

Janusz Wójcik

**TRANSPORT ENERGII
W POLU FALI ULTRADŹWIĘKOWEJ**

Praca habilitacyjna

2/1999

W A R S Z A W A 1 9 9 9
<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 lutego 1999 r.

Recenzent - Prof. dr hab. inż. Henryk Zorski



56535



P r a c a h a b i l i t a c y j n a

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 3,20 Ark. druk. 3,20
Oddano do drukarni w kwietniu 1999r.

ATOS Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

Janusz Wójcik
Zakład Ultradźwięków

TRANSPORT ENERGII W POLU FALI ULTRADŹWIĘKOWEJ

Streszczenie.

Podstawą opisu są równania transportu masy, pędu i energii wewnętrznej ośrodka stratnego. Równania te zapisano w przybliżeniu potencjalnym ($\mathbf{v} = \nabla\Phi$, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, \mathbf{v} -wektor pola prędkości, Φ -działanie na jednostkę masy (potencjał akustyczny)). Jest to właściwe przybliżenie do opisu podłużnych, mechanicznych (akustycznych) zaburzeń ośrodka. Zaburzenia poprzeczne (wiry w płynie) traktowane są tu (ze względu na sposób wzbudzenia zaburzenia) jako efekty wtórne i poza szczególnym przypadkiem nie są uwzględniane w opisie. Powstają one kosztem energii początkowo czysto potencjalnego przepływu. Rozwijają się i są podtrzymywane kosztem znikomej części energii dostarczanej do ośrodka za pośrednictwem modu potencjalnego. Równania Naviera-Stokesa stanowią tu modelowo ważny, jednak w zakresie opisu termo-lepkich strat, szczególny przypadek. Zastosowania ultradźwięków w medycynie, biologii, chemii wymagają rozważenia ogólniejszej klasy ośrodków, w której klasyczna lepkość, przejawiająca się klasycznie lepką absorpcją energii dźwięku (proporcjonalną do iloczynu kwadratu częstotliwości i współczynników lepkości), jest tylko szczególnym przypadkiem. W związku z powyższym i, z założoną "okołoadiabatycznością" (okołoisotropowością) przemiany, jakiej podlega ośrodek, w rozdziale I zastosowano odpowiednio ogólną relację konstytutywną. Mianowicie, do opisu procesów prowadzących do dyssypacji energii mechanicznej zastosowano operator absorpcji wiążąc go z tak zwanymi słabosygnałowymi współczynnikami absorpcji $a(\omega)$ (ω -częstotliwość), powszechnie używanymi w akustyce do opisu zaniku energii składowej Fourierowskiego zaburzenia. Związek ten, ważny dla tej pracy, jest szczegółowo dyskutowany w rozdziale IV. Przedstawiono dyskusję wpływu powyższych założeń na postać równania energii wewnętrznej (entropii). W związku z tym wskazano na znaczenie różnicy między ciśnieniem w założonej, porównawczej (isotropowej) przemianie ośrodka i "prawdziwym" ciśnieniem w rzeczywistym ośrodku stratnym.

Pozwoliło to na sformułowanie w rozdziale II metody ścisłego całkowania równania pędu. Uzyskane równanie jest uogólnieniem równania Bernoulliego na przypadek ośrodków stratnych i stanowi podstawę w pełni nieliniowego, potencjalnego opisu zaburzeń ośrodka stratnego, jest on omawiany w rozdziale VIII. Równania, potencjału akustycznego i ciągłości, zostały sprowadzone do jednego nieliniowego równania falowego (z dokładnością do wyrazów rzędu trzeciego względem zaburzenia). Jednocześnie wyznaczono gęstość i prędkość dźwięku jako funkcje potencjału. Podano znane w literaturze przybliżenia otrzymanego równania.

W rozdziale III przedstawiono, otrzymane na bazie równań transportu, równania zachowania energii całkowitej (w opisie potencjalnym) i energii dźwięku. Podano, nieznanne w literaturze, wyprowadzenie na bazie równania propagacji, równania zachowania energii dźwięku. Wykazano, że ścisłe równanie może być przybliżone (po zastosowaniu wcześniej otrzymanych wyrażań) do równania bilansu energii wynikającego z nieliniowego równania propagacji. Pozwala to na

stwierdzenie, że mimo redukcji opisu zaburzeń ośrodka za pomocą równań transportu do jednego równania, zachowywana jest (niejawnie) konsystencja obu opisów.

W rozdziale IV omówiono własności operatora absorpcji i wspomnianego wyżej współczynnika absorpcji. Pokazano, że słabosygnałowy współczynnik absorpcji jest wartością własną operatora absorpcji. Wynika stąd ważny wniosek, że operator absorpcji może być zrekonstruowany na podstawie pomiaru. Przykład takiej rekonstrukcji we współrzędnych przestrzennych dla ośrodka o absorpcji charakterystycznej dla tkanek miękkich i pewnych substancji biologicznych (odmiennej niż klasyczna) podano w dodatku A. Podstawowe znaczenie dla tej i następnych części pracy ma analiza równania dyspersyjnego (opis zlinearyzowany) i kwazidyspersyjnego (nieliniowy opis zaburzeń).

Niektóre wyniki tej analizy, bardziej szczegółowo przedstawione w pracy [16], pozwoliły, między innymi, na znaczące uproszczenie, jednak z zachowaniem dokładności, tak zwanego "Klasycznego równania akustyki" (równanie Kuznietzowa). Dotychczas stosowane metody miały charakter heurystyczny (lub przybliżony, asymptotyczny). W ten sposób niektóre numeryczne modele nieliniowej propagacji uzyskały formalne uzasadnienie. W miejsce pojęcia "generacja harmonicznych" związku kwazidyspersyjne pozwalają wprowadzić pojęcie "generacja overtónów" jako bardziej odpowiednie dla fizycznego opisu powstawania i deformacji widma Fouriera zaburzenia w nieliniowym opisie propagacji.

Najważniejszy wynik tej pracy dotyczący zjawiska absorpcji energii dźwięku przedstawiono w rozdziale V. Wykazano, że w liniowym i nieliniowym opisie propagacji wzory opisujące gęstość mocy źródeł ciepła generowanego w ośrodku stratnym przez dźwięk mają identyczną postać formalną, to znaczy mają postać wartości średniej (oczekiwanej) operatora strat. Jest to konsekwencją zachowania energii w oddziaływaniach nieliniowych. Przy założonej dokładności opisu nieliniowego zjawisko absorpcji jest liniowe (operator absorpcji jest liniowy także w opisie ogólnym), zachodzi jednak w warunkach nieliniowej propagacji. Stąd liczbowe wartości i interpretacja fizyczna formalnie identycznych wzorów są różne w liniowym i nieliniowym opisie. Szczegóły podano we wnioskach. Otrzymane równoważności stanowią formalną podstawę nowych, prostszych i dokładniejszych metod wyznaczania wielkości związanych z absorpcją lub charakteryzujących pole akustyczne. Przykłady, oprócz wspomnianej gęstości mocy źródeł ciepła, ośrodek w rozdziale VII. W rozdziale V wskazano też na konieczność odróżnienia, w przypadku ośrodka stratnego, pojęcia (ogólniejszego) energii zaburzenia potencjalnego od pojęcia energii akustycznej, chociaż obie wielkości definiowane są tym samym wzorem.

W rozdziale VI przeprowadzono faktoryzację otrzymanych równań w bazie funkcji Fouriera. Zastosowano reprezentację ciągłą i dyskretną. Procedura ta pozwala na bardziej szczegółową interpretację otrzymanych rezultatów oraz wskazuje konkretną metodę wyznaczania (pomiaru) wartości średniej operatora absorpcji.

Część tematów z rozdziału VIII (Dyskusja i Wnioski) wskazano wyżej. Dodatkowo określono w ramach potencjalnego opisu ośrodka stratnego tak zwane "przybliżenie akustyczne". Pojawia się ono w wyniku pominięcia w równaniu ewolucji potencjału wyrazu sprzęgającego to równanie z równaniem entropii (przewodnictwa cieplnego). W ten sposób opis modu potencjalnego ulega rozkładowi na niezależny od termicznego mod akustyczny i ewoluujący kosztem jego energii mod termiczny (w pełnym opisie w skutek sprzężenia obu modów dźwięk może być wzbudzony przez mod termiczny, na przykład przez zadany początkowy rozkład temperatury). Z dyskusji wynika, że jedynie w ramach przybliżenia akustycznego założenie okresowej odpowiedzi ośrodka na okresowe pobudzenie (o okresowości adekwatnej do okresowości pobudzenia) jest dobrze uzasadnione. Zwrócono uwagę na dodatkowe zjawiska, które mogą być opisane (w pewnym zakresie) przez w pełni nieliniowy opis potencjalny.

W dodatku C, drugi niezmiennik tensora szybkości deformacji dla ośrodka klasycznie lepkiego wyrażono za pomocą zmiennych akustycznych.

WSTĘP

Praca powstała w wyniku rozważań nad energetycznymi procesami zachodzącymi w ośrodku, który jest poddany zaburzeniu akustycznemu o skończonej amplitudzie. Ze względu na zastosowania medyczne, nasze badania eksperymentalne i teoretyczne koncentrowały się na zjawisku absorpcji i generacji źródeł ciepła w różnych ośrodkach. Używano fal okresowych ciągłych lub impulsowych, albo o postaci pojedynczych impulsów, o mocach stosowanych w ultrasonografii i litotrypsji. Zainteresowanie autora skupiło się na zrozumieniu zjawiska generacji składowych widma Fouriera zaburzenia i wymiany energii między tymi składowymi oraz na zjawisku absorpcji, w szczególności na uzyskaniu ogólnego formalnego opisu tego zjawiska. W różniczkowo-cząstkowych równaniach opisujących rozchodzenie się silnych zaburzeń dźwiękowych, dominujący wyraz opisujący generację harmonicznych (poszerzenie widma) jest rzędu drugiego względem zaburzenia (ciśnienia). Natomiast absorpcja reprezentowana jest przez wyraz liniowy względem zaburzenia. Ogólnie wiadomo, że nieliniowość powoduje zwiększenie absorpcji energii dźwięku przez ośrodek. Wniosek, wynikający z analizy różniczkowych, cząstkowych równań akustyki, że w przypadku propagacji nieliniowej, równanie opisujące zachowanie energii z uwzględnieniem strat absorpcyjnych, to znaczy z uwzględnieniem ciepła generowanego przez zaburzenie, powinno różnić się od analogicznego równania w przypadku liniowej propagacji, wydaje się logicznym. Wszak w równaniach nieliniowych występuje dodatkowy wyraz. Powoduje on, w szczegółowych równaniach transportu (to znaczy opisujących oddzielnie moc lub energię każdej ze składowych spektralnych) powstanie dodatkowego członu – rzędu trzeciego względem zaburzenia. Wyraz ten opisuje wymianę energii między n -tą składową a wszystkimi pozostałymi składowymi widma [6],[17]. Wydaje się że to właśnie z tego powodu ograniczony był dalszy postęp, w analizie zagadnienia transportu energii zaburzenia potencjalnego o skończonej amplitudzie (na bazie równań propagacji). Wiedza w tym zakresie jest prezentowana na przykład w [1]-[4],[9],[17].

Okazuje się, co jest między innymi wykazane w tej pracy, że równania zachowania mocy lub energii mają identyczną postać formalną w przypadku liniowego i nieliniowego opisu zaburzeń akustycznych.

Jeżeli spojrzymy na zagadnienie z ogólniejszego punktu widzenia, na przykład w przypadku płynów, z punktu widzenia hydrodynamicznego układu równań transportu, to można dojść do wniosku, że powyższe zdanie nie informuje o niczym nowym. Bowiem wynikające z tego układu równanie zachowania energii całkowitej, w swej ogólnej postaci (także w przybliżeniu

potencjalnym), nie wyróżnia "siły" zaburzenia jakiemu podlega ośrodek. Inaczej mówiąc energia jest zachowywana w nieliniowych oddziaływaniach. Jednakże wniosek taki, z powodów wcześniej wspomnianych, nie jest trywialny jeśli bazą opisu są równania akustyki. Rodzi się też pytanie: czy i w jakim zakresie redukcja opisu ośrodka (do jednego równania skalarnego) narusza prawa zachowania właściwe dla ogólniejszego modelu?. Wydaje się, że nie tylko konsekwentne operowanie rzędami przybliżeń, ale także możliwość odtworzenia, na bazie opisu zredukowanego, praw zachowania odpowiadających ogólniejszemu opisowi, powinna być dodatkowym kryterium oceny jakości opisu przybliżonego. Takie porównanie jest prezentowane w tej pracy. Zagadnienia związane z transportem energii, lub ogólniej, z prawami zachowania, są ważne nie tylko z już wspomnianych powodów i z powodów, które jeszcze przytoczymy. W sytuacji, gdy nie są znane ściśle (analityczne) rozwiązania nieliniowych równań akustyki (za wyjątkiem formalnie ważnych jednak trywialnych, lub jednowymiarowych asymptotycznych, przypadków), każdy ścisły wynik opisujący własności tych równań i ich rozwiązań jest ważny. Dotyczy to w szczególności tak ważnych wielkości jak energia lub moc zaburzenia. Analiza praw zachowania pozwala na uzupełnienie interpretacji fizycznej zjawisk akustycznych. Może być także przydatna w dowodach istnienia rozwiązań równań propagacji.

Obok teoretycznego znaczenia, wielkości wchodzące w skład równań zachowania, mają bardzo duże znaczenie praktyczne. Jednak ich bezpośredni pomiar jest praktycznie niemożliwy lub obciążony znacznym błędem (a w przypadku symulacji numerycznych wymaga bardzo dokładnych rachunków).

Konsekwencją wyprowadzonych w tej pracy równań, co było jej podstawowym i pierwotnie zmierzonym celem, jest radykalna zmiana metod wyznaczania wspomnianych wielkości. Przede wszystkim umożliwienie niemal bezpośredniego pomiaru absorpcji lub gęstości mocy źródeł ciepła wytwarzanego nawet przez bardzo złożone (trudne do numerycznego modelowania) pola akustyczne. W szczególnych przypadkach metody te stosowano już wcześniej [20]. Nie miały one jednak matematycznego uzasadnienia poza zakresem stosowalności liniowej teorii rozchodzenia się dźwięku.

Modelową podstawą przyjętego w pracy opisu jest układ trzech równań transportu: masy, pędu i energii wewnętrznej, zazwyczaj stosowany w opisie ośrodka stratnego (klasycznie lepkiego) i przewodzącego ciepło. Do tego układu zastosowano przybliżenie potencjalne

Zaproponowano uogólnienie opisu termo-lepkich strat przez wprowadzenie operatora absorpcji, który może być wyznaczony eksperymentalnie. Przedstawiono także oryginalną metodę

ściśle całkowania równania pędu dla takiego ośrodka. Wydaje się, że w ten sposób zamknięto etap poszukiwań w pełni nieliniowego opisu zaburzeń potencjalnych w ośrodku nieidealnym. Zagadnienie to nie było głównym celem tej pracy. Jest jednak dyskutowane w ostatnim rozdziale, bowiem nowe elementy opisu ("zamykające") stwarzają obiektywne podstawy do oceny konsekwencji przemian energetycznych zachodzących w polu zaburzenia potencjalnego.

Podstawowe wyniki prezentowane w tej pracy, w zakresie opisu zjawisk absorpcji na bazie równań propagacji nieliniowej akustyki, zostały opublikowane w [16]. Wykorzystano je w pracach [18] i [19].

I. RÓWNIANIA PODSTAWOWE.

W bezwymiarowym układzie zmiennych, w przybliżeniu potencjalnym, równania ruchu ośrodka ciągłego, stratnego i przewodzącego ciepło zapisujemy następująco,

$$Dg = -qg \nabla \cdot \mathbf{v} ; \quad D \equiv \partial_t + q\mathbf{v} \cdot \nabla , \quad \mathbf{v} \equiv \nabla \Phi, \quad (1)$$

$$gD\mathbf{v} = -\nabla [P^* + 2\mathcal{A}_v \mathbf{v}]; \quad P^*(g) = \frac{1}{q\gamma} g^\gamma. \quad (2)$$

Gdzie: $g(\mathbf{x}, t)$ - gęstość ; $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ - wektor pola prędkości; $\Phi(\mathbf{x}, t)$ - potencjał; P^* - ciśnienie w przemianie isoentropowej; \mathcal{A}_v - liniowy względem \mathbf{v} operator strat (absorpcji), $\mathcal{A}_v \mathbf{v}$ - wielkość skalarna; (\mathbf{x}, t) - współrzędne w przestrzeni i czasie; $\gamma = c'_p/c'_v$ - wykładnik adiabaty, c'_p , c'_v - ciepła właściwe przy stałym ciśnieniu i objętości, dla γ wyznaczonych empirycznie $\gamma = 1 + B/A$, B/A - parametr nieliniowości [1]. Wielkości powyższe są bezwymiarowe. Zastosowano następujący sposób normowania

$$\begin{aligned} t &\equiv \omega_o t' , \quad \mathbf{x} \equiv k_o \mathbf{x}' , \quad \partial_{t'} \equiv \omega_o \partial_t , \quad \nabla' \equiv k_o \nabla , \quad k_o \equiv \omega_o / c_o , \\ g &\equiv \frac{\rho'}{\rho_R} , \quad P^*(g) \equiv \frac{P'^*(g')}{P_o} , \quad \mathbf{v} \equiv \frac{\mathbf{v}'}{v_o} , \quad \mathcal{A}_t \equiv \frac{1}{\rho_R c_o} \mathcal{A}'_t , \quad \Phi \equiv \frac{\Phi'}{\Phi_{oo}} , \\ q &\equiv \frac{P_o}{\rho_R c_o^2} , \quad v_o \equiv \frac{P_o}{\rho_R c_o} = qc_o , \quad \Phi_{oo} \equiv \frac{P_o}{\rho_R \omega_o} , \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: $\omega_o = 2\pi/\tau_o$, τ_o - charakterystyczny interwał czasu albo $\omega_o = 2\pi f_o$, f_o - charakterystyczna częstotliwość; P_o - charakterystyczne ciśnienie (np. wartość bezwzględna ekstremalnego ciśnienia źródła zaburzenia); ρ_R , c_o - równowagowa gęstość i prędkość dźwięku.

W ośrodku bezstratnym, w zmiennych wymiarowych $-P^*(\rho') = (\rho_R c_o^2 / \gamma) (\rho' / \rho_R)^\gamma$. Dla ośrodków klasycznie lepkich [1]-[4], $\mathcal{A}_v \equiv -\alpha_2 \nabla \cdot \mathbf{v}$, $\alpha_2 = [(4/3)\eta'_t + \eta'_s + (\gamma - 1)\chi' / c'_p] \omega_o / 2\rho_R c_o^2 = [(4/3)\eta_t + \eta_b + \eta_z] / 2 = q [(4/3)\eta'_t + \eta'_s + (\gamma - 1)\chi' / c'_p] / 2\rho_R \Phi_{oo}$ - bezwymiarowa hybrydowa lepkość; η'_t , η'_s , χ' - współczynniki lepkości ścinania i objętościowej oraz przewodnictwa cieplnego.

Współczynnik nieliniowości q (akustyczna liczba Macha), dla wody i substancji o zbliżonym ρ_R i c_o , jest wielkością małą nawet dla $P_o = 100$ [MPa] ($q \approx 0.04$). Dla zaburzeń jednowymiarowych,

wzbudzanych sinusoidalnie z częstotliwością f_0 , w ośrodku idealnym $Z_\sigma k_0 = 2/q(\gamma + 1)$, Z_σ - dystans utraty ciągłości. Wielkości proporcjonalne do q określać będziemy jako małe rzędu $o(q)$.

Z operatorami absorpcji \mathcal{A}_v związane są bezwymiarowe parametry absorpcji α_l $l > 0$, charakterystyczne dla danego mechanizmu absorpcji (na przykład α_2). Są to wielkości bardzo małe (dla wody $\alpha_2 \sim (1+10) \cdot 10^{-12} [1/\text{Hz}] \cdot f_0$) lub małe, nawet dla substancji uważanych za silnie absorbujące (substancje biologiczne $l \approx 1$ $\alpha_l < 0.01$). Zakładamy że, normy operatorów \mathcal{A}_v są wielkościami małymi rzędu $o(\alpha)$, precyzyjna definicja α zostanie podana dalej.

Zauważmy że, niezależnie od rodzaju ośrodka (rodzaju absorpcji), jeśli tylko uwzględnione jest przewodnictwo cieplne ($\chi' \neq 0$), to operator \mathcal{A}_v można przedstawić w postaci $\mathcal{A}_v = \mathcal{A}_u + \mathcal{A}_x$, gdzie $\mathcal{A}_x \equiv -(\eta_x/2)\nabla \cdot = -\alpha_x \nabla \cdot$. Równanie (2) jest modelowym rozszerzeniem równań Naviera-Stokesa w zakresie opisu absorpcji odmiennej od klasycznej. Zazwyczaj w akustyce, równanie transportu ciepła dołącza się do równań Naviera-Stokesa w celu wyprowadzenia właśnie \mathcal{A}_x (η_x). Okazuje się że, wyprowadzenie η_x i dodanie go do $((4/3)\eta_a + \eta_b)$ rodzi pytanie o kompletność samego równania transportu entropii w zakresie opisu nieodwracalnych procesów produkcji ciepła kosztem energii zaburzenia. Składowa \mathcal{A}_x operatora absorpcji występuje zawsze w równaniach ruchu ośrodka przewodzącego ciepło - równaniach akustyki wyprowadzanych z (1) i (2), niezależnie od jego własności lepkościowych i stanowi składową opisu zaniku amplitudy i absorpcji (z przemianą na ciepło) energii zaburzenia. Niemniej jednak w wyrażeniu opisującym produkcję ciepła, w równaniu transportu entropii, poza składowymi tensora lepkości, nie występuje odpowiedni wyraz opisujący przyczynek do produkcji ciepła, związany z \mathcal{A}_x i quasi lepkością η_x . Z tego punktu widzenia równania akustyki opisujące efekty termiczne, generowane przez propagujący dźwięk, nie mają pełnego uzasadnienia w równaniu transportu entropii (przewodnictwa cieplnego). Zagadnienie to wymaga bliższego omówienia, co zrobimy na przykładzie ośrodka klasycznie lepkiego, chociaż nie stanowi ono zasadniczego celu tej pracy. Ponadto, sprecyzujemy warunki, w których otrzymuje się prawą stronę w (2). Rozpoczniemy od wyprowadzenia \mathcal{A}_x , to znaczy η_x - składnika bezwymiarowej hybrydowej lepkości. Wyprowadzenie to można znaleźć na przykład w [1],[2]. Tu przedstawiemy podobne, jednak nieco krótsze.

Tensor ciśnień ma postać [3]

$$\Pi_{kl} = \mathcal{P}(g, S)\delta_{kl} - \sigma_{kl}, \quad (4)$$

$$\sigma_{ki} = 2\eta_s \partial_i v_k - \left(\frac{2}{3}\eta_s - \eta_b \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ki} \quad , \quad \partial_i = \partial / \partial x_i \quad , \quad v_k = \partial_k \Phi \quad .$$

gdzie: \mathcal{S} - bezwymiarowa entropia właściwa. Obliczając jego dywergencję, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \partial_i \Pi_{ki} &= \nabla \cdot \tilde{\mathcal{P}} \quad , \quad \tilde{\mathcal{P}} \equiv \mathcal{P}(g, \mathcal{S}) + 2\mathcal{A}_L \mathbf{v} \quad , \\ -\partial_i \sigma_{ki} &= \nabla \cdot \left(\frac{4}{3}\eta_s + \eta_b \right) \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla 2\mathcal{A}_L \mathbf{v} \quad . \end{aligned} \quad (5)$$

Jednym z najczęściej przyjmowanych w akustyce, jest założenie adiabatycznej (isoentropowej) albo okołoadiabatycznej (okołoisoentropowej) przemiany w polu akustycznym. Uzasadnia się je szybkością przemiany jakiej podlega ośrodek. Potwierdza je także eksperyment.

Termin "adiabatyczny" oznacza tu także "isoentropowy" lub odwracalny. W ostatnim przypadku zmiany entropii właściwej mogą być obserwowane w pewnych obszarach przestrzeni, jednak zawsze realizowane są w sposób odwracalny tak, że entropia każdej poruszającej się części ośrodka jest stała w czasie. Termin "nieadiabatyczny" zawsze implikuje "nieisoentropowy" i "nieodwracalny". Wskazuje to na pewien proces, którego skutkiem jest (dodatni), nieodwracalny przyrost entropii. Zakładając przepływ lepki, lub z udziałem przewodnictwa cieplnego, przyjmujemy tym samym że termolepka absorpcja jako proces nieodwracalny, wpływa na cały ośrodek.

Różnica między pojęciami "nie-isoentropowy", "nie-adiabatyczny" może pojawić się w hydrodynamice. Na przykład, transport pewnego początkowego zaburzenia cieplnego (entropii) przez poruszający się płyn idealny może być, pod określonymi warunkami, rozważany jako proces adiabatyczny, jednak przestrzennie nieisoentropowy.

W akustyce zakłada się najczęściej jednorodny stan przestrzeni otaczającej przepływ. Dlatego, w ośrodku absorbującym, w polu akustycznym tylko nieodwracalny przyrost entropii ma zazwyczaj miejsce. Terminy "(nie)-adiabatyczny", "(nie)-isoentropowy" mają wtedy ten sam sens [2]. Okołoadiabatyczny oznacza nieadiabatyczny, ale też w naszym rozumieniu nie dowolny inny, lecz taki, którego współrzędna \mathcal{P} w przestrzeni stanów $(g, \mathcal{S}, \mathcal{P})$, dla dowolnego (x, t) , jest bliska $P^*(g)$ -ciśnienia w procesie isoentropowym (odwracalnym). To znaczy $\alpha(\mathcal{P} - P^*) = \alpha\alpha$, $\alpha \ll 1$, a także by maksymalna wartość zaburzenia ciśnienia była dużo większa od zmiany ciśnienia wywołanej nieodwracalnym przyrostem entropii. By zakończyć ten etap rozważań powinniśmy podać równanie stanu $\mathcal{P} = \mathcal{P}(g, \mathcal{S})$ (przy założeniu hipotezy o lokalnej równowadze). Modelowo wykorzystuje się równanie stanu gazu idealnego i Van der Waalsa (patrz dyskusja na przykład w [2]).

Jednak \mathcal{P} można skonstruować w oparciu o P^* i hipotezę o lokalnej równowadze. Przyjmujemy że,

$$\mathcal{P}(g, \mathcal{S}) = P^*(g) + (\mathcal{S} - s_R) \partial_{\mathcal{S}} \mathcal{P} \Big|_g, \quad (6)$$

gdzie \mathcal{S} - bezwymiarowa entropia właściwa; s_R - entropia odniesienia (równowagowa).

Przyrost $\mathcal{S} - s_R$ wyznaczamy z równania transportu entropii [3] zapisanego w zmiennych bezwymiarowych

$$gT D\mathcal{S} = \chi \Delta T - q 2(\mathcal{A}_L \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v} - q 4\eta_s I_2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_u \partial_i v_i &= \left(\frac{4}{3} \eta_s + \eta_b\right) (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 - 4\eta_s \sum_{i,j} \partial_i v_i \partial_j v_j - (\partial_i v_i)^2 \\ &= \left(\frac{4}{3} \eta_s + \eta_b\right) I_1^2 - 4\eta_s I_2 = -2(\mathcal{A}_L \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v} - 4\eta_s I_2 \end{aligned}$$

$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}'/s_0$, $T \equiv T/T_0$ - bezwymiarowa temperatura; $\chi \equiv \chi' T_0 k_s / P_0 c_s$ - bezwymiarowy współczynnik przewodnictwa cieplnego. Na T_0 i s_0 nałożono warunek $P_0 / \rho_0 = T_0 s_0$; I_1, I_2 - niezmienniki (I_2 może być przedstawiony w postaci dywergencji - patrz dodatek C). Zauważmy że, pomimo założonego przepływu potencjalnego, drugi niezmiennik nie znika w ogólnym przypadku.

Cisnienie akustyczne definiujemy jako różnicę między "prawdziwym ciśnieniem" \tilde{P} i ciśnieniem w ośrodku nie zaburzonym $P_R \equiv \tilde{P}(g=1, \mathcal{S}=s_R) = P^*(1) = \chi q \gamma$

$$P \equiv \tilde{P} - P_R. \quad (8)$$

Ponieważ $\tilde{P} = \mathcal{P} + \alpha(\alpha)$, to z taką samą dokładnością (co wykażemy niżej), $P = \tilde{P} - P_R = \mathcal{P} - P_R + \alpha(\alpha) = \mathcal{P} - P_R + \alpha(\alpha)$. Pomijając w (7) wyrazy $o(q)$, $\alpha(q\alpha)$, podstawiając

$$T = (\mathcal{P} - P_R) (\partial T / \partial \mathcal{P}) \Big|_g + T_R, \quad (9)$$

otrzymujemy

$$\partial_i \mathcal{S} = \frac{-\chi}{gT} \frac{\partial T}{\partial \mathcal{P}} \Big|_g \partial_i \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (9a)$$

Stąd

$$\partial_{\mathcal{S}} \mathcal{P} \Big|_g (\mathcal{S} - s_R) = \frac{-\chi}{gT} \frac{\partial T}{\partial \mathcal{P}} \Big|_g \partial_{\mathcal{S}} \mathcal{P} \Big|_g \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (10)$$

Ponieważ

$$T dS = c_p dT - T \left. \frac{\partial \frac{1}{g}}{\partial T} \right|_p dP, \quad (11)$$

to

$$\left. \frac{\partial_p T}{c_p} \right|_S = \left. \frac{T}{c_p} \frac{\partial_T \left(\frac{1}{g} \right)} \right|_p \quad (12)$$

Z równania procesu adiabatycznego mamy,

$$\left. \frac{\partial_T \left(\frac{1}{g} \right)} \right|_p = -(\gamma - 1) \left. \frac{\partial_T \left(\frac{1}{g} \right)} \right|_S,$$

co daje

$$\left. \frac{\partial_p T}{c_p} \right|_S = -\frac{T}{c_p} (\gamma - 1) \left. \frac{\partial_T \left(\frac{1}{g} \right)} \right|_S.$$

Wykorzystując związek Maxwella $\left. \frac{\partial_S P}{\partial_x} \right|_s = -\left. \frac{\partial_x T}{\partial_s} \right|_s$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(g, S) &= P^*(g) - (\gamma - 1) \frac{\chi}{c_p} \nabla \cdot \mathbf{v} = P^*(g) - \eta_x \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= P^*(g) + 2\mathcal{A}_x \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (13)$$

To znaczy

$$\tilde{P} = \mathcal{P}(g, S) + 2\mathcal{A}_{Ls} \mathbf{v} = P^*(g) + 2\mathcal{A}_v \mathbf{v}. \quad (14)$$

Jest to prawa strona w (2).

Zmiany entropii opisywane przez (10) są odwracalne- jednak w procesie deformacji ośrodka dają dodatkowy wkład rzędu wyższego $o(q\alpha)$ do nieodwracalnego procesu zamiany energii zaburzenia na ciepło. Wkład ten nie jest uwidoczniiony w (7). Wracamy do wyżej opisanego problemu.

Moc sił, którymi wyróżniony element ośrodka deformuje otoczenie, na jednostkę masy ośrodka, dana jest (w zmiennych bezwymiarowych) przez,

$$\frac{q}{g} \Pi_{ik} \partial_i v_k = \frac{q}{g} (\tilde{P} \nabla \cdot \mathbf{v} + 4\eta_n I_2) = \tilde{P} D \left(\frac{1}{g} \right) + \frac{q}{g} 4\eta_n I_2, \quad (15)$$

Mamy ciąg nierówności,

$$\tilde{P}d\left(\frac{1}{g}\right) < \mathcal{P}d\left(\frac{1}{g}\right) < P^*d\left(\frac{1}{g}\right), \quad (16)$$

w którym pierwszy wyraz (z dokładnością do I_2) reprezentuje rzeczywistą różniczkową pracę, na jednostkę masy, wykonywaną nad otoczeniem przez wyróżniony element ośrodka. Drugi wyraz reprezentuje wielkość analogiczną jednak, wykonywaną w polu ciśnienia $\mathcal{P}(g, \mathcal{S})$, które w warunkach równowagowych nazwalibyśmy termodynamicznym (termostatycznym), czyli po prostu ciśnieniem. Obie te wielkości mniejsze są od pracy jaką wykonałby element ośrodka w procesie odwracalnym. Różnice między trzecim członem, a pozostałymi są proporcjonalne do

$$\frac{q}{g} Q_{a,z} = -2(\mathcal{A}_{v,z} \mathbf{v}) D \frac{1}{g} = \frac{-q(2\mathcal{A}_{v,z} \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}}{g} \Big|_{\mathcal{A}=-\alpha \nabla} = \frac{\alpha_{z,z}}{qg} \left(\frac{Dg}{g}\right)^2 \geq 0, \quad (17)$$

które są zawsze dodatnie w ośrodku klasycznie lepkiem, niezależnie od kierunku procesu (sprężanie, rozprężanie); opisują więc nieodwracalną zamianę energii zaburzenia na ciepło. Wielkość $\dot{Q} \equiv \dot{Q}_a = -2(\mathcal{A}_v \cdot \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v}$ nazywać będziemy chwilową gęstością (pełną) mocy źródeł ciepła (nie rozpatrujemy tu zewnętrznych źródeł ciepła).

Równanie transportu energii wewnętrznej u zapisujemy w następujących równoważnych postaciach,

$$g(Du + \frac{q}{g} \Pi_{ik} \partial_k v_i) - \chi \Delta T \equiv \quad (18)$$

$$g\left(Du + \tilde{P}D\left(\frac{1}{g}\right)\right) - \chi \Delta T + q4\eta_s I_2 \equiv \quad (18 \text{ a})$$

$$g\left(Du + \mathcal{P}D\left(\frac{1}{g}\right)\right) - \chi \Delta T + 2q(\mathcal{A}_L \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v} + q4\eta_s I_2 \equiv \quad (18 \text{ b})$$

$$g\left(Du + P^*D\left(\frac{1}{g}\right)\right) - \chi \Delta T + 2q(\mathcal{A}_v \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v} + q4\eta_s I_2 = 0 \quad (18 \text{ c})$$

Zmiany u wyznaczone na podstawie każdego z powyższych równań, przy określonych pozostałych danych (zmiennych dynamicznych i funkcjach "stanu"), są identyczne. W szczególności nie zależą od wyboru ciśnienia $\{\tilde{P}, \mathcal{P}, P^*\}$. Jednak o warunkach nierównowagowych wiadomo, i to wynika z powyższych równań że, wybór ciśnienia ma wpływ na opis transportu entropii. Wykorzystując pierwszą zasadę termodynamiki,

$$du + \{\bar{P}, \mathcal{P}, P^*\} d\left(\frac{1}{g}\right) = T\{d\mathcal{S}, dS, ds\} \quad (19)$$

kolejno w (18a,b,c), otrzymujemy

$$gTD\bar{S} = \chi\Delta T - q4\eta_i I_2 = 0, \quad (19a)$$

$$gTD\mathcal{S} = \chi\Delta T - 2q(\mathcal{A}_L \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v} - q4\eta_i I_2 = 0, \quad (19b)$$

$$gTDs = \chi\Delta T - 2q(\mathcal{A}_v \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v} - q4\eta_i I_2 = 0. \quad (19c)$$

Równanie (19.b) jest identyczne z (7). Również zastosowane oznaczenie \mathcal{S} -entropii odpowiada związkom prowadzącym do (13). Niemniej jednak równanie (13) wyprowadziliśmy z dokładnością do procesów nieodwracalnych, a w tym zakresie równania (19) i równowagowe związki termodynamiczne, którymi się posłużyliśmy, dostarczają takiego samego opisu przyrostu entropii

$$\begin{aligned} (\bar{S} - s_R) &= (\mathcal{S} - s_R) = (s - s_R) = (\gamma - 1) \frac{\chi}{g c_p} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{g} \right) \Big|_S \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= - \frac{\chi}{g c_p} \kappa_p \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \kappa_p = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{g} \right) \Big|_p \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie κ_p - izobaryczny współczynnik rozszerzalności termicznej

Do określenia TDS użyliśmy $\mathcal{P}(g, \mathcal{S})$ z \mathcal{S} zależnym od zmian jawnie nierównowagowych zmiennych dynamicznych Dg lub $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Prowadzi to do "ukrycia" części wydzielającego się w ośrodku ciepła, opisywanej przez \dot{Q}_x . Równanie (19.b) jest niespójne z opisem transportu pędu (2) i co jest bardziej widoczne, z wynikającym bezpośrednio z niego równaniem energii kinetycznej

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q g D v^2 &= g P^* D \left(\frac{1}{g} \right) - q \nabla \cdot (\mathbf{v} \bar{P}) + q 2 \mathcal{A}_v \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= g \tilde{P} D \left(\frac{1}{g} \right) - q \nabla \cdot (\mathbf{v} \tilde{P}), \quad v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi, \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie podobnie jak w równaniu energii wewnętrznej występuje kompletny operator absorpcji \mathcal{A} .

Konsekwentny i konsystentny opis tworzą równania (1),(2),(19c). Niemniej jednak, z powyższej dyskusji wynika że, rozważania powinniśmy rozpoczynać od równań typu (18) i, jak długo to tylko możliwe, ograniczać się do nich. W warunkach nierównowagi ich sens fizyczny jest nadal przejrzysty. W przeciwnym wypadku zmuszeni będziemy do analizy nierówności [3],

$$du + \mathcal{P}d\left(\frac{1}{g}\right) < Tds,$$

przytaczanej przy przejściu do analizy procesów nierównowagowych to znaczy,

$$Td\mathcal{S} < Tds,$$

w każdym przypadku uzupełnienia opisu dynamiki ośrodka nowym rodzajem oddziaływań.

Przyrosty energii wewnętrznej opisywanej przez (18) nie mogą zależeć od grupowania pozostałych zmiennych. Stąd u wykorzystaliśmy w (19) jako podstawę do wprowadzenia i określenia zmian innych wielkości, to znaczy

$$d\bar{u} \equiv d\mathcal{U} \equiv du. \quad (22)$$

Niezależnie od apriorycznej wiedzy o reologii ośrodka możliwy jest w akustyce względnie prosty pomiar operatora (pełnego) absorpcji. Z tego punktu widzenia, po zamianie $\mathcal{A}_v \rightarrow \mathcal{A}_{v(p=1)}$, równanie (19.c) staje się prawie oczywiste. Z operatorami absorpcji związane są tak zwane słabosygnałowe współczynniki absorpcji $a(\omega)$. Jak wiadomo dla ośrodka klasycznie lepkiego, przewodzącego ciepło[4], $a(\omega) = \alpha_x \omega^2$, $\omega \equiv \omega' / \omega_0$ - bezwymiarowa częstotliwość, w szczególności składowa związana z przewodnictwem cieplnym $a_x(\omega) = \alpha_x \omega^2$.

W dalszym ciągu nie będziemy posługiwać się wielkościami jawnie zawierającymi \mathcal{P} i \mathcal{S} , gdyż opisują wielkości "cząstkowe". Przeciwnie, pary $(\bar{P}, Td\bar{\mathcal{S}})$ i (P', Tds) pozwalają określić wielkości "czyste". W pierwszym przypadku, na przykład, rzeczywistą pracę i ciepło wymiany (przewodzenia) na jednostkę masy, w drugim - pracę w procesie odwracalnym z założeniem ośrodka bez termolepkich strat i ciepło dostarczone (całkowite). Zauważmy że, w bezpośrednim pomiarze możliwe jest uzyskanie tylko \bar{P} i $dQ_e = Tds$. Analiza pierwotnego opisu za pomocą (\mathcal{P}, Tds) wykazuje że, w procesie nierównowagowym w ośrodku termolepkim ani \mathcal{P} nie jest rzeczywistym (pełnym) czynnikiem zmieniającym jego stan dynamiczny (jest niemierzalne), ani $Td\mathcal{S}$ nie określa mierzzonego (pełnego) przyrostu ciepła. Można powiedzieć że, opis (\mathcal{P}, Tds) rozdziwił się na dwa komplementarne: $(\bar{P}, Td\bar{\mathcal{S}})$

$$du + \bar{P}d\left(\frac{1}{g}\right) = Td\bar{\mathcal{S}} \quad (23)$$

i równanie (19 a), oraz (P', Tds)

$$du + P^* d\left(\frac{1}{g}\right) = Tds \quad (24)$$

i równanie (19. c).

Dalej posługiwać się będziemy wielkościami z tych par.

II. CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RUCHU.

W tym rozdziale układ równań (1),(2) sprowadzimy do jednego równania na zmienną Φ - działanie na jednostkę masy (tak zwany potencjał akustyczny). Tym samym z opisu zostanie wyeliminowana (wyrażona przez Φ) jedna zmienna - g . Wyprowadzenie przeprowadzamy z dokładnością do wyrazów rzędu $o(q\alpha)$ i $o(q^2)$ włącznie.

Równanie (2) zapisujemy w postaci,

$$\nabla\left(\partial_i \Phi + q \frac{1}{2} v^2\right) = -\frac{1}{g} \nabla \tilde{P} \quad (25)$$

Wprowadzamy funkcję

$$\tilde{w} = u + \frac{\tilde{P}}{g}, \quad d\tilde{w} = Td\tilde{s} + \frac{1}{g} d\tilde{P}, \quad dw = Tds + \frac{1}{g} dP \quad (26)$$

którą można nazwać entalpią wymiany, w odróżnieniu od w - entalpii całkowitej, analogicznie określonej za pomocą pary (P^*, Tds) . Prawą stronę w (25) możemy teraz zapisać w postaci

$$-\frac{1}{g} \nabla \tilde{P} = -\nabla\left(\tilde{w} - w_R - \int_{s_R}^s Td\tilde{s}\right) \quad (27)$$

Przepisujemy (25) po zastosowaniu (27),

$$\partial_i \Phi = -\left(q \frac{1}{2} v^2 + \tilde{w} - w_R - \int_{s_R}^s Td\tilde{s}\right) \quad (28)$$

Ponieważ

$$\tilde{w} - w_R = u - u_R + \frac{\tilde{P}}{g} - \frac{P_R}{g_R} \quad (g_R = 1) \quad (29)$$

i

$$u - u_R = \int_{g_R}^g \frac{P^*(g)}{g^2} dg + \int_{s_R}^s Td\tilde{s} \quad (30)$$

to

$$\partial_t \Phi = - \left(q \frac{1}{2} v^2 + \int_{g_R}^g \frac{P^*(g)}{g^2} dg + \frac{\bar{P}}{g} - \frac{P_R}{g_R} + \int_{s_R}^s T ds - \int_{s_R}^{\bar{s}} T d\bar{s} \right). \quad (31)$$

Odejmując stronami (23) od (24) oraz całkując, otrzymujemy ciąg równoważnych postaci ostatniej różnicy w (31), co pozwala na łatwe sprawdzenie, że gradient obu stron (31) prowadzi do (25).

$$\int_{s_R}^s T ds - \int_{s_R}^{\bar{s}} T d\bar{s} = \int_{1/g_R}^{1/g} (P^* - \bar{P}) d\left(\frac{1}{g}\right) = -2 \int_0^t \mathcal{A}_v \mathbf{v} D\left(\frac{1}{g}\right) dt = -2q \int_0^t \frac{\mathcal{A}_v \mathbf{v}}{g} \nabla \cdot \mathbf{v} dt \quad (32)$$

Oczywiście całkowanie względem t jest całkowaniem względem parametru charakterystyki operatora D . Funkcje podcałkowe w trzecim i czwartym wyrazie są określone na charakterystyce. Charakterystyki istnieją, jeżeli sam układ (1),(2) lub równanie, które wyprowadzamy posiada rozwiązanie. W tym sensie równanie (31) poprzez człon (32) jest funkcjonalnie uwikłanym. Wystarczy jednak zastosować D do obu jego stron aby je "rozwikłać".

$$D \left(-2q \int_0^t \frac{\mathcal{A}_v \mathbf{v}}{g} \nabla \cdot \mathbf{v} dt \right) = \frac{q}{g} Q, \quad (33)$$

zgodnie z pierwszym przypadkiem w (17).

Po podstawieniu \bar{P} i P^* do (31), otrzymujemy

$$\partial_t \Phi + q \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{q(\gamma-1)} (g^{\gamma-1} - 1) + \frac{2\mathcal{A}_v \mathbf{v}}{g} - 2q \int_0^t \frac{\mathcal{A}_v \mathbf{v}}{g} \nabla \cdot \mathbf{v} dt = 0 \quad (34)$$

Jeżeli skorzystamy z ostatniej równości w (32) i wykonamy całkowanie przez części to

$$\partial_t \Phi + q \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{q(\gamma-1)} (g^{\gamma-1} - 1) + 2 \int_0^t \frac{1}{g} D(\mathcal{A}_v \mathbf{v}) dt + 2 \frac{\mathcal{A}_v \mathbf{v}}{g} \Big|_{t=t_0=0} = 0 \quad (35)$$

Jawne pojawienie się w (35) danych początkowych jest częścią problemu, o którym już wspomnieliśmy omawiając (32). Warunki początkowe możemy zadawać w sposób zgodny z równaniami ewolucji, wtedy jednak założenie $\mathcal{A}_v \mathbf{v}|_{t=0} = 0$, eliminujące ostatni wyraz w (35), ogranicza, jeśli nie trywializuje, zbiór możliwych danych początkowych dla pozostałych zmiennych dynamicznych (także \mathbf{v}). Podobne skutki niesie ze sobą próba konstrukcji ogólniejszego od równowagi swobodnej (ośrodek nie zaburzony) stanu, takiego, że powyższy warunek będzie spełniony. Analiza struktury zbioru danych początkowych, odmiennych od danych równowagi swobodnej na przykład nie uzgodnionych z równaniami ewolucji w dwustronnym otoczeniu $t = t_0 (= 0)$ (problem skokowy) itp., nie jest celem tej pracy i może zostać tu pominięta. Niezależnie

bowiem od powyższych stwierdzeń obecność "niejednorodności początkowej" w niczym nie ogranicza zakresu i skuteczności stosowanych dalej przekształceń. Niemniej jednak wydaje się, że skuteczną metodą pozwalającą pominąć ostatni wyraz w (35), bez związanej z tym weryfikacji przyjętego z góry zbioru danych początkowych, jest założenie, że ośrodek został przeprowadzony ze stanu równowagi swobodnej w stan początkowy w sposób isoentropowy. Można też założyć, że dla $t \leq t_0$ ośrodek był bezstratnym po czym zostały "włączone" procesy prowadzące do termoepekij absorpcji

Trzy pierwsze wyrazy w (34),(35) tworzą tak zwaną całość Cauchy [5] - Paragraf 2,3,4. Równania (34),(35) są więc uogólnieniem tego pojęcia na przypadek ośrodka stratnego. Wyraz trzeci ma postać entalpii ośrodka bezstratnego i jest tego samego rzędu co $\partial_t \Phi$, co się okaże po rozwiązaniu równania (34) ze względu na g . Jednak już teraz łatwo to wywnioskować.

Nie tylko formalne podobieństwo równań (28), (31), (34), (35) do równania typu Hamiltona-Jacobiego, pozwala stwierdzić, że bardziej odpowiednim niż "potencjał akustyczny", określeniem dla funkcji tworzącej Φ , jest- "działanie akustyczne".

Działając operatorem D na równanie (35) oraz wykorzystując równanie ciągłości otrzymujemy równanie (algebraiczne jeśli γ wymierne) na g

$$g^\gamma L_\gamma - g L_1 - L_A = 0, \quad (36)$$

$$L_\gamma \equiv \nabla \cdot \nabla \Phi = \Delta \Phi,$$

$$L_1 \equiv \Phi_{tt} + q \left(\partial_t (\nabla \Phi)^2 + q \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla (\nabla \Phi)^2 \right) \quad "I" \equiv \partial_t,$$

$$L_A \equiv 2D\mathcal{A} = 2(\mathcal{A}\Phi_t + q\nabla\Phi \cdot \nabla\mathcal{A}\Phi) = 2(\mathcal{A}\Phi_t + qv \cdot \mathcal{A}v).$$

Operator absorpcji działający na wektor prędkości przekształcono w operator działający na poencjał

$$\mathcal{A}\Phi = \mathcal{A}_v v = \mathcal{A}_v \nabla \Phi,$$

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_v \circ \nabla \quad \mathcal{A}^2 \equiv \mathcal{A}_L \circ \nabla \quad (37)$$

Dalej okaże się że, teoretyczny i eksperymentalny związek operatora \mathcal{A} z wyżej wspomnianymi słabosygnałowymi współczynnikami absorpcji $\alpha(\omega)$ jest bliższy niż \mathcal{A}_v (dla ośrodka klasycznie lepkiego i przewodzącego ciepło $\mathcal{A} = -\alpha_2 \Delta$). Równanie (36) można rozwiązać ściśle dla $\gamma = 2,3,4$ i takich ułamków γ , dla których (36) przekształca się w wielomian wymienionego stopnia. W ogólnym przypadku stosujemy metody przybliżone. Otrzymane rozwiązanie podstawiamy do równania ciągłości otrzymując równanie zależące tylko od Φ lokalnie i lokalnie od operacji $\mathcal{A}\Phi$!. Z

tego względu ta droga postępowania jest pociągająca. Niemniej jednak z (36) nie wynika wprost, że posiada ono rozwiązanie na g w otoczeniu $g = 1$. W tej metodzie pojawiają się skomplikowane związki, które trudno interpretować i upraszczać bez pewnej apriorycznej wiedzy. Można ją częściowo uzyskać na podstawie samego równania (36). Załóżmy $g = 1$, wtedy

$$L_\gamma - L_t - L_A = \Delta\Phi - \Phi_{,a} - 2\mathcal{A}\Phi_t = 0 + o(g) \quad (38)$$

Założeniem prowadzącym od równań (1),(2) do liniowego równania akustyki ośrodka stratnego jest $g = 1$, jednak przy $g_t, \nabla g \neq 0$. Chociaż wykazaliśmy, że poszukiwanie rozwiązań w otoczeniu $g = 1$ ma sens fizyczny jeśli równanie, którego poszukujemy zawiera operacje z równania (38) (przy okazji upraszczając założenia prowadzące do równań liniowych), to przedstawione wyżej problemy nie ulegają znacznemu uproszczeniu. Jeżeli jednak odłożymy wyznaczenie g w postaci "czystej", to znaczy funkcji zależnej tylko od Φ i operacji z Φ , na później, to pojawiają się dwie równoważne metody dalszej redukcji opisu do jednego równania na Φ . Różnica między nimi wynika ze sposobu wykorzystania równania ciągłości. Mamy

$$D \frac{g^{\gamma-1} - 1}{q(\gamma-1)} + \left(1 + q(\gamma-1) \frac{g^{\gamma-1} - 1}{q(\gamma-1)} \right) \Delta\Phi = 0, \quad (39)$$

które jest inaczej zapisanym równaniem ciągłości lub

$$g \left[\left(1 + q(\gamma-1) \frac{(g^{\gamma-1} - 1)}{q(\gamma-1)} \right) L_\gamma - L_t - \frac{L_A}{g} \right] = 0, \quad (40)$$

które jest inaczej zapisanym równaniem (36) i w którym już wykorzystaliśmy równanie ciągłości masy. Potrzebny wyraz wyznaczamy z (34) lub (35)

$$\frac{1}{q(\gamma-1)} (g^{\gamma-1} - 1) = - \left(\partial_t \Phi + q \frac{1}{2} v^2 + \frac{2\mathcal{A}\Phi}{g} - 2q \int_0^t \frac{\mathcal{A}\Phi}{g} \Delta\Phi dt \right) \quad (41)$$

Po podstawieniu do (39) i (40) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left(1 - q(\gamma-1) \left(\Phi_t + q \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + \frac{2\mathcal{A}\Phi}{g} - 2q \int_0^t \frac{\mathcal{A}\Phi}{g} \Delta\Phi dt \right) \right) \Delta\Phi - \\ & D \left(\Phi_t + q \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + \frac{2\mathcal{A}\Phi}{g} - 2q \int_0^t \frac{\mathcal{A}\Phi}{g} \Delta\Phi dt \right) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Przy czym dodatkowo z (40) wynika, że (42) jako warunek konieczny i dostateczny, jest spełnione dla każdego g (przypadek $g = 0$ jest oczywisty i może być interpretowany jako utrata jednorodności, jeżeli $g = 0$ ma niezerowy nośnik). Jest to formalnie cenne, gdyż jeszcze nie wyznaczyliśmy g .

Zapisujemy (34),(35) w postaci dogodnej do iteracji

$$g = \left[1 - q(\gamma - 1) \left(\Phi_t + q \frac{1}{2} v^2 + \frac{2\mathcal{A}\Phi}{g} - 2q \int_0^t \frac{\mathcal{A}\Phi}{g} \Delta\Phi dt \right) \right]^{\gamma-1} \quad (43)$$

W zerowym przybliżeniu $g = 1$. W pierwszym przybliżeniu

$$g = \left[1 - q(\gamma - 1) \left(\Phi_t + q \frac{1}{2} v^2 + 2\mathcal{A}\Phi - 2q \int_0^t (\mathcal{A}\Phi) \Delta\Phi dt \right) \right]^{\gamma-1} + o(q^2\alpha) \quad (44)$$

Wystarczającym przybliżeniem g , zapewniającym równaniu (42) założoną dokładność jest

$$g = [1 - q\Phi_t] + o(q(q + \alpha)) \quad (45)$$

lub

$$g = [1 - qD\Phi] + o(q(q + \alpha)),$$

co jest niekonsekwentne, jednak dopuszczalne na podstawie (44) i może być wygodne przy rozwijaniu całek. Opierając się na wcześniej uzyskanych wynikach można pokazać, że

$$g = \left[1 - q(\gamma - 1) \left(\Phi_t + q \frac{1}{2} v^2 + (1 - q\Phi_t) 2\mathcal{A}\Phi + 2q \int_0^t \Phi_t \mathcal{A}\Phi_t dt \right) \right]^{\gamma-1} + o(q^2\alpha(q + \alpha)) \quad (46)$$

Obliczmy zaburzenie ciśnienia - ciśnienie akustyczne

$$P \equiv \bar{P} - P_R = P^*(g) + 2\mathcal{A}\Phi - \frac{1}{q\gamma} = \frac{1}{q\gamma} (g^\gamma - 1) + 2\mathcal{A}\Phi \quad (47)$$

Po podstawieniu (46) do (47) i rozwinięciu względem q i α otrzymujemy

$$P = -\Phi_t - q \frac{1}{2} [(\nabla\Phi)^2 - (\Phi_t)^2] + q \left(2\Phi_t \mathcal{A}\Phi - 2 \int_0^t \Phi_t \mathcal{A}\Phi_t dt \right) + o(q(q + \alpha^2)) \quad (48)$$

Równanie (42) możemy zapisać w postaci

$$c^2 [\Phi] \Delta\Phi - \partial_a \Phi - 2\mathcal{A}\partial_t \Phi = q\partial_t (\nabla\Phi)^2 + 2q(\partial_t \Phi) \mathcal{A}\partial_t \Phi + q2\nabla\Phi \cdot \mathcal{A}\nabla\Phi + q^2 \frac{1}{2} \nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi)^2 + o(q^2\alpha) \quad (49)$$

$$c^2 [\Phi] \equiv q\partial_g P^*(g) = \left[1 - q(\gamma - 1) \left(\Phi_t + q \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + (1 - q\Phi_t) 2\mathcal{A}\Phi + q2 \int_0^t \Phi_t \mathcal{A}\Phi_t dt \right) \right]$$

Założono przemienność operatorów $\partial_t, \nabla, \mathcal{A}$. Poczawszy od (46) całki "po charakterystykach" mogą być rozważane jako zwykle zgodnie z przyjętą dokładnością. Zwracamy uwagę na występujące w (49) formy $\Phi_t \mathcal{A}\Phi_t$, a także $\nabla\Phi \cdot \mathcal{A}\nabla\Phi$. Są one związane jak łatwo zauważyć z (17) i

(34), to znaczy opisują nieodwracalną zamianę energii zaburzenia na ciepło. Ich analiza jest przedmiotem dalszej części pracy. W określeniu c^2 dopuszczono się niekonsekwencji zachowując ostatni wyraz rzędu $o(q^2\alpha)$.

Należy podkreślić że, w zakresie całkowania równania pędu dla ośrodków bezstratnych (nieściśliwych), przedstawiona metoda nie wniosłaby niczego nowego, co już zauważono mówiąc o całce Cauchy. W przypadku ośrodka klasycznie lepkiego i przewodzącego ciepło stosowano metody przybliżone. Dzięki analizie równań energii i entropii udało się w sposób ścisły, uogólnić metodę całkowania równania pędu dla ośrodka bezstratnego na przypadek ośrodków o stratach opisywanych operatorem \mathcal{A} .

Odpowiednie założenia, pominięcia i przybliżenia pozwalają na uzyskanie z (49) wszystkich równań stosowanych w akustycznym (potencjalnym) opisie ośrodka klasycznie lepkiego $\mathcal{A} \equiv -\alpha_2 \Delta$.

Na przykład równanie Kuznietzowa [6],[7]

$$\Delta\Phi - \Phi_{tt} - 2\mathcal{A}\Phi_t = q\beta\partial_t(\Phi_t)^2 + q2\partial_t\mathcal{L}[\Phi] + o(q(q+\alpha)), \quad (50)$$

$$\mathcal{L}[\Phi] = \frac{1}{2} \left[(\nabla\Phi)^2 - (\Phi_t)^2 \right], \quad \beta \equiv \frac{\gamma+1}{2}.$$

a stąd (w wyniku przybliżeń asymptotycznych) tak zwane równanie KZK - jedno z najczęściej stosowanych równań nieliniowej akustyki [8].

III. TRANSPORT ENERGII W OPISIE POTENCJALNYM.

W rozdziale tym równania opisujące różne formy energii ośrodka, zapisane już wcześniej z użyciem ogólnych zmiennych hydrodynamicznych, zapiszemy ponownie wyodrębniając zmienne bardziej odpowiednie dla potencjalnego (akustycznego) opisu zaburzeń. Pełne równanie zachowania energii (z uwzględnieniem wirowości), dla ośrodka klasycznie lepkiego podano w dodatku C

Przepisujemy równania energii kinetycznej (21), wewnętrznej (18) i entropii (19c)

$$\begin{aligned} qgDe_k &= -P \cdot \frac{Dg}{g} - q\nabla \cdot (\mathbf{v}\tilde{P}) + q2(\mathcal{A}\Phi)\Delta\Phi \\ &= -\tilde{P} \frac{Dg}{g} - q\nabla \cdot (\mathbf{v}\tilde{P}) = -P \frac{Dg}{g} - q\nabla \cdot (\mathbf{v}P), \end{aligned} \quad (51)$$

$$gDu = P \cdot \frac{Dg}{g} + \chi\Delta T - q2(\mathcal{A}\Phi)\Delta\Phi = \tilde{P} \frac{Dg}{g} + \chi\Delta T, \quad (52)$$

$$gTDs = \chi\Delta T - q2(\mathcal{A}\Phi)\Delta\Phi \quad (53)$$

Sumując stronami (51) i (52) otrzymujemy,

$$gDe = \chi\Delta T - q\nabla \cdot (\mathbf{v}\tilde{P}) \quad (54)$$

lub

$$\partial_i \mathcal{E} + q\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathcal{E}) = \chi\Delta T - q\nabla \cdot (\mathbf{v}\tilde{P}), \quad (55)$$

$$\partial_i \mathcal{E} + q\nabla \cdot \mathbf{J} = \chi\Delta T, \quad (56)$$

gdzie [9]:

$$\mathcal{E} \equiv ge = g(qe_k + u) \quad \text{- całkowita gęstość energii} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\equiv \mathbf{v}(\mathcal{E} + \tilde{P}) = \mathbf{v}(qe_k + \tilde{W}) \\ &= \mathbf{v}g(qe_k + \tilde{w}) \quad \text{- wektor gęstości prądu energii} \quad (58) \\ &= \mathbf{v}g\left(qe_k + u + \frac{\tilde{P}}{g}\right) \end{aligned}$$

E_k - gęstość energii kinetycznej, \tilde{W} - gęstość entalpii wymiany.

Wektor \mathbf{J} może być przedstawiony w następujący sposób [2]

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mathbf{v}(\tilde{P} - P_R) + \mathbf{v}(qE_k + gu - g_R u_R - w_R(g - g_R)) + w_R g \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}P + q\mathbf{v}\mathcal{E}_a + w_R g \mathbf{v}\end{aligned}\quad (59)$$

Składowa "akustyczna" \mathbf{J} , wektor

$$\tilde{\mathbf{I}} \equiv \mathbf{v}P + q\mathbf{v}\mathcal{E}_a \quad (60)$$

jest gęstością prądu energii akustycznej, chwilową wartością natężenia mocy. W jednostkach wymiarowych $[[\tilde{\mathbf{I}}]] = W/m^2$.

Gęstość energii akustycznej \mathcal{E}_a (bardziej odpowiednim określeniem jest, gęstość energii zaburzenia potencjalnego- co omawia się w rozdz V) wchodzi do określenia (60) jako wielkość rzędu wyższego

$$\mathcal{E}_a = \left(E_k + \frac{1}{q}(gu - g_R u_R - w_R(g - g_R)) \right), \quad (g_R = 1) \quad (61)$$

Wykorzystując (20),(29),(30) i (32), po odpowiednich rozwinięciach otrzymujemy

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{2}((\nabla\Phi)^2 + (\Phi_i)^2) - \frac{2\alpha_{\chi} \kappa_P}{q(\gamma-1)} \Delta\Phi + 2 \int_0^t \Phi_i \mathcal{A}\Phi_i dt + \frac{q(\gamma-2)}{3} (\partial_t \Phi)^2 + o(\alpha^2) \quad (62)$$

Po podstawieniu (48) i (62) do (60) otrzymujemy

$$\tilde{\mathbf{I}} = \left(-\Phi_i + q(\Phi_i)^2 - \frac{2\alpha_{\chi} \kappa_P}{\gamma-1} \Delta\Phi \right) \mathbf{v} + o(q(\alpha^2)). \quad (63)$$

Po podstawieniu (59) do (56) otrzymujemy równania

$$q\partial_t \mathcal{E}_a + q\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{I}}) = \chi \Delta T \quad (64)$$

lub

$$q\partial_t \mathcal{E}_a + q^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathcal{E}_a) = \chi \Delta T - q\nabla \cdot (\mathbf{v}P), \quad (65)$$

które wyrażają zasadę zachowania energii dźwięku (przepływu potencjalnego).

W przybliżeniu stosowanym w liniowej i nieliniowej akustyce, w którym $P \equiv -\Phi_i$,

$$\tilde{\mathbf{I}} = -\Phi_i \nabla\Phi + o(q(1+\alpha)) \quad (66)$$

równanie (65) ma postać

$$q\partial_t \mathcal{E}_a = \chi \Delta T - q\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{I}}) + o(q(q+\alpha)). \quad (67)$$

Odejmując stronami (53) i (65) otrzymujemy

$$gTDs - q[\partial_t \mathcal{E}_a + q\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathcal{E}_a)] = q[\nabla \cdot (\mathbf{v}P) - 2(\Delta\Phi)\mathcal{A}\Phi]. \quad (68)$$

Dla ośrodka klasycznie lepkiego równanie (68) nie zależy od niezmiennika I_2 , który został pominięty, w tym przypadku w równaniach (52) i (53).

Równanie (68) możemy zapisać następująco

$$g(TDs - qDe) = q[\nabla \cdot (\mathbf{v}P) - 2\Delta\Phi - \mathcal{A}\Phi], \quad (69)$$

$$e \equiv e_k + \frac{1}{q} \left(u - \frac{g_R u_R}{g} - w_R \left(1 - \frac{g_R}{g} \right) \right) = e_k + \frac{1}{q} \left(u + \frac{P_R}{g} - w_R \right)$$

gdzie: $\mathcal{E}_a = ge$, e - energia dźwięku jednostki masy. Łatwo stwierdzić na podstawie (51) lub (24), że

$$TDs - qDe = pD \left(\frac{1}{g} \right) - qDe_k \quad (70)$$

i

$$q[\nabla \cdot (\mathbf{v}P) - 2\Delta\Phi - \mathcal{A}\Phi] = g \left(pD \left(\frac{1}{g} \right) - qDe_k \right), \quad (71)$$

gdzie

$$p \equiv P^*(g) - P_R = \frac{1}{q\gamma} (g^\gamma - 1) = P - 2\mathcal{A}\Phi \quad (72)$$

jest zazwyczaj w literaturze akustycznej przyjmowanym określeniem ciśnienia akustycznego. Rozwijając prawą stronę w (71) otrzymujemy

$$[\nabla \cdot (\mathbf{v}P) - 2\Delta\Phi - \mathcal{A}\Phi] = -(1 - q\partial_i\Phi) D[\mathcal{L} + (\partial_i\Phi)^2] - \partial_i((\partial_i\Phi)2\mathcal{A}\Phi) + \alpha(q\alpha). \quad (73)$$

Można pokazać że, w przybliżeniu zastosowanym w (66) $P = -\Phi$, (pozostałe wyrazy, $-q\mathcal{L} + \alpha(q\alpha)$, określające P w przybliżeniu (48) przenosi się na prawą stronę), równanie (73) możemy zapisać następująco

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}P) + 2P\mathcal{A}P = -(1 - 2qP)\partial_i\mathcal{L} - \partial_i P^2 + q\frac{2}{3}\beta\partial_i P^3 + o(q(q+\alpha)). \quad (74)$$

W (73) zastosowano podstawienie $\Delta = \partial_a + o(q+\alpha)$, gdyż powyższe równania dotyczą rozwiązań równań propagacji (49), (50).

Mnożąc równania propagacji (49) lub (50) przez $P = -\partial_i\Phi$, wykorzystując tożsamość $P\Delta\Phi = \nabla \cdot (P\mathbf{v}) + (1/2)\partial_i v^2$, grupując odpowiednio i zachowując wyrazy rzędu co najwyżej

$o(q)$, $o(\alpha)$ otrzymujemy równanie identyczne z (74) - jak być powinno. Równanie to ma podstawowe znaczenie dla tej pracy i będzie przedmiotem dalszej analizy.

IV. OPERATOR ABSORPCJI I ZWIĄZKI DISPERSYJNE.

Jest oczywiste, że wielkość $2\mathcal{A}_v \mathbf{v} = 2\mathcal{A}\Phi$ jest częścią związku konstytutywnego wiążącego odkształcenie (szybkość odkształcenia lub jego historię itp.) z naprężeniem w ośrodku. Z tego punktu widzenia \mathcal{A}_v (\mathcal{A}) powinien nazywać się na przykład operatorem odkształcenia albo ściśliwości, a odpowiadające mu parametry współczynnikami ściśliwości. Jak wiadomo, dla ośrodka klasycznie lepkiego i ściśliwego \mathcal{A}_L , wyznaczony jest przez ślad tensora szybkości odkształceń ze współczynnikiem proporcjonalności, który często, także w mechanice płynów, nazywa się współczynnikiem ściśliwości [10]. Niemniej jednak, to właśnie rozwiązania równań propagacji (na przykład (38)) dla ośrodka klasycznie lepkiego pokazały, że obecność $\mathcal{A}_v \mathbf{v} = \mathcal{A}\Phi = -\alpha_2 \Delta\Phi$ w (2) prowadzi do pojawienia się czynnika opisującego absorpcyjny zanik amplitudy propagującego dźwięku w funkcji odległości od źródła. Szczególnie prosto uwidacznia się to w opisie "monochromatycznej" fali płaskiej [4] (roz.3 par 1,2), kiedy ma on postać $\exp[-a(\omega)z]$, $z \geq 0$, $a(\omega) = \alpha_2 \omega^2$ (wyłączenie czynnika 2 przed operator jest podyktowane konwencją, dzięki której w wykładniku eksponenty nie wystąpi czynnik 1/2). Z tych powodów, a także ze względu na sygnalizowany już wcześniej związek słabosygnałowych współczynników absorpcji $a(\omega)$ z \mathcal{A} , dodatnią określoność wyrażen w (17), stanowiącą stałe dodatnią składową szybkości zmian energii wewnętrznej; terminologię akustyczną - nazwano $\mathcal{A} = \mathcal{A}_v \circ \nabla$ operatorem absorpcji. Ściśle mówiąc, dodatnią określoność \mathcal{A} ustaliliśmy do tej pory tylko dla ośrodka klasycznie lepkiego. Dla ogólniejszej klasy ośrodków, zagadnienie ustalenia "określoności" operatora absorpcji jest ważne dla interpretacji wyników już otrzymanych jak i poniżej prezentowanych. Rozwiążemy je w dalszej części pracy.

Należy też podkreślić, że bez operatora absorpcji liniowe równanie propagacji dźwięku jest równaniem Dalamberta, a to ze względu na nie wykazujący dyspersji związek dyspersyjny określa się jako bez dyspersyjny. Jak wiadomo, w analizie zjawisk falowych ogólne pojęcie dyspersji jest obszerniejsze od pojęcia absorpcji (zawiera w sobie różne, szczególne rodzaje dyspersji parametrów

falowych zaburzenia i (lub) pojęcie absorpcji). W redukcji do opisu liniowego rozważane przez nas ośrodki, nie wykazują tak szeroko rozumianej dyspersji (niezależnej od absorpcji).

Dalej zakładając będziemy, że operator absorpcji jest operatorem typu splotu. Na wstępie przyjmijmy że, zależy on od operacji w dziedzinie czasu i współrzędnych przestrzennych. To znaczy

$$\mathcal{A}^{x,t} \Phi \equiv A(\mathbf{x}; t) \otimes_{x,t} \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (75)$$

gdzie $A(\mathbf{x}; t)$ jest jądrem całkowitej operacji splotu $\otimes_{x,t}$. Założona wcześniej przemienność \mathcal{A} z operacjami ∂_t, ∇ jest dopuszczalna.

A. Związki dyspersyjne

Zakładając Fourierowską reprezentację zaburzeń ośrodka, otrzymujemy dla zlinearyzowanego równania (50) równanie dyspersyjne

$$Dysp(\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}, \omega, a) \equiv (\mathbf{e} \cdot \mathbf{K})^2 - \omega^2 \left(1 + i2 \frac{a^{K,\omega}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}, \omega)}{\omega} \right) = 0, \quad (76)$$

gdzie \mathbf{e} - jednostkowy wektor w kierunku rzeczywistej składowej zespolonego wektora falowego $\mathbf{K} = \mathbf{k}_r - i\mathbf{k}_i$, $a^{K,\omega}$ - transformata Fouriera względem czasu i uogólniona transformata Fouriera względem współrzędnych przestrzennych jądra A operacji splotu.

$$A(\mathbf{x}; t) = \hat{F}^{-1} F^{-1} [a^{K,\omega}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}; \omega)], \quad (77)$$

$$\hat{F}[\cdot] \equiv \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{x}, \quad \hat{F}^{-1}[\cdot] \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot) e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{K} \quad (78)$$

$$F(\cdot) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot) e^{i\omega t} dt, \quad F^{-1}(\cdot) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Zastosowanie pary uogólnionych transformat Fouriera \hat{F}, \hat{F}^{-1} względem współrzędnych (\mathbf{x}) i (\mathbf{K}) jest naturalną konsekwencją występowania absorpcji (dyspersji) i zastosowania, w celu ujednoczenia opisu, zespolonego wektora falowego \mathbf{K} . Analogiczne rezultaty można uzyskać stosując "zwykłe" transformaty, jednak kosztem formalnych i rachunkowych komplikacji. Z kilku równoważnych sposobów określenia wybrano $\hat{F}[\cdot] \equiv L_B[\cdot; i\mathbf{K}]$, gdzie L_B jest superpozycją trzech

jednowymiarowych dwustronnych transformat Laplace'a [11]. Zmiennej Laplacowskiej odpowiadają kolejno składowe $i\mathbf{K} = (ik_R + k_i)_{1,2,3}$. W (78) χ_1, χ_2, χ_3 - odcięte zbieżności bezwzględnej (patrz na przykład [11]). Teorię i analizę własności transformat uogólnionych znaleźć można, na przykład, w [11],[12],[13].

Pewne zdziwienie może budzić fakt, że jako argumentu funkcji $a^{K,\omega}$ użyto liczby zespolonej $\zeta \equiv \mathbf{e} \cdot \mathbf{K}$, podczas gdy formalnie, z określeń (78), powinien nim być wektor \mathbf{K} . Wyjaśniamy to poniżej. Każda skalarna i jednorodna funkcja wektora (\mathbf{K}) może być przedstawiona jednorodnie jako funkcja skalara (ζ) zbudowanego na bazie wektora. Fakt ten ma jednak drugorzędne znaczenie jeśli, wybór tego skalara nie będzie fizycznie uzasadniony.

Dla ośrodka izotropowego zespolony wektor falowy \mathbf{K} może być przedstawiony za pomocą rzeczywistego wektora \mathbf{k} i czynnika fazowego $\exp(i\varphi)$

$$\mathbf{K} = k e^{i\varphi} = e k e^{i\varphi} = \mathbf{e}_k K = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{e} \quad , \quad K \equiv (\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*)^{1/2} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{1/2} = k \quad , \quad (79)$$

$$\zeta \equiv \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{K})^2 = k^2 e^{i2\varphi} \quad , \quad \mathbf{e}_k = e e^{i\varphi} \quad \text{Re}(\zeta) > 0 \quad ,$$

gdzie $\mathbf{e}_k = \mathbf{K}/K = \mathbf{k}/k$ - zespolony wektor jednostkowy w kierunku \mathbf{k} ; $\mathbf{e} = \mathbf{k}/k$. Liczbę ζ nazwać można zespoloną liczbą falową. Dla równania Dalamberta $\zeta - \omega = 0$, co właśnie oznacza brak dyspersji (w naszym przypadku także absorpcji). W szczególnym przypadku ośrodka klasycznie lepkiego $a^{K,\omega} = a^{\zeta} = \alpha_2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \alpha_2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{K})^2 = \alpha_2 \zeta^2$. Z punktu widzenia teorii i eksperymentu znajomość liczb ζ i ω pozwala z pomocą równania (76) wyznaczyć funkcję $a^{K,\omega}$

$$a^{K,\omega} = a^{\zeta,\omega} = \frac{\zeta^2 - \omega^2}{i2\omega} \quad , \quad (80)$$

którą nazwiemy tu "abstrakcyjnym" współczynnikiem absorpcji, gdyż: zakładamy jego istnienie abstrahując od możliwości jego eksperymentalnego wyznaczenia (zwłaszcza bez zastosowania teorii funkcji zmiennej zespolonej), o czym piszemy niżej; jego (ewentualna) znajomość pozwoliłaby na oddzielne opisanie udziału czynników typu, "ściśliwościowego" lub "lepkościowego" związanych z przestrzenną niejednorodnością zaburzenia, i relaksacyjnego- związanych z czasową zmiennością wewnętrznych stanów ośrodka w danym punkcie, w pełnej absorpcji. Taka separacja procesów wydaje się możliwa tylko na drodze rozważań teoretycznych. Chociaż równanie (80) można

potraktować jako pełną i formalnie poprawną definicję słabosygnałowego współczynnika absorpcji (to znaczy określonego dla ośrodka liniowego lub w warunkach, w których ośrodek może być za taki uważany), to wydaje się, że jej pełne eksperymentalne zastosowanie stawia zbyt duże wymagania dla techniki pomiarowej. Podstawową barierą są tu własności samego ośrodka który, uniemożliwia niezależny pomiar liczb ω i ζ ($|\zeta|$ lub $\text{Re}(\zeta)$), to znaczy pomiar $a^{k,\omega}$ przy ustalonej jednej z nich i kontrolowanych eksperymentalnie zmianach drugiej. Ośrodek dopuszcza tylko takie pary (ω, ζ) , które spełniają (76) to znaczy są rozwiązaniem (rozwiązaniami) $\zeta = \zeta(\omega)$ lub $\omega = \omega(\zeta)$ relacji dyspersyjnej. Jeśli więc zastosujemy (80) do eksperymentalnego określenia $a^{k,\omega}$ to otrzymamy tylko te jego wartości, które znajdują się nad jednym z dopuszczalnych rozwiązań równania dyspersyjnego plus eksperymentalnie wyznaczone rozwiązanie. Z powyższego wynika, że uzyskane na podstawie teorii (przy zadanym lub znanym skądinąd $a^{k,\omega}$) lub eksperymentu, a określone następująco wielkości

$$a(\omega) = a^{\omega} \equiv a^{k,\omega}(\zeta(\omega), \omega) \quad (81)$$

albo

$$a(\zeta) = a^{\zeta} \equiv a^{k,\omega}(\zeta, \omega(\zeta)) \quad (82)$$

stanowią opis tej samej wielkości fizycznej, która nazywana jest współczynnikiem absorpcji i podawana w postaci a^{ω} . Obie powyżej określone wielkości zawierają tę samą informację, wystarczającą do opisu wpływu absorpcji na propagację. Konwencja przedstawiania współczynnika absorpcji jako funkcji ω jest wygodna ze względów eksperymentalnych (łatwy pomiar i kontrola częstotliwości). Ponadto, w sytuacji, gdy nie znamy jawnej postaci $\mathcal{A}^{s,t}$ często możliwa jest taka transformacja współrzędnych (na przykład do współrzędnych z czasem retardowanym), a następnie równań (do równań bilansu harmonicznego), po której wystarczająca jest znajomość $a(\omega)$. Oczywiście analogiczne operacje możliwe są dla przypadku $a(\zeta)$ (współrzędne w układzie poruszającym się z zaburzeniem). Niemniej jednak, dla efektywnego zastosowania powyższych przekształceń wymagana jest wysoka symetria zaburzenia (na przykład osiowa). Z ograniczeń, jakie nakłada równanie (76) (ośrodek) na ζ i ω , oraz "dostępności" $a^{k,\omega}$ tylko na krzywych dyspersyjnych, wynikają ograniczenia postaci $\mathcal{A}^{s,t}$ (lub postaci \mathcal{A} przejawiające się w eksperymencie). Zakładając, że powierzchnia σ ogranicza wybrany obszar przestrzeni otrzymujemy równanie

$$a^{K,\omega} \hat{\Phi}(\mathbf{K}, \omega) = \frac{a^{K,\omega} \int_{\sigma} \left(e^{-i\zeta \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_{\sigma}} \nabla \Phi(\mathbf{x}_{\sigma}, \omega) - \Phi(\mathbf{x}_{\sigma}, \omega) \nabla e^{-i\zeta \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_{\sigma}} \right) \cdot \mathbf{n} d\sigma}{Dsp(\zeta; \omega)}, \quad (83)$$

gdzie: \mathbf{n} - wektor normalny zewnętrzny, \mathbf{x}_{σ} - wektor o końcu na σ . Całka po powierzchni σ jest wynikiem zastosowania twierdzenia Greena (odpowiednie człony zawierające stany "początkowe" dla prostoty pominięto). Zakładamy że, jedynymi osobliwościami (83) są osobliwości mianownika, oraz że jest on postaci

$$Dsp(\zeta; \omega) = \zeta^2 - \zeta_1(\omega)^2 + \alpha(\alpha^2), \quad (84 a)$$

$$Dsp(\zeta; \omega) = \omega_1(\zeta)^2 - \omega^2 + \alpha(\alpha^2), \quad (84 b)$$

gdzie: $\zeta_1(\omega)$ jest ścisłym lub przybliżonym rozwiązaniem równania dyspersyjnego. Warunki w których zachodzi (84) omawiamy poniżej.

Równanie dyspersyjne (76) możemy zapisać na cztery sposoby, przydatne w dalszej analizie ,

$$\zeta = |\omega| \sqrt{1 + i2 \frac{a^{K,\omega}}{\omega}} = |\omega| \sqrt{1 + i2 \frac{a^{\omega}(\omega)}{\omega}} \quad K_1 = \mathbf{e} \zeta \quad (85)$$

$$\omega = \pm \zeta \sqrt{1 - \left(\frac{a^{K,\omega}}{\zeta} \right)^2} - i a^{K,\omega} = \pm \zeta \sqrt{1 - \left(\frac{a^K(\zeta)}{\zeta} \right)^2} - i a^K(\zeta) \quad (86)$$

Dwa kolejne wynikają z zamiany miejscami a^{ω} i a^K w powyższych równaniach i odpowiadają sytuacji, gdy współczynnik absorpcji $a(\cdot)$ znany jest tylko w postaci funkcji jednego z dwóch argumentów, to znaczy w postaci $a(\omega) = a^*(\omega)$ albo $a(\zeta_1) = a^K(\zeta_1)$, a poszukujemy rozwiązania jako funkcji drugiego. W pierwszej sytuacji ostatnie wyrazy w (85) i (86) dostarczają ścisłych rozwiązań $\zeta_1(\omega)$ i $\omega_1(\zeta)$. W drugiej, oraz gdy znamy $a^{K,\omega}$, w ogólnym przypadku należy posłużyć się metodami przybliżonymi. W warunkach słabej absorpcji ($\alpha \ll 1$) w zerowym przybliżeniu mamy

$$\zeta = |\omega| + \alpha(\alpha). \quad (87)$$

Nierówności

$$\left| \frac{a^{K,\omega}}{\zeta} \right|, \left| \frac{a^{K,\omega}}{\omega} \right|, \left| \frac{a^K}{\zeta} \right|, \left| \frac{a^{\omega}}{\omega} \right|, \left| \frac{a^{\omega}}{\zeta} \right|, \left| \frac{a^K}{\omega} \right|, \left| \frac{a(\omega)}{\omega} \right|, \left| \frac{a(\zeta)}{\zeta} \right|, \left| \frac{a(\omega)}{\zeta} \right|, \left| \frac{a(\zeta)}{\omega} \right| < 1 \quad (88)$$

spełnione są w całym, mającym znaczenie w klasycznym opisie, zakresie widna a dla wielu ośrodków także w zakresie częstości optycznych. Dodatkowo, składowe Fourierowskie, nie spełniające powyższej nierówności (górny zakres widma) są efektywniej eliminowane z widma przez absorpcję. Pomimo to straty energii w tym zakresie są pomijalne w stosunku do absorpcji w pozostałym zakresie widma. Z tego punktu widzenia nierówności (88) można uznać za efektywnie spełnione w całym zakresie ω i ζ . Spośród różnych metod przybliżonego rozwiązywania równań, w wyżej opisanych warunkach, bardzo dobre rezultaty daje metoda kolejnych przybliżeń. Konsekwencją przybliżania zerowego rzędu (87) jest ciąg równości, spełnionych co najmniej z dokładnością do wyrazów $o(\alpha^2)$

$$d^{K,\omega}(\zeta, \omega) = d^{K,\omega}(\omega, \omega) = d^{K,\omega}(\zeta, \zeta) = d^p(\omega) = d^k(\zeta) = d^k(\omega) = d^p(\zeta) = d(\omega) = d(\zeta). \quad (89)$$

Pierwsza iteracja daje bardzo dobry wynik

$$|\zeta_1(\omega) = |\omega| + i \operatorname{sgn}(\omega) \alpha (|\omega|) + o(\alpha^2), \quad (90)$$

$$\omega_1(\zeta) = \pm \zeta - i \alpha (\zeta) + o(\alpha^2), \quad (91)$$

co uzasadnia postać (84). Przybliżając prawe strony (85) i (86) z dokładnością do $o(\alpha)$ otrzymujemy (90) i (91).

Obliczając odwrotne transformaty Fouriera (83) otrzymujemy

$$\mathcal{A}^{n,t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\sigma} \left(\frac{e^{-i\omega(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma|)} e^{-i|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma| \alpha(\omega)} \nabla \Phi(\mathbf{x}_\sigma, \omega) - \dots \right) \cdot \mathbf{n} d\sigma d\omega + o(\alpha^2) \quad (92)$$

Pominęliśmy prezentację etapu całkowania względem \mathbf{K} (ζ i kątów w układzie współrzędnych sferycznych). Zastosowano klasyczne metody teorii residuów [14].

Całkując (92) względem ω mamy z dokładnością do $o(\alpha^2)$

$$\mathcal{A}^{n,t} \Phi(\mathbf{x}, t) = A(t) \otimes_i \left[G(t - |\mathbf{x}|; \alpha|\mathbf{x}|) \otimes_{i,x} \partial_n \Phi(\mathbf{x}, t) - \Phi(\mathbf{x}, t) \otimes_{i,x} \partial_n G(t - |\mathbf{x}|; \alpha|\mathbf{x}|) \right] = \mathcal{A}' \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (93)$$

$\partial_n \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla(\cdot)_{|\sigma}$. Przestrzennymi zmiennymi splotowymi w (93) są współrzędne \mathbf{x}_σ punktów na σ . Składowa normalna $\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_\sigma, t) = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_\sigma$ (prędkość) jest określona przed operacją splotu względem t .

Ogólnie G jest propagatorem (rozwiązaniem podstawowym) równania falowego z absorpcją, w ośrodku opisywanym związkiem dyspersyjnym (76)

$$G = F^{-1} \hat{F}^{-1} [1/Dsp(\zeta, \omega)] \quad (94)$$

W (93) G jest przybliżeniem (jednomodowym) G z (94). G wyrażona za pomocą F^{-1} (z zastosowaniem wyżej opisanych przybliżeń) ma postać

$$G(t - |\mathbf{x}|; \alpha|\mathbf{x}|) = \frac{\delta_a(t - |\mathbf{x}|; \alpha|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-|\mathbf{x}|)} e^{-a(\omega)|\mathbf{x}|} d\omega + o(\alpha^2) \quad (95)$$

Jeżeli $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow a(\omega) \rightarrow 0$, to $\delta_a \rightarrow \delta(t - |\mathbf{x}|)$, gdzie δ jest deltą Diraca. Jeżeli argument transformacji jest funkcją szybko malejącą, to δ_a jest także szybko malejąca. Dla $a(\omega) = \alpha_2 \omega^2$ $\alpha = \alpha_2$

$$\delta_a(t - |\mathbf{x}|; \alpha_2|\mathbf{x}|) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha_2|\mathbf{x}|}} e^{-\frac{(t-|\mathbf{x}|)^2}{4\alpha_2|\mathbf{x}|}} + o(\alpha^2) \quad (96)$$

Zmiana kolejności transformacji odwracających (83) prowadzi do $(\mathcal{A}^{x,t}, a^{K,\omega}) \rightarrow \mathcal{A}^x, a^K(\zeta)$ oraz do $\delta_a(|\mathbf{x}| - t; \alpha t)$, $t \geq 0$ z zamianą splotu $A(t) \otimes_t \rightarrow A(\mathbf{x}) \otimes_t$ w (93)

$$\mathcal{A}^{x,t} \Phi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) \otimes_t \left[G(|\mathbf{x}| - t; \alpha t) \otimes_{t,x} \partial_n \Phi(\mathbf{x}, t) - \Phi(\mathbf{x}, t) \otimes_{t,x} \partial_n G(|\mathbf{x}| - t; \alpha t) \right] = \mathcal{A}^x \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (97)$$

Interpretacja funkcji δ_a (pomijając skutki przybliżeń) wynika ze zjawiska dyspersji prędkości dźwięku, co prowadzi do "rozmycia" stożka przyczynowości (każdej składowej Fourierowskiej odpowiada inna prędkość propagacji). Równanie (93) i (97) pokazuje że, dla danych spełniających równanie dyspersyjne abstrakcyjny operator absorpcji $\mathcal{A}^{x,t}, (a^{K,\omega})$ przyjmuje jedną z dwóch możliwych postaci $(\mathcal{A}^x, (a^n))$ albo $(\mathcal{A}^x, (a^K))$, działających zgodnie z zasadą przyczynowości. Pomijając operator absorpcji (symbol operatora oraz jego opis - splot jego jądra z wyrażeniem w nawiasie) w (93) i (97) otrzymujemy równanie całkowe Kirchhoffa dla ośrodka z absorpcją (dyspersją) typu splotowego. Równanie to można otrzymać bezpośrednio z równań propagacji korzystając z twierdzenia Greena i z twierdzeń o własnościach splotu.

Z określenia (37) wynika, że operator absorpcji, to znaczy jego jądro, nie może być funkcją tylko czasu. Przyjmując, że \mathcal{A}_v zależy tylko od operacji czasowych to i tak absorpcja nie będzie obserwowana dla zaburzeń przestrzennie jednorodnych, nawet gdy \mathcal{A}_v jest funkcją czasu (tylko)-dopuszczalny jest jedynie stacjonarny transport entropii, o czym wspomniano na stronie 6 omawiając możliwe "hydrodynamiczne" różnice między pojęciami (nie)adiabaticzny, (nie) isoentropowy. Absorpcja jest odpowiedzią ośrodka na przestrzennie niejednorodne zaburzenie. Z tego punktu widzenia powinniśmy posługiwać się \mathcal{A}^x i $a^K(\zeta) = a(\zeta)$. Z już wymienionych

względów podaje się $a^{\omega}(\omega) = a(\omega)$, co odpowiada \mathcal{A}^1 . Zależność jądra operatora tylko od czasu w (93) jest formalna, gdyż obecność δ_a (δ) powoduje, że bądź jądro operatora, bądź zaburzenie, zależy od czasu retardowanego wiążącego zmiany w czasie ze zmianami w przestrzeni. Jednak w całkowym opisie ewolucji wprowadzanie wyodrębnionej zmiennej $\tau = t - |\mathbf{x}|$ (jedna z możliwości jej określenia - sugerowana postacią δ_a) ma znaczenie czysto operacyjne, gdyż i tak relacje czasoprzestrzenne "kontrolowane" są przez G . Ponadto czas retardowany jako pojęcie fizyczne dotyczące całego zaburzenia, wskutek dyspersji prędkości dźwięku (rozmycie funkcji δ_a) i niezależnie od tego, wskutek zmiennej odległości punktu obserwacji od punktów, które traktujemy jako źródła zaburzenia, nie ma tu zastosowania. Znaczenie fizyczne ma czas retardowany elementarnego zaburzenia, albo można też mówić o pewnym średnim czasie retardowanym, do którego wielkość $\tau = t - |\mathbf{x}|$ jest zbliżona (ze względu na czynnik geometryczny, w odległościach asymptotycznych od źródeł zaburzenia - pole dalekie) i która pozwala wyodrębnić szybko zmienne w czasie i przestrzeni składowe zaburzenia tak, że w zerowym przybliżeniu będzie spełniony związek (87). Powód powyższej dyskusji jest następujący. Formuły całkowite (93) i (97) ustalają równoważność \mathcal{A}^1 i \mathcal{A}^2 , gdyż $a^{\mathcal{E}}$ i a^{ω} opisują ten sam "przekrój" funkcji a^{**} za pomocą różnych parametrów. Ponadto wzory (89) pokazują że, przy zmianie parametru opisu $\zeta \leftrightarrow \omega$ postać funkcyjna współczynników absorpcji zachowuje się tak, że można posługiwać się jednym słabo sygnałowym współczynnikiem absorpcji $a(\cdot)$ którego postać funkcyjna nie zależy od zmiennej dyspersyjnej to znaczy

$$a(\zeta) = a(\omega) + o(\alpha^2). \quad (98)$$

Rozważmy teraz szczególny przypadek, ośrodek liniowy, klasycznie lepki: $\mathcal{A}^1 = -\alpha_1 \Delta$, $A(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \otimes \Delta = \Delta \delta(\mathbf{x})$, $a(\zeta) = a^{\mathcal{E}}(\zeta) = \alpha_1 \zeta^2$. Równanie ośrodka ma postać

$$\Delta \Phi - \partial_a \Phi + 2\partial_i (\alpha_2 \Delta \Phi) = 0. \quad (99)$$

Iterując równanie (100) względem operacji Δ (co odpowiada iteracji równania dyspersyjnego względem ζ) otrzymujemy

$$\Delta \Phi - \partial_a \Phi + 2\partial_i (\alpha_2 \partial_a \Phi) + o(\alpha^2) = 0, \quad (100)$$

to znaczy

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}^1 + o(\alpha^2), \quad \mathcal{A}^1 = -\alpha_2 \partial_a \quad (101)$$

dla Φ spełniających (99), co jest zgodne bez dodatkowych założeń, z dotychczasowymi ogólnymi wynikami (ściśłym wynikiem jest $\partial_a \delta_a(t)$, gdzie dla zmiennej splotowej $-\infty < t \leq t$ $\delta_a(t) = \exp(-t/2\alpha_2)/2\alpha_2$).

Często w akustyce wykorzystywany jest układ zmiennych niezależnych i zależnych z czasem retardowanym. Poniżej przedstawiamy dwa opisy przejścia do tego układu

$$t \rightarrow \tau = t - |\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \quad (102)$$

$$\partial_t \rightarrow \partial_\tau = \partial_t, \quad \nabla \rightarrow \bar{\nabla} = \nabla - \mathbf{e}_x \partial_\tau \quad (103)$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \rightarrow \bar{\Delta} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} = \Delta - \frac{2}{|\mathbf{x}|} \partial_\tau - 2\mathbf{e}_x \cdot \nabla \partial_\tau + \partial_{\tau\tau}, \quad \bar{\Delta} - \partial_{\tau\tau} = \Delta - \frac{2}{|\mathbf{x}|} \partial_\tau - 2\mathbf{e}_x \cdot \nabla \partial_\tau, \quad (104)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \bar{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) = \Phi(\mathbf{x}, t - |\mathbf{x}|), \quad (105)$$

$$-\partial_t \Phi(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t) \rightarrow \bar{F}(\mathbf{x}, \tau) = -\partial_\tau \bar{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) = -\partial_t \Phi(\mathbf{x}, t - |\mathbf{x}|) = F(\mathbf{x}, t - |\mathbf{x}|), \quad (106)$$

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \tau) = \bar{\nabla} \bar{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) = \nabla \bar{\Phi} + \mathbf{e}_x \bar{F} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t - |\mathbf{x}|) \quad (107)$$

Po tych przekształceniach równanie (99) przyjmuje postać

$$[\bar{\Delta} - \partial_{\tau\tau}] \bar{\Phi} + 2\partial_\tau(\alpha_2 \bar{\Delta} \bar{\Phi}) = 0. \quad (108)$$

Ponieważ $\hat{F}F[\bar{\Delta} - \partial_{\tau\tau}] = -\zeta^2$, $\hat{F}F[\bar{\Delta}] = -(\zeta^2 + \omega^2)$ (argumentem "czasowym" w F jest τ), to

związek dyspersyjny ma postać

$$\zeta^2 = i2\omega\alpha_2(\zeta^2 + \omega^2). \quad (109)$$

Wynika stąd że, $\zeta^2 = 0 + o(\alpha^2)$ i przy zamianie zmiennych

$$\mathcal{A}^\tau = -\alpha_2 \Delta \rightarrow -\alpha_2 \partial_{\tau\tau} + o(\alpha^2) = \mathcal{A}^\tau + o(\alpha^2). \quad (110)$$

Podobnie, gdy

$$t \rightarrow \tau = t - z, \quad \mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad (111)$$

$$\partial_t \rightarrow \partial_\tau = \partial_t, \quad \nabla \rightarrow \bar{\nabla} = \nabla - \mathbf{e}_z \partial_\tau = \nabla - \mathbf{e}_z \partial_t, \quad (112)$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \rightarrow \bar{\Delta} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} = \Delta - 2\partial_{\tau\tau} + \partial_{\tau\tau}, \quad \bar{\Delta} - \partial_{\tau\tau} = \Delta - 2\partial_{\tau\tau}, \quad (113)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \bar{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) = \Phi(\mathbf{x}, t - z), \quad (114)$$

$$-\partial_t \Phi(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t) \rightarrow \bar{F}(\mathbf{x}, \tau) = -\partial_\tau \bar{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) = -\partial_t \Phi(\mathbf{x}, t - z) = F(\mathbf{x}, t - z), \quad (115)$$

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \tau) = \bar{\nabla} \bar{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) = \nabla \bar{\Phi} + \mathbf{e}_z \bar{F} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t - z), \quad (116)$$

co jest często wybieraną transformacją dla zagadnień osiowo symetrycznych ($\mathbf{x}=(r,z)$), z osią propagacji z. Teraz $\mathcal{F}\mathcal{F}[\bar{\Delta}-\partial_{zz}]=-(\zeta^2+2\omega\zeta_z)$, $\mathcal{F}\mathcal{F}[\bar{\Delta}]=-(\zeta^2+2\omega\zeta_z+\omega^2)$, a (109) odpowiada

$$\zeta^2+2\omega\zeta_z=i2\omega\alpha_2(\zeta^2+2\omega\zeta_z+\omega^2), \quad (117)$$

$$\zeta_z=\zeta e_3, \quad \zeta_z=\zeta e_2, \quad \zeta^2=\zeta_1^2+\zeta_2^2, \quad e_3=(\mathbf{k})_z/k, \quad e_2=(\mathbf{k})_y/k$$

I w tym przypadku mamy (110). Zauważmy, że zamierzona powyższymi transformacjami "wolna zmienność" zaburzenia $\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{x}},\tau)=\bar{\Phi}(\mathbf{x},\tau)$ względem zmiennej \mathbf{x} jest zachowana i może być charakteryzowana parametrem $\alpha^{1/2}$. Niemniej jednak dotyczy ona propagacji w swobodnej przestrzeni lub tych jej obszarów, w których wpływ geometrii rozkładów brzegowych i źródeł staje się pomijalny. W powyżej przedstawionych związkach między ζ i ω , w odróżnieniu od wyrażeń prowadzących do (93) i (95), nie uwzględniono wpływu geometrii brzegów. Wiadomo jednak, że w pobliżu źródeł (zwłaszcza przestrzennie ograniczonych) zmienność zaburzenia względem \mathbf{x} jest porównywalna ze zmiennością względem τ . W konsekwencji może okazać się, że niemożliwe jest po zamianie zmiennych, przejście w całej przestrzeni od opisu absorpcji za pomocą $\mathcal{A}^*(A(\mathbf{x}))$ do opisu $\mathcal{A}^*(A(\tau))$ z dokładnością do $o(a^2)$, to znaczy do jądra zależącego jednorodnie od τ i działającego na zaburzenie tylko poprzez zmienną τ . W szczególności dotyczy to operatora absorpcji ośrodka klasycznie lepkiego. Rozważmy sytuację ogólną przy założeniu, że dany jest \mathcal{A}^* . Z tych samych powodów, dla których można było zapisać $a(\mathbf{k})=a(\zeta)$, mamy również $A(\mathbf{x})=A(|\mathbf{x}|)$. Po zamianie zmiennych otrzymujemy

$$\mathcal{A}^*\Phi(\mathbf{x},t) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}^*\bar{\Phi}(\mathbf{x},\tau) = A^*(|\mathbf{x}|) \otimes_x \bar{\Phi}(\mathbf{x},\tau(\mathbf{x})) = \frac{A^*(|\mathbf{x}|) \otimes_x \Phi(\mathbf{x},t-|\mathbf{x}|)}{A^*(|\mathbf{x}|) \otimes_x \Phi(\mathbf{x},t-z)}, \quad (118)$$

gdzie na końcu ostatniej równości wyszczególniono wyżej określone przypadki czasu retardowanego. Zwracamy uwagę, że sama zamiana zmiennych nie wymaga zmiany zmiennych spłotowych ($\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}$), nie zmienia więc argumentu jądra, uzależnia jednak czas retardowany od tych zmiennych. W (118) jedna ze zmiennych spłotowych może być zastąpiona zmienną związaną z czasem retardowanym. W pierwszym przypadku mamy: $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|=|\mathbf{r}'|=-(\tau-\tau')$, $0 \leq \tau \leq \tau'$, $\mathbf{x}'(\tau',x'_n)=\mathbf{x}-\mathbf{r}'(\tau',r')$, $(x'_n),(r'_n)$, $n=2,3$ - pozostałe składowe wektorów \mathbf{x}' , \mathbf{r}' w odpowiednim układzie współrzędnych, na przykład w sferycznym $\mathbf{r}'(\tau',\theta',\varphi')=-(\tau-\tau')\mathbf{e}_z(\theta',\varphi')$, $d^3\mathbf{x}'=|\mathbf{x}'|^2 \sin(\theta')d\theta'd\varphi'dx' \rightarrow (\tau-\tau')^2 \sin(\theta')d\theta'd\varphi'd\tau'$. Wtedy

$$A^*(\mathbf{x}) \otimes_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, t - |\mathbf{x}|) = \iiint_{\tau \leq t'} A(-(\tau - t')) \Phi(\mathbf{x}'(\tau', \mathbf{x}'_n), t - |\mathbf{x}'(\tau', \mathbf{x}'_n)|) d^2(x_n) dt' \tau'. \quad (119)$$

W drugim przypadku: $z - \xi = -(\tau - t')$, $\xi(\tau') = z - (\tau' - \tau)$, $d\xi = -d\tau'$,

$$A^*(\mathbf{x}) \otimes_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, t - z) = A(\mathbf{x}_\perp, -\tau) \otimes_{\mathbf{x}_\perp, \tau} \overline{\Phi}((\mathbf{x}_\perp; z(\tau)), \tau), \quad (120)$$

gdzie \mathbf{x}_\perp - składowe transwersalne do z .

Z powyższego widać, że przy arbitralnym zdefiniowaniu czasu retardowanego i opisie zaburzenia w nowym układzie zmiennych, ogólnie rzecz biorąc, nie jest możliwe przejście z zachowaniem dokładności typu $o(\alpha^2)$ do opisu absorpcji za pomocą operatora działającego na zaburzenie tylko poprzez zmienną typu "czas retardowany". W drugim przypadku nie jest możliwe nawet wyrażenie jądra w sposób jednorodny za pomocą tej zmiennej. Ewentualne przybliżenia wynikają z geometrii zagadnienia (wiążą się z możliwością wprowadzenia dodatkowego, małego parametru charakteryzującego zmienność zaburzenia względem współrzędnych przestrzennych) i z reguły dotyczą obszarów odległych od źródeł. Zwykle pomija się w przekształconym operatorze absorpcji wszystkie składowe zawierające operacje przestrzenne, a pozostałą część, którą można oznaczyć \mathcal{A}^z (na przykład dla ośrodka klasycznie lepkiego $= -\alpha_z \partial_{\tau}$), traktuje się jak odpowiednik \mathcal{A}^t , to znaczy jak Fourrierowski obraz $a(\omega)$ i jak równoważną dla \mathcal{A}^x postać operatora absorpcji. Prowadzić to może do znacznych błędów w opisie absorpcji w pobliżu źródeł zaburzenia (na przykład w polu bliskim kołowego przetwornika $\Delta \overline{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) \cong \partial_z \overline{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) \cong \partial_{\tau} \overline{\Phi}(\mathbf{x}, \tau)$, $\tau = t - z$). Tego rodzaju uproszczenia nadają równaniom charakter asymptotyczny, a \mathcal{A}^t w ogólności może być traktowany jedynie jako postać asymptotyczna \mathcal{A}^t . Oczywiście wyjątkiem są fale jednowymiarowe, w szczególności płaskie. Z powyższego wynika że, jawne na siatce różnicowej kody numeryczne rozwiązujące zagadnienia brzegowe powstałe na bazie równań z czasem retardowanym i wykorzystujące w opisie absorpcji $\mathcal{A}^t(a(\omega))$ mogą generować w obszarach przyródłowych znaczący błąd. Kody numeryczne wykorzystujące znajomość $\mathcal{A}^x(a(\xi))$ albo posługujące się propagatorem lub funkcją Greena wolne są od powyższych ograniczeń. Niestety, w literaturze akustycznej poza szczególnym przypadkiem ośrodka klasycznie lepkiego nie podaje się postaci \mathcal{A}^x operatora absorpcji, a jedynie postaci asymptotyczne \mathcal{A}^t operatora \mathcal{A}^t (\mathcal{A}^x) i takie też stosowane są w opisie propagacji w całym rozważanym obszarze. Niemniej jednak, wychodząc z założenia (które można łatwo uzasadnić), że postać asymptotyczna zachowuje postać funkcyjną \mathcal{A}^t ,

możemy odtworzyć \mathcal{A}^x . Mamy $F[A^t; \tau] = F[A^t; t] = a(\omega)$ w warunkach asymptotycznych, zgodnych z definicją τ . Na mocy związku dyspersyjnego przedłużamy $a(\omega) \rightarrow a(\zeta)$, a stąd $A^t(x) = \hat{F}^{-1}[a(\zeta)]$. W dodatku przedstawiono przykład obliczenia \mathcal{A}^x dla przypadku gdy dany jest współczynnik absorpcji w postaci $a(\omega) = \alpha_1 |\omega|$, α_1 - parametr absorpcji. Ten typ absorpcji obserwuje się w wielu ośrodkach typu biologicznego. Należy podkreślić, że aczkolwiek z formalnych powodów możliwym i wygodnym może być posługiwanie się omawianymi wyżej postaciami równoważnymi dla \mathcal{A}^x , to właśnie ta postać opisu absorpcji jest fizycznie wyróżniona. W podstawowym opisie operator absorpcji, o czym już mówiliśmy, nie może być funkcją tylko czasu. A inne procesy, które można opisać jako funkcje tylko czasu, wzbudzone są i dają wkład do absorpcji (dyspersji) tylko w przypadku wystąpienia przestrzennej niejednorodności zaburzenia.

Dalej posługiwać się będziemy tylko fizycznie dostępnymi postaciami $\mathcal{A}^{x,t}$ to znaczy możliwymi do określenia w eksperymencie operatorami \mathcal{A}^x lub \mathcal{A}^t ($a(\zeta)$ lub $a(\omega)$). Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\Phi &\equiv A(x) \otimes_t \Phi(x, t) \\ A(x) &= \hat{F}^{-1}[a(\zeta)] \end{aligned} \quad (121)$$

lub

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\Phi &\equiv A(t) \otimes_x \Phi(x, t) \\ A(t) &= F^{-1}[a(\omega)] \end{aligned} \quad (122)$$

Powyższe określenia operatora, poza zgodnością ze znanymi szczególnymi przypadkami, wynikają ze spektralnej teorii operatorów w odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych. W szczególności z twierdzenia spektralnego dla tych operatorów [11] [14] [15] i przyjętej Fourierowskiej reprezentacji zaburzeń. Operator \mathcal{A} można przedstawić w bazie, innego niż Fourierowski, zupełnego, ortogonalnego zbioru funkcji, na przykład wielomianów Hermite'a. Zbiór funkcji Fouriera $\{e^{iKx}\}$, $\{e^{i\omega t}\}$ jest tu wyróżniony własnościami urządzeń pomiarowych i generujących. Zmierzona wartość współczynnika absorpcji $a(\omega)$ ($a(\zeta)$) jest wartością własną operatora \mathcal{A} odpowiadającą zaburzeniu w postaci funkcji własnej - funkcji Fouriera o częstotliwości ω (wektorze falowym $K = \zeta e$). Łatwo sprawdzić, że

$$\mathcal{A}e^{i\omega t} = a(\omega)e^{i\omega t}, \quad a(-\omega) = a(\omega) \quad (123)$$

Przejście $a(\zeta) \leftrightarrow a(\omega)$, jak zostało pokazane, wynika ze związku dyspersyjnego.

B. Dyspersja w przypadku nieliniowym - kwazidyspersja.

Można pokazać [16], że dla rozwiązań równania (50)

$$q\mathcal{A}[\Phi] \sim o(q^2). \quad (124)$$

Równanie (50) uzyskuje prostszą postać

$$\Delta\Phi - \partial_{xx}\Phi - 2\mathcal{A}\partial_t\Phi = q\beta\partial_t(\partial_t\Phi)^2 + o(q(q+\alpha)), \quad (125)$$

niemniej jednak, zachowana jest dokładność opisu.

Stosując transformacje Fouriera $\hat{F}F$ do równania (125) otrzymujemy

$$QDsp[\zeta, \omega, a(\zeta), \hat{P}] \hat{P} = 0, \quad (126)$$

$$QDsp[\zeta, \omega, a(\zeta), \hat{P}] \equiv \left[\zeta^2 - \omega^2 \left(1 + i \frac{2a(\zeta)}{\omega} - qNL[\hat{P}] \right) \right],$$

$$NL[\hat{P}] \equiv \beta [\hat{P}(\mathbf{K}, \omega) \otimes \hat{P}(\mathbf{K}, \omega)] / \hat{P}(\mathbf{K}, \omega).$$

Zastosowano podstawienie $\hat{\Phi}(\mathbf{K}, \omega) = \hat{P}(\mathbf{K}, \omega)/i\omega$, gdzie \hat{P} , poprzez relację (48) i skutek (124) odpowiada widmu Fouriera ciśnienia $P = -\partial_x\Phi + o(q(q+\alpha))$.

Termin "równanie dyspersyjne" ma dobrze określony sens dla równań liniowych. Jego rozwiązania, to znaczy związki między ζ i ω , obowiązują dla wszystkich rozwiązań tych równań niezależnie od ich postaci. Równanie (126) ($\hat{P} \neq 0$) określić można terminem "kwazidyspersyjne", bowiem w odróżnieniu od równania (76) wyrażenie $QDsp[\zeta, \omega, a(\zeta), \hat{P}]$ zależy od \hat{P} , to znaczy od postaci rozwiązania (obszerniejszą dyskusję równania (126) i wyrazu $NL[\hat{P}]$ przedstawiono w [16]).

Niemniej jednak, może ono posłużyć do wyznaczenia związku między ζ i ω . Jeżeli uwzględnimy, zgodnie z postacią (126), że $\hat{P}(\mathbf{K}, \omega)$ wpływa na postać tego związku, w klasie rozwiązań dla których, $qNL[\hat{P}]$ jest wielkością małą rzędu $\alpha(q)$ (różne przypadki numerycznie uzyskanych rozwiązań równania (125) są zgodne z tym założeniem), to stosując, na przykład, już uprzednio przedstawioną metodę kolejnych przybliżeń otrzymujemy

$$\begin{aligned}\zeta &= |\omega| \left(1 + i \frac{2a(|\omega|)}{\omega} - qNL[\hat{P}(e|\omega, \omega)] \right)^{1/2} \\ &= |\omega| + o(q + \alpha), \quad \mathbf{K} = e\zeta\end{aligned}\quad (127)$$

Analogicznie do (89) i (98)

$$a(\zeta) = a(\omega) + o(\alpha(q + \alpha)) \quad (128)$$

dla $\hat{P}(\mathbf{K}, \omega)$ ($\hat{\Phi}(\mathbf{K}, \omega)$) spełniających (126), dla których $qNL[\hat{P}] \sim o(q)$.

Mnożąc strony (128) przez $\hat{P}(\mathbf{K}, \omega)$ ($\hat{\Phi}(\mathbf{K}, \omega)$) i obliczając \hat{F}^{-1} , otrzymujemy

$$A(\mathbf{x}) \otimes \hat{P}(\mathbf{x}, \omega) = a(\omega) \hat{P}(\mathbf{x}, \omega) + o(\alpha(q + \alpha)). \quad (129)$$

Obliczając dalej F^{-1} obu stron równania (129) stwierdzamy że,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^s = \mathcal{A}' + o(\alpha(q + \alpha)). \quad (130)$$

Wzór (130) jest rozszerzeniem wcześniej otrzymanych związków dla przypadku nieliniowego

V. GLOBALNE W CZASIE RÓWNANIA ZACHOWANIA ENERGII W PRZYPADKU LINIOWYM I NIELINIOWYM.

Uwzględniając relację (124) możemy przepisać równanie (74) następująco

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}P) + 2P\mathcal{A}P = -\partial_t \mathcal{L} - \partial_t P^2 + q\beta P \partial_t P^2 + o(q(q+\alpha)) \quad (131)$$

W liniowym opisie zaburzeń wyrazy proporcjonalne do q nie występują w równaniu propagacji. W szczególności nie występuje wyraz $q\beta \partial_t P^2$ opisujący samo oddziaływanie. Stąd, w przypadku liniowym równanie (131) nie zawiera wyrazów proporcjonalnych do q , jednak wyraz $\partial_t \mathcal{L}$ nie może być pominięty (poza szczególnymi przypadkami).

Stosując rozwinięcie (62), równanie (131) możemy zapisać następująco,

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{I}} + \partial_t \mathcal{E}_a = \frac{2\alpha \chi \chi_p}{q(r-1)} \Delta P + q \partial_t P^3 + o(q(q+\alpha)) \quad (132)$$

Od lokalnego w czasie prawa zachowania dla zaburzeń Φ opisywanych równaniami liniowymi, postać równania (132) różni się jedynie wyrazem proporcjonalnym do q , opisującym dodatkowe zmiany gęstości energii w wyniku oddziaływań nieliniowych. Należy podkreślić, że podawane w literaturze akustycznej [2] rozwinięcia wzoru (61) ograniczają się tylko do wyrazów w pierwszym nawiasie we wzorze (62). Na tym poziomie dokładności występują tylko numeryczne, a nie formalne różnice w opisie gęstości energii dla przypadku liniowego i nieliniowego. W nieliniowej analizie zaburzenia postępowanie takie jest niekonsekwentne, zwłaszcza że, równania (131) i (132) uzyskuje się także z nieliniowego równania propagacji. Niezależnie od powyższego, do określenia \mathcal{E}_a stosuje się wzór na energie wewnętrzną jak dla ośrodka bezstratnego i nieprzewodzącego ciepła, to znaczy pomija się drugi człon w wyrażeniu (30). Dla rozwinięcia (62) oznacza to brak drugiego i trzeciego wyrazu, a dla równania (132) pierwszego po prawej stronie, także w przypadku liniowym.

Należy podkreślić, że konsekwentna interpretacja (61) i (62) z uwzględnieniem (30), i stosowane w literaturze akustycznej nazewnictwo, wymagała by traktować ciepło wydzielane i przewodzone w ośrodku jako część składową energii dźwięku. W sytuacji, gdy rozważany jest ośrodek, w którym energia mechaniczna zamieniana jest nieodwracalnie na ciepło, bardziej właściwe jest określenie \mathcal{E}_a jako przyrostu gęstości energii zaburzenia potencjalnego. Natomiast za energie dźwięku przyjąć

wielkość \mathcal{E}_a^* . Określona formalnie za pomocą wzoru (61) w którym, energia wewnętrzna u jednostki masy zastąpiona jest przez wielkość u^* określoną wzorem (30) z pominiętym wyrazem entropowym. A więc formalnie jak dla ośrodka bezstratnego. Odpowiada to podziałowi energii zaburzenia na część "mechaniczną" - \mathcal{E}_a^* i "cieplną", zgodnie ze wzorem

$$q\mathcal{E}_a = q\mathcal{E}_a^* + g \int_{s_a}^s T ds$$

i pozwala mówić o zamianie energii dźwięku na ciepło.

Stosownie do \mathcal{E}_a^* , i analogicznie do (60), wprowadzamy wektor $\tilde{\Gamma}^* \equiv \mathbf{v}P + q\mathbf{v}\mathcal{E}_a^*$. Odpowiednie równania dla \mathcal{E}_a^* i $\tilde{\Gamma}^*$ zawarte są już w (64) i (65) i można je z nich otrzymać wykorzystując (61) i (53). Najprościej jednak jest obliczyć różnice po prawej stronie (68). Ponieważ $\mathcal{E}_a^* = ge^*$, to zgodnie z powyższymi określeniami $TDs + qDe^* = qDe$ i równania (68) i (69) mogą być zapisane w postaci,

$$\partial_i \mathcal{E}_a^* + q\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathcal{E}_a^*) = -\nabla \cdot (\mathbf{v}P) + 2(\Delta\Phi) \mathcal{A}\Phi \quad (133)$$

lub

$$\partial_i \mathcal{E}_a^* + \nabla \cdot (\tilde{\Gamma}^*) = 2(\Delta\Phi) \mathcal{A}\Phi \quad (134)$$

Dla ośrodka klasycznie lepkiego niezmiennik I_2 w równaniu (134) nie wystąpi nawet gdy zostanie on uwzględniony w równaniach (52) i (53). W tym sensie równanie (134) jest równaniem ścisłym – podobnie jak (68), i w odróżnieniu od (64) i (65). Ponadto, nie zawiera jawnie dodatkowych wielkości termodynamicznych, a po odpowiednich przybliżeniach sprowadza się do równania (131).

Dla ośrodka bezstratnego, $\mathcal{A} \equiv 0$, równanie (134) podano w [2]

Rozważać będziemy dwa rodzaje zaburzeń: okresowe, $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t + 2\pi)$ oraz o postaci pojedynczych impulsów $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$ dla $t \notin (t_0, t_0 + 2\pi)$ ($t \in (t_0, t_0 + \tau_0)$, gdzie τ_0 oznacza tu czas trwania impulsu w zmiennych wymiarowych przy czym τ_0 może być dowolnie duże). W przypadku zaburzeń impulsowych stosować będziemy symbol $\langle \cdot \rangle_s$ dla oznaczenia całkowania względem czasu t w interwale $(t_0, t_0 + 2\pi)$. Początkowo nie ma potrzeby rozróżniania zaburzeń okresowych i pojedynczych impulsów. By uniknąć powtarzania już otrzymanych związków wygodnie jest wprowadzić jednolity symbol

$$\langle \cdot \rangle \equiv \begin{cases} \langle \cdot \rangle_{T_0} \equiv \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} (\cdot) k t' = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} (\cdot) k t' & \text{dla zaburzeń okresowych} \\ \langle \cdot \rangle_s \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) k t' = \int_{t=t_0}^{t=t_0+2\pi} (\cdot) k t' & \text{dla pojedynczych impulsów} \end{cases} \quad (135)$$

Jeżeli ϕ jest funkcją okresową albo impulsem, to dla wielu przestrzeni funkcyjnych (lub zbiorów), do których należą $g(\cdot)$ i $b(\cdot)$ zachodzi,

$$\langle g(\phi) \partial, b(\phi) \rangle = 0. \quad (136)$$

W szczególności (136) jest prawdziwe, gdy $g(\cdot)$ lub $b(\cdot)$ są wielomianami.

Stosując (135) do (131) lub (132) oraz do (134) i uwzględniając (136) otrzymujemy

$$\nabla \cdot \mathbf{I} + 2 \langle P \mathcal{A} P \rangle_{T_0} = 0 + \alpha(q + \alpha) \quad (137)$$

dla zaburzenia okresowego i

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + 2 \langle P \mathcal{A} P \rangle_s = 0 + \alpha(q + \alpha) \quad (138)$$

dla pojedynczych impulsów.

Wyraz nieliniowy (proporcjonalny do q) w (131), odpowiadający nieliniowości w równaniu propagacji (125), oraz nieliniowy wyraz w (132) nie wnoszą wkładu do globalnych w czasie równań zachowania (137) i (138). Wskutek tego równania te mają formalnie identyczną postać (ze wskazaną dokładnością) w liniowym i nieliniowym opisie propagacji zaburzeń. Oznacza to także zachowanie energii w nieliniowych oddziaływaniach zachodzących w trakcie propagacji zaburzenia.

Zauważmy że,

$$\langle \partial_t \mathcal{E}_a \rangle = 2 \langle P \mathcal{A} P \rangle. \quad (139)$$

Wektor

$$\mathbf{I} \equiv \langle \tilde{\mathbf{I}} \rangle_{T_0} = \langle P \mathbf{v} \rangle_{T_0} = - \langle (\partial_t \Phi) \nabla \Phi \rangle_{T_0} \quad (140)$$

jest w akustyce nazywany natężeniem dźwięku. W jednostkach wymiarowych $[\mathbf{I}] = \text{W/m}^2$. Dla zaburzeń w postaci pojedynczych impulsów nie możemy zastosować wyżej zdefiniowanej operacji uśredniania. Zastosowanie ma tu druga z pary operacji określonych w (135). W ten sposób otrzymujemy wektor natężenia energii impulsu \mathbf{E}

$$\mathbf{E} \equiv \langle \tilde{\mathbf{I}} \rangle_s = \langle P \mathbf{v} \rangle_s. \quad (141)$$

Jest to wektor o kierunku wektora \mathbf{v} i długości równej energii impulsu, która w trakcie jego propagacji przeniknęła jednostkową powierzchnię prostopadłą do \mathbf{v} . W jednostkach wymiarowych $[\mathbf{E}] = \text{J/m}^2$. Oczywiście \mathbf{I} i \mathbf{E} są przybliżeniami wielkości ścisłych $\mathbf{I}^* \equiv \langle \hat{\mathbf{I}}^* \rangle_{\tau_0}$ i $\mathbf{E}^* \equiv \langle \hat{\mathbf{E}}^* \rangle_s$.
Równania ściśle będą omówione w rozdziale VIII. DYSKUSJA I WNIOSKI.

VI. FAKTORYZACJA

Postać równań (137) (138) jest ogólna, w tym sensie, że nie zależą one od sposobu opisu zaburzenia $\Phi(P, \mathbf{v})$, to znaczy od reprezentacji, chociaż rozkładu operatora \mathcal{A} dokonaliśmy względem funkcji Fouriera. Zrobiono to z powodów wcześniej wymienionych w Rozdziale IV. A, i z uwagi na ogólne znaczenie i formalne własności analizy Fourierowskiej. Pozwala ona łatwo interpretować i porównywać wyniki analizy matematycznej z wynikami eksperymentalnymi. Niemniej jednak, powyższe względy, chociaż naturalne, nie wynikają z otrzymanych równań, nie są też potrzebne do ich otrzymania. Pozostawienie równań (137) i (138) w ogólnej (abstrakcyjnej) postaci, to znaczy niezależnej od reprezentacji zaburzeń względem wybranego zupełnego zbioru funkcji, ogranicza możliwości pełnej ich interpretacji oraz interpretacji wyrażeń je tworzących. Zastosowanie konkretnego, zupełnego zbioru funkcji, w którym dokonujemy rozkładu zaburzenia nadaje szczególną-zależną od tego wyboru- postać członom równań (125), (137), (138). Powyższe postępowanie nazywamy tu "faktoryzacją". Jak wyżej, pozostajemy przy fourierowskiej reprezentacji zaburzeń. Zbiór funkcji Fouriera jest zupełny, ortogonalny, i reprezentuje zbiór funkcji własnych operatora absorpcji. Aczkolwiek ostatnie dwie własności radykalnie upraszczają faktoryzację i postać otrzymywanych wyrażeń, nie są jednak konieczne do jej przeprowadzenia. Należy zaznaczyć że, wcześniej wspomniane właściwości analizy fourierowskiej mogą mieć drugorzędne znaczenie w numerycznych symulacjach rozważanego problemu. W tych przypadkach dla wyboru bazy funkcyjnej, decydującą rolę odgrywa efektywność kodu numerycznego.

Rozkład Fouriera założonych typów zaburzeń jest następujący; dla impulsu

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{P}(\mathbf{x}, \omega)}{i\omega} e^{-i\omega t} d\omega + \Phi_{st}(\mathbf{x}), \quad (142)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \hat{P}(\mathbf{x}, -\omega) = \hat{P}^*(\mathbf{x}, \omega),$$

a dla zaburzenia periodycznego

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{C_n(\mathbf{x})}{in} e^{-int} + c.c., \quad (143)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=-N}^N P_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{C_n(\mathbf{x})}{in} e^{-int} + c.c., \quad C_{-n}(\mathbf{x}) = C_n^*(\mathbf{x}), \quad N = 1, 2, \dots, \infty$$

Przypadek $N=1$ jest trywialny - ma zastosowanie tylko w opisie liniowym. W zagadnieniach liniowych liczba różna od zera C_n nie zmienia się i równa jest liczbie składowych użytych do opisania warunków granicznych. W tym przypadku założenie $N < \infty$ jest uzasadnione. W zagadnieniach nieliniowych skład spektralny zaburzenia ulega zmianie i tylko dla opisu warunków granicznych może być $N < \infty$, poza tym teoretycznie $N = \infty$. Dopuszczając by N było liczbą skończoną, uwzględniamy, między innymi, własności maszyn liczących. Należy bowiem podkreślić, że własność (136) dla pomnożonego przez P wyrazu nieliniowego w (125), to znaczy dla wyrazów proporcjonalnych do q w (131) i (132), jest niezależna od reprezentacji zaburzenia w szczególności od N . Oznacza to, że w oddziaływaniach nieliniowych, opisywanych w równaniu (125) przez $q\beta\tilde{c}, F^2$, zachowywana jest energia także wtedy gdy nieskończony układ równań bilansu na $C_n(\mathbf{x})$ (otrzymywany po podstawieniu (143) do (125)) zostanie zastąpiony "obciętym" do N równań (lub ograniczymy nośnik \hat{P} na osi częstotliwości ω). Dlatego równania (137), (138) pozostają słuszne także dla $N < \infty$ ($-\infty < -\omega_{\text{m}} \leq \omega \leq \omega_{\text{m}} < \infty$).

Po podstawieniu (142) do $\langle P\mathcal{A}P \rangle$ otrzymujemy

$$\langle P\mathcal{A}P \rangle_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}^*(\mathbf{x}, \omega) \left(A(\mathbf{x}) \otimes \hat{P}(\mathbf{x}, \omega) \right) d\omega \quad (144)$$

Wykozystując (129) otrzymujemy,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) |\hat{P}(\mathbf{x}, \omega)|^2 d\omega = 0 + o\left((q + \alpha)^2\right), \quad (145)$$

dla impulsów.

W celu uproszczenia obliczeń dla zaburzeń okresowych zastosujemy równoważną postać (130) operatora absorpcji, uwzględniając (123) mamy,

$$\mathcal{A}^i P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N C_n(\mathbf{x}) a(n) e^{-int}, \quad (146)$$

$$\langle P_m P_n \rangle_{\tau_0} = C_m C_n \langle e^{-im\tau} e^{-in\tau} \rangle_{\tau_0} = C_m C_n \delta_{m,-n}, \quad (147)$$

gdzie $\delta_{i,j}$ - delta Kroneckera, dlatego

$$\langle P \mathcal{A} P \rangle_{\tau_0} = \sum_{n=1}^N a(n) \frac{|C_n(\mathbf{x})|^2}{2} + o(\alpha(q + \alpha)). \quad (148)$$

Po podstawieniu (146) do (137), otrzymujemy

$$\nabla \cdot \mathbf{I} + 2 \sum_{n=1}^N a(n) \frac{|C_n(\mathbf{x})|^2}{2} = 0 + o((q + \alpha)^2), \quad N = 1, 2, \dots, \infty, \quad (149)$$

gdzie

$$\mathbf{I} = \sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n = \sum_{n=1}^N \frac{C_n^* \nabla C_n - C_n \nabla C_n^*}{2} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{4} C_n^* \nabla \frac{C_n}{in}, \quad (150)$$

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}^*(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) d\omega \quad (151)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(\mathbf{x}, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}^*(\mathbf{x}, \omega) \nabla \frac{\hat{P}(\mathbf{x}, \omega)}{i\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\hat{P}^* \nabla \hat{P} - \hat{P} \nabla \hat{P}^*}{i\omega} d\omega, \end{aligned}$$

Ξ - gęstość widmowa \mathbf{E} .

Równania (137), (138) pozostają słuszne także po dokonaniu na nich nieosobliwej transformacji zmiennych niezależnych lub zależnych. Aczkolwiek, w pewnych przypadkach, może ulec zmianie szczegółowa postać tworzących je wyrazów. Z powodów podanych w **odnodawku B** podajemy tam przykład wpływu takiej transformacji na postać równań (137), (138) i (145), (149).

VII. FUNKCJE ABSORPCJI

Dzieląc obie strony równania (149) przez $2I$, $I \equiv |\mathbf{I}|$, otrzymujemy

$$\mathbf{a}'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \quad (152)$$

$$\mathbf{a}'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{n=1}^N a(n) \frac{|C_n|^2}{2} / I, \quad \mathbf{a}'_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \equiv -\nabla \cdot \mathbf{I} / 2I \quad (153)$$

gdzie $a'_{r,ef}(\mathbf{x})$ jest znanym [22] różniczkowym współczynnikiem (funkcją) efektywnej absorpcji; $a'_{ef}(\mathbf{x})$ jest współczynnikiem efektywnej absorpcji wprowadzonym przez autora.

Analogicznie, w zakresie widma ciągłego, z $E \equiv |\mathbf{E}|$,

$$a_{r,ef}^E(\mathbf{x}) = a_{r,ef}^E(\mathbf{x}) \quad (154)$$

$$a_{ef}^E(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty a(\omega) \hat{P}(\mathbf{x}, \omega)^2 d\omega / E, \quad a'_{r,ef}(\mathbf{x}) \equiv -\nabla \cdot \mathbf{E} / 2E \quad (155)$$

W przypadku potęgowej zależności słabo sygnałowego współczynnika absorpcji od ω , $a(\omega) = \alpha_i \omega^l$, wygodnie jest wprowadzić funkcję $W_l(\mathbf{x})$ - unormowany moment częstotliwościowy rzędu l względem widma

$$a_{ef}(\mathbf{x}) = \alpha_i W_l(\mathbf{x}), \quad W_l(\mathbf{x}) \equiv \sum_{n=1}^N n^l \frac{|C_n(\mathbf{x})|^2}{2} / I(\mathbf{x}) \quad (156)$$

Jeżeli w jednostkach wymiarowych współczynnik absorpcji ma postać $a(\omega) = \alpha_i(\omega)$, $[\alpha_i] = \text{Np} / (\text{Hz} \cdot \text{m})$, to związek między bezwymiarowym parametrem α_i i wymiarowym α_i jest następujący: $\alpha_i = \alpha_i \omega_0^l / k_0 = a(\omega_0) k_0$. Wobec tego $a_{ef}(\mathbf{x}) = k_0 a_{ef}(\mathbf{x}) = a(\omega_0) W_l(\mathbf{x})$. Używając współczynnika efektywnej absorpcji możemy uściślić pojęcie parametru α wprowadzonego w rozdziale I do scharakteryzowania wielkości operatora \mathcal{A} , $\alpha \equiv \max_{\mathbf{x}} (\alpha_{ef}^{l,E}(\mathbf{x}))$. Parametr α można uważać za normę operatora \mathcal{A} .

VIII. DYSKUSJA I WNIOSKI

W ogólności równania (137), (138) pokazują, że podwojona wartość oczekiwana operatora absorpcji jest równa gęstości mocy strat (energii strat). Czynniki 2 wynika z konwencji definiowania parametrów opisujących $a(\omega)$.

Oczywiście, jeżeli $a(\omega) \geq 0$ dla wszystkich ω to, z (144) i (148) wynika

$$\langle P \mathcal{A} P \rangle \geq 0. \quad (157)$$

Co oznacza że, \mathcal{A} jest dodatnio określony. Aczkolwiek, powyższa nierówność może zachodzić jeśli dla pewnych ω $a(\omega) \leq 0$. Równania (137), (138) pozostają słuszne dla innych liniowych

operatorów wprowadzających bardziej ogólne typy dyspersji - powodowane nie tylko przez absorpcje. Chociaż formalnie równania (145) i (149) mają tę samą postać w liniowym i nieliniowym opisie, ich szczegółowe interpretacje są różne. W liniowym opisie propagacji dźwięku n-ta składowa spektralna zaburzenia nie oddziałują z pozostałymi, dodatkowo prawdziwe są również równania,

$$\nabla \cdot \mathbf{I}_n + 2a(n)|C_n|^2/2 = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad N = 1, 2, \dots, \infty, \quad (158)$$

$$\nabla \cdot \Xi(\mathbf{x}, \omega) + 2a(\omega)|\hat{P}(\mathbf{x}, \omega)|^2 = 0, \quad \omega \in (-\infty, \infty),$$

które opisują oddzielnie zachowanie energii i mocy każdej ze składowych spektralnych.

W teorii nieliniowej składowe spektralne $C_n(\mathbf{x})$, $\hat{P}(\mathbf{x}, \omega)$ zaburzenia nie są wzajemnie niezależne.

Równania (158) mają niezerową prawą stronę

$$\nabla \cdot \mathbf{I}_n + 2a(n)|C_n|^2/2 = q\beta(P_n \partial_t P^2)_{T_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad N = 1, 2, \dots, \infty. \quad (159)$$

W odróżnieniu od przypadku liniowego, w nieliniowym opisie natężenie (energia, moc) n-tej składowej spektralnej zmienia się dodatkowo na skutek wymiany energii z pozostałymi składowymi.

Niemniej jednak,

$$\sum_{n=1}^N \langle P_n \partial_t P^2 \rangle_{T_n} = 0. \quad (160)$$

Powyższe stwierdzenie wynika z (136) i (143) i wyraża zasadę zachowania energii w oddziaływaniach nieliniowych. Dlatego, po zsumowaniu stronami, wszystkich równań "spektralnych" (158) i, odpowiednio, w przypadku nieliniowym, równań (159), otrzymujemy równania posiadające tę samą postać formalną (149). Jednak, dla nieliniowego P^{NL} , i liniowego P^L , rozwiązania tego samego zagadnienia granicznego,

$$\langle P^{NL} \mathcal{A}P^{NL} \rangle \neq \langle P^L \mathcal{A}P^L \rangle, \quad (161)$$

ponieważ kształt widm zaburzeń (widm Fouriera) są różne w obu przypadkach.

Absorpcja mocy zaburzenia okresowego wytwarza w ośrodku przestrzenny, stacjonarny rozkład gęstości mocy źródeł ciepła $Q(\mathbf{x}) = \langle Q(\mathbf{x}, t) \rangle_{T_n}$ (patrz wzór (17)). Nyborg [22] podał następujące wyrażenie $Q = -\nabla \cdot \mathbf{I}$. W wyniku otrzymanych przez nas równań mamy także,

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N a(n)|C_n(\mathbf{x})|^2 \quad (162)$$

Wielkość $Q(\mathbf{x})$ odgrywa ważną rolę w badaniu efektów termicznych powodowanych przez pole akustyczne. Z (162) wynika że, niezależnie od geometrii zaburzenia, do wyznaczenia $Q(\mathbf{x})$ w

punkcie \mathbf{x} wystarczający jest tylko jeden pomiar - profilu czasowego ciśnienia akustycznego i jego analiza Fourierowska w tym punkcie (oczywiście, jeżeli dla danego ośrodka znany jest słabo sygnałowy współczynnik absorpcji). Eksperymentalne wyznaczenie $-\nabla \cdot \mathbf{I}$, jeśli nawet jest możliwe (dla zaburzeń o znacznym stopniu symetrii), to jest obciążone dużym błędem i wymaga, co najmniej, dwóch pomiarów (dla fali płaskiej). Metoda ta ma tę - formalną- zaletę, że nie wymaga znajomości współczynnika absorpcji. Jednak raz zmierzony (w dogodnych warunkach) współczynnik absorpcji może być stosowany dla dowolnych konfiguracji pola akustycznego. Ponieważ propagacji w środkach rzeczywistych towarzyszy rozpraszanie, to eksperymentalnie określona wielkość $-\nabla \cdot \mathbf{I}$ będzie opisywała tłumienie a nie absorpcje. Przybliżenie punktów pomiaru, w celu ograniczenia udziału rozpraszania, nakłada jednak coraz większe wymagania na czułość i dokładność urządzeń pomiarowych. Analogiczna sytuacja ma miejsce w zakresie obliczeń numerycznych $Q(\mathbf{x})$. Wzór (162) daje nam bezpośrednio wartość $Q(\mathbf{x})$ (lub po dodatkowej analizie Fourierowskiej - jeżeli wynikiem jest $P(\mathbf{x}, t)$) w punkcie \mathbf{x} . Obliczenie $Q = -\nabla \cdot \mathbf{I}$ wymaga co najmniej jednej, dodatkowej operacji różniczkowania numerycznego, wprowadzającej dodatkowy znaczny błąd, jeśli obliczenia P lub C_n nie były dokładne. Równanie (162) zapewnia wystarczającą dokładność nawet dla niezbyt dokładnych obliczeń zaburzenia. W miarę poprawy dokładności

$$-\nabla \cdot \mathbf{I} \rightarrow \sum_{n=1}^N a(n) |C_n|^2 \quad (163)$$

Porównanie wielkości Q obliczonej tymi dwoma metodami stanowi bardzo dobry, "energetyczny test", dokładności rachunków numerycznych. Podobne wnioski dotyczą zaburzeń o widmie ciągłym. Nie możemy jednak tu mówić o stacjonarnych efektach termicznych. Wielkość

$$Q(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) |\hat{P}(\mathbf{x}, \omega)|^2 d\omega \quad (164)$$

jest rozkładem gęstości energii zaabsorbowanej przez ośrodek podczas przechodzenia przez niego impulsu i wydzielonej w postaci ciepła.

Łatwo pokazać, że $a'_{\nu'}(\mathbf{x})$ nie zależy od proporcji między czasem trwania i czasem powtarzania, a jedynie od profilu czasowego pojedynczego przebiegu w fali okresowej. Jeżeli widmo dyskretne C_n otrzymaliśmy próbując widmo ciągłe \hat{P} , to dla takich samych ośrodków $a'_{\nu'}(\mathbf{x}) = a''_{\nu'}(\mathbf{x})$. Można pokazać, że w granicy $T_0 \rightarrow \infty$ ($T_i/T_0 \rightarrow 0$), T_i - czas trwania, wzór (153) przechodzi w

(155) Zauważmy że, dla ośrodków z $\alpha(\omega) = \alpha_1 |\omega|$ bezwymiarowy parametr $\alpha_1 \equiv \alpha_1 c_0$, nie zależy od ω_0 . Stąd wszystkie rozwiązania zagadnień granicznych (różniące się tylko ω_0) dla tych równań, a także wszystkie funkcje, na przykład $W_1, a_{\omega'}^{L,E}$, zdefiniowane na ich podstawie, mają identyczną postać w bezwymiarowym układzie współrzędnych.

Dla scharakteryzowania "siły" nieliniowych oddziaływań, oraz określenia obszarów przestrzeni, w których mają one istotne znaczenie można wykorzystać funkcje nieliniowego wzmocnienia absorpcji:

$$G_a(\mathbf{x}) = \frac{a_{\omega'}^{NE}(\mathbf{x})}{a_{\omega'}^L(\mathbf{x})}$$

gdzie, $a_{\omega'}^{NE}$ i $a_{\omega'}^L$ są obliczone odpowiednio dla nieliniowego i liniowego rozwiązania tego samego zagadnienia granicznego. Przykład eksperymentalnego i numerycznego wyznaczenia funkcji $G_a(\mathbf{x})$ (z uwzględnieniem własności aparatury pomiarowej) podano w [18]. Dla fali płaskiej w wodzie i dla różnych wartości amplitud źródła zaburzenia, wyznaczono także funkcje $W_2(\mathbf{x}) = a_{\omega'}(\mathbf{x}) \alpha(\omega_0)$ zdefiniowaną w (156). Jej przebiegi są zgodne z wyznaczonymi eksperymentalnie i przedstawionymi w [4] na rys 32..

Rozważmy obecnie ściśle równanie (134). W związku z przeprowadzoną powyżej dyskusją możemy stwierdzić na podstawie (134), że w przypadku w pełni nieliniowego opisu zaburzeń energia dźwięku, w oddziaływaniach nieliniowych, jest zachowywana lokalnie w czasie. Może się jednak zmieniać w skutek wpływu gęstości prądu energii $-\nabla \cdot \tilde{\mathbf{I}}^*$ i zjawiska absorpcji

$$2(\Delta\Phi)_{,A}\Phi = -Q, \quad (165)$$

liniowego, aczkolwiek zachodzącego w warunkach nieliniowej propagacji. Jak wynika z (17) dla ośrodka klasycznie lepkiego $Q \geq 0$. Eksperymentalne wyznaczenie wartości lewej strony (165), a nawet jej wartości oczekiwanej (średniej), poprzez pomiar jawnie występujących tam wielkości jest w praktyce niemożliwy. Aby wyrazić wartość oczekiwaną (165) przez wielkości łatwo mierzalne, jak poprzednio wykorzystujemy równanie propagacji, dowolne z podanych w poprzednich rozdziałach. Otrzymujemy

$$\dot{Q} = \langle \dot{Q} \rangle = -2\langle (\Delta\Phi)_{,A}\Phi \rangle = 2\langle P_{,A}P \rangle + o(q(q+\alpha)). \quad (166)$$

Aby określić wartość $\langle \partial_t \mathcal{E}^* \rangle$ musimy odpowiedzieć na pytanie, czy zaburzenie g jest funkcją okresową albo impulsem, jeśli Φ jest funkcją okresową albo impulsem co założyliśmy w rozdziale V.

Z równania (36) wynika, że założone własności Φ przechodzą na g . Wtedy byłoby $\langle \partial_t \mathcal{E}^* \rangle = 0$. Jednak jednoczesna okresowość zaburzeń Φ i g jest niedopuszczalna przez równanie (34), przynajmniej dla ośrodka klasycznie lepkiego. Dla tego ośrodka ostatni wyraz w (34) jest całką z okresowego, jednak nieujemnego wyrażenia (17), rośnie więc nieograniczenie w czasie. Dla ośrodka nieprzewodzącego ciepła ($\chi = 0$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{Ls} \circ \nabla$) wyraz ten równy jest $c_w \delta T(\mathbf{x}, t)$, gdzie c_w - ciepło właściwe przemiany, $\delta T(\mathbf{x}, t)$ - przyrost temperatury. Prowadziłby więc do nieograniczonego teoretycznie wzrostu temperatury i entropii (jeżeli pominać zmiany parametrów ośrodka lub możliwe przejścia fazowe, w istocie nieuchronne po odpowiednio długim czasie). Należy uznać, że wyraz ten właściwie opisuje kierunek zmian zachodzących w ośrodku (na przykład spadek gęstości) jednak ich zakres i tempo w określonym punkcie $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ są teoretycznie uzasadnione (na przykład do chwili czasu t takiej że $g(\mathbf{x}_0, t) = 0$) jedynie dla ośrodka nieprzewodzącego ciepła i przy niezmiennych pozostałych współczynnikach transportu. W ogólności, wyraz ten pojawił się w wyniku ścisłego całkowania równania pędu (dla modu potencjalnego). Metoda całkowania nie zależy od postaci różnicy $\bar{P} - P^*$ ($\bar{P} - P^*$), którą określono dla wyrażen podcałkowych w (34) i (35) a także przedostatniego wyrazu w (34), jedynie na podstawie zlinearyzowanego równania transportu entropii, uwzględniając tylko jej składową odwracalną. Z drugiej strony wyrażenie podcałkowe o postaci występującej w (34) jest nieliniowym składnikiem równania entropii i dającym wkład do jej nieodwracalnych zmian. Możliwe są dwa sposoby postępowania przywracające konsystencje zbioru założeń i otrzymanych wyników, naruszoną przez ścisłe całkowanie równania pędu. Wynikają one z analizy poniższego pełnego układu równań dla zaburzeń potencjalnych.

$$\partial_t \Phi + \left(q \frac{1}{2} v^2 + \int_{g_R}^g \frac{P^*(g)}{g^2} dg + \frac{P^*}{g} - \frac{P_R}{g_R} + \frac{\bar{P} - P^*}{g} - \int_0^t (\bar{P} - P^*) D \left(\frac{1}{g} \right) dt \right) = 0 \quad , \quad (167)$$

$$gTD_S = \chi \Delta T - g(\bar{P} - P^*) D \left(\frac{1}{g} \right) - qA\eta_s J_z \quad , \quad (168)$$

$$D \left(\frac{1}{g} \right) = q \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{g} \quad (169)$$

Równanie (167) jest inaczej zapisanym równaniem (31). W dodatku D pokazano, że równanie (167) jest całką równań (54), ..(56) względem operatora D . Równanie (168) wynika z równań (23), (24) i (19a) i jest ogólniejszą postacią równania (19c) (dwie ostatnie ekwiwalentne postacie równania (18) mogą być zapisane za pomocą różnic $\bar{P} - P$, $\bar{P} - P^*$). W istocie ostatnia równoważność

w (18) ma miejsce tylko wtedy, gdy w (18c) występuje $\bar{P} - P^*$ zamiast jej przybliżenia $2\mathcal{A}_v = 2\mathcal{A}\Phi$. Przybliżenie to uzyskano uwzględniając jedynie wpływ odwracalnych (i liniowo opisywanych) zmian entropii na ciśnienie, w konsekwencji także na ciśnienie akustyczne. Zachowanie, w ramach tego przybliżenia, ostatniego wyrazu w (167) oznacza uwzględnienie czynnika powodującego nieodwracalny wzrost entropii w opisie ciśnienia (i gęstości), wbrew pierwotnemu założeniu. Konsekwentny i konsystentny opis zaburzeń potencjalnych w ramach przybliżenia $\bar{P} - P^* \cong 2\mathcal{A}\Phi$ zostanie przywrócony, gdy w równaniu (167) pominięty zostanie ostatni wyraz, a więc wyraz (32) w (31) i we wszystkich innych wynikających z (31) to znaczy w (42), (43), (44) itd.. Postępowanie takie oznacza separację modów akustycznego i termicznego w ramach potencjalnego opisu zaburzeń ośrodka. W tej sytuacji możemy mówić o "czystym" modzie akustycznym ewoluującym niezależnie od modu termicznego (entropowego).

Mod akustyczny opisywany jest, uproszczonym we wskazany sposób, równaniem (167) lub (42). Równanie (134) jest równaniem ścisłym w powyżej zakreślonym sensie a energia dźwięku jest okresową albo impulsową funkcją czasu to znaczy

$$\partial_t \mathcal{E}_a^* = 0 \quad (170)$$

Wobec uwagi poprzedzającej (166), dokładność uśrednionego równania (134) jest ograniczona do wykazywanej w (137) i (138)

$$\nabla \cdot \mathbf{I}^* + 2 \langle (\Delta\Phi) \mathcal{A}\Phi \rangle_{\tau_0} = 0 \quad (171)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{I}^* + 2 \langle P \mathcal{A}P \rangle_{\tau_0} = 0 + o(q(q + \alpha)) \quad (171a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^* + 2 \langle (\Delta\Phi) \mathcal{A}\Phi \rangle_s = 0 \quad (172)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^* + 2 \langle P \mathcal{A}P \rangle_s = 0 + o(q(q + \alpha)) \quad (172a)$$

Mod termiczny nie ma wpływu na akustyczny i ewoluuje według równania (168) które, przyjmując postać

$$gTDs = \chi \Delta T + Q, \quad (173)$$

gdzie, dla rozważanego przybliżenia Q dane jest przez (165) i tylko w tej postaci może być nazwane gęstością mocy źródeł ciepła. Wydaje się że, wprowadzając formalnie współczynnik $c_*^* \equiv Tds/dT$, i stosując go w (173), możemy w prosty sposób otrzymać równanie transportu dla temperatury. Jednak c_*^* jest w warunkach nierównowagowych złożoną funkcją, ogólnie określoną. To znaczy określenie c_*^* naśladuje jedynie postacią formalną równowagowe określenie ciepła właściwego w

dowolnych warunkach (sprecyzowanych przez podanie typu przemiany jakiej podlega ośrodek). Postępując się (19) możemy wyrazić c_w^* przez inne "ciepła właściwe",

$$c_w^* - e_w = -(\mathcal{P} - P^*)d(l/g)/dT \quad , \quad e_w \equiv Tds/dT \quad , \quad (174)$$

$$c_w^* - \tilde{c}_w = -(\tilde{P} - P^*)d(l/g)/dT \quad , \quad \tilde{c}_w \equiv Td\tilde{s}/dT \quad . \quad (175)$$

Zazwyczaj w analogicznej sytuacji e_w traktuje się tak jak równowagowe ciepło właściwe (najczęściej przy stałym ciśnieniu) i na tej podstawie z równania (19b) otrzymuje się równanie przewodnictwa temperatury. Jednak ściśle biorąc, w naszej sytuacji, e_w jest tak samo nierównowagową wielkością jak c_w^* . Ponadto, jak to stwierdzono w rozdziale I, równanie transportu entropii, do którego jest stosowane, nie uwzględnia wszystkich jej źródeł. Można by to uznać za zaletę jeśli zauważyć, że im mniej źródeł nieodwracalnych zmian entropii, tym bardziej własności odpowiedniego współczynnika e_w , \tilde{c}_w zbliżają się do własności wymaganych przez równowagową definicję ciepła właściwego. Z tego punktu widzenia \tilde{c}_w jest lepsze od e_w , gdyż jedynym źródłem nierównowagowych zmian \mathcal{Y} (przy stałym ciśnieniu) jest w (19a) gradient temperatury.

Zauważmy ponadto, że z wyżej przeprowadzonych rozważań wynikało by $d(l/g)dT \rightarrow x$, przynajmniej dla niektórych obszarów ośrodka. Separacja modów (pominięcie ostatniego wyrazu w (167)) wymaga tu pominięcia bezpośredniego wpływu modu termicznego (zmian temperatury) na gęstość (objętość właściwą). Tak więc w zakresie omawianego przybliżenia związki (174),(175) nie mają uzasadnienia (nie mogą być wyznaczone). Wiadomo jednak, że efekt rozszerzalności ośrodka istnieje. Może być on uwzględniony, jednak w tym przybliżeniu jako wtórny, przez wprowadzenie odpowiedniego współczynnika rozszerzalności. Możliwość zastosowania takiego współczynnika, oraz wyrażenie c_w^* przez wielkości równowagowe lub określone w warunkach naśladujące równowagowe, wiąże się z założeniem, że istnieje taka skala czasu, w której zmiany tych parametrów są quasistatyczne (zblizone do zmian równowagowych).

W skali czasu T_0 mamy $\langle P \rangle = 0 + o(q^2)$, to znaczy $\langle P \rangle = P_n + o(q^2)$ jest quasistatyczne, jak i pozostałe $\langle P \rangle = \langle P^* \rangle + o(\alpha) = \langle \mathcal{P} \rangle$, przy czym dla ośrodka klasycznie lepkiego $\langle P \rangle = \langle P^* \rangle + o(\alpha^2 q) = \langle \mathcal{P} \rangle$, co wynika z dalszych rozważań. Zakładamy, że w ośrodku występuje wolnozmienna w skali czasu T_0 składowa temperatury, którą można utożsamić z, abstrakcyjnie określoną, średnią temperaturą $T_w(\mathbf{x}, t) \equiv \langle T(\mathbf{x}, t) \rangle_{T_0}$. Założenie to sprawdza się a posteriori i wynika z własności operatora dyfuzji.

Założmy mianowicie, że równanie transportu entropii można przekształcić w następujące

$$\partial_t T - \chi_T \Delta T = Z[Q, T] \quad (176)$$

Gdzie: $Z[\cdot; \cdot]$ - ogólne oznaczenie źródła i pozostałych wyrazów; $\chi_T \equiv \chi' c_w$ - współczynnik przewodzenia temperatury; c_w - ciepło właściwe. W szczególności $Z = Q' c_w + \alpha(q, \alpha)$, gdzie $\alpha(q, \alpha)$ wyrazy rzędu wyższego (jednak niekoniecznie niż $Q' c_w$), zależne od zmiennych akustycznych i temperatury. Okazuje się, że w rozwiązaniu (także perturbacyjnym jeśli $-Z$ zależy nieliniowo lub quasilineowo od T) tego równania wyodrębnić można dwie składowe. Wolnozmienną, której zmiany w skali czasu T_0 (dla zaburzenia akustycznego okresowego o okresie T_0) zdeterminowane są przez $\langle Z \rangle_{T_0}$, to znaczy mogą być opisywane przez uśrednione równanie (175) i przez T_w oraz szybkozmienną o okresie T_0 (2π). Ewolucji składowej szybkozmienniej odpowiada równanie (176) ze źródłem o postaci $Z - \langle Z \rangle_{T_0}$, to znaczy wyznaczonym przez zmienne składowe Fourierowskie Z .

Przy czym wpływ szybkozmiennych składowych Z jest efektywnie, przestrzennie ograniczony i może być zaobserwowany jedynie przez szybkie detektory o rozmiarach mniejszych niż $r_d \equiv \sqrt{\chi_T \cdot 2\pi} = (\sqrt{\chi_T' T_0 / 2\pi}$ w jednst. wym), co w praktyce oznacza rozmiary mikroskopowe. Takie uśredniające działanie operatora dyfuzji (ośrodka) łatwo jest zaobserwować w podstawowym przypadku, rozwiązując (176) dla $Z c_w = Q(x, t) = Q(x) + \sum_p Q_p(x, t) \exp(-int)$. Dla pojedynczych impulsów nie ma tak precyzyjnie wyznaczonego progu czasowego dla określenia wolnozmienniej składowej temperatury. Jednak dla obu rodzajów zaburzeń istnieje efektywna skala czasu, wyznaczona na przykład przez częstotliwość pierwszego "znaczącego pąčka" w widmie zaburzenia. Tak więc w omawianej skali czasu ewolucja uśrednionych parametrów termodynamicznych zbliżona jest do równowagowej, termostatycznej (przynajmniej lokalnie jednak w skali przestrzennej większej niż r_d), na przykład w warunkach stałego ciśnienia. Stąd wtórne zjawisko rozszerzania ośrodka może być opisane przez równowagowo określany izobaryczny współczynnik rozszerzalności termicznej κ_p (dokładniej przez $\kappa_{(P)}$). Teraz w formalnej analogi do (174) lub (175) możemy wyrazić c_w^* przez równowagową wartość ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu $c_p = c_{p_x}$

$$c_w^* = c_p + (P^* - P_R) \kappa_p = c_p \left(1 + (P - 2\mathcal{A}\mathcal{D}) \frac{\kappa_p}{c_p} \right) \quad (177)$$

Stąd

$$c_p^* \equiv \langle c_w^* \rangle = c_p - \langle \mathcal{A}\mathcal{D} \rangle \kappa_p \quad (178)$$

Mozemy też otrzymać $c_p^* = \bar{c}_p - 2\langle \mathcal{A}\Phi \rangle \kappa_p$, $\bar{c}_p = c_p$. Reszty rzędu trzeciego względem małych parametrów pominięto. Tego rzędu, dla ośrodka klasycznie lepkiego jest też wielkość $\langle \mathcal{A}\Phi \rangle$. Należy też pamiętać, że wielkości małe po uśrednieniu nie muszą dawać małych tego samego rzędu po uśrednieniu z innymi wielkościami.

Podobnie formalnej korekty wymagają te czony równań (9)-(12b), które opisują sprzężenie modu akustycznego z termicznym, to znaczy pochodne cząstkowe względem temperatury wielkości, które w tym przybliżeniu od niej nie zależą, powinny być zastąpione współczynnikami wyrażającymi względne zmiany kwazistatycznych wartości średnich. Zastosowanie wartości równowagowych wydaje się być uzasadnione.

Skorygowany zgodnie z powyższymi uwagami rozkład temperatury (9) przyjmuje postać,

$$T(\mathbf{x}, t) = T_{ad}(\mathbf{x}, t) + T_{st}(\mathbf{x}, t) = T_{st} \left(1 + (P - 2\langle \mathcal{A}\Phi \rangle) \frac{\kappa_p}{c_p} \right), \quad (179)$$

T_{ad} - adiabatyczna, szybkozmienna składowa temperatura.

Podstawiając (179) do zmodyfikowanej postaci (11) $TDs^* = c_p^* DT - T\kappa_p D(P - 2\langle \mathcal{A}\Phi \rangle)$ oraz do (173) a następnie uśredniając możemy otrzymać

$$D_0 T_{st} = \chi_T \Delta T_{st} + \frac{1}{c_p^*} Q + o\left(\frac{\kappa_p}{c_p} (x_T + qa)\right) \quad (180)$$

$$D_0 \equiv \partial_t + q\mathbf{v}_{st} \cdot \nabla \quad \mathbf{v}_{st} \equiv \nabla \Phi_{st} = \langle \nabla \Phi \rangle_{T_{st}}$$

Uśredniając równanie (42) lub równanie ciągłości z zastosowaniem równania (34) ((167)) oraz wykorzystując (137) lub (171), mamy

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{st} = -2q(\gamma - 1)\nabla \cdot \mathbf{I} + 2q\langle \mathbf{v} \cdot \mathcal{A}\mathbf{v} \rangle_{T_{st}} \equiv -q(2\gamma - 1)\nabla \cdot \mathbf{I} \quad (181)$$

Z prostego porównania wynikało by $\mathbf{v}_{st} \propto q\mathbf{I}$. Jednak w ośrodku bezstratnym było by co najwyżej $\mathbf{v}_{st} = 0 + \alpha(q^2)$ (przy zerowych warunkach brzegowych). Rozważmy więc ośrodek stratny. Z rozwiązania równania Poissona, które otrzymujemy ze (176) dla tego ośrodka, mamy $\mathbf{v}_{st} = 0 + \alpha(q\alpha)$. Wobec tego wyraz $q\mathbf{v}_{st} \cdot \nabla$ może być pominięty w równaniu przewodnictwa temperatury. Stacjonarny przepływ potencjalny \mathbf{v}_{st} jest składową ogólnego zjawiska "streamingu". Terminem tym określa się ogólny przepływ obserwowany w pobliżu osi propagacji wiązek akustycznych. W wyniku sprzężenia modu potencjalnego z wirowym i kosztem energii początkowo czysto potencjalnego

przepływu rozwija się w płynie (w skali czasu dużo większej od T_0) przepływ wirowy. Prędkość $U_s = v_w + v_{st} = v_w + \alpha(q\alpha)$, $\nabla \cdot v_w = 0$, osiąga w pobliżu osi wiązek akustycznych (prędkość streamingu) wartości wielokrotnie większe od v_{st} . W rozpatrywanym przybliżeniu zjawisko streamingu jako wynik sprzężenia modu potencjalnego z wirowym (w płynie) jest pomijane. Niemniej jednak dla obszarów ośrodka w których występuje, wyraz $qv_w \cdot \nabla T_s$ powinien być dodany do równania przewodnictwa ciepła. Okazuje się, że unoszenie ciepła przez streaming może mieć znacznie mniejszy wpływ na temperaturę obszaru, w którym występuje niż by to wynikało z samej wartości prędkości streamingu. Dotyczy to obszarów zajętych przepływem o zamkniętych liniach prądu (na przykład cysty biologiczne itp.) i wynika z cyrkulacji ciepła na tych liniach.

W pracach [18],[19] przedstawiono numeryczne rozwiązania układu złożonego z równań (125) i (180). W szczególności porównano rozwiązanie (180) dla $Q(x)$ otrzymanego przy założeniu liniowej i nieliniowej propagacji.

Drugi konsekwentny sposób traktowania układu (167)-(169) polega na zadaniu ogólniejszej postaci różnicy $\bar{P} - P^*$ i zachowaniu ostatniego wyrazu w (167). Na przykład, uwzględniając dotychczasowe wyniki można przyjąć że,

$$\bar{P} - P^* = 2\mathcal{A}\Phi + \mathcal{E}(s, g) \quad (182)$$

Przykładową postać \mathcal{E} można ustalić na podstawie rezultatów przedstawionych na przykład w [2] i innych pracach cytowanych w [2]. W najniższym rzędzie \mathcal{E} jest liniową funkcją względem nieodwracalnych - w skali czasu T_0 - zmian entropii s . Jednak już w najniższym rzędzie przybliżenia \mathcal{E} względem s , podstawienie różnicy (182) do (168) stwarza jakościowo odmienną sytuację, w odniesieniu do powyżej omawianej, w opisie zmian entropii w dłuższych skalach czasu. Dopuszczalne może być malenie entropii w pewnych odcinkach czasu i obszarach ośrodka. Ogólnie mówiąc sprzężenie modów poprzez \mathcal{E} znacznie rozszerza zakres możliwych do opisanego zjawisk (na przykład powstawanie dodatnich i ujemnych soczewek termicznych, wzbudzenie fal dźwiękowych przez zaburzenia termiczne) nawet, gdy pominiemy ostatni (nie znany w literaturze), całkowity wyraz w (167). Obecność \mathcal{E} w tym wyrazie może być w pewnych warunkach czynnikiem ograniczającym ustalony "jednokierunkowy" wpływ składnika $2\mathcal{A}\Phi$, tak że wartość tej całki będzie wolniej rosła w czasie lub będzie ona istniała w całym rozważanym okresie czasu. Niemniej jednak wciąż nie wyklucza to sytuacji, w których w pewnych obszarach ośrodka, może ona osiągnąć wartości tak zmieniające jego parametry, że należałoby uwzględnić możliwość przejścia fazowego.

Powyższa dyskusja wskazuje na wyodrębniony charakter przybliżenia akustycznego w ramach przybliżenia potencjalnego. Jedyne w tym przybliżeniu, i pomimo wzbudzenia się modu termicznego, można rozważać okresowe zaburzenia zmiennych akustycznych (o okresowości wyznaczonej przez źródło zaburzenia). Okołodiatybnosc procesu jest dobrze uzasadniona niewielkimi przyrostami średniej temperatury, nawet w dłuższych odcinkach czasu, w stosunku do temperatury początkowej (odpowiednio wysokiej temperatury równowagowej), oraz wartościami $\langle \bar{P} - P^* \rangle = \langle 2\mathcal{A}\Phi \rangle$ ($= 0 + o(q\alpha^2)$), dla ośrodka klasycznie lepkiego), $\langle \bar{P} \rangle = P_R + o(q^2)$. Średni stan ośrodka znajduje się w "pobliżu" stanu równowagowego.

Zasadniczą zaletą otrzymanych przez nas równań jest to, że wskazują na prostsze metody pomiaru lub obliczania wielkości fizycznych ważnych dla opisu zjawisk towarzyszących propagacji dźwięku. Dzięki własności (136), zastosowane metody są wystarczająco ogólne by mogły być zastosowane do innych równań nieliniowej akustyki, na przykład do rów (9) w pracy [21].

DODATEK A

Postać $a(\zeta) = \alpha_1 \zeta$ ($a(\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}) = \alpha_1 \mathbf{e} \cdot \mathbf{K}$) odpowiadająca $a(\omega) = \alpha_1 \omega$ może być wyznaczona w reprezentacji położeniowej. Na podstawie (79) i (121) mamy

$$\alpha_1 \zeta = \alpha_1 \frac{\zeta^2}{\zeta} = \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}}{\zeta} \quad (\text{A1})$$

$$A(\mathbf{x}) = \alpha_1 \hat{F}^{-1} \left[\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \frac{1}{\zeta} \right], \quad \hat{F}^{-1} \left[\frac{1}{\zeta} \right] = \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x}|^2}, \quad \hat{F}^{-1}[\mathbf{K}] = -i \nabla \delta(\mathbf{x}). \quad (\text{A2})$$

Z powyższego wynika, że

$$A(\mathbf{x}) = -\alpha_1 (\nabla \cdot) \delta(\mathbf{x}) \otimes \nabla \delta(\mathbf{x}) \otimes \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x}|^2} = \frac{\alpha_1}{\pi^2} \nabla \cdot \delta(\mathbf{x}) \otimes \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^4}, \quad (\text{A3})$$

$$\mathcal{A}\Phi = \frac{\alpha_1}{\pi^2} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^4} \otimes \Phi(\mathbf{x}, t) \right). \quad (\text{A4})$$

Zwracamy uwagę, że identyczny wynik otrzymujemy stosując "zwykłą" transformację Fouriera do rozwinięcia wynikającego z (79),(90),(91)

$$\alpha_{1\xi} = \alpha_1 \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}}{K} + o(\alpha_1^2) = \alpha_1 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{k} + o(\alpha_1^2) = \alpha_1 k + o(\alpha_1^2), \quad \varphi \propto \alpha_1.$$

We współrzędnych cylindrycznych i dla zaburzeń osiowo symetrycznych,

$$A\Phi = \alpha_1 \frac{1}{\pi} \nabla \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{H}(z - \xi, r, \rho) \Phi(\rho, \xi, t) d\rho^2 d\xi, \quad (A5)$$

gdzie \mathbf{H} jest jądrem wektorowym

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H^z \\ H^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z - \xi) \left((z - \xi)^2 + r^2 + \rho^2 \right) \\ r \left((z - \xi)^2 + r^2 - \rho^2 \right) \end{bmatrix} \frac{1}{\left(\left((z - \xi)^2 + r^2 + \rho^2 \right)^2 - 4r^2 \rho^2 \right)^{1/2}}. \quad (A6)$$

Dla zaburzeń jednowymiarowych $\Phi(z, t)$ (A5) redukuje się do

$$\mathcal{A}\Phi = -\alpha_1 \frac{1}{\pi} \partial_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\xi, t)}{\xi - z} d\xi = -\alpha_1 \partial_z \hat{H}[\Phi], \quad (A7)$$

gdzie \hat{H} jest transformacją Hilberta. Powyższe wzory sugerują, że całkową operację splotu z jądrem $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^4$ można uważać za trójwymiarowe uogólnienie transformaty Hilberta.

Po podstawieniu (A7) do jednowymiarowego, liniowego równania propagacji i założeniu $\Phi \sim \exp(-i(\omega t - K_z z))$ prowadzi do jednowymiarowego odpowiednika równania dyspersyjnego

$$K_z^2 - \omega^2 - i2\omega\alpha_1 K_z \operatorname{sgn}(k_z) = 0, \quad K_z^2 = (\operatorname{sgn}(k_z) K_z)^2, \quad (A8)$$

funkcja $\operatorname{sgn}(k_z)$ jest tu odpowiednikiem wektora jednostkowego \mathbf{e}_z .

DODATEK B

W rozdziale IV opisaliśmy przejście do układu zmiennych z czasem retardowanym - wzory (111), ..., (116). W układzie z wyróżnionym kierunkiem propagacji (z wyróżnioną symetrią) transformacja ta pozwala na kompensację, występujących w oryginalnym układzie zmiennych (\mathbf{x}, t) , szybkozmiennych składników zaburzenia. Dzięki temu możliwe jest zastosowanie niektórych przybliżeń asymptotycznych (przyosiowe, paraboliczne). Wiadomo że, równanie KZK [...] jest tego typu opisem nieliniowej propagacji (otrzymuje się je po zastosowaniu (111), ..., (115) do (50) lub (125)). Transformacja ta zastosowana w rachunkach numerycznych może znacząco skrócić czas obliczeń. Ponadto, wiele ważnych zcharakteryzowań zaburzenia (na przykład natężenie) i związków między wielkościami opisującymi zaburzenie uzyskuje prostszą postać w zmiennych z czasem

retardowanym. Dlatego w tych zmiennych dokonuje się wielu estymacji wielkości ważnych dla eksperymentu.

Ponieważ $\langle \nabla \cdot (P \mathbf{v}) \rangle = \nabla \cdot \langle P \mathbf{v} \rangle$, to w zmiennych z czasem retardowanym,

$$\nabla \cdot \mathbf{I} + 2 \langle P \mathcal{A} P \rangle_{\omega} = 0 + o(q(q + \alpha)) \quad (\text{B1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + 2 \langle P \mathcal{A} P \rangle_s = 0 + o(q(q + \alpha)), \quad (\text{B2})$$

gdzie

$$\mathbf{I} = \sum_{n=1}^N \mathbf{I}_n = \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} I_n^z \\ I_n^{\perp} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |C_n|^2 + \frac{C_n^* \partial_z C_n - c c}{i2n} \\ \frac{C_n^* \nabla_{\perp} C_n - c c}{i2n} \end{bmatrix}, \quad (\text{B3})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} P \begin{bmatrix} P - \partial_z \Phi \\ \nabla_{\perp} \Phi \end{bmatrix} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}^*(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{P}^2 + \frac{\hat{P}^* \partial_z \hat{P} - c c}{i2\omega} \\ \frac{\hat{P}^* \nabla_{\perp} \hat{P} - c c}{i2\omega} \end{bmatrix} d\omega. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

Symbol \perp oznacza składowe prostopadłe do z . Transformacja współrzędnych przestrzennych (111) jest ortogonalna (choć trywialna) i $|\partial\tau/\partial t| = 1$. Dlatego $\nabla \cdot \mathbf{I} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{I} = \nabla \cdot \mathbf{I}$ i z równań (B1), (B2), wartość oczekiwana (średnia) operatora absorpcji nie zmienia się $\langle P \mathcal{A} P \rangle = \langle P \mathcal{A} P \rangle$. Równania transformacji (111), ..., (116) prowadzą do następujących związków między widmami Fouriera zaburzenia w zwykłym układzie współrzędnych $\hat{P}(\mathbf{x}, \omega)$ i w układzie z czasem retardowanym $\hat{P}(\mathbf{x}, \omega)$ ($C_n(\mathbf{x}), \bar{C}_n(\mathbf{x})$),

$$\hat{P}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{P}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega z}, \quad C_n(\mathbf{x}) = \bar{C}_n(\mathbf{x}) e^{in z}, \quad |\hat{P}| = |\hat{P}|, \quad |C_n| = |\bar{C}_n| \quad (\text{B5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) &= \nabla \Phi(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{v}_{sr} \delta(\omega) + \nabla \frac{\hat{P}}{i\omega} \\ &= \mathbf{v}_{sr} \delta(\omega) + \left(\nabla \frac{\hat{P}}{i\omega} + \mathbf{e}_z \hat{P} \right) e^{i\omega z} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega z}, \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}) = \nabla \frac{C_n(\mathbf{x})}{in} = \left(\nabla \frac{\bar{C}_n}{in} + \mathbf{e}_z \bar{C}_n \right) e^{in z} = \mathbf{v}_n(\mathbf{x}) e^{in z}. \quad (\text{B7})$$

$\delta(\omega)$ jest funkcją delta Diraca a $\mathbf{v}_{st} = \nabla \Phi_{st}(\mathbf{x})$ stałym w czasie polem przepływu. Podstawiając (B5) do (148) i (149), uwzględniając (B6) i (B7) otrzymujemy (B3), (B4) i na odwrót. Dlatego $\mathbf{I} = \mathbf{I}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}$. Zauważmy że, postać wartości średniej $\langle \cdot \rangle$ operatora absorpcji nie ulega zmianie.

W przybliżeniu parabolicznym równanie (125) przekształca się w zmodyfikowane równanie KZK, po obustronnym obliczeniu ∂_{τ} . W tym przypadku wyrazy $o(\cdot)$ nie występują.

Dla $\mathcal{A} = -\alpha_2 \Delta$ ($\mathcal{A} \cong -\alpha_2 \partial_{\tau\tau}$) otrzymujemy KZK. Z-owa składowa widma $I_n^z = |\bar{C}_n|^2 / 2$, w przybliżeniu parabolicznym. Ogólnie, związek między I_n i $|\bar{C}_n|^2$ jest dany przez

$$I_n = |\mathbf{I}_n| = \frac{|\bar{C}_n|^2}{2} \left(\left(1 + \frac{\partial_z \Psi_n}{n} \right)^2 + \left(\frac{\nabla_{\perp} \Psi_n}{n} \right)^2 \right)^{1/2} = \left((I_n^z)^2 + (I_n^{\perp})^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{B8})$$

gdzie $\bar{C}_n = |\bar{C}_n| \exp(i\bar{\Psi}_n)$. W przybliżeniu wolnozmiennnej fazy (w pobliżu osi propagacji),

$$I_n \approx I_n^z \cong |\bar{C}_n|^2 / 2 \quad (\text{B9})$$

DODATEK C

W ośrodku klasycznie lepkiem równania energii kinetycznej e_k i wewnętrznej u , jednostki masy ośrodka, z uwzględnieniem wirowości (przy oznaczeniach i założeniach odnośnie ciśnienia jak w rozdziałach I, II, III), mają postać

$$qg \left(D e_k - P^* D \left(\frac{1}{g} \right) \right) = -q \nabla \cdot (\mathbf{v} \bar{P} - \eta_s \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}) - 2q \alpha_2 (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 - q \eta_s (\nabla \times \mathbf{v})^2, \quad (\text{C1})$$

$$g \left(D u + P^* D \left(\frac{1}{g} \right) \right) = \nabla \cdot (\chi \nabla T) + 2q \alpha_2 (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + q \eta_s (\nabla \times \mathbf{v})^2 - 4q \eta_s I_2, \quad (\text{C2})$$

Sumując C1 i C2, otrzymujemy

$$gD(qe_k + u) = -q \nabla \cdot (\mathbf{v} \bar{P} - \eta_s \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\chi \nabla T) - 4q \eta_s I_2. \quad (\text{C3})$$

Przy czym,

$$gD(qe_k + u) = \partial_t \mathcal{E} + q \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathcal{E}), \quad \mathcal{E} \equiv g(qe_k + u)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}), \quad I_2 = \sum_{j \neq k} v_{j,j} v_{k,k} - v_{j,k} v_{k,j}, \quad v_{j,k} \equiv \frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \quad (\text{C4})$$

W przybliżeniu potencjalnym,

$$I_2 = \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\mathbf{v} \Phi_a - \frac{1}{2} \nabla v^2 \right) + o(q + \alpha) = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\partial_i \mathbf{I} + \nabla \mathcal{E}_a) + o(q + \alpha), \quad C5$$

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{2} (v^2 + P^2) + o(q + \alpha) = \mathcal{E}_a^* .$$

Ponieważ $\partial_i \mathcal{E}_a + \nabla \cdot \mathbf{I} = 0 + o(\alpha)$, to

$$I_2 = -\frac{1}{2} \square \mathcal{E}_a + o(q + \alpha) . \quad C6$$

DODATEK D

Wykorzystując wzory (26) i (28) równanie (167) można przepisać w postaci,

$$\partial_i \Phi + h = 0 \quad D1$$

$$h = qe_k + \int_{s_k}^s \frac{P^*(g)}{g^2} dg + \frac{P^*}{g} - \frac{P_R}{g_R} + \frac{(P - P^*)}{g} - \int_0^t (P - P^*) \square \frac{1}{g} dt \quad D2$$

$$= qe_k + \int_{s_k}^{s^*} \frac{1}{g(P^*)} dP^* + \int_0^t \frac{1}{g} \square (P - P^*) dt = qe_k + w - w_R - \int_{s_k}^s T d\bar{s} = qe_k + \int_0^t \frac{1}{g} \square P dt . \quad D3$$

(D1 z h o postaci za ostatnią równością w D3 jest uogólnieniem równania podanego przez Poissona w 1808 roku [23])

Działając operatorem D na równanie D1 otrzymujemy

$$D\partial_i \Phi + qDe_k + \frac{DP}{g} = 0 . \quad D4$$

Po podstawieniu D1 do D4 otrzymujemy tożsamość

$$gDh - qgDe_k - DP = 0 . \quad D5$$

Jednak zastępując drugi wyraz w D5 prawą stroną równania energii kinetycznej (51), mamy

$$gD \left(h - \frac{P}{g} \right) = -q\nabla \cdot (\mathbf{v}\bar{P}) . \quad D6$$

Wykorzystując pierwszy z wzorów (26) lub wzór (29), otrzymujemy

$$gD \left(qe_k + u - \int_{s_k}^s T d\bar{s} \right) = -q\nabla \cdot (\mathbf{v}\bar{P}),$$

to znaczy równania (54),... (56),

$$gDe = -q\nabla \cdot (\mathbf{v}\bar{P}) + \chi \Delta T - \left(\text{niezmiennik } 4q\eta_s I_2 - \text{dla osrodka klasycznie lebkiego, równanie 19a} \right), \quad D7$$

które możemy zapisać także w następującej postaci

$$\partial_t(gh) + q\nabla \cdot (\mathbf{v}gh) = \partial_t \bar{P}. \quad \text{D8}$$

Założmy

$$D\partial_t \Phi = -\frac{\partial_t \bar{P}}{g}, \quad \left(D\partial_t \Phi = \partial_t \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2} v^2 \right) \right). \quad \text{D9}$$

Z D9 mamy,

$$\partial_t(g\partial_t \Phi) + q\nabla \cdot (\mathbf{v}g\partial_t \Phi) = -\partial_t \bar{P}. \quad \text{D10}$$

Jeśli przyjmiemy D1 to wobec D8 założenie (równanie) D9 jest prawdziwe.

Korzystając z D9 w D4 otrzymujemy ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)

$$D\mathbf{v} = -\frac{\nabla \bar{P}}{g}. \quad \text{D11}$$

Tak więc zakładając równania zachowania otrzymujemy równanie ruchu i odwrotnie

LITERATURA

- [1] L.D. ROZENBERG, Moszcznyje ultrazwukowyje polja, <Nauka> Moskwa 1968.
- [2] S. MAKAROV, M. OCHMAN, Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, Part I, ACUSTICA, Vol. 82, 1996
- [3] J.F. CLARKE, M. McCHESNEY, The dynamics of real gases, LONDON, BUTTERWORTHS, 1964 (<Mir> Moskwa 1967)
- [4] L.K. ZAREMBO, W.A. KRASILNIKOW, Wwiedienije w nieliniejnuju akustiku, <Nauka>, Moskwa, 1966
- [5] N.E. KOCZIN, I.A. KIBEL, N.W. ROZE, Teoreticzeskaja gidromiechanika, O.G.I.Z., Leningrad, Moskwa, 1948 (rozdział IV)
- [6] S.I. AANONSEN, T. BARKVE, J.N. TJØTTA, S. TJØTTA, Distortion and harmonic generation in the near field of a finite amplitude sound beam, J. Acoust. Soc. Am., 75, 749-768, 1984
- [7] W.N. KUZNIETZOV, Urawnienija nieliniejnoj akustiki, Akusticzeskij Żurnal, tom XVI, 1977
- [8] E.A. ZABOLOTSKAYA, R.V. KHOKHLOV, Qasi-plane waves in nonlinear acoustics of bounded beams, Sov. Phys. Acoust., 15, 35-40, (1969)
- [9] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, Fluid Mechanics, Pergamon, Oxford, 1963

- [10] S.ZAHORSKI, *Mechanika przepływów cieczy lepkosprężystych*, PWN, Warszawa 1978
- [11] G.A.KORN, T.M.KORN, *Mathematical handbook for scientists and engineers*, Mc-Graw-Hill, New York, 1961
- [12] H.BREMERMAN, *Distributions, complex variables and Fourier transforms*, Addison-Wesley, Reading,MA, (rozdz.9)
- [13] A.H.ZEMENIAN, *Generalized integral transformations*, Wiley, New York, 1968
- [14] F.W.BYRON, R.W.FULLER, *Mathematics of classical and quantum physics*, Addison-Wesley, Reading, MA
- [15] L.D.LANDAUI, E.M.LIFSHITZ, *Quantum mechanics nonrelativistics theory*, Nauka, Moskwa, 1974
- [16] J.WÓJCIK, Conservation of energy and absorption in acoustic fields for linear and nonlinear propagation, *J.Acoust Soc. Am.* 104(5), November 1998, pp 2654-2663
- [17] P.J.WESTERVELT, Self-scattering of high intensity sound, in *Proceedings of the 3rd International Congress on Acoustics, Stuttgart, 1959* (Elsevier, Amsterdam 1961), Vol.I.pp 316-321
- [18] L.FILIPCZYŃSKI, T.KUJAWSKA, R.TYMKIEWICZ, J.WÓJCIK, Nonlinear and linear propagation of diagnostic ultrasound pulses, *Ultrasound in Med. & Biol.* Vol.25,No 2, 1999, Elsevier USA
- [19] J.WÓJCIK, L.FILIPCZYŃSKI, T.KUJAWSKA, Temperature elevations computed for three-layer and four-layer obstetrical tissue model in nonlinear and linear ultrasonic propagation cases, *Ultrasound in Med. & Biol.* Vol.25,No 2, 1999, Elsevier USA
- [20] L.FILIPCZYŃSKI, M.PIECHOCKI, "Estimation of the temperature increase in the focus of lithotripter for the case of high-rate administration", *Ultrasound in Med. & Biol.* Vol.16, pp.149-156 1990, Elsevier USA
- [21] J.N.TJOTTA,S.TJOTTA," Finite amplitude ultrasound beams", *IEEE Ultrasonic Symposium*, pp 709-714,(1994)
- [22]W.L.NYBORG, "Heat generation by ultrasound in a relaxing medium", *J.Acoust.Soc.Am.* 70 pp 310-312, (1981)
- [23]R.T.BEYER, "Nonlinear acoustics in fluids",pp 23, Copyright 1984 by Van Nostrand Reinhold Company Inc.

SPIS TREŚCI

Streszczenie.....	3
WSTĘP.....	5
I. RÓWNANIA ODSTAWOWE.....	8
II. CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RUCHU.....	16
III. TRANSPORT ENERGII W OPISIE POTENCJALNYM.....	22
IV. OPERATOR ABSORPCJI I ZWIĄZKI DYSPERSYJNE.....	25
V. GLOBALNE W CZASIE RÓWNANIA ZACHOWANIA ENERGII W PRZYPADKU LINIOWYM I NIELINIOWYM.....	39
VI. FAKTORYZACJA.....	42
VII. FUNKCJE ABSORPCJI.....	44
VIII. DYSKUSJA I WNIOSKI.....	45
DODATEK A.....	55
DODATEK B.....	56
DODATEK C.....	58
DODATEK D.....	59
LITERATURA.....	60
SPIS SYMBOLI.....	63

SYMBOLE I MIEJSCA ICH DEFINICJI

D	} Strona 8	s_R	} Strona 11	$\mathcal{L}[\Phi]$	} Strona 21	\mathcal{A}^x	} Strona 31
g		T		β		$A(x)$	
q		I_1, I_2		e_x	} Strona 22	$QDsp[\cdot]$	} Strona 37
v		s_o		e		$\dot{P}(K, \omega)$	
P^*		P_R		\mathcal{E}	} Strona 23	\mathcal{E}_a	} Strona 40
γ		T_R		J		Φ_{st}	
Φ		} Strona 12		Q	\tilde{W}	} Strona 41	
\mathcal{A}_v				u	E_x		$\langle \cdot \rangle_{z, s}$
ω_o		} Strona 14		s	} Strona 24	\mathcal{E}_a	} Strona 43
T_o				\mathfrak{I}		I	
f_o	κ_p		} Strona 26	$C_n(x)$			
P_o	Q_x			$\mathcal{A}^{x, t}$	} Strona 44		
ρ_R	v^2		$A(x, t)$	} Strona 45			
c_o	} Strona 15		$a(\omega)$		$Dsp(\cdot)$	a_{of}^I	
$\eta_1, \eta_3, \mathcal{X}$			ω	K	a_{of}^E	} Strona 46	
α_2	α_x		$a^{K, \omega}$	a_{of}^E	W		
c_p, c_v	} Strona 16		\tilde{w}	} Strona 27	$Q(x)$	} Strona 48	
$o(q)$			w_R		ζ		$G_a(x)$
α_i	} Strona 18	w	} Strona 28	I'	} Strona 50		
\mathcal{A}_x		u_R		K, k		E'	
η_x	} Strona 10	L_γ	} Strona 30	c'_*			
Π_{kl}		L_1		\mathcal{A}^I	e_*, \tilde{e}_*	} Strona 54	
\mathcal{P}	} Strona 20	L_A	} Strona 31	\mathcal{E}			
S		\mathcal{A}		G	$A(t)$		
σ_{kl}	P	$c^2[\Phi]$					
\tilde{P}							
\mathcal{A}_{L_A}							