

7.73 — osrodki anizotropowe

4.42 — nośność graniczna

Prace doktorskie

Michał Basista

**RÓWNANIA KONSTITUTYWNE
I OCENA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ
OŚRODKÓW
ZE WSTĘPNĄ ANIZOTROPIĄ STRUKTURY**

41/1985

P. 269



WARSZAWA 1985

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca doktorska

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 lipca 1985 r.



Praca niniejsza była przygotowana pod kierunkiem Profesora Antoniego SAWCZUKA, który pozostanie dla autora wzorem Człowieka i Uczzonego.

56908



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark. wyd. 4,23 Ark.druk. 6

Oddano do drukarni w październiku 1985 r.

Nr zamówienia 564/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Michał Basista
Zakład Teorii Konstrukcji

RÓWNANIA KONSTITUTYWNE I OCENA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ OŚRODKÓW ZE WSTĘPNĄ ANIZOTROPIĄ STRUKTURY

Streszczenie

W pracy zastosowano teorię reprezentacji funkcji tensorowych do sformułowania równań konstytutywnych nieliniowej sprężystości i jednorodnych warunków plastyczności w przypadku ośrodków o strukturze anizotropowej. Rozpatrzono trzy typy wstępnej anizotropii materiału: anizotropię ukośną, ortotropię oraz anizotropię odpowiadającą kubicznemu systemowi symetrii kryształów. Wprowadzając tensory parametryczne charakteryzujące kierunkowość własności mechanicznych, uzyskano związki, które automatycznie spełniają wymagania symetrii materiału. Szczególną uwagę poświęcono zagadnieniu redukcji liczby generatorów tensorowych i niezmienników bazy tak, aby otrzymane niewielomianowe reprezentacje były minimalne. Dla wybranego typu anizotropii przeprowadzono porównanie liniowej części reprezentacji równania konstytutywnego sprężystości z klasycznym prawem Hooke'a. Wykorzystując otrzymane minimalne bazy funkcyjne, zaproponowano warunki plastyczności będące uogólnieniem izotropowego kryterium Hubera-Misesa, zawierające wszystkie możliwe kombinacje niezmienników tensorów naprężenia i anizotropii. Wspecyfikowano stałe materiałowe i wskazano niezbędne testy do ich wyznaczenia.

W drugiej części pracy dokonano oceny nośności granicz-

nej w przypadku, gdy materiał konstrukcji jest anizotropowy. Zastosowano twierdzenie statyczne teorii nośności granicznej do określenia dolnej oceny wielkości obciążeń niszczących dla materiałów plastycznie ortotropowych i warunku plastyczności Hilla. Przedstawiono wpływ anizotropii materiału na własności linii nieciągłości naprężeń oraz na zasady konstruowania układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Wskazano charakterystyczne cechy metody statycznej wynikające z anizotropii materiału. Podano przykłady oszacowania nośności granicznej równomiernie obciążonego klina, półprze-strzeni poddanej wciskaniu sztywnego stempla oraz pasma przecinanego przez dwa przeciwbieżne stemple.

1. Wstęp

Materiały anizotropowe, tzn. takie, których makroskopowe własności mechaniczne zależą od kierunku obciążenia, stanowią ważną klasę materiałów konstrukcyjnych w wielu dziedzinach inżynierii. Anizotropię wrodzoną, będącą wynikiem budowy molekularnej materiału, procesu formowania /obróbka plastyczna metali/ czy działań projektowo-konstrukcyjnych /zbrojenie, żebra/ należy odróżnić od anizotropii deformacyjnej, wywołanej przez odkształcenia trwałe lub przez rozwój wewnętrznych mikrodefektów struktury. Do typowych, naturalnych materiałów anizotropowych zaliczyć można drewno, skały sedymentacyjne i uwarstwione, niektóre grunty, materiały porowate. Osobną grupę stanowią takie materiały, jak: kompozyty, laminaty oraz materiały perforowane, których anizotropia została wywołana sztucznie, np. w celu poprawienia cech wytrzymałościowych.

W fizyce dużą rolę odgrywa anizotropia kryształów. Wykazano, iż istnieją 32 klasy geometrycznej symetrii kryształów, które tworzą 7 systemów krystalograficznych [1]. W mechanice ośrodków ciągłych rzadko mamy do czynienia z monokryształami, częściej natomiast z materiałami polikrystalicznymi. Istotne znaczenie przy opisie zachowania się takich materiałów ma tzw. zasada Neumanna, która mówi, że symetria własności fizycznych materiału krystalicznego w makroskali musi być co najmniej taka, jak symetria poszczególnych kryształów, z których jest on zbudowany [1].

Rozróżnia się anizotropię sprężystą i plastyczną. Stanowią one dwie odrębne cechy materiału i nie musi między nimi zachodzić żadne sprzężenie. Grupy stałych materiałowych opisujących cechy sprężyste i plastyczne należy więc rozpatrywać niezależnie. Klasyczną teorię liniowej sprężystości ośrodków anizotropowych można znaleźć w monografii [2], która oprócz podstawowych równań zawiera rozwiązania wielu zadań praktycznych. W teorii plastyczności anizotropia, rozumiana jako zależność granicy plastyczności od kierunku, pojawia się w dwóch grupach

związków: w warunku plastyczności i w prawie płynięcia. Istniejące teorie plastyczności ośrodków wstępnie anizotropowych przedstawione między innymi przez Misesa [3], Hilla [4], Olszaka i Urbanowskiego [5] oraz Sawczuka [6] przyjmują szczególne założenia w odniesieniu do postaci warunku plastyczności, prawa wzmocnienia oraz kierunku naprężeń głównych w stosunku do uprzywilejowanych kierunków struktury materiału. Jeżeli założymy ponadto stowarzyszone prawo płynięcia, nie mają one dostatecznej ogólności, gdyż np. w przypadku ośrodków sypkich prawo takie nie może być przyjęte nawet dla materiałów izotropowych [7]. Nie potrafią również wyjaśnić pewnych zjawisk doświadczalnych takich, jak trwałe odkształcenie anizotropowej próbki i związana z tym zmiana objętości pod wpływem hydrostatycznego ciśnienia, czy też niejednorodna deformacja takiej próbki w testach trójosiowych [8]. Celem większości prac poświęconych anizotropii plastycznej, a powstałych na gruncie klasycznej teorii plastyczności ośrodków izotropowych było sformułowanie kryteriów uplastycznienia dla pewnej grupy materiałów anizotropowych. Kryteria te nie przestrzegały żadnej ogólnej zasady co do liczby i typu niezmienników, niektóre zaś były bezpośrednio formułowane we współrzędnych tensora naprężenia. Równania konstytutywne formułowane w mechanice ośrodków ciągłych nie mogą naruszać pewnych fizycznych i matematycznych wymagań [9]. W szczególności, racjonalna teoria konstytutywna musi spełniać dwa aksjomaty: izotropii przestrzeni /obiektowości/ oraz materialnej niezmienniczości. Pierwszy z nich mówi, że własności materiału nie mogą zależeć od ruchu obserwatora lub inaczej - równanie konstytutywne musi być niezmiennicze względem sztywnych ruchów przestrzennego układu odniesienia. Aksjomat materialnej niezmienniczości zaś oznacza ten fakt, że równania konstytutywne muszą być niezmiennicze względem grupy transformacji ortogonalnych $\{S\}$ i translacji $\{T\}$ materialnego układu odniesienia. Te ograniczenia wynikają z warunków symetrii narzuconych przez $\{S\}$ i $\{T\}$ na układ odniesienia związany z ciałem. Oba aksjomaty mają podstawowe znaczenie przy formułowaniu związków konstytutywnych dla materiałów anizotropowych i będą dokładnie przeanalizowane w dalszej

części pracy.

Efektywnym narzędziem matematycznym, które w przypadku omawianych materiałów anizotropowych pozwala budować związki fizyczne nieliniowej sprężystości, warunki plastyczności, prawa płynięcia idealnej plastyczności i plastyczności ze wzmocnieniem oraz kryteria zniszczenia - jest teoria funkcji tensorowych i twierdzenia o ich reprezentacjach. Podejście oparte na teorii reprezentacji funkcji tensorowych zapewnia zarówno matematyczną przejrzystość, jak i wymaganą ogólność formułowanych równań konstytutywnych, której brak był zarzutem wobec klasycznych teorii anizotropowej plastyczności. Zbudowanie reprezentacji równania konstytutywnego, a więc określenie liczby i typu generatorów tensorowych i niezmienników bazy jest teoretycznie możliwe dla dowolnego kontinuum wykazującego kierunkowość własności sprężystych lub plastycznych. Zależność między tensorem naprężenia i odkształcenia w idealnej sprężystości, związek pomiędzy tensorem naprężenia a tensorem prędkości odkształceń plastycznych w idealnej plastyczności - oto najbardziej znane przykłady funkcji tensorowych od argumentów tensorowych. Warunki plastyczności - to skalarne funkcje tensora naprężenia, a więc skalarne funkcje jego podstawowych niezmienników. W klasie materiałów izotropowych wymienione funkcje muszą być izotropowe. W ogólności, powinny one być niezmiennicze przy każdej ortogonalnej transformacji układu współrzędnych mieszczącej się w podgrupie transformacji pełnej grupy ortogonalnej, charakteryzujących symetrię rozważanego materiału anizotropowego. Wykorzystując teorię reprezentacji można w zrozumiały sposób uwzględnić wymagania wynikające z zasad izotropii przestrzeni i materialnej niezmienniczości, a sformułowane tak równanie konstytutywne lub warunek plastyczności automatycznie spełnią wymagania symetrii materiału. Na reprezentacje można nakładać rozmaite więzy wewnętrzne takie, jak nieściśliwość w określonych kierunkach, np. w kierunkach zbrojenia, płaskie płynięcie, itd. W zależności od rozpatrywanego problemu oraz przeznaczenia formułowanych równań można pominąć niektóre człony reprezentacji - i tak pozostanie ona niezmiennicza względem grupy symetrii materiału - jeśli człony te mają drugorzędne znacze-

nie przy interpretacji wyników doświadczeń lub przy rozwiązywaniu zadań. Wydaje się przekonujące twierdzenie, że związki fizyczne oraz kryteria plastyczności w przypadku materiałów z wrodzoną anizotropią struktury wewnętrznej należy formułować przy zastosowaniu reprezentacji anizotropowych funkcji tensorowych.

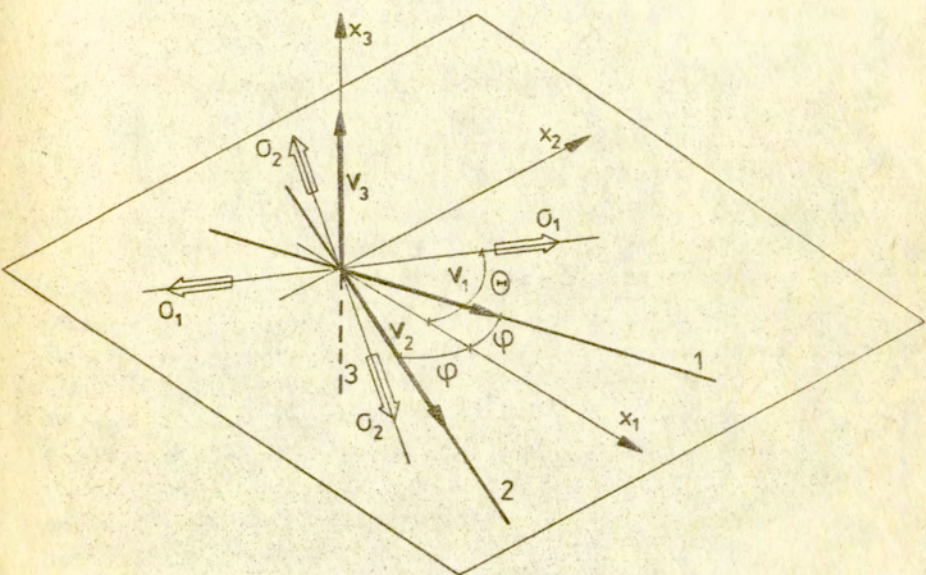
2. Cel i zakres pracy

Przedmiotem pracy są dwa zagadnienia mechaniki ośrodków wstępnie anizotropowych: zastosowanie reprezentacji funkcji tensorowych do formułowania równań konstytutywnych w przypadku ukośnej anizotropii oraz dolne oszacowania nośności granicznej a wrodzona anizotropia materiału. Wspólnym mianownikiem łączącym te dwie grupy problemów jest ta sama w obu przypadkach klasa materiałów anizotropowych o narzuconych własnościach kierunkowych. Cel pracy jest więc dwojaki.

Po pierwsze - wykorzystując teorię reprezentacji funkcji tensorowych i pojęcie tensorów parametrycznych charakteryzujących symetrię materiału, sformułować pełną, niesprowadzalną i niewielomianową reprezentację ogólnego, nieliniowego równania konstytutywnego sprężystości dla małych odkształceń w przypadku materiałów ukośnie anizotropowych tzn. takich, których dwa uprzywilejowane kierunki wewnętrznej budowy są nieortogonalne i nierównoważne w sensie własności mechanicznych, trzeci zaś kierunek jest normalny do płaszczyzny symetrii ciała wyznaczonej przez kierunki ukośne, rys.1. Posługując się językiem teorii reprezentacji - należy zbudować nieredukowalną reprezentację anizotropowej funkcji tensorowej typu

$$(2.1) \quad \mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{D}),$$

gdzie \mathbf{T} i \mathbf{D} są symetrycznymi tensorami o walencji 2, a grupa symetrii rozważanej funkcji odpowiada pryzmatycznej klasie symetrii kryształów systemu monoklinicznego [1]. Główne kierunki opisanej anizotropii mogą być identyfikowane np. z kierunkami włókien zbrojenia kompozytu albo z wyróżnionymi kierunkami deterioracji struktury materiału w postaci regularnych układów



Rys.1

mikroszczelin lub otworów. Następnie należy dokładnie rozpatrzeć przypadki szczególne:

a/ kierunki 1,2 pozostają ukośne względem siebie lecz równoważne pod względem własności mechanicznych /odmiana ortotropii/

b/ kierunki 1,2,3 są identyczne i wzajemnie ortogonalne /symetria kubiczna/.

Mając ogólne reprezentacje, dokonać porównania części liniowej z klasycznym prawem Hooke'a dla tego typu symetrii.

Sformułować ogólny warunek plastyczności dla materiałów o analizowanej strukturze wewnętrznej przyjmując dla ułatwienia, że własności plastyczne i sprężyste mają te same symetrie. Wspecyfikować warunek jednorodny w naprężeniach /uogólnienie warunku Misesa - Hilla/ przy zachowaniu wszystkich sprzężeń tensorów naprężenia i anizotropii plastycznej. Przedyskutować przypadki szczególne i przejście do izotropii. Rozpatrzeć płaski stan naprężenia, przedstawić identyfikację stałych materiałowych i wskazać niezbędne testy do ich wyznaczenia.

Po drugie - zastosować twierdzenie statyczne teorii nośności granicznej do oszacowania obciążeń niszczących w przypadku, gdy materiał konstrukcji jest ortotropowy i podlega warunkowi plastyczności jednorodnemu w naprężeniach. Z badać wpływ ortotropii materiału na własności linii nieciągłości naprężeń. Ustalić zasady konstruowania układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń i wskazać ich cechy szczególne w porównaniu z przypadkiem izotropowym. Rozwiązać zadania dolnej oceny nośności granicznej skarpy obciążonej równomiernym ciśnieniem, półprzestrzeni poddanej wciskaniu sztywnego stempla oraz pasma przecinanego przez dwa przeciwbieżne stemple. Ta część pracy ma wyraźnie aplikacyjny charakter, gdyż rozwiązania wymienionych przykładów można bezpośrednio wykorzystać w teorii nośności granicznej anizotropowych gruntów i skał.

3. Podstawy teorii reprezentacji funkcji tensorowych

W tym rozdziale przedstawimy przegląd najważniejszych wyników dotyczących czysto algebraicznego zagadnienia określenia zbiorów niezmienników i generatorów, tworzących reprezentację funkcji tensorowej, która pozostaje niezmiennicza względem pewnych grup transformacji mających znaczenie w mechanice kontinuum. Bibliografia tego zagadnienia jest bogata. Początki teorii funkcji tensorowych sięgają połowy lat czterdziestych i związane są z dwiema publikacjami: Reinera [10] oraz Pragera [11], w których po raz pierwszy pojawia się - klasyczny już dziś - izotropowy związek konstytutywny

$$(3.1) \quad \mathbf{E} = \beta_0 \mathbf{1} + \beta_1 \mathbf{C} + \beta_2 \mathbf{C}^2; \quad \beta_i = \beta_i(\text{tr} \mathbf{C}, \text{tr} \mathbf{C}^2, \text{tr} \mathbf{C}^3), \quad i=0,1,2,$$

gdzie \mathbf{E} , \mathbf{C} oznaczają tensory odkształcenia i naprężenia. Jednakże właściwy początek matematycznej teorii reprezentacji funkcji tensorowych dała praca Rivlina i Ericksena [12]. Problem wpływu symetrii materiału na postać tensorowego równania konstytutywnego można sprowadzić do zagadnień, którymi zajmuje się teoria niezmienniczości algebry wyższej [13].

Założmy, że pewna własność fizyczna materiału opisana jest za pomocą tensora \mathbf{X} o walencji r , który jest funkcją N -tensorów $\Phi^{(\nu)}$ ($\nu=1,2,\dots,N$) o walencji $r(\nu)$

$$(3.2) \quad \mathbf{X} = \mathcal{F}(\Phi^{(\nu)}).$$

Jeśli wprowadzimy kartezjański układ odniesienia X_j ($j=1,2,3$) i oznaczymy składowe \mathbf{X} oraz $\Phi^{(\nu)}$ w tym układzie jako $X_{i_1 \dots i_r}$ oraz $\Phi_{i_1 \dots i_{r(\nu)}}$, to równanie (3.2) przyjmie następującą postać

$$(3.3) \quad X_{i_1 \dots i_r} = \mathcal{F}_{i_1 \dots i_r}(\Phi_{p_1 \dots p_{r(\nu)}}^{(\nu)}).$$

Niech $Q = \|Q_{ij}\|$ będzie transformacją ortogonalną ($Q^T Q = \mathbb{1}$, $\det Q = \pm 1$) należąca do grupy S , która przekształca X_j w inny kartezjański układ współrzędnych \bar{X}_i

$$(3.4) \quad \bar{X}_i = Q_{ij} X_j.$$

Składowe tensorów $\bar{\Phi}^{(v)}$ w \bar{X}_i określone są wzorem

$$(3.5) \quad \bar{\Phi}_{i_1 \dots i_r}^{(v)} = Q_{i_1 j_1} \dots Q_{i_r j_r} \Phi_{j_1 \dots j_r}^{(v)}.$$

Jeśli transformacja Q reprezentuje symetrię materiału to składowe funkcji tensorowej \mathcal{F} muszą spełniać następującą zależność

$$(3.6) \quad \mathcal{F}_{i_1 \dots i_r}(\bar{\Phi}_{p_1 \dots p_r}^{(v)}) = Q_{i_1 j_1} \dots Q_{i_r j_r} \mathcal{F}_{j_1 \dots j_r}(\Phi_{p_1 \dots p_r}^{(v)}).$$

Jeśli funkcja tensorowa \mathcal{F} spełnia to równanie tożsamościowe dla każdej transformacji Q z grupy symetrii materialnej S , to nazywa się ją niezmienniczą względem grupy transformacji S . W przypadku materiałów izotropowych S jest pełną grupą ortogonalną O , a funkcja która czyni zadość równaniu (3.6) jest nazywana funkcją izotropową. S jest grupą ciągłą w przypadku izotropii i transwersalnej izotropii oraz skończoną /punktową/ grupą symetrii dla ortotropii i klas kryształów. Równanie (3.6) nakłada ograniczenia na postać funkcji \mathcal{F} . Powstaje zatem problem znalezienia najbardziej ogólnej reprezentacji tej funkcji zachowującej warunek niezmienniczości (3.6).

3.1. Reprezentacje wielomianowe

Zamiast ogólnej funkcji (3.2) wyspecyfikujemy dwie funkcje szczególne, które będą mieć zastosowanie w dalszej części pracy.

Rozważmy najpierw prawo konstytutywne, w którym skalär φ jest funkcją: i -tensorów symetrycznych II-go rzędu A_i ,

j -tensorów antysymetrycznych II-go rzędu \mathbf{W}_j oraz k -wektorów \mathbf{v}_k

$$(3.7) \quad \varphi = f(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k).$$

Warunek materialnej symetrii (3.6) przyjmie w tym przypadku postać

$$(3.8) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{S}: f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_i\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{W}_j\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{v}_k) = f(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k).$$

Rozważmy teraz równanie konstytutywne określające symetryczny tensor II-go rzędu

$$(3.9) \quad \mathbf{T} = \mathfrak{F}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k).$$

Założmy, że funkcja f oraz składowe funkcji \mathfrak{F} w przyjętym układzie współrzędnych są wielomianami w odniesieniu do składowych argumentów $\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k$.

Problem określenia reprezentacji skalarnej funkcji f polega na wyznaczeniu zbioru podstawowych niezmienników wielomianowych /zwanego dalej w skrócie - bazą wielomianową/ I_1, I_2, \dots, I_p takiego, że dowolny niezmiennik tych samych argumentów $\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k$ może być wyrażony jako wielomian od niezmienników podstawowych I_1, I_2, \dots, I_p . Reprezentacja funkcji (3.7) jest wówczas dowolnym wielomianem utworzonym z tych niezmienników. Podstawowym twierdzeniem teorii niezmienników jest twierdzenie Hilberta [14], z którego wynika, że dla każdego skończonego zbioru wektorów i tensorów dowolnej walencji istnieje skończona baza wielomianowa. Baza wielomianowa jest niesprowadzalna jeśli żaden z jej elementów nie może być wyrażony w postaci wielomianu od pozostałych niezmienników. Zdarza się, iż baza wielomianowa jest niesprowadzalna, a mimo to istnieją między jej niezmiennikami uwikłane zależności wielomianowe. Jednakże zależności tego typu nie pozwalają wyrazić explicite żadnego

z niezmienników bazy jako wielomianu od pozostałych - są to tzw. syzygie i ich występowanie nie ma wpływu na redukcję liczby elementów bazy. Wyznaczaniem niesprowadzalnych zbiorów niezmienników wielomianowych dla dowolnej liczby wektorów i tensorów o walencji 2 zajmowali się: Rivlin [15], Spencer i Rivlin [16, 17, 18, 19], Spencer [20, 21], Smith [22, 23]. Ograniczenia nakładane na minimalne bazy wielomianowe przez transwersalną izotropię i ortotropię materiału badań Adkins [24, 25]. Pomocą przy poszukiwaniu zbiorów niezmienników podstawowych w konkretnych zadaniach może być Tablica 1.

Symetria	Argumenty	Źródło
Izotropia /pełna grupa ortogonalna/	L-wektorów, M-tensorów II-go rzędu symetrycznych, N-antysymetrycznych tensorów II-go rzędu	Smith [22]
Transwersalna izotropia	L-wektorów, M-symetrycznych tensorów II-go rzędu	Adkins [25]
Klasy kryształów	1 wektor, 1 symetryczny tensor II-go rzędu L-wektorów	Smith, Smith Rivlin [26]

Tabl. 1

Jeżeli znamy wielomianową bazę niezmienników, problem reprezentacji funkcji tensorowej (3.9) polega teraz na znalezieniu zbioru generatorów tensorowych G_i , niezmienniczych względem grupy S, gdyż jak wykazali Rivlin i inni [12, 13, 15] funkcję (3.8) można przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$(3.10)_1 \quad T = \alpha_i G_i,$$

gdzie α_i są dowolnymi, skalarnymi funkcjami wielomianowymi niezmienników bazy:

$$(3.10)_2 \quad \alpha_i = \alpha_i(I_1, I_2, \dots, I_p).$$

Wartości funkcji α_i są więc wielomianowymi niezmiennikami argumentów (A_i, W_j, W_k) względem grupy symetrii S . Istnieje kilka metod znajdowania generatorów na podstawie znajomości bazy wielomianowej [72]. Jawne wielomianowe reprezentacje funkcji izotropowych i anizotropowych, skalarnych i tensorowych są zebrane w monograficznej pracy Spencera [13] - cennej, gdyż usystematyzowano w niej wszystkie wyniki nt. reprezentacji ogłoszone do roku 1968.

3.2. Reprezentacje niewielomianowe

Pipkin i Wineman [28, 29] udowodnili, że założenie o wielomianowym charakterze funkcji \mathfrak{F} we wzorze (3.2) lub (3.9) jest nieistotne i podyktowane jedynie "matematyczną wygodą", gdyż dla takich funkcji można wykorzystać wiele wyników klasycznej teorii niezmienników [30, 31, 32].

W pracach [28, 29] wykazano, że twierdzenie (3.10) jest słuszne bez jakichkolwiek założeń a priori w odniesieniu do natury funkcji \mathfrak{F} współczynniki α_i mogą być dowolnymi, skalarnymi funkcjami elementów bazy wielomianowej. Tak zbudowana reprezentacja jest kompletna ale najczęściej redukowalna, ponieważ niektóre niezmienniki bazy wielomianowej mogą być związane niewielomianowymi funkcjami skalarnymi, których istnienie baza taka dopuszcza. Zachodzi więc potrzeba ustalenia tzw. bazy funkcyjnej: mówimy, że zbiór niezmienników stanowi dla zadanych argumentów i grupy symetrii bazę funkcyjną, jeśli każdy inny niezmiennik tych samych argumentów da się wyrazić w postaci dowolnej funkcji skalarnej od niezmienników bazy. Między niezmiennikami minimalnej /niesprowadzalnej/ bazy funkcyjnej mogą występować złożone zależności algebraiczne ale takie, że żadnego z niezmienników nie można przedstawić w postaci skalarnej funkcji pozostałych, bowiem rozwikłanie takich zależ-

ności ze względu na jeden niezmiennik nie jest możliwe. Podobnie jak syzygie w przypadku bazy wielomianowej, zależności tego typu nie mają wpływu na redukcję liczby niezmienników bazy funkcyjnej.

Reprezentacja niewielomianowa jest nieredukowalna, jeśli baza funkcyjna jest nieredukowalna i żaden z generatorów nie da się wyrazić jako kombinacja liniowa innych generatorów ze współczynnikami będącymi dowolnymi funkcjami skalarnymi niezmienników bazy funkcyjnej. Boehler [33, 34] wykazał, iż w porównaniu z reprezentacją wielomianową reprezentacja niewielomianowa tej samej funkcji tensorowej zawiera w ogólnym przypadku mniej generatorów tensorowych i niezmienników. Reprezentacje niewielomianowe mają zatem podwójną zaletę: po pierwsze - uwalniają ograniczające założenie o wielomianowym charakterze funkcji, po drugie - pozwalają uzyskać bardziej zwięzłą postać rozwiązanych równań konstytutywnych.

3.3 Ogólne reprezentacje funkcji izotropowych

Założmy teraz, że funkcje f i \mathcal{F} w związkach (3.7) i (3.9) są izotropowe, tzn. że wartości φ i \mathbf{T} są niezmiennicze względem dowolnej transformacji z pełnej grupy ortogonalnej \mathcal{O} .

Wang [35, 36, 37] i Smith [38, 39] studiowali niezależnie problem reprezentacji takich funkcji i podali ogólne twierdzenia, które pozwalają ustalić izotropową bazę funkcyjną w przypadku (3.7) i (3.9) oraz zbiór izotropowych generatorów w przypadku (3.9) dla dowolnego układu argumentów o walencji nie wyższej niż 2. Mając podstawowe niezmienniki I_1 i generatory \mathbf{G}_j można zbudować kanoniczną postać reprezentacji funkcji (3.9)

$$(3.11) \quad \mathbf{T} = \alpha_i \mathbf{G}_i,$$

gdzie α_i są dowolnymi funkcjami skalarnymi niezmienników bazy funkcyjnej I_1, I_2, \dots, I_i . Reprezentacje otrzymane przez Wanga i Smitha nie są identyczne. Prace [35-39] miały charakter kilkuletniej polemiki naukowej między obu autorami na łamach Archives for Rational Mechanics and Analysis oraz International Journal of Engineering Sciences. Ostatecznie, różnice zostały wyjaśnione przez Boehlera [40], który wykazał, że niektóre bazy funkcyjne wg Smitha zawierają zbędne niezmienniki; podobnie - generatory. Tablice 2 i 3 podajemy za tym właśnie autorem [34]. Zawierają one pełne i nieredukowalne zbiory generatorów i niezmienników /o ile argumenty funkcji są niezależne/ i z nich należy korzystać przy rozwiązywaniu konkretnych problemów. Stosowanie innych, zwłaszcza zaś wczesnych wyników Wanga [35] może prowadzić do reprezentacji niekompletnej lub nadmiernej.

Argumenty	Generatory
	1
A	A, A²
W	W²
v	v ⊗ v
A₁, A₂	A₁A₂ + A₂A₁, A₁²A₂ + A₂A₁², A₁A₂² + A₂²A₁
A, W	AW-WA, WAW, A²W-WA², WAW²-W²AW
A, v	v ⊗ Av + Av ⊗ v, v ⊗ A²v + A²v ⊗ v
W₁, W₂	W₁W₂ + W₂W₁, W₁W₂² + W₂²W₁, W₁²W₂ + W₂W₁²
W, v	Wv ⊗ Wv, v ⊗ Wv + Wv ⊗ v, Wv ⊗ W²v + W²v ⊗ Wv
v₁, v₂	v₁ ⊗ v₂ + v₂ ⊗ v₁
A, v₁, v₂	(v₁ ⊗ Av₂ + Av₂ ⊗ v₁) - (v₂ ⊗ Av₁ + Av₁ ⊗ v₂)
W, v₁, v₂	(v₁ ⊗ Wv₂ + Wv₂ ⊗ v₁) - (v₂ ⊗ Wv₁ + Wv₁ ⊗ v₂)

Tabl.2. Generatory G_i dla zadanego zbioru argumentów otrzymuje się biorąc wszystkie /nieuporządkowane/ kombinacje jednego, dwóch i trzech argumentów.

Argumenty	Niezmienniki
A	$\text{tr}A, \text{tr}A^2, \text{tr}A^3$
W	$\text{tr}W^2$
v	$v \cdot v$
A_1, A_2	$\text{tr}A_1A_2, \text{tr}A_1^2A_2, \text{tr}A_1A_2^2, \text{tr}A_1^2A_2^2$
A, W	$\text{tr}AW^2, \text{tr}A^2W^2, \text{tr}A^2W^2AW$
A, v	$v \cdot Av, v \cdot A^2v$
W_1, W_2	$\text{tr}W_1W_2$
W, v	$v \cdot W^2v$
v_1, v_2	$v_1 \cdot v_2$
A_1, A_2, A_3	$\text{tr}A_1A_2A_3$
A_1, A_2, W	$\text{tr}A_1A_2W, \text{tr}A_1^2A_2W, \text{tr}A_1A_2^2W, \text{tr}AW^2A_2W$
A, W_1, W_2	$\text{tr}AW_1W_2, \text{tr}AW_1^2W_2, \text{tr}AW_1W_2^2$
W_1, W_2, W_3	$\text{tr}W_1W_2W_3$
A_1, A_2, v	$A_1v \cdot A_2v$
A, v_1, v_2	$v_1 \cdot Av_2, v_1 \cdot A^2v_2$
W_1, W_2, v	$W_1v \cdot W_2v, W_1^2v \cdot W_2v, W_1v \cdot W_2^2v$
W, v_1, v_2	$v_1 \cdot Wv_2, v_1 \cdot W^2v_2$
A, W, v	$Av \cdot Wv, A^2v \cdot Wv, AWv \cdot W^2v$
A_1, A_2, v_1, v_2	$A_1v_1 \cdot A_2v_2 - A_1v_2 \cdot A_2v_1$
A, W, v_1, v_2	$Av_1 \cdot Wv_2 - Av_2 \cdot Wv_1$
W_1, W_2, v_1, v_2	$W_1v_1 \cdot W_2v_2 - W_1v_2 \cdot W_2v_1$

Tabl.3. Kompletną bazę funkcyjną dla danego zbioru zmiennych $(A_1, \dots, A_k, W_1, \dots, W_j, v_1, \dots, v_k)$ otrzymuje się biorąc wszystkie /nieuporządkowane/ kombinacje jednej, dwóch, trzech i czterech zmiennych przedstawionych w Tabelicy.

3.4. Metoda tensorów parametrycznych

Metoda tensorów parametrycznych, która zostanie przedstawiona w tym rozdziale umożliwia wykorzystanie izotropowych reprezentacji z tablic 2, 3 w przypadku, gdy rozważana grupa symetrii nie jest pełną grupą ortogonalną lecz jej podgrupą. Inaczej mówiąc, dzięki tej metodzie można formułować anizotropowe związki fizyczne stosując reprezentacje funkcji izotropowych, dość dobrze już opracowane.

Rozważmy ciało anizotropowe o zadanej symetrii struktury S , dla którego równanie (3.9) jest prawem konstytutywnym, a T , A_i , W_k , v_j oznaczają pewne wielkości fizyczne. Jest oczywiste, że funkcja tensorowa \mathcal{F} nie może być w tym przypadku izotropowa. Musi być natomiast niezmiennicza względem tych transformacji ortogonalnych, które należą do grupy symetrii $S \subset \mathcal{O}$. Siedow i Łochin [41, 42] wykazali, że anizotropia materiału charakteryzowana przez podgrupę S może być dostatecznie zdefiniowana przy pomocy skończonego zbioru tensorów P_i takiego, że

$$(3.12) \quad S = S_{P_1} \cap S_{P_2} \cap \dots \cap S_{P_n}$$

gdzie S_{P_i} oznacza grupę symetrii tensora P_i ; P_i jest nazywany w literaturze tensorem parametrycznym /lub strukturalnym/ opisującym anizotropię. W pracach [41, 42] określono tensory P dla wszystkich klas symetrii kryształów. Wprowadźmy tensory parametryczne do zbioru argumentów równania (3.9)

$$(3.13) \quad T = F(A_1, A_2, \dots, A_l, W_1, W_2, \dots, W_j, v_1, v_2, \dots, v_k, P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Zależność (3.13) może być równaniem konstytutywnym pod warunkiem, że spełni wymagania zasady izotropii przestrzeni /rozd.1/:

$$(3.14) \quad \bigwedge Q \in \mathcal{O} : \mathbf{F}(\overline{\mathbf{A}}_i, \overline{\mathbf{W}}_j, \overline{\mathbf{v}}_k, \overline{\mathbf{P}}_n) = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{P}_n) ,$$

gdzie $\mathbf{F}, \mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{P}_n$ oznaczają wielkości przekształcone przez transformację \mathbf{Q} .

Warunek (3.14) mówi, że funkcja \mathbf{F} jest funkcją izotropową w odniesieniu do $(i + j + k + n)$ argumentów. Z drugiej strony

$$(3.15) \quad \bigwedge Q \in \mathcal{S} \subset \mathcal{O} : \overline{\mathbf{P}}_\ell = \mathbf{P}_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

Podstawiając (3.15) do (3.14) otrzymujemy

$$(3.16) \quad \bigwedge Q \in \mathcal{S} : \mathbf{F}(\overline{\mathbf{A}}_i, \overline{\mathbf{W}}_j, \overline{\mathbf{v}}_k, \overline{\mathbf{P}}_\ell) = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{P}_\ell).$$

Oznacza to, że \mathbf{F} jest anizotropową funkcją argumentów fizycznych $\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k$, typ anizotropii zaś jest charakteryzowany przez grupę symetrii \mathcal{S} ustalonych tensorów parametrycznych \mathbf{P}_ℓ . Reprezentacja izotropowej funkcji (3.14) jest jednocześnie reprezentacją dla wielkości \mathbf{T} - anizotropowej funkcji argumentów $\mathbf{A}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{v}_k$. Dla danej grupy symetrii \mathcal{S} zbiór tensorów parametrycznych nie jest określony jednoznacznie. Dlatego też reprezentacje rozważanych funkcji anizotropowych są kompletne ale niekoniecznie minimalne, nawet wówczas gdy reprezentacje izotropowych funkcji (3.13) są nieredukowalne. Powstają zatem dwa główne problemy: znalezienie właściwych tensorów parametrycznych dla analizowanego typu anizotropii oraz redukcja liczby niezmienników i generatorów tak, aby otrzymana reprezentacja była minimalna. Do tej pory nie znamy ogólnej metody oceny czy zbudowana reprezentacja jest minimalna. Dokonujemy tego poprzez bezpośrednią analizę niezmienników i macierzy generatorów w przyjętym układzie współrzędnych. Jedynie w przypadku wielomianowej bazy niezmienników istnieje metoda oparta na teorii reprezentacji grup [43] przydatna w tym sensie, że pozwala określić kiedy należy zaprzestać poszukiwania zależności wielomianowych

między niezmiennikami bazy. Jeśli grupa symetrii materiału jest skończona, to pewną pomocą przy ustalaniu zbioru generatorów reprezentacji niewielomianowej może być twierdzenie Markowa-Wakulenki /rozd. 7 /. Dzięki temu twierdzeniu można wskazać zbędne generatory, o ile znana jest nieredukowalna wielomianowa baza niezmienników. Niemniej, wykrycie explicite skalarnych zależności pomiędzy elementami bazy oraz ustalenie ewentualnych kombinacji liniowych generatorów, które w świetle zasad podanych w rozdziałach 3.1-3.3 byłyby podstawą do usunięcia niezmiennika czy generatora, wymaga zawsze bezpośredniej analizy.

Na zakończenie rozdziału dodajmy, że opisaną technikę korzystania z reprezentacji funkcji izotropowych przy formułowaniu anizotropowych związków konstytutywnych podał Boehler [34, 44]. Najważniejsze jest tu twierdzenie, że (3.13) jest funkcją izotropową. Od dawna wielu autorów wykorzystuje to twierdzenie jako oczywiste, powtarzając co najwyżej intuicyjne uzasadnienie Boehlera. Ścisły dowód ogólnego twierdzenia, iż wprowadzenie odpowiednich tensorów parametrycznych do zbioru argumentów anizotropowego związku konstytutywnego czyni zeń związek izotropowy podał ostatnio Rychlewski [45], szczególnie zaś przypadek, gdy dziedziną i przeciwdziedziną funkcji anizotropowej jest zbiór tensorów II-go rzędu rozważył I-Shih-Liu [46].

4. Sformułowanie problemu I.

Weźmy pod uwagę ośrodek ukośnie anizotropowy scharakteryzowany w rozdziale 2, rys.1. Uprzywilejowane kierunki anizotropii 1, 2, 3 /dla ustalenia uwagi można je utożsamić z trzema rodzinami włókien zbrojeniowych, gęsto ułożonych w izotropowej matrycy/ są rozmyte w objętości materiału. Jest to więc dwufazowe, anizotropowe kontinuum, które w każdym punkcie wykazuje te same własności kierunkowe. Taka idealizacja struktury materiałów anizotropowych dała pozytywne wyniki przy budowaniu równań konstytutywnych sprężystości i warunków plastyczności w klasycznej ortotropii [33, 34] transwersalnej

izotropii [47, 49, 8].

Główny problem pierwszej części pracy brzmi: dla opisanego materiału anizotropowego należy sformułować ogólne, pełne i nieredukowalne reprezentacje: nieliniowego równania konstytutywnego idealnej sprężystości, [59] oraz jednorodnego w na-prężeniach warunku plastyczności, [60].

W tym celu posłużymy się metodą tensorów parametrycznych. Różnica w stosunku do prac [33, 34, 47, 49, 8], w których zastosowano tę metodę w przypadku transversalnej izotropii i konwencjonalnej ortotropii polega na tym, że główne kierunki rozważanej anizotropii 1, 2 są nieortogonalne. Fakt ten odzwierciedla się w występowaniu innych symetrii materiału, które muszą być uwzględnione przy konstruowaniu reprezentacji. Ponadto, osie kartezjańskiego układu odniesienia nie mogą się pokryć z kierunkami anizotropii 1, 2, 3 - traci więc swe znaczenie większość z upraszczających zależności między generatorami i niezmiennikami bazy, słusznych w przypadku ortotropii i transversalnej izotropii. Mogą natomiast powstać inne zależności tego typu wynikające z orientacji uprzywilejowanych kierunków i intensywności własności anizotropowych wzdłuż tych kierunków. Wszystkie takie związki należy ustalić, gdyż inaczej reprezentacja nie będzie minimalna. Wymaganie nieredukowalnej postaci funkcji jest podstawowym zadaniem w teorii reprezentacji.

5. Nieliniowa sprężystość

Niech rozważany materiał anizotropowy będzie idealnie sprężysty. Wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych na stałe związany z ciałem taki, że osie x_1, x_2 są dwusiecznymi kątów $/2\varphi, 180^\circ - 2\varphi /$ utworzonych przez uprzywilejowane kierunki anizotropii 1, 2, które nie są równoważne w sensie własności mechanicznych, rys.1. Trzy wektory $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ położone wzdłuż włókien 1, 2, 3 mogłyby definiować kierunkowy charakter materiału [50]. Przyjmijmy, że \mathbf{V}_1 i \mathbf{V}_3 są wektorami jednostkowymi podczas, gdy

$$(5.1) \quad |\mathbf{v}_2| = k |\mathbf{v}_1|, \quad k > 0,$$

gdzie k jest znanym współczynnikiem względnej intensywności anizotropii w kierunkach 1 i 2. Jednakże w świetle metody przedstawionej w rozdziale 3.4, wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ nie mogą być argumentami parametrycznymi równania konstytutywnego sprężystości

$$(5.2) \quad \mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{D}),$$

gdzie \mathbf{T} , \mathbf{D} oznaczają odpowiednio tensory naprężenia i odkształcenia, ponieważ przecięcie grup symetrii wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ nie odpowiada grupie symetrii materiału. Grupa symetrii materiału odpowiadająca pryzmatycznej klasie symetrii kryształów z systemu monoklinicznego [1] jest generowana przez transformację identycznościową - \mathbf{I} , symetrię środkową - \mathbf{C} , obroty o 180° wokół osi x_3 - $\hat{\mathbf{D}}_3$ oraz przez odbicia względem płaszczyzny normalnej do x_3 - \mathbf{R}_3 , [51]:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{I}: & \quad \mathbf{v}_1 \longrightarrow \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2 \longrightarrow \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_3 \longrightarrow \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{C}: & \quad \mathbf{v}_1 \longrightarrow -\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2 \longrightarrow -\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_3 \longrightarrow -\mathbf{v}_3, \\ \hat{\mathbf{D}}_3: & \quad \mathbf{v}_1 \longrightarrow -\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2 \longrightarrow -\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_3 \longrightarrow \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{R}_3: & \quad \mathbf{v}_1 \longrightarrow \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2 \longrightarrow \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_3 \longrightarrow -\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Zgodnie z wynikami Siedowa i Łochina [41, 42], przykładowy zbiór tensorów parametrycznych dla tej grupy symetrii wygląda następująco

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \Omega &= \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{M}_{11} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{M}_{22} = \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{M}_{33} &= \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Każdy inny zbiór związany funkcyjnie z (5.4) w sposób jednoznaczny może również stanowić zbiór tensorów parametrycznych dla funkcji (5.2). Ponieważ \mathbf{T} i \mathbf{D} są tensorami parzystego stopnia, to dla rozważanej grupy symetrii zbiór (5.4) redukuje się do

$$(5.5) \quad \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_3 \otimes \mathbf{V}_3 = \mathbf{M}_{33} \quad , \quad [42] .$$

Anizotropowemu równaniu konstytutywnemu (5.2) można teraz nadać postać następującej funkcji izotropowej

$$(5.6) \quad \mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{D}, \mathbf{M}_{33}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) .$$

Najbardziej ogólna, niewielomianowa reprezentacja tej funkcji zbudowana na podstawie Tablic 2 i 3 jest liniową kombinacją 14 generatorów

$$(5.7) \quad \mathbf{1}, \mathbf{D}, \mathbf{D}^2, \mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{22}, \mathbf{M}_{33}, \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21}, \mathbf{M}_{11}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{M}_{11}, \\ \mathbf{M}_{22}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{M}_{22}, \mathbf{M}_{33}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{M}_{33}, \mathbf{M}_{11}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{22}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{M}_{22}, \\ \mathbf{M}_{33}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{M}_{33}, (\mathbf{M}_{12}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{M}_{21}) - (\mathbf{M}_{21}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{M}_{12}) ; \mathbf{M}_{ij} = \mathbf{V}_i \otimes \mathbf{V}_j ,$$

ze współczynnikami, które są dowolnymi, skalarnymi funkcjami 9 niezmienników bazy funkcyjnej

$$(5.8) \quad \text{tr}\mathbf{D}, \text{tr}\mathbf{D}^2, \text{tr}\mathbf{D}^3, \text{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{D}, \text{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{D}, \text{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{D}, \\ \text{tr}\mathbf{M}_{12}\mathbf{D}, \text{tr}\mathbf{M}_{12}\mathbf{D}^2, \text{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{D}^2 .$$

Jawne postaci generatorów i niezmienników przedstawiono w Dodatku . Generatory (5.7) i niezmienniki bazy (5.8) tworzyłyby nieredukowalną reprezentację funkcji (5.6), gdyby argumenty tej funkcji były niezależne. W omawianym

przypadku nachylenie głównych kierunków anizotropii 2φ oraz współczynnik intensywności anizotropii k są zadane, więc argumenty ν_1, ν_2, M_{33} nie są niezależne. Istnieją zatem związki między generatorami. Oto one:

$$(5.9) \quad \mathbf{1} = \sin^2 2\varphi \mathbf{M}_{11} + (k \sin 2\varphi)^{-2} \mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_{33} - k^{-1} \sin^{-1} 2\varphi \operatorname{ctg} 2\varphi (\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21}) .$$

$$(5.10) \quad \mathbf{D} = [p(\operatorname{tr} \mathbf{M}_{11} \mathbf{D} + k^{-2} \operatorname{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{D}) + q \operatorname{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D} + s(\operatorname{tr} \mathbf{M}_{11} \mathbf{D} - k^{-2} \operatorname{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{D})] \mathbf{M}_{11} + k^2 [p(\operatorname{tr} \mathbf{M}_{11} \mathbf{D} + k^{-2} \operatorname{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{D}) + q \operatorname{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D} - s(\operatorname{tr} \mathbf{M}_{11} \mathbf{D} - k^{-2} \operatorname{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{D})] \mathbf{M}_{22} + [\frac{1}{2} q (\operatorname{tr} \mathbf{M}_{11} \mathbf{D} + k^{-2} \operatorname{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{D}) + 2pk^{-2} \operatorname{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}] (\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21}) + (\mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{33}) - (\operatorname{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}) \mathbf{M}_{33} ,$$

gdzie:

$$p = \frac{1}{16} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi), \quad q = \frac{1}{8} k^{-1} (\cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi), \quad s = \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi .$$

Zgodnie z zasadami redukcji reprezentacji wielomianowych (rozdz. 3.2), tensory $\mathbf{1}$ i \mathbf{D} są zbędne, gdyż dają się przedstawić jako kombinacje liniowe pozostałych generatorów ze współczynnikami w postaci powyższych, skalarnych funkcji elementów bazy funkcyjnej (5.8).

Wnikliwa analiza macierzy generatorów podanych w Dodatku wykazuje, iż

$$(5.11) \quad (\mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{33}), \mathbf{D}^2, (\mathbf{M}_{11} \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{M}_{11}), (\mathbf{M}_{22} \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{M}_{22}), (\mathbf{M}_{33} \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{M}_{33}),$$

są również sprowadzalne pod warunkiem, że nie znikają składowe ścinające tensora odkształcenia $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$. Wówczas wymienione generatory są kombinacjami liniowymi pozostałych elementów zbioru (5.7), a współczynniki przy nich są wielomianowymi funkcjami niezmienników bazy.

Nie odtwarzamy związków, które pozwoliłyby wyrugować generatory (5.11), ponieważ są one algebraicznie zbyt skomplikowane, a pominięcie ich nie ma wpływu na zrozumienie dalszego ciągu analizy.

Podobnie niezmienniki (5.8) nie tworzą minimalnej bazy funkcyjnej, gdyż $\text{tr } \mathbf{D}$ i $\text{tr } \mathbf{D}^2$ są skalarnymi funkcjami pozostałych niezmienników

$$(5.12) \quad \text{tr } \mathbf{D} = \sin^2 2\varphi \text{tr } \mathbf{M}_{11} \mathbf{D} + (k \sin 2\varphi)^{-2} \text{tr } \mathbf{M}_{22} \mathbf{D} + \text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D} - \\ - 2(k \sin 2\varphi)^{-1} \text{ctg } 2\varphi \text{tr } \mathbf{M}_{12} \mathbf{D},$$

$$(5.13) \quad \text{tr } \mathbf{D}^2 = (\text{tr } \mathbf{D} - \text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D})^2 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + 2k^{-2} \text{tr}^2 \mathbf{M}_{12} \mathbf{D} - \\ - 2k^{-4} \cos 2\varphi (\text{tr } \mathbf{D} - \text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}) \text{tr } \mathbf{M}_{12} \mathbf{D} + 2\text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}^2 - \\ - \text{tr}^2 \mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \frac{1}{2} \sin^{-2} 2\varphi (\text{tr } \mathbf{M}_{11} \mathbf{D} - k^{-2} \text{tr } \mathbf{M}_{22} \mathbf{D})^2.$$

Ostatecznie, dla rozważanego typu anizotropii minimalny zbiór generatorów reprezentacji równania konstytutywnego (5.2) lub (5.6) zawiera 7 tensorów, niezmienniczych względem transformacji symetrii (5.3):

$$(5.14) \quad \mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{22}, \mathbf{M}_{33}, (\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21}), (\mathbf{M}_{11} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{11}), \\ (\mathbf{M}_{22} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{22}), [(\mathbf{M}_{12} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{21}) - (\mathbf{M}_{21} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{12})],$$

natomiast nieredukowalna baza funkcyjna składa się z 7-miu niezmienników

$$(5.15) \quad \text{tr } \mathbf{M}_{11} \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{M}_{22} \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{D}^3.$$

Niesprowadzalna, niewielomianowa reprezentacja izotropowej funkcji (5.6) ma postać

$$(5.16) \quad \mathbf{T} = \alpha_1 \mathbf{M}_{44} + \alpha_2 \mathbf{M}_{22} + \alpha_3 \mathbf{M}_{33} + \alpha_4 (\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21}) + \alpha_5 (\mathbf{M}_{44} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{44}) + \\ + \alpha_6 (\mathbf{M}_{22} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{22}) + \alpha_7 [(\mathbf{M}_{12} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{21}) - (\mathbf{M}_{21} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{12})],$$

gdzie $\alpha_n = \alpha_n(\text{tr} \mathbf{M}_{44} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}^2, \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}^2, \text{tr} \mathbf{D}^3)$.

W przypadku liniowej sprężystości $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ są stałymi, natomiast pozostałe współczynniki reprezentacji określa wzór

$$(5.17) \quad \alpha_n = \alpha_n^1 \text{tr} \mathbf{M}_{44} \mathbf{D} + \alpha_n^2 \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{D} + \alpha_n^3 \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \alpha_n^4 \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}; \quad n=1,2,3,4.$$

Jest widoczne, że liczba generatorów (5.14) i niezmienników (5.15) jest taka sama - 7. Zgodność ta nie jest przypadkowa, lecz wynika z twierdzenia Markowa-Wakulenki [52] o reprezentacjach dla skończonych /punktowych/ grup symetrii i może być potwierdzeniem wniosku, iż reprezentacja (5.16) jest niesprowadzalna, pod warunkiem, że baza funkcyjna jest minimalna. Boehler [33] wykazał, że w przypadku, gdy argumentem związku konstytutywnego (3.9) jest jeden symetryczny tensor II-go rzędu /pomijając tensory parametryczne/, to wielomianowa baza niezmienników jest jednocześnie minimalną bazą funkcyjną. Wiadomo więc a priori ile elementów powinna zawierać nieredukowalna baza funkcyjna dla analizowanego typu anizotropii, ponieważ znana jest odpowiednia minimalna baza wielomianowa [51]. Reprezentacja (5.16) jest zatem nieredukowalna. Przedstawiona analiza pozwoliła wykluczyć 7 zbędnych generatorów i 2 niezmienniki.

6. Ortotropia

Pewne uproszczenia powstają w przypadku, gdy nieortogonalne kierunki 1,2, rys.1, są identyczne pod względem własności mechanicznych, co odpowiada przyjęciu $k=1$. W takiej sytuacji materiał posiada dodatkowe symetrie, mianowicie

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_1: & \quad \mathbf{v}_1 \longrightarrow -\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_2 \longrightarrow -\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_3 \longrightarrow \mathbf{v}_3, \\
 \mathbf{R}_2: & \quad \mathbf{v}_1 \longrightarrow \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_2 \longrightarrow \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_3 \longrightarrow \mathbf{v}_3, \\
 \hat{\mathbf{D}}_1: & \quad \mathbf{v}_1 \longrightarrow \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_2 \longrightarrow \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_3 \longrightarrow -\mathbf{v}_3, \\
 \hat{\mathbf{D}}_2: & \quad \mathbf{v}_1 \longrightarrow -\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_2 \longrightarrow -\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_3 \longrightarrow -\mathbf{v}_3.
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Transformacje (6.1) i (5.3) stanowią teraz grupę symetrii rozważanego ośrodka, który stał się ortotropowy /trzy wzajemnie prostopadłe rodziny włókien - trzy ortogonalne płaszczyzny symetrii/. Tensory parametryczne mogą być następujące:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1), \quad \mathbf{M}_{33} = \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3,
 \tag{6.2}$$

a funkcja, której reprezentacji poszukujemy, przyjmie postać

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{D}, \mathbf{M}, \mathbf{M}_{33}).
 \tag{6.3}$$

Ogólną reprezentację tej izotropowej funkcji tworzy się w rutynowy sposób wykorzystując Tablice 2,3. Minimalna baza funkcyjna zawiera 7 niezmienników

$$\text{tr } \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{D}^3, \text{tr } \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}^2.
 \tag{6.4}$$

Zbiór generatorów musi być również 7-mio elementowy, bowiem ortotropia należy do punktowych grup symetrii. Należy przypuszczać, że 4 spośród 11 generatorów, określonych na podstawie Tabl.2, są zbędne. Łatwo można wykazać, że

$$(6.5) \quad \mathbf{M}^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi (\mathbf{1} - \mathbf{M}_{33}) + \cos 2\varphi \mathbf{M}.$$

$$(6.6) \quad (\mathbf{M}^2 \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}^2) = \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi [2\mathbf{D} - (\mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{33})] + \cos 2\varphi (\mathbf{M} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}).$$

Tożsamości (6.5) i (6.6) oznaczają, że \mathbf{M}^2 i $(\mathbf{M}^2 \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}^2)$ trzeba wykluczyć ze zbioru generatorów. Znacznie bardziej skomplikowane, niewielomianowe zależności, które dla przejrzystości tekstu pominiemy, stanowiły podstawę do wykluczenia pozostałych dwóch generatorów: $(\mathbf{M} \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{M})$ i $(\mathbf{M}_{33} \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2 \mathbf{M}_{33})$. Postać kanoniczna niesprowadzalnej reprezentacji równania (6.3) jest kombinacją liniową następujących 7-miu tensorów:

$$(6.7) \quad \mathbf{1}, \mathbf{D}, \mathbf{D}^2, \mathbf{M}, \mathbf{M}_{33}, (\mathbf{M} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}), (\mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{33}),$$

a współczynniki tej kombinacji /stałe materiałowe/ są dowolnymi funkcjami skalarnymi elementów bazy funkcyjnej (6.4).

W przypadku liniowo sprężystego materiału ortotropowego reprezentacja upraszcza się

$$(6.8) \quad \mathbf{T} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \mathbf{M}_{33} + \alpha_4 (\mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{33}) + \alpha_5 (\mathbf{M} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}),$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ są stałymi, natomiast dla $n=0,2,3$ obowiązując wzór

$$(6.9) \quad \alpha_n = \alpha_n^1 \text{tr} \mathbf{D} + \alpha_n^2 \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \alpha_n^3 \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}.$$

7. Trzy równoważne, ortogonalne kierunki anizotropii.

W szczególności, gdy kąt nachylenia włókien 1,2 osiąga graniczną wartość $2\varphi = 90^\circ$ przy k nadal równym 1, problem zbudowania reprezentacji anizotropowego równania konstytutywnego (5.2) wymaga innej procedury.

Mamy do czynienia z anizotropowym ośrodkiem, który w skali makro charakteryzuje się występowaniem trzech uprzywilejowanych, ortogonalnych i identycznych kierunków 1,2,3. W celu uproszczenia dalszych obliczeń wprowadza się kartezjański układ współrzędnych taki, że jego osie są równoległe do kierunków 1,2,3. Symetria rozważanego materiału odpowiada symetrii kubiczno-żyroidalnej [51], która może być w pełni scharakteryzowana za pomocą tensora parametrycznego 4-go rzędu \mathbf{O}_h , [42]

$$(7.1) \quad \mathbf{O}_h = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad ,$$

gdzie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tworzą bazę ortonormalną w przyjętym układzie odniesienia.

Mając zdefiniowany tensor parametryczny (7.1) zadanie sprowadza się do znalezienia ogólnej reprezentacji następującej funkcji izotropowej

$$(7.2) \quad \mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{D}, \mathbf{O}_h), \quad \mathbf{T}, \mathbf{D} \in \mathcal{T}_2^s, \quad \mathbf{O}_h \in \mathcal{T}_4^s.$$

Nie da się tego zrobić przy zastosowaniu twierdzeń Wanga-Smitha-Boehlera [36, 37, 39, 34], gdyż dotyczą one argumentów o walencji ≤ 2 . Dla tensorów wyższego rzędu i skończonych grup symetrii można zbudować reprezentację anizotropowej funkcji konstytutywnej wykorzystując twierdzenie udowodnione przez Markowa i Wakulenkę [52, 53]. Twierdzenie to mówi, że dla skończonej grupy symetrii materialnej G gradienty elementów bazy wielomianowej, właściwej dla grupy G , tworzą zbiór generatorów tensorowych. Innymi słowy: każda funkcja tensorowa w przestrzeni tensorów p -tego stopnia, posiadająca

skończoną grupę symetrii G , może być przedstawiona jako liniowa kombinacja tych gradientów ze współczynnikami, będącymi skalarnymi funkcjami niezmienników bazy wielomianowej, [52]. Niech

$$(7.3) \quad \mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{D}) \quad , \quad \mathcal{F}: T_2^S \rightarrow T_2^S \quad ,$$

to zgodnie z tym twierdzeniem

$$(7.4) \quad T_{ij} = \sum_{m=1}^n f_m \frac{\partial q_m}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{lub} \quad \mathbf{T} = \int_m \nabla_{\mathbf{D}} q_m \quad ,$$

gdzie $f_m = f_m(q_1, q_2, \dots, q_n)$; $m=1, 2, \dots, n$; zbiór (q_1, \dots, q_n) stanowi bazę wielomianową.

Reprezentacja (7.4) jest w ogólnym przypadku niewielomianowa, mimo, że (q_1, q_2, \dots, q_n) jest bazą wielomianową, ponieważ generatory $\nabla_{\mathbf{D}} q_i = \partial q_i / \partial \varepsilon_{kl}$ nie muszą być wielomianami.

Dla żyroidalnej klasy symetrii kubicznej wielomianową bazę niezmienników w formie indeksowej podano w [51]. W notacji absolutnej przybiera ona postać

$$q_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{tr } \mathbf{D} \quad ,$$

$$q_2 = \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{D} - \text{tr } \mathbf{D}_1^2) \quad ,$$

$$q_3 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} = \frac{1}{6} \text{tr}^3 \mathbf{D} + \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{D}_1^3 - \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{D}_1^2 \text{tr } \mathbf{D} \quad ,$$

$$(7.5) \quad q_4 = \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} = \frac{1}{6} \text{tr } \mathbf{D}_3^3 \quad ,$$

$$q_5 = \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2 = \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{D}^2 - \text{tr } \mathbf{D}_1^2) \quad ,$$

$$q_6 = \varepsilon_{12}^4 + \varepsilon_{23}^4 + \varepsilon_{31}^4 = \text{tr } \mathbf{D}_4^2 - \frac{1}{4} (\text{tr } \mathbf{D}^2 - \text{tr } \mathbf{D}_1^2)$$

$$q_7 = \varepsilon_{12}^2 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23}^2 \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{31}^2 \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{D}_3 \mathbf{D}_4)^2,$$

$$(7.5) \quad q_8 = \varepsilon_{11} \varepsilon_{12}^2 \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{22} \varepsilon_{23}^2 \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{33} \varepsilon_{31}^2 \varepsilon_{23}^2 = \frac{1}{4} q_9 \operatorname{tr} \mathbf{D}_3^2 + \frac{1}{2} \operatorname{tr}[(q_5 \mathbb{1} - \mathbf{D}_4)^2 \mathbf{D}_1] - \frac{1}{2} q_6 \operatorname{tr} \mathbf{D} - \frac{1}{2} \operatorname{tr}[(\mathbf{D}_3^2 - \mathbf{D}_4)^2 \mathbf{D}_1],$$

$$q_9 = \varepsilon_{11}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) + \varepsilon_{22}(\varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{23}^2) + \varepsilon_{33}(\varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{32}^2) = \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{D}^3 - \operatorname{tr} \mathbf{D}_1^3 - \operatorname{tr} \mathbf{D}_3^3).$$

Różniczkując (7.5) po \mathbf{D} otrzymujemy pełny zbiór niewielomianowych generatorów, [53]

$$(7.6) \quad \mathbf{1}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_1^2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_3 \circ \mathbf{D}_4, \mathbf{D}_3^2 - \mathbf{D}_4, \mathbf{D}_4 + 4\mathbf{D}_3 \circ \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_4^2 + 8\mathbf{D}_3 \circ (\mathbf{D}_4 \mathbf{D}_1), \\ 2\mathbf{D}_4 \mathbf{D}_1 - (\operatorname{tr} \mathbf{D}) \mathbf{D}_4 + 2\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_4,$$

gdzie:

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}_h \mathbf{D} \quad (= \| \mathbf{0}_h^{ijkl} \mathbf{D}_{kl} \|) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \circ & \circ \\ \circ & \varepsilon_{22} & \circ \\ \circ & \circ & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{0}_h \mathbf{D}^2, \quad \mathbf{D}_3 = \mathbf{D} - \mathbf{D}_1, \\ \mathbf{D}_4 = \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1^2,$$

symbol "o" oznacza operację symetryzacji, np.

$$(7.7) \quad \mathbf{D}_3 \circ \mathbf{D}_4 = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_3 \mathbf{D}_4 + \mathbf{D}_4 \mathbf{D}_3).$$

Postać macierzową tych generatorów podano w Dodatku.

Reprezentacja funkcji (7.2) jest liniową kombinacją generatorów (7.6), a współczynniki - skalarnymi funkcjami 9-ciu niezmienników bazy (7.5). Każdy inny, być może prostszy, zbiór tensorów będący funkcją (7.6) stanowi zbiór generatorów dla kubiczno-żyroidalnej funkcji (7.3).

Warto zauważyć, że generatory otrzymane na podstawie twierdzenia (7.4) są nieredukowalne, jeśli żadnego z nich nie da się przedstawić w postaci funkcji pozostałych, podczas gdy generator Wanga-Smitha-Boehlera jest nieredukowalny, jeśli nie można go zastąpić kombinacją liniową pozostałych.

8. Porównanie z prawem Hooke'a

Niesprowadzalne reprezentacje otrzymane w rozdziałach 5, 6, 7 są najbardziej ogólnymi postaciami nieliniowych równań konstytutywnych sprężystości dla rozważanych typów anizotropii. Wydaje się interesujące porównanie liniowych części tych reprezentacji z klasycznym prawem Hooke'a, które można zapisać w następującej uogólnionej postaci:

$$(8.1) \quad \mathbf{T} = \mathbf{A}^* \mathbf{D} ; \quad \mathbf{T}, \mathbf{D} \in T_2^S ; \quad \mathbf{A}^* \in T_4^S ,$$

gdzie \mathbf{A}^* oznacza tensor stałych anizotropii sprężystej. Wystarczy, jeśli rozważymy przypadek ortotropii, ponieważ dla pozostałych typów anizotropii porównanie to wymaga jedynie bardziej żmudnych obliczeń. Należy podać zależności pomiędzy skalarnymi funkcjami α_i w reprezentacji (6.7) i modułami sprężystości, które są składowymi tensora \mathbf{A}^* . Inaczej - chodzi o uzyskanie (8.1) wychodząc z liniowej reprezentacji (6.7). Przejście to jest bezpośrednie i polega na porównaniu odpowiednich składowych tensora naprężenia T_{ij} w klasycznym prawie (8.1) z tymi, których dostarcza wzór (6.7). Ponieważ materiał wykazuje analogiczne własności w kierunkach 1, 2 /rys.1/, stąd reprezentacją tensora 4-go rzędu \mathbf{A}^* może być symetryczna macierz 6x6, [2]

$$(8.2) \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a & f & e & 0 & 0 & 0 \\ f & b & d & 0 & 0 & 0 \\ e & d & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} .$$

Porównanie współczynników wymaga rozwiązania układu 12-tu równań liniowych. W efekcie otrzymujemy

$$\alpha_0 = \beta \operatorname{tr} \mathbf{D} + (\gamma - \beta) \operatorname{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \delta \operatorname{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D} ,$$

$$\alpha_1 = 2j - 2(h - q) \cos 2\varphi ,$$

$$(8.3) \quad \alpha_2 = (\gamma - \beta) \operatorname{tr} \mathbf{D} + (c - 2\gamma - \beta + \alpha_1 + 2\alpha_4) \operatorname{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + (e - d - \delta) \operatorname{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}$$

$$\alpha_3 = \delta \operatorname{tr} \mathbf{D} + (e - d - \delta) \operatorname{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + (a + b - 2f - 4j) \operatorname{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}$$

$$\alpha_4 = h + q - 2j \quad , \quad \alpha_5 = 2(h - q) .$$

gdzie:

$$\beta = \frac{1}{2} f \sin^2 \varphi - j(1 + \cos^2 2\varphi) + a \sin^4 \varphi + b \cos^4 \varphi + 2 \cos 2\varphi (h - q) ,$$

$$\gamma = d \cos^2 \varphi + e \sin^2 \varphi ,$$

$$\delta = a \sin^2 \varphi - b \cos^2 \varphi + \cos 2\varphi (f + 2j) - 2(h - q) .$$

Jest widoczne, że prawo Hooke'a jest bardziej restrykcyjne aniżeli ogólna reprezentacja liniowa (6.8), gdyż występuje w niej 9 niezależnych stałych (8.2), podczas gdy (6.8) zawiera ich 12. Wytlumaczenie tego faktu podał Boehler [33] mówiąc, że (8.1) opiera się na hipotezie istnienia tzw. potencjału sprężystego i dlatego zawiera mniej niezależnych stałych niż związek (6.8), na który takiego warunku nie nałożono.

Analogiczny problem porównania stałych anizotropii sprężystej rozważał Boehler w przypadku transwersalnej izotropii [47] i konwencjonalnej ortotropii [33], gdzie uprzywilejowane kierunki materiału tworzą przestrzenną siatkę ortogonalną. Należy się ustosunkować do wyników przedstawionych w [33], gdyż wybrany przez nas reprezentatywny przykład dotyczy również symetrii z grupy ortotropii. Skalarne funkcje α_i (8.3) różnią się od otrzymanych przez Boehlera w pracy [33]. Nie jest to jednak zaskakujące, ponieważ tensory parametryczne w obu przypadkach zdefiniowano odmiennie^{1/},

lecz inaczej główna cecha rozważanego materiału tj. kierunkowość jego wewnętrznej struktury byłaby ukryta w nieznanach funkcjach α_i . W naszym podejściu kąt 2φ pojawia się jawnie w reprezentacji (6.8). Jest widoczne, że wśród współczynników zebranych w (8.3) $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ są stałymi, a $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3$ - liniowymi, skalarnymi funkcjami tensora odkształceń sprężystych \mathbf{D} . Współczynniki α_i uzyskane przez Boehlera [33] są tego samego typu co (8.3) i jest ich również 12. Narzuca się przypuszczenie, że obie grupy współczynników muszą być związane funkcyjnie. Odpowiedź jest pozytywna - istnieją równania przejścia zależne od kąta rozwarcia 2φ , które czynią oba przypadki porównywalnymi. Aby je otrzymać należy dokonać prostych przekształceń na produktach diadowych $\mathbf{M}, \mathbf{M}_{33}$ wg (6.2) i $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{22}$ \mathbf{M}_{33} wg Boehlera [33].

9. Ogólny warunek plastyczności

W teorii idealnej plastyczności naprężenia towarzyszące plastycznemu płynięciu są nieczułe na zmianę skali czasu, a warunkiem rozpoczęcia procesu płynięcia jest osiągnięcie przez naprężenia pewnego progu, który jest cechą materiału. Oznacza to, że w równaniach modelu ciała idealnie sztywno-plastycznego nie ma stałych mających wymiar czasu. Właściwość ta odróżnia płynięcie plastyczne od płynięcia lepkiego. W równaniu konstytutywnym idealnej plastyczności tensor naprężenia \mathbf{T} powinien więc być tak związany z tensorem prędkości odkształcenia \mathbf{D} , aby wymagana niewrażliwość naprężenia na zmianę skali czasu była zachowana. Niewrażliwość naprężeń na zmianę skali czasu jest równorzędna z wymaganiami niewrażliwości na prędkość odkształcenia, gdyż tensor \mathbf{D} jest jedyną wielkością kinematyczną w modelu ciała plastycznego bez wzmocnienia. W modelu tym nie istnieje wzajemnie jednoznaczna zależność

^{1/} tensory parametryczne w [33] są następujące: $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1$, $\mathbf{M}_{22} = \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2$, $\mathbf{M}_{33} = \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3$, gdzie $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tworzą ortonormalną bazę wektorów równoległych do ortogonalnych kierunków głównych ortotropii.

między składowymi tensorów \mathbf{T} i $\dot{\mathbf{D}}$, ponieważ temu samemu naprężeniu może odpowiadać wiele prędkości odkształceń. Thomas [54] uznał ten fakt za definicję materiału idealnie sztywno-plastycznego i wykazał, że jest on koniecznym i dostatecznym warunkiem istnienia powierzchni plastyczności. Sawczuk i Stutz [55] nadali idei Thomasa precyzyjniejszą formę matematyczną, wprowadzając twierdzenia o funkcjach jednorodnych. Zauważyli bowiem, iż wymaganie niewrażliwości naprężenia na zmianę skali czasu odpowiada nałożeniu na równanie konstytutywne idealnej plastyczności

$$(9.1) \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{D}}),$$

warunku jednorodności stopnia zero w odniesieniu do tensora prędkości odkształcenia.

Mówimy, że funkcja $F(\mathbf{A})$ jest jednorodna stopnia n , jeśli dla dowolnego skalaru $t > 0$ zachodzi równość

$$(9.2) \quad F(t\mathbf{A}) = t^n F(\mathbf{A}).$$

Dla funkcji jednorodnych słuszne jest twierdzenie Eulera

$$(9.3) \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{A} = nF.$$

W przypadku idealnej plastyczności twierdzenie (9.3) przyjmuje następującą postać

$$(9.4) \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} = 0 \quad \text{jeśli} \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{D}}} \neq 0.$$

Sawczuk i Stutz [55] udowodnili, że warunek jednorodności (9.4) nałożony na równanie (9.1), które mogłoby być prawem konstytutywnym idealnej plastyczności ośrodków izotropowych, ujawnia istnienie skalarnej zależności między składowymi tensora naprężenia

$$(9.5) \quad f(\mathbf{T}) = 0 \quad ,$$

którą nazywa się warunkiem plastyczności.

Lewa strona (9.5) jest elementarną funkcją skalarną jednego argumentu tensorowego i na podstawie twierdzeń o reprezentacjach, Tabl.3, otrzymujemy oczywistą postać warunku plastyczności dla materiałów wrażliwych na ciśnienie hydrostatyczne

$$(9.6) \quad g(\text{tr}\mathbf{T}, \text{tr}\mathbf{T}^2, \text{tr}\mathbf{T}^3) = 0.$$

Specyfikując funkcję g i nakładając nań różne więzy kinematyczne, np. nieściśliwość materiału, można wyprowadzić szczegółowe warunki plastyczności, znane w literaturze jako warunki Hubera-Misesa [3], Druckera-Pragera [56], Schleichera [57], itd.

Warto zauważyć, że w teorii Sawczuka i Stutza [55] warunek plastyczności pojawia się jako naturalna konsekwencja idealnie sztywno-plastycznego modelu materiału. Fakt ten odróżnia podejście tych autorów od klasycznych teorii idealnej plastyczności, w których zakłada się a priori, iż warunek ów istnieje.

Warunek jednorodności (9.4) jest ogólnie prawdziwy dla materiałów izotropowych i anizotropowych. Spostrzeżenie to wykorzystali Boehler i Sawczuk [48,44,49,8,57] przy formułowaniu warunków plastyczności i praw płynięcia dla transwersalnie izotropowych skał i gruntów.

Rozważmy najpierw idealnie plastyczny, fikcyjny ośrodek wstępnie anizotropowy, posiadający pewną symetrię struktury wewnętrznej, która jest opisana tensorem parametrycznym \mathbf{M}^* . Izotropowy związek tensorowy

$$(9.7) \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\dot{\mathbf{D}}, \mathbf{M}^*)$$

może być prawem fizycznym zachowania się takiego materiału pod warunkiem, iż spełni wymaganie jednorodności stopnia zero względem tensora \mathbf{D} , (9.4). Równania (9.7) i (9.4) definiują łącznie anizotropowy ośrodek idealnie plastyczny. Rozwiązując układ równań (9.7) i (9.4) Boehler [44] wykazał, przez analogię do (9.5), istnienie skalarnej zależności między niezmiennikami /również mieszanymi/ tensorów \mathbf{T} i \mathbf{M}^* :

$$(9.8) \quad f(\mathbf{T}, \mathbf{M}^*) = 0,$$

która jest niczym innym, jak warunkiem plastyczności dla rozważanego ośrodka anizotropowego.

Wynika stąd istotny wniosek, że sformułowanie ogólnego kryterium plastyczności materiału anizotropowego wymaga zdefiniowania - odpowiadających symetrii materiału - tensorów parametrycznych i ustalenia niesprowadzalnej bazy funkcyjnej dla izotropowej funkcji skalarnej (9.8).

Założmy, że opisana w rozdziałach 2 i 4 struktura materiału ukośnie anizotropowego nie zmienia się w chwili przejścia w stan plastyczny. Oznacza to, że przy formułowaniu warunków plastyczności posłużymy się już zdefiniowanymi tensorami parametrycznymi. Współczynnik intensywności k , (5.1) można teraz utożsamić ze stosunkiem granic plastyczności w kierunkach 2 i 1. Niech w zagadnieniach płaskich główne kierunki tensora naprężenia tworzą kąt Θ z osiami układu współrzędnych, rys.1. Wielkości parametryczne charakteryzujące kierunkowość własności plastycznych materiału wyraża wzór (5.5). Zgodnie z (9.8) poszukiwany warunek plastyczności jest skalarną funkcją tensora naprężenia i wielkości parametrycznych: tensora \mathbf{M}_{33} oraz wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$

$$(9.9) \quad f(\mathbf{T}, \mathbf{M}_{33}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0.$$

Lewa strona tego warunku jest dowolną funkcją skalarną

następujących niezmienników, /por. (5.8) /:

$$(9.10) \quad \text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3, \text{tr} \mathbf{M}_{11} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}^2, \\ \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}^2.$$

Zbiór ten zawiera dwa elementy: $\text{tr} \mathbf{M}_{11} \mathbf{T}$, $\text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}^2$, które są funkcjami pozostałych niezmienników

$$(9.11) \quad \text{tr} \mathbf{M}_{11} \mathbf{T} = \sin^2 2\varphi \text{tr} \mathbf{T} - k^{-2} \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T} + 2k^{-1} \cos 2\varphi \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} - \\ - \sin^2 2\varphi \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T},$$

$$(9.12) \quad \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{T}^2 - \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{T} - \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T})^2 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) - k^{-2} \text{tr}^2 \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} + \\ + k^{-1} \cos 2\varphi (\text{tr} \mathbf{T} - \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}) \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} + \frac{1}{2} \text{tr}^2 \mathbf{M}_{33} \mathbf{T} - \\ - \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi (\text{tr} \mathbf{M}_{11} \mathbf{T} - k^{-2} \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T})^2,$$

i w świetle reguł o redukcji reprezentacji należy je wyłączyć z bazy funkcyjnej warunku (9.9). Zależności (9.11) i (9.12) to przekształcone dla wygody dalszych obliczeń - (5.12) i (5.13) ^{1/}.

Nieredukowalny zbiór niezmienników, które powinny wejść do warunku plastyczności (9.9) jest więc następujący

$$(9.13) \quad \text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3, \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}^2.$$

Mając określone niezależne niezmienniki sformułujemy warunek plastyczności jednorodny w naprężeniach, który będzie uogólnieniem kryterium Hubera-Misesa dla ośrodków izotropo-

^{1/} Problem redukcji bazy (5.8) i bazy (9.10) jest od strony formalnej taki sam, gdyż, abstrahując od fizycznego znaczenia tensorów \mathbf{T} i \mathbf{D} , zbiór argumentów funkcji (5.6) i (9.9) jest ten sam.

wych. W tym celu z elementów (9.13) należy zbudować sumę kwadratową względem \mathbf{T} . Najbardziej ogólna kombinacja ma postać

$$\begin{aligned}
 & \text{tr} \mathbf{S}^2 + \gamma'_1 \text{tr}^2 \mathbf{T} + \gamma'_2 \text{tr}^2 \mathbf{M}_{22} \mathbf{T} + \gamma'_3 \text{tr}^2 \mathbf{M}_{33} \mathbf{T} + \gamma'_4 \text{tr}^2 \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} + \\
 & + \gamma'_5 \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}^2 + \gamma'_6 \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T} + \gamma'_7 \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} + \\
 (9.14) \quad & + \gamma'_8 \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T} + \gamma'_9 \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T} + \gamma'_{10} \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T} + \\
 & + \gamma'_{11} \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T} = 2K^2,
 \end{aligned}$$

gdzie K jest granicą plastyczności na ścinanie materiału matrycy, $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{11}$ są stałymi materiałowymi; \mathbf{S} oznacza dewiator tensora \mathbf{T} , przy czym prawdziwy jest wzór

$$(9.15) \quad \text{tr} \mathbf{S}^2 = \text{tr} \mathbf{T}^2 - \frac{1}{3} \text{tr}^2 \mathbf{T}.$$

Jeśli $\gamma'_2, \gamma'_3, \dots, \gamma'_{11}$ są tożsamościowo równe 0, to otrzymujemy warunek plastyczności zaproponowany przez Schleichera [58] dla izotropowych gruntów uplastyczniających się pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego

$$(9.16) \quad \text{tr} \mathbf{S}^2 + \gamma'_1 \text{tr}^2 \mathbf{T} = 2K^2.$$

Gdy ciśnienie hydrostatyczne nie ma wpływu na przejście w stan plastyczny ($\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{11} \equiv 0$), wówczas (9.16) redukuje się do klasycznego warunku Hubera-Misesa

$$(9.17) \quad \text{tr} \mathbf{S}^2 = 2K^2.$$

10. Płaski stan naprężenia

Weźmy pod uwagę płaski stan naprężenia w płaszczyźnie ukośnych kierunków 1,2. Ogólny warunek plastyczności (9.14) ulega znacznemu uproszczeniu, gdyż

$$(10.1) \quad \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T} = \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}^2 = 0.$$

Zależności (9.11) i (9.12) pozostają prawdziwe, z tym że drugą z nich wygodniej wykorzystać w zmodyfikowanej postaci

$$(10.2) \quad \begin{aligned} \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} &= \frac{1}{2} k^{-1} \cos^{-4} 2\varphi \text{tr}^2 \mathbf{M}_{22} \mathbf{T} - \frac{1}{4} k^3 \sin 2\varphi \tan 2\varphi (\text{tr} \mathbf{T}^2 - \\ &- \text{tr}^2 \mathbf{T}) + \frac{1}{2} k \cos^{-4} 2\varphi \text{tr}^2 \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} - \frac{1}{2} k \sin 2\varphi \tan 2\varphi \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Ponadto, przyjęcie płaskiego stanu naprężenia powoduje, że $\text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}^2$ daje się wyrazić jako funkcja pozostałych niezmienników bazy (9.10), mianowicie

$$(10.3) \quad \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}^2 = \frac{1}{2} k \cos 2\varphi (\text{tr} \mathbf{T} - \text{tr}^2 \mathbf{T}) + \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}.$$

Nieredukowalny zbiór niezmienników dla skalarnej funkcji f z warunku (9.9) składa się więc z 5-ciu elementów

$$(10.4) \quad \text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3, \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T}.$$

Ogólny warunek plastyczności typu Hubera-Misesa wyraża się następująco

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \text{tr} \mathbf{S}^2 + \gamma_1 \text{tr}^2 \mathbf{T} + \gamma_2 \text{tr}^2 \mathbf{M}_{22} \mathbf{T} + \gamma_3 \text{tr}^2 \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} + \\ + \gamma_4 \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{22} \mathbf{T} + \gamma_5 \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} = 2K^2. \end{aligned}$$

Przedstawiając (10.5) w składowych naprężeniach w przyjętym układzie współrzędnych, rys.2, otrzymujemy

$$(10.6) \quad A \cdot \sigma_{11}^2 + B \cdot \sigma_{22}^2 + C \cdot \sigma_{12}^2 + D \cdot \sigma_{11} \sigma_{22} + E \cdot \sigma_{11} \sigma_{12} + F \cdot \sigma_{22} \sigma_{12} = 2K^2,$$

gdzie:

$$A = \frac{2}{3} + \gamma_1 + \cos^4 \varphi k^2 (\gamma_3 + k^2 \gamma_2) + \cos^2 \varphi k (\gamma_5 + k \gamma_4),$$

$$B = \frac{2}{3} + \gamma_1 + \sin^4 \varphi k^2 (\gamma_3 + k^2 \gamma_2) + \sin^2 \varphi k (k \gamma_4 - \gamma_5),$$

$$C = 2 + \sin^2 2\varphi k^4 \gamma_2,$$

$$D = -\frac{2}{3} + 2\gamma_1 + \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi k^2 (k^2 \gamma_2 - \gamma_3) + k^2 \gamma_4 + k \gamma_5 \cos 2\varphi,$$

$$E = -\sin 2\varphi k^2 (\gamma_4 + 2\cos^2 \varphi k^2 \gamma_2),$$

$$F = -\sin 2\varphi k^2 (\gamma_4 + 2\sin^2 \varphi k^2 \gamma_2).$$

Transformacja σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} do układu naprężeń głównych σ_1 , σ_2 daje:

$$(10.7) \quad a_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2^2 + 2a_3 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1^2 [A \cos^4 \theta + B \sin^4 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \cdot (C+D) + \frac{1}{2} \sin 2\theta (E \cos^2 \theta + F \sin^2 \theta)] + \sigma_2^2 [A \sin^4 \theta + B \cos^4 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (C+D) - \frac{1}{2} \sin 2\theta (E \sin^2 \theta + F \cos^2 \theta)] + \sigma_1 \sigma_2 [\frac{1}{2} \sin^2 2\theta (A + B - C) + (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) D + \frac{1}{4} \sin 4\theta (F - E)] = 2K^2,$$

gdzie θ oznacza odpowiedni kąt obrotu układu x_1 , x_2 , rys.1. Równanie (10.7) reprezentuje dowolną krzywą środkową II-go stopnia - zamkniętą, o ile spełnione są następujące nierówności

$$(10.8) \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 a_2 - a_3^2 > 0.$$

Jest widoczne, że w przypadku płaskiego stanu naprężenia warunek plastyczności dla materiału ukośnie anizotropowego (10.7) zawiera 5 stałych: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$. Aby wyznaczyć te stałe należy przeprowadzić 5 niezależnych testów, np. jednoosiowego rozciągania w kierunkach $x_1, x_2, 1, 2$ i czystego ścinania typu $\sigma_1 = -\sigma_2$. Oznaczmy odpowiadające tym testom granice plastyczności przez $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_I, \sigma_{II}, \tau$. Z (10.7) wynika, że

$$\gamma_2 = 2k^{-4} \sin^{-4} 2\varphi \left(\frac{2K^2}{\sigma_I^2} + \frac{2K^2}{\sigma_{II}^2} - 2\cos^2 \varphi \frac{2K^2}{\sigma_X^2} - 2\sin^2 \varphi \frac{2K^2}{\sigma_Y^2} + \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi \frac{2K^2}{\tau^2} - \sin^2 2\varphi \right),$$

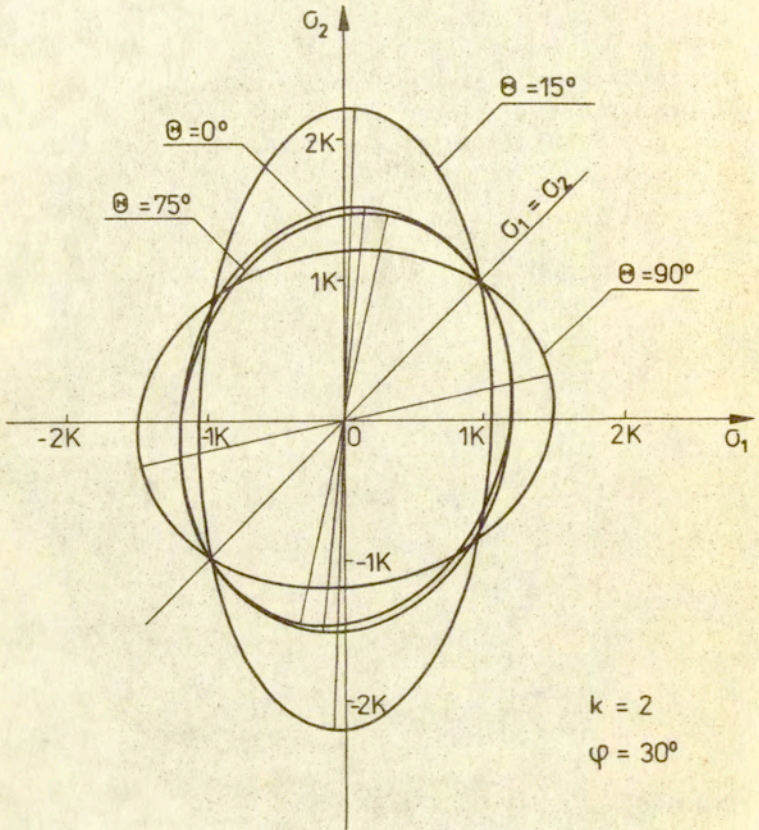
$$\gamma_3 = k^{-2} \left(\frac{2K^2}{\tau^2} - \gamma_2 k^4 \cos 2\varphi - 2 \right),$$

$$(10.9) \quad \gamma_4 = k^{-2} \sin^{-2} 2\varphi \left(\frac{2K^2}{\sigma_{II}^2} - \frac{2K^2}{\sigma_I^2} \right) - k^2 \gamma_2 (2 - \sin^2 2\varphi).$$

$$\gamma_5 = k^{-1} \left(\frac{2K^2}{\sigma_X^2} - \frac{2K^2}{\sigma_Y^2} \right) - k \cos 2\varphi (\gamma_3 + \gamma_4 + k^2 \gamma_2),$$

$$\gamma_4 = \frac{2K^2}{\sigma_X^2} - \frac{2}{3} - \cos^4 \varphi k^2 (\gamma_3 + k^2 \gamma_2) - \cos^2 \varphi k (\gamma_5 + k \gamma_4).$$

Ilustrację graficzną powierzchni plastyczności (10.7) dla szczególnego przypadku $\sigma_X = 1.2 K, \sigma_Y = 1.5 K, \sigma_I = K, \sigma_{II} = 2K, \tau = 0.9 K, \varphi = 30^\circ, k = 2$, spełniającego wymagania wypukłości (10.8), przy zmieniającym się kącie nachylenia kierunków naprężeń głównych do osi układu x_1, x_2 - przedstawia rys.2. Przecięcia elips (10.7) z osią ciśnienia hydrostatycznego $\sigma_1 = \sigma_2$ są niezależne od kąta θ i zachodzą w punkcie



Rys.2

$$(10.10) \quad \bar{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{2}{A+B+D}} K .$$

Jeżeli $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$, (10.7) zostaje sprowadzone do warunku Hubera-Misesa dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia

$$(10.11) \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = 3K^2 .$$

11. Ortotropowy warunek plastyczności

Rozważmy szczególny przypadek ukośnej symetrii materiału omówiony w rozdziale 6 - ortotropię. Poszukujemy - jednorodnego względem składowych naprężenia - warunku plastyczności typu

$$(11.1) \quad f(\mathbf{T}, \mathbf{M}, \mathbf{M}_{33}) = 0 ,$$

przy czym \mathbf{M} i \mathbf{M}_{33} są dane przez wzory (6.2) .

Najbardziej ogólna postać warunku (11.1) jest skalarną funkcją 7-miu niezmienników bazy

$$(11.2) \quad \text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3, \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}^2 .$$

Ponieważ analiza ograniczona została do warunków plastyczności, które zawierają wyłącznie składowe tensora naprężenia w kwadracie, to jako kryterium plastyczności dla materiału o trzech jednakowych ($k = 1$), nieortogonalnych rodzajach włókien proponujemy następującą kombinację niezmienników (11.2)

$$(11.3) \quad \text{tr} \mathbf{S}^2 + \gamma_1' \text{tr}^2 \mathbf{T} + \gamma_2' \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} + \gamma_3' \text{tr}^2 \mathbf{M}_{33} \mathbf{T} + \gamma_4' \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}^2 + \\ + \gamma_5' \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T}^2 + \gamma_6' \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} + \gamma_7' \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{33} \mathbf{T} = 2K^2.$$

W płaskim stanie odkształcenia znikają człony zawierające \mathbf{M}_{33} a niezmiennik $\text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T}^2$ można wyeliminować na podstawie zależności (10.3). Uwzględniając te fakty we wzorze (11.3) otrzymujemy

$$(11.4) \quad \text{tr} \mathbf{S}^2 + \gamma_1' \text{tr}^2 \mathbf{T} + \gamma_2' \text{tr}^2 \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} + \gamma_3' \text{tr} \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{M}_{12} \mathbf{T} = 2K^2,$$

lub w formie indeksowej

$$(11.5) \quad A' \cdot \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 \cdot B' + D' \sigma_{11} \sigma_{22} + 2 \sigma_{12}^2 = 2K^2,$$

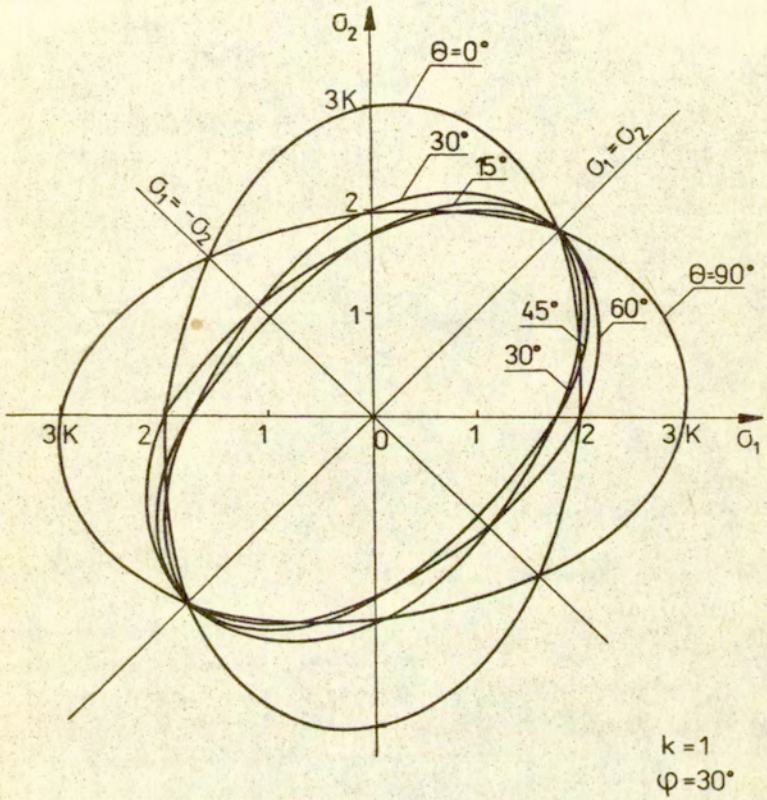
gdzie:

$$A' = \frac{2}{3} + \gamma_1 + \gamma_2 \cos^4 \varphi + \gamma_3 \cos^2 \varphi,$$

$$B' = \frac{2}{3} + \gamma_1 + \gamma_2 \sin^4 \varphi - \gamma_3 \sin^2 \varphi,$$

$$D' = -\frac{2}{3} + 2\gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_2 \sin^2 2\varphi + \gamma_3 \cos 2\varphi.$$

Na rys.3 przedstawiono przykładowe powierzchnie plastyczności w układzie naprężeń głównych σ_1, σ_2 przy jednoznacznie zmieniającym się kącie θ , /rys.1/. Wybrano następujące wartości stałych ortotropii: $\sigma_x = 2K$, $\sigma_y = 3K$, $\tau = 1.8K$ oraz $2\varphi = 60^\circ$; z definicji jest $k = 1$. Warto zauważyć, że zaproponowany warunek plastyczności (11.5) charakteryzuje się symetrią względem osi ciśnienia hydrostatycznego $\sigma_1 = \sigma_2$ dla θ i $90^\circ - \theta$. Symetria ta wynika z ortotropowej struktury materiału i nie była obserwowana w przypadku ukośnej anizotropii, rys.2.



Rys.3

12. Wnioski

Teoria reprezentacji funkcji tensorowych jest pożytecznym narzędziem przy budowaniu równań konstytutywnych, gdyż umożliwia ich formułowanie w takich sytuacjach, gdy nie wiadomo jaka powinna być postać funkcyjnej zależności między rozważanymi wielkościami fizycznymi. Zastosowanie twierdzeń o reprezentacjach daje pewność, że w otrzymanym równaniu uwzględniony zostanie wpływ samych argumentów i możliwych sprzężeń między nimi. Zaletą reprezentacji jest to, że dostarczają informacji jakie doświadczenia należy przeprowadzić by wyznaczyć stałe materiałowe, ponieważ ilość i typ tych stałych są bezpośrednio widoczne w otrzymanym równaniu.

W przypadku materiałów z wrodzoną anizotropią struktury teoria reprezentacji połączona z metodą tensorów parametrycznych stwarza systematyczne podstawy do formułowania związków konstytutywnych i posiada tę przewagę nad podejściami klasycznymi [2, 4], iż nie wymaga czynienia wielu, nie zawsze uzasadnionych ograniczeń, np. o stowarzyszonym charakterze prawa płynięcia, czy o istnieniu potencjału sprężystego ; unika się też arbitralnego wyboru niezmienników wchodzących do warunku plastyczności. Należy podkreślić efektywność reprezentacji w opisie geometrycznej symetrii ośrodków anizotropowych.

W przedstawionej części pracy studiowano konsekwencje, które rozważany typ ukośnej anizotropii wywołuje w równaniu konstytutywnym sprężystości i w uogólnionym warunku plastyczności typu Hubera-Misesa. Za punkt wyjścia przyjęto istniejące twierdzenia o reprezentacjach. Wykorzystano technikę opisu geometrycznych własności anizotropii za pomocą tensorów parametrycznych w celu automatycznego spełnienia wymagań symetrii i otrzymania związków izotropowych, dla których teoria reprezentacji jest najlepiej rozwinięta. Przeprowadzono analizę zbiorów generatorów i niezmienników pod kątem ustalenia nieredukowalnych postaci reprezentacji. Dokładnie omówiono przypadki szczególne, podając dla jed-

nego z nich porównanie z prawem Hooke'a. Warunek plastyczności jednorodny w naprężeniach sformułowano w najogólniejszej postaci, aby nie pominąć wpływu żadnej z ewentualnych zależności między niezmiennikami tensora naprężenia i niezmiennikami mieszanyymi tensorów naprężenia i anizotropii.

Ogólne, niewielomianowe reprezentacje, które otrzymano - mogą być zastosowane do wyspecyfikowania równań konstytutywnych nieliniowej sprężystości przy założeniu, że charakterystyczny kąt anizotropii 2φ , rys.1, nie zmienia się oraz do warunków plastyczności dla dowolnego anizotropowego kontinuum, które wykazuje omówione symetrie struktury. Można tu na przykład wymienić kompozyty, materiały perforowane, materiały z regularnymi układami mikroszczelin.

Należy być świadomym faktu, że teoria reprezentacji dostarcza cennych informacji jedynie w odniesieniu do ogólnej struktury anizotropowego prawa konstytutywnego i dlatego powinna być traktowana przedmiotowo - jako efektywne narzędzie matematyczne, które pozwala stwierdzić z jakich elementów trzeba budować poszukiwany związek konstytutywny. Nie jest jednak w stanie przewidzieć stałych anizotropii występujących w skalarnych funkcjach niezmienników bazy przed generatorami i z tego względu konieczne jest przeprowadzenie odpowiednich testów, których liczba i rodzaj wskazuje sama reprezentacja.

13. Ocena nośności granicznej - wprowadzenie

Przedmiotem drugiej, bardziej aplikacyjnej części pracy jest zastosowanie twierdzenia statycznego teorii nośności granicznej do wyznaczania dolnych oszacowań obciążeń niszczących w przypadku, gdy materiał konstrukcji cechuje wrodzona anizotropia plastyczna, [61, 62, 63].

W teorii nośności granicznej uzyskanie rozwiązań zupełnych, obejmujących obciążenie przekształcające konstrukcję w mechanizm oraz odpowiadające mu pola naprężenia i prędkości, jest w większości przypadków trudne ze względu

na nieliniowość występujących równań różniczkowych. Opracowane zostały metody przybliżone oparte na zasadach ekstremalnych teorii plastyczności, które pozwalają oszacować wielkość obciążenia granicznego od góry i od dołu. Jeżeli oszacowania te są dostatecznie bliskie, to z punktu widzenia praktycznych zastosowań znajomość rozwiązania ścisłego nie jest konieczna. Twierdzenie statyczne wynikające z I-szej zasady ekstremalnej mówi, że obciążenie, dla którego można znaleźć pole naprężeń spełniające równania równowagi, statyczne warunki brzegowe i nigdzie nie przekraczające warunku plastyczności jest mniejsze lub co najwyżej równe obciążeniu powodującemu ruch plastyczny konstrukcji.

Rozpatrzmy ciało plastyczne o objętości V i powierzchni A , rys.4. Na element powierzchni dA o wektorze normalnym \underline{n} działa siła

$$(13.1) \quad d\underline{F}^A = \underline{\sigma}_n^A dA$$

gdzie $\underline{\sigma}_n^A$ jest wektorem naprężenia.

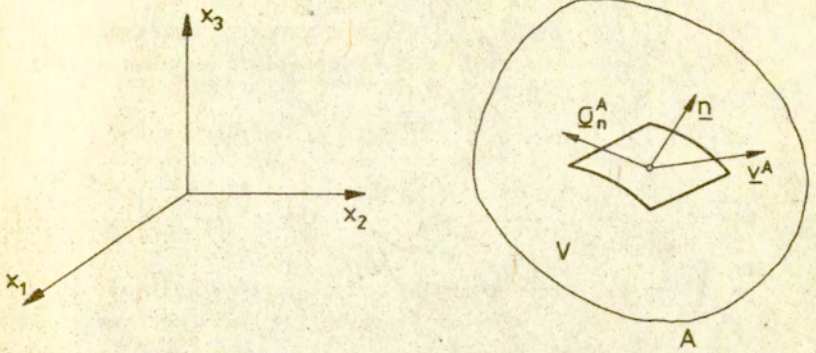
Moc sił powierzchniowych w odniesieniu do elementu dA wynosi

$$(13.2) \quad dP^A = \underline{v} \cdot \underline{\sigma}_n^A dA = v_i^A \sigma_{ij}^A n_j dA$$

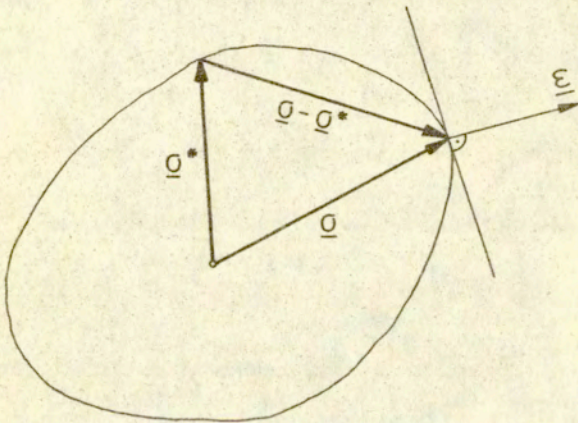
gdzie \underline{v} oznacza wektor prędkości cząsteczek materiału na powierzchni dA . Dla całej powierzchni ciała otrzymujemy

$$(13.3) \quad P^A = \int_A v_i \sigma_{ij} n_j dA$$

Założmy teraz, że pewne pole naprężeń σ_{ij}^* jest polem statycznie dopuszczalnym, tzn. spełnia równania równowagi oraz warunek plastyczności na powierzchni i w objętości ciała, a ponadto na części powierzchni A^σ - zadane w naprężeniach warunki brzegowe $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}$. Oznaczmy przez v_i rzeczywiste pole prędkości, które działa na część



Rys. 4



Rys.5 , [66]

powierzchni A^V . Stan naprężenia σ_{ij}^* może nie spełniać warunków kinematycznych, tj. prawa plastycznego płynięcia oraz warunku ciągłości ośrodka. Moc sił rzeczywistych działających na powierzchni A można przedstawić w następującej postaci.

$$(13.4) \quad \int_A v_i \sigma_{ij} \eta_j dA = \int_{A^\sigma} v_i \sigma_{ij} \eta_j dA + \int_{A^V} v_i \sigma_{ij} \eta_j dA = \int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} dV,$$

gdź na podstawie twierdzenia Gaussa, przy wykorzystaniu symetrii tensora naprężenia, zamiany indeksów oraz warunków równowagi, zachodzą równości

$$\begin{aligned} \int_A v_i \sigma_{ij} \eta_j dA &= \int_V (v_i \sigma_{ij})_{,j} dV = \int_V (v_{i,j} \sigma_{ij} + v_i \cancel{\sigma_{j,i}}) dV = \\ (13.5) \quad &= \int_V \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \sigma_{ij} dV = \int_V \frac{1}{2} (v_{i,j} \sigma_{ij} + v_{j,i} \sigma_{ji}) dV = \\ &= \int_V \frac{1}{2} (v_{i,j} \sigma_{ij} + v_{j,i} \sigma_{ij}) dV = \int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} dV, \end{aligned}$$

gdzie $\dot{\epsilon}_{ij}$ oznacza tensor prędkości odkształcenia. Analogicznie, zachodzi wzór

$$(13.6) \quad \int_A v_i \sigma_{ij}^* \eta_j dA = \int_{A^\sigma} v_i \sigma_{ij}^* \eta_j dA + \int_{A^V} v_i \sigma_{ij}^* \eta_j dA = \int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij}^* dV.$$

Ponieważ σ_{ij}^* spełnia statyczne warunki brzegowe na części powierzchni A^σ , to

$$(13.7) \quad \int_{A^\sigma} v_i \sigma_{ij} n_j dA = \int_{A^\sigma} v_i \sigma_{ij}^* n_j dA \quad .$$

a stąd po odjęciu stronami (13.6) i (13.7) wynika wzór

$$(13.8) \quad \int_{A^\nu} v_i (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) n_j dA = \int_V \dot{\epsilon}_{ij} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) dV.$$

Przyjmijmy w tym momencie, że istnieje potencjał plastyczny i że powierzchnia plastyczności jest wypukła. Wykażemy, że prawa strona (13.8) jest zawsze dodatnia. W tym celu rozpatrzmy naprężenia jako wektory w sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń. Rzeczywisty stan naprężenia spełnia warunek plastyczności, a więc końce wektorów σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} leżą na powierzchni plastyczności, rys.5. Jest oczywiste, że

$$(13.9) \quad \dot{\epsilon}_{ij} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) = \underline{\dot{\epsilon}} \cdot (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \geq 0 \quad ,$$

gdyż wektory $\underline{\dot{\epsilon}}$ i $(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*)$ tworzą kąt ostry i ich iloczyn skalarny musi być dodatni. W skrajnym przypadku, gdy statycznie dopuszczalny stan naprężenia pokrywa się ze stanem rzeczywistym, iloczyn ten jest równy zeru. Podstawiając (13.9) do (13.8) otrzymujemy

$$(13.10) \quad \int_{A^\nu} v_i \sigma_{ij} n_j dA \geq \int_{A^\nu} v_i \sigma_{ij}^* n_j dA \quad .$$

Nierówność (13.10) została podana przez Hilla [64] .

Dodając do obu stron (13.10) moc sił na części powierzchni A^σ zgodnie z (13.7) , dostajemy nierówność

$$(13.11) \quad \int_{A^{\sigma}} \nu_i \sigma_{ij} \eta_j dA + \int_{A^{\nu}} \nu_i \bar{\sigma}_{ij} \eta_j dA \geq \int_{A^{\sigma}} \nu_i \sigma_{ij}^* \eta_j dA + \int_{A^{\nu}} \nu_i \bar{\sigma}_{ij}^* \eta_j dA,$$

a więc

$$(13.12) \quad \int_A \nu_i \bar{\sigma}_{ij} \eta_j dA \geq \int_A \nu_i \bar{\sigma}_{ij}^* \eta_j dA,$$

stąd wynika wniosek, że

$$(13.13) \quad \bar{\sigma} \geq \bar{\sigma}^*.$$

Nierówność (13.13) oznacza, że dolną ocenę rzeczywistych naprężeń wywołujących plastyczne płynięcie otrzymamy przyjmując dowolny statycznie dopuszczalny stan naprężenia w ciele. Ogólniejszy dowód twierdzenia statycznego uwzględniający występowanie nieciągłości naprężeń można znaleźć w monografii [65].

Twierdzenie kinematyczne teorii nośności granicznej mówi, że górną ocenę rzeczywistych sił powierzchniowych wywołujących ruch konstrukcji lub co najmniej stan graniczny równowagi, otrzymamy przyjmując dowolny kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia ciała, spełniający ciągłości i nieściśliwości ośrodka oraz kinematyczne warunki brzegowe. Równania równowagi nie muszą być spełnione, warunek plastyczności zaś może zostać przekroczony.

Twierdzenia teorii nośności granicznej są ogólnie prawdziwe dla ośrodków izotropowych jak i anizotropowych. Zasady wyznaczania górnej i dolnej oceny rzeczywistych obciążeń granicznych mimo, że w swej istocie niezmienione, w porównaniu z przypadkiem izotropowym będą jednak wykazywać pewne cechy charakterystyczne, wynikające z typu anizotropii. Należy na przykład oczekiwać wpływu anizotropii materiału na własności linii nieciągłości naprężeń

oraz na cechy geometryczne pól statycznie dopuszczalnych.

Zastosujemy twierdzenie o dolnych oszacowaniach do oceny obciążenia niszczącego pierwotnie anizotropowego ośrodka plastycznego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia [62], [63]. Jak wiadomo, obciążenie, dla którego można znaleźć pole naprężeń spełniające równania równowagi, statyczne warunki brzegowe i nigdzie nie przekraczające warunku plastyczności, jest mniejsze lub co najwyżej równe obciążeniu powodującemu ruch plastyczny konstrukcji. Każde takie pole określa dolną granicę obciążenia niszczącego. W praktyce, określenie dolnej granicy obciążenia polega na konstruowaniu odpowiednich układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Najczęściej, rozważany ośrodek plastyczny dzieli się na kilka obszarów o nieskomplikowanej geometrii przyjmując, że w każdym z nich panuje jednorodny prosty stan naprężenia spełniający warunki równowagi wewnętrznej, warunki brzegowe oraz warunek plastyczności. Granicą dwóch sąsiadujących obszarów jest linia nieciągłości naprężeń. Zastąpienie rzeczywistego rozkładu naprężeń w obciążonej konstrukcji układem specjalnie dobranych, statycznie dopuszczalnych, jednorodnych pól naprężeń powoduje, że różniczkowe równania równowagi są automatycznie spełnione. Zbudowany układ pól naprężeń może przy tym wykazywać niewiele podobieństwa do stanu rzeczywistego.

W przypadku materiałów izotropowych metoda statyczna okazała się bardzo efektywna przy rozwiązywaniu wielu konkretnych zagadnień, dla których ustalenie dokładnego rozwiązania było mniej istotne niż szybkie jego oszacowanie [66, 67, 68]. Omawiana metoda była również stosowana do oceny nośności granicznej uwarstwionej półprzestrzeni skalnej poddanej wciskaniu stempla i specyficznego, empirycznego warunku plastyczności [69]. Nie ma jednak, jak dotąd, systematycznego opracowania tego tematu dla materiałów wstępnie anizotropowych.

14. Warunek plastyczności wg Hilla

Rozpatrzmy idealnie sztywno-plastyczny ośrodek ortotropowy, rys. 6, którego uplastycznienie nie zależy od ciśnienia hydrostatycznego. Powszechnie stosowanym warunkiem plastyczności dla takich materiałów, zwłaszcza metali, jest warunek Hilla [4], będący uogólnieniem kryterium Hubera-Misesa dla ośrodków izotropowych. Warunek ten odniesiony do głównych kierunków ortotropii x, y, z , rys. 6 ma postać

$$(14.1) \quad F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1,$$

gdzie F, G, H, L, M, N to parametry charakteryzujące ortotropię. Obrazem geometrycznym (14.1) w przestrzeni naprężeń głównych jest nieskończenie długi walec eliptyczny, o ile stałe anizotropii spełniają warunek wypukłości powierzchni plastycznej

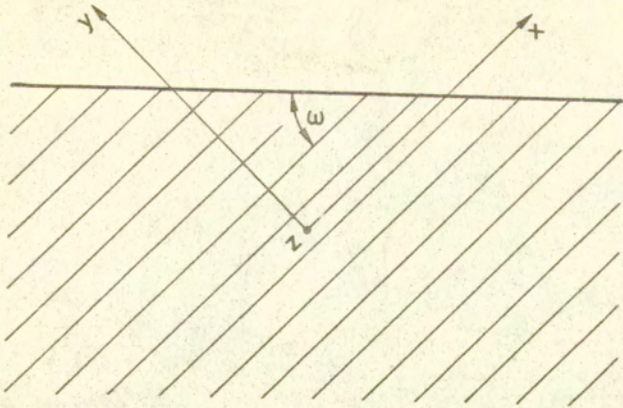
$$(14.2) \quad GH + FG + HF > 0.$$

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia, np. w płaszczyźnie x, y i stowarzyszonego prawa płynięcia, (14.1) przyjmuje postać

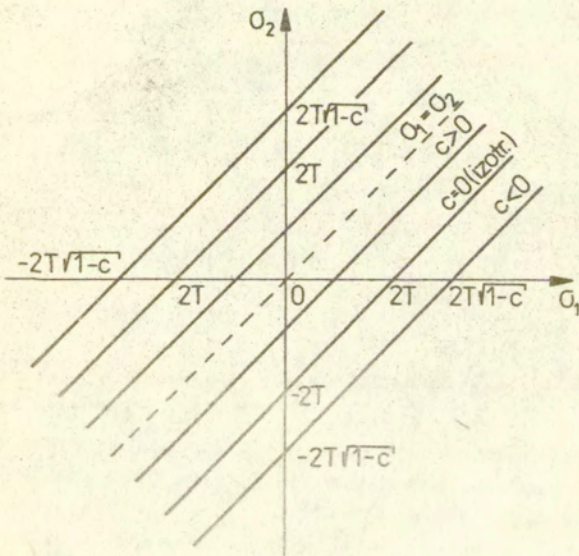
$$(14.3) \quad \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4(1-c)} + \tau_{xy}^2 = T^2,$$

przy czym c jest współczynnikiem wprowadzonym dla wygody obliczeń

$$(14.4) \quad c = 1 - \frac{N(F+G)}{2(FG+GH+FH)}, \quad -\infty < c < 1.$$



Rys. 6

Rys. 7
<http://rcin.org.pl>

T zaś - granicę plastyczności na ścinanie w płaszczyźnie x, y . Interpretację geometryczną tego warunku na płaszczyźnie naprężeń głównych σ_1, σ_2 przedstawia rys.7. Jest to potwierdzenie faktu, że "kwadratowy" warunek plastyczności niezależny od ciśnienia średniego daje w płaszczyźnie naprężeń głównych w płaskim stanie odkształcenia dwie równoległe proste. Jeżeli w otrzymanym za pomocą reprezentacji ortotropowym warunku (11.4) założymy niewrażliwość materiału na ciśnienie hydrostatyczne w chwili uplastycznienia oraz stowarzyszone prawo płynięcia, to po przekształceniach otrzymamy wyrażenie typu (14.1).

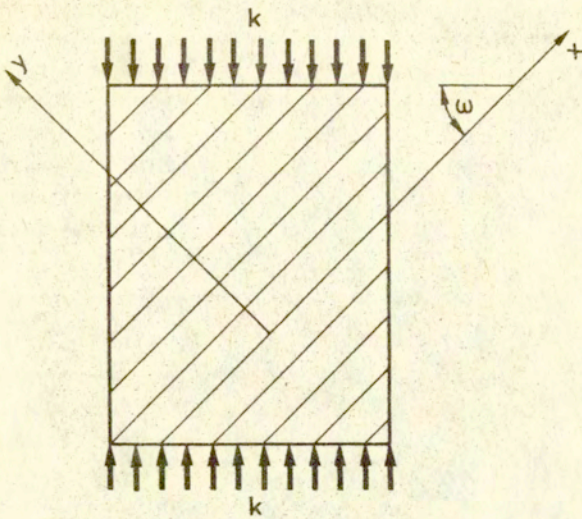
Weźmy pod uwagę element obciążony równomiernym jednoosiowym ciśnieniem o intensywności k , rys.8. Ciśnienie graniczne powodujące uplastycznienie elementu określone jest wzorem

$$(14.5) \quad k^p = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}}$$

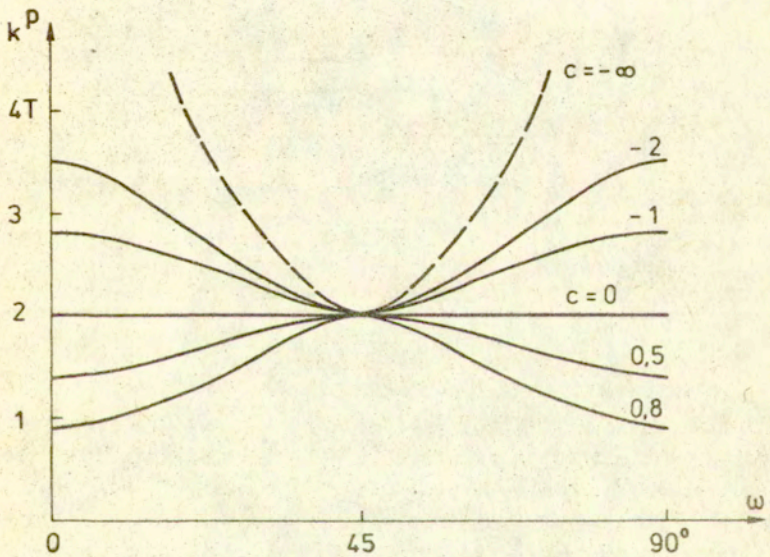
i zilustrowane na rys.9 jako funkcja kąta ω , utworzonego przez uprzywilejowane kierunki ortotropii i główne osie tensora naprężenia. Jest widoczne, że dla $\omega = 45^\circ$ rozważany materiał ortotropowy zachowuje się tak, jak materiał izotropowy. Jest to znana osobliwość warunku Hilla.

15. Nieciągłości naprężeń

Metoda szacowania nośności granicznej od dołu polega na wymagowanym wbudowaniu w obciążone elementy konstrukcji układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń powstałych ze złożenia elementarnych jednorodnych stanów naprężenia. Na wolnych krawędziach oraz na liniach przecięcia takich pól dopuszczalne są silne nieciągłości składowych stanu naprężenia. Te nieciągłości nie mogą być jednak dowolne, gdyż nie mogą naruszać warunków równowagi.



Rys. 8



Rys. 9

Niech prosta L przedstawiona na rys.10 będzie linią nieciągłości rozgraniczającą dwa jednorodne pola naprężeń o różnie zorientowanych kierunkach głównych, nie pokrywających się jednak z uprzywilejowanymi kierunkami ortotropii x , y . Załóżmy, że po obu stronach tej linii materiał ortotropowy uległ uplastycznieniu. Stan naprężenia w obu obszarach można odwzorować za pomocą konstrukcji Mohra, rys.11. Naprężenia σ_n i τ_{nt} odwzorowuje punkt przecięcia obu kół. Różne długości promieni $k^+(\theta, \alpha)$ i $k^-(\theta, \beta)$ są wynikiem ortotropii materiału. Ciągłość składowych σ_n i τ_{nt} można wyrazić za pomocą następujących równań, [66]

$$(15.1) \quad \begin{aligned} [[\sigma_n]] = 0 &\rightarrow (\sigma_1^+ + \sigma_2^+) + (\sigma_1^+ - \sigma_2^+) \cos 2\alpha = (\sigma_1^- + \sigma_2^-) + (\sigma_1^- - \sigma_2^-) \cos 2\beta, \\ [[\tau_{nt}]] = 0 &\rightarrow (\sigma_1^+ - \sigma_2^+) \sin 2\alpha = (\sigma_1^- - \sigma_2^-) \sin 2\beta. \end{aligned}$$

Transformując naprężenia główne σ_1^+ i σ_2^+ do układu wyróżnionych kierunków materialnych x , y i wykorzystując otrzymane wzory do warunku plastyczności (14.3), uzyskujemy wzór

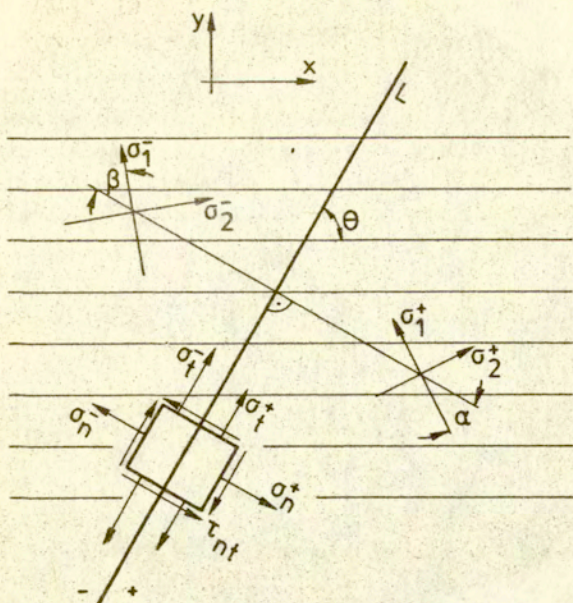
$$(15.2) \quad \sigma_1^+ - \sigma_2^+ = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\theta-\alpha)}}$$

i analogicznie dla obszaru oznaczonego znakiem minus.

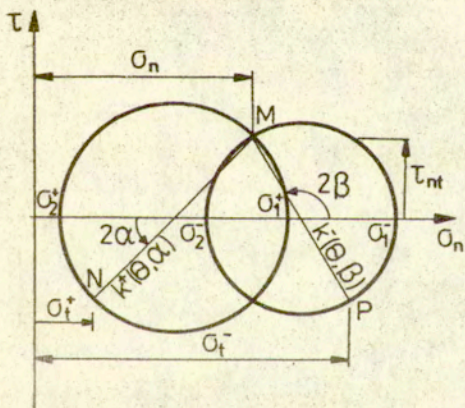
Warunek ciągłości τ_{nt} (15.1)₂ przybiera w tym przypadku postać

$$(15.3) \quad \sin^2 2\alpha [1 - c \sin^2 2(\theta - \beta)] = \sin^2 2\beta [1 - c \sin^2 2(\theta - \alpha)].$$

Jest widoczne, że linia nieciągłości dzieląca dwa jednorodne pola naprężenia w płaskim stanie odkształcenia nie jest już dwusieczną kątów między kierunkami naprężeń σ_1^+ i σ_2^- albo σ_1^- i σ_2^+ , jak to miało miejsce w przypadku ośrodków izotropowych. Jej nachylenie zależy od intensywności



Rys. 10



Rys. 11

ortotropii c oraz od wzajemnego położenia kierunków naprężeń głównych i uprzywilejowanych kierunków materiału.

Składowa σ_t (rys.10) zmienia się skokowo przy przejściu przez linię nieciągłości L , co odwzorowano przez punkty P i N na rys.11. Wielkość skoku, jaką dopuszcza przyjęty warunek plastyczności, określona jest wzorem

$$(15.4) \quad \sigma_1^+ - \sigma_2^+ = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\theta-\alpha)}} .$$

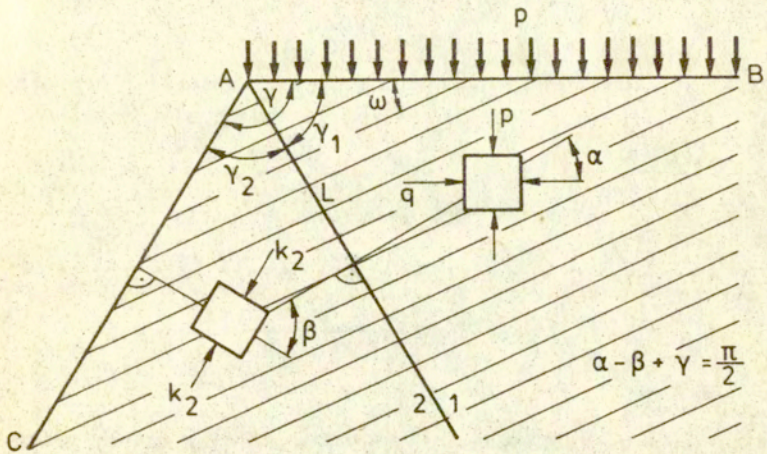
Przyjmując we wzorach (15.3) i (15.4) $c = 0$, otrzymujemy znane wzory dla ośrodka izotropowego [66], [68]:

$$(15.5) \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad [[\sigma_t]] = 4T \cos 2\alpha .$$

16. Nośność graniczna klina

W celu przedstawienia zasad formułowania układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń w ośrodkach anizotropowych rozważmy kilka prostych przykładów. Nie chodzi tu o jak najlepsze oszacowanie rzeczywistych obciążeń granicznych, lecz o wyniki jakościowe, ilustrujące metodę postępowania i różnice w porównaniu z przypadkiem izotropowym.

Naroże w kształcie klina o kącie wierzchołkowym γ /rys.12/ obciążone jest na jednej krawędzi równomiernie rozłożonym naciskiem p . Uprzywilejowany kierunek materiału tworzy z obciążoną powierzchnią kąt ω . Zadanie polega na wyznaczeniu obciążenia granicznego jako funkcji nachylenia uwarstwień ω oraz intensywności ortotropii c . W tym celu posłużymy się statycznie dopuszczalnym polem naprężeń przedzielonym prostą nieciągłości L . Po obu stronach tej prostej materiał uplastycznia się według kryterium (14.3). Kierunki naprężeń głównych w obszarach 1 i 2



Rys.12

są narzucone przez warunki brzegowe na krawędziach AB i AC. Równowaga na linii nieciągłości wymaga, aby spełnione były zależności

$$(16.1) \quad p = k_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos(\beta - \alpha) ,$$

$$(16.2) \quad \sin^2 2\alpha [1 - c \sin^2 2(\omega + \gamma)] = \sin^2 2\beta [1 - c \sin^2 2\omega] ,$$

przy czym $\alpha - \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Jeśli po obu stronach L materiał ma być w stanie plastycznym, to zgodnie z (14.3) muszą również zachodzić równości

$$p - q = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}} ,$$

(16.3)

$$k_2 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega + \gamma)}} .$$

Rozwiązując układ równań (16.1) ÷ (16.3) otrzymujemy poszukiwaną intensywność obciążenia granicznego

$$(16.4) \quad p(\omega, c) = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega + \gamma)}} \sin \gamma (\sin \gamma - \cos \gamma \sqrt{\frac{A(\omega, c) - B(\omega, c)}{A(\omega, c) + B(\omega, c)}}) ,$$

gdzie

$$A(\omega, c) = \sqrt{2 + 2 \cos 2\gamma \sqrt{[1 - c \sin^2 2(\omega + \gamma)](1 - c \sin^2 2\omega) - c[\sin^2 2\omega + \sin^2 2(\omega + \gamma)]}}$$

$$B(\omega, c) = \sqrt{1 - c \sin^2 2(\omega + \gamma)} + \sqrt{1 - c \sin^2 2\omega} \cos 2\gamma .$$

Położenie linii nieciągłości naprężeń określone jest wzorem

$$(16.5) \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} \arccos \frac{B}{A} ,$$

który dla szczególnego przypadku $\gamma = \frac{3}{4} \pi$ przyjmuje postać

$$(16.6) \quad \gamma_1 = \arccos \frac{\sqrt{1 - c \cos^2 2\omega} - \sqrt{\frac{1}{2}(1 - c \sin^2 2\omega)}}{\sqrt{2 - c - \sqrt{2(1 - c) - \frac{1}{2}c^2 \sin^2 4\omega}}} .$$

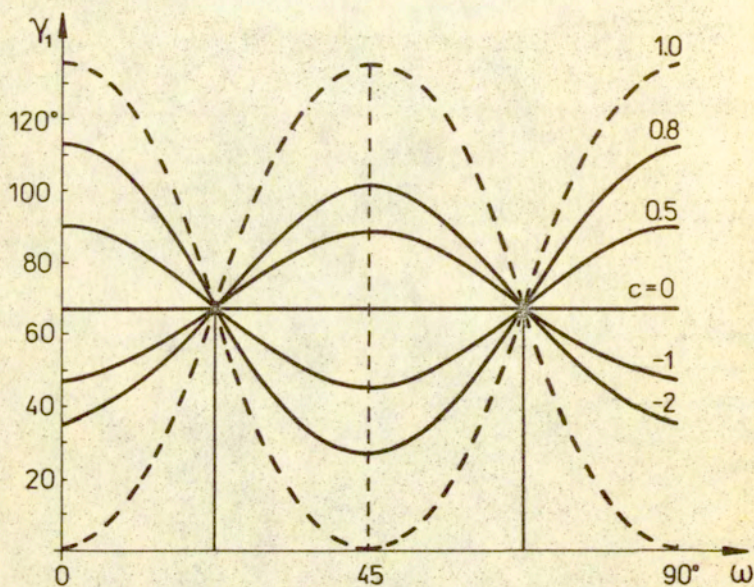
Rysunek 13 pokazuje, jak nachylenie (16.6) zmienia się w zależności od kąta wewnętrznej orientacji materiału ω . Łatwo zauważyć, że dla pewnych wartości ω anizotropia materiału nie wpływa na położenie linii nieciągłości naprężeń.

Jeśli $\gamma = 90^\circ$, to wzór (16.4) przechodzi w prosty wzór następujący:

$$(16.7) \quad p = 2T \sqrt{\frac{1 - c}{1 - c \sin^2 2\omega}} .$$

Jest widoczne, że obciążenie graniczne w tym przypadku jest takie samo jak w przykładzie z rys.8.9.

Dla materiału izotropowego $c = 0$ ciśnienie (16.4) osiąga wartość $p = 2T (1 - \cos \gamma)$, a nachylenie linii nieciągłości wynosi $\gamma_1 = \gamma / 2$, [67].



Rys. 13

17. Wciskanie stempla w półprzestrzeń

Nieodkształcalny płaski stempel wciskany jest bez tarcia w ortotropową, plastyczną półprzestrzeń w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Nośność graniczna tej półprzestrzeni można oszacować, konstruując układ statycznie dopuszczalnych, nieciągniętych pól naprężeń /rys.14/. Określona w analogiczny sposób dolna ocena nośności granicznej półprzestrzeni izotropowej wynosi $5T$ i jest bliska rozwiązaniu zupełnemu podanemu przez Prandtla [67], $p = T(2 + \pi)$.

Rozpatrzmy jednoosiowe, jednorodne pola naprężeń 1, 2, 3, 4 /rys.14/, w których osiągnięty został stan plastyczny zgodnie z warunkiem (14.3). Odpowiednie ściskające naprężenia plastyczne wynoszą:

$$k_1 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c\sin^2 2(\omega+\alpha)}}, \quad k_2 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c\sin^2 2(\omega-\beta)}},$$

(17.1)

$$k_3 = k_4 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c\sin^2 2\omega}}.$$

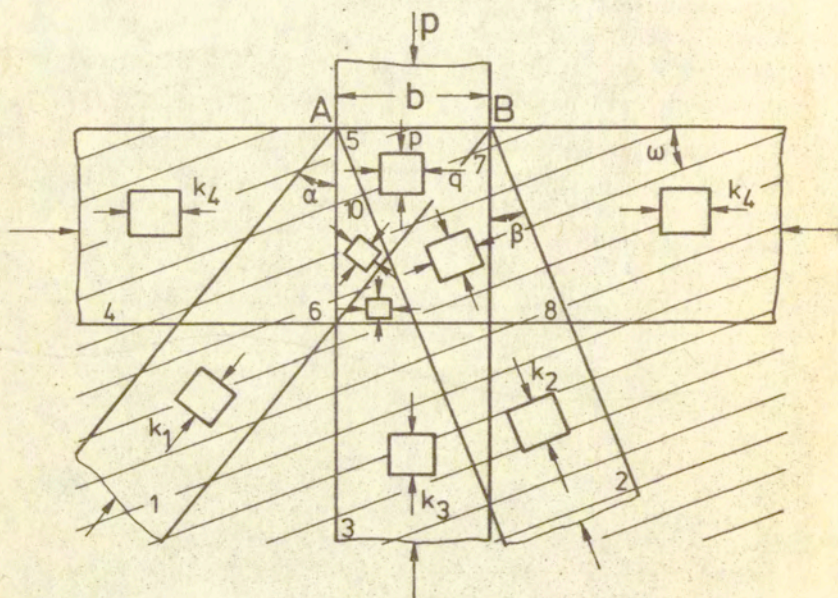
Równość k_3 i k_4 wynika z przyjętego warunku plastyczności. Równania równowagi, statyczne warunki brzegowe oraz warunków plastyczności są w obszarach 1, 2, 3, 4 spełnione z założenia. Cały układ pól z rys.14 powinien znajdować się w równowadze, a zatem musi spełniać równania następujące

$$pb = k_1 b \cos^2 \alpha + k_2 b \cos^2 \beta + k_3 b.$$

(17.2)

$$k_1 b \sin \alpha \cos \alpha - k_2 b \sin \beta \cos \beta = 0.$$

Aby uzyskać lepsze oszacowanie obciążenia granicznego przyjęto, że uplastyczniał się obszar 5, który powstał z super-



Rys. 14

pozycji jednoosiowych stanów 1, 2, 3, 4. Warunek plastyczności przyjmuje tu postać

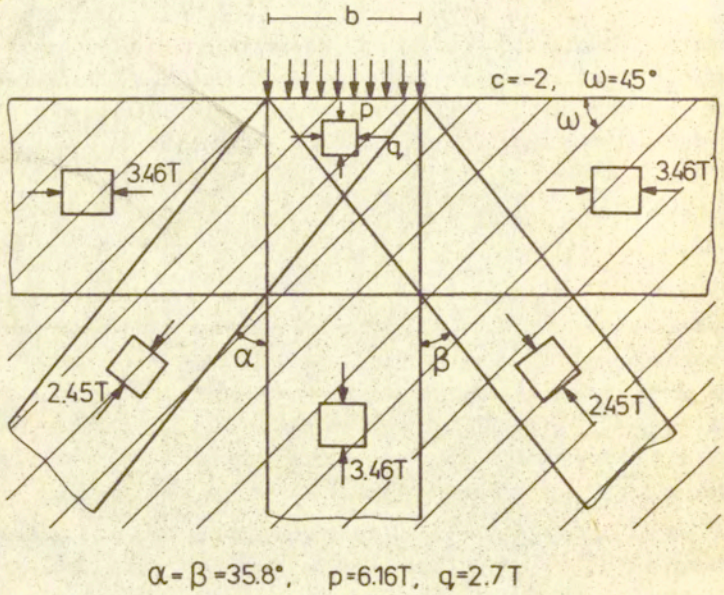
$$(17.3) \quad p - q = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}}$$

Ponadto tensor naprężenia w tym obszarze stanowi superpozycję tensorów naprężenia w obszarach 1, 2, 3, 4 pierwszy więc niezmiennik tego tensora jest sumą pierwszych niezmienników odpowiednich tensorów składowych:

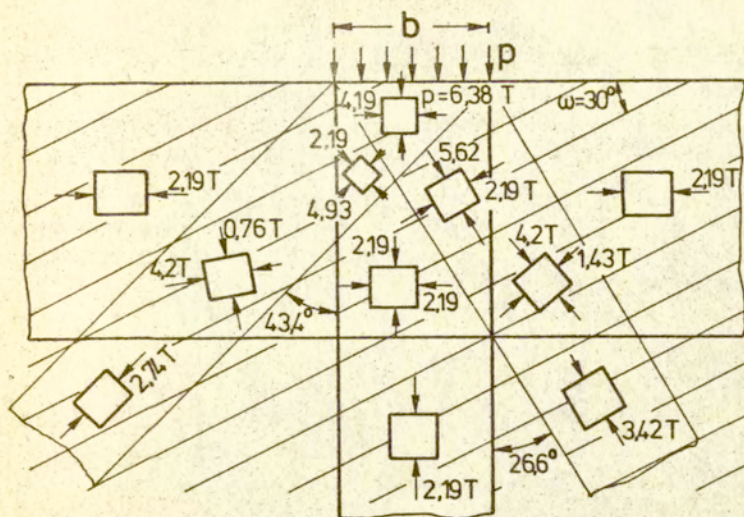
$$(17.4) \quad p + q = k_1 + k_2 + 2k_3$$

W strefie 9 występuje hydrostatyczny stan naprężenia, gdyż w obszarach 3 i 4 działają wzajemnie prostopadłe naprężenia ściskające o tej samej wartości k_3 . Stan hydrostatyczny nie ma wpływu na kierunki naprężeń głównych w obszarach 7 i 10 - w 7 będą one takie same jak w 2, a w 10 takie same jak w 1. Kierunki główne w obszarze 5 wynikają wprost z warunków brzegowych na krawędzi AB.

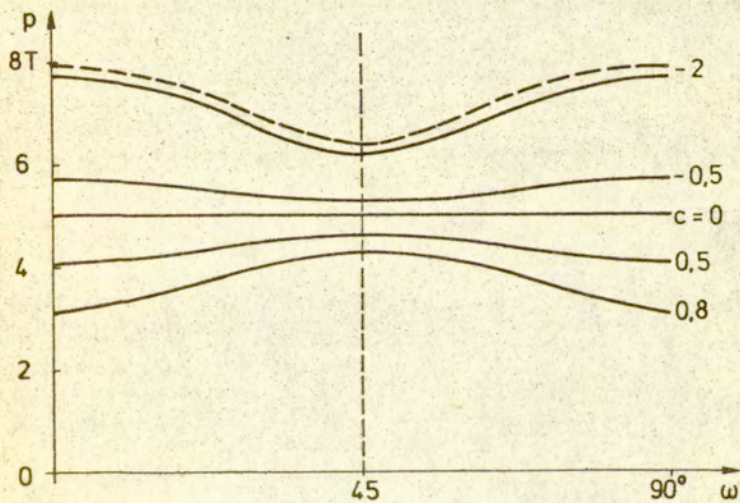
W przypadku materiału izotropowego rozwiązanie układu równań (17.1) ÷ (17.4) prowadzi do wyniku $\alpha = \beta = 30^\circ$, $p = 5T$, $q = 3T$; układ pól naprężeń z rys.14 jest wówczas osiowo-symetryczny [67]. Dla rozważanego ośrodka ortotropowego przykładowe rozwiązania przedstawiają rysunki 15, 16. Ze względu na to, że stan naprężenia w polu 5 wyznaczono numerycznie nie można podać analitycznego wzoru na wartość p . Widoczne jest jednak, że ortotropia materiału zmienia kształt statycznie dopuszczalnych pól naprężenia występujących w tym przykładzie, gdyż położenie pól 1 i 2, rys.16, jest niesymetryczne względem osi obciążenia. Jedynie w przypadku, gdy $\omega = 0^\circ$, 45° lub 90° otrzymujemy, tak samo jak w izotropii, układ symetryczny /rys.15/ lecz wynika to tylko z założonego warunku plastyczności. Po obliczeniu obciążenia granicznego należy jeszcze okreś-



Rys.15



Rys. 16



Rys.17

lić naprężenia w obszarach 6, 7, 8, 10 i sprawdzić, czy nie został w nich przekroczony warunek plastyczności /rys.16/. Rysunek 17 obrazuje relację między otrzymaną dolną granicą obciążenia niszczącego p , a kątem orientacji wewnętrznej przy różnych wartościach parametru c . Dla $c = -2$ oznakowano linią przerywaną krzywą ilustrującą rozwiązanie dokładne uzyskane przez Hilla [4] metodą charakterystyk. Różnice między rozwiązaniem dokładnym a otrzymanym dolnym oszacowaniem są niewielkie i wynoszą około $0.2T$ wobec $0.14T$ dla ośrodka izotropowego.

18. Przecinananie pasma

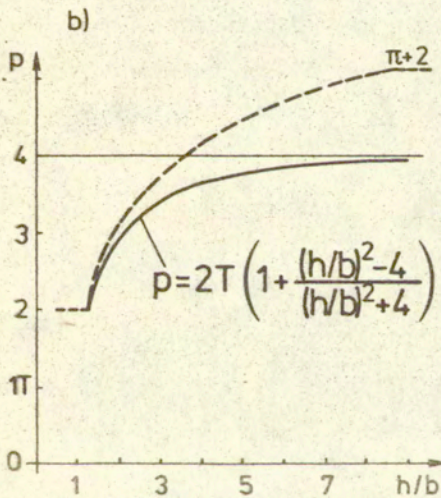
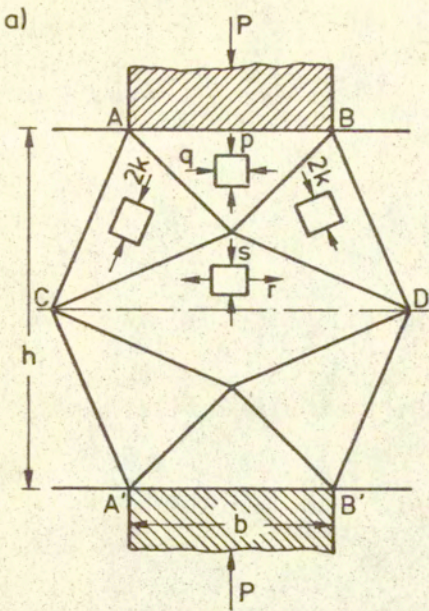
Rozpatrzmy pasmo z ortotropowego materiału o grubości h , ściśkane obustronnie przez dwa zbliżające się do siebie płaskie stemple o szerokości b , przy czym $2b < h$.

W przypadku, gdy materiał pasma jest izotropowy, jedną z możliwych dolnych ocen obciążenia granicznego otrzymuje się stosując złożenie dwóch statycznie dopuszczalnych, trapezowych pól naprężenia zaproponowanych przez Winzera i Carrieria [70], rys.18a. Nacisk stempli wynikający z tak przyjętych pól naprężenia wynosi, [68]:

$$(18.1) \quad p = 2T \left(1 + \frac{\left(\frac{h}{b}\right)^2 - 4}{\left(\frac{h}{b}\right)^2 + 4} \right)$$

i jest zilustrowany na rys.18b. Wszystkie części trapezów ABCD i A'B'CD są w stanie plastycznym, cały zaś system pól naprężeń jest symetryczny względem wypadkowej obciążenia. Krzywa narysowana linią przerywaną obrazuje lepsze dolne oszacowanie nośności pasma uzyskane metodą przedłużenia linii poślizgu w obszary sztywne [71].

Dla materiału ortotropowego wydaje się uzasadnione przyjęcie niesymetrycznego ułożenia trapezowych pól naprężeń /rys.19/. Jak wiadomo, w metodzie statycznej



Rys.18

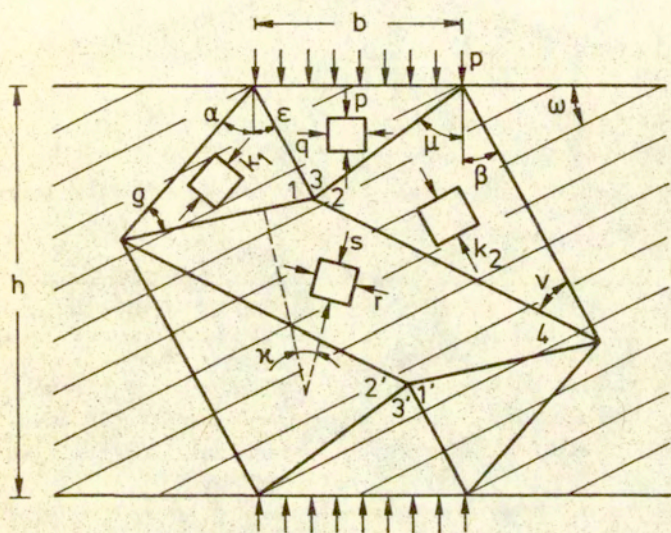
muszą być zachowane dwie grupy zależności: warunki równowagi na liniach nieciągłości oraz warunek plastyczności, który nie może być przekroczony w żadnym z pól naprężenia. W analizowanym przykładzie warunki równowagi na nieciągłościach są następujące:

$$\begin{aligned}
 k_1 \sin^2(\alpha + \varepsilon) &= p \sin^2 \varepsilon + q \cos^2 \varepsilon, \\
 k_1 \sin 2(\alpha + \varepsilon) &= (p - q) \sin 2\varepsilon, \\
 k_2 \sin^2(\mu + \beta) &= p \sin^2 \mu + q \cos^2 \mu, \\
 k_2 \sin 2(\mu + \beta) &= (p - q) \sin 2\mu, \\
 (18.2) \quad k_1 \sin^2 \varphi &= s \cos^2 \varkappa - r \sin^2 \varkappa, \\
 k_1 \sin 2\varphi &= (s + r) \sin 2\varkappa, \\
 k_2 \sin^2 \nu &= s \cos^2(\alpha + \beta + \varphi + \nu + \varkappa) - r \sin^2(\alpha + \beta + \varphi + \nu + \varkappa), \\
 - k_2 \sin 2\nu &= (s + r) \sin 2(\alpha + \beta + \varphi + \nu + \varkappa).
 \end{aligned}$$

Ponadto należy uwzględnić równowagę momentów, która dla pasma izotropowego jest spełniona automatycznie ze względu na symetrię przyjętego schematu pól naprężeń, w rozważanym zaś przypadku ortotropowym wyraża się wzorem

$$(18.3) \quad k_1 \sin 2\varphi = k_2 \sin 2\nu.$$

Natomiast założenie, że w obszarach 1, 2, 3, 4 oraz 1', 2', 3' osiągnięty został stan plastyczny, wymaga spełnienia następujących równań



Rys.19

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega+\alpha)}} \\
 k_2 &= 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega-\beta)}} \\
 (18.4) \quad (p-q) &= 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}} \\
 (s+r) &= 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\alpha+\omega+\varphi+\kappa)}}
 \end{aligned}$$

Zależności geometryczne układu dostarczają kolejnego związku

$$(18.5) \quad \frac{h}{b} = \frac{\cos \varepsilon \cos \mu \sin(\alpha+\beta) [\sin(\alpha+\varepsilon) \cos(\mu+\beta) - \sin(\mu+\beta) \cos(\alpha+\varepsilon)]}{\sin(\mu+\varepsilon) [\sin \alpha \cos \mu \sin(\alpha+\varepsilon) - \sin \beta \cos \varepsilon \sin(\mu+\beta)]} .$$

Równania (18.2) ÷ (18.5) stanowią podstawowy układ równań dla rozpatrywanego zagadnienia przecinania pasma przy założeniu, że wszystkie obszary są uplastycznione. Podstawiając (18.3) do (18.2)₆ i (18.2)₈ otrzymujemy

$$(18.6) \quad 2x + \alpha + \beta + \varphi + \nu = k\pi \quad , \quad k \in C ,$$

a po wprowadzeniu tego wyniku do (18.2)₅ i (18.2)₇ dochodzimy do zależności

$$(18.7) \quad k_1 \sin^2 \varphi = k_2 \sin^2 \nu .$$

Porównując równania (18.3) i (18.7) łatwo można zauważyć, że

$$(18.8) \quad k_1 = k_2 \quad , \quad \varphi = \nu ,$$

a w konsekwencji

$$(18.9) \quad \alpha = \beta, \quad \mu = \varepsilon, \quad \alpha + \varphi + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

Oznacza to, że trapezowe pola naprężeń użyte do oszacowania nośności pasma (rys.19) muszą być - tak samo jak w izotropii - symetryczne względem osi działania obciążenia. Wpływ anizotropii materiału odzwierciedli się w tym, że albo naprężenia k_1 albo k_2 zostaną zredukowane do wartości niższej od odpowiadającej mi granicy plastyczności k_1^p lub k_2^p . Wynika stąd wniosek, że po to, aby mogły być spełnione wszystkie równania równowagi założonego układu pól naprężeń, jeden z obszarów 1 lub 2 musi pozostać nieuplastyczniony.

Rozwiązanie podstawowego układu równań (18.2) + (18.5) bez (18.4)₂ nie wydaje się możliwe do uzyskania w sposób analityczny, gdyż pojawiają się wówczas równania przestępne stopnia wyższego niż 4. Poszukiwaną funkcję $p = p(h/b)$ udaje się wyznaczyć stosując następujący algorytm postępowania "nie wprost". Zakłada się wartości α , znając α oblicza się kąt ε z równania, które powstaje przez podstawienie (18.4) do (18.2)₂, mianowicie

$$(18.10) \quad \sin^4 2\varepsilon (A_1^2 + 4B_1^2) - \sin^2 2\varepsilon (2A_1 C_1 + 4B_1^2) + C_1^2 = 0.$$

gdzie

$$A_1(\alpha, \omega, c) = (c-2)\sin^2 2\alpha + \frac{1}{2}c \sin 4\alpha \sin 4\omega,$$

$$B_1(\alpha, \omega, c) = \frac{1}{2}(c \sin^2 2\omega - 1) \sin 4\alpha,$$

$$C_1(\alpha, \omega, c) = (c \sin^2 2\omega - 1) \sin^2 2\alpha,$$

a następnie z (18.9) wylicza się kąt φ . Dokładna analiza wykazuje, że (18.10) jest prawdziwe dla $\alpha \leq 45^\circ$. Oznacza to, że przyjęte pola naprężenia są efektywne

w sensie oceny nośności pasma jedynie w pewnym przedziale wartości h/b . Wielkość tego przedziału zależy od kąta wewnętrznej orientacji materiału oraz od intensywności ortotropii. Skoro znane są kąty α , ε , φ możliwe jest już ustalenie naprężeń w poszczególnych obszarach, rys.19:

$$k_1^p = k_2 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega+\alpha)}}$$

$$(18.11) \quad S = k_1 \sin^2 \varphi [1 + \operatorname{ctg}(\alpha+\varphi) \operatorname{ctg} \varphi]$$

$$r = k_1 \sin^2 \varphi [\operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg}(\alpha+\varphi) - 1] = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}} - S,$$

oraz wielkość poszukiwanego granicznego nacisku stempli p :

$$p = k_1 \sin^2(\alpha+\varepsilon) [1 + \operatorname{ctg}(\alpha+\varepsilon) \operatorname{ctg} \varepsilon],$$

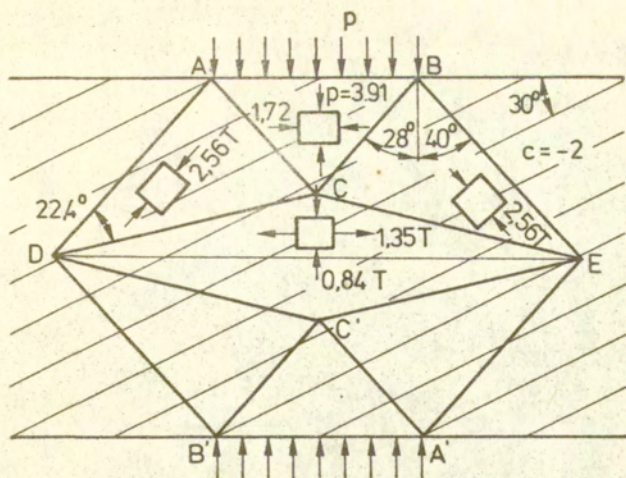
(18.12)

$$q_p = p - 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}}$$

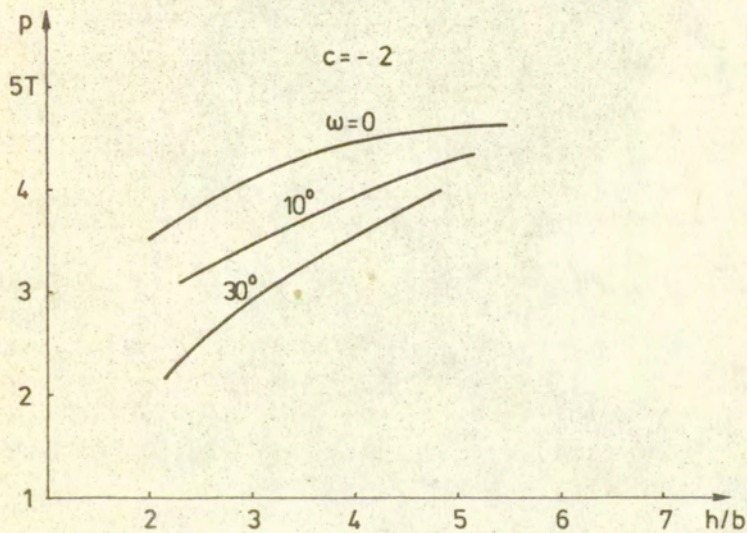
Odpowiadającą wartość parametru h/b oblicza się ze wzoru (18.5), który po uwzględnieniu (18.9) przybiera postać

$$(18.13) \quad \frac{h}{b} = \frac{\operatorname{ctg} \varepsilon + \operatorname{ctg}(\alpha+\varphi)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}(\alpha+\varphi)}.$$

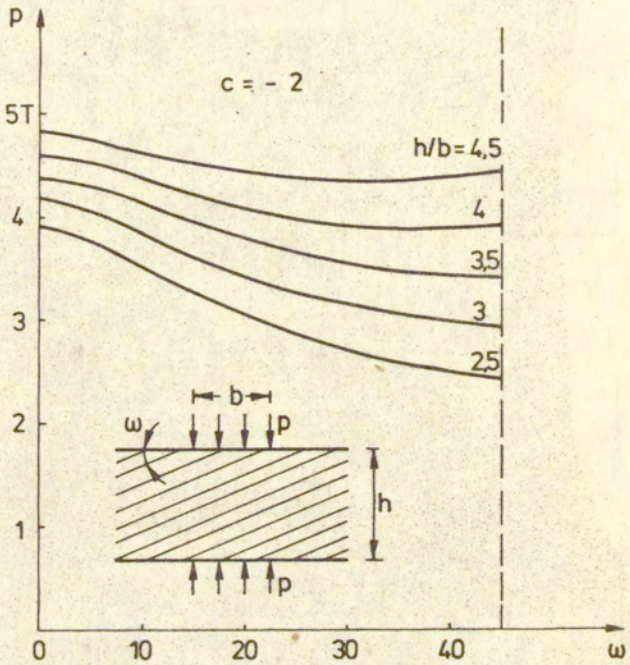
Na koniec trzeba jeszcze sprawdzić, czy naprężenie $k_2 = k_1^p$ nie narusza warunku plastyczności dla obszaru 2. Na rys.20 przedstawiono przykładowe rozwiązanie dla szczególnego kąta wewnętrznej uwarstwienia materiału $\omega = 30^\circ$ przy zachowaniu warunku $k_2 = k_1^p$, co jest równoważne z nieuplastycznieniem trójkątów BCE i B'C'D, lecz inaczej układ pól nie byłby statycznie dopuszczalny. Rysunek 21 obrazuje poszukiwaną zależność $p = p(h/b)$ dla kilku



Rys.20



Rys.21



Rys . 22

wartości ω przy danym współczynniku intensywności ortotropii c .

Zależność dolnej oceny nośności granicznej rozpatrywanego pasma od kąta orientacji wewnętrznej materiału przy jednostajnie zmieniającym się stosunku h/b ilustruje rys.22. Widoczna jest symetria rozwiązania względem prostej $\omega = 45^\circ$. Jest to konsekwencja przyjętego warunku plastyczności (rys.9).

19. Wnioski

Metoda statycznie dopuszczalnych pól naprężeń jest skuteczna i prosta, gdy ocenia się nośność graniczną elementów konstrukcji wykonanych z materiałów izotropowych. Zachowuje ona swą poprawność i daje pozytywne wyniki również i wówczas, gdy mechaniczne własności ośrodka mają charakter kierunkowy. Przedstawione przykłady dowodzą, że efektywność metody w przypadku ośrodków anizotropowych jest jednak mniejsza, głównie z powodu skomplikowanych związków trygonometrycznych, wynikających z anizotropowego warunku plastyczności. Niemniej, są to zawsze zależności algebraiczne i zbudowanie odpowiednich programów numerycznych nie sprawia trudności.

Anizotropia pierwotna, która odzwierciedla się w warunku plastyczności, wpływa na wartość granicy plastyczności w zależności od kierunku, zmienia rozkład naprężeń w danej konstrukcji, wywołuje inne niż w izotropii własności linii nieciągłości naprężeń. W rezultacie zmienia się kształt układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, gdyż nie muszą już one być symetryczne względem osi obciążenia, jak to miało miejsce w przypadku izotropowym. Z drugiej strony możliwe jest stosowanie symetrycznych pól trapezowych do zagadnień anizotropowych (rys.20) lecz wówczas nie wszystkie obszary będą w stanie plastycznym, co pociąga za sobą gorszą ocenę nośności granicznej. W przykładzie przecinania ortotropowego pasma symetryczne położenie

trapezowych pól naprężenia nie jest przyjęte dowolnie, lecz wynika z warunku równowagi momentów układu. W przypadku materiałów izotropowych nie ma potrzeby sprawdzania tego warunku, gdyż jest spełniony automatycznie.

Należy podkreślić, że uzyskanie dolnych oszacowań obciążeń granicznych w postaci zamkniętych wzorów jest możliwe jedynie w bardzo prostych przypadkach, takich jak stateczność ortotropowej skarpy (rys.12). W bardziej skomplikowanych zagadnieniach lub przy konstruowaniu złożonych pól naprężeń trzeba stosować przybliżone metody analityczno-graficzne lub programy numeryczne ze względu na występowanie równań przestępnych wysokiego stopnia.

Dodatek

Niech $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ będą wektorami jak na rys.1. Ich składowe w przyjętym kartezjańskim układzie współrzędnych są następujące

$$\mathbf{V}_1 [\cos\varphi, \sin\varphi, 0], \quad \mathbf{V}_2 [k\cos\varphi, -k\sin\varphi, 0], \quad \mathbf{V}_3 [0, 0, 1].$$

Jawne formy generatorów i niezmienników występujących w reprezentacjach (5.16), (6.8), (7.4) są zebrane poniżej:

$$\mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_1 = \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & \frac{1}{2}\sin 2\varphi & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2\varphi & \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{22} = \mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_2 = k^2 \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & -\frac{1}{2}\sin 2\varphi & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\varphi & \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M}_{33} = \mathbf{V}_3 \otimes \mathbf{V}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{21}) = 2k \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{M},$$

$$\mathbf{M}_{11} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{11} = \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \varphi \varepsilon_{11} + \sin 2\varphi \varepsilon_{12} & & \\ \varepsilon_{12} + \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) & \sin 2\varphi \varepsilon_{12} + 2 \sin^2 \varphi \varepsilon_{22} & \\ \cos^2 \varphi \varepsilon_{13} + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \varepsilon_{23} & \frac{1}{2} \sin 2\varphi \varepsilon_{13} + \sin^2 \varphi \varepsilon_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{22} = \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \varphi \varepsilon_{11} - \sin 2\varphi \varepsilon_{21} & & \\ \varepsilon_{12} - \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) & 2 \sin^2 \varphi \varepsilon_{22} - \sin 2\varphi \varepsilon_{12} & \\ \cos^2 \varphi \varepsilon_{13} - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \varepsilon_{23} & \varepsilon_{23} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \varepsilon_{13} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{33} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M} = k \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \varphi \varepsilon_{11} & & \\ \cos 2\varphi \varepsilon_{12} & -2 \sin^2 \varphi \varepsilon_{22} & \\ \cos^2 \varphi \varepsilon_{13} & -\sin^2 \varphi \varepsilon_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{M}_{12} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{21}) - (\mathbf{M}_{21} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{M}_{12}) = k \sin 2\varphi \begin{vmatrix} -2 \varepsilon_{12} & & \\ \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} & 2 \varepsilon_{12} & \\ -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{13} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{D}^2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 & & \\ \varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{23} & \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2 & \\ \varepsilon_{11} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{33}^2 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} D^2 + D^2 M_{11} = \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \varphi (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{31}^2) + \sin 2\varphi (\varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{23}) \\ \varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{23} + \sin 2\varphi \varepsilon_{12}^2 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) \\ \cos^2 \varphi (\varepsilon_{11} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{23}) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\varepsilon_{22} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{12}) \\ \\ 2 \sin^2 \varphi (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2) - \sin 2\varphi (\varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{23}) \\ \sin^2 \varphi (\varepsilon_{22} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{12}) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\varepsilon_{11} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{23}) \quad 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{22} D^2 + D^2 M_{22} = k^2 \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \varphi (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{31}^2) - \sin 2\varphi (\varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{23}) \\ \varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{23} - \sin 2\varphi \varepsilon_{12}^2 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{23}^2) \\ \cos^2 \varphi (\varepsilon_{11} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{23}) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\varepsilon_{22} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{12}) \\ \\ 2 \sin^2 \varphi (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2) + \sin 2\varphi (\varepsilon_{11} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{23}) \\ \sin^2 \varphi (\varepsilon_{22} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{12}) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi (\varepsilon_{11} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{23}) \quad 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{33} D^2 + D^2 M_{33} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 & 0 \\ \varepsilon_{11} \varepsilon_{13} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{23} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{12} & 2(\varepsilon_{33}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2) \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{M} = k \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \varphi (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) & & \\ \cos 2\varphi (\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{31}\varepsilon_{23}) & -2 \sin^2 \varphi (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2) & \\ \cos^2 \varphi (\varepsilon_{11}\varepsilon_{31} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{31} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}) & -\sin^2 \varphi (\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}\varepsilon_{12}) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{O}_h \mathbf{D} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{O}_h \mathbf{D}^2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{33}^2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{D} - \mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D}_4 = \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1^2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 \end{vmatrix}$$

Jeżeli uprzywilejowane kierunki 1, 2 są równoważne, k równe jest 1. Niezmienniki:

$$\text{tr } \mathbf{D} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

$$\text{tr } \mathbf{M}_{11} \mathbf{D} = \cos^2 \varphi \varepsilon_{11} + \sin^2 \varphi \varepsilon_{22} + \sin 2\varphi \varepsilon_{12},$$

$$\text{tr } \mathbf{M}_{22} \mathbf{D} = k^2 (\cos^2 \varphi \varepsilon_{11} + \sin^2 \varphi \varepsilon_{22} - \sin 2\varphi \varepsilon_{12}),$$

$$\text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D} = \varepsilon_{33},$$

$$\text{tr } \mathbf{M}_{12} \mathbf{D} = k (\cos^2 \varphi \varepsilon_{11} - \sin^2 \varphi \varepsilon_{22}),$$

$$\text{tr } \mathbf{D}^2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2) ,$$

$$\text{tr } \mathbf{D}^3 = \varepsilon_{11}^3 + \varepsilon_{22}^3 + \varepsilon_{33}^3 + 3\varepsilon_{11}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{31}^2) + 3\varepsilon_{22}(\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{12}^2) + 3\varepsilon_{33}(\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) + 6\varepsilon_{23}\varepsilon_{13}\varepsilon_{12} ,$$

$$\text{tr } \mathbf{M}_{33} \mathbf{D}^2 = \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{33}^2 ,$$

$$\text{tr } \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}^2 = k \cos^2 \varphi (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2) - k \sin^2 \varphi (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2) .$$

Literatura cytowana w tekście

1. NYE, J.F., Physical Properties of Crystals, Oxford, Clarendon Press, 1964
2. ЛЕХНИЦКИЙ, С.Г., Теория упругости анизотропного тела, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1950
3. MISES, R.V., Mechanik der plastischen Formänderungen von Kristallen, ZAMM 8, 161-185, 1928
4. HILL, R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, Clarendon Press, 1950
5. OLSZAK, W., URBANOWSKI, W., The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies, Arch. Mech.Stos., 671-694, 1956
6. SAWCZUK, A., Linear theory of plasticity of anisotropic bodies and its applications to problems of limit analysis, Arch.Mech.Stos. 11, 541-557, 1959
7. MRÓZ, Z., DRESCHER, A., Podstawy teorii plastyczności ósrodków rozdrobnionych, Ossolineum, 1972
8. BOEHLER, J.P., SAWCZUK, A., On yielding of oriented solids, Acta Mechanica 27, 185-206, 1977
9. ERINGEN, A.C., Mechanics of Continua, Wiley Sons, New York, 1967
10. REINER, M., A mathematical theory of dillatancy, Amer. J.Math., 67, 350-363, 1945

11. PRAGER, W., Strain hardening under combined stresses, *J.Appl.Phys.*, 16, 837-840, 1945
12. RIVLIN, R., ERICKSEN, J.L., Stress-deformation relations for isotropic solids, *J.Rat.Mech.An.*, 4, 323-425, 1955
13. SPENCER, A.J.M., Theory of Invariants, *Continuum Physics*, Vol.1, 239-353, Academic Press, 1971
14. GUREVICH, G.B., Foundations of the Theory of Algebraic Invariants, Noordhoff, 1964
15. RIVLIN, R.S., Further remarks on the stress-deformation relations for isotropic materials, *J.Rat.Mech.Anal.*, 4, 681-701, 1955
16. SPENCER, A.J.M., RIVLIN, R.S., The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua, *Arch.Rat.Mech.An.*, 2, 309-336, 1959
17. SPENCER, A.J.M., RIVLIN, R.S., Finite integrity bases for five or fewer symmetric 3×3 matrices, *Arch.Rat. Mech.An.*, 2, 435-446, 1959
18. SPENCER, A.J.M., RIVLIN, R.S., Further results in the theory of matrix polynomials, *Arch.Rat.Mech.An.*, 4, 214-230, 1960
19. SPENCER, A.J.M., RIVLIN, R.S., Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors, Part I, *Arch.Rat.Mech.An.*, 9, 45-63, 1962
20. SPENCER, A.J.M., The invariants of six symmetric 3×3 matrices, *Arch.Rat.Mech.An.*, 7, 64-77, 1961

21. SPENCER, A.J.M., Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors, Part II, Arch.Rat.Mech.An., 18, 51-82, 1965
22. SMITH, G.F., On isotropic integrity bases, Arch.Rat. Mech.An., 18, 282-292, 1965
23. SMITH, G.F., On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and rectors, Int.J.Engng.Sci., 9, 899-916
24. ADKINS, J.E., Symmetry relations for orthotropic and transversely isotropic materials, Arch.Rat.Mech.An., 4, 193-213, 1960
25. ADKINS, J.E., Further symmetry relations for transversely isotropic materials, Arch.Rat.Mech.An., 5, 263-274, 1960
26. SMITH, G.F., SMITH, M.M., RIVLIN, R.S., Integrity bases for a symmetric tensor and vector - The crystal classes, Arch.Rat.Mech.An., 12, 93, 1963
27. SMITH, G.F., RIVLIN, R.S., Integrity bases for vectors - The crystal classes, Arch.Rat.Mech.An., 15, 169, 1964
28. PIPKIN, A.C., WINEMAN, A.S., Material symmetry restrictions on non-polynomial constitutive equations, Arch.Rat.Mech.An., 12, 402-426, 1963
29. WINEMAN, A.S., PIPKIN, A.C., Material symmetry restrictions on constitutive equations, Arch.Rat.Mech.An., 17/18, 184-214, 1964/1965
30. TURNBULL, H.W., The Theory of Determinants, Matrices and Invariants, 3rd edition, Dover, 1960

31. WEYL, H., The Classical Groups, Princeton University Press, 1939
32. GUREVICH, G.B., Foundations of the Theory of Algebraic Invariants, Noordhoff, 1964
33. BOEHLER, J.P., A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy, ZAMM, 59, 157-167, 1979
34. BOEHLER, J.P., Lois de comportement anisotrope des milieux continus, J.Mec. 17, no.2, 153-190, 1978
35. WANG, C.C., On representations for isotropic functions, Part I and II, Arch.Rat.Mech.An., 33, 249-287, 1969
36. WANG, C.C., A new representation theorem for isotropic functions, Part I, II, Arch.Rat.Mech.An., 36, 166-223, 1970
37. WANG, C.C., Corrigendum, Arch.Rat.Mech.An., 43, 392-395, 1971
38. SMITH, G.F., On a fundamental error in two papers of C.C.Wang, Arch.Rat.Mech.An., 36, 161-165, 1970
39. SMITH, G.F., On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors, Int.J.Engng. Sci., 19, 899-916, 1971
40. BOEHLER, J.P., On irreducible representations for isotropic scalar functions, ZAMM, 57, 323-327, 1977
41. СЕДОВ, Л.И., ЛОХИН, В.В., Описание с помощью тензоров точечных групп симметрии, Доклады Академии наук СССР, 149, 796-793, 1963

42. ЛОХИН, В.В., СЕДОВ, Л.И., Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов, Прикладная математика и механика, 27, 393-417, 1963
43. MURNAGHAN, F.D., The Theory of Group Representations, John Hopkins Press, Baltimore, 1938
44. BOEHLER, J.P., Contributions theoriques et experimentales a l'etude des milieux plastiques anisotropes /These de Doctorat es Sciences/, Grenoble 1975
45. RYCHLEWSKI, J., Tensory parametryczne charakteryzujące anizotropię, Seminarium ZMOC, 1985
46. I-SHIH LIU, On representations of anisotropic invariants, Int.J.Engng.Sci., 20, 1099-1109, 1982
47. BOEHLER, J.P., Sur les formes invariantes dans le sous-groupe orthotrope de revolution des transformations orthogonales de la relation entre deux tenseurs symetriques du second ordre, ZAMM, 55, 609-611, 1975
48. BOEHLER, J.P., SAWCZUK, A., Equilibre limite des sols anisotropes, J.Mec., 9, 5-33, 1970
49. BOEHLER, J.P., SAWCZUK, A., Application of representation theorems to describe yielding of transversely isotropic solids, Mech.Res.Comm. 3, 277-283, 1976
50. SPENCER, A.J.M., Deformations of Fibre-Reinforced Materials, Clarendon Press, Oxford 1972
51. GREEN, A.E., ADKINS, J.E., Large Elastic Deformations, Clarendon Press, Oxford 1970

52. MARKOV, K.Z., VAKULENKO, A., On the representation for tensor functions, Bull.Ac.Pol., 29, 169-176, 1981
53. MARKOW, K.Z., Praca habilitacyjna, Sofia, 1981
54. THOMAS, T.Y., Interdependence of the yield condition and the stress-strain relations for plastic flow, Proc.Natl.Acad.Sci.U.S., 40, 593-597, 1954
55. SAWCZUK, A., STUTZ, P., On formulation of stress-strain relations for soils at failure, ZAMP, 19, 770-778, 1968
56. DRUCKER, D.C., PRAGER, W., Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Quart.Appl.Math., 10, 157-165, 1952
57. ALLIROT, D., BOEHLER, J.P., SAWCZUK, A., Irreversible deformations of an anisotropic rock under hydrostatic pressure, Int.J.Rock Mech.Min.Sci. & Geomech.Abstr., 14, 77-83, 1977
58. SCHLEICHER, F., ZAMM 5, 478, 1925 i ZAMM 6, 199, 1926
59. BASISTA, M., Tensor functions representations as applied to deriving constitutive relations for skewed anisotropy, ZAMM, 65, 151-158, 1985
60. BASISTA, M., On formulating yield criteria for materials with skewed anisotropy, Proc.Coll.Int.C.N.R.S. "Failure Criteria for Structured Media", Villard-de-Lans, czerwiec 1983, /w druku/
61. BASISTA, M., Dolna ocena nośności granicznej ośrodków plastycznie anizotropowych w płaskim stanie odkształcenia, Prace IPPT, 2/1981

62. BASISTA, M., SAWCZUK, A., On lower bound estimation of the collapse load in anisotropic plasticity, Proc. Coll.Int.CNRS N^o 319 "Comportement plastique des solides anisotropes", Villard-de-Lans, 15-19 Juin, 1981, ed.J.P.Boehler, /w druku/
63. BASISTA, M., O szacowaniu nośności granicznej ośrodków plastycznie anizotropowych metodą statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, Rozpr.Inż., 31, 1, 35-51, 1983
64. HILL, R., A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity, Quart.J.Mech.Appl.Math., 1, 18-28, 1948
65. OLSZAK, W., PERZYNA, P., SAWCZUK, A., Teoria plastyczności, PWN, Warszawa 1965
66. SZCZEPIŃSKI, W., Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej, PWN, Warszawa 1968
67. CHEN, W.F., Limit analysis and soil plasticity, Elsevier, Amsterdam 1975
68. IZBICKI, R., MRÓZ, Z., Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, PWN, Warszawa 1967
69. BEYNET, J.M., SAWCZUK, A., On statically admissible stress fields in anisotropic solids, I.Kisiel Anniversary Volume, Wrocław Technical University Press, 1981
70. WINZER, A., CARRIER, G.F., The interaction of discontinuity surface in plastic fields of stress, J.Appl. Mech., 261-264, September 1948

71. SZCZEPIŃSKI, W., Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej, PWN, Warszawa, 1967
72. SPENCER, A.J.M., Tensor functions in continuum mechanics, CISM course, 1-5 July, 1984

Spis treści

Str.

1. Wstęp	5
2. Cel i zakres pracy	8
3. Podstawy teorii reprezentacji funkcji tensorowych	11
3.1. Reprezentacje wielomianowe	12
3.2. Reprezentacje niewielomianowe	15
3.3. Ogólne reprezentacje funkcji izotropowych	16
3.4. Metoda tensorów parametrycznych	19
4. Sformułowanie problemu I	21
5. Nieliniowa sprężystość	22
6. Ortotropia	28
7. Trzy równoważne, ortogonalne kierunki anizotropii	30
8. Porównanie z prawem Hooke'a	33
9. Ogólny warunek plastyczności	35
10. Płaski stan naprężenia	41
11. Ortotropowy warunek plastyczności	45
12. Wnioski	48
13. Ocena nośności granicznej - wprowadzenie	49
14. Warunek plastyczności wg Hilla	56
15. Nieciągłości naprężeń	58
16. Nośność graniczna klina	62
17. Wciskanie stempla w półprzestrzeń	67
18. Przecinanie pasma	72
19. Wnioski	81
Dodatek	83
Wykaz literatury cytowanej w tekście	88