będziemy

$$\nabla [m, \nabla (b, c)] = \Delta [m, \nabla (c, b)];$$

czyli

(15) $$[\nabla (b, c)]_m = \nabla (c, b),$$

a z równania (7) przy témże założeniu

(16) $$[\Delta (b, c)]_m = \Delta (c_m, b_m).$$

Przy pomocy tych związków dają się téż łatwo przekształcić trzy równania (6), (7) i (8) wyrażające własności działań.

II. — DZIAŁANIA ŁĄCZNOŚCIOWE I PRZEMIENNOŚCIOWE.

12. Określenie działań przemiennościowych. — Działanie proste $\Delta (a, b)$ nazywamy przemiennościowém wtedy, gdy czyni zadość równaniu

(1) $$\Delta (a, b) = \Delta (b, a),$$

t. j. gdy wypadek połączenia prostego dwóch przedmiotów nie zależy od porządku, w jakim to połączenie uskuteczniamy.

Przy tém założeniu, równania (3) i (4) [I] można przedstawić pod następującą postacią:

(2) $$\Delta \{ b, \nabla (a, b) \} = a,$$

(3) $$\nabla \{ \Delta (b, c), b \} = c.$$

W podobny sposób dają się przekształcić i inne równania wyrażające związki między działaniami, a mianowicie równania (6), (7) i (8) [I]. Gdy np. do równania

$$\nabla [a, \nabla (b, c)] = \Delta [a, \nabla (c, b)],$$

które jest wynikiem równania (6) i (8), zastosujemy określenie działania przemiennościowego, otrzymamy związek:

(4) $$\nabla [a, \nabla (b, c)] = \Delta [\nabla (c, b), a]$$

http://rcin.org.pl

13. Związek działań prostych łącznościowych, połączonych ze sobą prawem rozdzielności. — Niechaj będą dwa działania proste Δ_1, Δ_2 jednowartościowe i łącznościowe, połączone ze sobą następującemi równaniami :

$$\Delta_2 [\Delta_1 (a, b), c] = \Delta_1 [\Delta_2 (a, c), \Delta_2 (b, c)], \tag{5}$$

$$\Delta_2 [a, \Delta_1 (c, d)] = \Delta_1 [\Delta_2 (a, c), \Delta_2 (a, d)], \tag{6}$$

wyrażającemi prawo rozdzielności. Dowiedziemy, że jedno z tych działań, a mianowicie w tym przypadku działanie Δ_1 jest przemiennościowe.

W tym celu w równaniu (5) zastąpmy c przez $\Delta_1 (c, d)$, a w równaniu (6) a przez $\Delta_1 (a, b)$, otrzymamy wtedy :

$$\Delta_2 [\Delta_1 (a, b), \Delta_1 (c, d)] = \Delta_1 [\Delta_2 \{a, \Delta_1 (c, d)\}, \Delta_2 \{b, \Delta_1 (c, d)\}],$$

$$\Delta_2 [\Delta_1 (a, b), \Delta_1 (c, d)] = \Delta_1 [\Delta_2 \{\Delta_1 (a, b), c\}, \Delta_2 \{\Delta_1 (a, b), d\}].$$

Strony pierwsze tych równań są równe sobie, a ztąd i drugie muszą być równe. Jest zatém :

$$\Delta_1 [\Delta_2 \{a, \Delta_1 (c, d)\}, \Delta_2 \{b, \Delta_1 (c, d)\}] = \Delta_1 [\Delta_2 \{\Delta_1 (a, b), c\}, \Delta_2 \{\Delta_1 (a, b), d\}].$$

Stronę pierwszą tego równania przekształcimy przy pomocy równania (6), stronę drugą przy pomocy równania (5); w ten sposób otrzymamy :

$$\Delta_1 [\Delta_1 \{\Delta_2 (a, c), \Delta_2 (a, d)\}, \Delta_1 \{\Delta_2 (b, c), \Delta_2 (b, d)\}] = \Delta_1 [\Delta_1 \{\Delta_2 (a, c), \Delta_2 (b, c)\}, \Delta_1 \{\Delta_2 (a, d), \Delta_2 (b, d)\}].$$

Z przyczyny, że działanie Δ_1 jest łącznościowém, równanie to daje się napisać w sposób następujący :

$$\Delta_1 \{\Delta_2 (a, c), \Delta_2 (a, d), \Delta_2 (b, c), \Delta_2 (b, d)\} = \Delta_1 \{\Delta_2 (a, c), \Delta_2 (b, c), \Delta_2 (a, d), \Delta_2 (b, d)\}.$$

Porównywając obie strony ostatniego równania, widzimy że one różnią się tylko porządkiem wyrazów. Jeżeli oznaczymy dla krótkości :

$$\Delta_2 (a, c) = p, \quad \Delta_2 (a, d) = q, \quad \Delta_2 (b, c) = r, \quad \Delta_2 (b, d) = s,$$

to otrzymamy :

$$\Delta_1 (p, q, r, s) = \Delta_1 (p, r, q, s).$$

Na zasadzie prawa łączności równanie to daje się napisać w ten sposób :

$$\Delta_1 \{\Delta_1 (p, q, r), s\} = \Delta_1 \{\Delta_1 (p, r, q), s\},$$

a ponieważ działanie Δ_1 jest jednowartościowe, wynika ztąd, że :

$$\Delta_1 (p, q, r) = \Delta_1 (p, r, q).$$

To ostatnie równanie daje się znów napisać :

$$\Delta_1 \{p, \Delta_1 (q, r)\} = \Delta_1 \{p, \Delta_1 (r, q)\},$$

ztąd zaś wynika, że :

$$\Delta_1 (q, r) = \Delta_1 (r, q),$$

co zgodnie z równaniem (1) [**II**] dowodzi przemienności działania Δ_1. Twierdzenie, któregośmy dowiedli, daje się wyrazić w ten sposób:

http://rcin.org.pl

Jeżeli dwa różne działania jednowartościowe i łącznościowe są związane z sobą prawem rozdzielności, to wtedy jedno z nich musi być przemiennościowém.

W podobny sposób możnaby dowieść, że działanie Δ_2 byłoby przemiennościowém, gdyby z założenia miały miejsce następujące związki :

$$\Delta_1 [\Delta_2 (a, b), c] = \Delta_2 [\Delta_1 (a, c), \Delta_1 (b, c)],$$

$$\Delta_1 [a, \Delta_2 (c, d)] = \Delta_2 [\Delta_1 (a, c), \Delta_1 (a, d)].$$

14. Utworzenie szeregu przedmiotów odwrotnych, odpowiadających danemu działaniu prostemu. — Przedmioty $a, b, c, \ldots$, nad któremi dotąd wykonywaliśmy działania, były to przedmioty jakiekolwiek, o których nie robiliśmy téż żadnych założeń, przypuszczając tylko, że działanie proste, wykonane na dwóch lub większéj liczbie przedmiotów daje wypadek, który w téj dziedzinie przedmiotów odszukać można.

Tak więc dziedzina przedmiotów $a, b, c, \ldots$, wedle naszego przypuszczenia zawiera wszystkie przedmioty, do jakich doprowadza działanie proste $\Delta (a, b)$, $\Delta (a, b, c)$, i t. d., lub jak wyżéj powiedziano działanie proste Δ, wykonane na dwóch lub większéj liczbie przedmiotów, doprowadza zawsze do przedmiotu, jaki się w téj dziedzinie znajduje.

Lecz to, co się powiedziało o działaniu prostém, nie daje się wprost rozciągnąć do działania odwrotnego. Z określenia bowiem działania odwrotnego nie wynika wcale że wypadek tego działania musi się znaleźć w naszéj dziedzinie przedmiotów. Z tego to powodu przedmioty powstałe przez działanie $\nabla (m, a)$, gdzie m jest zwrotnikiem działania, nazwaliśmy wyżéj odwrotnościami, nie rozstrzygając pytania, czy te odwrotności znajdują się w utworzonéj przez nas dziedzinie, czy nie.

Teraz właśnie mamy zamiar zająć się zbadaniem wypadków działania odwrotnego, zastosowanego do jakichkolwiek przedmiotów z naszéj dziedziny. Wedle określenia, działanie $\nabla (a, b)$ czyni zadość następującemu równaniu :

$$\Delta [\nabla (a, b), b] = a.$$

Zachodzi więc pytanie, czy zawsze w naszéj dziedzinie znajdzie się przedmiot, który połączony za pomocą działania prostego z przedmiotem b, daje na wypadek przedmiot a. Można tu zrobić dwa założenia : 1° przedmiot taki znajduje się w dziedzinie $a, b, c, \ldots$ 2° przedmiotu tego w dziedzinie naszéj nie ma. Jeżeli przedmiot taki znajduje się w naszéj dziedzinie, oznacza to, że działanie odwrotne doprowadza w tym przypadku do takiego samego wypadku, jak działanie proste między innemi przedmiotami. Jeżeli zaś tego przedmiotu nie ma, to będziemy uważali naszą dziedzinę za niezupełną, t. j. uważać będziemy, że nie ma w niéj wszystkich przedmiotów, jakie mogą być wypadkiem działania odwrotnego. Jeżelibyśmy ograniczyć się mieli tylko na uważaniu tych przedmiotów, które są wypadkiem działań prostych lub działań odwrotnych w pierwszym z uważanych teraz przypadków, w takim razie należałoby działania odwrotne w tym drugim przypadku nazwać niemożebnemi. Lecz niemożebność ta pochodziłaby oczywiście ztąd, że pierwotna nasza dziedzina nie zawiera wszystkich przedmiotów, jakie mogą być wypadkami połączeń.

Jeżeli tedy pierwotna dziedzina jest niezupełną, to należy wprowadzić do niéj przedmioty nowe, będące wypadkiem działań odwrotnych w tym przypadku, gdy odpowiedź na te działania nie znajduje się w pierwotnéj dziedzinie. Tak rozszerzoną dziedzinę pierwotną nazwiemy uzupełnioną.

Lecz tu nasuwa się znów okoliczność. Dotąd mieliśmy do czynienia tylko z przedmiotami dziedziny

http://rcin.org.pl

pierwotnéj i do niéj to stosowały się własności wyłożonych działań. W razie wprowadzenia do té dziedziny przedmiotów nowych, powstaje pytanie, w jaki sposób należy te przedmioty łączyć z dawnemi i pomiędzy sobą. Zasada zachowania uczy nas, jak należy postąpić w tym przypadku; według wymagań téj zasady, należy połączenie nowych przedmiotów z dawnemi i nowych pomiędzy sobą określić w ten sposób, aby one czyniły zadość tym samym formalnym własnościom, jakim czynią zadość działania na przedmiotach pierwotnych.

Gdy $\nabla(a, b)$, $\nabla(c, d)$ oznaczają przedmioty dawne, to stosując do nich równanie (6) [I] otrzymamy:

$$\Delta[\nabla(a, b), \nabla(c, d)] = \nabla[\Delta\{\nabla(a, b), c\}, d].$$

Na zasadzie równania (1) [II] i równania (6) [I], mamy:

$$\Delta\{\nabla(a, b), c\} = \Delta\{c, \nabla(a, b)\} = \nabla\{\Delta(c, a), b\},$$

a zatém:

$$\Delta[\nabla(a, b), \nabla(c, d)] = \nabla[\nabla\{\Delta(c, a), b\}, d].$$

Według równania (7) [I]:

$$\nabla[\nabla\{\Delta(c, a), b\}, d] = \nabla[\Delta(c, a), \Delta(d, b)],$$

a więc ostatecznie:

$$(7)\qquad \Delta[\nabla(a, b), \nabla(c, d)] = \nabla[\Delta(c, a), \Delta(d, b)].$$

To równanie przyjmujemy jako określenie połączenia prostego w tym przypadku, gdy jeden lub oba przedmioty $\nabla(a, b)$, $\nabla(c, d)$ są przedmiotami nowemi.

Z tego określenia wynika, że 1° działanie proste z nowemi przedmiotami jest przemiennościowém. W saméj rzeczy, stosując to równanie do przedmiotów $\nabla(c, d)$, $\nabla(a, b)$ otrzymujemy:

$$\Delta[\nabla(c, d), \nabla(a, b)] = \nabla[\Delta(a, c), \Delta(b, d)],$$

lecz ponieważ

$$\Delta(a, c) = \Delta(c, a) \text{ i } \Delta(b, d) = \Delta(d, b),$$

a zatém strony drugie ostatniego równania i równania (7) są sobie równe, a ztąd

$$\Delta\{\nabla(a, b), \quad \nabla(c, d)\} = \Delta\{\nabla(c, d), \quad \Delta(a, b\}).$$

2° Z tego określenia wynika także łącznościowość działań z nowemi przedmiotami.

W saméj rzeczy:

$$\Delta\{\Delta[\nabla(a, b), \nabla(c, d)], \nabla(e, f)\} = \Delta\{\nabla[\Delta(a, c), \Delta(b, d), \nabla(e, f)\}$$
$$= \nabla\{\Delta[\Delta(a, c), e], \Delta[\Delta(b, d), f]\} = \nabla\{\Delta(a, c, e), \Delta(b, d, f)\}.$$

Podobnież

$$\Delta[\nabla(a, b), \Delta\{\nabla(c, d), \nabla(e, f)\}] = \Delta[\nabla(a, b), \nabla\{\Delta(c, e), \Delta(d, f)\}]$$
$$= \nabla\{\Delta[a, \Delta(c, e)], \Delta[b, \Delta(d, f)]\} = \nabla\{\Delta(a, c, e), \Delta(b, d, f)\}.$$

Porównywając wyrażenia otrzymane po pierwszém i drugiém przekształceniu, widzimy że one są

http://rcin.org.pl

zupełnie równe, wnosimy ztąd, że i :

$$\Delta\{\Delta[\nabla(a, b), \nabla(c, d), \nabla(e, f) = \Delta\{\nabla(a, b), \Delta[\nabla(c, d), \nabla(e, f)]\},$$

co dowodzi prawa łączności.

Równanie (5), które przyjęliśmy za określenie działania prostego z przedmiotami nowemi, dowodzi, że to działanie proste daje taki sam wypadek, jaki daje połączenie odwrotne przedmiotów z dziedziny pierwotnéj. A ponieważ takie połączenie doprowadza już to do przedmiotów pierwotnych, już to do nowo wprowadzonych, a zatém wypadek takiego działania koniecznie musi się znaleźć w uzupełnionéj dziedzinie. Pozostaje rozstrzygnąć pytanie, czy i połączenie odwrotne przedmiotów nowych jest przedmiotem z uzupełnionéj dziedziny pierwotnéj i zobaczymy przy jakich warunkach to być może.

Niechaj $\nabla(a, b)$, $\nabla(c, d)$ oznaczają dwa nowe przedmioty wprowadzone do dziedziny pierwotnéj. Oznaczmy

$$\nabla[\nabla(a, b), \nabla(c, d)] = x,$$

gdzie x ma być przedmiotem z uzupełnionéj dziedziny, gdzie więc x można uważać jako wypadek działania $\nabla(y, z)$, przy czém y i z są przedmiotami z dziedziny pierwotnéj.

Łącząc obie strony powyższego równania z $\Delta(c, d)$ przy pomocy działania Δ, otrzymujemy wedle określenia działania prostego natępujący wypadek

$$\nabla(a, b) = \Delta\{x, \nabla(c, d)\} \text{ czyli } \nabla(a, b) = \Delta\{\nabla(y, z), \nabla(c, d)\}.$$

Druga strona tego równania, według równania (5), równa się $\nabla[\Delta(y, c), \Delta(z, d)]$, będzie zatém,

$$\nabla(a, b) = \nabla[\Delta(y, c)\Delta(z, d)].$$

Z jednéj strony mamy połączenie odwrotne dwóch przedmiotów a i b, z drugiéj połączenie odwrotne dwóch przedmiotów $\Delta(y, c)$ i $\Delta(z, d)$. Oba mają prowadzić do jednego wypadku. Dlatego winniśmy zbadać, przy jakich warunkach dwa działania odwrotne mogą być uważane za równe. W tym celu załóżmy, że zwrotnik działania posiada jednakową własność względem wszystkich przedmiotów uzupełnionéj dziedziny, t. j., że połączony nie tylko z dawnemi lecz i z nowo-wprowadzonemi przedmiotami, za pomocą działania prostego, daje na wypadek przedmiot, z którym został połączony. W tém założeniu wedle (5) mieć będzie miejsce następujące równanie :

$$\nabla[\Delta(a, u), \Delta(b, u)] = \Delta[\nabla(a, b), \nabla(u, u)],$$

gdzie u jest przedmiotem jakimkolwiek. Ponieważ $\nabla(u, u)$ równa się zwrotnikowi, a przedmiot $\nabla(a, b)$ połączony ze zwrotnikiem daje wedle założenia tenże sam przedmiot, a zatém

$$\nabla[\Delta(a, u), \quad \Delta(b, u)] = \nabla(a, b).$$

Te dwa połączenia będą równe, gdy weźmiemy

$$a = \Delta(a, u), \qquad b = \Delta(b, u).$$

W ogóle będzie

$$\nabla(e, f) = \nabla(g, h),$$

przy warunku :

$$g = \Delta(e, u), \qquad h = \Delta(f, u),$$

przy powyższém założeniu o własności zwrotnika.

http://rcin.org.pl

Stosując ten warunek do równania

$$\nabla(a, b) = \nabla[\Delta(y, c), \Delta(z, d)],$$

widzimy, że pierwsza strona może być równą drugiéj przy rzeczoném założeniu o własności zwrotnika i przy warunku

$$\Delta(y, c) = \Delta(a, u), \quad \Delta(z, d) = \Delta(b, u).$$

Aby odszukać przedmioty y i z czyniące zadość tym warunkom, połączmy obie strony pierwszego równania z c, drugiego z d przy pomocy działania ∇. Jako wypadek otrzymamy

$$y = \nabla[\Delta(a, u) c], \qquad z = \nabla[\Delta(b, u), d],$$

a stosując do drugich stron równania (6) [I], otrzymujemy :

$$y = \Delta[a, \nabla(u, c)], \qquad z = \Delta[b, \nabla(u, d)].$$

W tych równaniach u jest przedmiot jakikolwiek. Jeżeli w szczególności weźmiemy taki przedmiot u, aby $\nabla(u, c) = d$, t. j.

$$u = \Delta[\nabla(a, c), c] = \Delta(d, c).$$

to otrzymamy ztąd

$$\nabla(u, d) = \nabla[\Delta(d, c), d)] = \Delta[d, \nabla(c, d)] = \Delta[\nabla(c, d), d] = c.$$

Wstawiając te wartości w powyższe wzory, otrzymujemy

$$y = \Delta(a, d), \qquad z = \Delta(b, c).$$

Wypadki te pokazują, że rzeczywiście odszukać się dają przedmioty y i z, że więc przy założeniu powyższéj własności zwrotnika, wypadek działania odwrotnego między dwoma nowemi przedmiotami będzie postaci

$$x = \nabla(y, z) = \nabla[\Delta(a, d), \ \Delta(b, c)],$$

t. j. zawsze znajdzie się w uzupełnionéj dziedzinie pierwotnéj.

Tym sposobem wykazaliśmy, że uzupełniona dziedzina pierwotna jest wystarczającą i wtedy, gdy w zakres naszych badań włączymy działania odwrotne między nowemi przedmiotami, czyli innemi słowy, że ona mieści w sobie wszelkie możebne wypadki, jakie otrzymać można przy łączeniu wszystkich przedmiotów w skład jéj wchodzących.

Ponieważ w ten sposób wypadki działań z jakimikolwiek przedmiotami czy to pierwszéj czy drugiéj dziedziny prowadzą do przedmiotów, które się w tych dziedzinach znajdują, wynika ztąd więc, że wszystkie twierdzenia powyżéj wyłożone stosują się do przedmiotów obu rodzajów. Równania zatém (6), (7), (8) [I] stosują się do obu rodzajów przedmiotów.

Łatwo teraz wykazać, że wszystkie przedmioty nowo wprowadzone można otrzymać z szeregu mającego taką samą rozciągłość jak szereg przedmiotów pierwotnych, a mianowicie z odwrotności, o jakich mówiliśmy już wyżéj. W saméj rzeczy, wedle równania (13) [I] mamy

$$\nabla(a, c) = \Delta(a, c_m).$$

Jeżeli $\nabla(a, c)$ jest przemiotem nowym, to równanie to pokazuje, że każdy przedmiot nowy powstaje przez połączenie *proste* przedmiotu danego z odwrotnością drugiego przedmiotu, jeżeli więc

http://rcin.org.pl

utworzymy odwrotności przedmiotów dawnych odpowiadające działaniu Δ, to już wypadki wszystkich działań między przedmiotami téj dziedziny dadzą się otrzymać z szeregu odwrotności przez połączenie tychże z przedmiotami dawnemi (*).

15. Określenie czterech działań zasadniczych. — Niechaj będą dwa działania proste Δ_1 i Δ_2 łącznościowe i w ogólności jednowartościowe połączone ze sobą prawem rozdzielności. Zwrotnikiem pierwszego niechaj będzie przedmiot m_1, drugiego m_2. Wedle dowiedzionego wyżéj twierdzenia (n° 13), jedno z tych działań np. Δ_1 musi być przemiennościowém. Załóżmy, że zwrotnik działania przemiennościowego m_1 posiada następującą własność,

(8) $$\Delta_2(a,\ m_1) = \Delta_2(m_1,\ a) = m_1$$

niezależnie od wartości a. Przy takich warunkach działanie Δ_1 nazwiemy *dodawaniem*, działanie Δ_2 *mnożeniem*.

Te określenia pokazują, że dodawaniu odpowiada mnożenie i że tylko wspólne określenie obu działań jest możebném. Wedle tego dodawaniem nazywamy działanie proste, jednowartościowe, łącznościowe i przemiennościowe, którego zwrotnik połączony z jakimkolwiek przedmiotem przy pomocy innego działania prostego związanego z dodawaniem prawem rozdzielności, t. j. przy pomocy mnożenia, daje zawsze na wypadek zwrotnik dodawania.

Odpowiednie działania odwrotne mają także swoje nazwy. Działanie odwrotne dodawania nazywa się *odejmowaniem*, działanie odwrotne mnożenia nazywa się *dzieleniem*. Oznaczając te działania przez ∇_1 i ∇_2 otrzymujemy :

$$m_1 = \nabla_1(a,\ a), \qquad m_2 = \nabla_2(a,\ a),$$

zgodnie z rownaniem (12) [I].

Dla określonych w ten sposób czterech działań przyjmiemy następujące znakowania :

$$\Delta_1(a,\ b) = a + b, \qquad \Delta_2(a,\ b) = a\,.\,b = ab,$$

$$\nabla_1(a,\ b) = a - b, \qquad \nabla_2(a,\ b) = a : b = \frac{a}{b}\,.$$

$$m = 0,\ \ m = 1.$$

Przy tém znakowaniu równania (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11) i (12) [I] prowadzą do

---

(*) Jako przykład weźmy znów liczby rzeczywiste. Jeżeli α i β są jakiekolwiek liczby całkowite, to liczba $\alpha - \beta$ jest także liczbą całkowitą dodatną, i wtedy znajduje się w naszym szeregu, albo jest też nową liczbą, którą nazywamy liczbą odjemną. Ponieważ w tym przypadku zwrotnik 0 sprawdza warunek $0 + (\alpha - \beta) = \alpha - \beta$, odejmowanie liczb odjemnych $(\alpha - \beta) - (\gamma - \delta)$ nie doprowadza do żadnych nowych liczb. Przytém wypadek działania $\alpha - \beta$ jest zawsze postaci $-\lambda$, to jest sprowadza się do liczby odwrotnéj.

Podobnież jeżeli $\frac{\alpha}{\beta}$ jest pewną nową liczbą odpowiadającą dzieleniu, to ponieważ $1\,.\,\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, a zatém i dzielenie $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ nie doprowadza do nowych liczb. Daléj, podobnie jak wyżéj; każde działanie $\frac{\alpha}{\beta}$, w którém α i β są liczby całkowite, daje się sprowadzić do $\alpha\,.\,\frac{1}{\beta}$, w którém $\frac{1}{\beta}$ jest przedmiotem odwrotnym, t. j. ułamkiem.

http://rcin.org.pl

następujących związków :

$$(a-b)+b=a, \quad \ldots\ldots \quad \frac{a}{b}b=a;$$

$$(a+b)-b=a, \quad \ldots\ldots \quad \frac{ab}{b}=a;$$

$$a+b+c=a+(b+c)=a+b+c, \quad . \; . \quad abc=a(bc)=(ab)c;$$

$$a+(b-c)=(a+b)-c, \; . \; . \quad a\frac{b}{c}=\frac{ab}{c};$$

$$a-(c+b)=(a-b)-c, \; . \; . \quad \frac{a}{bc}=\frac{a}{b}:c;$$

$$(a+c)-b=a-(b-c), \; . \; . \quad \frac{ac}{b}=a:\frac{b}{c};$$

$$a+0=a, \quad \ldots\ldots \quad a\,.\,1=a;$$

$$0+c=c, \quad \ldots\ldots \quad 1\,.\,c=c;$$

$$a-0=a, \quad \ldots\ldots \quad \frac{a}{1}=a;$$

$$b-b=0, \quad \ldots\ldots \quad \frac{b}{b}=1.$$

Odwrotności przedmiotu a odpowiadające naszym działaniom określają się za pomocą równań :

$$\nabla_1(0, a)=0-a=-a \quad \text{i} \quad \nabla_2(1, a)=\frac{1}{a}.$$

Stosując teraz do naszych działań równania (13), (14), (15) i (16) [I] i równania (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) i (8) [II], otrzymujemy następujące związki :

$$a+(-c)=a-c, \quad \ldots \quad a.\frac{1}{c}=\frac{a}{c},$$

$$a+c=a-(-c) \quad \ldots \quad a.c=a:\frac{1}{c},$$

$$-(b-c)=c-b, \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)}=\frac{c}{b},$$

$$-(b+c)=-c+(-b), \; . \; . \quad \frac{1}{bc}=\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{b}.$$

Następujące cztery związki stosują się tylko do dodawania, jako do działania przemiennościowego :

$$a+b=b+a;$$

(m) $$b+(a-b)=a;$$

(n) $$(b+c)-b=c;$$

(p) $$a-(b-c)=(c-b)+a;$$

$$(a+b)c=ac+bc;$$

$$(a+d)=ac+ad;$$

$$(a-b)+(c-d)=(c+a)-(d+b), \quad \ldots \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ca}{db};$$

$$a\,.\,0=0\,.\,a=0.$$

http://rcin.org.pl

Ostatnie równanie pokazuje, że mnożenie w pewnym przypadku przedstawia szczególność, a mianowicie, że gdy jeden z czynników równa się zeru, wtedy drugi czynnik może się jakkolwiek zmieniać, a wypadek iloczynu pozostaje zawsze równym zeru. Wynika ztąd, że w tym przypadku działanie odwrotne, t. j. dzielenie nie jest oznaczoném. Z tego powodu możnaby w określeniu dzielenia pominąć jednowartościowość, jako konieczną cechę tego działania. Z tych równań wyprowadzimy niektóre wnioski. W równaniu:

$$(a+b)\,c = ac + bc,$$

które stosuje się do przedmiotów prostych i odwrotnych, połóżmy $b = -a$, otrzymamy wtedy:

$$[a + (-a)]\,c = ac + (-a)\,c;$$

$$0\,.\,c = ac + (-a)\,c;$$

$$0 = ac + (-a)\,c;$$

a ztąd:

$$(-a)c = -ac.$$

W równaniu:

$$a\,(c+d) = ac + ad,$$

kładąc $d = -c$, otrzymujemy:

$$a\,[c + (-c)] = ac + a\,(-c),$$

a ztąd:

$$a\,(-c) = -ac.$$

Z tych równań łatwo wyprowadzić następujące:

$$(-a)\,.\,(-c) = +ac.$$

Wyprowadziliśmy tym sposobem wzory na mnożenie przedmiotów odwrotnych odpowiadających dodawaniu. Wzory te są zgodne ze znaném prawidłem mnożenia znaków w arytmetyce ogólnéj. Widzimy, że w nauce o działaniach formalnych, wzory te wynikają z prawa rozdzielności.

Zbadajmy teraz zadanie o dodawaniu przedmiotów odwrotnych odpowiadających mnożeniu, którym to przedmiotom, jak wiadomo, w nauce o wielkościach odpowiadają ułamki. Z określeń naszych wynika:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) bd = \frac{a}{b}\,bd + \frac{c}{d}\,bd = ad + c\,\frac{1}{d}\,bd.$$

Strona druga nie może być uproszczoną z tego powodu, że nie przyjmujemy dotąd przemienności mnożenia. Z tego równania wypada:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + c\,\frac{1}{d}\,bd}{bd}.$$

Z równania

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) b = a + c,$$

otrzymujemy

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

Wzór na dodawanie ułamków daje się uprościć, gdy przyjmiemy, że mnożenie jest przemiennościowém, wtedy bowiem :

$$c\frac{1}{d}bd=c\frac{1}{d}db=cb;$$

a zatém :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}.$$

Przy tém założeniu będzie także

$$b\frac{a}{b}=a,\quad \frac{bc}{b}=c,\quad \frac{a}{(b:c)}=\frac{a}{b}c.$$

które to równania odpowiadają równaniom (m), (n), (p), odnoszącym się do dodawania.

Uwaga. — Cztery działania formalne, których teoryę wyłożyliśmy, są utworzone na wzór czterech działań arytmetycznych w nauce o wielkościach z pewną swobodą, mianowicie ze względu na prawo przemienności. Prawa tych działań stosować będziemy w dalszym ciągu naszéj pracy do liczb zwanych urojonemi, do liczb powstających z uważania elementów przestrzennych i. t. d., co właśnie stanowić będzie jedno z zastosowań nieraz już wspomnianego przez nas prawa zachowania. Opiszemy tu według Hankla sposób postępowania jakiego w tych razach w ogóle trzymać się należy.

Gdy dana jest pewna dziedzina przedmiotów, pytamy przedewszystkiém, czy można do niéj stosować działanie mające własności dodawania, albo innemi słowy, pytamy, jak określić dodawanie przedmiotów téj dziedziny? Oznaczonéj metody na odszukanie odpowiedzi w tym razie nie ma; jedyną kierowniczką w tych razach jest zasada zachowania. Gdy kierując się tą zasadą, potrafimy znaleźć działanie mające zasadnicze własności dodawania, to przedewszystkiém należy określić mnożenie odpowiadające temu dodawaniu, gdyż jak wiadomo, dodawanie wtedy dopiero może nosić właściwą swą nazwę, gdy istnieje mnożenie połączone z niém prawem rozdzielności. Mnożenie znajdziemy, badając, czy do przedmiotów naszego szeregu da się zastosować działanie posiadające zasadnicze własności mnożenia. Gdy ta próba doprowadzi do pożądanego rezultatu, wtedy należy odwrotnie na drodze syntetycznéj wykazać, że działanie określone w ten sposób posiada i inne ogólne własności mnożenia.

Widzimy, że w tego rodzaju poszukiwaniach istnieje pewnego rodzaju dowolność. W istocie téż tak być powinno, albowiem istnieć mogą rozmaite działania czyniące zadość tym samym formalnym prawidłom.

http://rcin.org.pl

ROZDZIAŁ II.

O układach liczb w ogóle i o liczbach rzeczywistych.

III. — OKREŚLENIE UKŁADU LICZB.

16. — Dotąd łączyliśmy z sobą przedmioty nie zwracając uwagi na ich istotę, oznaczaliśmy wypadki tych połączeń pewnemi znakami i zajmowaliśmy się własnościami formalnemi połączeń. Lecz przy oznaczaniu wypadków połączeń za pomocą znaków, nie kierowaliśmy się żadnym z góry określonym planem, szło nam bowiem głównie o badanie własności działań, nie zaś o układanie wypadków tychże wedle tego lub owego porządku. Takie porządkowanie było dotąd niemożebném, a to z powodu, że działań w istocie nie wykonywaliśmy, a przeto nie byliśmy też w stanie porównywać wypadków tych działań pod względem porządku.

Zestawienie wypadków działań stanie się możliwém po przyjęciu pewnych danych, na których ono oprzećby się mogło. W tym celu trzeba przedewszystkiém za punkt wyjścia przyjąć pewne elementy czyli jednostki. Te jednostki należy z sobą łączyć za pomocą *pewnych* działań i wypadek tych działań wyobrażać znakami. Otrzymane wypadki należy znów ze sobą łączyć za pomocą tychże działań, co nam posłuży do utworzenia nowych znaków. W ten sposób postępując dalej, będziemy tworzyli coraz nowe znaki, dopóki nie okaże się, że działania, jakie wciąż stosujemy, prowadzą tylko do takich wypadków, dla których odpowiednie wyobrażenie może się już dać utworzyć z otrzymanych poprzednio znaków. Szereg znaków będzie wtedy zamknięty i utworzy tak nazwany *układ* znaków, odpowiadający wybranym elementom i działaniom, które posłużyły do jego utworzenia.

Jasną jest rzeczą, że wziąwszy za podstawę inne jakiekolwiek jednostki, że wybierając do utworzenia układu te lub inne działania, a raczéj dołączając do własności działań użytych do utworzenia układu coraz inne własności, niepozostające z poprzedniemi w sprzeczności, lubo w określeniu działań nie zawarte, utworzyć możemy rozmaite układy czyniące zadość naszym potrzebom. W każdym razie tworzenie znaków prowadzić należy, jak rzekliśmy tak długo, dopóki działania nie doprowadzają do wypadków dających się wyobrazić przy pomocy utworzonych znaków. Przyczém należy mieć na uwadze, by zbytecznéj liczby znaków nie wprowadzać; im bowiem mniéj będzie istotnie różnych znaków, tym prostszy będzie układ, i tém łatwiéj będzie go można użyć w każdym szczególnym przypadku.

Znaki takiego układu nazwiemy *liczbami*. Wyłożony sposób tworzenia liczb pokazuje, że pojęcie liczby jest w ścisłym i koniecznym związku z pojęciem działań użytych do utworzenia układu. Wybierając bowiem do utworzenia układu działania z innemi własnościami zasadniczemi, otrzymujemy, jak już wspomnieliśmy, inny układ, a więc i inne liczby.

To określenie pojęcia liczby uważa Hankel za jedynie możebne określenie liczby formalnéj. Zdaniem jego każde inne określenie nie może się obyć bez pomocy doświadczenia, które może pozostawać tylko w wypadkowym, a niekoniecznym związku z pojęciem matematyczném, a jako ograni-

http://rcin.org.pl

czone musi stawiać przeszkody na drodze ogólnego badania. Hankel takie tedy daje określenie liczby formalnéj :

Liczba jest wyrażeniem pewnych formalnych zależności przedmiotów od siebie; układ liczb przedstawia systematycznie uporządkowany szereg takich zależności lub połączeń stanowiących właściwy jego charakter.

Określenie to nie jest sprzeczném z określeniem podaném we wstępie. Tam szło o liczby istotne, tu idzie o liczby formalne. Łatwo pojąć, że pierwsze muszą się zawierać w określeniu ostatnich. I tak jest w saméj rzeczy. Liczby istotne (aktualne) są wyrazem takiéj zależności między przedmiotami, któréj źródło leży w pojęciu wielkości lub następstwa; liczby formalne są wyrazem zależności ogólnéj; zależności formalnéj, nieograniczonéj ani pojęciem wielkości ani porządku.

Podawszy takie określenie liczb formalnych, zajmiemy się przedewszystkiém utworzeniem układu liczb, przyjmując za podstawę jeden element czyli jednostkę i biorąc do utworzenia układu te działania formalne, których teoryę wyłożyliśmy w poprzednim rozdziale. W ten sposób utworzymy układ liczb rzeczywistych formalnych.

IV. — LICZBY RZECZYWISTE FORMALNE.

17. **Liczby całkowite dodatne.** — Za jednostkę układu przyjmijmy zwrotnik mnożenia, który oznaczmy przez 1, a do utworzenia układu użyjmy najprzód dodawania. Przyjmując dodawanie nie można użyć zwrotnika jego jako jednostki, gdyż z powodu znanéj jego własności, nie otrzymalibyśmy w tym razie żadnych liczb. Liczby nasze tworzymy w sposób następujący :

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \quad 3 + 1 = 4 \ldots.$$

każda następna liczba powstaje przez dodanie jednostki do liczby następnéj. Liczby tak utworzone nazwijmy bezwzględnemi.

Zobaczmy w jaki sposób łączyć się dadzą liczby tego szeregu. Połączenia te w ogóle odbywać się mogą według prawideł, których wybór od nas zależy. Wybieramy zatém ogólne prawidła wyłożone w poprzednim rozdziale. Lecz ponieważ liczby, z jakiemi teraz działać będziemy, noszą na sobie ślad swego powstania, t. j. nie są już zupełnie dowolnemi przedmiotami, wynika więc ztąd, że owe prawidła dopiero wtedy stosować będzie można w całéj obszerności, gdy się okaże, że takie stosowanie jest możebném, t. j. że ono nie pozostaje w sprzeczności z charakterem tych liczb zależnym od sposobu ich utworzenia. Z tego względu określać będziemy działania najprzód w szczególnych przypadkach, przyczém okaże się, że z tych szczególnych określeń wynikają już wszystkie własności działań, czyli że te szczególne określenia są wystarczającemi.

Dodawanie. — Summę dwóch liczb $(A + B)$ określamy za pomocą równania :

$$A + (B + 1) = (A + B) + 1, \tag{1}$$

wyrażającego szczególny przypadek prawa łączności. Równanie to określa każdą summę i z niego dają się otrzymać wszystkie liczby naszego szeregu. Albowiem, kładąc najprzód $B = 1$, mamy :

$$A + (1 + 1) = (A + 1) + 1, \quad \text{czyli} \quad A + 2 = (A + 1) + 1.$$

Gdy więc $A + 1$ jest liczbą naszego szeregu, to i $A + 2$ jest także liczbą tegoż szeregu. Kładąc

http://rcin.org.pl

$B = 2$, mamy:

$$A + (2 + 1) = (A + 2) + 1 \quad \text{czyli} \quad A + 3 = (A + 2) + 1;$$

a więc $A + 3$ jest także liczbą naszego szeregu, i t. d.

Z tego równania wynika, że summa dwóch liczb jest zawsze jednowartościową i zmienia się, gdy zmieniamy którąkolwiek z liczb A i B.

Wykażemy teraz, że z określenia (1) wynikają wszystkie formalne własności dodawania. Przedewszystkiém dowiedziemy prawa łączności. W tym celu załóżmy, że przy pewném znaczeniu liczby C jest:

(2) $$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Na zasadzie równania (1) mamy:

$$A + \{(B + C) + 1\} = \{A + (B + C)\} + 1,$$

a gdy na stronie drugiéj w miejsce pierwszego wyrazu podstawimy jego wartość z równania (2) i następnie do strony drugiéj zastosujemy określenie (1), otrzymamy:

$$A + \{(B + C) + 1\} = (A + B) + (C + 1),$$

co dowodzi, że jeżeli równanie (2) jest prawdziwém dla pewnego znaczenia C, to jest także prawdziwém dla $C + 1$; a ponieważ z założenia ma miejsce dla $C = 1$, jest zatém ogólnie prawdziwém.

Dowiedziemy teraz prawa przemienności. Założywszy:

(3) $$1 + A = A + 1,$$

łatwo okażemy przy pomocy równania (1), że:

$$1 + (A + 1) = (A + 1) + 1,$$

co dowodzi, że równanie (3) jest ogólnie prawdziwe, gdyż oczywiście sprawdza się dla $A = 1$. Daléj, założywszy:

(4) $$A + B = B + A,$$

dowiedziemy przy pomocy równań (1) i (3), że:

$$A + (B + 1) = (B + 1) + A,$$

zkąd wynika, że równanie (4) jest ogólnie prawdziwém, gdyż wedle równania (3) ma miejsce dla $B = 1$.

Mnożenie. — Jestto działanie związane z dodawaniem prawem rozdzielności. Określimy je za pomocą równań:

(5) $$A \cdot 1 = A;$$

(6) $$A(B + 1) = AB + A.$$

Z tych określeń wynikają wszystkie formalne własności mnożenia. Podstawiając w równaniu (6) kolejno: $B = 1$, $B = 2, \ldots\ldots$, otrzymamy:

$$A \cdot 2 = A + A, \quad A \cdot 3 = A \cdot 2 + A, \ldots\ldots$$

http://rcin.org.pl

co dowodzi, że iloczyn jest jednowartościowy i zmienia swą wartość, gdy *drugi* czynnik zmienia takową.

By dowieść ogólnie prawa rozdzielności, załóżmy, że równanie:

(7) $$A(B+C)=AB+AC$$

ma miejsce dla pewnego C. Jeżeli w miejsce C weźmiemy $C+1$ i do strony drugiéj zastosujemy kolejno równania (6), (7), (6), otrzymamy:

$$A\{B+(C+1)\}=AB+A(C+1).$$

Ponieważ, prócz tego, równanie (7) jest wedle (6) prawdziwém dla $C=1$, jest zatém ogólnie prawdziwém.

W podobny sposób można dowieść ogólności równania:

(8) $$(A+B)C=AC+BC,$$

stosując do iloczynu $(A+B)(C+1)$ kolejno równania: (6), (8), (4), (6).

By dowieść prawa łączności wyrażającego się równaniem

(9) $$A(BC)=(AB)C,$$

stosujemy do iloczynu $A\{B(C+1)\}$ równania: (6), (7), (9), (6), przezco otrzymujemy:

$$A\{B(C+1)\}=AB(C+1),$$

co wraz z równaniem $A(B.1)=AB.1$ dowodzi ogólności równania (9).

Założywszy teraz

(10) $$1.A=A,$$

można okazać łatwo na zasadzie równań (6), (10), (6), że

$$1.(A+1)=A+1;$$

i podobnież założywszy:

(11) $$AB=BA,$$

dowieść można na zasadzie równań (8), (11), (9), że:

$$(A+1)B=B(A+1);$$

a ponieważ równania (10) i (11) są widocznie prawdziwemi dla $A=1$, wyrażają zatém ogólnie prawo przemienności.

Jeżeli przez 0 oznaczymy zwrotnik dodawania, t. j. liczbę czyniącą zadość równaniu $A+0=A$, to będzie także $A.0=0$. Znaki 0, 1, 2, 3, ... dają układ liczb, wewnątrz którego działania posiadające charakterystyczne własności dodawania i przemiennościowego mnożenia, są zawsze wykonalne i nie doprowadzają do nowych liczb.

18. Liczby odjemne. — Oznaczmy przez $B-A$ liczbę czyniącą zadość równaniu

$$(B-A)+A=B.$$

http://rcin.org.pl

Z powodu jednowartościowości dodawania, liczba ta jest zupełnie oznaczoną. Zobaczmy teraz, czy zawsze znajdziemy ją w utworzonym przez nas szeregu liczb.

Z pojęcia dodawania wynika, że gdy w naszym szeregu B następuje po A, to liczba (B — A) jako liczba, która dodana do A daje B, istnieje w tym szeregu. Lecz gdy B znajduje się w szeregu przed A, to jak z pojęcia dodawania wynika, w szeregu naszym nie ma liczby, która dodana do A daje B. Widać ztąd, że w szeregu tym nie ma liczb, za pomocą których można oznaczać wypadki odejmowania w rozważanym obecnie przypadku. Z tego to powodu należy uważać B — A jako nową liczbę, i takiemi liczbami dopełnić szereg poprzednio utworzony. Jako określenie dodawania liczb nowych między sobą i nowych z dawnemi, przyjmijmy, zgodnie z zasadą zachowania, równanie

$$(A - B) + (C - D) = (C + A) - (D + B)\,; \tag{12}$$

połóżmy jeszcze

$$(A - B) = -(B - A). \tag{13}$$

Na zasadzie tego ostatniego równania, z liczb nowych utworzymy szereg :

$$-1,\ -2,\ -3,\ldots\ldots,$$

który dołączywszy do szeregu poprzedzającego, otrzymamy wszystkie liczby całkowite; wypadki dodawania i odejmowania tych liczb muszą się wszystkie znajdować w tak uzupełnionym szeregu arytmetycznym.

Mnożenie liczb dodatnych przez odjemne i odjemnych przez odjemne określamy za pomocą równań :

$$(-A)C = -AC,\quad A(-C) = -AC,\quad (-A)(-C) = AC, \tag{14}$$

utworzonych na wzór odpowiednich równań rozdziału poprzedzającego.

Z tych określeń wynikają prawa przemienności, rozdzielności i łączności mnożenia tych nowych liczb, co łatwo dowieść się daje przy pomocy wyżéj użytéj metody.

19. Liczby ułamkowe. — Niech będzie równanie :

$$xB = A,$$

w którém A i B są liczby całkowite dodatne lub odjemne. Rozwiązanie tego równania oznaczmy przez

$$x = \frac{A}{B}.$$

Liczba zadość czyniąca temu równaniu może się znajdować w szeregu liczb całkowitych dodatnych i odjemnych. W przypadku zaś, w którym nie ma liczby całkowitéj dodatnéj lub odjemnéj, która pomnożona przez B daje A, należy $\frac{A}{B}$ uważać za nową liczbę i dopełnić takiemi liczbami nasz szereg, by w nim mogła znaleźć się odpowiedź w każdym razie na pytanie wyrażone powyższém równaniem.

Mnożenie tych nowych liczb określamy, zgodnie z zasadą zachowania działań, za pomocą równania:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D} = \frac{AC}{BD},$$

http://rcin.org.pl

Z tego określenia wynika :

$$\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)BD=AD+CB;$$

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+CB}{BD};$$

$$\frac{A}{B}+\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right)=\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)+\frac{E}{F};$$

co dowodzi, że do ułamków stosować należy inne formalne własności działań z liczbami całkowitemi.

Wszystkie liczby ułamkowe wyprowadzić się dają z szeregu liczb postaci $\frac{1}{B}$.

Tym sposobem układ nasz składa się teraz z liczb całkowitych i ułamkowych, dodatnych i odjemnych.

20. Liczby niewymierne. — Zachodzi pytanie, czy układ nasz jest już zupełnym ? Łatwo zrozumieć, że jest on zupełnym o tyle, o ile powyżéj wyłożone cztery działania dają się wewnątrz niego wykonywać, t. j. że nie ma takiego wypadku tych działań, który nie dałby się wyrazić za pomocą jednéj z liczb układu.

Istnieją jednak takie zadania, na które w naszym układzie rozwiązania nie ma. Gdybyśmy zadali sobie pytanie wyrażone równaniem $xx=2$, lub téż $xx=-1$, to w naszym układzie nie moglibyśmy odszukać żadnéj liczby czyniącéj zadość tym równaniom. We wstępie do niniejszéj pracy dostatecznie wyjaśniliśmy, że nie można twierdzić, by liczba czyniąca zadość któremukolwiek z dwóch powyższych równań była niemożebną. Z tego powodu należy dla liczb w ten sposób określonych, a nie znajdujących się w naszym szeregu, utworzyć nowe znaki.

Weźmy równanie $xx=A$, gdzie A jest jedną z liczb dodatnych. Jeżeli w naszym szeregu nie ma liczby zadość czyniącéj temu równaniu to x będzie nową liczbą, którą oznaczmy przez $\sqrt{A}$, zachowując to oznaczenie i dla przypadku, w którym liczba x znajduje się w naszym szeregu. W przypadku, gdy jéj w szeregu liczb całkowitych i ułamkowych nie ma, nazywamy ją liczbą niewymierną, i określamy za pomocą równania

$$\sqrt{A}\,\sqrt{A}=A.$$

Powstaje teraz pytanie, jak pojmować należy działania z temi nowemi liczbami i połączenia nowych liczb z dawnemi. Powyższe równanie określa jednę własność mnożenia. Wybór innych własności i określenie pozostałych działań zależy tu, jak i gdzie indziéj, od woli naszéj, byleby wyborem tym kierowała zasada zachowania, która każe nam działania te określać w ten sposób, aby prawidła ich mogły się utrzymać w przypadku, gdy A jest zupełnym kwadratem.

Po zbadaniu czterech działań z temi nowemi liczbami, nasuwają się znowu nowe pytania, np. pytanie jakie liczby czynią zadosyć równaniu $xx=\sqrt{A}$. Jako odpowiedź na to pytanie trzebaby przyjąć nowe liczby niewymierne, utworzyć dla nich nowe znaki, określić działania z niemi i poprzedni nasz układ dopełnić przez włączenie do niego tych nowych liczb.

Widać ztąd, że gdy rzecz tę w ten sposób daléj prowadzić będziemy, ciągle nasuwać się nam będą nowe pytania i ciągle potrzeba będzie wprowadzać nowe liczby. Nic nie pokazuje nam z góry, czy to

http://rcin.org.pl

wprowadzanie nowych liczb ma swą granicę, czy wszystkie nowe liczby, jakie tworzyć będziemy są rzeczywiście nowemi, czy téż dadzą się sprowadzić do liczb już utworzonych. Tego pytania w formalnéj matematyce rozstrzygnąć nie można, a raczéj w nauce téj tworzenie liczb niewymiernych może trwać bez końca. Lecz jest rzeczą oczywistą, że dalsze poszukiwania nie mogą dać już istotnie nowego materyału. Stajemy w miejscu, gdzie czuć się daje wyraźna potrzeba przywiązania szeregu liczb do jakiegoś substratu, czyli innemi słowy, okazuje się potrzeba nadania charakteru aktualnego zależności pomiędzy przedmiotami, która dotąd miała charakter czysto formalny. Jedném słowem, stajemy na granicy, na któréj okazuje się potrzeba przejścia od nauki formalnéj do nauki o wielkościach.

21. Liczby rzeczywiste w naukach o wielkościach. — Niechaj będą dwie wielkości jednorodne a i b. Pod nazwą ich summy rozumiemy nową wielkość c, która się składa z jednéj i drugiéj. Summę tę oznaczymy przez $a+b$. Z tego pojęcia o dodawaniu wynikają równania :

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

$$a+b=b+a,$$

które pokazują, że dodawanie wielkości posiada własność powyżéj przez nas wyłożonego formalnego dodawania.

Niechaj j oznacza pewną wielkość, którą nazwijmy jednostką. Z wielkości téj utwórzmy szereg innych w sposób następujący,

$$j,\ j+j,\ j+j+j,\ j+j+j+j,\ \ldots\ldots$$

i oznaczmy te wielkości tak :

$$1j+1j=2j,$$

$$2j+1j=3j,$$

$$3j+1j=4j,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha j+1j=(\alpha+1)j.$$

Do szeregu spółczynników $1, 2, 3, \ldots\ \alpha$, które są liczbami całkowitemi dodatnemi, stosują się, jak to wykazać łatwo można na zasadzie sposobu ich powstania, wszystkie własności liczb całkowitych formalnych.

Jeżeli damy sobie równanie

$$\xi b=a,$$

w którém pytamy ile razy należy powtórzyć wielkość b by otrzymać wielkość a, i położymy $a=\alpha j$, $b=\beta j$, gdzie α i β są liczby całkowite, to otrzymamy

$$\xi(\beta j)=\alpha j.$$

Jeżeli ξ jest także liczbą całkowitą, wtedy $\xi(\beta j)=\xi\beta j$ i otrzymujemy równanie,

$$\xi\beta=\alpha,$$

które pokazuje, że szukana liczba równa się ilorazowi powstałemu z podzielenia liczby α przez liczbę β. Ta liczba znajduje się w szeregu $1, 2, 3\ldots\ldots\ \alpha, \ldots\ldots$ Jeżeli jednak równaniu $\xi\beta=\alpha$, nie czyni

http://rcin.org.pl

zadość żadna z liczb tego szeregu, wtedy zachowując dla tego przypadku oznaczenie $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$, mieć będziemy

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) b = a\,.$$

Liczba $\frac{\alpha}{\beta}$ jest liczbą ułamkową; zobaczymy co oznacza $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) b$. Jednostkę j, z któréj utworzyliśmy wielkości $1j, 2j, 3j, \ldots\ldots$ podzielmy na β części, i niechaj $\frac{1}{\beta} j$ oznacza jędną taką część; będzie zatém $\beta\left(\frac{1}{\beta}\right) j = \beta \frac{1}{\beta} j = j$, a ztąd $\beta \frac{1}{\beta} = 1$. Zgodnie z powyższém $\alpha\left(\frac{1}{\beta} j\right)$ oznaczać będzie α razy wziętą β^{ta} część wielkości j. A ponieważ jest rzeczą jasną, że biorąc β^{ta} część α razy wziętéj wielkości j, dochodzimy do tego samego wypadku, więc

$$\alpha\left(\frac{1}{\beta} j\right) = \frac{1}{\beta}\left(\alpha j\right).$$

Pierwszą i drugą stronę oznaczamy po prostu przez $\frac{\alpha}{\beta} j$. Ponieważ więc

$$\frac{\alpha}{\beta} b = \frac{\alpha}{\beta} (\beta j) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \beta\right) j = \alpha j = a,$$

a zatém równanie $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) b = a$ oznacza, że powtórzywszy α razy β^{ta} część wielkości b, otrzymujemy wielkość a.

Dotąd przypuszczaliśmy że $a = \alpha j$, $b = \beta j$, t. j. że każda z wielkości a i b jest wielokrotnością jednéj i téj saméj jednostki j, czyli innemi słowy, że wielkości a i b są współmierne.

W tym przypadku rozwiązaniem równania $\xi b = a$, jest liczba całkowita lub ułamkowa. Lecz w przypadku gdy b i a nie są wielokrotnościami jednéj jednostki, t. j. gdy nie mają wspólnéj miary, wtedy nie ma ani liczby całkowitéj ani ułamkowéj czyniącéj zadość temu równaniu. W tym przypadku jednak można zawsze wyznaczyć dwie liczby całkowite μ i ν takie, że różnica $\frac{\mu}{\nu} b - a$ będzie mniejszą od każdéj jakiéjkolwiek małéj wielkości. W tym razie działanie wyrażone liczbą ξ różnić się będzie od działania wyrażonego liczbą $\frac{\mu}{\nu}$ tak mało, jak zechcemy. Liczba ξ w tym przypadku nazywa się liczbą *niewymierną*, i oznaczymy ją w naszym przypadku przez $\frac{a}{b}$.

W tym przykładzie dzielenie wielkości niewspółmiernych doprowadziło do liczb niewymiernych. Istnieją jak wiadomo i inne działania, które doprowadzają do liczb niebędących ani całkowitemi ani ułamkowemi. Lecz jeżeli w tych razach potrafimy znaleźć liczbę wymierną, czyniącą zadość zadaniu z dowolném przybliżeniem, wtedy uważać będziemy, że zadaniu naszemu czyni zadość liczba niewymierna która, jak w poprzednim przykładzie liczba ξ, wyrażać będzie działanie dowolnie mało różniące się od pewnego działania $\frac{\mu}{\nu}$. W ten sposób dowieść można, że do liczb niewymiernych stosują się te same prawidła działań, co i do liczb wymiernych.

http://rcin.org.pl

Wyłożymy wreszcie sposób powstania liczb odjemnych w nauce o wielkościach. Jeżeli damy sobie do rozwiązania pytanie wyrażone równaniem,

$$x + b = a,$$

lub też równaniem

$$\xi j + \beta j = \alpha j,$$

to oczywiście, gdy $\alpha > \beta$, zadanie to jest zawsze rozwiązalne i wypadek jego oznaczamy

$$x = a - b.$$

Różnica x, t. j. ξj, daje się otrzymać przez istotne odjęcie wielkości b od wielkości a. Lecz gdy wielkość b zawiera więcéj jednostek aniżeli a, to z natury rzeczy wynika, że takie odjęcie jest niemożebném. Tak więc działanie jest niemożebném o tyle, o ile j oznacza pewną substancyę. Lecz jeżeli jednostka j, o któréj nie robiliśmy żadnych założeń, oznacza tylko pewnego rodzaju zależność lub stosunek między przedmiotami, wtedy można pomyśleć zależność wprost przeciwną, a mianowicie w ten sposób, że α krotne powtórzenie jednostki j i α krotne powtórzenie przeciwnéj jednostki wzajemnie się znoszą, t. j. wyrażają stosunek jakiéjś wielkości do saméj siebie. Tę nową jednostkę nazwijmy odjemną i oznaczmy ją przez $(-j)$; pierwotną jednostkę nazwijmy dodatną i oznaczmy przez $(+j)$.

Po wprowadzeniu jednostki odjemnéj, równanie $x + b = a$, daje się już rozwiązać w każdym przypadku. Gdy $a > b$ mieliśmy $x = a - b$, lub $\xi j = (\alpha - \beta)j = \alpha j - \beta j$. Gdy $a < b$, będzie $x = \alpha j + \beta(-j)$. Jeżeli chcemy aby $x = \alpha j - \beta j$ dawało ogólny kształt rozwiązania w każdym przypadku, należy przyjąć, że $\beta(-j) = -\beta j = (-\beta)j$. W ostatniém wyrażeniu $(-\beta)$ jest liczbą odjemną. W tém założeniu $x = (\alpha - \beta)j$ jest ogólném rozwiązaniem zadania, przyczém różnica $\alpha - \beta$ posiada wszystkie formalne własności wyłożone w ustępie n° 18.

22. System działań w Geometryi Euklidesa. — Pod nazwą odcinka rozumiemy długość ograniczonéj linii prostéj. Jeżeli przez a i b oznaczymy dwa takie odcinki, wtedy summę ich $a + b$ stanowić będzie odcinek, który powstaje, gdy do odcinka a przyłożymy odcinek b w ten sposób, by oba znajdowały się na jednéj linii prostéj, jeden zewnątrz drugiego, stykając się tylko końcami. Ztąd wynika wprost:

$$a + b = b + a,$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Tak więc dodawanie odcinków jest łącznościowém i przemiennościowém.

Różnicą dwóch odcinków a i b nazywamy odcinek $c = a - b$, który powstaje gdy na a oddzielimy część równą odcinkowi b. Działanie $a - b$ jest niemożebném w przypadku gdy $a < b$.

Rzeczonym dwom działaniom (dodawaniu i odejmowaniu) będzie można ostatecznie nadać powyższe nazwy, gdy określimy mnożenie odcinków.

Pod nazwą iloczynu dwóch odcinków a i b rozumiemy powierzchnię prostokąta, którego bokami przyległemi są a i b. Z tego określenia wynika:

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad (a + b)c = ac + bc, \qquad ab = ba.$$

Pokażemy jeszcze, że mnożenie jest łącznościowém. W naszym systemie $(ab)c$ przedstawia ob-

http://rcin.org.pl

ętość równoległościanu prostego i prostokątnego, którego krawędziami przyległemi są a, b, c. Wynika więc ztąd:

$$a(bc) = (ab)c = abc.$$

Iloczyn czterech odcinków nie ma już znaczenia geometrycznego.

Co teraz rozumieć należy przez iloraz $\frac{a}{b}$ dwóch odcinków? Iloraz $\frac{a}{b}$ winien zadość czynić następującemu równaniu:

$$\frac{a}{b}b = a;$$

nie może zatém nic innego oznaczać jak zwiększenie lub zmniejszenie odcinka b, by się stał równym odcinkowi a. Z tego powodu $\frac{a}{b}$ jest już liczbą a nie odcinkiem, nie jest więc już wielkością należącą do naszego układu.

Jeżeli wyobrazimy sobie wszystkie odcinki, które powstały z jednego przez powtórzenie lub dzielenie, to można położyć $a = \alpha j$, gdzie α jest liczbą wymierną. Oprócz tych odcinków istnieją inne niewspółmierne z j, a które dadzą się przedstawić także przez αj, gdzie α jest liczbą niewymierną. W ogóle łatwo pokazać, że działania z odcinkami dają się zastąpić odpowiedniemi działaniami z liczbami.

Tak więc układ liczb rzeczywistych dodatnych ze swemi działaniami, w zupełności zastąpić może cały system odcinków i działań nad niemi.

ROZDZIAŁ III.

Liczby urojone zwyczajne.

---

23. I. Działania formalne nad liczbami urojonemi zwyczajnemi. — Łatwo widzieć, że żadna liczba rzeczywista, całkowita czy ułamkowa, dodatna, czy odjemna, wymierna, czy niewymierna nie czyni zadość równaniu

(1) $$x^2 = -1.$$

Dla rozwiązania więc tego równania musimy wprowadzić do matematyki nowy element, nową liczbę, określoną témże równaniem (1). Liczbę tę nazywamy *jednością urojoną* i oznaczamy przez i. Dla otrzymania praw, jakim w połączeniach nowa liczba podlega, posługujemy się zasadą zachowania praw działań.

Ponieważ formalne połączenia nowych liczb dopuszczają pewną dowolność, więc dla scharaktery-

http://rcin.org.pl

zowania tych nowych liczb przyjmiemy przedewszystkiém, że ich połączenia z liczbami rzeczywistemi podlegają prawom łączności i przemienności wyrażonym przez równanie $(A+B)i = Ai + Bi = iA + iB$ (gdzie A i B są liczby rzeczywiste), tak że połączenie ich słusznie *iloczynem* nazwać możemy.

Oprócz powyższego przypuszczenia przyjmiemy jeszcze, że

$$A + Bi = Bi + A.$$

Przyjąwszy to ostatnie równanie, otrzymujemy układ nowych zupełnie oznaczonych liczb kształtu $A + Bi$. Liczby takie nazywamy *liczbami urojonemi*; w ciągu tego rozdziału oznaczać je będziemy przez $a_1, a_2, a_3, \ldots.$

Po wprowadzeniu tych liczb, musimy przedewszystkiém zbadać, czy do nich można zastosować działanie, któreby miało charakterystyczne własności dodawania. Wyżéj już przedstawiliśmy, że w przypadku dowolnych liczb złożonych nie ma ogólnéj metody, którąby dała odpowiedź na to pytanie, i że w każdym szczególnym przypadku należy się uciekać do rozmaitych założeń, kierując się przytém zasadą zachowania praw działań. W przypadku naszym summę dwóch liczb a_1, a_2 określimy równaniem :

$$a_1 + a_2 = (A_1 + B_1 i) + (A_2 + B_2 i) = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i.$$

Łatwo widzieć, że przy takiém określeniu summa podlega prawom przemienności i łączności, wyrażonym przez równania :

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1,$$
$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3) = a_1 + a_2 + a_3.$$

Jakoż

$$a_1 + a_2 = (A_1 + B_1 i) + (A_2 + B_2 i) = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i = (A_2 + A_1) + (B_2 + B_1)i = (A_2 + B_2 i)$$
$$+ (A_1 + B_1 i) = a_2 + a_1;$$

$$\{A_1 + B_1 i) + (A_2 + B_2 i)\} + (A_3 + B_3 i) = \{(A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i\} + (A_3 + B_3 i)$$
$$= [(A_1 + A_2) + A_3] + [(B_1 + B_2) + B_3]i = [A_1 + (A_2 + A_3] + [B_1 + (B_2 + B_3)]i$$
$$= (A_1 + A_2 + A_3) + (B_1 + B_2 + B_3)\, i.$$

Łatwo widzieć, że dodawanie ilości urojonych zwyczajnych jest działaniem jednowartościowém. Łatwo téż dowieść, że summa dwóch liczb urojonych zmienia się ze zmianą jednéj z nich.

Jakoż równanie

$$S + Ti = S_1 + T_1 i,$$

wtedy tylko jest możliwém, gdy $S = S_1$ i $T = T_1$, w przeciwnym bowiem razie musiałoby być

$$(S - S_1) + (T - T_1)i = 0,$$

zkąd

$$i = -\frac{S - S_1}{T - T_1}$$

$$i^2 = \left(\frac{S - S_1}{T - T_1}\right)^2$$

co nie mogłoby mieć miejsca.

http://rcin.org.pl

Określiwszy dodawanie liczb urojonych, musimy określić działanie, któreby można było nazwać *mnożeniem*.

Działanie to określamy równaniem :

$$(A_1 + B_1 i)(A_2 + B_2 i) = A_1 A_2 + A_1 B_2 i + B_1 A_2 i + B_1 B_2 ii.$$

Łatwo nam będzie dowieść, że mnożenie podlega prawu przemienności. Jakoż

$$a_1 a_2 = (A_1 + B_1 i)(A_2 + B_2 i) = A_1 A_2 + A_1 B_2 i + B_1 A_2 i + B_1 B_2 ii = A_2 A_1 + B_2 A_1 i + A_2 B_1 i + B_2 B_1 ii$$
$$= A_2 A_1 + A_2 B_1 i + B_2 A_1 i + B_2 B_1 ii = (A_2 + B_2 i)(A_1 + B_1 i) = a_2 a_1.$$

Ponieważ

$$(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) = [(A_1 + B_1 i) + (A_2 + B_2 i)][(A_3 + B_3 i) + (A_4 + B_4 i)]$$
$$= [(A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)i][(A_3 + A_4) + (B_3 + B_4)i] = (A_1 + A_2)(A_3 + A_4)$$
$$+ (A_1 + A_2)(B_3 + B_4)i + (B_1 + B_2)(A_3 + A_4)i + (B_1 + B_2)(B_3 + B_4)ii$$
$$= (A_1 A_3 + A_1 B_3 i + B_1 A_3 i + B_1 B_3 ii) + (A_1 A_4 + A_1 B_4 i + B_1 A_4 i + B_1 B_4 ii)$$
$$+ (A_2 A_3 + A_2 B_3 i + B_2 A_3 i + B_2 B_3 ii) + (A_2 A_4 + A_2 B_4 i + B_2 A_4 i + B_2 B_4 ii)$$
$$= a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4.$$

więc mnożenie liczb urojonych zwyczajnych podlega prawu zupełnéj rozdzielności liczb (§ 15).

Ponieważ według określenia

$$[(A_1 + B_1 i)(A_2 + B_2 i)](A_3 + B_3 i) = (A_1 A_2 + A_1 B_2 i + B_1 A_2 i + B_1 B_2 ii)(A_3 + B_3 i)$$
$$= A_1 A_2 A_3 + (A_1 B_2 A_3 + B_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 B_3) i + (A_1 B_2 B_3 + B_1 A_2 B_3 + B_1 B_2 A_3) ii + (B_1 B_2 B_3) iii$$

a iloczyn

$$(A_1 + B_1 i)[(A_2 + B_2 i)(A_3 + B_3 i)],$$

daje ten sam wypadek, więc mnożenie liczb urojonych zwyczajnych podlega téż prawu łączności, wyrażonemu przez równanie

$$(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3).$$

Z równania

$$(A_1 + B_1 i)(A_2 + B_2 i) = I + K i,$$

łatwo otrzymać równanie :

$$(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2) = I^2 + K^2,$$

które dowodzi, *że iloczyn dwóch liczb urojonych zwyczajnych może tylko być zerem, gdy jeden z jego czynników jest zerem.*

Z tego twierdzenia wypada, że iloczyn dwóch liczb urojonych zwyczajnych zmienia się ze zmianą jednego z czynników.

Jakoż z równania

$$a a_1 = a_2 a_1,$$

http://rcin.org.pl

w którém a_1 nie jest zerem, wypada

$$(a - a_2)a_1 = 0.$$

a tém samém $a = a_2$.

Z tego zaś wypada, że iloraz dwóch liczb urojonych zwyczajnych jest jednowartościowym, albowiem równanie

$$\frac{a}{a_1} = a_2,$$

pociąga za sobą drugie

$$a = a_1 a_2,$$

a zatém a_2 może tylko mieć jednę wartość. Jedyny wyjątek stanowi przypadek, gdy dzielnik $a_1 = 0$.

Z tego cośmy wyżéj dowiedli (nawet bez uciekania się do równania $ii = -1$) wypada, że prawa połączeń tych ilości są takie same, jak i dla liczb rzeczywistych. Natomiast nie trudno widzieć, że prawa liczb rzeczywistych aktualnych, wypadające z ich istotnego znaczenia jako wielkości nie mogą znaleźć zastosowania w układzie liczb urojonych; tak np. równanie $A^2 > 0$, prawdziwe dla ilości rzeczywistych, nie ma żadnego znaczenia, gdy ilość A jest urojoną.

Zajmiemy się teraz pytaniem niezmiernie ważném dla układu liczb urojonych zwyczajnych, a mianowicie zbadamy, czy i pod jakiemi warunkami równanie $x^2 + 1 = 0$, ma pierwiastki odmienne od $\pm i$? Hankel odpowiada na to pytanie w sposób następujący: Jeśli pierwiastkiem równania $x^2 + 1 = 0$ jest $+ i$, to rzecz oczywista, że $-i$ będzie téż pierwiastkiem tego równania, tak że otrzymamy tożsamość

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i),$$

lecz nic nam nie przeszkadza przyjąć, że równanie to ma jeszcze inne pierwiastki λ, λ_1, λ_2 ..... tak że

$$\lambda^2 = -1, \qquad \lambda_1^2 = -1, \qquad \lambda_2^2 = -1 .....$$

Liczby te, które nazwać możemy jednostkami urojonemi, wtedy tylko nabywają znaczenia formalnego, gdy podane będą prawa działań, jakie nad niémi wykonywać można. Otóż przyjąwszy nawet, że ilości te, które oznaczymy przez x, w połączeniach z liczbą i podlegają prawu rozdzielności wyrażonemu przez

$$(x + i)(x - i) = xx + ix - xi - ii,$$

i prawu przemienności $xi = ix$ (tak że $(x + i)(x - i) = x^2 + 1$), nie możemy jeszcze twierdzić, że jedynemi pierwiastkami równania $x^2 + i = 0$, są liczby $\pm i$, gdyż do tego trzeba, by oprócz powyższych dwóch praw, miał jeszcze miejsce warunek, *że iloczyn dwóch liczb wtedy tylko staje się zerem, gdy jeden z jego czynników niém się staje.*

Tylko przy takich przypuszczeniach, *które charakteryzują właśnie układ liczb urojonych zwyczajnych*, mamy prawo twierdzić, że jedynemi pierwiastkami równania $x^2 + 1 = 0$ są liczby $\pm i$

Zobaczymy później, że przy pominięciu któregokolwiek z wyżéj podanych warunków, równanie $x^2 + 1 = 0$ ma nieskończenie wiele pierwiastków.

24. Dodawanie geometryczne odcinków linij prostych. — Wprawdzie od najdawniej-

http://rcin.org.pl

szych czasów uważano w geometryi summę dwóch lub więcéj linij (§ 22), lecz szło tam tylko o *summę liczb* wypadających z porównania danych linij z jednostką długości. Zajmiemy się teraz dodawaniem linij prostych, uważanych tak co do ich długości, jako téż i co do kierunku. Przy takiém uważaniu *dwie linie proste* AB *i* CD *wtedy tylko nazywają się równemi, jeśli co do długości są równe, a co do kierunku równoległe.*

Linię czyli odcinek AB można więc uważać jako oznaczającą, że punkt A został przesuniętym w kierunku jéj na długość AB.

Tak określiwszy znaczenie odcinka AB, łatwo pojmiemy określenie summy dwóch odcinków $AB = \alpha$ i $BC = \beta$, czyli $\alpha + \beta$ (Fig. 1).

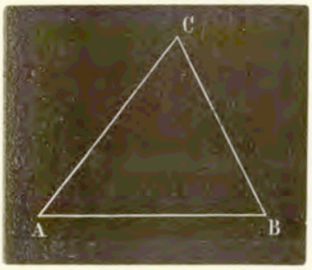

Fig. 1.

Ponieważ wypadek kolejnego przesuwania punktu A na długość AB w kierunku α i następnie na długość BC w kieruku β jest taki sam, co przesunięcie tego punktu w kierunku AC na długość AC, więc możemy napisać równanie

$$AB + BC = AC,$$

czyli

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

i równanie to określa nam znaczenie geometryczne summy dwóch odcinków.

W tém samém znaczeniu otrzymujemy téż równanie

$$AB + BC + CA = 0.$$

W ogóle, jeśli ilekolwiek odcinków α, β, γ,..... λ danych co do kierunku i długości, ułożymy obok siebie (bez zmiany kierunku i długości) w ten sposób, aby koniec jednego odcinka stał się początkiem następnego, to linię prostą łączącą początek pierwszego odcinka z końcem ostatniego nazwiemy *summą geometryczną* danych odcinków.

Z tego określenia wypada, że summa geometryczna z boków wielokąta zamkniętego, branych zawsze w jednym kierunku, równa się zeru.

Łatwo widzieć, że summa geometryczna czyni zadość wszystkim formalnym warunkom działania, któreśmy dodawaniem nazwali.

Jakoż z samego określenia summy wypada, że

$$AB + BC = AD + DC \text{ (Fig. 3.)}.$$

to jest

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

czyli, że *summa geometryczna jest przemiennościowa.*

Z figury 2 widać, że

$$AB + BC = AC,$$

zatém

$$(AB + BC) + CH = AC + CH = AH$$

http://rcin.org.pl

lecz

$$BC + CH = BH,$$

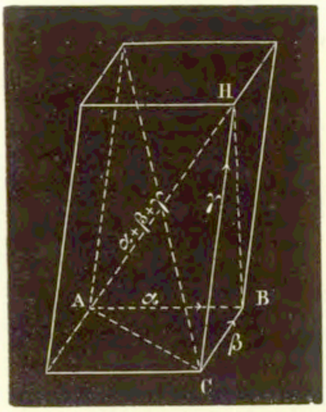

Fig. 2.

więc

$$AB + (BC + CH) = AB + BH = AH\,;$$

zkąd wypada, że

$$(AB + BC) + CH = AB + (BC + CH) = AH = AB + BC + CH,$$

czyli, że

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma,$$

to jest, że *dodawanie geometryczne odcinków jest łącznościowém.*

Z określenia summy geometrycznéj wypada, że przez $m\alpha$ (gdzie m jest liczbą bezwzględną, a α odcinkiem) rozumieć należy linię, któréj kierunek stosownie do znaku m przypada na kierunku α, lub téż jest mu wprost przeciwnym, długość zaś jest m razy większą od długości promienia α.

Dla otrzymania różnicy dwóch odcinków α i β, wychodzimy z określenia

$$\alpha - \beta + \beta = \alpha.$$

Oznaczając AB przez α (Fig. 3), AD przez β, otrzymamy

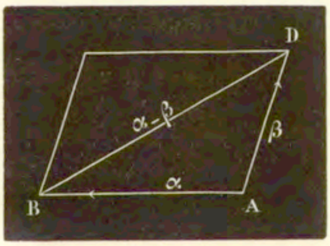

Fig. 3.

$$AD + DB = AB,$$

czyli

$$DB + AD = AB,$$

lub co na jedno wychodzi

$$DB + \beta = \alpha,$$

więc

$$DB = (\alpha - \beta).$$

Różnicę zatém dwóch odcinków AB i AD otrzymujemy, jeśli do początku pierwszego, bez zmiany kierunku i długości, przyłożymy drugi i koniec pierwszego połączymy z końcem tego odcinka. Wprowadzając odcinki odjemne, możemy każdą różnicę zamienić na summę.

Ponieważ odcinek $AA = 0$, więc z określenia różnicy

$$AA - AD = 0 - AD = DA,$$

czyli

$$DA = -AD,$$

to jest, że dwa odcinki równe co do długości, lecz skierowane w strony przeciwne, różnią się tylko znakami.

Ponieważ wszystkie odcinki jednakowéj długości i jednakowego kierunku uważamy jako równe sobie, więc jakiekolwiek byłoby położenie danych odcinków, możemy je przenieść do jednego punktu 0, jako do wspólnego ich początku.

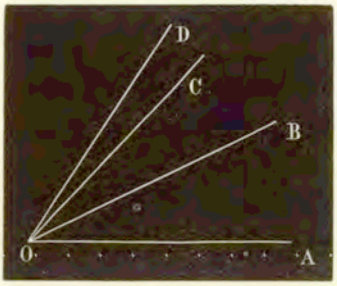

Fig. 4.

Tym sposobem odcinki $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, ... (Fig. 4.), można też zastąpić ich końcami A, B, C, D.

25. O mnożeniu odcinków, podlegającém prawu przemienności. — Po określeniu dodawania linij, zajmiemy się nowém działaniem, wykonać się mającém nad odcinkami, które nazwiemy mnożeniem. Zobaczymy późniéj, że takich działań może być bardzo wiele. W tém jednak miejscu ograniczymy się na podaniu jednego rodzaju mnożenia linij prostych na płaszczyznie, które podlega prawu przemienności i dla większéj prostoty przyjmiemy, że wszystkie odcinki wychodzą z jednego punktu. Wychodząc z określenia iloczynu dwóch liczb jako nowéj liczby, która w takim zostaje stosunku do jednego z czynników, w jakim drugi zostaje do zwrotnika mnożenia, możemy tu iloczyn dwóch odcinków określić w ten sposób, żeby on, tak pod względem długości, jako też pod względem kierunku, w takim zostawał stosunku do mnożnéj, w jakim mnożnik zostaje do jedności. Tak określiwszy iloczyn, możemy odcinek OC (Fig. 5) uważać za iloczyn linij OA . OB, jeśli

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OU}} \\ \text{i kąt } BOC = \text{kątowi } UOA, \end{cases}$$

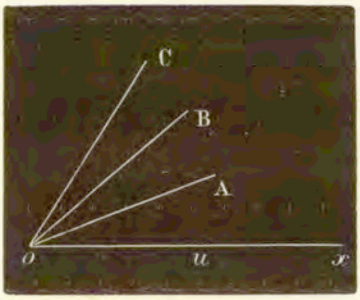

Fig. 5.

gdzie OU oznacza zwrotnik mnożenia, to jest taką linię, przez którą pomnożywszy lub podzieliwszy jakikolwiek promień wodzący, otrzymujemy ten sam promień. Dwa równania (1) są konieczne i dostateczne dla otrzymania iloczynu, gdyż wypadek porównania dwóch odcinków odnosi się tak do kierunku jak i do ich długości.

Z drugiego równania wypada jeszcze że

$$(1^a)\qquad COU = UOA + UOB.$$

Możemy więc powiedzieć, że iloczyn dwóch odcinków określony w sposób wyżéj opowiedziany jest linją, któréj długość równa się iloczynowi długości czynników, kąt zaś jaki ona tworzy z kierunkiem zwrotnika (amplituda) równa się summie amplitud czynników. Z równania (1) wypada, że iloczyn dwóch odcinków jest jednowartościowy i zmienia się ze zmianą jednego z czynników, wyjątek stanowi tylko przypadek gdy jeden z czynników jest zerem. W przypadku gdy oba czynniki OA i OB zlewają się z kierunkiem zwrotnika OU, należy iloczyn $\overline{OA} \times \overline{BO}$ odłożyć w kierunku zwrotnika, lub też w kierunku wprost przeciwnym, stosownie do tego czy linie OA i OB są skierowane w jednę stronę lub w strony wprost przeciwne.

Z równania (1) wypada też, że iloczyn jest *przemiennościowym*. Łatwo też dowieść, że iloczyn odcinków podlega prawu łączności. Jakoż (z fig. 6)

$$(OA \,.\, OB)\, OD = OC \,.\, OD = OE,$$

http://rcin.org.pl

jeśli

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OU}};\quad \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OU}}$$

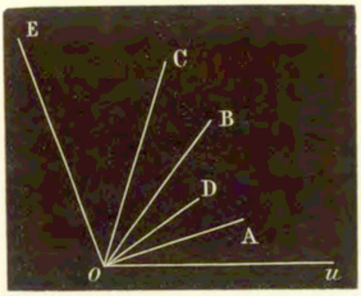

Fig. 6.

i

kąt UOC = kąt. UOA + kąt. UOB,

kąt UOE = kąt. UOC + kąt UOD,

czyli jeśli

$$\overline{OE}\,.\,\overline{OU} = \overline{OA}\,.\,\overline{OB}\,.\,\overline{OC}$$

kąt. UOE = kąt. UOA + kąt. UOB + kąt. UOD.

Z tego równania wypada, iż

$$(OA\,.\,OB)OD = OA(OB\,.\,OD) = OA\,.\,OB\,.\,OD.$$

Dowiedziemy teraz, że uważane mnożenie jest rozdzielnościowém. Jakoż, niech (fig. 7.).

$$OA\,.\,OC = OA';\qquad OB\,.\,OC = OB'$$

$$OA' + OB' = OD'\quad OA + OB = OD.$$

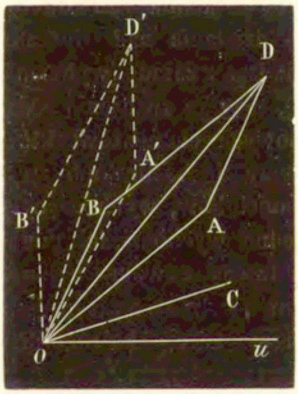

Fig. 7.

Ponieważ według równania (1)

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OU}};\quad \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OU}},\ \text{więc}\ \frac{\overline{OA'}}{OA}=\frac{\overline{OB'}}{OB},$$

kąt A'OB' = UOB' — UOA' = (UOB + UOC) — (UOA + UOC)
= UOB — UOA = AOB,

więc trójkąty OA'B' i OAB, a tém samém i OA'D' i OAD są podobne.
Z podobieństwa zaś trójkątów wypada.

$$\frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{UO}};\ D'OD = A'OA = COU,$$

UOD' — UOD = COU, czyli UOD' = DOU + COU,

a że

$$\overline{OD'}\,.\,\overline{OU} = \overline{OD}\,.\,\overline{UC},\ \text{więc}$$

$$OD' = OD\,.\,OC,$$

czyli

$$OA' + OB' = (OA + OB)OC.$$

to jest

$$OA\,.\,OC + OB\,.\,OC = (OA + OB)OC,\qquad \text{c. b. d. o.}$$

Dla otrzymania ilorazu dwóch odcinków wyjdziemy z określenia dzielenia,

$$\frac{a}{b}\,.\,b = a\,.$$

http://rcin.org.pl

Ponieważ

$$OB.OC=OA, \text{ czyli } b.OC=a,$$

jeśli

$$\overline{OB}\,.\,\overline{OC}=\overline{OA} \quad \text{i} \quad UOA=UOB+UOC;$$

więc

$$\frac{a}{b}=\frac{OA}{OB}=OC,$$

jeśli

$$\overline{OC}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \quad \text{i kąt } UOC=UOA-UOB,$$

to jest iloraz dwóch odcinków równa się ilorazowi z długości dzielnéj i dzielnika, a amplituda równa się różnicy ich amplitud (*).

Wprowadzając odcinki których długości są mniejsze od jedności a amplitudy odjemne, możemy iloraz dwóch odcinków zamienić na iloczyn

26. Geometryczne przedstawienie liczb urojonych zwyczajnych na płasczyznie i niektóre zastosowania do geometryi. — Ponieważ opisane wyżéj działania nad odcinkami mają te same własności co działania nad liczbami urojonemi zwyczajnemi, więc wychodząc z zasady (wyłożonéj w pierwszych rozdziałach téj pracy), że tylko znaczenia działań formalnych określają naturę nowych elementów, które do nauki wprowadzić mamy, możemy liczby urojone zwyczajne uważać za przedstawicielki odcinków, wychodzących z jednego punktu 0, lub też co na jedno wychodzi, ich punktów końcowych. W tém uważaniu rzeczy, dowolny odcinek OU (Fig. 9) gra rolę jednostki liczebnéj, jednostka zaś urojona musi oznaczać odcinek do niego prostopadły, i którego długość równa się jedności. Wypada to z samego określenia i,

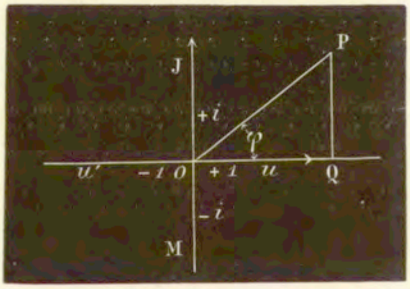

Fig. 9.

$$+1 : i = i : -1,$$

które powinno być średnio proporcyonanalne pomiędzy $+1$ i -1.

(*) Łatwo widzieć, że ilorazy

$$\frac{OC}{OD} \text{ i } \frac{OA}{OB}$$

wtedy tylko będą równe, jeśli

kąt COD=kątowi AOB (fig. 8)

i

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.$$

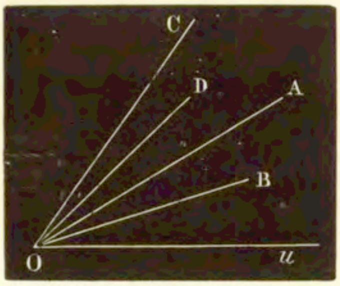

Fig. 8.

http://rcin.org.pl

Rzecz oczywista, że jest rzeczą zupełnie obojętną, który z kierunków OI lub OM obrać za kierunek dodatny jednostki urojonéj, lecz raz obrawszy OI za kierunek dodatny, musimy kierunek OM uważać za odjemny. Tak ustaliwszy kierunek jednostki rzeczywistéj i urojonéj, widzimy, że odcinek OP wyrazi się przez liczbę urojoną $A+Bi$. Liczbie téj możemy jeszcze nadać inny kształt. Ponieważ

$$A+Bi=\sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}+i\,\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right],$$

więc oznaczając $OP=\sqrt{A^2+B^2}$ przez ρ, kąt zaś POQ czyli amplitudę przez φ, otrzymamy

$$A+Bi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Liczbę ρ nazywamy modułem liczby urojonéj.

Jeśli liczbę $A+Bi$ uważamy za przedstawicielkę końca P, to A i B oznaczają współrzędne prostokątne tego punktu.

27. Zastosowanie liczb urojonych zwyczajnych do geometryi. — Wiadomo, że każdą linię AB (fig. 10) można wyrazić przez równanie

$$AB=OB-OA$$

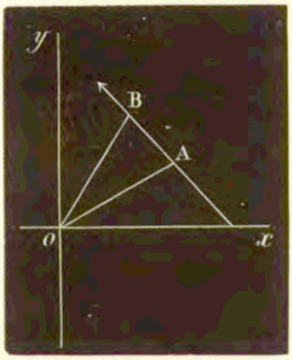

Fig. 10.

Ztąd wypada, że każdy związek zachodzący pomiędzy punktami na płasczyznie można przekształcić na związek pomiędzy odcinkami mającemi swój początek w punkcie O, a końce w uważanych punktach.

Tak np. znany związek pomiędzy trzema punktami A, B, C,

$$AB+BC+CA=0,$$

można przekształcić w równanie

$$(OB-OA)+(OC-OB)+(OA-OC)=0.$$

Przykład I. — Ponieważ widzieliśmy wyżéj, że

$$AB=\mathrm{mod}\,AB[\cos(AB,x)+i\sin(AB,x)],$$

więc równanie

$$AB+BC+CA=0,$$

możemy napisać w kształcie

$$\mathrm{mod}\,AB[\cos(AB,x)+i\sin(AB,x)]+\mathrm{mod}\,BC[\cos(BC,x)+i\sin(BC,x)]+\mathrm{mod}\,CA[\cos(CA,x)$$
$$+i\sin(CA,x)]=0,$$

równanie zaś to rozpadnie się na dwa następujące:

$$\mathrm{mod}\,AB\cos(AB,x)+\mathrm{mod}\,BC\cos(BC,x)+\mathrm{mod}\,CA\cos(CA,x)=0.$$

$$\mathrm{mod}\,AB\sin(AB,x)+\mathrm{mod}\,BC\sin(BC,x)+\mathrm{mod}\,CA\sin(CA,x)=0.$$

Dwa te równania zawierają w sobie całą trygonometryą i goniometryą. Tak np. przyjąwszy kierunek

http://rcin.org.pl

AC za oś, i oznaczając kąty trójkąta ABC przez A, B, C otrzymamy z drugiego równania

$$\mathrm{mod}\, AB \sin A + \mathrm{mod}\, BC \sin(-C) = 0,$$

czyli

$$\mathrm{mod}\, AB \sin A - \mathrm{mod}\, BC \sin C = 0, \text{ t. j.}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Z pierwszego zaś równania otrzymamy,

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cos A + \overline{BC} \cos C$$

czyli

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos A + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cos C,$$

ale

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}; \quad \frac{BC}{BA} = \frac{\sin A}{\sin C},$$

więc

$$\sin B = \sin(A + C) = \sin C \cos A + \sin A \cos C.$$

Przykład II. — Niech będą cztery punkty A, B, C, D na płaszczyznie, połączywszy je liniami prostemi otrzymamy

$$AC = AB + BC,$$

$$BD = BC + CD,$$

$$AC \,.\, BD = (AB + BC + CD)BC + AB \,.\, CD,$$

a że

$$AB + BC + CD = AD,$$

więc

$$AC \,.\, BD = AD \,.\, BC + AB \,.\, CD.$$

czyli

$$AB \,.\, DC + BC \,.\, DA + CA \,.\, DB = 0$$

Porównywając to równanie z równaniem

$$GH + HF + FG = 0$$

widzimy, że na płaszczyznie możemy zawsze wyznaczyć trzy takie punkty F, G, H, aby

$$GH = AB \,.\, DC; \quad HF = BC \,.\, DA; \quad FG = CA \,.\, DB.$$

Innemi słowy, dla każdego czworoboku ABCD można wyznaczyć taki trójkąt FGH, którego boki obliczają się z równań

$$\overline{GH} = \overline{AB} \,.\, \overline{DC}; \quad \overline{HF} = \overline{BC} \,.\, \overline{DA}; \quad \overline{FG} = \overline{CA} \,.\, \overline{DB};$$

http://rcin.org.pl

kąty zaś z równań

$$(\widehat{x, \mathrm{GH}}) = (\widehat{x, \mathrm{AB}}) + (\widehat{x, \mathrm{DC}}),$$

$$(\widehat{x, \mathrm{HF}}) = (\widehat{x, \mathrm{BC}}) + (\widehat{x, \mathrm{DA}}),$$

$$(\widehat{x, \mathrm{FG}}) = (\widehat{x, \mathrm{CA}}) + (\widehat{x, \mathrm{DB}}),$$

zkąd

$$(\widehat{x, \mathrm{GH}}) + (\widehat{x, \mathrm{HF}}) = (\widehat{x, \mathrm{AB}}) + (\widehat{x, \mathrm{DC}}) + (\widehat{x, \mathrm{BC}}) + (\widehat{x, \mathrm{DA}}),$$

czyli

$$(\widehat{\mathrm{GH}, \mathrm{HF}}) = (\widehat{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}}) + (\widehat{\mathrm{DC}, \mathrm{DA}}).$$

Jeśli przyjmiemy, że czworobok jest wpisany w koło, czyli że $(\widehat{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}}) + (\widehat{\mathrm{DC}, \mathrm{DA}}) = 180^\circ$, to i $(\widehat{\mathrm{GH}, \mathrm{FH}}) = 180^\circ$, czyli trzy punkty G, H, F leżą wtedy na linii prostéj, więc

$$\overline{\mathrm{GF}} = \overline{\mathrm{GH}} + \overline{\mathrm{HF}}$$

podstawiając więc wartości wyżéj otrzymane, dojdziemy do równania

$$\overline{\mathrm{CA}} \cdot \overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{AB}} \,.\, \overline{\mathrm{DC}} + \overline{\mathrm{BC}} \;\; \overline{\mathrm{DA}}$$

wyrażającego twierdzenie Ptolemeusza.

28. Zastosowanie teoryi summy geometrycznéj do rozwiązywania zadań. — Wszystkie zastosowania summy geometrycznéj polegają na następujących twierdzeniach.

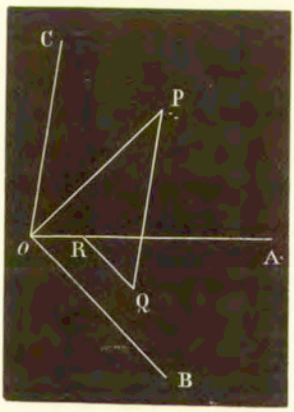

Fig. 11

Twierdzenie I. — *Każdy odcinek daje się rozłożyć na trzy odcinki składowe, równoległe do trzech danych linij pomiędzy któremi nie ma dwóch równoległych do siebie, i które nie są równoległe do jednéj płaszczyzny.*

Jakoż niech $\mathrm{OA} = \alpha$, $\mathrm{OB} = \beta$ i $\mathrm{OC} = \gamma$ (fig. 11.) będą temi trzema odcinkami, OP odcinek dowolny. Poprowadźmy linię PQ równoległą do OC i QR równoległą do OB; oznaczmy daléj stosunki liczebne

$$\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{OB}} = b, \quad \frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OA}} = a. \quad \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OC}} = c,$$

Po takiém oznaczeniu znajdziemy

$$(1) \qquad \mathrm{OP} = \rho = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Odcinek OP nazywać będziemy także *promieniem wodzącym punktu* P.

Wniosek. — W szczególnym przypadku gdy trzy odcinki $\mathrm{OA} = \alpha$, $\mathrm{OB} = \beta$, $\mathrm{OP} = \rho$ leżą na jednéj płaszczyznie otrzymamy

$$\rho = a\alpha + b\beta.$$

http://rcin.org.pl

Przykłady.

1. Równanie

$$\rho = x\beta,$$

gdzie ρ jest promieniem wodzącym w kierunku β od początku do punktu zmiennego P, a x liczbą zmienną; wyraża linię prostą poprowadzoną od początku równolegle do linii β.

2. Podobnież

$$\rho = \alpha + x\beta;$$

wyraża równanie linii prostéj poprowadzonéj od końca promienia α równolegle do odcinka β.

3.
$$\rho = x\alpha + y\beta,$$

gdzie x i y oznaczają ilości zmienne wyraża płaszczyznę, przechodzącą przez dwa odcinki α i β.

4.
$$\rho = \gamma + x\alpha + y\beta,$$

wyraża równanie płaszczyzny poprowadzonéj przez koniec linii γ równolegle do płaszczyzny (α, β).

5. W ogólności

$$\rho = \sum_{n=1}^{n=p} q_n \alpha_n$$

wyraża linię prostą, gdy współczynniki q_n są funkcyami linijowemi jednéj zmiennéj a równanie płaszczyzny, gdy współczynniki te są funkcyami linijowemi dwóch zmiennych.

Twierdzenie II. — *Końce trzech odcinków α, β, γ związanych równaniem*

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

leżą na jednéj linii prostéj, jeżeli summa

$$a + b + c = 0.$$

Jakoż niech OA $=\alpha$, OB $=\beta$, OC $=\gamma$. (Fig. 12).

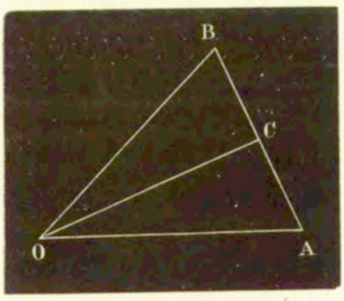

Fig. 12.

Ponieważ

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma} = m,$$

zkąd

$$\alpha + m\beta - (1 + m)\gamma = 0,$$

$$1 + m - (1 + m) = 0.$$

Twierdzenie III. — *Jeśli cztery odcinki α, β, γ, δ, czynią zadość równaniu*

(1)
$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0,$$

w którém

(2)
$$a + b + c + d = 0.$$

to koniec odcinka δ leży na płaszczyznie określonéj trzema końcami A, B, C *odcinków α, β, γ.*

http://rcin.org.pl

Jakoż wiemy (twierdz. I), że pomiędzy dowolnemi czterema odcinkami nie leżącemi na jednéj płasczyznie zachodzi rownanie kształtu (1). Lecz jeśli teraz założymy, że cztery punkty A, B, C, D leżą na jednéj płasczyznie, to i linie DA, DB, DC leżą na téj saméj płasczyznie, więc na zasadzie twierdzenia I, musi mieć miejsce równanie kształtu

$$a(\alpha-\delta)+b(\beta-\delta)+c(\gamma-\delta)=0,$$

czyli

$$a\alpha+b\beta=c\gamma-(a+b+c)\delta=0,$$

w którém oczywiście

$$(a+b+c)-(a+b+c)=0.$$

Przykłady.

1. — Przekątne równoległoboku dzielą się wzajemnie na dwie równe części.

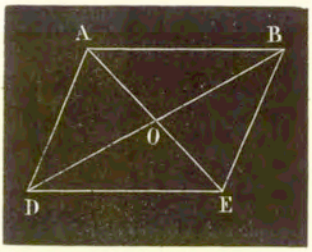

Fig. 13.

Jakoż

$$\mathrm{AO}+\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{DE}=\mathrm{DO}+\mathrm{OE},$$

skąd

$$(1)\qquad \mathrm{AO}-\mathrm{OE}=\mathrm{DO}-\mathrm{OB}.$$

Lecz ponieważ linie AE i BD nie są równoległe, więc równanie (1) jest tylko możebném w przypadku gdy

$$\mathrm{AO}-\mathrm{OE}=0,\quad \mathrm{DO}-\mathrm{OB}=0$$

czyli

$$\mathrm{AO}=\mathrm{OE},\quad \mathrm{DO}=\mathrm{OB}.$$

2. — Dwa trójkąty mające kąty równe, mają boki proporcyonalne.

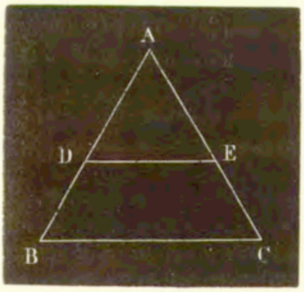

Fig. 14.

Jakoż niech będą trójkąty ABC i ADE mające kąt A wspólny, kąty D i B, jako téż E i C równe. Z równości kątów D i B wypada, że linia DE równoległa do BC.

Oznaczmy teraz AD przez α, DE przez β, otrzymamy :

$$\mathrm{AB}=m\alpha,\quad \mathrm{BC}=n\beta.$$

Ponieważ

$$\mathrm{AE}=\mathrm{AD}+\mathrm{DE}=\alpha+\beta,$$

$$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=m\alpha+n\beta,\ \text{i}$$

$$\mathrm{AC}=\mu\mathrm{AE},$$

więc

$$m\alpha+n\beta=\mu(\alpha+\beta),$$

zkąd

$$m=n=\mu,$$

http://rcin.org.pl

to jest

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}.$$

3. — Dwójsieczne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, oddzielającym od każdej z nich trzecią część.

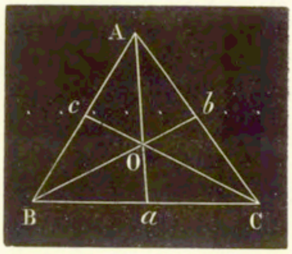

Fig. 15.

Niech α, β, γ będą trzema promieniami wodzącemi, równoległemi do trzech boków trójkąta, wziętych w porządku BC, CA, AB, A zaś początkiem. Równanie linii Bb (według twierdz. I)

$$\rho=\gamma+x\left(-\gamma-\frac{\beta}{2}\right)=(1-x)\gamma-\frac{x\beta}{2}.$$

Równanie linii Cc będzie :

$$\rho=-\beta+y\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)=(y-1)\beta+\frac{y}{2}\gamma.$$

Dla punktu więc przecięcia O będzie :

$$(1-x)\gamma-\frac{x}{2}\beta=(y-1)\beta+\frac{y}{2}\gamma,$$

zkąd

$$1-x=\frac{y}{2},\quad \frac{x}{2}=(1-y),$$

zcyli

$$y+2x=2;$$

$$2y+x=2;$$

zkąd

$$x=\frac{2}{3},\quad y=\frac{2}{3},$$

to jest, że dla punktu O :

$$\rho=AO=\gamma-\frac{2}{3}\left(\gamma+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{3}(\gamma-\beta).$$

Lecz

$$Aa=AB+Ba;$$

$$Aa=AC+Ca;$$

czyli

$$2Aa=AB+AC;$$

$$Aa=\frac{1}{2}(AB+AC)=\frac{1}{2}(\gamma-\beta);$$

więc

$$AO=\frac{2}{3}Aa,$$

http://rcin.org.pl

to jest, że punkt przecięcia O leży na linii Aa w odległości $\frac{2}{3}$ od wierzchołka.

4. — Twierdzenie Jana de Ceva.

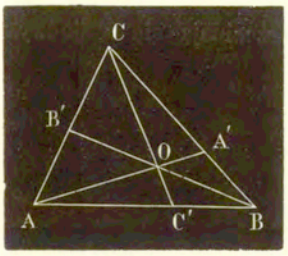

Fig. 16.

Przez dowolny punkt O poprowadźmy linie AA′, BB′, CC′ i oznaczmy OA przez α, OB przez β, OC przez γ, będzie $OA' = \alpha' = x\alpha$, $OB' = \beta' = y\beta$, $OC' = \gamma' = z\gamma$. Ponieważ trzy odcinki α, β, γ leżą na jednéj płaszczyznie, to na zasadzie twierdzenia I:

(1) $$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

lecz

$$\alpha = \frac{\alpha'}{x},$$

więc

$$\frac{a\alpha'}{x} + b\beta + c\gamma = 0.$$

Ponieważ zaś końce odcinków α', β, γ leżą na jednéj linii, więc

$$\frac{a}{x} + b + c = 0,$$

zkąd

$$x = -\frac{a}{b+c}.$$

Takim samym sposobem znajdziemy

$$y = -\frac{b}{a+c}, \quad z = \frac{-c}{a+b};$$

ztąd otrzymujemy równania:

(2) $$\alpha' = -\frac{a\alpha}{b+c}, \quad \beta' = -\frac{b\beta}{a+c}, \quad \gamma' = -\frac{c\gamma}{a+b},$$

a przez wzgląd na równanie (1)

(3) $$\alpha' = \frac{b\beta + c\gamma}{b+c}, \quad \beta' = \frac{a\alpha + c\gamma}{a+c}, \quad \gamma' = \frac{a\alpha + b\beta}{a+b}.$$

Ostatnie równania możemy napisać w kształcie:

$$\frac{\alpha' - \beta}{\gamma - \alpha'} = \frac{c}{b}, \quad \frac{\beta' - \gamma}{\alpha - \beta'} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\gamma' - \alpha}{\beta - \gamma'} = \frac{b}{a},$$

czyli

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{a}{c}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a},$$

ztąd

$$\frac{BA' \,.\, CB' \,.\, AC'}{A'C \,.\, B'A \,.\, C'B} = 1,$$

http://rcin.org.pl

czyli

$$BA' \,.\, CB' \,.\, AC' = A'C \,.\, B'A \,.\, C'B.$$

Wniosek. — Jeśli punkty A' i B' dzielą boki BC i AC na dwie równe części, to

$$a = b = c,$$

zkąd wypada znane twierdzenie, że trzy dwójsieczne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Ponieważ

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{2}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{2}, \quad \gamma' = -\frac{\gamma}{2};$$

więc punkt przecięcia O oddziela od każdéj dwójsiecznéj trzecią część.

5. — Twierdzenie Menelausa.

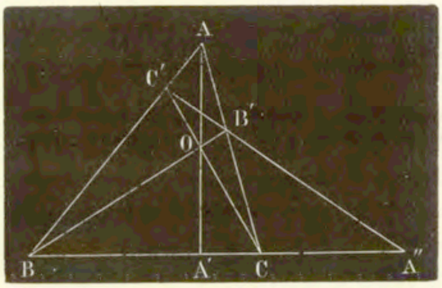

Fig. 17.

Wyobraźmy sobie, żeśmy trójkąt ABC przecięli linią C'B'A'', wtedy na mocy równania (2) poprzedniego przykładu otrzymamy :

$$(c+a)\beta' + b\beta = 0, \quad (a+b)\gamma' + c\gamma = 0;$$

więc

$$\frac{b\beta - c\gamma}{b-c} = \frac{(a+b)\gamma' - (a+c)\beta'}{(a+b)-(a+c)}.$$

Lecz pierwsza strona oznacza promień wodzący punktu leżącego na linii BC, druga zaś strona oznacza promień wodzący punktu leżącego na linii B'C', każda więc z nich wyraża promień wodzący punktu A'', tak że :

$$\alpha'' = \frac{b\beta - c\gamma}{b-c}.$$

Ztąd wypada

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{\alpha'' - \beta}{\gamma - \alpha''} = -\frac{c}{b};$$

takim samym sposobem otrzymamy :

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\beta' - \gamma}{\alpha - \beta'} = \frac{a}{c}; \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{\beta' - \alpha}{\beta - \gamma'} = \frac{b}{a};$$

więc

$$\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1;$$

czyli

$$BA'' \,.\, CB' \,.\, AC' = -A''C \,.\, B'A \,.\, C'B.$$

6. Twierdzenie. — Dwa trójkąty ABC i A'B'C' mające swoje wierzchołki na trzech liniach OA, OB, OC przecinających się w jedym punkcie O, mają tę własność, że odpowiednie ich boki przecinają się w trzech punktach ρ_1, ρ_2, ρ_3, leżących na jednéj linii prostéj.

Oznaczmy promienie OA, OB, OC przez α, β, γ, będziemy mieli :

$$OA' = m\alpha, \quad OB' = n\beta, \quad OC' = p\gamma.$$

http://rcin.org.pl

Równanie linii AB będzie :

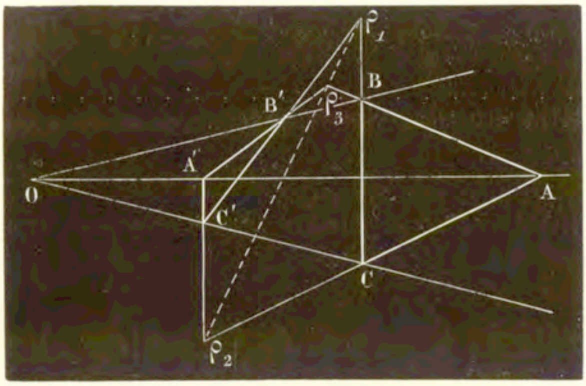

Fig. 18.

$$\rho = \alpha + x(\beta - \alpha);$$

równanie linii A'B'

$$\rho = m\alpha + y(n\beta - m\alpha).$$

Dla punktu więc przecięcia będzie :

$$\alpha + x(\beta - \alpha) = m\alpha + y(n\beta - m\alpha),$$

zkąd

$$y = \frac{1-m}{n-m}, \quad x = \frac{n(1-m)}{n-m}.$$

Promień więc punktu przecięcia linij AB i A'B' będzie :

$$\rho_3 = \alpha + \frac{n(1-m)}{n-m}(\beta - \alpha) = \frac{(n-1)m\alpha + (1-m)n\beta}{n-m}.$$

Takim samym sposobem znajdziemy, że promień wodzący punktu przecięcia linij AC i A'C' będzie :

$$\rho_2 = \frac{(p-1)m\alpha + (1-m)p\gamma}{p-m},$$

promień zaś punktu przecięcia linij BC i B'C' będzie :

$$\rho_1 = \frac{(p-1)n\beta + (1-n)p\gamma}{p-n}.$$

Z równań powyższych otrzymamy :

$$(n-m)\rho_3 = (n-1)m\alpha + (1-m)n\beta;$$
$$(p-m)\rho_2 = (p-1)m\alpha + (1-m)p\gamma;$$
$$(p-n)\rho_1 = (p-1)n\beta + (1-n)p\gamma.$$

Pomnożywszy pierwsze z tych równań przez $(p-1)$, drugie przez $(1-n)$, trzecie przez $(m-1)$, otrzymamy :

$$(n-m)(p-1)\rho_3 + (1-n)(p-m)\rho_2 + (m-1)(p-n)\rho_1 = 0,$$

a że

$$(n-m)(p-1) + (1-n)(p-m) + (m-1)(p-n) = 0.$$

więc trzy punkty ρ_1, ρ_2, ρ_3 leżą na jednéj linii prostéj.

7. Twierdzenie. — Linia AD dzieląca kąt A na dwie równe części, dzieli bok przeciwległy BC na dwa odcinki proporcyonalne do dwóch pozostałych boków AB i AC (fig. 19).

Na dwóch bokach AB i AC obierzmy jednostki długości $AP = \alpha$, $AQ = \beta$ i zbudujmy kwadrat ukośny APQR, którego przekątnią będzie AR, tak że $AR = \alpha + \beta$.

Równanie linii AD dzielącéj kąt na dwie równe części będzie :

$$\rho = x(\alpha + \beta);$$

http://rcin.org.pl

równanie zaś BC będzie

$$\rho = c\alpha + y\,(b\beta - c\alpha).$$

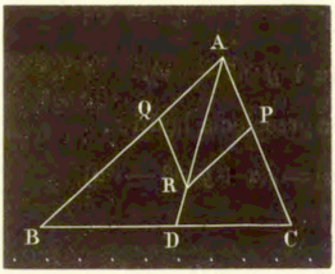

Fig. 19.

Dla punktu więc przecięcia

$$x(\alpha+\beta) = c\alpha(1-y) + yb\beta,$$

zkąd

$$x = \frac{bc}{b+c}, \quad y = \frac{c}{b+c}.$$

Lecz

$$BD = AD - AB = y\,(b\beta - c\alpha);$$

$$DC = BC - BD = (b\beta - c\alpha)\,(1-y);$$

zkąd

$$\frac{BD}{DC} = \frac{y}{1-y} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC}.$$

8. Twierdzenie. — Trzy dwójsieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dajmy, że dwójsieczne AD i BE przecinają się w punkcie G, mam dowieść, że linia CG dzieli kąt C na dwie równe części. (Fig. 20.)

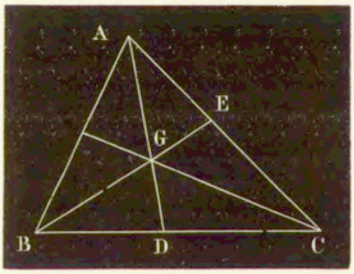

Fig. 20.

Oznaczmy jednostki promieni wziętych w kierunku AB, AC i BC przez α, β, γ, będziemy mieli:

$$AG = x\,(\alpha+\beta);$$

$$BG = y\,(\gamma - \alpha);$$

oznaczając zaś długości boków AB, AC i BC przez c, b, a, będziemy mieli:

$$a\gamma = b\beta - c\alpha,$$

więc linia BG równa się

$$y\left[-\alpha + \frac{b\beta - c\alpha}{a}\right],$$

$$CG = BG - BC = y\left[-\alpha + \frac{b\beta - c\alpha}{a}\right] - b\beta + c\alpha,$$

$$CG = AG - AC = x\,(\alpha+\beta) - b\beta,$$

zkąd

$$x = y\left(-1 - \frac{c}{a}\right) + c,$$

$$x - b = \frac{yb}{a} - b,$$

czyli

$$x = \frac{b}{a}y, \quad y = \frac{a}{b}x,$$

http://rcin.org.pl

a ostatecznie :

$$x=\frac{bc}{a+b+c},$$

$$CG=\frac{bc}{a+b+c}(\alpha+\beta)-b\beta=-\frac{ab}{a+b+c}(\gamma+\beta)=\mu(\gamma+\beta);$$

gdzie

$$\mu=-\frac{ab}{a+b+c}.$$

Równanie zaś to pokazuje, że linia CG jest dwójsieczną kąta C, c. b. d. o.

9. Twierdzenie. — Punkt przecięcia dwójsiecznych boków trójkąta, punkt przecięcia jego wysokości i punkt przecięcia prostopadłych do boków w ich środku leżą na jednéj linii prostéj, i punkt pierwszy oddziela od téj linii trzecią jéj część.

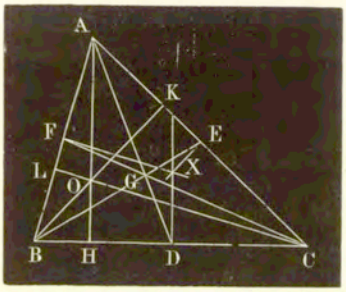

Fig. 21.

I. Niech jednostką promienia CB będzie α, jednostką CA będzie β, wiemy, że dla punktu G, przecięcia dwójsiecznych boków :

$$CG=\frac{1}{3}(a\alpha+b\beta).$$

II. Jeśli AH i BK są wysokościami trójkąta, przecinającemi się w punkcie O, będzie :

$$HA=b\beta-b\alpha\cos C=b(\beta-\alpha\cos C),$$

$$KB=a(\alpha-\beta\cos C).$$

Równanie

$$CO=CA+AO=CB+BO$$

daje

$$b\beta+yb(\beta-\alpha\cos C)=a\alpha+xa(\alpha-\beta\cos C),$$

zkąd

$$ax=\frac{b\cos C-a}{\sin^2 C},$$

więc

$$CO=a\alpha+\frac{(b\cos C-a)}{\sin^2 C}(\alpha-\beta\cos C)=\frac{\cos C}{\sin^2 C}\{(b-a\cos C)\alpha+(a-b\cos C)\beta\}.$$

III. Przypuśćmy, że prostopadłe wyprowadzone z punktów D i E przecinają się w punkcie X. Ponieważ DX i HA są równoległe, więc HA jest wielokrotnością DX, toż samo da się powiedzieć o EX i OB.

Równanie

$$CX=CD+DX=CE+EX$$

http://rcin.org.pl

daje

$$\frac{1}{2}a\alpha + v\,(\beta - \alpha \cos C) = \frac{1}{2}b\beta + z\,(\alpha - \beta \cos C).$$

zkąd

$$v = \frac{b - a \cos C}{2 \sin^2 C},$$

$$CX = \frac{(a - b \cos C)\,\alpha + (b - a \cos C)\,\beta}{2 \sin^2 C}.$$

lecz

$$2CX + CO - 3CG = a\alpha + b\beta - (a\alpha + b\beta) = 0.$$

a spółczynniki

$$2 + 1 - 3 = 0;$$

więc punkty X, O, G leżą na jednéj linii prostéj.

Oprócz tego :

$$CO - CG = 2\,(CG - CX),$$

więc

$$GO = 2GX, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

29. — Dotychczas badaliśmy tylko własności figur prostolinijnych, lecz łatwo widzieć, że metoda promieni wodzących da się zastosować i do figur krzywokreślnych, a nawet i do powierzchni.

Zastosowanie to opiera się na następującém twierdzeniu :

Jeśli w równaniu

(1) $$\rho = \Sigma \mu_n \alpha_n,$$

spółczynniki μ_n *są funkcyami* $f_n(t)$, *jednéj zmiennéj* t, *wtedy równnnie to wyraża linię krzywą, jeśli zaś spółczynniki te są funkcyami dwóch zmiennych niezależnych* $\varphi_n(t, u)$, *wtedy równanie powyższe wyraża powierzchnię.*

Jakoż wiadomo, że każdy promień wodzący daje się rozłożyć na trzy promienie równoległe do trzech osi współrzędnych. Oznaczywszy więc jednostki tych osi przez α, β, γ, znajdziemy :

$$\rho = \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma,$$

gdzie λ_1, λ_2, λ_3 są funkcyami jednéj lub dwóch zmiennych, stosownie do tego, jakiemi funkcyami są ilości μ_n. Lecz jeśli α, β, γ będą jednostkami osi współrzędnych, to λ_1, λ_2, λ_3, będą współrzędnemi końca promienia ρ. Jeśli teraz założymy, że ilości λ są funkcyami jednéj zmiennéj, to po jéj wyrugowaniu otrzymamy dwa równania pomiędzy współrzędnemi; jeśli zaś ilości λ będą funkcyami dwóch zmiennych, to po ich wyrugowaniu otrzymamy jedno równanie pomiędzy współrzędnemi.

PRZYKŁADY.

I. Równanie

$$\rho = \alpha t + \frac{\beta}{2} t^2,$$

http://rcin.org.pl

gdzie t oznacza zmienną, a α i β dwa promienie wodzące jest równaniem paraboli. Początkiem promieni jest punkt O na krzywéj fig. 22, β jest równoległym do osi, a promień α jest styczna w początku.

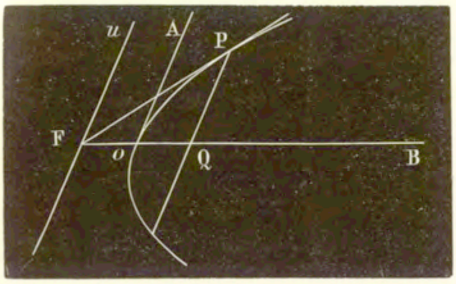

Fig. 22.

Jakoż położywszy

$$y=t, \quad px=\frac{t^2}{2},$$

otrzymamy

$$y^2=2px.$$

Z figury widzimy, że

$$QP=\alpha t, \quad OQ=\frac{\beta t^2}{2}.$$

Równaniem linii łączącéj dwa punkty paraboli, którym odpowiadają wartości t i t' zmiennéj, będą :

$$\rho=\alpha t+\frac{\beta t^2}{2}+x\left[\alpha t'+\frac{\beta t'^2}{2}-\alpha t-\frac{\beta t^2}{2}\right]=\alpha t+\frac{\beta t^2}{2}+x(t'-t)\left[\alpha+\beta\frac{(t'+t)}{2}\right].$$

Ponieważ $x(t'-t)$ może przybrać każdą wartość, więc oznaczymy tę ilość zmienną przez x, równanie powyższe przybierze wtedy kształt :

$$\rho=\alpha t+\frac{\beta t^2}{2}+x\left[\alpha+\beta\frac{(t'+t)}{2}\right].$$

Jeśli teraz założymy, że $t=t'$, wtedy równanie to będzie równaniem stycznéj do paraboli w punkcie t :

$$\rho=\alpha t+\frac{\beta t^2}{2}+x(\alpha+\beta t).$$

Zakładając w tém równaniu $x=-t$, znajdziemy :

$$\rho=-\frac{\beta t^2}{2},$$

a że to jest promień wodzący punktu leżącego na linii OB, więc jest to promień wodzący punktu przecięcia stycznéj paraboli z osią; otrzymujemy zatém znane twierdzenie, że podstyczna paraboli równa się odciętéj :

$$OF=OQ.$$

2. Równanie

$$\rho=\alpha\cos t+\beta\sin t,$$

lub téż

$$\rho=\alpha x+\beta\sqrt{1-x^2},$$

wyraża elipsę, w któréj dwa kierunki α i β są średnicami sprzężonemi.

3. Równanie

$$\rho=\alpha t+\frac{\beta}{t},$$

http://rcin.org.pl

lub

$$\rho = \alpha \operatorname{tg} u + \beta \cot u;$$

wyraża hiperbolę, w któréj dwa promienie wodzące α i β mają kierunki asymptot.

Jakož biorąc kierunek α za oś $x^{\text{ów}}$, kierunek β za oś $y^{\text{ów}}$, kładąc

$$t = \frac{x}{m}, \quad \frac{1}{t} = y,$$

znajdziemy

$$xy = m,$$

równanie hiperboli odniesionéj do asymptot.

4. Łatwo téż wiedzieć, że równanie :

$$\rho = \alpha \cos t + \beta \sin t + \gamma t$$

wyraża helissę.

5. Równanie znowu

$$\rho = t\alpha + u\beta + \gamma \frac{\sqrt{1 - at^2 - bu^2}}{c},$$

wyraża powierzchnię drugiego stopnia mającą środek, któréj średnice sprzężone mają kierunki trzech linij α, β, γ.

6. Równanie

$$\rho = u^2\alpha + v^2\beta + (u + v)^2\gamma$$

wyraża stożek drugiego stopnia.

Takie są główne zasady teoryi promieni wodzących. Po bliższe szczegóły odsyłamy do pierwszych rozdziałów dzieła Hamiltona « Elements of Quaternions ».

30. Dodawanie punktów. — Rachunek barycentryczny Mœbiusa. — Jeśli chcemy wprowadzić do matematyki punkty jako wielkości, musimy im dać pewien współczynnik liczebny, który może być mnożonym i dzielonym przez dowolną liczbę. Tym sposobem przychodzimy do pojęcia punktu wielokrotnego αA, i punktu pojedynczego A (przyczém zakłada się, że miejsce punktu wielokrotnego αA jest takie same, co i punktu pojedynczego A). Po wprowadzeniu do matematyki tego nowego elementu, trzeba było zbadać działania, jakim on może być poddanym. W téj jednak części naszéj pracy ograniczymy się na zbadaniu dodawania punktów i związków zachodzących pomiędzy niemi i promieniami wodzącemi, zostawiając sobie na późniéj zbadanie mnożenia odpowiadającego temu dodawaniu. Musimy jednak w tém miejscu już zrobić ogólną uwagę, która stosuje się do działań nad wszystkimi elementami geometrycznemi, a mianowicie, że *połączenie elementów geometrycznych powinno być niezależném od miejsca*, jakie one w przestrzeni zajmują.

Z tego, cośmy powiedzieli w rozdziale drugim, wypada, że każde dodawanie, a tém samém i dodawanie punktów, oprócz ogólnemi równaniami, określa się jeszcze szczególném jakiemś założeniem. Otóż w naszym przypadku założymy, że połączenie punktów A, B, C (gdzie C wyraża środek linii AB), wyrażone równaniem formalném

$$A + B = 2C$$

http://rcin.org.pl

daje nam nowy punkt. Łatwo teraz dowieść, że tym punktem jest punkt C. Jakoż załóżmy, że

$$A + B - C = M,$$

Fig. 23.

weźmy CM = CN i wykonajmy obrót linii AB około punktu C na 180°. Ponieważ po tym obrocie punkty A, N, C odpowiednio zajmą miejsce punktów B, M, C, więc na zasadzie uwagi wyżéj zrobionéj otrzymamy równanie

$$B + A - C = N.$$

Lecz na zasadzie własności zasadniczych dodawania

$$N = B + A - C = A + B - C = M,$$

t. j. punkty N i M są identyczne, lecz to wtedy tylko jest możebném, gdy punkt M zlewa się z punktem C otrzymujemy więc równanie :

$$A + B - C = C,$$

czyli

(1) $$A + B = 2C,$$

to jest, że summa dwóch punktów pojedynczych jest punktem podwójnym zajmującym środek linii AB.

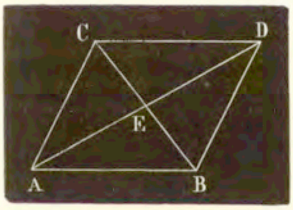

Fig. 24.

Zbadajmy teraz, co oznacza różnica dwóch punktów. W tym celu, weźmy równoległobok ABCD i niech E będzie punktem przecięcia przekątnych.

Z własności równoległoboku i równania (1) wypada

$$A + D = 2E = B + C,$$

czyli

$$A + D = B + C.$$

Z tego zaś równania opierając się na formalnych własnościach dodawania, otrzymamy :

$$B - A = D - C;$$

odwrotnie, jeżeli to równanie ma miejsce pomiędzy czterema punktami, to ma też miejsce równanie

$$A + D = B + C,$$

oznaczające, że środek linii AD jest zarazem środkiem linii BC, czyli że czworobok ABCD jest równoległobokiem. Wypada ztąd, że równanie

$$B - A = D - C,$$

wtedy tylko ma miejsce, kiedy linia AB jest równą i równoległą do CD. Różnicę więc dwóch punktów B — A możemy uważać jako wyrażenie odcinka AB, którego początkiem jest punkt A, a końcem punkt B.

http://rcin.org.pl

Oznaczając $B - A$ przez α, otrzymamy równanie

$$B = A + \alpha$$

wyrażające, że punkt B otrzymamy, jeśli punkt A przesuniemy na odcinek α.

Uwaga. Różnicę $B - A$ można uważać jako punkt nieskończenie odległy, co przyjąwszy, otrzymamy (uwzględniając, że równania $B - A = D - C = F - E = \ldots\ldots$ wyrażają równe odcinki linii prostych), że wszystkie odcinki równe (tak co do wielkości jak i co do kierunku) mają wspólny punkt nieskończenie odległy, którego są przedstawicielami.

Zadanie. — Określić znaczenie summy :

$$\sum_{n=1}^{n=p} a_n A_n,$$

gdzie a_n oznaczają spółczynniki liczebne; A_n— punkty.

Rozwiązanie. — Oznaczając przez R punkt dowolny, otrzymamy :

$$\sum_{n=1}^{n=p} a_n A_n = \sum_{n=1}^{n=p} a_n R + \sum_{n=1}^{n=p} a_n (A_n - R).$$

Równanie to może wyrazić albo odcinek linii prostéj, albo téż punkt stosownie do tego, czy wartość $\Sigma a_n = 0$, lub $\Sigma a_n \gtrless 0$.

Jakoż w pierwszym przypadku

$$\sum_{n=1}^{n=p} a_n A_n = \sum_{n=1}^{n=p} a_n (A_n - R) \tag{1}$$

lecz $\Sigma a_n (A_n - R)$ oznacza pewną linię.

W drugim przypadku, gdy $\Sigma a_n = s$, otrzymujemy :

$$\sum_{n=1}^{n=p} a_n A_n = sR + \sum_{n=1}^{n=p} a_n (A_n - R) = sR + s \sum_{n=1}^{n=p} \frac{a_n (A_n - R)}{s} = s \left[R + \sum_{n=1}^{n=p} \frac{a_n (A_n - R)}{s} \right], \tag{2}$$

lecz $R + \sum_{n=1}^{n=p} \frac{a_n (A_n - R)}{s}$ oznacza pewien punkt O, który się otrzymuje, odcinając od promienia wodzącego $\Sigma a_n (A_n - R)$, którego początek jest R, część $s^{tą}$. Równanie więc (2) przechodzi w następujące :

$$\sum_{n=1}^{n=p} a_n A_n = sO.$$

Uwaga. — Łatwo widzieć, że punkt O jest środkiem ciężkości układu punktów A_n, obciążonych masą a_n. Jakoż w przypadku dwóch punktów a_1 i a_2 równanie (2) przechodzi w

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 = (a_1 + a_2) O,$$

http://rcin.org.pl

czyli

$$a_1 (A_1 - O) + a_2 (A_2 - O) = 0 ;$$

zkąd

$$\frac{A_1 - O}{A_2 - O} = -\frac{a_2}{a_1},$$

lecz $(A_1 - O)$ oznacza linię OA_1, $(A_2 - O)$, oznacza linię OA_2, ztąd wypada, że $a_1 A_1 + a_2 A_2$ oznacza punkt wielokrotny leżący na linii $A_1 A_2$ i dzielący tę linię w stosunku odwrotnym do a_1 i a_2, tę zaś własność ma środek ciężkości układu punktów A_1 i A_2, których masy są a_1 i a_2. Dowiódłszy, że $\Sigma a_n A_n$ oznacza środek ciężkości w przypadku dwóch punktów, łatwo widzieć, że prawo to jest ogólném. W szczególnym przypadku, gdy $a_1 = a_2 = a_3 = a_n = 1$, punkt O nazywa się punktem środkowym układu czyli *środkiem*.

Wniosek I. — Oznaczając przez R punkt dowolny, mamy :

$$sR = \sum_{n=1}^{n=p} a_n R,$$

a odjąwszy to równanie od równania

$$sO = \sum_{n=1}^{n=p} a_n A_n,$$

otrzymamy :

$$s(O - R) = \sum_{n=1}^{n=p} a_n (A_n - R).$$

Równanie to wyraża następującą własność środka ciężkości O układu punktów. Jeśli punkty A_n połączymy liniami prostemi z dowolnym punktem R i a_n-krotne tak otrzymane linie RA_n bez zmiany kierunku ułożymy obok siebie, poczynając od punktu A_1, i ostatni z tak otrzymanych punktów połączymy linią prostą z punktem R, to linia ta przejdzie przez środek ciężkości O układu, a długość jéj równać się będzie s-krotnéj długości linii RO.

Wniosek II. — W przypadku gdy $\sum_{n=1}^{n=p} a_n A_n$ oznacza linię, to jest w przypadku, gdy $s = \sum_{n=1}^{n=p} a_n = 0$, wtedy linię tę otrzymamy w sposób wyżéj opisany. Łatwo widzieć. że ani kierunek, ani długość téj linii nie zależą od punktu R, gdyż w przypadku $s = 0$, środek ciężkości oddala się do nieskończoności.

Twierdzenie I. — Każdy punkt linii prostéj daje się wyrazić linijnie przez dwa stałe punkty P_1 i P_2 téj linii.

Jakoż, jeśli :

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 = (a_1 + a_2) M,$$

to M oznacza punkt linii $P_1 P_2$, odwrotnie jeśli punkt M leży na linii $P_1 P_2$, to zawsze można wyznaczyć taki punkt M, aby :

$$a_1 P_1 + a_2 P = (a_1 + a_2) M. \qquad \text{(Porównaj z poprzednią uwagą.)}$$

http://rcin.org.pl

Twierdzenie II. — Każdy punkt M płasczyzny daje się wyrazić linijnie przez trzy punkty stałe P_1, P_2, P_3 téj płasczyzny.

Jakoż oznaczając przez N punkt przecięcia linii $P_3 M$ z linią $P_1 P_2$, możemy a_1 i a_2 tak wyznaczyć, aby :

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 = (a_1 + a_2) N,$$

$$a_3 P_3 - a M = (a_3 - a) N,$$

gdzie $a = a_1 + a_2 + a_3$.

Dodawszy te dwa równania, otrzymamy :

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = aM.$$

Twierdzenie III. — Każdy punkt przestrzeni M da się linijnie wyznaczyć przez cztery stałe punkty P_1, P_2, P_3, P_4, nie leżące na jednéj płasczyznie.

Jakoż oznaczając przez N punkt przecięcia linii MP_4 z płasczyzną $P_1 P_2 P_3$, a przez a summę $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, możemy zawsze tak wyznaczyć a_1, a_2, a_3, a_4, aby :

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = (a_1 + a_2 + a_3) N,$$

$$a_4 P_4 - aN = (a_4 - a) N;$$

zkąd otrzymamy :

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + a_4 P_4 = aM.$$

Na tych trzech twierdzeniach opiera się *rachunek barycentryczny Möbiusa*, który w gruncie rzeczy jest metodą rozwiązywania zadań za pomocą współrzędnych jednorodnych (trójlinijnych i czworościennych).

KONIEC CZĘŚCI PIERWSZÉJ.

http://rcin.org.pl