CIŚNIENIE PODPÓR

JAKICHKOLWIEK BUDOWLI

NA

ICH PODSTAWY

PRZEZ

A. MARTYNOWSKIEGO

Inżyniera, byłego ucznia Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu.

Przedstawione na posiedzeniu Towarzystwa dnia 4 czerwca 1874 roku.

Teorya rozkładu ciśnienia (répartition des pressions) na przecięcia danego ciała płasczyznami normalnemi do kierunku sił na to ciało działających, rozwijana w kursach « Wytrzymałości Materyałów « daje wzory, za pomocą których wyznaczoném być może ciśnienie w każdym punkcie podstawy, na któréj spoczywa dana budowa. Niektóre z tych wzorów są przytoczone w T. III Pamiętników Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, na str. 345-347. Figura 76 daje kształt podstaw najczęściéj używanych i kontur poza obręb którego nie powinna padać wypadkowa sił działających na budowlę ażeby w każdym punkcie podstawy jéj ciśnienie było *dodatném*, to jest, ażeby żaden punkt podstawy nie był *rozciąganym*.

Prócz podstaw o powierzchni *ciągłéj* (pleine), budowa może spoczywać na podstawie obrączkowéj lub *opróżnionéj* (évidée), a w ogólności, na pewnéj liczbie podpór (kolumn, filarów i t. p.) wyznaczających na gruncie powierzchnie, jedne od drugich niezależne. Często się zdarza, że podpory są umieszczone w wierzchołkach wielokątów foremnych. Brak wzorów do obliczania ciśnienia w tym przypadku, staraliśmy się usunąć obecnie przedstawioną pracą.

http://rcin.org.pl

Mechanika Rozumowa, rozpatrując systema *niezmienne* (invariable), nie posiada dostatecznych danych do wyznaczenia ciśnienia na podpory kiedy ich liczba jest większą od *trzech* (*). Mechanika Stosowana, wprowadzając do rachunku nowy element : *odkształcanie* się ciał (déformation), czyni podobne zadanie najzupełniéj wyznaczoném; ogólny sposób jego rozwiązania znajdujemy w dziele p. Sonnet (**). Praca nasza ma za przedmiot wyprowadzenie wzorów szczególnych dla figur foremnych : trójkąta, kwadratu, sześciokąta, ośmiokąta i pięciokąta, i wyznaczenie obwodu mającego zawierać w sobie punkt przebicia gruntu przez wypadkowę sił na budowę działających tak, ażeby ciśnienie wywarte na każdą z podstaw było dodatne. Wzory niżéj podane, a które, o ile nam jest wiadomém, dotychczas nie były wyprowadzone, dają ciśnienie na podstawy w funkcyi promienia koła opisanego na figurach i spółrzędnych punktu, w którym wypadkowa spotyka płaszczyznę tych figur; uproszczą one o wiele rachunki które napotykamy przy zastosowaniach.

Zaczniemy niniejszą pracę od rozbioru najogólniejszego przypadku.

Ciało, poddane działaniu siły P *normalnéj do płaszczyzny gruntu, spoczywa na n podporach; znaleźć ciśnienie każdéj z podpór na grunt, czyli oddziaływanie gruntu na te podpory.*

Punktem wyjścia do rozwiązania tego zadania jest *ściśliwość* (compressibilité) gruntu i zgodne z doświadczeniem przypuszczenie, że podpory pozostawiają na gruncie ślady, czyli wyciski (empreintes), których objętość jest proporcyonalną do parcia wywieranego na podpory.

Niech :

$\omega', \omega'', \omega''', \ldots\ldots \omega^n$ oznaczają powierzchnie, któremi podpory spoczywają na gruncie,

$z', z'', z''', \ldots\ldots z^n$ oznaczają głębokość wycisków, które mogą być uważane za proste pryzmy,

$R', R'', R''', \ldots\ldots R^n$ oznaczają ciśnienie na grunt, czyli opór (oddziaływanie) gruntu na odpowiednie podpory,

k oznacza spółczynnik, dany przez doświadczenie, i zależny od natury gruntu.

Będziemy mieli :

$$R' = k\omega' z',$$

$$R'' = k\omega'' z'',$$

$$R''' = k\omega''' z''',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R^n = k\omega^n z^n.$$

Zadanie polega na znalezieniu wartości dla ilości : $z', z'', z''', \ldots\ldots z^n$.

Nazwijmy :

$$\Omega = \omega' + \omega'' + \ldots\ldots + \omega$$

(*) *Kurs Mechaniki Rozumowéj*, Niewęgłowski. 1873, str. 72-76.
(**) *Dictionnaire des Mathématiques Appliquées*, Sonnet. 1867, p. 1154.

http://rcin.org.pl

i załóżmy :

$$P = k\Omega h,$$

gdzie h oznacza wysokość jaka z tego równania wypadnie.

Niech będą :

$(x'y')$, $(x''y'')$, $(x'''y''')$, ... $(x^n y^n)$ spółrzędne środków powierzchni ω', ω'', ω''', ... ω^n,

(α, β) spółrzędne punktu, w którym wypadkowa P przebija płasczyznę zawierającą w sobie te środki.

Ponieważ istnieje równowaga między siłami równoległemi : R', R'', ... R^n i P, zatém summa algebraiczna momentów tych sił, względem jakiéjkolwiek osi poprowadzonéj na płasczyznie prostopadłéj do kierunku sił, jest zero. Biorąc więc momenta względem osi Y, mamy :

$$k\omega'z'x' + k\omega''z''x'' + k\omega'''z'''x''' + \ldots\ldots + k\omega^n z^n x^n = k\Omega h\alpha,$$

czyli :

$$\omega'z'x' + \omega''z''x'' + \omega'''z'''x''' + \ldots\ldots + \omega^n z^n x^n = \Omega h\alpha, \tag{1}$$

gdzie spółczynnik k już nie wchodzi.

Podobnież, biorąc momenta względem osi X, będzie :

$$\omega'z'y' + \omega''z''y'' + \omega'''z'''y''' + \ldots\ldots + \omega^n z^n y^n = \Omega h\beta. \tag{2}$$

Mamy nadto :

$$R' + R'' + R''' + \ldots\ldots + R^n = P,$$

zatém otrzymamy :

$$\omega'z' + \omega''z'' + \omega'''z''' + \ldots\ldots + \omega^n z^n = \Omega h. \tag{3}$$

Otóż, środki powierzchni : ω', ω'', ... ω^n zostają w jednéj i téjże saméj płasczyznie, która nie jest płasczyzną pionową; zatém jéj równanie może być wyrażoném przez :

$$z = Ax + By + C;$$

a ponieważ środki o których mowa leżą na téj płasczyznie, więc będzie :

$$\left\{\begin{array}{l} z' = Ax' + By' + C, \\ z'' = Ax'' + By'' + C, \\ z''' = Ax''' + By''' + C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^n = Ax^n + By^n + C. \end{array}\right. \tag{4}$$

Jeżeli liczba podpór jest n, liczba równań (4) będzie n; więc liczba wszystkich równań będzie $n+3$. Otóż, mamy właśnie $n+3$ niewiadomych, mianowicie : n głębokości : z', z'', ... z^n i 3 spółczynniki : A, B, C; zadanie nasze jest więc wyznaczoném.

Takie jest ogólne rozwiązanie. Zastosujemy go teraz do przypadków szczególnych, gdzie zazwyczaj powierzchnie ; ω', ω'', ... ω^n są sobie równe, tak że :

$$\Omega = \omega' + \omega'' + \ldots\ldots + \omega^n = n\omega.$$

http://rcin.org.pl

I. Trójkąt foremny (fig. 1). — Rozbierzmy najprzód przypadek w którym ciało spoczywa na trzech podporach, środki których znajdują się w wierzchołkach trójkąta foremnego DEF. Oznaczmy ciśnienia w punktach D, E, F, przez R′, R″, R‴.

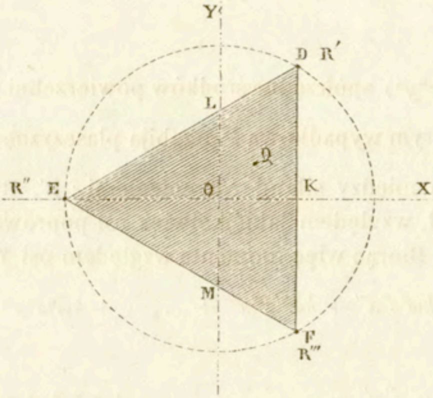

Fig. 1.

Niech promień koła opisanego na trójkącie DEF będzie R; bok trójkąta wyrazi się wtedy przez $R\sqrt{3}$, a jego apotema przez $\frac{R}{2}$. Biorąc środek koła O za początek spółrzędnych, i oznaczając spółrzędne punktów D, E i F przez $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, będziemy mieli :

$$x' = OK = \frac{R}{2}, \qquad y' = DK = \frac{R}{2}\sqrt{3};$$

$$x'' = OE = -R, \quad y'' = 0;$$

$$x''' = OK = \frac{R}{2}, \qquad y''' = KE = -\frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

Zakładając $\omega' = \omega'' = \omega''' = \omega$, zkąd $\Omega = 3\omega$, i oznaczając przez α i β spółrzędne punktu Ω, w którym wypadkowa normalna P przebija płaszczyznę DEF, otrzymamy z (1), (2) i (3) następujące równania :

$$(a) \qquad \frac{R}{2}z' - Rz'' + \frac{R}{2}z''' = 3\alpha h,$$

$$(b) \qquad \frac{R}{2}\sqrt{3}z' - \frac{R}{2}\sqrt{3}z''' = 3\beta h,$$

$$(c) \qquad z' + z'' + z''' = 3h.$$

Równania zaś (4) dadzą :

$$(d) \qquad \left\{ \begin{aligned} z' &= A\frac{R}{2} + B\frac{R}{2}\sqrt{3} + C, \\ z'' &= -AR + C, \\ z''' &= A\frac{R}{2} - B\frac{R}{2}\sqrt{3} + C; \end{aligned} \right.$$

http://rcin.org.pl

Wstawiając wartości (*d*) w równania (*a*) (*b*) i (*c*), znajdziemy :

$$C = h,$$

$$B = \frac{2\beta h}{R^2},$$

$$A = \frac{2\alpha h}{R^2};$$

a zatém :

$$z' = h\left(1 + \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right),$$

$$z'' = h\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right);$$

$$z''' = h\left(1 + \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right).$$

Otóż wiemy że:

$$R' = k\omega z'\,;\; R'' = k\omega z''\,;\; R''' = k\omega z'''\,;$$

mamy nadto :

$$P = k3\omega h,$$

a zatém :

$$\frac{R'}{P} = \frac{k\omega z'}{k3\omega h} = \frac{z'}{3h};$$

podobnież :

$$\frac{R''}{P} = \frac{z''}{3h},\quad \frac{R'''}{P} = \frac{z'''}{3h},$$

w skutek czego otrzymamy :

$$R' = \frac{P}{3}\frac{z'}{h},$$

$$R'' = \frac{P}{3}\frac{z''}{h},$$

$$R''' = \frac{P}{3}\frac{z'''}{h},$$

czyli ostatecznie szukane wartości R′, R″ i R‴ wyrażą się w sposób następujący :

$$(t)\quad \left\{\begin{aligned} R' &= \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right),\\ R'' &= \frac{P}{3}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right),\\ R''' &= \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right).\end{aligned}\right.$$

http://rcin.org.pl

Ciśnienie podpór D, E i F na grunt jest więc najzupełniéj wyznaczoném, albowiem siła P. promień R i spółrzędne punktu Q są ilościami danemi. Summa ciśnień : $R' + R'' + R'''$ jest oczywiście równą całkowitemu ciśnieniu P.

Roztrząsanie wzorów (t). — Punkt Q może przybierać rozmaite położenia na płaszczyznie DEF. Jeżeli znajduje się on na osi X, wtedy $\beta = 0$, i wzory (t) stają się w tym przypadku :

$$(t_x)\quad \left\{\begin{aligned} R' &= \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R}\right), \\ R'' &= \frac{P}{3}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right), \\ R''' &= \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R}\right). \end{aligned}\right.$$

R' jest więc równe R''', to jest że ciśnienia w punktach D i F położonych na prostéj prostopadłéj do osi X są sobie równe, i łatwo można dostrzedz że są one większe od ciśnienia R'', o ilość $P\frac{\alpha}{R}$.

Jeżeli punkt Q leży na osi Y, czyli $\alpha = 0$, wtedy wzory dające ciśnienia na podpory będą :

$$(t_y)\quad \left\{\begin{aligned} R' &= \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right), \\ R'' &= \frac{P}{3}, \\ R''' &= \frac{P}{3}\left(1 - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right). \end{aligned}\right.$$

Ciśnienie R'' na punkt E jest więc niezależne od położenia punktu Q na osi Y. Ze zmianą rzędnéj β, zmieniać się tylko będą ciśnienia R' i R'''.

Jeżeli $\alpha = 0$ i $\beta = 0$, co znaczy że punkt Q pada w środku ciężkości figury, wtedy : $R' = R'' = R''' = \frac{P}{3}$; co być powinno.

Rozpatrzmy teraz jakim warunkom winny zadość czynić spółrzędne α i β, ażeby ciśnienie w każdym z punktów D, E i F było *dodatném*. W tym celu zauważmy, że punkt Q może się znajdować w jednym z czterech kątów utworzonych przez osie X i Y, a zatém rozmaitych przypadków, co do znaku ilości α i β, może być cztery; każdemu z nich odpowiadają następujące wzory, w których α i β przedstawiają wartości somoiste.

1) $\alpha +,\ \beta +$;	2) $\alpha -,\ \beta +$;	3) $\alpha -,\ \beta -$;	4) $\alpha +,\ \beta -$;
$R' = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right)$	$R' = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right)$	$R' = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right)$	$R' = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right)$
$R'' = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right)$	$R'' = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\right)$	$R'' = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\right)$	$R'' = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right)$
$R''' = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{B}\sqrt{3}\right)$	$R''' = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right)$	$R''' = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right)$	$R''' = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right)$

http://rcin.org.pl

Oczywiście, dostatecznêm będzie rozpatrzenie tylko dwóch pierwszych przypadków; albowiem w przypadku trzecim, R'' jest takie samo jak w przypadku drugim, czyli $R_2''=R_3''$; co się zaś tyczy R' i R''' to mamy : $R_2'=R_3'''$; $R_2'''=R_3'$. Podobnież, porównywając przypadek czwarty z pierwszym, znajdujemy że $R_1''=R_4''$; $R_1'=R_4'''$; $R'''_4=R_4'$.

1) Uważając przypadek kiedy α jest dodatne a β odjemne, widzimy, że R' nie może być ani zerem, ani ilością odjemną; że zaś zakładamy ażeby ciśnienia były wszędzie dodatne, najmniejszą wartością, jaka może przypaść na R'' i R''' będzie zero. W tym razie będziemy mieli jednocześnie :

$$1-\frac{2\alpha}{R}=0,$$

$$1+\frac{\alpha}{R}-\frac{\beta}{R}\sqrt{3}=0;$$

co wymaga ażeby :

$$\alpha=\frac{R}{2}=OK,$$

$$\beta=\frac{R\sqrt{3}}{2}=KD;$$

więc jeżeli punkt Q znajduje się w punkcie D wtedy : $R''=0$, $R'''=0$; zaś R' jest równêm P.

Gdyby punkt Q padał w punkcie F, mielibyśmy : $R'=0$, $R''=0$, $R'''=P$.

Widzimy więc że punkt Q nie powinien wychodzić po za linię DF, gdyż wtedy $\alpha>\frac{R}{2}$, i ciśnienie R'' byłoby odjemnêm. Jeżeli $\alpha<\frac{R}{2}$, R'' jest dodatnêm; lecz ażeby R''' było również dodatnêm, potrzeba żeby : $1+\frac{\alpha}{R}-\frac{\beta}{R}\sqrt{3}>0$; minimum jakie przyjąć możemy jest $R'''=0$; w tym razie spółrzędne α i β powinny zadość uczynić równaniu :

$$1+\frac{\alpha}{R}-\frac{\beta}{R}\sqrt{3}=0,$$

to jest że punkt Q winien się znajdować na prostéj :

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha+\frac{R\sqrt{3}}{3};$$

tą prostą będzie bok EF trójkąta DEF, albowiem :

$$\text{dla}\quad \alpha=0,\quad \beta=\frac{R\sqrt{3}}{3}=OL;$$

$$\text{dla}\quad \alpha=\frac{R}{2},\ \beta=\frac{R\sqrt{3}}{2}=KD.$$

W pierwszym przypadku, to jest wówczas kiedy punkt Q znajduje się w punkcie L, otrzymujemy dla ciśnień następujące wartości :

$$R'=\frac{2}{3}P,\quad R''=\frac{1}{3}P,\quad R'''=0,$$

http://rcin.org.pl

gdyby zaś ten punkt leżał w punkcie M, mielibyśmy :

$$R'=0, \quad R''=\frac{1}{3}P, \quad R'''=\frac{2}{3}P.$$

2) Jeżeli α jest odjemne a β dodatne, czyli jeżeli punkt Q leży w kącie YOE, wtedy R'' zawsze będzie dodatném ; żeby R' i R''' były jednocześnie zerem, potrzeba mieć : $\alpha=R$ i $\beta=0$, to jest punkt Q powinien się znajdować w wierzchołku E. Założeniu $\alpha=R$ musi koniecznie towarzyszyć warunek : $\beta=0$, albowiem przy $\alpha=R$, otrzymujemy :

$$R''=P, \quad R'=\frac{P}{3}\frac{\beta}{R}\sqrt{3}, \quad R'''=-\frac{P}{3}\frac{\beta}{R}\sqrt{3};$$

co sprawdza warunek : $R'+R''+R'''=P$, ale nie odpowiada naszemu założeniu, które wymaga dla R' i R''' wartości dodatnych.

Ażeby się zapewnić, że wszystkie ciśnienia będą dodatnemi, dosyć jest żeby spółrzędne α i β nie przewyższały tych wartości które wypadną z równania :

$$1-\frac{\alpha}{R}-\frac{\beta}{R}\sqrt{3}=0,$$

czyli, ażeby punkt Q nie padał po za linię :

$$\beta=\frac{R}{\sqrt{3}}-\frac{\alpha}{\sqrt{3}},$$

to jest, po za prostę EL ; gdyż

$$\text{dla } \alpha=0, \quad \beta=\frac{R}{\sqrt{3}}=\frac{R\sqrt{3}}{3}=OL; \text{ co daje punkt L;}$$

$$\text{dla } \alpha=R, \quad \beta=0; \quad \text{co wyznacza punkt E.}$$

Gdyby punkt Q znajdował się w kącie EOM, granicą po za którą nie powinien on przechodzić, będzie prosta EM.

Z powyższego rozbioru wnosimy, że : *jeżeli ciało spoczywa na trzech podporach* D, E *i* F, *ciśnienie na każdą z nich będzie dodatném, jeżeli punkt* Q, w którym wypadkowa normalna do płaszczyzny DEF przebija tę płaszczyznę, *nie wychodzi po za obręb trójkąta* DEF ; *obwód tego trójkąta jest zatém obwodem ciśnienia dodatnego.*

Uwaga. — W razie trzech podpór ciśnienie bardzo łatwo może być wyznaczoném wprost, bez pomocy ogólnych wzorów (1), (2), (3) i (4). I tak, niech D, E i F (fig. 2) będą punkta zetknięcia ciała z gruntem na którym ono spoczywa ; Q punkt spotkania płaszczyzny DEF przez wypadkowę normalną P ; R', R'', R''' opór gruntu wywierany odpowiednio w punktach D, E i F. Ponieważ istnieje równowaga między siłami R', R'', R''' i P, więc summa algebraiczna ich momentów, wziętych względem jakiéjkolwiek osi poprowadzonéj na płaszczyznie prostopadłéj do kierunku tych sił, jest zerem. Jeżeli zatém weźmiemy za oś momentów prostę przechodzącą przez punkta przyczepienia dwóch jakichkolwiek z pomiędzy trzech sił R', R'' i R''', wtedy momenta tych dwóch sił względem takiéj osi będą zerem, i równanie będzie zawierać jednę tylko niewiadomą, to jest trzecią z szukanych sił. Biorąc więc za oś prostę EF, momenta sił R'' i R''' względem téj osi będą zerem ; tak że wyprowadzając z punktów

http://rcin.org.pl

Q i D prostopadłe QH′ i DK′ do linii EF, i uważając moment siły P za dodatny, a siły R′ za odjemny (oddziaływanie), równanie momentów wszystkich sił R′, R″, R‴ i P względem osi EF sprowadzi się do :

$$P.QH' - R'.DK' = 0,$$

zkąd :

$$R' = P.\frac{QH'}{DK'}.$$

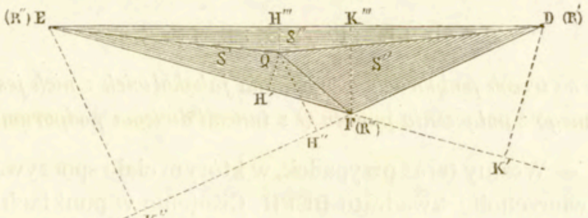

Fig. 2.

Podobnież, biorąc momenta względem prostéj DF, będziemy mieli :

$$P.QH'' - R''.EK'' = 0,$$

ztąd :

$$R'' = P.\frac{QH''}{EK''};$$

nareszcie, równanie momentów względem prostéj DE będzie :

$$P.QH''' - R'''.FK''' = 0,$$

ztąd :

$$R''' = P.\frac{QH'''}{FK'''}.$$

Tak się wyrażą szukane wartości dla R′, R″ i R‴. Należy zauważyć 1) że ponieważ :

$$R' + R'' + R''' = P,$$

zatém :

$$\frac{QH'}{DK'} + \frac{QH''}{EK''} + \frac{QH'''}{FK'''} = 1;$$

zkąd wypływa następujące twierdzenie geometryi : *jeżeli z jakiegokolwiek punktu, wziętego wewnątrz trójkąta, wyprowadzimy prostopadłe na jego boki i każdę z tych prostopadłych podzielimy przez równoległą do niéj wysokość trójkąta, summa trzech ztąd otrzymanych ilorazów równą jest jedności ;*

2) że łącząc punkt Q z wierzchołkami trójkąta D, E, F otrzymamy trzy trójkąty : QEF, QDF i QED; oznaczając ich powierzchnie przez S′, S″ i S‴, a powierzchnię trójkąta DEF przez S, będziemy mieli :

$$2S' = EF.QH'; \quad 2S'' = DF.QH''; \quad 2S''' = ED.QH'''.$$

http://rcin.org.pl

W skutek czego, ilości R′, R″ i R‴ mogą być wyrażone tak :

$$R' = P.\frac{2S'}{EF.DK'} = P\frac{S'}{S},$$

$$R'' = P.\frac{2S''}{DF.EK''} = P\frac{S''}{S},$$

$$R''' = P.\frac{2S'''}{ED.FK'''} = P.\frac{S'''}{S};$$

a ztąd :

$$R' : R'' : R''' = S' : S'' : S''';$$

więc, *jeżeli ciało spoczywa na trzech podporach, ciśnienie na jakąkolwiek z nich jest proporcyonalném do powierzchni trójkąta otrzymanego z połączenia punktu Q z innemi dwiema podporami.*

II. Kwadrat (fig. 3). — Weźmy teraz przypadek, w którym ciało spoczywa na czterech podporach, środki których stanowią wierzchołki kwadratu DEFH. Ciśnienie w punktach D, E, F i H niech będzie odpowiednio : R′, R″, R‴ i R^{IV}.

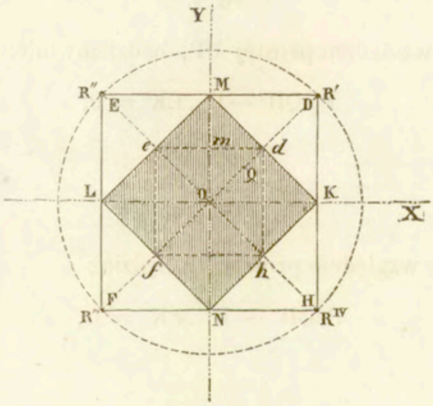

Fig. 3.

Jeżeli promień koła opisanego na kwadracie nazwiemy R, to bok kwadratu będzie równy $R\sqrt{2}$ a jego apotema będzie $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Oznaczając spółrzędne punktów D, E, F, H przez $x'y'$, $x''y''$, $x'''\ y'''$, $x^{IV}\ y^{IV}$, a punktu Q przez α i β, będziemy mieli :

$$x' = OK = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad y' = KD = \frac{R}{\sqrt{2}};$$

$$x'' = OL = -\frac{R}{\sqrt{2}}, \quad y'' = LE = \frac{R}{\sqrt{2}};$$

$$x''' = OL = -\frac{R}{\sqrt{2}}, \quad y''' = LF = -\frac{R}{\sqrt{2}};$$

$$x^{IV} = OK = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad y^{IV} = KH = -\frac{R}{\sqrt{2}};$$

http://rcin.org.pl

Kładąc $\omega' = \omega'' = \omega''' = \omega^{IV} = \omega$, otrzymamy $\Omega = 4\omega$, i równania ogólne (1), (2), (3) i (4) staną się w uważanym przypadku :

$$(a) \qquad \frac{R}{\sqrt{2}}(z' - z'' - z''' + z^{IV}) = 4\alpha h,$$

$$(b) \qquad \frac{R'}{\sqrt{2}}(z' + z'' - z''' - z^{IV}) = 4\beta h;$$

$$(c) \qquad z' + z'' + z''' + z^{IV} = 4h.$$

$$(d) \qquad \begin{cases} z' = A\frac{R}{\sqrt{2}} + B\frac{R}{\sqrt{2}} + C, \\ z'' = -A\frac{R}{\sqrt{2}} + B\frac{R}{\sqrt{2}} + C, \\ z''' = -A\frac{R}{\sqrt{2}} - B\frac{R}{\sqrt{2}} + C, \\ z^{IV} = A\frac{R}{\sqrt{2}} - B\frac{R}{\sqrt{2}} + C. \end{cases}$$

Wstawiając wartości (*d*) w równania (*a*), (*b*) i (*c*) otrzymamy trzy równania, z których wyznaczymy spółczynniki A, B i C.

Wartość ich wyrazi się tak samo jak dla trójkąta foremnego, to jest znajdziemy :

$$C = h, \quad B = \frac{2\beta h}{R^2}; \quad A = \frac{2\alpha h}{R^2};$$

zatém z równań (δ) będziemy mieli :

$$z' = h\left(1 + \frac{\alpha}{R}\sqrt{2} + \frac{\beta}{R}\sqrt{2}\right),$$

$$z'' = h\left(1 - \frac{\alpha}{R}\sqrt{2} + \frac{\beta}{R}\sqrt{2}\right),$$

$$z''' = h\left(1 - \frac{\alpha}{R}\sqrt{2} - \frac{\beta}{R}\sqrt{2}\right),$$

$$z^{IV} = h\left(1 + \frac{\alpha}{R}\sqrt{2} - \frac{\beta}{R}\sqrt{2}\right);$$

a że : $R' = k\omega z'$; $R'' = k\omega z''$, $R''' = k\omega z'''$, $R^{IV} = k\omega z^{IV}$; i $P = k4\omega h$, więc szukane ciśnienia R', R'', R''', R^{IV} wyrażą się tak :

$$(k) \qquad \begin{cases} R' = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{R}\sqrt{2} + \frac{\beta}{R}\sqrt{2}\right) = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} + \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right), \\ R'' = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{R}\sqrt{2} + \frac{\beta}{R}\sqrt{2}\right) = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} + \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right), \\ R''' = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{R}\sqrt{2} - \frac{\beta}{R}\sqrt{2}\right) = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} - \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right), \\ R^{IV} = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{R}\sqrt{2} - \frac{\beta}{R}\sqrt{2}\right) = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} - \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

http://rcin.org.pl

Roztrząsanie wzorów (k). — Dodając do siebie R′ i R‴, R″ i R^{IV}, znajdujemy :

$$R' + R''' = R'' + R^{IV} = \frac{P}{2};$$

więc, *jeżeli ciało spoczywa na czterech podporach, summa ciśnień wywieranych na dwie podpory znajdujące się w wierzchołkach przekątnéj kwadratu jest równą połowie całkowitego ciężaru tego ciała.* Własność ta stosuje się nie tylko do kwadratu, ale i do wszelkiego prostokąta.

Jeżeli punkt Q leży na osi X, wtedy $\beta = 0$, i wzory (k) stają się :

$$(k_x) \qquad \begin{cases} R' = R^{IV} = \dfrac{P}{4}\left(1 + \dfrac{\alpha}{R}\sqrt{2}\right), \\ R'' = R''' = \dfrac{P}{4}\left(1 - \dfrac{\alpha}{R}\sqrt{2}\right); \end{cases}$$

to jest ciśnienia w punktach D i H, E i F, położonych na prostopadłéj do osi X, są jednakowe. W tym przypadku będziemy mieli również :

$$R' + R'' = R''' + R^{IV} = \frac{P}{2}.$$

Gdy punkt Q znajduje się na osi Y, czyli $\alpha = 0$, wtedy :

$$(k_y) \qquad \begin{cases} R' = R'' = \dfrac{P}{4}\left(1 + \dfrac{\beta}{R}\sqrt{2}\right), \\ R''' = R^{IV} = \dfrac{4}{P}\left(1 - \dfrac{\beta}{R}\sqrt{2}\right); \end{cases}$$

jednakowe ciśnienia będą teraz sprawiane na punkta D i E, F i H leżące na prostopadłéj do osi Y. Mamy nadto :

$$R' + R''' = R'' + R^{IV} = \frac{P}{2}.$$

Jeżeli punkt Q pada w środku ciężkości kwadratu, czyli $\alpha = 0$ i $\beta = 0$, wtedy wszystkie podpory zostają pod jednakowém ciśnieniem, równém $\frac{P}{4}$, co jest wiadomém zgóry.

Zobaczmy teraz gdzie powinien padać punkt Q, ażeby ciśnienia na wszystkie podpory były dodatnemi. Niech naprzykład punkt ten znajduje się w kącie MOK ; w takim razie wzory (k) wskazują, że najmniejszą wartością jaką możemy przypuścić na R‴ jest zero ; pnnkt Q nie powinien wychodzić po za prostę :

$$(m) \qquad 1 - \frac{\alpha}{R}\sqrt{2} - \frac{\beta}{R}\sqrt{2} = 0,$$

to jest po za linię MK, otrzymaną łącząc środki M i K boków danego kwadratu. W saméj rzeczy, powyższe równanie daje :

$$\text{dla } \alpha = 0, \qquad \beta = \frac{R\sqrt{2}}{2} = OM;$$

$$\text{dla } \alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2} = OK, \qquad \beta = 0.$$

http://rcin.org.pl

Jeżeli punkt Q leży na prostéj MK, wtedy $R''=0$, a zatém $R'=\frac{P}{2}$, gdyż jak wiemy $R'+R'''=\frac{P}{2}$; a wprost o tém przekonać się możemy, wstawiając w wyrażenie na R' wartość: $\frac{\alpha}{R}\sqrt{2}=1-\frac{\beta}{R}\sqrt{2}$ wyciągniętą z równania (m).

Co się tyczy dwóch innych ciśnień będą one:

$$R''=\frac{P}{2}\cdot\frac{\beta}{R}\sqrt{2}, \qquad R^{IV}=\frac{P}{2}\cdot\frac{\alpha}{R}\sqrt{2};$$

i ich summa jest oczywiście równą $\frac{P}{2}$, mamy bowiem na mocy (m): $\frac{\alpha}{R}\sqrt{2}+\frac{\beta}{R}\sqrt{2}=1$.

Jak widzimy ciśnienie R' jest niezależne od położenia punktu Q na linii MK. Jeżeli punkt Q pada w punkcie K, czyli jeżeli $\beta=0$, wtedy całkowite ciśnienie P rozdzieloném będzie tylko na dwie podpory D i H, z których każda ponosić będzie ciśnienie $\frac{P}{2}$; jeżeli zaś punkt ten znajdzie się w M, punktami ciśnionymi będą punkta D i E, dla których $R'=R''=\frac{P}{2}$.

Jest takie położenie punktu Q, przy którém ciśnienia R'' i R^{IV} są sobie równe; to ma miejsce wtedy, kiedy punkt Q znajduje się w punkcie d, — przecięcia się prostéj MK z przekątną DF, — w tym bowiem razie:

$$\alpha=\beta=\frac{R\sqrt{2}}{4},$$

i ciśnienia na podpory D, E, F i H będą:

$$R'=\frac{P}{2}, \quad R''=\frac{P}{4}, \quad R'''=0, \quad R^{IV}=\frac{P}{4}.$$

Z powyższego rozbioru i z symetryi figury wnosimy, że *obwodem ciśnienia dodatnego* będzie kwadrat KMLN, otrzymany z połączenia środków K, M, L, N boków danego kwadratu. Roztrząsanie przypadku kiedy punkt Q znajduje się w kącie MOK możemy zastosować do trzech innych kątów; i w każdym razie wartość ciśnień R', R'', R''' i R^{IV} otrzymamy ze wzorów (k), nadając spółrzędnym α i β znak odpowiedni położeniu punktu Q.

Uwaga. — Przykład praktyczny, a ogólniejszy od poprzedniego będzie ten, kiedy punkta D, E, F i H znajdują się w wierzchołkach prostokąta (fig. 4). Oznaczając boki prostokąta przez $2a$ i $2b$ mamy:

$$x'=a, \qquad y'=b;$$

$$x''=-a, \quad y''=b;$$

$$x'''=-a, \quad y'''=-b;$$

$$x^{IV}=a, \qquad y^{IV}=-b;$$

http://rcin.org.pl

i równania do rozwiązania będą następujące :

$$a(z' - z'' - z''' + z^{\mathrm{IV}}) = 4\alpha h,$$

$$b(z' + z'' - z''' - z^{\mathrm{IV}}) = 4\beta h,$$

$$z' + z'' + z''' + z^{\mathrm{IV}} = 4h,$$

$$\left\{\begin{aligned} z' &= \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}, \\ z'' &= -\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}, \\ z''' &= -\mathrm{A}a - \mathrm{B}b + \mathrm{C}, \\ z^{\mathrm{IV}} &= \mathrm{A}a - \mathrm{B}b + \mathrm{C}. \end{aligned}\right.$$

Znajdziemy ztąd :

$$\mathrm{A} = \frac{\alpha h}{a^2}, \quad \mathrm{B} = \frac{\beta h}{b^2}, \quad \mathrm{C} = h;$$

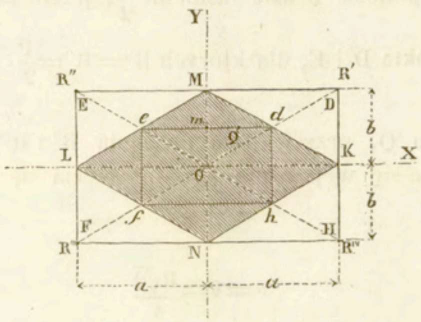

Fig. 4.

a zatém na ciśnienia w wierzchołkach prostokąta DEFH otrzymamy wyrażenia :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{R}' &= \frac{\mathrm{P}}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}\right), \\ \mathrm{R}'' &= \frac{\mathrm{P}}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}\right), \\ \mathrm{R}''' &= \frac{\mathrm{P}}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b}\right), \\ \mathrm{R}^{\mathrm{IV}} &= \frac{\mathrm{P}}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b}\right), \end{aligned}\right.$$

które pokazują że $\mathrm{R}' + \mathrm{R}''' = \mathrm{R}'' + \mathrm{R}^{\mathrm{IV}} = \frac{\mathrm{P}}{2}$.

Z rozbioru otrzymanych wzorów łatwo jest dostrzedz, że wszystkie ciśnienia będą dodatne, to jest że ciało wywierać będzie parcie na wszystkie punkta : D, E, F i K, jeżeli punkt Q pada wewnątrz ukośnego kwadratu KMLN, powstałego z połączenia środków : K, M, L, N boków danego prostokąta; lub, co najwyżéj, jeżeli punkt ten znajduje się na obwodzie KMLN ; w tym ostatnim przypadku ciśnienie na je-

http://rcin.org.pl

dnę z podpór zawsze jest zerem, a przy szczególném położeniu punktu Q, może ono być zerem jednocześnie i dla dwóch podpór. I tak, naprzykład, jeżeli punkt Q znajduje się na linii MK, wtedy:

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=1,$$

R‴ jest zerem, a wartości trzech innych ciśnień są:

$$R'=\frac{P}{2},\quad R''=\frac{P}{2}\cdot\frac{\beta}{b},\quad R^{IV}=\frac{P}{2}\cdot\frac{\alpha}{a}.$$

Gdyby punkt Q padał w punkcie K, wtedy mielibyśmy:

$$R'''=0,\quad R'=\frac{P}{2},\quad R''=0,\quad R^{IV}=\frac{P}{2};$$

jeżeli zaś pada on w punkcie M, to mamy:

$$R'''=0,\qquad R'=\frac{P}{2},\quad R''=\frac{P}{2},\qquad R^{IV}=0.$$

Może się zdarzyć, że punkt Q znajduje się w punkcie *d*, na przecięciu się linii MK z przekątną DE; w tym razie spółrzędne α i β mają wartość:

$$\alpha=\frac{a}{2},\quad \beta=\frac{b}{2},$$

i całkowite ciśnienie P rozdzieli się na podpory w sposób następujący:

$$R'''=0,\qquad R'=\frac{P}{2},\quad R''=R^{IV}=\frac{P}{4};$$

a dla punktu Q padającego w punkcie *m*, mielibyśmy:

$$\alpha=0\ ,\ \beta=\frac{b}{2};$$

zatém:

$$R'=R''=\frac{3}{8}P;\quad R'''=R^{IV}=\frac{1}{8}P.$$

Gdyby punkt Q znalazł się w trójkącie MKD, wtedy: $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}>1$, więc R‴ byłoby *odjemném*, to jest, że w punkcie F nie byłoby żadnego zetknięcia ciała z płaszczyzną prostokąta DEFH. Ciało miałoby wtedy tylko trzy punkta oparcia, i dla znalezienia ciśnienia w D, E i H wypadłoby uważać trójkąt DEH, a ten przypadek był już powyżéj rozpatrzonym.

III. Sześciokąt foremny (fig. 5). — Jeżeli środki podstaw znajdują się w wierzchołkach sześciokąta foremnego DEFHIK, wtedy zważywszy że apotema takiego wielokąta równą jest $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, będziemy mieli na spółrzędne $x'\,y',\ldots\,x^{VI}\,y^{VI}$, następujące wartości:

dla punktu D ... $x'=R,\quad y'=0,$

http://rcin.org.pl

dla punktu E ... $x'' = \frac{R}{2}$, $y'' = \frac{R}{2}\sqrt{3}$,

» F ... $x''' = -\frac{R}{2}$, $y''' = \frac{R}{2}\sqrt{3}$,

» H ... $x^{IV} = -R$, $y^{IV} = 0$,

» I ... $x^{V} = -\frac{R}{2}$, $y^{V} = -\frac{R}{2}\sqrt{3}$,

» K ... $x^{VI} = \frac{R}{2}$, $y^{VI} = -\frac{R}{2}\sqrt{3}$.

Przypuszczamy zawsze, że powierzchnie ω', ω'', ... ω^{VI} zetknięcia ciała z płaszczyzną sześciokąta są

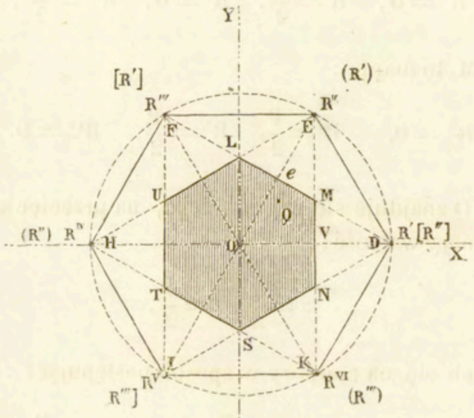

Fig. 5.

sobie równe, w skutek tego $\Omega = 6\omega$, i równania służące do wyznaczenia ciśnień R', R'', ... R^{VI}, wywieranych w punktach D, E, ... K, będą następujące :

$$R(z' - z'') + \frac{R}{2}(z'' + z^{IV} - z''' - z^{V}) = 6h\alpha,$$

$$\frac{R}{2}\sqrt{3}(z'' + z''' - z^{V} - z^{VI}) = 6h6,$$

$$z' + z'' + z''' + z^{IV} + z^{V} + z^{VI} = 6h;$$

$$\left\{\begin{aligned} z' &= AR + C, \\ z'' &= A\frac{R}{2} + B\frac{R}{2}\sqrt{3} + C, \\ z''' &= -A\frac{R}{2} + B\frac{R}{2}\sqrt{3} + C, \\ z^{IV} &= -AR + C, \\ z^{V} &= -A\frac{R}{2} - B\frac{R}{2}\sqrt{3} + C, \\ z^{VI} &= A\frac{R}{2} - B\frac{R}{2}\sqrt{3} + C. \end{aligned}\right.$$

http://rcin.org.pl

Z równań tych znajdziemy na spółczynniki A, B, C wyrażenia :

$$C = h, \qquad B = \frac{2\beta h}{R^2}, \quad A = \frac{2\alpha h}{R^2};$$

a zatém znane nam będą ilości : z', z'', ... z^{VI}. Że zaś $R' = k\omega z'$, $R'' = k\omega z''$, ... $R^{VI} = k\omega z^{VI}$, a $P = k6\omega h$, więc dla sześciokąta foremnego ciśnienia na podstawy wyrażą się w następujący sposób :

$$(s) \quad \left\{ \begin{aligned} R' &= \frac{P}{6}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\right), \\ R'' &= \frac{P}{6}\left(1 + \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right), \\ R''' &= \frac{P}{6}\left(1 - \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right), \\ R^{IV} &= \frac{P}{6}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right), \\ R^{V} &= \left(1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right), \\ R^{VI} &= \frac{P}{6}\left(1 + \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right). \end{aligned} \right.$$

Roztrząsanie wzorów (*s*). — Dodając R' z R^{IV}, R'' z R^{V} i R''' z R^{VI}, otrzymujemy :

$$R' + R^{IV} = R'' + R^{V} = R''' + R^{VI} = \frac{1}{3}P;$$

to jest że *summa ciśnień na dwie podpory znajdujące się na średnicy koła jest ilością stałą i równą dwóm szóstym całkowitego ciśnienia.*

Jeżeli punkt Q leży na osi X, wtedy ciśnienia w punktach E i K, F i I, znajdujących się na prostopadłéj do téj osi, są jednakowe, a mianowicie :

$$R'' = R^{VI} = \frac{P}{6}\left(1 + \frac{\alpha}{R}\right),$$

$$R''' = R^{V} = \frac{P}{6}\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right);$$

summa zaś ciśnień na dwie podpory położone na linii równoległéj do osi X jest stałą, tak że :

$$R'' + R''' = R' + R^{VI} = R^{V} + R^{VI} = \frac{1}{3}P.$$

Podobnież, w razie gdy punkt Q leży na osi Y znajdujemy:

$$R'' = R''' = \frac{P}{6}\left(1 + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right),$$

$$R^{V} = R^{VI} = \frac{P}{6}\left(1 - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right),$$

$$R' = R^{IV} = \frac{P}{6};$$

http://rcin.org.pl

a summa ciśnień na podpory E i K, F i I, położone na linii równoległej do osi Y będzie :

$$R'' + R^{VI} = R''' + R^{V} = \frac{1}{3} P ;$$

oprócz tego :

$$R' + R^{IV} = \frac{1}{3} P ,$$

gdyż punkta D i H leżą na średnicy koła.

Jeżeli punkt Q pada w punkcie O, wtedy $R' = R'' = \ldots = R^{VI} = \frac{P}{6}$.

Porównywając wzory (s) z temi, które znalezione były dla trójkąta foremnego mającego położenie wskazane na fig. 1, a które na fig. 5 jest EHK, i przypuszczając, że tak w przypadku sześciokąta jak też i trójkąta siła P ma jednakową wartość, a punkt Q to samo położenie, znajdujemy :

$$(R') = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right) = 2R'',$$

$$(R'') = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right) = 2R^{IV},$$

$$(R''') = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right) = 2R^{VI} ;$$

gdzie litery R′, R″, R‴ w nawiasie oznaczają ciśnienia w razie ciała spoczywającego na trzech podporach : E, H, K (fig. 5), a bez nawiasu — jeżeli to samo ciało ma sześć punktów oparcia.

Ztąd już wnieść możemy, że uważając trójkąt FDI i oznaczając w tym razie ciśnienia na podpory F, D, I przez [R′], [R″] i [R‴], będziemy mieli :

$$(t') \quad \left\{ \begin{aligned} [R'] &= 2R''' = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{\alpha}{R} + \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right), \\ [R''] &= 2R' = \frac{P}{3}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\right), \\ [R'''] &= 2R^{V} = \frac{P}{3}\left(1 - \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right). \end{aligned} \right.$$

Wzory te dla trójkąta FDI mogłyby być napisane nie udając się do wzorów (s) : otrzymują się one z wartości znalezionych dla trójkąta DEF (fig. 1), lub EHK (fig. 5), zamieniając w nich α na $-\alpha$, albowiem trójkąty EHK i FDI są symetrycznie położone względem osi Y.

Wyznaczenie obwodu powierzchni obejmującéj punkt Q. — Łatwo jest okazać, że obwodem ciśnienia dodatnego będzie sześciokąt LMNSTU, otrzymany z dwóch trójkątów EHK i FDI, których jest on częścią spólną; tak że ciało będzie miało sześć punktów oparcia, jeżeli punkt Q nie wychodzi ze środkowéj części sześciokąta gwiazdzistego otrzymanego z danego nam sześciokąta DEFHIK. W saméj rzeczy zobaczymy natychmiast, że jeżeli punkt Q znajduje się w kącie LOD, nie powinien on padać po

http://rcin.org.pl

za linią łamaną LMV, gdyż najmniejszą wartością jaką przyjąć możemy dla R^{V} jest zero, co daje:

$$\frac{\alpha}{R}+\frac{\beta}{R}\sqrt{3}=1,$$

a ztąd dla $\alpha=0$ mamy : $\beta=\frac{R\sqrt{3}}{3}=0L$; a dla $\alpha=R$ wypadnie $\beta=0$.

Punkt Q nie powinien więc wychodzić po za prostę LD. Nadto, nie powinien on przekraczać pewnego punktu téj prostéj, gdyż znajdując się na linii LD, spowoduje on następujący rozkład ciśnienia :

$$R'=\frac{P}{6}\left(3-2\frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right),$$

$$R''=\frac{P}{3},$$

$$R'''=\frac{P}{3}\frac{\beta}{R}\sqrt{3},$$

$$R^{IV}=\frac{P}{6}\left(\frac{2\beta}{R}\sqrt{3}-1\right),$$

$$R^{V}=0,$$

$$R^{VI}=\frac{P}{3}\left(1-\frac{\beta}{R}\sqrt{3}\right).$$

Zkąd wnosimy że β nie może być $=0$, to jest że punkt Q nie może padać w punkcie D, albowiem mielibyśmy wtedy $R^{IV}=-\frac{P}{6}$; najmniejszą zatém wartością β może być tylko ta która daje $R^{IV}=0$, to jest:

$$\beta=\frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{3}=VM,$$

tak że skrajném położeniem punktu Q na linii LD będzie punkt M.

Dla uzupełnienia tego rozbioru podajemy wartości ciśnień dla trzech szczególnych położeń punktu Q na prostéj LD, mianowicie : 1) dla punktu L, 2) dla punktu M i 3) kiedy punkt Q znajduje się w punkcie e, na przecięciu się linii LD ze średnicą IE.

1)	2)	3)
dla punktu L $\left(\alpha=0,\ \beta=\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)$	dla punktu M $\left(\alpha=\frac{R}{2},\ \beta=\frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)$	dla punktu $e\left(\alpha=\frac{R}{4},\ \beta=\frac{R\sqrt{3}}{4}\right)$.
$R'=\frac{P}{6}$	$R'=\frac{P}{3}$	$R'=\frac{P}{4}$
$R''=\frac{P}{3}$	$R''=\frac{P}{3}$	$R''=\frac{P}{3}$
$R'''=\frac{P}{3}$	$R'''=\frac{P}{6}$	$R'''=\frac{P}{4}$
$R^{IV}=\frac{P}{6}$	$R^{IV}=0$	$R^{IV}=\frac{P}{12}$
$R^{V}=0$	$R^{V}=0$	$R^{V}=0$
$R^{VI}=0$	$R^{VI}=\frac{P}{6}$	$R^{VI}=\frac{P}{12}$.

http://rcin.org.pl

Symetrya figury względem osi spółrzędnych czyni zbytecznym rozbiór tych przypadków, kiedy punkt Q pada w jednym z trzech innych kątów utworzonych przez te osie. Wartości dla R', R''..... R^{VI}, znajdą się z całą łatwością w każdym z pozostałych przypadków.

IV. Ośmiokąt foremny (fig. 6). — Jeżeli punkta zetknięcia ciała z gruntem znajdują się w wierzchołkach ośmiokąta foremnego, wtedy będziemy mieli :

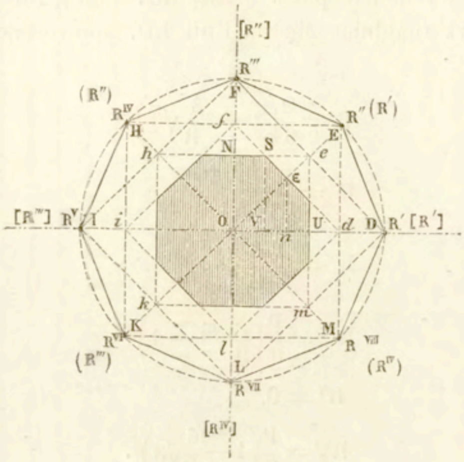

Fig. 6.

$$\text{Dla punktu D} \ldots x' = R, \qquad y' = 0;$$

$$\text{» E} \ldots x'' = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad y'' = \frac{R}{\sqrt{2}};$$

$$\text{» F} \ldots x''' = 0, \qquad y''' = R;$$

$$\text{» H} \ldots x^{IV} = -\frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad y^{IV} = \frac{R}{\sqrt{2}};$$

$$\text{» I} \ldots x^{V} = -R, \qquad y^{V} = 0;$$

$$\text{» K} \ldots x^{VI} = -\frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad y^{VI} = -\frac{R}{\sqrt{2}};$$

$$\text{» L} \ldots x^{VII} = 0, \qquad y^{VII} = -R;$$

$$\text{» M} \ldots x^{VIII} = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad y^{VIII} = -\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Równania momentów ciśnień R', R'', ... R^{VIII} i siły P względem osi Y i X będą :

$$R(z' - z^{V}) + \frac{R}{\sqrt{2}}(z'' - z^{IV} - z^{VI} + z^{VIII}) = 8\alpha h,$$

$$R(z''' - z^{VII}) + \frac{R}{\sqrt{2}}(z'' + z^{IV} - z^{VI} - z^{VIII}) = 8\beta h;$$

http://rcin.org.pl

równanie zaś wyrażające że summa ciśnień na podpory: $R' + R'' + \ldots + R^{VIII}$ równą jest sile P, daje:

$$z' + z'' + z''' + z^{IV} + z^{V} + z^{VI} + z^{VII} + z^{VIII} = 8h;$$

prócz tego będziemy mieli ośm równań odpowiadających ośmiu punktom: D, E, ... M:

$$z' = AR + C,$$

$$z'' = A\frac{R}{\sqrt{2}} + B\frac{R}{\sqrt{2}} + C,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z^{VII} = -BR + C,$$

$$z^{VIII} = A\frac{R}{\sqrt{2}} - B\frac{R}{\sqrt{2}} + C.$$

Z tych jedenastu równań znajdziemy najprzód wartości trzech spółczynników:

$$C = h, \quad B = \frac{2\beta h}{R^2}, \quad A = \frac{2\alpha h}{R^2};$$

a następnie ciśnienia $R', R'', \ldots, R^{VIII}$ na punkta D, E ... M. Będą one:

$$(o)\quad \left\{ \begin{aligned} R' &= \frac{P}{8}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\right), \\ R'' &= \frac{P}{8}\left(1 + \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} + \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right), \\ R''' &= \frac{P}{8}\left(1 + \frac{2\beta}{R}\right), \\ R^{IV} &= \frac{P}{8}\left(1 - \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} + \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right), \\ R^{V} &= \frac{P}{8}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right), \\ R^{VI} &= \frac{P}{8}\left(1 - \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} - \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right), \\ R^{VII} &= \frac{P}{8}\left(1 - \frac{2\beta}{R}\right), \\ R^{VIII} &= \frac{P}{8}\left(1 + \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} - \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \right.$$

Roztrząsanie wzorów (o). — Podobnie jak dla foremnego sześciokąta, widzimy że summa ciśnień na dwie podpory znajdujące się na średnicy koła jest ilością stałą i równą $\frac{2}{8}$ całkowitego ciśnienia, to jest że:

$$R' + R^{V} = R'' + R^{VI} = R''' + R^{VII} = R^{IV} + R^{VIII} = \frac{2}{8}P.$$

http://rcin.org.pl

Jeżeli punkt Q leży na osi X, ciśnienia w punktach znajdujących się na linji prostopadłéj do téj osi są jednakowe :

$$R'' = R^{VIII} = \frac{P}{8}\left(1 + \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}}\right); \quad R''' = R^{VII} = \frac{P}{8}; \quad R^{IV} = R^{VI} = \frac{P}{8}\left(1 - \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}}\right);$$

ciśnienia w punktach F i L leżących na osi Y są więc niezależne od położenia punktu Q na osi X. Co zaś do summy ciśnień wywieranych na podpory znajdujące się na linii równoległéj do osi X, jest ona ilością stałą, tak że :

$$R' + R^{V} = R'' + R^{IV} = R^{VI} + R^{VIII} = \frac{1}{4}P.$$

Podobnnież, dla punktu Q położonego na osi Y, będzie :

$$R' = R^{V} = \frac{P}{8}; \quad R'' = R^{IV} = \frac{P}{8}\left(1 + \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right); \quad R^{VI} = R^{VIII} = \frac{P}{8}\left(1 - \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right);$$

$$R'' + R^{VIII} = R''' + R^{VII} = R^{IV} + R^{VI} = \frac{1}{4}P.$$

Porównajmy teraz wzory dla ośmiokąta ze wzorami (k) znalezionymi dla kwadratu DEFH na fig. 3, lub EHKM na fig. 6. Oznaczając ciśnienia w punktach E, H, K, M, kiedy ciało spoczywa na czterech tylko podporach, przez (R'), (R''), $R''')$, (R^{IV}), znajdujemy :

$$(R') = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} + \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right) = 2R'',$$

$$(R'') = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} + \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right) = 2R^{IV},$$

$$(R''') = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} - \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right) = 2R^{VI},$$

$$(R^{IV}) = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} - \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right) = 2R^{VIII}.$$

Pozostałe cztery ciśnienia : R', R''', R^{V} i R^{VII} w punktach D, F, I, L ośmiokąta odpowiadać będą ciśnieniom $[R']$, $[R'']$, $[R''']$, $[R^{IV}]$ w tychże punktach, wtenczas kiedy ciało ma tylko te cztery punkta oparcia, to jest dla kwadratu DFIL ; tak że dla takiego kwadratu wzory będą następujące :

$$(k') \quad \left\{\begin{aligned} [R'] &= \frac{P}{4}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\right) = 2R', \\ [R''] &= \frac{P}{4}\left(1 + \frac{2\beta}{R}\right) = 2R''', \\ [R'''] &= \frac{P}{4}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right) = 2R^{V}, \\ [R^{IV}] &= \frac{P}{4}\left(1 - \frac{2\beta}{R}\right) = 2R^{VII}. \end{aligned}\right.$$

Przekonamy się o tém rozpatrując wprost przypadek kwadratu DFIL, dla którego równania do

http://rcin.org.pl

rozwiązania będą :

$$R(z' - z''') = 4\alpha h,$$

$$R(z'' - z^{IV}) = 4\beta h,$$

$$z' + z'' + z''' + z^{IV} = 4h;$$

$$\left\{\begin{aligned} z' &= AR + C, \\ z'' &= BR + C, \\ z''' &= -AR + C, \\ z^{IV} &= -BR + C, \end{aligned}\right.$$

są one prostsze od tych, które służyły dla kwadratu DEFH, na fig. 3.

Wyznaczenie obwodu ciśnienia dodatnego. — Kontur, po za który nie powinien padać punkt Q, będzie ośmiokątem otrzymanym w następujący sposób : wykreśliwszy dwa kwadraty EHKM i DFIL połączywszy środki ich boków, utworzymy dwa inne kwadraty : *fild* i *ehkm*; część spólna tych ostatnich stanowić będzie szukany obwód. Dla okazania tego dosyć będzie (z powodu symetryi figury) ograniczyć się znalezieniem konturu dla jednego jakiegokolwiek z czterech kątów utworzonych przez osie X i Y.

I tak, niech np. punkt Q znajduje się w kącie FOD, to jest α i β są dodatne; powiadamy że w tym razie punkt Q nie powinien wychodzić po za linię łamaną NSTU. W saméj rzeczy, powinniśmy zapewnić się najprzód że R^{VI} nie staje się odjemném, czyli że najmniejszą jego wartością może być tylko zero ; a to pociąga za sobą warunek żeby punkt Q nie padał po za prostą :

$$\frac{2\alpha}{R\sqrt{2}} + \frac{2\beta}{R\sqrt{2}} = 1,$$

którą będzie linia *fd*; gdyż dla $\alpha = 0$, $\beta = \frac{R\sqrt{2}}{2} = Of$; a dla $\beta = 0$, $\alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2} = Od$.

Lecz ażeby teraz i wszystkie inne ciśnienia były dodatnemi punkt Q, znajdując się na linii *fd*, nie powinien przekraczać po za pewne jéj punkta ; gdyż dla takiego położenia punktu Q otrzymujemy następujące wyrażenia :

$$R' = \frac{P}{8}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\right), \qquad R''' = \frac{P}{8}\left(1 + \sqrt{2} - \frac{2\alpha}{R}\right),$$

$$R'' = \frac{P}{4}, \qquad R^{IV} = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{2\alpha}{R\sqrt{2}}\right),$$

$$R^{VI} = 0, \qquad R^{V} = \frac{P}{8}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\right),$$

$$R^{VIII} = \frac{P}{4}\cdot\frac{2\alpha}{R\sqrt{2}}, \qquad R^{VII} = \frac{P}{8}\left(1 - \sqrt{2} + \frac{2\alpha}{R}\right);$$

które pokazują że największą wartością jaką przyjąć możemy na α jest $\alpha = \frac{R}{2} = OU$, albowiem dla

http://rcin.org.pl

$\alpha > \frac{R}{2}$, R^{V} byłoby odjemném; tak że punkt T będzie jedném ze skrajnych położeń punktu Q na linii *fd*.

Jeżeli zaś wyrazimy ciśnienia na podstawy w funkcyi β, to znajdziemy :

$$R'' = \frac{P}{4}, \qquad R' = \frac{P}{8}\left(1 + \sqrt{2} - \frac{2\beta}{R}\right),$$

$$R''' = \frac{P}{8}\left(1 + \frac{2\beta}{R}\right), \qquad R^{V} = \frac{P}{8}\left(1 - \sqrt{2} + \frac{2\beta}{R}\right),$$

$$R^{IV} = \frac{P}{4}\cdot\frac{2\beta}{R\sqrt{2}}, \qquad R^{VII} = \frac{P}{8}\left(1 - \frac{2\beta}{R}\right),$$

$$R^{VI} = 0 \qquad R^{VIII} = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{2\beta}{R\sqrt{2}}\right);$$

ztąd wnosimy że β nie powinno przewyższać $\frac{R}{2} = VS$, gdyż wtedy R^{VII} byłoby odjemném. Punkt S będzie zatem drugiém skrajném położeniem punktu Q na prostéj *fd*.

Nie trudno jest obaczyć z ogólnych wzorów (*o*), że inne położenia punktu Q w kącie FOD, dające wartości dodatne na wszystkie ciśnienia, będą proste TU i SN równoległe do osi Y i X. Pomijając dalszą dyskussyę, podajemy wartości ciśnień znalezione dla pięciu szczególnych położeń punktu Q, a mianowicie : dla punktów U, N, T, S i punktu ε powstałego z przecięcia się prostéj ST ze średnicą koła EO.

U	N	T	S	ε
$\alpha = \frac{R}{2},\ \beta = o$	$\left(\alpha = o,\ \beta = \frac{R}{2}\right)$	$\alpha = \frac{R}{2},\ \beta = \frac{R}{2}(\sqrt{2} - 1)$	$\alpha = \frac{R}{2}(\sqrt{2} - 1),\ \beta = \frac{R}{2}$	$\alpha = \beta = \frac{R}{2\sqrt{2}}$
$R' = \frac{P}{4}$	$R' = \frac{P}{8}$	$R' = \frac{P}{4}$	$R' = \frac{P}{8}\sqrt{2}$	$R' = \frac{P}{8}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$
$R'' = \frac{P}{8}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$	$R'' = \frac{P}{8}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$	$R'' = \frac{P}{4}$	$R'' = \frac{P}{4}$	$R'' = \frac{P}{4}$
$R''' = \frac{P}{8}$	$R''' = \frac{P}{4}$	$R''' = \frac{P}{8}\sqrt{2}$	$R''' = \frac{P}{4}$	$R''' = \frac{P}{8}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$
$R^{IV} = \frac{P}{8}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$	$R^{IV} = \frac{P}{8}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$	$R^{IV} = \frac{P}{8}(2 - \sqrt{2})$	$R^{IV} = \frac{P}{8}\sqrt{2}$	$R^{IV} = \frac{P}{8}$
$R^{V} = 0$	$R^{V} = \frac{P}{8}$	$R^{V} = 0$	$R^{V} = \frac{P}{8}(2 - \sqrt{2})$	$R^{V} = \frac{P}{8}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$
$R^{VI} = \frac{P}{8}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$	$R^{VI} = \frac{P}{8}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$	$R^{VI} = 0$	$R^{VI} = 0$	$R^{VI} = 0$
$R^{VII} = \frac{P}{8}$	$R^{VII} = 0$	$R^{VII} = \frac{P}{8}(2 - \sqrt{2})$	$R^{VII} = 0$	$R^{VII} = \frac{P}{8}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$
$R^{VIII} = \frac{P}{8}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$	$R^{VIII} = \frac{P}{8}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$	$R^{VIII} = \frac{P}{8}\sqrt{2}$	$R^{VIII} = \frac{P}{8}(2 - \sqrt{2})$	$R^{VIII} = \frac{P}{8}$.

http://rcin.org.pl

Porównanie wypadków zawartych w téj tablicy z figurą 6 pokazuje, że ciśnienia na podpory znajdujące się na prostopadłéj do linii łączącéj punkt Q ze środkiem koła są sobie równe.

Zastosowanie liczebne wzorów (*o*). — O ile wyprowadzenie wzorów dla wielokątów foremnych upraszcza rachunki, zdarzające się przy zastosowaniach praktycznych, okaże następujący liczebny przykład.

W jednym z projektów, zbiornik dla przechowywania wody spoczywał na ośmiu słupach (montants) jednakowego poprzecznego przecięcia, osadzonych w ośmiu wrytych w ziemię ciosach umieszczonych w wierzchołkach ośmiokąta foremnego. Odległość osi pionowéj budowli od środków ciężkości powierzchni zetknięcia słupów z odpowiedniemi kamieniami była : $R = 2^m,537$ (fig. 7); a ciężar

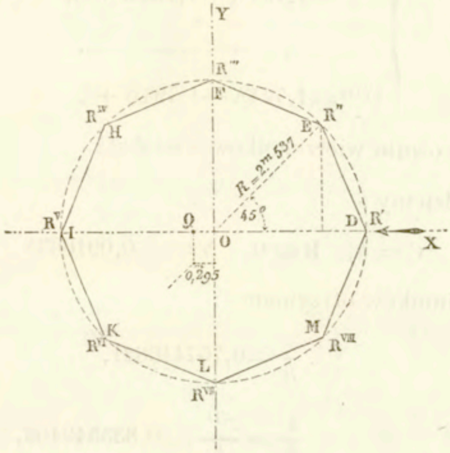

Fig. 7.

całéj budowli wraz z wodą napełniającą zbiornik, był równym $P = 91340^{\text{kilg}}$. Siła P nie przechodziła przez punkt O, albowiem wziętém było pod uwagę działanie wiatru na tę konstrukcyę; w skutek tego, biorąc kierunek wiatru za oś X, punkt Q, w którym wypadkowa spotykała płaszczyznę ośmiokąta, znajdował się na odległości $OQ = 0^m,295$. Podpory były zatém ciśnione nie jednakowo i zadanie polegało na znalezieniu największego ciśnienia, na jakie każda z nich, przy zmianie kierunku wiatru, mogła być wystawioną.

Nie mając przygotowanych w tym celu wzorów, należało zastosować do uważanego przypadku wzory ogólne (1), (2), (3) i (4) podane na wstępie niniejszego artykułu, w skutek tego wypadło wykonać przygotowawcze rachunki, które przy wzorach (*o*) zostają usunięte. I tak, biorąc $\cos 45° = 0,70711$ znajdujemy najprzód :

$$
\begin{aligned}
x' &= 2^m,537, & y' &= o,\\
x'' &= 1,794, & y'' &= 1,794,\\
x''' &= 0, & y''' &= 2,537,\\
x^{IV} &= -1,794, & y^{IV} &= 1,794,\\
x^{V} &= -2,537, & y^{V} &= 0,\\
x^{VI} &= -1,794, & y^{VI} &= -1,794,\\
x^{VII} &= 0, & y^{VII} &= -2,537,\\
x^{VIII} &= 1,794, & y^{VIII} &= -1,794,
\end{aligned}
$$

Zważywszy że $\alpha = -0,295$, a $\beta = 0$, i że powierzchnie $\omega', \omega'', \ldots \omega^{\text{VIII}}$ są sobie równe, równania (1), (2) i (3) stają się :

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} 2,537z' + 1,794(z'' + z^{\text{VIII}} - z^{\text{IV}} - z^{\text{V}} - z^{\text{VI}}) = -8 \times 0,295h, \\ 2,537(z''' - z^{\text{VII}}) + 1,794(z'' + z^{\text{IV}} - z^{\text{VI}} - z^{\text{VIII}}) = 0, \\ z' + z'' + z''' + z^{\text{IV}} + z^{\text{V}} + z^{\text{VI}} + z^{\text{VII}} + z^{\text{VIII}} = 8h. \end{array}\right.$$

a równania (4) dadzą ośm równań :

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l} z' = 2,537\text{A} + \text{C}, \\ z'' = 1,794\,\text{A} + 1,794\text{B} + \text{C}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^{\text{VIII}} = 1,794\text{A} - 1,794\text{B} + \text{C}. \end{array}\right.$$

odpowiadających spółrzędnym ośmiu wierzchołków wielokąta.

Z tego szeregu wzorów znajdziemy :

$$\text{C} = h, \quad \text{B} = 0, \quad \text{A} = -0,091667h,$$

a następnie, po wykonaniu rachunków otrzymamy :

$$\frac{z'}{h} = 0,767440821,$$

$$\frac{z''}{h} = \frac{z^{\text{VIII}}}{h} = 0,835549402,$$

$$\frac{z'''}{h} = \frac{z^{\text{VII}}}{h} = 1,$$

$$\frac{z^{\text{IV}}}{h} = \frac{z^{\text{VI}}}{h} = 1,164450598,$$

$$\frac{z^{\text{V}}}{h} = 1,232559179.$$

Ponieważ wyrażenie ogólne dla ciśnienia jest : $\text{R}^{(n)} = k\omega z^{(n)}$, a z założenia $\text{P} = k\Omega h = 8k\omega h$, więc

$$\text{R}^{(n)} = \frac{\text{P}}{8} \cdot \frac{z^{(n)}}{h};$$

że zaś $\frac{\text{P}}{8} = \frac{91340^{\text{kg}}}{8} = 11417^{\text{k}},5$, zatém uskuteczniwszy rachunki tym wzorem wskazane i uporządkowawszy otrzymane ciśnienia podług liczebnéj ich wartości, otrzymamy ostatecznie :

$$\text{R}^{\text{V}} = 14072,7^{\text{kg}},$$

$$\text{R}^{\text{IV}} = \text{R}^{\text{VI}} = 13295,0,$$

$$\text{R}''' = \text{R}^{\text{VII}} = 11417,5,$$

$$\text{R}'' = \text{R}^{\text{VIII}} = 9540,0,$$

$$\text{R}' = 8762,3.$$

http://rcin.org.pl

Podpora I, znajdująca się w kierunku wiatru, będzie więc ponosić największe ciśnienie; przewyższa ono ciśnienie średnie $\frac{P}{8}$, na jakie wszystkie podpory byłyby wystawione, gdyby nie było działania wiatru, o 2655^{kg}, co stanowi około $0{,}23\,\frac{P}{8}$; tak, że w naszym przykładzie, wprowadzenie w rachunek siły wiatru pociąga za sobą, przy obliczaniu powierzchni podpór, zwiększenie działającego na nie ciężaru tak dalece że można go uważać jako prawie równy: $\frac{P}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{P}{8}$.

Gdyby, nie mając wzorów (o), znaną nam była sama tylko własność figur foremnych iż dla nich:

$$C=h,\quad B=\frac{2\beta h}{R^2},\quad A=\frac{2\alpha h}{R^2},$$

nie mielibyśmy wtedy potrzeby pisania trzech pierwszych równań (a), zważywszy że $B=0$, albowiem $\beta=0$ i obrachowawszy A, przeszlibyśmy wprost do równań (b).

Przy wzorach zaś (o) zgóry przygotowanych, rachunek jest daleko prostszym, albowiem znajomość spółrzędnych $x' y',\ldots x^{VIII}, y^{VIII}$, staje się zbyteczną; gdyż wartości $\frac{z'}{h},\ldots\frac{z^{VIII}}{h}$, to jest ilości w nawiasie we wzorach (o), są wyrażone w funkcyi promienia koła i spółrzędnych samego tylko punktu Q.

V. Pięciokąt foremny. — Przy systemie osi X i Y wskazanym na figurze 8, spółrzędne rozmaitych punktów wyrażą się w następujący sposób:

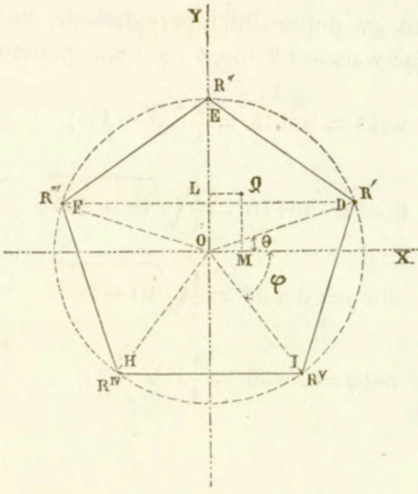

Fig. 8.

dla punktu D ... $x'=R\cos\theta$, $y'=R\sin\theta$;

» E ... $x''=0$, $y''=R$;

» F ... $x'''=-R\cos\theta$, $y'''=R\sin\theta$;

» H ... $x^{IV}=-R\cos\varphi$, $y^{IV}=-R\sin\varphi$;

» I ... $x^{V}=R\cos\varphi$, $y^{V}=-R\sin\varphi$.

http://rcin.org.pl

wskutek czego równania nasze będą :

$$\mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\theta(z' - z''') + \mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\varphi(z^{\mathrm{V}} - z^{\mathrm{IV}}) = 5\alpha h,$$

$$\mathrm{R}z'' + \mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\theta(z' + z''') - \mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\varphi(z^{\mathrm{IV}} + z^{\mathrm{V}}) = 5\delta h,$$

$$z' + z'' + z''' + z^{\mathrm{IV}} + z^{\mathrm{VI}} = 5h;$$

$$\begin{cases} z' = \mathrm{AR}\,\mathrm{dos}\,\theta + \mathrm{BR}\,\mathrm{wst}\,\theta + \mathrm{C}, \\ z'' = \mathrm{BR} + \mathrm{C}, \\ z''' = -\mathrm{AR}\,\mathrm{dos}\,\theta + \mathrm{BR}\,\mathrm{wst}\,\theta + \mathrm{C}, \\ z^{\mathrm{IV}} = -\mathrm{AR}\,\mathrm{dos}\,\varphi - \mathrm{BR}\,\mathrm{wst}\,\varphi + \mathrm{C}, \\ z^{\mathrm{V}} = \mathrm{AR}\,\mathrm{dos}\,\varphi - \mathrm{BR}\,\mathrm{wst}\,\varphi + \mathrm{C}. \end{cases}$$

Rozwiązując pierwsze trzy równania, znajdziemy na trzy spółczynniki wyrażenia :

$$\mathrm{A} = \frac{h}{2\mathrm{R}^2} \cdot \frac{5\alpha}{\mathrm{dos}^2\theta + \mathrm{dos}^2\varphi};$$

$$\mathrm{B} = \frac{h}{2\mathrm{R}^2} \cdot \frac{25\delta - 5\mathrm{R}(1 + 2\,\mathrm{wst}\,\theta - 2\,\mathrm{wst}\,\varphi)}{2 + 3\,\mathrm{wst}^2\theta + 3\,\mathrm{wst}^2\varphi + 4\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\varphi + 2\,\mathrm{wst}\,\varphi - 2\,\mathrm{wst}\,\theta};$$

$$\mathrm{C} = h\left[1 - \frac{1}{2\mathrm{R}} \cdot \frac{5\delta(1 + 2\,\mathrm{wst}\,\theta - 2\,\mathrm{wst}\,\varphi) - \mathrm{R}(1 + 2\,\mathrm{wst}\,\theta - 2\,\mathrm{wst}\,\varphi)^2}{2 + 3\,\mathrm{wst}^2\theta + 3\,\mathrm{wst}^2\varphi + 4\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\varphi + 2\,\mathrm{wst}\,\varphi - 2\,\mathrm{wst}\,\theta}\right];$$

nie mają one formy otrzymywanéj w poprzednich przykładach, ale przekonamy się natychmiast, że ta różnica jest pozorną, wstawiając wartości kątów θ i φ. I tak, ponieważ $\theta = 18^\circ$, a $\varphi = 54^\circ$, więc :

$$\mathrm{wst}\,\theta = \mathrm{wst}\,18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1);$$

$$\mathrm{dos}\,\theta = \mathrm{dos}\,18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

$$\mathrm{dos}\,\varphi = \mathrm{wst}\,36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$\mathrm{wst}\,\varphi = \mathrm{dos}\,36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1);$$

a zatém :

$$\mathrm{dos}^2\theta + \mathrm{dos}^2\varphi = \frac{5}{4},$$

$$1 + 2\,\mathrm{wst}\,\theta - 2\,\mathrm{wst}\,\varphi = 0,$$

$$2 + 3\,\mathrm{wst}^2\theta + 3\,\mathrm{wst}^2\varphi + 4\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\varphi + 2\,\mathrm{wst}\,\varphi - 2\,\mathrm{wst}\,\theta = \frac{25}{4};$$

Zkąd znajdujemy na A, B, C, znane już nam wyrażenia :

$$\mathrm{A} = \frac{2\alpha h}{\mathrm{R}^2}, \quad \mathrm{B} = \frac{2\delta h}{\mathrm{R}^2}, \quad \mathrm{C} = h;$$

http://rcin.org.pl

a na ciśnienia w punktach D, E,... I następujące wzory :

$$(p)\quad \begin{cases} R' = \frac{P}{5}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\operatorname{dos}18^\circ + \frac{2\beta}{R}\operatorname{wst}18^\circ\right), \\ R'' = \frac{P}{5}\left(1 + \frac{2\beta}{R}\right), \\ R''' = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\operatorname{dos}18^\circ + \frac{2\beta}{R}\operatorname{wst}18^\circ\right), \\ R^{IV} = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\operatorname{wst}36^\circ - \frac{2\beta}{R}\operatorname{dos}36^\circ\right), \\ R^{V} = \frac{P}{5}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\operatorname{wst}36^\circ - \frac{2\beta}{R}\operatorname{dos}36^\circ\right). \end{cases}$$

Otóż, zważywszy że :

$$\operatorname{wst}18^\circ = 0,3090170,$$
$$\operatorname{dos}18^\circ = 0,9510565,$$
$$\operatorname{wst}36^\circ = 0,5877853,$$
$$\operatorname{dos}36^\circ = 0,8090169,$$

i ograniczając się trzema tylko dziesiętnemi cyframi, powyższe wyrażenia, po wstawieniu w nie wartości na wst i dos, staną się łatwiejszemi do zastosowań i będą :

$$(p^{bis})\quad \begin{cases} R' = \frac{P}{5}\left(1 + 1,902\frac{\alpha}{R} + 0,618\frac{\beta}{R}\right), \\ R'' = \frac{P}{5}\left(1 + 2\frac{\beta}{R}\right), \\ R''' = \frac{P}{5}\left(1 - 1,902\frac{\alpha}{R} + 0,618\frac{\beta}{R}\right), \\ R^{IV} = \frac{P}{5}\left(1 - 1,176\frac{\alpha}{R} - 1,618\frac{\beta}{R}\right), \\ R^{V} = \frac{P}{5}\left(1 + 1,176\frac{\alpha}{R} - 1,618\frac{\beta}{R}\right). \end{cases}$$

Uwaga. — Gdyby pięciokąt odniesionym był do systemu osi wskazanego fig. 9, spółrzędne punktów I, D,... H, przybrałyby postać :

dla punktu I... $x_1 = R\operatorname{dos}\psi$, $y_1 = R\operatorname{wst}\psi$,

» D... $x_2 = -R\operatorname{dos}2\psi$, $y_2 = R\operatorname{wst}2\psi$,

» E... $x_3 = -R$, $y_3 = 0$,

» F... $x_4 = -R\operatorname{dos}2\psi$, $y_4 = -R\operatorname{wst}2\psi$,

» H... $x_5 = R\operatorname{dos}\psi$, $y_5 = -R\operatorname{wst}\psi$

http://rcin.org.pl

Oznaczając a i b spółrzędne punktu Q, przy teraźniejszym systemie osi X i Y, i postępując jak zazwyczaj, przyszlibyśmy do następujących wyrażeń na A, B i C :

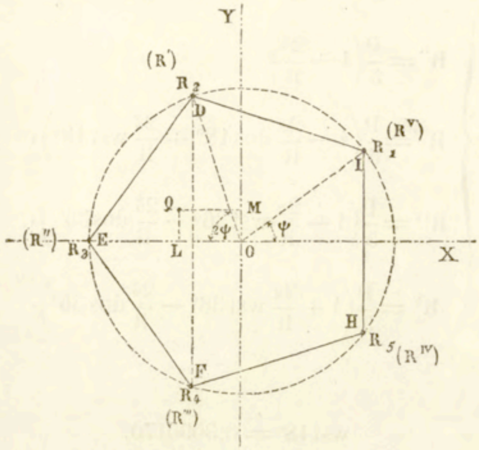

Fig. 9.

$$A_1 = \frac{h}{2R^2} \cdot \frac{25a + 5R(1 + 2\mathrm{dos}\,2\psi - 2\mathrm{dos}\,\psi)}{2 + 3\mathrm{dos}^2\psi + 3\mathrm{dos}^2 2\psi + 2\mathrm{dos}\,\psi - 2\mathrm{dos}\,2\psi + 4\mathrm{dos}\,\psi\,\mathrm{dos}\,2\psi},$$

$$B_1 = \frac{h}{2R^2} \cdot \frac{5b}{\mathrm{wst}^2\psi + \mathrm{wst}^2 2\psi},$$

$$C_1 = h\left[1 + \frac{1}{2R} \cdot \frac{5a(1 + 2\mathrm{dos}\,2\psi - 2\mathrm{dos}\,\psi) + R(1\ 2\mathrm{dos}\,2\psi - 2\mathrm{dos}\,\psi)^2}{2 + 3\mathrm{dos}^2\psi + 3\mathrm{dos}^2 2\psi + 2\mathrm{dos}\,\psi - 2\mathrm{dos}\,2\psi + 4\mathrm{dos}\,\psi\,\mathrm{dos}\,2\psi}\right],$$

które, po wstawieniu wartości na wst i dos kątów ψ i 2ψ, gdzie $\psi = 36°$, sprowadzą się do :

$$A_1 = \frac{2ah}{R^2}, \quad B_1 = \frac{2bh}{R^2}, \quad C_1 = h;$$

albowiem : $1 + 2\mathrm{dos}2\psi - 2\mathrm{dos}\,\psi = 0$; $\mathrm{wst}^2\psi + \mathrm{wst}^2 2\psi = \frac{5}{4}$; a mianownik w wyrażeniach na A i C będzie równym $\frac{25}{4}$.

Z pięciu zaś równań :

$$z_1 = A_1 R\,\mathrm{dos}\,\psi + B_1 R\,\mathrm{wst}\,\psi + C_1,$$

$$z_2 = -A_1 R\,\mathrm{dos}\,2\psi + B_1 R\,\mathrm{wst}\,2\psi + C,$$

$$z_3 = -A_1 R + C_1,$$

$$z_4 = -A_1 R\,\mathrm{dos}\,2\psi - B_1 R\,\mathrm{wst}\,2\psi + C_1,$$

$$z_5 = A_1 R\,\mathrm{dos}\,\psi - B_1 R\,\mathrm{wst}\,\psi + C_1,$$

http://rcin.org.pl

otrzymamy następujące wartości ciśnień R_1, R_2... R_5 :

$$(p_1)\quad \begin{cases} R_1 = \frac{P}{5}\left(1 + \frac{2a}{R}\operatorname{dos} 36^\circ + \frac{2b}{R}\operatorname{wst} 36^\circ\right), \\ R_2 = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{2a}{R}\operatorname{wst} 18^\circ + \frac{2b}{R}\operatorname{dos} 18^\circ\right), \\ R_3 = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{2a}{R}\right), \\ R_4 = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{2a}{R}\operatorname{wst} 18^\circ - \frac{2b}{R}\operatorname{dos} 18^\circ\right), \\ R_5 = \frac{P}{5}\left(1 + \frac{2a}{R}\operatorname{dos} 36^\circ - \frac{2b}{R}\operatorname{wst} 36^\circ\right). \end{cases}$$

Gdybyśmy chcieli wyrazić te ciśnienia w funkcyi spółrzędnych α i β, należałoby we wzorach (p_1) wstawić : $-\beta$ za a, i α za b (fig. 8 i 9) ; otrzymalibyśmy ztąd :

$$R_1 = R^{V}, \quad R_2 = R', \quad R_3 = R'', \quad R_4 = R''', \quad R_5 = R^{IV};$$

co być powinno, albowiem na fig. 8 i na fig. 9 punkt Q ma to samo położenie, a ciśnienia R_1 i R^V, R_2 i R',... R_5 i R^{IV} są ciśnieniami tychże samych wierzchołków pięciokąta.

Roztrząsanie wzorów (p). — Dodając do siebie R' i R''', R^{IV} i R^V, otrzymujemy dla wszelkiego położenia punktu Q :

$$R' + R''' = \frac{2}{5}P\left(1 + \frac{2\beta}{R}\operatorname{wst} 18^\circ\right),$$

$$R^{IV} + R^{V} = \frac{2}{5}P\left(1 - \frac{2\beta}{R}\operatorname{dos} 36^\circ\right).$$

Jeżeli punkt Q znajduje się na osi X, wtedy całkowite ciśnienie P rozkłada się na pięć podpór w ten sposób że :

$$R'' = \frac{P}{5},$$

$$R' + R''' = R^{IV} + R^{V} = \frac{2}{5}P.$$

W razie zaś jeżeli punkt ten leży na osi Y, wtedy ciśnienia w punktach D i F, H i I znadujących się na linii prostopadłéj do téj osi, są sobie równe i mają wartość :

$$R' = R''' = \frac{P}{5}\left(1 + \frac{2\beta}{R}\operatorname{wst} 18\right),$$

$$R^{IV} = R^{V} = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{2\beta}{R}\operatorname{dos} 36\right).$$

Jeżeli punkt Q pada w środku ciężkości 0 figury, wszystkie podpory są ciśnione jednostajnie ciśnieniem równém $\frac{P}{5}$.

Wyznaczenie obwodu ciśnienia dodatnego. — Obwodem ciśnienia dodatnego dla pięciokąta

http://rcin.org.pl

foremnego będzie podobny mu pięciokąt *defhi* (fig. 10), otrzymany w następujący sposób: poprowa-

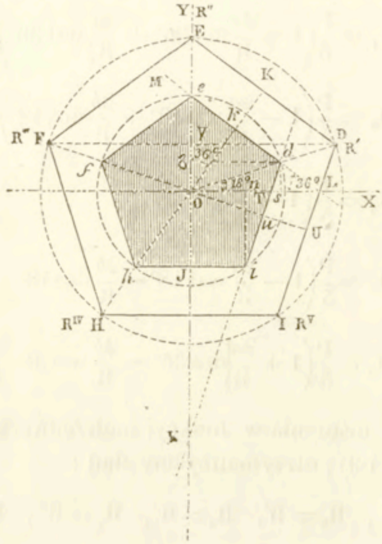

Fig. 10.

dziwszy przez punkt L, w którym bok DI danego nam pięciokąta przecina oś X, linię LM równoległe do DE, zakreślmy promieniem O*e* okrąg koła, przecinający LM w dwóch punktach *e* i *d*, i dający linię *de*, która stanowić będzie bok szukanego pięciokąta. Albo inaczéj: poprowadziwszy apotemę OK danego pięciokąta, weźmy $Ok = \frac{R}{2}$; przez punkt *k* poprowadźmy równoległą LM do DE, która przetnie oś Y w punkcie *e*; zakreślając jak poprzednio promieniem O*e* okrąg koła, otrzymamy szukany bok *ed*. Prosta *de*, nie tylko có do wielkości, lecz i co do *położenia*, stanowić będzie jednę z linij szukanego obwodu. Dla udowodnienia tego dosyć będzie, z powodu symetryi figury DEFHI względem osi Y, rozebrać tylko dwa przypadki: 1) kiedy punkt Q pada w kącie EOX i 2) kiedy on znajduje się w kącie XON.

Jeżeli punkt Q pada w kącie EOX, to jest jeżeli we wzorach (*p*) α i β są dodatne, należy wtedy dobrać takie wartości na α i β, ażeby R''', R^{IV} i R^{V} były dodatnemi, albo co najmniéj, równemi zeru. Uważając przypadek kiedy $R^{IV} = 0$, spółrzędne α i β powinny zadość czynić równaniu:

$$\alpha \operatorname{wst} 36^0 + \beta \operatorname{dos} 36^0 = \frac{R}{2}\;; \tag{a}$$

czyli punkt Q winien się znajdować na prostéj LM; gdyż łatwo się przekonać, że:

$$\text{dla } \alpha = 0,\quad \beta \text{ będzie} = \frac{R}{2 \operatorname{dos} 36^0} = Oe,$$

$$\text{dla } \beta = 0,\qquad \alpha = \frac{R}{2 \operatorname{wst} 36^0} = OL\,.$$

W saméj rzeczy, z trójkątów O*ke* i OKE otrzymujemy:

$$Ok : OK = Oe : OE,$$

czyli:

$$\frac{R}{2} : \frac{1}{4} R\left(\sqrt{5} + 1\right) = Oe : R\,;$$

zkąd :

$$Oe = \frac{2R}{\sqrt{5}+1} = \frac{R}{2\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)} = \frac{R}{2\mathrm{dos}\,36^0};$$

z trójkąta zaś OkL mamy :

$$Ok = OL\ \mathrm{wst}\,36^0,$$

ztąd :

$$OL = \frac{R}{2\,\mathrm{wst}\,36^0}.$$

Uwaga. — Geometryczne znaczenie spółrzędnych Oe i OL okaże się z następujących znanych z geometryi związków (*) :

$$\mathrm{wst}\,18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \frac{\text{apotema } 5^{\text{ta}} \text{ gwiazdzistego}}{R},$$

$$\mathrm{dos}\,18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{\text{apot. } 10^{\text{ta}} \text{ wypukłego}}{R} = \frac{\frac{1}{2}\text{ boku } 5^{\text{ta}} \text{ gwiazdzistego}}{R},$$

$$\mathrm{wst}\,36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{\text{apot. } 10^{\text{ta}} \text{ gwiazdzistego}}{R} = \frac{\frac{1}{2}\text{ boku } 5^{\text{ta}} \text{ wypukłego}}{R},$$

$$\mathrm{dos}\,36^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \frac{\text{apot. } 5^{\text{ta}} \text{ wypukłego}}{R};$$

w skutek czego będziemy mieli :

$$Oe = \frac{R}{2\mathrm{dos}\,36^0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{\frac{1}{4}R(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{OK};$$

więc Oe jest połową linii η zadość czyniącéj proporcyi :

$$\eta : R = R : OK.$$

Podobnież :

$$OL = \frac{R}{2\mathrm{wst}\,36^0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{R^2}{\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{R^2}{DE} = \xi,$$

gdzie ξ zadość czyni związkowi : $\xi : R = R : DE.$

Wartości OL i Oe mogą więc być wykreślone geometrycznie, i linia otrzymana z połączenia punktów L i e będzie równoległą do boku DE danego nam pięciokąta.

Ażeby znaleźć na linii eL granicę, któréj punkt Q przechodzić nie powinien, należy obaczyć jak się

(*) G.-H. Niewęgłowski, *Geometrya*, wydanie drugie. Paryż, 1869 r., str. 257.

http://rcin.org.pl

wyrażają wartości R^V i R'''. Otóż, z warunku (a) wypada :

$$\frac{2\beta}{R}\operatorname{dos}36^0 = 1 - \frac{2a}{R}\operatorname{wst}36^0\ ;$$

więc ze wzorów (p), po wstawieniu téj wartości, znajdziemy że :

$$R^V = \frac{P}{5}\cdot\frac{4\alpha}{R}\operatorname{wst}36^0;$$

zatém R^V będzie dodatném dla wszelkiego α, czyli że położenie punktu Q na prostéj eL nie wpływa na znak ciśnienia R^V.

Przejdźmy teraz do R''' i na mocy warunku (a) wyraźmy wartość R''' w funkcyi β. Ponieważ :

$$\operatorname{wst}36^0 = 2\operatorname{wst}18^0\operatorname{dos}18^0,$$

zatém :

$$\frac{2\alpha}{R}\operatorname{dos}18^0 = \frac{2\alpha}{R}\operatorname{wst}36^0\cdot\frac{1}{2\operatorname{wst}18^0} = \frac{1-\frac{2\beta}{R}\operatorname{dos}36^0}{2\operatorname{wst}18^0}\ ;$$

w skutek czego znajdziemy :

$$R''' = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{R-2\beta\operatorname{dos}36^0}{2R\operatorname{wst}18^0} + \frac{2\beta}{R}\operatorname{wst}18^0\right) = \frac{P}{5}\cdot\frac{2R\operatorname{wst}18^0+2\beta-R}{2R\operatorname{wst}18^0}.$$

Ponieważ najmniejszą wartością na R''' może być tylko zero, najmniejszą wartością β może być tylko ta, która zadość czyni równaniu :

$$2\beta + 2R\operatorname{wst}18^0 = R,$$

więc skrajna wartość na β jest :

$$\beta = \frac{R}{2} - R\operatorname{wst}18^0 = \frac{R}{2} - \text{apot. } 5^{\text{ta}} \text{ gwiazdzistego} = \frac{R}{2} - \frac{1}{4}R(\sqrt{5}-1) = \frac{R}{4}(3-\sqrt{5})$$

$$= \frac{R}{4}\cdot\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}} = R\cdot\frac{1}{3+\sqrt{5}}\ ;$$

a to jest nic innego jak rzędna dS, gdyż z trójkąta dOS mamy :

$$dS = Od\operatorname{wst}18^0 = Oe\operatorname{wst}18^0 = \frac{R}{2}\cdot\frac{\operatorname{wst}18^0}{\operatorname{dos}36^0} = \frac{R}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{R}{2}\,\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)^2}$$

$$= \frac{R}{2}\cdot\frac{4}{6+2\sqrt{5}} = R\cdot\frac{1}{3+\sqrt{5}}\ ;$$

punkt d będzie zatem skrajném położeniem punktu Q na linii CL.

Ale niżéj zobaczymy że R''' będzie dodatném przy rzędnéj β mniejszéj od dS; tylko wtedy R^{IV} nie będzie zerem, to jest punkt Q nie znajdzie się na prostéj eL.

Rozbierzmy przypadek kiedy punkt Q znajduje się w kącie XON. Jeżeli we wzorach (p) zamienimy

http://rcin.org.pl

β na $-\beta$, w otrzymanych przez to wyrażeniach na R′, R″, ... R^V, spółrzędne α i β będą wartościami samoistemi, i zobaczymy że R^V zawsze będzie dodatném, zaś inne cztery ciśnienia wyrażą się :

$$R' = \frac{P}{5}\left(1 + \frac{2\alpha}{R}\operatorname{dos} 18^\circ - \frac{2\beta}{R}\operatorname{wst} 18^\circ\right),$$

$$R'' = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{2\beta}{R}\right),$$

$$R''' = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\operatorname{dos} 18^\circ - \frac{2\beta}{R}\operatorname{wst} 18^\circ\right),$$

$$R^{IV} = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{2\alpha}{R}\operatorname{wst} 36^\circ + \frac{2\beta}{R}\operatorname{dos} 36^\circ\right).$$

Najmniejsza wartość na R‴, czyli zero, dáje równanie :

(6)
$$\alpha \operatorname{dos} 18^\circ + \beta \operatorname{wst} 18^\circ = \frac{R}{2},$$

zkąd dla $\alpha = 0$ znajdujemy $\beta = \frac{R}{2 \operatorname{wst} 18^\circ} = ON,$

» » $\beta = 0$ » $\alpha = \frac{R}{2 \operatorname{dos} 18^\circ} = OT,$

gdzie wartości ON i OT otrzymają się prowadząc przez punkt *d* linię *d*N równoległą do boku DI danego nam pięciokąta.

Istotnie, wyprowadziwszy apotemę OU, będziemy mieli : $Ou = \frac{R}{2}$, i trójkąty podobne O*d*S i O*u*N dadzą :

$$ON : Ou = Od : dS,$$

czyli :

$$ON : \frac{R}{2} = \frac{R}{2 \operatorname{dos} 36^\circ} : \frac{R}{2} \cdot \frac{\operatorname{wst} 18^\circ}{\operatorname{dos} 36^\circ};$$

zkąd :

$$ON = \frac{R}{2 \operatorname{wst} 18^\circ};$$

z trójkątów zaś O*d*S i OTN wypada :

$$OT : ON = dS : OS,$$

czyli :

$$OT : \frac{R}{2 \operatorname{wst} 18^\circ} = \frac{R}{2} \cdot \frac{\operatorname{wst} 18^\circ}{\operatorname{dos} 36^\circ} : \frac{R}{2 \operatorname{dos} 36^\circ} \operatorname{dos} 18^\circ;$$

ztąd :

$$OT = \frac{R}{2 \operatorname{dos} 18^\circ}.$$

http://rcin.org.pl

Nadmieńmy że linie ON i OT mogą być otrzymane wprost z geometrycznego wykreślenia, gdyż :

$$\mathrm{ON} = \frac{\mathrm{R}}{2\,\mathrm{wst}\,18^\circ} = \frac{\mathrm{R}^2}{2.\frac{1}{4}\mathrm{R}(\sqrt{5}-1)} = \frac{\mathrm{R}^2}{2.\mathrm{apot}.5^{\mathrm{ta}}\,\mathrm{gwiaźd.}} = \frac{\mathrm{R}^2}{2\,\mathrm{OV}},$$

$$\mathrm{OT} = \frac{\mathrm{R}}{2\,\mathrm{dos}\,18^\circ} = \frac{\mathrm{R}^2}{\frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{bok}\,5^{\mathrm{ta}}\,\mathrm{gwiaźd.}} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{FD}};$$

i prosta wynikająca z połączenia punktów T i N będzie równoległą do boku DI.

Jeżeli punkt Q nie wychodzi po za linię dN, ciśnienie R''' będzie dodatném. Należy teraz obaczyć jakich punktów téj linii punkt Q przekraczać nie powinien, ażeby inne trzy ciśnienia : R', R'' i R^{IV} były również dodatnemi.

Co do wartości R', wyrazi się ona na mocy związku :

$$\frac{2\alpha}{\mathrm{R}}\,\mathrm{dos}\,18^\circ = 1 - \frac{2\beta}{\mathrm{R}}\,\mathrm{wst}\,18^\circ,$$

wynikającego z warunku (b), w sposób następujący :

$$\mathrm{R}' = \frac{2}{5}\mathrm{P}\left(1 - \frac{2\beta}{\mathrm{R}}\mathrm{wst}18^\circ\right);$$

R' staje się zerem dla $\beta = \frac{\mathrm{R}}{2\,\mathrm{wst}\,18^\circ} = \mathrm{ON}$; dla $\beta < \mathrm{ON}$, ciśnienie R' jest dodatném; więc położenie punktu Q na prostéj dN nie wpływa na znak wartości R', i to ciśnienie zostaje dodatném nawet dla β odjemnego, to jest, kiedy punkt Q pada na część prostéj Td, położoną w kącie EOX.

Ale wartość β jest skrępowaną innymi jeszcze warunkami. I tak, nie powinna ona być większą od $\frac{\mathrm{R}}{2}$, albowiem przy $\beta > \frac{\mathrm{R}}{2}$ ciśnienie R'' byłoby odjemném. Maximum wartości β jest więc : $\beta = \frac{\mathrm{R}}{2} = \mathrm{OJ}$, co na linii dN wyznacza punkt i; zatém punkt Q nie powinien przekraczać punktu i, czyli że część iN linii dN wchodzić w szukany obwód nie będzie.

Pozostaje zbadać wartość na R^{IV}. Zważywszy że :

$$\frac{2\alpha}{\mathrm{R}}\,\mathrm{wst}\,36^\circ = \frac{2\alpha}{\mathrm{R}}\,\mathrm{dos}\,18^\circ\,\mathrm{wst}\,18^\circ = 2\,\mathrm{wst}\,18^\circ\left(1 - \frac{2\beta}{\mathrm{R}}\,\mathrm{wst}\,18^\circ\right),$$

otrzymujemy :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{IV}} = \frac{\mathrm{P}}{5}\left(1 - 2\,\mathrm{wst}\,18^\circ + \frac{4\beta}{\mathrm{R}}\,\mathrm{wst}^2\,18^\circ + \frac{2\beta}{\mathrm{R}}\,\mathrm{dos}\,36^\circ\right).$$

Minimum wartości β będzie zatém wartość wyciągnięta z równania :

$$2\,\mathrm{wst}\,18^\circ - \frac{4\beta}{\mathrm{R}}\,\mathrm{wst}^2\,18^\circ - \frac{2\beta}{\mathrm{R}}(\mathrm{dos}^2\,18^\circ - \mathrm{wst}^2\,18^\circ) = 1,$$

czyli :

$$2\,\mathrm{wst}\,18^\circ - \frac{2\beta}{\mathrm{R}} = 1;$$

http://rcin.org.pl

zkąd:

$$\beta = \text{R wst} 18^\circ - \frac{\text{R}}{2} = -\left(\frac{\text{R}}{2} - \text{R wst} 18^\circ\right).$$

Otóż, widzieliśmy wyżéj że:

$$\frac{\text{R}}{2} - \text{R wst} 18^\circ = d\text{S} = \text{O}\delta,$$

znak — oznacza że rzędna β liczoną jest wgórę nad osią OX; więc skrajném położeniem punktu Q na linii dN będzie punkt d.

Łatwo jest przekonać się z ogólnych wzorow (p), że jeżeli punkt Q leży na linii iJ, wszystkie ciśnienia są dodatne; tak że dla punktu Q padającego po prawéj stronie osi Y, konturem ciśnienia dodatnego będzie linia ediJ; konturem zaś całkowitym będzie pięciokąt $defhi$.

Gdyby punkt Q padał po za obręb pięciokąta $defhi$, i gdyby zatem jedna lub dwie z pięciu wartości R′, R″,... R^{V} były odjemnemi, należałoby wtedy zwrócić się do ogólnych wzorów podanych na wstępie niniejszego artykułu, i wyznaczyć z nich ciśnienia w pozostałych czterech lub trzech punktach, uważanych za jedyne punkta którémi ciało spoczywa na gruncie.

W celu dopełnienia naszego rozbioru, szukaliśmy wartości ciśnień R′, R″... R^{V} dla szczególnych położeń punktu Q na obwodzie $defhi$, a mianowicie: 1) dla trzech wierzchołków: e, d, i, pięciokąta; 2) dla punktów: k, u, środków boków pięciokąta; nareszcie 3) dla punktów T, J, w których boki di, ik przecinają się z osiami X, Y. Otrzymane wypadki podajemy w następującéj tablicy:

e	d	i
$\alpha = 0,\ \beta = \text{O}e = \frac{\text{R}}{2\text{dos}\,36^0}$	$\alpha = \text{OS} = \frac{\text{R}}{2}\cdot\frac{\text{dos}18^0}{\text{dos}36^0};\ \beta = d\text{S} = \frac{\text{R}}{2}\cdot\frac{\text{wst}18^0}{\text{dos}36^0}$	$\alpha = \text{O}n = \frac{\text{R}}{2}\cdot\frac{1-\text{wst}18^0}{\text{dos}\,18^0},\ b = in = -\frac{\text{R}}{2},$
$\text{R}' = \frac{\text{P}}{5}\left(1 + \frac{\text{wst}\,18^\circ}{\text{dos}\,36^\circ}\right),$	$\text{R}' = \frac{\text{P}}{5}\left(1 + \frac{1}{\text{dos}\,36^0}\right),$	$\text{R}' = \frac{2}{5}\text{P}\,(1 - \text{wst}\,18^\circ),$
$\text{R}'' = \frac{\text{P}}{5}\left(1 + \frac{1}{\text{dos}36^0}\right),$	$\text{R}'' = \frac{\text{P}}{5}\left(1 + \frac{\text{wst}\,18^0}{\text{dos}\,36^0}\right),$	$\text{R}'' = 0,$
$\text{R}''' = \frac{\text{P}}{5}\left(1 + \frac{\text{wst}18^0}{\text{dos}36^0}\right),$	$\text{R}''' = 0,$	$\text{R}''' = 0,$
$\text{R}^{\text{IV}} = 0,$	$\text{R}^{\text{IV}} = 0,$	$\text{R}^{\text{IV}} = \frac{2}{5}\text{P}\,(1 - \text{wst}\,18^0),$
$\text{R}^{\text{V}} = 0.$	$\text{R}^{\text{V}} = \frac{\text{P}}{5}\left(1 + \frac{\text{wst}\,18^0}{\text{dos}\,36^0}\right).$	$\text{R}^{\text{V}} = \frac{\text{P}}{5}(1 + 4\,\text{wst}\,18^0).$

http://rcin.org.pl

k	u
$\alpha = \frac{R}{2} \text{wst}\, 36^\circ,\ \beta = \frac{R}{2} (\text{dos}\, 36^\circ),$	$\alpha = \frac{R}{2} \text{dos}\, 18^\circ,\ \beta = -\frac{R}{2} \text{wst}\, 18^\circ,$
$R' = \frac{P}{5} (1 + \text{dos}\, 36^\circ)$	$R' = \frac{P}{5} (1 + \text{dos}\, 36^\circ),$
$R'' = \frac{P}{5} (1 + \text{dos}\, 36^\circ),$	$R'' = \frac{P}{5} (1 - \text{wst}\, 18^\circ),$
$R''' = \frac{P}{5} (1 - \text{wst}\, 18^\circ),$	$R''' = 0,$
$R^{IV} = 0,$	$R^{IV} = \frac{P}{5} (1 - \text{wst}\, 18^\circ),$
$R^{V} = \frac{P}{5} (1\ \text{wst}\, 18^\circ).$	$R^{V} = \frac{P}{5} (1 + \text{dos}\, 36^\circ).$

T	J
$\alpha = OT = \frac{R}{2 \text{dos}\, 18^\circ},\ \beta = 0;$	$\alpha = 0,\ \beta = OJ = -\frac{R}{2};$
$R' = \frac{2}{5} P,$	$R' = \frac{P}{5} (1 - \text{wst}\, 18^\circ),$
$R'' = \frac{1}{5} P,$	$R'' = 0,$
$R''' = 0,$	$R''' = \frac{P}{5} (1 - \text{wst}\, 18^\circ),$
$R^{IV} = \frac{P}{5} (1 - 2\, \text{wst}\, 18^\circ),$	$R^{IV} = \frac{P}{5} (1 + \text{dos}\, 36^\circ),$
$R^{V} = \frac{P}{5} (1 + 2\, \text{wst}\, 18^\circ).$	$R^{V} = \frac{P}{5} (1 + \text{dos}\, 36^\circ).$

Z téj tablicy i z fig. 10 widzimy, że przy wszelkiém położeniu punktu Q, wierzchołki danego pięciokąta, znajdujące się na prostopadłéj do linii łączącéj punkt Q ze środkiem koła, ponoszą ciśnienia jednakowe.

Na zakończenie obecnego artykułu, porównajmy powierzchnię utworzonego przez podpory wielokąta z powierzchnią objętą odpowiednim mu konturem dodatnego na te podpory ciśnienia. Oznaczając pierwszą z tych powierzchni przez S_z, a drugą przez S_w, otrzymamy dla podanych powyżéj figur następujące wyrażenia :

$$\text{Trójkąt}\ldots\ldots \left\{ S_z = S_w = (3.R\sqrt{3})\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{3}{4} R^2\sqrt{3}\,; \right.$$

$$\text{Kwadrat}\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} S_z = (4.R\sqrt{2})\frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{2}}{2} = 2R^2, \\ S_w = (4.R)\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2} = R^2; \end{array} \right.$$

http://rcin.org.pl

$$\text{Sześciokąt} \ldots \left\{ \begin{array}{l} S_z = (6.R)\frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}, \\ S_w = \left(6.\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{1}{2}R^2\sqrt{3}; \end{array} \right.$$

$$\text{Ośmiokąt} \ldots \left\{ \begin{array}{l} S_z = \left(8.R\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2R^2\sqrt{2}, \\ S_w = [8.R(\sqrt{2}-1)]\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2} = 2R^2(\sqrt{2}-1); \end{array} \right.$$

$$\text{Pięciokąt} \ldots \left\{ \begin{array}{l} S_z = \left(5.\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}R(\sqrt{5}+1) = \frac{5}{16}R^2(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \\ S_w = \left(5.\frac{R}{1+\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{20}{16}R^2\frac{1}{1+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}. \end{array} \right.$$

Biorąc zaś stosunek tych powierzchni, znajdujemy :

$$\begin{array}{llr|c|l} \text{dla trójkąta} \ldots & \frac{S_z}{S_w} \ldots & = 1 & \ldots & S_w = S_z, \\ \text{» kwadratu} \ldots & \frac{S_z}{S_w} \ldots & = 2 & \ldots & S_w = 0{,}500\,S_z, \\ \text{» pięciokąta} \ldots & \frac{S_z}{S_w} = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) & = 2{,}618 & \text{zkąd} & S_w = 0{,}382\,S_z, \\ \text{» sześciokąta} \ldots & \frac{S_z}{S_w} \ldots & = 3 & \ldots & S_w = 0{,}333\,S_z, \\ \text{» ośmiokąta} \ldots & \frac{S_z}{S_w} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} & = 3{,}414 & \ldots & S_w = 0{,}293\,S_z \end{array}$$

Nareszcie, dobrze będzie zauważyć stosunki następujące :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_z \text{ dla kwadratu}}{S_z \text{ dla } 8^{ta}} = \frac{2R^2}{2R^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{S_w \text{ dla kwadratu}}{S_w \text{ dla } 8^{ta}} = \frac{R^2}{2R^2(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1{,}707 = 1{,}707\,\frac{S_z \text{ dla kwadratu}}{S_z \text{ dla } 8^{ta}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_z \text{ dla trójkąta}}{S_z \text{ dla } 6^{ta}} = \frac{\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}}{\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \\ \frac{S_w \text{ dla trójkąta}}{S_w \text{ dla } 6^{ta}} = \frac{\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot 3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 3\,\frac{S_z \text{ dla trójkąta}}{S_z \text{ dla } 6^{ta}}. \end{array} \right.$$

---

http://rcin.org.pl

http://rcin.org.pl