

Nguyen Huu Viem

SPRZEŻENIA TERMOMECHANICZNE  
W PROCESACH DUŻYCH ODKSZTAŁCENÍ  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH METALI

Praca habilitacyjna

10/1999

W A R S Z A W A 1 9 9 9

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 sierpnia 1999 r.

recenzent - Doc dr hab. Ryszard Pęcherski

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN  
BIBLIOTEKA  
02-106 Warszawa, Pawińskiego 5B  
Tel. 22-626-74-10



56527



Praca habilitacyjna

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark. wyd. 5,8 Ark. druk. 7,25

Oddano do drukarni we wrześniu 1999r.

---

**ATOS** Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

<http://rcin.org.pl>

## SPRĘŻENIA TERMOMECHANICZNE W PROCESACH DUŻYCH ODKSZTAŁCEN SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH METALI

### Streszczenie

Tematyka pracy dotyczy problemów sprężeń termomechanicznych w sprężysto-plastycznych deformacjach metali. W tym celu rozwinięto termomechaniczny model ciała metalicznego sprężysto-plastycznego w zakresie skończonych deformacji, w warunkach dużych ciśnień, który zastosowano w wybranych zagadnieniach dynamicznych.

Duże ciśnienie pociąga ze sobą następujące dodatkowe efekty. Po pierwsze, nie tylko plastyczne odkształcenia są skończone lecz również i sprężyste. Uwzględniono przy tym typowe zachowanie metali: sprężyste odkształcenia postaciowe pozostają małe dla dowolnych warunków obciążenia, podczas gdy zmiany dylatacji mogą być znaczne. Po drugie, właściwości materiałów zależą od ciśnienia, co zwiększa trudności przy doświadczalnym wyznaczaniu ich parametrów. Poza tym, duże ciśnienie może powodować zmiany strukturalne materiałów. Takiego rodzaju procesy są coraz częściej spotykane w obróbce metali: formowanie materiału przy pomocy wybuchu, tłoczeniu metali itp.

Opis zachowania się materiału w powyżej opisanych warunkach rozwinięto, wykorzystując metodykę Mandela i przy przyjęciu logarytmicznej miary odkształcenia sprężystego, która pozwala w sposób prosty wydzielić część postaciową odkształcenia sprężystego i w konsekwencji w dalszych rozważaniach pomijać człony wyższego rzędu. Ujęto w ten sposób hydrodynamiczną teorię metali (ważną w zakresie wysokich ciśnień) i teorię plastyczności w jednolite ramy teoretyczne.

W drugiej części pracy, wyprowadzone równania konstytutywne zostały zastosowane w wybranych zagadnieniach dynamicznych. Przedstawiono badania ruchu nieciągłości drugiego rzędu (fal przyspieszenia) w nieskończonej przestrzeni. Znalaziono wartości główne tensora akustycznego. Przeprowadzono analizę sprzężonych plastycznych fal prostych w cienkościennej rurze. Pokazano wpływ tensora spinu plastycznego na trajektorię naprężeń i prędkości fal wolnych prostych. Następnie przedstawiono rezultaty testów na proste ścinanie blach metalowych w

szerokim zakresie obciążenia. Sformułowano zagadnienie początkowo brzegowe dla warunków identycznych jak w doświadczeniu, uwzględniając duże deformacje. Dla przypadku liniowego wzmocnienia kinematycznego znaleziono rozwiązanie analityczne. Przeprowadzono analizę numeryczną metodą elementów skończonych dla wzmocnienia izotropowo-kinematycznego i porównano wyniki z danymi doświadczalnymi.

#### Podziękowania

Praca powstała w czasie mojego pobytu w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN, w zespole Profesora W.K. Nowackiego i Profesora B. Ranieckiego.

Praca została zrealizowana w ramach projektu badawczego nr 7 T07A 007 13, sfinansowanego przez Komitet Badań Naukowych. Obliczenia numeryczne wykonano na superserwerze CS6400 Politechniki Warszawskiej.

Wymienionym osobom i instytucjom pragnę złożyć serdeczne podziękowania.

Nguyen Huu Viem



# Spis treści

Wstęp	10
<b>1 Podstawowe pojęcia teorii skończonych deformacji sprężysto-plastycznych</b>	<b>12</b>
1.1 Kinematyka	13
1.2 Termodynamika	16
1.3 Miary odkształcenia i zmienne skoniugowane z nimi poprzez moc odkształcenia	17
1.4 Opis Mandela	19
<b>2 Równania konstytutywne dla metalicznych ciał sprężysto-plastycznych</b>	<b>20</b>
2.1 Logarytmiczna miara odkształcenia sprężystego jako parametr stanu	20
2.2 Równania konstytutywne dla metalicznych ciał sprężysto-plastycznych	24
2.2.1 Przypadek ciał izotropowych	25
1. Prędkościowe równanie stanu w opisie Eulera	25
2. Prawo płynięcia plastycznego	27
3. Równanie dla temperatury. Adiabatyczne prawa płynięcia	31
4. Ciało sprężysto-plastyczne z mikropęknięciami i mikropustkami	33
2.2.2 Przypadek anizotropii indukowanej odkształceniami plastycznymi	40
1. Założenia i postać energii swobodnej	40
2. Prędkościowe równania konstytutywne	42
3. Izotermiczne i adiabatyczne prawa płynięcia	46
4. Tensor spinu plastycznego	50
<b>3 Wybrane zagadnienia dynamiczne</b>	<b>64</b>
3.1 Propagacja fal przyspieszenia. Wartości główne	64
3.2 Sprzężone plastyczne fale proste w cienkościennej rurze	68
3.2.1 Wstęp	68
3.2.2 Kinematyka złożonego obciążenia cienkościennej rury	69

3.2.3	Podstawowe równania zagadnienia . . . . .	70
3.2.4	Szczególne przypadki . . . . .	76
3.2.5	Fale proste . . . . .	77
3.2.6	Przykład numeryczny . . . . .	79
3.3	Proste ścinanie blach metalowych . . . . .	81
3.3.1	Quasi-statyczne i dynamiczne ścinanie blach metalowych . . . . .	82
3.3.2	Badania doświadczalne . . . . .	83
3.3.3	Quasi-statyczne testy na maszynie wytrzymałościowej . . . . .	85
3.3.4	Testy dynamiczne w standardowym układzie prętów Hopkinsona . . . . .	86
3.3.5	Bezpośrednie uderzenie . . . . .	88
3.3.6	Analiza teoretyczna procesu prostego ścinania . . . . .	92
3.3.7	Symulacja numeryczna . . . . .	96
3.3.8	Wnioski . . . . .	101
	<b>Wnioski</b> . . . . .	<b>103</b>
A	<b>Załączniki</b> . . . . .	<b>104</b>
A.1	. . . . .	104
A.2	. . . . .	105
A.3	. . . . .	106
	<b>Literatura</b> . . . . .	<b>107</b>

## Przyjęte oznaczenia

Literami wytłuszczzonymi oznaczono tensory. Zastosowano konwencję sumacyjną Einsteina i następujące oznaczenia, z odpowiednim rozszerzeniem na tensory innych walencji:

$$\mathbf{AB} \Leftrightarrow A_{ij}B_j \quad \text{lub} \quad A_{ijkl}B_{kl}$$

$$\text{tr} \mathbf{A} \Leftrightarrow A_{kk}, \quad \text{tr}(\mathbf{AB}) \Leftrightarrow A_{ij}B_{ji}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \Leftrightarrow A_i B_i \quad \text{lub} \quad A_{ij}B_{ij}$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \Leftrightarrow A_i B_j \quad \text{lub} \quad A_{ij}B_{kl}$$

$m_1 \times m_2$  iloczyn wektorowy dwóch wektorów

$\mathbf{1}$  tensor jednostkowy

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{1} \quad \text{część dewiatorowa tensora } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} \quad \text{tensor odwrotny}$$

$$\mathbf{A}^T \Leftrightarrow A_{ij}^T = A_{ji} \quad \text{transpozycja}$$

$\dot{\mathbf{A}}$  pochodna materialna tensora  $\mathbf{A}$

$\stackrel{\text{def}}{=} \quad \text{definicja}$

$\wedge \quad \text{koniunkcja}$

$\vee \quad \text{alternatywa}$

oraz

$e_i$	wektory bazy jednostkowej laboratorium
$X$	wektor położenia punktu materialnego w konfiguracji odniesienia
$x$	wektor położenia punktu materialnego w konfiguracji aktualnej
$\xi$	wektor położenia punktu materialnego w konfiguracji odciążonej
$v$	prędkość cząstek materialnych
$\vartheta$	temperatura absolutna
$\varrho_0$	gęstość w konfiguracji odniesienia
$\varrho$	gęstość w konfiguracji aktualnej
$\varrho_*$	gęstość w konfiguracji odciążonej chwilowej
$\sigma$	tensor naprężenia Cauchy'ego
$F$	gradient deformacji
$F^e$	transformacja sprężysta
$F^p$	transformacja plastyczna
$V$	całkowity gradient prędkości
$V^e$	sprężysta część gradientu prędkości
$V^p$	plastyczna część gradientu prędkości
$D$	tensor prędkości deformacji całkowitej
$D^e$	tensor prędkości deformacji sprężystej
$D^p$	tensor prędkości deformacji plastycznej
$D^*$	tensor prędkości deformacji trwałych w konfiguracji odciążonej
$\omega$	tensor prędkości obrotu (tensor spinu)
$\omega^e$	tensor prędkości obrotu sprężystego
$\omega^p$	tensor prędkości obrotu plastycznego
$\omega^*$	tensor prędkości obrotu plastycznego w konfiguracji odciążonej
$U$	prawy całkowity tensor rozciągnięcia
$U^e$	prawy tensor rozciągnięcia sprężystego
$S^e$	lewy tensor rozciągnięcia sprężystego
$R$	całkowity tensor obrotu
$R^e$	tensor obrotu sprężystego
$N_i$	kierunki główne tensora $U^e$
$n_i$	kierunki główne tensora $S^e$
$E$	całkowity tensor odkształcenia Greena
$E^e$	tensor odkształcenia sprężystego Greena
$u$	energia wewnętrzna na jednostkę masy
$s$	entropia na jednostkę masy
$\phi$	energia swobodna na jednostkę masy
$\eta$	entalpia swobodna na jednostkę masy
$\alpha_j$	rodzina parametrów wewnętrznych tensorowych
$\alpha_k$	rodzina parametrów wewnętrznych skalarnych
$\pi_j$	tensorowe siły termodynamiczne skoniugowane z $\alpha_j$
$\pi_k$	skalarnie siły termodynamiczne skoniugowane z $\alpha_k$

$\Xi$	drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa w konfiguracji odciążonej
$\mathbf{q}$	wektor strumienia ciepła
$\dot{W}$	prędkość całkowitej pracy mechanicznej
$\dot{W}^e$	prędkość pracy odkształcenia sprężystego
$\dot{W}^p$	prędkość pracy odkształcenia plastycznego
$\mathbf{T}_{(n)}$	rodzina miar naprężenia skoniugowana z $\mathbf{E}_{(n)}$
$\mathcal{F}$	moc dyssypacji energii mechanicznej
$\beta$	stosunek gęstości w konfiguracji odciążonej i aktualnej
$\tau_y$	granica plastyczności przy ścinaniu
$\sigma_y$	granica plastyczności przy rozciąganiu
$c_v$	ciepło właściwe przy stałej objętości
$\Upsilon$	udział objętościowy pustek



# Wstęp

Celem pracy jest zbadanie wpływu sprzężeń termo-mechanicznych w procesach skończonych sprężysto-plastycznych deformacji metali.

W rozdziale pierwszym przedstawiono w skrócie podstawowe pojęcia teorii skończonych deformacji sprężysto-plastycznych. Ograniczono się do elementów niezbędnych do dalszej dyskusji: kinematyka, termodynamika, miary odkształcenia, zmienne skoniugowane z nimi poprzez moc odkształcenia oraz przedstawiono opis Mandela.

Rozwinięcie opisu metalicznych ciał sprężysto-plastycznych uwzględniającego duże ciśnienie przedstawiono w rozdziale drugim. Przy dużym ciśnieniu, nie tylko odkształcenia plastyczne są duże, lecz również sprężyste odkształcenia objętościowe. Wyróżniono przy tym rolę miary logarytmicznej odkształcenia sprężystego, która jest szczególnie użyteczna w opisie ciał metalicznych. Pozwala ona bowiem w sposób prosty wyodrębnić część dylatacyjną i postaciową odkształcenia sprężystego i w dalszych rozważaniach opuścić człony wyższego rzędu.

Rozważania dla przypadku ciał izotropowych w stanie odniesienia dyskutowano w pracy (Raniecki & Nguyen, 1984). Uogólnienie dla ciał z mikropęknięciami i mikropustkami było przedstawione w pracy (Nguyen & Raniecki, 1998; Nguyen & Raniecki, 1999b). Ciała z anizotropią indukowaną wstępnyimi odkształceniami plastycznymi badano w pracy (Nguyen, 1992a), a równania konstytutywne dla procesu izotermicznego i adiabatycznego w zakresie skończonych deformacji przedstawiono w pracy (Nguyen, 1992b).

Zaproponowano, na podstawie sugestii Hilla i na podstawie analizy procesu prostego ścinania, postać tensora spinu plastycznego. Wyniki te zostały opublikowane w pracy (Nguyen & Raniecki, 1999a).

W rozdziale trzecim zastosowano wspomniane powyżej równania konstytutywne do wybranych zagadnień dynamicznych. Zbadano proces propagacji fal przyspieszenia w nieskończonej przestrzeni trójwymiarowej (Nguyen, 1992b). Przeprowadzono dyskusję wpływu tensora spinu plastycznego na postać tensora akustycznego. Znalaziono analityczne wyrażenie dla prędkości fal przyspieszenia. Zbadano propagację fal prostych w półnieskończonej cienkościennej rurze, obciążonej ciśnieniem i momentem skręcającym na brzegu (Nguyen, 1995a). Na przykładzie numerycznym, pokazano wpływ tensora spinu plastycznego na trajektorię i prędkość adiabatycznych fal wolnych. Przeprowadzono także numeryczną

analizę procesu prostego ścinania blach metalowych (Nowacki & Nguyen, 1995; Nguyen & Nowacki, 1997), (Klepaczko, Nguyen i Nowacki (1999)).

Całość opracowania jest wynikiem wieloletnich studiów autora. Uzyskane wyniki były częściowo opublikowane w cytowanych pracach.

# Rozdział 1

## Podstawowe pojęcia teorii skończonych deformacji sprężysto-plastycznych

W klasycznej teorii plastyczności przyjęto założenie, że składowe odkształcenia sprężystego i plastycznego są małe i całkowite odkształcenie jest równe sumie tych dwóch składowych. W zagadnieniach, w których występuje duże płynięcie plastyczne, zwykle przyjmowano teorię ciał sztywno-plastycznych zakładając, że odkształcenia sprężyste są małe w stosunku do odkształceń plastycznych. Istnieją jednak sytuacje, kiedy obie te składowe są duże, np. płynięcie plastyczne w warunkach wysokich ciśnień podczas formowania materiałów przy pomocy wybuchu. W tych wypadkach wymienione teorie nie mogą być stosowane.

Duże odkształcenia sprężyste w metalach i stopach mają zwykle charakter dylatacyjny. Znaczny wzrost sprężystego odkształcenia postaciowego powoduje płynięcie plastyczne. Istnienie skończonych dylatacji implikuje możliwość powstania znaczących efektów sprzężeń termomechanicznych. Z drugiej strony, płynięcie plastyczne wymaga uwzględnienia nieodwracalności procesów. Wynika stąd, że ogólną teorię skończonych deformacji sprężysto-plastycznych powinno się budować w oparciu o podstawowe prawa termodynamiki.

Wśród prac dotyczących dużych deformacji sprężysto-plastycznych, można wyróżnić dwa podstawowe sposoby matematycznego sformułowania teorii (ze względu na ich ścisły i zwarty charakter oraz ich przydatność w zastosowaniach). Pierwsze sformułowanie było zaproponowane w serii prac Hilla (1968a; 1968b; 1978), Hilla i Rice'a (1973). Drugie, w którym wprowadzono chwilową konfigurację odciążoną, sformułowali Lee (1969) i Mandel (1971). Kleiber i Raniecki (1985) pokazali, że dla materiałów izotropowych te dwa podejścia są równoważne. Przegląd najbardziej znanych teorii skończonych deformacji sprężysto-plastycznych podano w pracy Perzyny (1978).

Teoria plastyczności Mandela zawiera dwa podstawowe elementy. Są to duże odkształcenia sprężyste i plastyczne przy wprowadzeniu konfiguracji chwilowej



odciążonej oraz parametry wzmocnienia, które pozwalają pełniej opisywać zachowanie materiałów. Oba te elementy mogą mieć duże znaczenie w problemach dynamicznych.

W tym rozdziale przedstawiamy podstawowe elementy kinematyki i termodynamiki teorii skończonych deformacji Mandela (1971), ograniczając się do informacji niezbędnych do dalszych rozważań.

Pojęcie chwilowej konfiguracji odciążonej było po raz pierwszy zaproponowane przez Eckarta (1948), a później w pracach Lee i Liu (1967), Lee (1969) i Mandela (1971). Wydaje się, że użycie pojęcia chwilowej konfiguracji odciążonej jest celowe dla opisu skończonych deformacji metali. Pozwala nam ono otrzymać ściśle interpretacje geometryczne miar odkształceń sprężystych i plastycznych. Poza tym jest adekwatne dla opisu termodynamiki metali i ich stopów. Ich właściwości termosprężyste są zwykle mierzone w próbkach, bez zwracania uwagi na to, czy dane próbki były czy też nie były wcześniej poddane plastycznemu płynięciu. Ponadto, nawet w próbkach poddanych poprzednio dużym odkształceniom plastycznym, zaburzenie sieci krystalicznej jest niewielkie w stosunku do właściwości elementów regularnej sieci. Mierzone doświadczalnie właściwości termosprężyste, praktycznie nie zależą od wcześniejszego płynięcia. Budowana teoria, używając konfiguracji chwilowej odciążonej, może bazować na rezultatach tych doświadczeń (zob. Raniecki i Thermann (1978)). Z drugiej strony, jest faktem, że konfiguracja chwilowa odciążona jest zdefiniowana z dokładnością do zwytego obrotu. Aby wprowadzane wielkości miały odpowiednie znaczenia fizyczne, musimy w jakiś sposób ustalić specyficzne orientacje tych konfiguracji.

## 1.1 Kinematyka

Przedstawimy kinematykę skończonej transformacji sprężysto-plastycznej. Rozważymy jednorodny proces odkształcenia sprężysto-plastycznego elementu materialnego  $\mathcal{M}$  o jednostkowej masie. Niech  $(k_0)$  oznacza początkową konfigurację elementu (konfigurację odniesienia) w stanie beznapięciowym o temperaturze  $\vartheta_0$  w chwili  $t_0$ . Pod wpływem przyłożonych sił i zmian temperatury, element w chwili  $t$  przechodzi do konfiguracji aktualnej  $(k)$ , w której tensor naprężenia Cauchy'ego wynosi  $\sigma$ , a temperatura osiąga wartość  $\vartheta$ . Przypuśćmy, że w chwili  $t$  wszystkie siły działające na element zostały nagle zredukowane do zera, a element został jednocześnie sprowadzony do temperatury  $\vartheta_0$  w taki sposób, że temu procesowi nie towarzyszą żadne zmiany wewnętrznej struktury. Otrzymamy wtedy fikcyjną chwilową konfigurację odciążoną  $(k_*)$ , gdzie naprężenia  $\sigma = \mathbf{0}$ . Oznaczmy przez  $\mathbf{X}$ ,  $\xi$ ,  $\mathbf{x}$  wektory położenia, a przez  $\varrho_0$ ,  $\varrho_*$  i  $\varrho$  gęstości elementu  $\mathcal{M}$  w konfiguracjach  $(k_0)$ ,  $(k_*)$  i  $(k)$ . Niech  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^e$  i  $\mathbf{F}^p$  będą odpowiednio, gradientem deformacji oraz transformacją sprężystą i plastyczną, które odwzorowują

$(k_0) \rightarrow (k)$ ,  $(k_*) \rightarrow (k)$  oraz  $(k_0) \rightarrow (k_*)$  (rys.1). Mamy zatem:

$$(1.1.1) \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p.$$

Powyższy związek zastępuje znany liniowy związek w klasycznej teorii plastyczności:

$$(1.1.2) \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p.$$

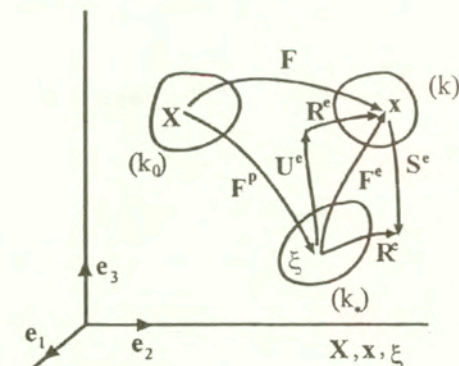
Nieliniowość nie jest jedynym nowym aspektem występującym we wzorze (1.1.1). Występujący w nim iloczyn nie jest komutatywny, co podkreśla fakt, że własności plastyczne elementu zależą od historii obciążenia, a deformacje sprężyste są funkcjami aktualnego naprężenia. Według tego rozkładu, element najpierw przechodzi z konfiguracji odniesienia do konfiguracji odciążonej poprzez  $\mathbf{F}^p$ , a następnie z tej konfiguracji do konfiguracji aktualnej poprzez  $\mathbf{F}^e$ . Zobaczymy później, że w przypadku skończonych deformacji efekty sprężyste i plastyczne są bardziej sprzężone niż we wzorze (1.1.2). Jak wspomniano wcześniej, konfiguracja chwilowa odciążona jest zdefiniowana z dokładnością do dowolnego sztywnego obrotu. Przy pomocy ortogonalnego tensora  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ , dokonując sztywnego obrotu konfiguracji odciążonej, mamy:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{F}^p = \mathbf{F}'^e \mathbf{F}'^p,$$

gdzie:

$$\mathbf{F}'^e = \mathbf{F}^e \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{F}'^p = \mathbf{Q} \mathbf{F}^p.$$

Będzie to już nowa dekompozycja. W celu ujednocznienia rozkładu (1.1.1) przyjmujemy tak jak Mandel (1971; 1974b) rodzinę specyficznych konfiguracji odciążonych izoklinicznych, w których baza wektorów kierunkowych jednostkowych (franc. *repère directeur*) ma stałe kierunki względem bazy związanej z przestrzenią fizyczną (laboratorium).



Rys 1. Deformacje sprężysto-plastyczne



Po zróżniczkowaniu (1.1.1) względem czasu i pomnożeniu obu stron przez  $\mathbf{F}^{-1}$  otrzymamy gradient prędkości:

$$(1.1.3) \quad \mathbf{V} = \text{grad} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^e + \mathbf{V}^p,$$

gdzie:

$$\mathbf{V}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1}, \quad \mathbf{V}^p = \mathbf{F}^e \mathbf{V}^* \mathbf{F}^{e-1}, \quad \mathbf{V}^* = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}.$$

Obliczając część symetryczną i antysymetryczną tych gradientów otrzymamy następujące relacje kinematyczne:

$$(1.1.4) \quad \begin{aligned} 2\mathbf{D} &= \mathbf{V} + \mathbf{V}^T = 2(\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p), & 2\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{V} - \mathbf{V}^T = 2(\boldsymbol{\omega}^e + \boldsymbol{\omega}^p), \\ 2\mathbf{D}^e &= \mathbf{V}^e + \mathbf{V}^{eT}, & 2\boldsymbol{\omega}^e &= \mathbf{V}^e - \mathbf{V}^{eT}, \\ 2\mathbf{D}^p &= \mathbf{V}^p + \mathbf{V}^{pT}, & 2\boldsymbol{\omega}^p &= \mathbf{V}^p - \mathbf{V}^{pT}, \\ 2\mathbf{D}^* &= \mathbf{V}^* + \mathbf{V}^{*T}, & 2\boldsymbol{\omega}^* &= \mathbf{V}^* - \mathbf{V}^{*T}. \end{aligned}$$

$\mathbf{D}$  jest tu tensorem prędkości deformacji. Jest to część symetryczna  $\mathbf{V}$ . Część antysymetryczna  $\boldsymbol{\omega}$  jest materialnym tensorem spinu. Wielkości z indeksem "e" oznaczają część deformacji sprężystej, a z indeksem "p" dotyczą części deformacji plastycznej. Wielkości oznaczone gwiazdką występujące w konfiguracji odciążonej  $\mathbf{D}^*$  i  $\boldsymbol{\omega}^*$  nazywamy odpowiednio tensorem prędkości odkształceń trwałych i tensorem prędkości trwałych obrotów w konfiguracji odciążonej.

Rozkład polarny tensora  $\mathbf{F}^e$  ma postać:

$$(1.1.5) \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{S}^e \mathbf{R}^e,$$

gdzie  $\mathbf{R}^e$  jest ortogonalnym tensorem obrotu,  $\mathbf{U}^e$  i  $\mathbf{S}^e$  są odpowiednio prawym i lewym tensorem rozciągnięcia sprężystego. Tensor  $\mathbf{R}^e$  w (1.1.5) odwzorowuje główne kierunki  $\mathbf{N}_i$  prawego tensora  $\mathbf{U}^e$  w główne kierunki lewego tensora  $\mathbf{S}^e$ , to znaczy:

$$(1.1.6) \quad \mathbf{n}_i = \mathbf{R}^e \mathbf{N}_i, \quad \text{albo} \quad \mathbf{R}^e = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i,$$

gdzie  $\mathbf{n}_i$  są wektorami jednostkowymi wzdłuż głównych kierunków tensora  $\mathbf{S}^e$ . Relacje kinematyczne (1.1.4) możemy napisać w postaci:

$$(1.1.7) \quad \begin{aligned} 2\mathbf{D}^e &= \mathbf{R}^e (\dot{\mathbf{U}}^e \mathbf{U}^{e-1} + \mathbf{U}^{e-1} \dot{\mathbf{U}}^e) \mathbf{R}^{eT}, \\ 2\boldsymbol{\omega}^e &= 2\dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT} + \mathbf{R}^e (\dot{\mathbf{U}}^e \mathbf{U}^{e-1} - \mathbf{U}^{e-1} \dot{\mathbf{U}}^e) \mathbf{R}^{eT}, \\ 2\mathbf{D}^p &= \mathbf{R}^e (\mathbf{U}^e \mathbf{V}^* \mathbf{U}^{e-1} + \mathbf{U}^{e-1} \mathbf{V}^{*T} \mathbf{U}^e) \mathbf{R}^{eT}, \\ 2\boldsymbol{\omega}^p &= \mathbf{R}^e (\mathbf{U}^e \mathbf{V}^* \mathbf{U}^{e-1} - \mathbf{U}^{e-1} \mathbf{V}^{*T} \mathbf{U}^e) \mathbf{R}^{eT}. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu tensora odkształcenia sprężystego Greena

$$(1.1.8) \quad 2\mathbf{E}^e = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e - \mathbf{1},$$

tensor prędkości deformacji sprężystej przyjmuje postać:

$$(1.1.9) \quad \mathbf{D}^e = \mathbf{F}^{e-T} \dot{\mathbf{E}}^e \mathbf{F}^{e-1}.$$

Z zależności (1.1.7) widać, jak skomplikowane są kinematyczne sprzężenia w teorii skończonych deformacji sprężysto-plastycznych.

## 1.2 Termodynamika

W danej chwili właściwości elementu poddanego deformacji plastycznej zależą od historii, a więc są one funkcjonalami  $\mathbf{F}(\tau)$  dla  $-\infty < \tau < t$ . Ponieważ działania na funkcjonalach są bardzo skomplikowane, przyjmujemy założenie o parametrach wzmocnienia. Są to takie zmienne wewnętrzne, których znajomość zastępuje wiedzę o historii obciążenia. Inaczej mówiąc, zakładamy, że stan termodynamiczny elementu opisują następujące parametry:

- tensor Greena  $\mathbf{E}^e$ ,
- temperatura absolutna  $\vartheta$ ,
- rodzina parametrów wewnętrznych (skalarnych lub tensorowych)  $\alpha_j, j=1, \dots, n$ .

Niech  $u$  i  $s$  oznaczają odpowiednio właściwą energię wewnętrzną i właściwą entropię oraz  $\phi = u - \vartheta s$  właściwą energię swobodną. Pierwsze prawo termodynamiki w postaci lokalnej możemy zapisać następująco:

$$(1.2.1) \quad \rho \dot{u} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}) - \text{div} \mathbf{q},$$

gdzie  $\mathbf{q}$  jest wektorem strumienia ciepła. Dla uproszczenia rozważań nie uwzględniamy źródeł ciepła. Drugie prawo termodynamiki zostało sformułowane w postaci nierówności Clausiusa-Duhema:

$$(1.2.2) \quad \frac{1}{\rho} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}) - (\dot{\phi} + s\dot{\vartheta}) - \frac{1}{\rho \vartheta} \mathbf{q} \cdot \text{grad} \vartheta \geq 0.$$

Jako podstawowe parametry stanu możemy również przyjąć  $\vartheta$ ,  $\alpha_j$  i drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa odniesiony do konfiguracji odciążonej (zamiast  $\mathbf{E}^e$ ):

$$(1.2.3) \quad \boldsymbol{\Xi} = \frac{\rho_*}{\rho} \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{e-T}.$$

Prowadzi to do definicji entalpii swobodnej  $\eta$ :

$$(1.2.4) \quad \eta = \phi - \frac{1}{\rho_*} \boldsymbol{\Xi} \cdot \mathbf{E}^e.$$

Z nierówności (1.2.2) można otrzymać następujące związki między wielkościami termosprężystymi:

$$(1.2.5) \quad \mathbf{E}^e = \frac{\partial \eta}{\partial (\boldsymbol{\Xi} / \rho_*)}, \quad -s = \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}$$

$$\text{lub} \quad (1.2.6) \quad \frac{\Xi}{\varrho_*} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}^e}, \quad -s = \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}.$$

Jeśli zakładamy, że wzmocnienie materiału nie wpływa na własności termosprężyste, to energia swobodna i entalpia mają szczególną postać:

$$(1.2.7) \quad \phi(\mathbf{E}^e, \vartheta, \alpha_j) = \phi_1(\mathbf{E}^e, \vartheta) + \phi_2(\vartheta, \alpha_j)$$

$$\text{lub} \quad (1.2.8) \quad \eta((\Xi/\varrho_*), \vartheta, \alpha_j) = \eta_1((\Xi/\varrho_*), \vartheta) + \eta_2(\vartheta, \alpha_j).$$

### 1.3 Miary odkształcenia i zmienne skoniugowane z nimi poprzez moc odkształcenia

W poprzednich punktach, przy badaniu transformacji sprężystej (tzn. przejście z konfiguracji ( $k_*$ ) jako konfiguracji odniesienia, do konfiguracji aktualnej ( $k$ )), użyto tensora odkształcenia Greena (1.1.8) jako miary odkształcenia. Jest to tylko jedna z możliwości. Jak pokażemy później, nie jest to najlepszy wybór w przypadku metali (por. rozdział 2). Natomiast teraz przedstawiamy w skrócie transformację elementu kontinuum z jednej konfiguracji (tzw. początkowej lub odniesienia) do końcowej, czyli aktualnej (por. Hill (1978)). Opis ten jest ogólny i można go stosować do dowolnej transformacji, np. sprężystej, plastycznej lub całkowitej.

Oznaczmy przez  $\mathbf{e}_i$  ortogonalną bazę wektorów jednostkowych związanych z laboratorium. Macierz dowolnego tensora drugiego rzędu  $\mathbf{A}$  w tej bazie będzie oznaczona przez  $A_{ij}$ , to znaczy  $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ . Niech dwie konfiguracje kontinuum będą związane odwzorowaniem  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$  w kartezjańskim układzie współrzędnych przez gradient deformacji  $\mathbf{F}$ . Oznacza to, że  $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ . Ponieważ

$$\det \mathbf{F} = J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} > 0,$$

to możemy zastosować twierdzenie o rozkładzie polarnym:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U},$$

gdzie  $\mathbf{R}$  jest tensorem ortogonalnym, a  $\mathbf{U}$  jest tensorem symetrycznym o wartościach własnych dodatnich, którego wartości i kierunki główne oznaczamy przez  $U_i$  i  $\mathbf{N}_i$ ,  $i=1,2,3$ .

Jako miarę odkształcenia możemy przyjąć sześć dowolnych wielkości, które określają kształt elementu w aktualnej konfiguracji. Oczywiście, nie wszystkie wielkości transformują się według reguł tensorowych. Hill (1978) wyróżnił rodzinę obiektywnych miar odkształcenia:

$$(1.3.1) \quad \mathbf{E} = \sum_{i=1}^3 f(z)_{z=U_i} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i = \mathbf{f}^*(\mathbf{U}).$$

Funkcja  $f(z)$ , zwana funkcją skali, musi być taka, aby miara odkształcenia  $\mathbf{E}$  przyjmowała wartość zerową w konfiguracji odniesienia, czyli  $f(1) = 0$ . W przypadku małych odkształceń wszystkie miary powinny się redukować do klasycznej definicji odkształceń, stąd  $f'(1) = 1$  (por. Hill (1968a)). Warunki te spełnia dowolna funkcja monotoniczna i gładka, na przykład zaproponowana przez Hilla (1968a) rodzina funkcji:

$$(1.3.2) \quad f(z) = \frac{z^{2n} - 1}{2n},$$

gdzie  $n$  może przyjmować dowolną wartość. Wówczas wyrażenie (1.3.1) można napisać jako:

$$(1.3.3) \quad \mathbf{E}_{(n)} = \sum_{i=1}^3 \frac{U_i^{2n} - 1}{2n} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i.$$

W szczególnym przypadku dla  $n = 1$ , otrzymujemy tensor Greena:

$$\mathbf{E}_{(1)} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}),$$

dla  $n = -1$ , mamy tensor odkształcenia Almansi'ego:

$$\mathbf{E}_{(-1)} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{U}^{-2}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T})$$

oraz dla  $n = 1/2$ , mamy "inżynierską miarę" odkształcenia:

$$\mathbf{E}_{(1/2)} = \mathbf{U} - \mathbf{1}.$$

Prędkość pracy mechanicznej na jednostkę masy ma postać

$$(1.3.4) \quad \dot{W} = \frac{1}{\rho} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}) = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D},$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}$  jest tensorem naprężenia Cauchy'ego,  $\mathbf{D}$  jest tensorem prędkości odkształcenia i jest on częścią symetryczną tensora  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  (zob. (1.1.3) – (1.1.9)).

Wraz z rodziną obiektywnych miar odkształcenia  $\mathbf{E}_{(n)}$  (1.3.3), Hill wprowadził rodzinę obiektywnych miar naprężenia skoniugowanych z nią poprzez moc odkształcenia  $\mathbf{T}_{(n)}$  następującym związkiem:

$$(1.3.5) \quad \dot{W} = \frac{1}{\rho} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}) = \operatorname{tr} (\mathbf{T}_{(n)} \dot{\mathbf{E}}_{(n)}) = \mathbf{T}_{(n)} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{(n)}.$$

Można łatwo sprawdzić, że miary naprężenia skoniugowane z miarami odkształcenia Greena, Almansi'ego i "inżynierską" są odpowiednio:

$$\mathbf{T}_{(1)} = \frac{1}{\rho} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T},$$



$$(1.3.6) \quad \mathbf{T}_{(-1)} = \frac{1}{\varrho} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F},$$

$$\mathbf{T}_{(1/2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{T}_{(1)} \mathbf{U} - \mathbf{U} \mathbf{T}_{(1)}).$$

Dla rodziny miar (1.3.3), przy  $n \rightarrow 0$ , mamy miarę logarytmiczną odkształcenia  $\mathbf{E}_{(0)} = \ln \mathbf{U}$ . Miara ta jest szczególnie użyteczna w opisie deformacji ciał metalicznych i zastosujemy ją w dalszych rozdziałach.

## 1.4 Opis Mandela

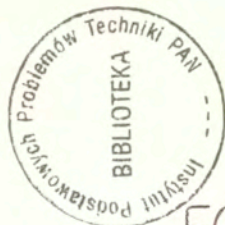
Równania konstytutywne możemy zapisać w dowolnej z trzech konfiguracji:  $(k_0)$ -opis Lagrange'a,  $(k)$ -opis Eulera albo  $(k_*)$ , a potem przekształcić do pozostałych konfiguracji, jeśli zajdzie taka potrzeba. Wybierzmy na początek konfigurację odciążoną izokliniczną  $(k_*)$ , pozwalającą uzyskać prawo fizyczne opisujące własności ciał sprężysto-plastycznych. Jest to w pewnym sensie naturalny wybór, gdyż konfiguracja ta jest konfiguracją odniesienia (bez odkształcenia) dla części sprężystej  $\mathbf{F}^e$  i jest ona "konfiguracją aktualną" dla części plastycznej  $\mathbf{F}^p$ . Wówczas wspomniane prawo fizyczne można rozbić na dwie części, z których pierwsza opisuje własności sprężyste, zaś druga własności plastyczne. Taki opis własności sprężysto-plastycznych będziemy nazywać opisem Mandela (Mandel (1971)). Wygoda w posługiwaniu się izoklinicznymi konfiguracjami polega na tym, że zwykle pochodne czasowe wszystkich wielkości fizycznych mają dobrze określony sens fizyczny. Przy przejściu z jednego do drugiego opisu musimy korzystać ze związków kinematycznych (1.1.7) oraz związków pomiędzy miarami naprężenia, które wynikają z podziału prędkości pracy odkształcenia na część sprężystą  $\dot{W}^e$  i plastyczną  $\dot{W}^p$ :

$$(1.4.1) \quad \dot{W} = \frac{1}{\varrho} \text{tr} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}) = \dot{W}^e + \dot{W}^p,$$

$$\dot{W}^e = \frac{1}{\varrho} \text{tr} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^e),$$

$$\dot{W}^p = \frac{1}{\varrho} \text{tr} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^p).$$

W następnym rozdziale zajmiemy się wyprowadzeniem równań konstytutywnych dla metalicznych ciał sprężysto-plastycznych, przyjmując logarytmiczną miarę odkształcenia sprężystego jako parametr stanu oraz wykorzystując opis Mandela.





## Rozdział 2

# Równania konstytutywne dla metalicznych ciał sprężysto-plastycznych

Rozdział niniejszy będzie poświęcony wyprowadzeniu równań konstytutywnych dla metalicznych ciał sprężysto-plastycznych w zakresie skończonych deformacji. Podstawową cechą metali jest to, że sprężyste odkształcenia postaciowe są małe, natomiast sprężyste odkształcenia dylatacyjne (powodujące odwracalne zmiany objętości) mogą być duże. Metale wykazują także duże plastyczne odkształcenia postaciowe. Podczas plastycznego odkształcenia zmiany objętości są bardzo małe. Chcemy wykazać, że użycie metodyki Mandela, z chwilową konfiguracją odciążoną, i logarytmicznej miary odkształcenia sprężystego jest wyborem optymalnym, który pozwala w najprostszy sposób opisywać zachowanie metali i jednocześnie uwzględnić wyniki doświadczalne w jednolitych ramach teoretycznych. Po transformacji do konfiguracji aktualnej, miara logarytmiczna odkształcenia sprężystego będzie wyeliminowana. Ostateczna postać równań prędkościowych w konfiguracji aktualnej jest niezależna od tej miary i jej prędkości.

### 2.1 Logarytmiczna miara odkształcenia sprężystego jako parametr stanu

Wykorzystując rozkład iloczynowy (1.1.1), Mandel (1971) oraz inni autorzy, np. Halphen (1975), Sidoroff (1982), Dafalias (1988), Aravas (1992), przyjmowali jako jeden z parametrów stanu tensor odkształcenia sprężystego Greena  $\mathbf{E}^e$ . Aby zdefiniować odkształcenie sprężyste, możemy jednak przyjąć dowolną miarę z rodziny wyróżnionej przez Hilla (1.3.3)

$$(2.1.1) \quad \mathbf{E}_{(n)}^e = \sum_{i=1}^3 \frac{(U_i^e)^{2n} - 1}{2n} \mathbf{N}_i^e \otimes \mathbf{N}_i^e,$$

gdzie  $U_i^e, N_i^e$  ( $i=1,2,3$ ) są wartościami i kierunkami głównymi tensora  $U^e$ . Przyjmijmy zamiast miary Greena  $E_{(1)}^e$  miarę logarytmiczną

$$(2.1.2) \quad E_{(0)}^e = \ln U^e.$$

Okazuje się, że zastosowanie tej miary pozwala w prosty sposób wyodrębnić część dylatacyjną i postaciową odkształcenia sprężystego. Jest to szczególnie wygodne w przypadku metali, ponieważ umożliwia uproszczenie podstawowego równania. Ponadto, logarytmiczna miara jest wygodniejsza od miary Greena do zdefiniowania funkcji energii (Rice (1975)). Rozłóżmy ten tensor na część dewiatorową i kulistą

$$(2.1.3) \quad E_{(0)}^e = \bar{E}_{(0)}^e + \frac{1}{3} \text{tr}(E_{(0)}^e) \mathbf{1}.$$

Dewiator  $\bar{E}_{(0)}^e$  opisuje część postaciową, a  $\frac{1}{3} \text{tr}(E_{(0)}^e) \mathbf{1}$  opisuje część dylatacyjną odkształcenia sprężystego. Ze wzorów (1.1.5), (2.1.2) i (2.1.3) mamy (por. Raniecki i Nguyen (1984))

$$\det F^e = \frac{\varrho^*}{\varrho} = U_1^e U_2^e U_3^e \stackrel{\text{def}}{=} \beta,$$

$$(2.1.4) \quad \text{tr} E_{(0)}^e = \text{tr}(\ln U^e) = \ln \beta,$$

$$U^e = \beta^{\frac{1}{3}} \exp \bar{E}_{(0)}^e.$$

W przejściu do konfiguracji aktualnej ze wzorów (1.1.5) i (2.1.2) otrzymujemy

$$(2.1.5) \quad e^e = \ln S^e = R^e E_{(0)}^e R^{eT} = \sum_{i=1}^3 \ln U_i^e n_i^e \otimes n_i^e,$$

gdzie  $n_i^e$  ( $i=1,2,3$ ) są kierunkami głównymi tensora  $S$  i  $\text{tr} e^e = \ln \beta$ . Część dewiatorowa  $\bar{e}^e = e^e - \frac{1}{3}(\text{tr} e^e) \mathbf{1}$  opisuje postaciową zmianę sprężystą elementu  $\mathcal{M}$  w konfiguracji aktualnej.

Przy założeniu, że energia wewnętrzna jest podstawowym niezmiennikiem przy zmianie miar odkształcenia, możemy podobnie jak Hill (por. (1.3.5)), zdefiniować rodzinę miar naprężenia sprężystego  $T_{(n)}^e$  skoniugowanych z  $E_{(n)}^e$

$$(2.1.6) \quad \text{tr} (T_{(n)}^e \dot{E}_{(n)}^e) = \text{tr} (T_{(1)}^e \dot{E}_{(1)}^e) = \frac{1}{\varrho} \text{tr} (\sigma D^e),$$

gdzie  $E_{(1)}^e = E^e = 1/2(F^{eT} F^e - 1)$  jest miarą Greena, a  $T_{(1)}^e = (1/\varrho) F^{e-1} \sigma F^{e-T}$  jest stowarzyszoną z nią miarą naprężenia.

Zastосујmy pierwsze lokalne prawo termodynamiki do elementu  $\mathcal{M}$ :

$$(2.1.7) \quad \dot{u} = \dot{W} + \dot{Q},$$

gdzie:  $u$  jest energią wewnętrzną na jednostkę masy,  $\dot{Q}$  jest prędkością zmiany ciepła pobieranego z otoczenia, a  $\dot{W}$  wyraża moc mechaniczną. Z podziału tej mocy na część sprężystą i plastyczną (1.4.1) mamy:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{1}{\rho} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}) = \dot{W}^e + \dot{W}^p, \\ \dot{W}^e &= \frac{1}{\rho} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^e) = \operatorname{tr}(\mathbf{T}_{(n)}^e \dot{\mathbf{E}}_{(n)}^e) = \mathbf{T}_{(n)}^e \cdot \dot{\mathbf{E}}_{(n)}^e, \\ \dot{W}^p &= \frac{1}{\rho} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^p) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}^* \mathbf{V}^*). \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

$$\dot{Q} = -\operatorname{div} \mathbf{q}, \quad \text{gdzie } \mathbf{q} \text{ jest wektorem strumienia ciepła.}$$

Można pokazać, że tensor  $\mathbf{P}^*$  występujący we wzorze (2.1.8) ma postać

$$\mathbf{P}^* = \frac{1}{\rho} \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^e = \mathbf{T}_{(1)}^e \mathbf{U}^e \quad (2.1.9)$$

i jest niesymetryczny. Prędkość całkowitej mocy mechanicznej przyjmie wtedy postać

$$\dot{W} = \mathbf{T}_{(n)}^e \cdot \dot{\mathbf{E}}_{(n)}^e + \operatorname{tr}(\mathbf{P}^* \mathbf{V}^*). \quad (2.1.10)$$

Niech  $s$  będzie entropią właściwą. Przyjmujemy, że niezależnymi parametrami stanu są  $s, \mathbf{E}_{(0)}^e, \alpha_m, \boldsymbol{\alpha}_k^*$ , oznaczone jako zbiór  $(Y^{sE})$ , gdzie  $\alpha_m$  są parametrami wewnętrznymi skalarnymi, a  $\boldsymbol{\alpha}_k^*$  - parametrami wewnętrznymi tensorowymi symetrycznymi w konfiguracji odciążonej ( $k_*$ ). Wielu autorów wysuwało sugestię, że zbiór parametrów wewnętrznych, składający się z symetrycznych tensorów 2-go rzędu i skalarów, powinien wystarczyć w zupełności do termodynamicznego opisu plastycznie odkształcalnych ciał (Perzyna (1971), Kestin (1973), Raniecki (1977),...). Dla dowolnej miary odkształcenia przyjmujemy, że podstawowe równanie stanu, tzw. równanie Gibbsa, wyrażone w formie różniczki energii wewnętrznej ma postać

$$du(Y^{sE}) = dW^0 + \vartheta ds, \quad dW^0 = \mathbf{T}_{(0)}^e \cdot d\mathbf{E}_{(0)}^e + \pi_m d\alpha_m + \boldsymbol{\pi}_k^* \cdot d\boldsymbol{\alpha}_k^*, \quad (2.1.11)$$

gdzie:  $\pi_m$  i  $\boldsymbol{\pi}_k^*$  są odpowiednio skalarnymi i tensorowymi siłami termodynamicznymi stowarzyszonymi z  $\alpha_m$  i  $\boldsymbol{\alpha}_k^*$ . Dla uproszczenia użyliśmy tutaj wewnętrznych sił termodynamicznych i skoniugowanych miar naprężenia na jednostkę masy. Zwykle miary na jednostkę objętości otrzymujemy mnożąc je przez gęstość. Człon  $dW^0$  reprezentuje różniczkę pracy zewnętrznej zgromadzonej w postaci energii. Równanie Gibbsa wyraża analitycznie pierwszą część drugiego prawa termodynamiki. Drugą część tego prawa wyraża nierówność Clausiusa-Duhema

$$g = \rho \dot{s} + \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{\vartheta} \right) \geq 0, \quad (2.1.12)$$



gdzie  $g$  wyraża produkcję entropii w jednostce czasu i w jednostce objętości. Podstawiając wyrażenie na  $\text{div} \mathbf{q}$  ze wzoru (1.2.1) do (2.1.12) otrzymujemy

$$(2.1.13) \quad \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - (\dot{u} - \vartheta \dot{s}) - \frac{1}{\rho \vartheta} \mathbf{q} \cdot \text{grad} \vartheta \geq 0.$$

W powyższej nierówności występują wszystkie wewnętrzne efekty nieodwracalne. Nieodwracalność termiczną wyraża ostatni człon zawierający  $\text{grad} \vartheta$ . Oznaczając przez  $\mathcal{F}$  dwa pierwsze człony, otrzymamy:

$$(2.1.14) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - (\dot{u} - \vartheta \dot{s}) = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}^p - \pi_m \dot{\alpha}_m - \pi_k^* \cdot \dot{\alpha}_k^*.$$

Uwzględniając (2.1.8), (2.1.10) i (2.1.11), możemy napisać

$$(2.1.15) \quad \mathcal{F} = \dot{W} - \dot{W}^0 = \text{tr}(\mathbf{P}^* \mathbf{V}^*) - \pi_m \dot{\alpha}_m - \pi_k^* \cdot \dot{\alpha}_k^*$$

oraz

$$(2.1.16) \quad \mathcal{F} - \frac{1}{\rho \vartheta} \mathbf{q} \cdot \text{grad} \vartheta \geq 0,$$

$\mathcal{F}$  jest tu dyssypacją energii mechanicznej na jednostkę czasu i jednostkę masy. Jest ona równa różnicy mocy pracy w jednorodnych procesach rzeczywistych i procesach odwracalnych (zob. Buchdahl (1966)). Podczas odkształceń termospężystych, prędkości przepływów termodynamicznych  $\mathbf{V}^*$ ,  $\dot{\alpha}_m$ ,  $\dot{\alpha}_k^*$  znikają, a dyssypacja energii mechanicznej jest równa zero.

Jeśli  $u$ ,  $s$  oraz  $\boldsymbol{\sigma}$  nie zależą od  $\text{grad} \vartheta$ , to przyjmując  $\text{grad} \vartheta = 0$ , otrzymamy z wzoru (2.1.16) nierówność dyssypacji energii:  $\mathcal{F} \geq 0$ . Natomiast, jeśli  $\mathbf{q}$  zależy tylko od aktualnych wartości  $\vartheta$  i  $\text{grad} \vartheta$ , a nie od ich prędkości lub historii, możemy założyć, że  $\mathcal{F} = 0$  (element nie był poddany żadnej przemianie od dłuższego czasu). Wówczas z wzoru (2.1.16) mamy  $\mathbf{q} \cdot \text{grad} \vartheta \leq 0$ . W przypadku prawa przewodnictwa Fouriera  $\mathbf{q} = -\mathbf{K} \text{grad} \vartheta$ , tensor  $\mathbf{K}$  musi być symetryczny (zasada Onsagera, zob. Mandel (1974b)). Warunek ten wymaga dodatniej określoności tensora  $\mathbf{K}$ . Dla ciał izotropowych  $K_{ij} = K \delta_{ij}$ , mamy wówczas  $K \geq 0$ . Nierówność (2.1.16) będzie spełniona, gdy zachodzi jednocześnie:

$$(2.1.17) \quad \mathcal{F} \geq 0 \quad \wedge \quad -\frac{1}{\rho \vartheta} \mathbf{q} \cdot \text{grad} \vartheta \geq 0.$$

Założenia te były również przyjęte w pracy Petryka (1995), gdzie sformułowano warunek wystarczający termodynamicznej stabilności stanu równowagi ciał plastycznych. Wyniki badań doświadczalnych, jak do tej pory, nie podważyły zasadności tego uproszczenia (por. Raniecki (1996)).

Termostatyczne właściwości elementu  $\mathcal{M}$  w konfiguracji  $(k_*)$  znajdujemy z równania (2.1.11):

$$(2.1.18) \quad \mathbf{T}_{(0)}^e = \frac{\partial u(Y^{sE})}{\partial \mathbf{E}_{(0)}^e}, \quad \vartheta = \frac{\partial u(Y^{sE})}{\partial s}, \quad \pi_k^* = \frac{\partial u(Y^{sE})}{\partial \alpha_k^*}, \quad \pi_m = \frac{\partial u(Y^{sE})}{\partial \alpha_m}.$$



Energia wewnętrzna  $u$  wyrażona w swych naturalnych zmiennych ( $Y^{sE}$ ), jest potencjałem termodynamicznym. Jeśli ją znamy, to znane są wszystkie termiczne równania stanu (2.1.18). Zamiast entropii  $s$ , wygodniej jest posługiwać się temperaturą  $\vartheta$  jako niezależnym parametrem stanu. Łatwiej ją mierzyć i kontrolować w trakcie doświadczeń. Z drugiej strony, energia wewnętrzna wyrażona w zmiennych  $\vartheta, \mathbf{E}_{(0)}^e, \alpha_m, \alpha_k^*$  jest funkcją stanu. Nie jest ona wtedy potencjałem. Stosując przekształcenie Legendre'a funkcji  $u(Y^{sE})$ , otrzymujemy różne potencjały termodynamiczne, które mają swoje zbiory zmiennych naturalnych i dają równoważne opisy własności termostatycznych. Przykładem może być energia swobodna i entalpia swobodna.

Energia swobodna  $\phi = u - \vartheta s$  ma następujący zbiór zmiennych naturalnych  $\vartheta, \mathbf{E}_{(0)}^e, \alpha_m, \alpha_k^*$ , oznaczany w całości przez ( $Y^{\vartheta E}$ ). Równania stanu wyrażone przez  $\phi(Y^{\vartheta E})$  mają postać:

$$(2.1.19) \quad \mathbf{T}_{(0)}^e = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta E})}{\partial \mathbf{E}_{(0)}^e}, \quad -s = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta E})}{\partial \vartheta}, \quad \pi_k^* = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta E})}{\partial \alpha_k^*}, \quad \pi_m = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta E})}{\partial \alpha_m}.$$

Zbiór zmiennych  $\vartheta, \mathbf{T}_{(0)}^e, \alpha_m, \alpha_k^*$  oznaczony przez ( $Y^{\vartheta T}$ ), jest zbiorem zmiennych naturalnych entalpii swobodnej (lub funkcji Gibbsa)  $\eta = \phi - \mathbf{T}_{(0)}^e \cdot \mathbf{E}_{(0)}^e$ , zaś wynikające z niej równania stanu mają postać:

$$(2.1.20) \quad \mathbf{E}_{(0)}^e = -\frac{\partial \eta(Y^{\vartheta T})}{\partial \mathbf{T}_{(0)}^e}, \quad -s = \frac{\partial \eta(Y^{\vartheta T})}{\partial \vartheta}, \quad \pi_k^* = \frac{\partial \eta(Y^{\vartheta T})}{\partial \alpha_k^*}, \quad \pi_m = \frac{\partial \eta(Y^{\vartheta T})}{\partial \alpha_m}.$$

Plastyczne prawa płynięcia w konfiguracji odciążonej są związkami pomiędzy zbiorami zmiennych występujących w zależności (2.1.15), a mianowicie ( $\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{T}, \pi_m, \pi_k^*$ ) zwanym zbiorem sił dyssypacyjnych i ( $\mathbf{V}^*, \dot{\alpha}_m, \dot{\alpha}_k^*$ ) zwanym zbiorem miar prędkości przepływów termodynamicznych. Zwróćmy uwagę na to, że równania (2.1.7), (2.1.8), (2.1.10), (2.1.15) są ogólne i ważne w przypadku anizotropowych ciał, zaś tensor  $\mathbf{P}^*$  jest niesymetryczny.

W celu ułatwienia dalszej dyskusji, zestawimy teraz wszystkie równania termodynamicznej teorii plastyczności. Podzielimy je na cztery grupy:

1. Lokalne prawa zachowania masy, energii i pędu (równania ruchu).
2. Związki kinematyczne.
3. Termostatyczne równania stanu (własności termosprężyste).
4. Równania prędkościowe (plastyczne prawa płynięcia).

Równania te są ważne w zakresie dużych odkształceń. Przypadek małych odkształceń był dyskutowany w pracy habilitacyjnej Ranieckiego (1977).

## 2.2 Równania konstytutywne dla metalicznych ciał sprężysto-plastycznych

W tym punkcie wyprowadzimy najpierw ogólne termodynamiczne równania konstytutywne dla metalicznych ciał sprężysto-plastycznych. Przyjmując uzasad-

nione fizycznie założenia, sprowadzimy następnie te równania do bardzo prostej postaci. W ten sposób będziemy mogli ująć hydrodynamiczną teorię metali (ważną w zakresie wysokich ciśnień) i teorię plastyczności w jednolite ramy teoretyczne. Rozważania przeprowadzimy dla przypadku ciał izotropowych w stanie odniesienia i dla przypadku anizotropii indukowanej wstępnymi odkształceniami plastycznymi.

### 2.2.1 Przypadek ciał izotropowych

W tym przypadku materiał musi być jednocześnie izotropowy w zakresie sprężystym jak również plastycznym. Wszystkie parametry wewnętrzne muszą być zatem skalarnie. Dla materiału izotropowego w zakresie sprężystym w konfiguracji  $(k_*)$ , miara naprężenia stowarzyszona z miarą logarytmiczną odkształcenia sprężystego jest postaci

$$(2.2.1) \quad \mathbf{T}_{(0)}^e = \frac{1}{\rho} \mathbf{R}^{eT} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}^R.$$

Dowód twierdzenia (2.2.1), na podstawie pracy Hilla (1978), (patrz. Raniecki i Nguyen (1984)) jest zamieszczony w Załączniku A.1.

#### 1. Prędkościowe równanie stanu w opisie Eulera

Termostatyczne własności materiału w konfiguracji odciążonej  $(k_*)$  opisują równania wynikające z (2.1.19):

$$(2.2.2) \quad \mathbf{T}^R = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta E})}{\partial \mathbf{E}_{(0)}^e}, \quad -s = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta E})}{\partial \vartheta}, \quad \pi_m = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta E})}{\partial \alpha_m},$$

w których uwzględniliśmy zależność (2.2.1). Mnożąc (2.2.2) lewostronnie przez  $\mathbf{R}^e$  a prawostronnie przez  $\mathbf{R}^{eT}$  oraz wykorzystując fakt, że energia swobodna jest funkcją izotropową  $\mathbf{E}_{(0)}^e$ , otrzymujemy w konfiguracji aktualnej:

$$(2.2.3) \quad \boldsymbol{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta e})}{\partial \mathbf{e}^e}, \quad -s = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta e})}{\partial \vartheta}, \quad \pi_m = \frac{\partial \phi(Y^{\vartheta e})}{\partial \alpha_m},$$

gdzie  $\mathbf{e}^e$  jest zdefiniowany w (2.1.5) oraz  $(Y^{\vartheta e})$  oznacza zbiór zmiennych w konfiguracji aktualnej  $(\vartheta, \mathbf{e}^e, \alpha_m)$ .

Zakładając, że stosunki głównych rozciągnięć sprężystych należą do przedziału (por. Załącznik A.2):

$$(2.2.4) \quad \frac{5}{6} \leq \frac{U_i^e}{U_j^e} \leq \frac{7}{6}$$

i obliczając pochodną Zaremby-Jaumanna  $(2.2.3)_{1,2}$  ze spinem  $\omega^e$ , otrzymujemy następujące równania prędkościowe w opisie Eulera

$$\dot{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\tau} - \omega^e \tau + \tau \omega^e = \frac{\partial^2 \phi}{\partial e^e \partial e^e} \dot{e}^e + \frac{\partial^2 \phi}{\partial e^e \partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial e^e \partial \alpha_m} \dot{\alpha}_m, \quad (2.2.5)$$

$$-\dot{s} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial e^e \partial \vartheta} \dot{e}^e + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \dot{\vartheta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta \partial \alpha_m} \dot{\alpha}_m.$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \varrho \frac{\partial^2 \phi}{\partial e^e \partial e^e}, \\ -\mathbf{B} &= \varrho \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta \partial e^e}, \\ c_e &= \vartheta \frac{\partial s(Y^{\vartheta e})}{\partial \vartheta}, \\ s_m^{(\alpha)}(Y^{\vartheta e}) &= \frac{\partial s(Y^{\vartheta e})}{\partial \alpha_m} = -\frac{\partial \pi_m(Y^{\vartheta e})}{\partial \vartheta}, \\ \frac{D\sigma}{Dt} &= \dot{\sigma} - \omega^e \sigma + \sigma \omega^e + \sigma \operatorname{tr} \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

gdzie:  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{B}$  są odpowiednio uogólnionymi izotermicznymi tensorami modułów sprężystości i naprężeń cieplnych w konfiguracji aktualnej,  $c_e$  jest ciepłem właściwym mierzonym przy  $\dot{e}^e = 0$ . Wykorzystaliśmy tu przybliżenie  $\dot{e}^e = \mathbf{D}^e + O(|\bar{e}^e|^2)$  udowodnione w Załączniku A.2. W rezultacie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{D\sigma}{Dt} &= \mathbf{L} \mathbf{D}^e - \mathbf{B} \dot{\vartheta} + \varrho \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_m} \dot{\alpha}_m + O(|\bar{e}^e|^2), \\ \varrho \vartheta \dot{s} &= \vartheta \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}^e + \varrho c_e \dot{\vartheta} + \varrho \vartheta s_m^{(\alpha)}(Y^{\vartheta e}) \dot{\alpha}_m + O(|\bar{e}^e|^2). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Równoważny opis własności termostatycznych można otrzymać, używając entalpii swobodnej  $\eta(Y^{\vartheta \tau}) = \phi - \tau \cdot e^e$ , gdzie przez  $Y^{\vartheta \tau} = (\vartheta, \tau, \alpha_k)$  oznaczono zbiór parametrów stanu. Mamy wtedy

$$e^e = -\frac{\partial \eta(Y^{\vartheta \tau})}{\partial \tau}, \quad -s = \frac{\partial \eta(Y^{\vartheta \tau})}{\partial \vartheta}, \quad \pi_m(Y^{\vartheta \tau}) = \frac{\partial \eta(Y^{\vartheta \tau})}{\partial \alpha_m} \quad (2.2.8)$$

i stąd

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^e &= \mathbf{M} \frac{D\sigma}{Dt} + \mathbf{A} \dot{\vartheta} + \mathbf{D}' + O(|\bar{e}^e|^2), \\ \varrho \vartheta \dot{s} &= \vartheta \mathbf{A} \cdot \frac{D\sigma}{Dt} + \varrho c_e \dot{\vartheta} + \varrho \vartheta s_m^{(\alpha)}(Y^{\vartheta \tau}) \dot{\alpha}_m, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$



gdzie  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{A}$  są uogólnionymi izotermicznymi tensorami podatności sprężystej i rozszerzalności cieplnej w konfiguracji aktualnej,  $c_\sigma$  jest ciepłem właściwym mierzonym przy  $\frac{D\sigma}{Dt} = 0$ ,

$$(2.2.10) \quad \mathbf{M} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \tau}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{e}^\epsilon}{\partial \vartheta}, \quad c_\sigma = \vartheta \frac{\partial s(Y^{\vartheta\tau})}{\partial \vartheta}$$

oraz

$$(2.2.11) \quad \mathbf{D}' = \frac{\partial \mathbf{e}^\epsilon}{\partial \alpha_m} \dot{\alpha}_m = -\frac{\partial \pi_m(Y^{\vartheta\tau})}{\partial \tau} \dot{\alpha}_m,$$

$$(2.2.12) \quad s_m^{(\alpha)}(Y^{\vartheta\tau}) = \frac{\partial s(Y^{\vartheta\tau})}{\partial \alpha_m} = -\frac{\partial \pi_m(Y^{\vartheta\tau})}{\partial \vartheta}.$$

Układy równań (2.2.7), (2.2.9) są przedstawione w odwrotnej postaci. Można to łatwo sprawdzić, biorąc pod uwagę następujące tożsamości wynikające z istnienia potencjałów termodynamicznych (Buchdahl (1966)):

$$(2.2.13) \quad \begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{L}^{-1} \text{ lub } 2M_{ijkl} L_{klmn} = \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{L} \mathbf{A}, \\ c_\sigma - c_\epsilon &= \frac{\vartheta}{\rho} \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \mathbf{A} = \frac{\vartheta}{\rho} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \end{aligned}$$

$$(2.2.14) \quad -\mathbf{L} \mathbf{D}' = \rho \frac{\partial \tau}{\partial \alpha_m} \dot{\alpha}_m, \quad \frac{\partial s(Y^{\vartheta\epsilon})}{\partial \alpha_m} \dot{\alpha}_m = \frac{\partial s(Y^{\vartheta\tau})}{\partial \alpha_m} \dot{\alpha}_m - \frac{1}{\rho} \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \mathbf{D}'.$$

Warto zwrócić uwagę na to, że przy wyprowadzeniu równania (2.2.9)<sub>2</sub> nie przyjęto żadnego przybliżenia.

## 2. Prawo płynięcia plastycznego

1. Prawa płynięcia plastycznego są związkami między zbiorem sił dyssypacyjnych ( $\mathbf{P}^*$ ,  $\pi_m$ ) i zbiorem miar prędkości przepływów termodynamicznych ( $\mathbf{V}^*$ ,  $\dot{\alpha}_m$ ). Tensor  $\mathbf{P}^*$  jest w ogólności niesymetryczny. Dla materiału izotropowego w zakresie sprężystym w konfiguracji odciążonej tensory  $\mathbf{T}_{(0)}^\epsilon$ ,  $\mathbf{E}_{(0)}^\epsilon$ ,  $\mathbf{U}^\epsilon$  mają wspólne kierunki główne  $\mathbf{N}_i^\epsilon$ . Zatem iloczyn  $\mathbf{T}_{(0)}^\epsilon \mathbf{U}^\epsilon$  jest komutatywny i wtedy ze wzoru (2.1.9) mamy:

$$(2.2.15) \quad \mathbf{P}^* = \frac{1}{\rho} \mathbf{F}^{\epsilon^{-1}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^\epsilon = \mathbf{U}^{\epsilon^{-1}} \mathbf{T}_{(0)}^\epsilon \mathbf{U}^\epsilon = \mathbf{T}_{(0)}^\epsilon = \mathbf{T}^R$$

oraz moc dyssypacji (2.1.15) można wyrazić w postaci:

$$(2.2.16) \quad \mathcal{F} = \text{tr}(\mathbf{P}^* \mathbf{V}^*) - \pi_m \dot{\alpha}_m = \mathbf{T}^R \cdot (\mathbf{D}^* + \boldsymbol{\omega}^*) - \pi_m \dot{\alpha}_m = \mathbf{T}^R \cdot \mathbf{D}^* - \pi_m \dot{\alpha}_m.$$



Widać, że  $\omega^*$  znika we wzorze dla mocy dyssypacji (2.2.16) dla materiału izotropowego. Można zatem przyjąć, że  $\omega^* = 0$  (por. Mandel (1981), Willis (1975)). Formalnie, warunek  $\omega^* = 0$  wynika z twierdzenia o funkcjach izotropowych (zob. Wang (1970)): jeśli zakładamy, że  $V^*$  jest funkcją izotropową  $P^*$ , to  $\omega^*$  musi być równe zeru, gdyż w tym przypadku tensor  $P^*$  jest symetryczny (por.(2.2.15)).

Dla materiału izotropowego, w zakresie plastycznym w konfiguracji odciążonej,  $\pi_m$  i  $\alpha_m$  są skalarnie,  $D^*$  jest funkcją izotropową  $T^R$ , zatem  $D^*$  również ma kierunki główne  $N_i^e$  tensora  $U^e$ . Wtedy iloczyn  $U^e D^*$  jest komutatywny  $U^e D^* = D^* U^e$  i z (1.1.3) otrzymamy:

$$(2.2.17) \quad V^p = F^e V^* F^{e-1} = R^e U^e D^* U^{e-1} R^{e-1} = R^e D^* R^{eT} = D^p.$$

W tym przypadku

$$(2.2.18) \quad \omega^p = \frac{1}{2} (V^p - V^{pT}) = 0$$

oraz z (1.1.4)<sub>2</sub> mamy  $\omega = \omega^e$  i pochodna  $D\sigma/Dt$  we wzorach (2.2.7) i (2.2.9) może być zastąpiona przez zwykłą pochodną Zaremby-Jaumanna tensora  $\tau = \sigma/\varrho$

$$(2.2.19) \quad \frac{D\sigma}{Dt} = \frac{D\sigma}{Dt} = \dot{\sigma} - \omega \sigma + \sigma \omega + \sigma \operatorname{tr} V = \varrho (\dot{\tau} - \omega \tau + \tau \omega).$$

Podsumowując powyższe rozważania stwierdzamy, że dla ciał izotropowych równania termosprężystości (2.2.7)<sub>1</sub> i (2.2.9)<sub>1</sub> mogą być wyprowadzone z funkcji energii swobodnej  $\phi$  albo z entalpii  $\eta$ , podobnie jak dla małych odkształceń, przy założeniu, że stosunek wartości głównych tensora  $U^e$  spełnia nierówność (2.2.4), a logarytmiczna miara odkształcenia sprężystego jest przyjmowana jako parametr stanu. W ten sposób odbiegamy od często przyjmowanego założenia  $F^e = \mathbf{1}$  (Mandel (1981), Sidoroff (1982) i inni). Równania te są ważne dla materiału sprężysto-plastycznego oraz sprężysto-lepkoplastycznego, niezależnie od konkretnej postaci prawa płynięcia.

2. Rozważmy prawa płynięcia dla ciał izotropowych w konfiguracji odciążonej ( $k_*$ ):

$$(2.2.20) \quad D^* = \lambda G^{*(1)}(T^R, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) + G^{*(2)}(T^R, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}),$$

$$\dot{\alpha}_m = \lambda g_m^{*(1)}(T^R, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) + g_m^{*(2)}(T^R, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}),$$

gdzie  $Y^{\vartheta\alpha} = (\vartheta, \alpha_m)$  oznacza możliwy jawny wpływ parametrów stanu na postać równań prędkościowych i  $\lambda$  może być różne od zera tylko wtedy, gdy aktualne naprężenie  $T^R$  leży na powierzchni płynięcia

$$(2.2.21) \quad f^*(T^R, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) = 0.$$

Ponieważ wszystkie występujące funkcje są funkcjami izotropowymi tensora  $T^R$ , przechodząc do konfiguracji aktualnej (mnożąc obie strony lewostronnie przez  $R^e$ ,

a prawostronnie przez  $\mathbf{R}^{\varepsilon T}$ , z równań (2.2.20) i (2.2.21) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^P &= \lambda \mathbf{G}^{*(1)}(\tau, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) + \mathbf{G}^{*(2)}(\tau, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) \\ &= \lambda \mathbf{G}^{(1)}(Y^{\vartheta\tau}, Y^{\vartheta\alpha}) + \mathbf{G}^{(2)}(Y^{\vartheta\tau}, Y^{\vartheta\alpha}), \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_m &= \lambda g_m^{*(1)}(\tau, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) + g_m^{*(2)}(\tau, \pi_m, Y^{\vartheta\alpha}) \\ &= \lambda g_m^{(1)}(Y^{\vartheta\tau}, Y^{\vartheta\alpha}) + g_m^{(2)}(Y^{\vartheta\tau}, Y^{\vartheta\alpha}) \end{aligned}$$

oraz

$$(2.2.23) \quad f^*(\mathbf{T}^R, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) = f^*(\tau, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) = f(Y^{\vartheta\tau}, Y^{\vartheta\alpha}) = 0.$$

Wykorzystaliśmy tutaj zależność (2.2.17). Funkcje  $\mathbf{G}^{(1)}$ ,  $\mathbf{G}^{(2)}$ ,  $g_m^{(1)}$ ,  $g_m^{(2)}$  otrzymaliśmy odpowiednio z funkcji  $\mathbf{G}^{*(1)}$ ,  $\mathbf{G}^{*(2)}$ ,  $g_m^{*(1)}$ ,  $g_m^{*(2)}$ , eliminując  $\pi_i$  przy pomocy relacji stanu (2.2.8)<sub>3</sub>. Zwróćmy uwagę na to, że warunek  $f^* = 0$  może być traktowany jako funkcja powierzchni płynięcia w przestrzeni sił termodynamicznych  $(\mathbf{T}^R, \pi_m)$ , podczas gdy  $f = 0$ , dla ustalonych  $\vartheta$  i  $\alpha_m$  jest zwykłą funkcją powierzchni płynięcia w przestrzeni naprężeń. Przyjmując poszczególne zależności funkcji występujących w (2.2.20), (2.2.21) od  $\alpha_i$ , możemy ująć różne związki pomiędzy energią zmagazynowaną, a zjawiskiem wzmocnienia materiału. Jest to zgodne z pionierską ideą Kestina i Rice'a (1970) oraz Rice'a (1971).

3. Mnożnik  $\lambda$ , występujący w (2.2.20) i (2.2.22), w punkcie na powierzchni płynięcia ( $f = 0$ ) może być wyrażony poprzez prędkość zmiany naprężenia i temperatury przy użyciu warunku zgodności ( $f = 0$ , gdy  $f = 0$ ). Uwzględniając kryterium odciążenia, obliczymy pochodną Zaremby-Jaumanna od  $f$ , otrzymując

$$(2.2.24) \quad \lambda = \left\langle \frac{1}{h} \left( \mu^f \cdot \frac{D\sigma}{Dt} + z \right) \right\rangle \quad (f = 0),$$

gdzie  $\langle \cdot \rangle$  oznacza nawias Macauley'a

$$\langle y \rangle = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } y \geq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } y < 0 \end{cases}$$

oraz

$$(2.2.25) \quad h = -\varrho \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} g_m^{(1)}, \quad \mu^f = \frac{\partial f}{\partial \tau}, \quad z = \varrho \left( \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} g_m^{(2)} \right),$$

a  $\lambda = 0$  gdy  $f < 0$ . Przekształcając równania (1.1.4), (2.2.9)<sub>1</sub>, (2.2.22) i (2.2.24), otrzymujemy następującą ogólną postać prędkościowych równań konstytutywnych dla ciał sprężysto-plastycznych

$$(2.2.26) \quad \mathbf{D} = \mathbf{M} \frac{D\sigma}{Dt} + \mathbf{A} \dot{\vartheta} + \mathbf{D}_0 + \mu^{\vartheta} \left\langle \frac{1}{h} \left( \mu^f \cdot \frac{D\sigma}{Dt} + z \right) \right\rangle$$

albo

$$(2.2.27) \quad \frac{D\sigma}{Dt} = \mathbf{L}\mathbf{D} - \mathbf{B} \dot{\vartheta} - \left\langle \frac{1}{H} \left( \Lambda^f \cdot \mathbf{D} + z_1 \right) \right\rangle \Lambda^{\vartheta} - \mathbf{N}_0,$$

gdzie

$$(2.2.28) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^g &= \mathbf{G}^{(1)} - \frac{\partial \pi_m}{\partial \tau} g_m^{(1)}, & \mathbf{D}_0 &= \mathbf{G}^{(2)} - \frac{\partial \pi_m}{\partial \tau} g_m^{(2)}, \\ \boldsymbol{\Lambda}^f &= \mathbf{L} \boldsymbol{\mu}^f, & \boldsymbol{\Lambda}^g &= \mathbf{L} \boldsymbol{\mu}^g, & \mathbf{N}_0 &= \mathbf{L} \mathbf{D}_0, \\ z_1 &= z - \mathbf{N}_0 \cdot \boldsymbol{\mu}^f - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu}^f \dot{\vartheta}, & H &= h + \boldsymbol{\mu}^f \cdot \boldsymbol{\Lambda}^g, \end{aligned}$$

przy założeniu, że  $H > 0$ . Przy takim sformułowaniu, możemy wyciągnąć następujące ogólne wnioski (zob. Raniecki i Nguyen (1984)):

- Kiedy pary  $(\mathbf{G}^{*(1)}, g^{*(1)})$  i  $(\mathbf{G}^{*(2)}, g^{*(2)})$ , dla stałych  $Y^{\vartheta\alpha}$ , posiadają odpowiednie potencjały  $\mathcal{G}^{*(1)}(\mathbf{T}^R, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) = \mathcal{G}^{*(1)}(\tau, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha})$  oraz  $\mathcal{G}^{*(2)}(\mathbf{T}^R, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) = \mathcal{G}^{*(2)}(\tau, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha})$ , to znaczą

$$(2.2.29) \quad \mathbf{G}^{*(1)}(\tau, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) = \frac{\partial \mathcal{G}^{*(1)}}{\partial \tau}, \quad g_m^{*(1)} = \frac{\partial \mathcal{G}^{*(1)}}{\partial \pi_m},$$

$$(2.2.30) \quad \mathbf{G}^{*(2)}(\tau, \pi_i, Y^{\vartheta\alpha}) = \frac{\partial \mathcal{G}^{*(2)}}{\partial \tau}, \quad g_m^{*(2)} = \frac{\partial \mathcal{G}^{*(2)}}{\partial \pi_m},$$

wtedy funkcje  $\mathcal{G}^{(1)}$  i  $\mathcal{G}^{(2)}$  zdefiniowane jako

$$(2.2.31) \quad \mathcal{G}^{(1)}(Y^{\vartheta\tau}, Y^{\vartheta\alpha}) = \mathcal{G}^{*(1)}|_{\pi_m = \pi_m(Y^{\vartheta\tau})},$$

$$\mathcal{G}^{(2)}(Y^{\vartheta\tau}, Y^{\vartheta\alpha}) = \mathcal{G}^{*(2)}|_{\pi_m = \pi_m(Y^{\vartheta\tau})},$$

odgrywają rolę potencjałów dla sumy  $\mathbf{D}^p + \mathbf{D}'$  (zob. (2.2.9)<sub>1</sub> i (2.2.11)):

$$(2.2.32) \quad \mathbf{D}^p + \mathbf{D}' = \lambda \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}}{\partial \tau}.$$

Oznacza to, że (z wyjątkiem sytuacji, kiedy wzmocnienie nie wpływa na własności sprężyste), same funkcje  $\boldsymbol{\mu}^g = \partial \mathcal{G}^{(1)} / \partial \tau$ ,  $\mathbf{D}_0 = \partial \mathcal{G}^{(2)} / \partial \tau$  i  $\mathbf{D}^p$  nie posiadają potencjałów. W przypadku ciał izotropowych sprężysto-plastycznych, niewrażliwych na prędkość przepływów termodynamicznych (ang. *rate independent*), mamy  $\mathcal{G}^{*(2)} = 0$  i  $g_m^{*(2)} = 0$ , normalność w przestrzeni  $\mathbf{T}^R - \pi_m$  implikuje normalność dla  $\mathbf{D}^p + \mathbf{D}'$  w przestrzeni  $\tau$ .

- Kiedy spełnione są związki (2.2.31) i jednocześnie funkcje  $\mathcal{G}^{*(1)}$  oraz  $\mathcal{G}^{*(2)}$  nie zależą jawnie od temperatury  $\vartheta$ , czyli

$$(2.2.33) \quad \mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{G}^{(1)}(\tau, \pi_m, \alpha_m), \quad \mathcal{G}^{(2)} = \mathcal{G}^{(2)}(\tau, \pi_m, \alpha_m),$$

to wtedy ciepło przemian wewnętrznych reprezentowane przez trzeci człon prawej strony równania (2.2.7)<sub>2</sub> posiada potencjał, bowiem:

$$(2.2.34) \quad s_m^{(\alpha)} \dot{\alpha}_m = - \frac{\partial \pi_m}{\partial \vartheta} \left( \lambda \frac{\partial \mathcal{G}^{*(1)}}{\partial \pi_m} + \frac{\partial \mathcal{G}^{*(2)}}{\partial \pi_m} \right) = - \left( \lambda \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}}{\partial \vartheta} \right).$$



W tym szczególnym przypadku mamy również

$$s_m^{(\alpha)}(g_m^{*(1)} + g_m^{*(2)}) = \frac{\partial (G^{(1)} + G^{(2)})}{\partial \vartheta},$$

zatem termiczne siły wewnętrzne  $s_m^{(\alpha)} = -\partial \pi_m(Y^{\theta\tau})/\partial \vartheta$  są jedynymi przyczynami ogólnego termicznego osłabienia materiału.

- Ponieważ  $\tau = \mathbf{R}^e \mathbf{T}^R \mathbf{R}^{eT}$ , normalność w konfiguracji odciążonej implikuje normalność w konfiguracji aktualnej i odwrotnie.
- Plastyczne prawa płynięcia (2.2.26) i (2.2.27) zostały wyprowadzone przy pomocy dekompozycji (1.1.1). Można patrzeć na to pod innym kątem. Załóżmy, że bierzemy konfigurację aktualną jako konfigurację odniesienia i miarę logarytmiczną jako miarę całkowitego odkształcenia. Możemy pokazać (zob. Hill (1978)), że strumień  $\mathcal{D}\sigma/\mathcal{D}t$  będzie skoniugowany poprzez moc odkształcenia z miarą logarytmiczną odkształcenia. Równania (2.2.26) mogą być postulowane od razu jako prędkościowy związek między odkształceniami a naprężeniami w aktualnej konfiguracji. Dochodzimy do wniosku, że takie fizyczne wielkości jak  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $h$ ,  $\mu^g$ ,  $\mu^f$  zdefiniowane w aktualnej konfiguracji i te związane z logarytmiczną miarą całkowitego odkształcenia, mogą być wyrażone w bardzo prosty sposób poprzez pochodne funkcji zdefiniowane w konfiguracji odciążonej.

### 3. Równanie dla temperatury. Adyabatyczne prawa płynięcia

1. Zajmiemy się teraz równaniem dla temperatury. Wiadomo, że na zmianę entropii wpływa wytworzenie entropii spowodowane dyssypacją pracy mechanicznej i wymiana entropii z otoczeniem, zatem

$$(2.2.35) \quad \dot{s} = \frac{\mathcal{F} + \dot{Q}}{\vartheta},$$

gdzie  $Q$  jest ciepłem pobranym z otoczenia. Wzór (2.2.35) można sprawdzić, wstawiając (2.1.6) do (2.1.11).

Podstawmy teraz zależność (2.2.35) do równania (2.2.9)<sub>2</sub>. Uwzględniając (2.2.15) – (2.2.19) i (2.2.1), otrzymamy

$$(2.2.36) \quad c_\sigma \dot{\vartheta} = \tau \cdot \mathbf{D}^p - \pi_m \dot{\alpha}_m - \vartheta s_m^{(\alpha)}(Y^{\theta\tau}) \dot{\alpha}_m - \frac{\vartheta}{\rho} \mathbf{A} \cdot \frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} + \dot{Q}.$$

Pierwsze dwa człony po prawej stronie równania (2.2.36) reprezentują wpływ dyssypacji pracy mechanicznej na zmianę temperatury. Trzeci człon przedstawia zmianę temperatury spowodowaną ciepłem przemian wewnętrznych, a czwarty



człon reprezentuje efekty piezokaloryczne (zob. Raniecki (1977), Kleiber i Raniecki (1985)). Jak już wspomniano wcześniej, przy wyprowadzeniu tego równania nie przyjęto żadnego przybliżenia.

2. Dla danego  $\mathcal{D}\sigma/\mathcal{D}t$  i  $\dot{Q}$ , równania (2.2.26), (2.2.36), (2.2.22), (2.2.24) możemy rozwiązać względem  $\mathbf{D}$  i  $\vartheta$ . W dowolnym punkcie na powierzchni płynięcia ( $f = 0$ ), mamy:

$$(2.2.37) \quad \mathbf{D} = \mathbf{M}^{(a)} \frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} + \mathbf{D}_0^{(a)} + \mu_{(a)}^g < \frac{1}{h^{(a)}} (\mu_{(a)}^f \cdot \frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} + z_{(a)}) >,$$

$$(2.2.38) \quad c_\sigma \vartheta = -\frac{\vartheta}{\varrho} \mathbf{A} \cdot \frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} + b + m < \frac{1}{h^{(a)}} (\mu_{(a)}^f \cdot \frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} + z_{(a)}) > + \dot{Q},$$

gdzie

$$\mathbf{M}^{(a)} = \mathbf{M} - \frac{\vartheta}{\varrho c_\sigma} \mathbf{A} \otimes \mathbf{A},$$

$$\mu_{(a)}^g = \mu^g + \frac{m}{c_\sigma} \mathbf{A}, \quad m = \tau \cdot \mathbf{G}^{(1)} - \pi_m g_m^{(1)} - \vartheta s_m^{(a)} (Y^{\vartheta\tau}) g_m^{(1)},$$

$$(2.2.39) \quad \mu_{(a)}^f = \mu^f - \frac{\vartheta}{c_\sigma} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{A}, \quad \mathbf{D}_0^{(a)} = \mathbf{D}_0 + [(b + \dot{Q})/c_\sigma] \mathbf{A},$$

$$b = -\pi_m g_m^{(2)} + \tau \cdot \mathbf{G}^{(2)} - \vartheta s_m^{(a)} g_m^{(2)}, \quad z_{(a)} = \varrho \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} g_m^{(2)} + \frac{\varrho}{c_\sigma} (b + \dot{Q}) \frac{\partial f}{\partial \vartheta},$$

$$h^{(a)} = h - \frac{\varrho}{c_\sigma} m \frac{\partial f}{\partial \vartheta}.$$

Występujący tutaj tensor  $\mathbf{M}^{(a)}$  jest adiabatycznym tensorem podatności sprężystej,  $h^{(a)}$  jest adiabatyczną funkcją wzmocnienia,  $\mu_{(a)}^g$  i  $\mathbf{D}_0^{(a)}$  charakteryzują kierunki natychmiastowej i lepkiej prędkości deformacji niesprężystej. Związki odwrotne dla (2.2.37) mają postać

$$(2.2.40) \quad \frac{\mathcal{D}\sigma}{\mathcal{D}t} = \mathbf{L}^{(a)} \mathbf{D} - \mathbf{N}_0^{(a)} - \frac{1}{H^{(a)}} < \mathbf{\Lambda}_{(a)}^f \cdot \mathbf{D} + z_{1(a)} > \mathbf{\Lambda}_{(a)}^g,$$

gdzie

$$\mathbf{L}^{(a)} = \mathbf{M}^{(a)-1} = \mathbf{L} + \frac{\vartheta}{\varrho c_\sigma} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B},$$

$$(2.2.41) \quad \mathbf{\Lambda}_{(a)}^g = \mathbf{L}^{(a)} \mu_{(a)}^g, \quad \mathbf{\Lambda}_{(a)}^f = \mathbf{L}^{(a)} \mu_{(a)}^f, \quad \mathbf{N}_0^{(a)} = \mathbf{L}^{(a)} \mathbf{D}_0^{(a)},$$

$$z_{1(a)} = z_{(a)} - \mathbf{N}_0^{(a)} \cdot \mu_{(a)}^f, \quad H^{(a)} = h^{(a)} + \mu_{(a)}^f \cdot \mathbf{\Lambda}_{(a)}^g,$$

przy czym założono, że  $H^{(a)} > 0$ . Podstawiając  $\dot{Q} = 0$  w równaniach (2.2.37) – (2.2.41), otrzymujemy układy równań opisujące proces adiabatyczny.

3. Następujące uwagi mogą być pomocne przy stosowaniu przedstawionych równań do problemów praktycznych:

- Związek (2.2.26) między  $\mathbf{D}$  i  $(D\sigma/Dt, \dot{\vartheta})$  oraz związek (2.2.40) między  $\mathbf{D}$  i  $(D\sigma/Dt, \dot{Q})$  są niejednoznaczne, gdy odpowiednio  $h \leq 0$  i  $h^{(a)} \leq 0$ . Stany  $h = 0$  nazywamy, jak u Hilla (1978), izotermicznymi stanami bifurkacji. Podobnie stany  $h^{(a)} = 0$  mogą być nazwane adiabatycznymi wewnętrznymi stanami bifurkacji. Dla większości izotropowych ciał metalicznych  $h$  jest dodatnie i stany  $h = 0$  nie były zaobserwowane w laboratoriach. Natomiast, stany  $h^{(a)} = 0$  mogą być związane z początkowym stadium lokalizacji w formie ścinania (Bai (1982), Merzer (1982)).
- Rozważmy przypadek materiału plastycznego niewrażliwego na prędkość odkształcenia:

$$\mathbf{G}^{(2)} = 0, \quad g_m^{(2)} = 0, \quad z = \varrho \dot{\vartheta} \partial f / \partial \dot{\vartheta},$$

$$\mathbf{D}_0 = 0, \quad b = 0, \quad \mathbf{D}_0^{(a)} = -\mathbf{A} \dot{Q} / c_\sigma, \quad z_{(a)} = -(\dot{Q} \varrho / c_\sigma) \partial f / \partial \dot{\vartheta}.$$

Równania (2.2.26) zwykle nazywane są nieizotermicznymi niestowarzyszonymi prawami płynięcia, ponieważ w ogólnym przypadku  $\mu^g \neq \mu^f$ . Niech teraz izotermiczne prawa płynięcia będą stowarzyszone, czyli  $\mu^g = \mu^f$  i  $\dot{\vartheta} = 0$ . Wtedy z (2.2.37) widać, że odpowiednie adiabatyczne prawa ( $\dot{Q} = 0$ ) mają nadal charakter niestowarzyszony, bowiem  $\mu_{(a)}^g \neq \mu_{(a)}^f$  oraz tensor wiążący  $\mathbf{D}$  i  $D\sigma/Dt$  jest niesymetryczny.

- Zwróćmy uwagę na to, że różnice  $\mu_{(a)}^g - \mu^g$ ,  $\mu_{(a)}^f - \mu^f$ ,  $h^{(a)} - h$  nie zależą jawnie od  $\mathbf{G}^{(2)}$  i  $g_m^{(2)}$ . Poza tym, kiedy funkcja płynięcia jest niezależna od temperatury  $\partial f / \partial \dot{\vartheta}$ , to różnica  $\mu_{(a)}^g - \mu^g$  oraz  $h^{(a)} - h$  równa jest zeru.
- Przy niewielkich ciśnieniach możemy pominąć efekt piezokaloryczny oraz rozszerzalność cieplną spowodowaną przez energię dyssypacji – tak jak u Mroza i Ranieckiego (1976):

$$\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{M}^{(a)} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{L}^{(a)} = \mathbf{L},$$

$$\mu_{(a)}^g = \mu^g, \quad \mu_{(a)}^f = \mu^f, \quad \mathbf{D}_0^{(a)} = \mathbf{D}_0.$$

Dla materiału niewrażliwego na prędkość odkształcenia, jedyną różnicą między adiabatycznymi prawami płynięcia i prawami izotermicznymi jest to, że  $h^{(a)} \neq h$ . Adiabatyczna funkcja wzmocnienia  $h^{(a)}$  jest zwykle mniejsza niż izotermiczna funkcja  $h$ , a gdy  $\partial f / \partial \dot{\vartheta} = 0$ , to nie ma różnicy między adiabatycznymi i izotermicznymi prawami płynięcia.

#### 4. Ciało sprężysto-plastyczne z mikropęknięciami i mikropustkami

W klasycznej teorii plastyczności zakłada się zwykle, że materiał jest nieściśliwy i ciśnienie hydrostatyczne nie ma wpływu na powierzchnię płynięcia. Zaobserwowano jednak, że w niektórych procesach koncentracja mikropustek może mieć

duży wpływ na zachowanie się metali. Gurson (1977) zaproponował fenomenologiczną teorię dylatacyjnej plastyczności dla przypadku izotropowego wzmocnienia, która składa się z prawa płynięcia plastycznego, miary objętościowej pustek oraz ich prawa ewolucji i prawa nukleacji. Model Tvergaarda (1978) uogólnia ją na przypadek kinematycznego wzmocnienia i daje rezultaty bardziej zgodne z doświadczeniami. Mear i Hutchinson (1985) zaproponowali model ze złożonym wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym. Równanie ewolucji dla parametru porowatości było dyskutowane w pracy Perzyny (1986), gdzie zaproponowano model ciał sprężysto-lepkoplastycznych z defektami. Lammering, Pęcherski i Stein (1990) sformułowali równania konstytutywne ciał sprężysto-plastycznych z indukowaną odkształceniem plastycznym anizotropią i rozwijającymi się pustkami. Zbudowali algorytmy numeryczne do rozwiązania takich równań, uwzględniając spin plastyczny i zastosowali je do problemu prostego ścinania i szyjkowania cylindrycznego pręta.

Poniżej uogólnimy opis zaproponowany w poprzednim punkcie dla ciał izotropowych z uwzględnieniem mikropęknięć i mikropustek. Pokażemy, że opis Mandela, z miarą logarytmiczną odkształcenia sprężystego, jest również w tym przypadku najbardziej odpowiedni do opisu zachowania ciał metalicznych (Nguyen i Raniecki (1998; 1999b)).

**Udział objętościowy mikropustek. Związki kinematyczne.** Rozpatrujemy reprezentatywną objętość materiału sprężysto-plastycznego  $\mathcal{V}$  o masie  $\mathcal{M}$ . Niech  $\mathcal{V}_m$  i  $\mathcal{V}_v$  będą odpowiednio objętością matrycy i pustek, zatem  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_m + \mathcal{V}_v$ .

Oznaczmy odpowiednio przez  $\mathcal{V}^*$ ,  $\mathcal{V}_m^*$  i  $\mathcal{V}_v^*$  całkowitą objętość, objętość matrycy i objętość pustek w konfiguracji odciążonej. Udział objętościowy pustek (lub parametr porowatości) jest definiowany jako

$$(2.2.42) \quad \Upsilon = \frac{\mathcal{V}_v^*}{\mathcal{V}^*}.$$

Związek między gęstością, masą i objętością elementu jest postaci

$$(2.2.43) \quad \varrho^* = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{V}^*} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{V}_m^* + \mathcal{V}_v^*}.$$

Niech  $\varrho_m^* = \mathcal{M}/\mathcal{V}_m^*$  będzie gęstością materiału bez pustek. Wówczas z relacji (2.2.42) i (2.2.43) mamy

$$(2.2.44) \quad \varrho^* = \varrho_m^* (1 - \Upsilon).$$

Różniczkujemy (2.2.44) względem czasu  $t$  i podzielimy przez  $\varrho^*$ . Otrzymujemy

$$(2.2.45) \quad \frac{\dot{\varrho}^*}{\varrho^*} = -\frac{\dot{\Upsilon}}{1 - \Upsilon} + \frac{\dot{\varrho}_m^*}{\varrho_m^*} = -\frac{\dot{\Upsilon}}{1 - \Upsilon} - \frac{\dot{\mathcal{V}}_m^*}{\mathcal{V}_m^*}.$$



Zakładamy, że  $\varrho_m^* = \varrho_0 = \text{const}$  i poprzednie związki mają postać

$$(2.2.46) \quad \varrho^* = \varrho_0(1 - \Upsilon) \quad , \quad \frac{\dot{\varrho}^*}{\varrho^*} = -\frac{\dot{\Upsilon}}{1 - \Upsilon} .$$

Podobnie, w konfiguracji aktualnej mamy

$$(2.2.47) \quad \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -\frac{\dot{\Upsilon}}{1 - \Upsilon} + \frac{\dot{\varrho}_m}{\varrho_m} = -\frac{\dot{\Upsilon}}{1 - \Upsilon} - \frac{\dot{V}_m}{V_m} \quad , \quad 1 - \Upsilon = \varrho/\varrho_m .$$

Z zależności (1.1.3) wynika, że  $\text{trV} = \text{trV}^e + \text{trV}^p = \text{trV}^e + \text{trV}^*$ . Ponieważ  $\text{trV} = -\dot{\varrho}/\varrho$ ,  $\text{trV}^* = -\dot{\varrho}^*/\varrho^*$ , to związki (2.2.46), (2.2.47) oraz (2.1.4) dają

$$(2.2.48) \quad \text{trV}^e = -\frac{\dot{\varrho}_m}{\varrho_m} = \frac{\dot{\beta}}{\beta} .$$

W szczególnym przypadku, gdy  $\Upsilon = 0$ , wszystkie poprzednie związki zredukują się do znanych związków dla materiału bez pustek.

**Energia swobodna dla metali z mikropustkami.** Ogólna postać energii swobodnej jako funkcji zmiennych niezależnych  $(\mathbf{e}^*, \vartheta, \alpha_i)$  jest następująca

$$(2.2.49) \quad \phi = \phi_1(\bar{\mathbf{e}}^*, \beta, \vartheta, \alpha_i) + u^*(\alpha_i) - \vartheta s^*(\alpha_i) ,$$

gdzie  $u^*$ ,  $s^*$  są odpowiednio zmagazynowaną energią wewnętrzną i zmagazynowaną entropią, tzn. energią wewnętrzną i entropią w stanie naturalnym, gdy  $\sigma = 0$  oraz  $\vartheta = \vartheta_0$

$$(2.2.50) \quad s^*(\alpha_i) = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0; \mathbf{e}^*=0} \quad , \quad u^* = \phi|_{\vartheta=\vartheta_0; \mathbf{e}^*=0} + \vartheta_0 s^* \quad , \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\mathbf{e}}^e} \right|_{\vartheta=\vartheta_0; \mathbf{e}^*=0} = 0 ,$$

wtedy

$$\phi_1 = 0, \quad \partial \phi_1 / \partial \bar{\mathbf{e}}^e = 0, \quad \partial \phi_1 / \partial \beta = 0, \quad \partial \phi_1 / \partial \vartheta = 0 \quad \text{dla} \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \beta = 1, \quad \bar{\mathbf{e}}^e = 0 .$$

Ze związku (2.2.3) mamy:

$$(2.2.51) \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\varrho} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\mathbf{e}}^e}, \quad -s = \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}, \quad \boldsymbol{\pi}_i = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_i} .$$

Bez utraty ogólności, współczynnik sprężystego naprężenia cieplnego  $\frac{\partial s}{\partial \bar{\mathbf{e}}^e}$  oraz ciepło właściwe przy stałych odkształceniach  $c_e = \vartheta \frac{\partial s}{\partial \vartheta}$  możemy zapisać w postaci:

$$(2.2.52) \quad \frac{\partial s}{\partial \bar{\mathbf{e}}^e} = -\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial s_1(\mathbf{e}^e, \alpha_i)}{\partial \bar{\mathbf{e}}^e} + \frac{\partial \Delta s_1(\mathbf{e}^e, \vartheta, \alpha_i)}{\partial \bar{\mathbf{e}}^e} ,$$



$$\text{gdzie } \left. \frac{\partial \Delta s_1(\mathbf{e}^\varepsilon, \vartheta, \alpha_i)}{\partial \mathbf{e}^\varepsilon} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$$

oraz

$$(2.2.53) \quad c_\varepsilon = c_\varepsilon(\vartheta, \alpha_i) + \Delta c_\varepsilon(\mathbf{e}^\varepsilon, \vartheta, \alpha_i),$$

gdzie  $\Delta c_\varepsilon(\mathbf{e}^\varepsilon, \vartheta, \alpha_i)|_{\mathbf{e}^\varepsilon=0} = 0$ .

Wielkości  $\frac{\partial \Delta s_1(\mathbf{e}^\varepsilon, \vartheta, \alpha_i)}{\partial \mathbf{e}^\varepsilon}$  oraz  $\Delta c_\varepsilon(\mathbf{e}^\varepsilon, \vartheta, \alpha_i)$  są związane relacją:

$$(2.2.54) \quad \frac{\partial \Delta s_1(\mathbf{e}^\varepsilon, \vartheta, \alpha_i)}{\partial \mathbf{e}^\varepsilon} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{1}{\vartheta_1} \frac{\partial \Delta c_\varepsilon}{\partial \mathbf{e}^\varepsilon} d\vartheta_1.$$

Można to sprawdzić, różniczkując  $c_\varepsilon$  względem  $\mathbf{e}^\varepsilon$  z uwzględnieniem (2.2.52) i (2.2.53).

Wykorzystując (2.2.50), (2.2.52)–(2.2.54), równania stanu (2.2.51) można scałkować (zob. Kleiber i Raniecki (1985)). Otrzymujemy wtedy funkcję  $\phi_1$  (zob. (2.2.49)) w postaci:

$$(2.2.55) \quad \phi_1 = \phi_N(\bar{\mathbf{e}}^\varepsilon, \beta, \alpha_i) - (\vartheta - \vartheta_0) s_1(\bar{\mathbf{e}}^\varepsilon, \beta, \alpha_i) + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right) c_\varepsilon d\vartheta_1.$$

Zakładamy, że ciepło właściwe dla metali  $c_\varepsilon$  zależy tylko od  $\alpha_i$  (klasyczna teoria Debye'a dla metali, zob. np. Callen(1960)). Wtedy

$$(2.2.56) \quad c_\varepsilon = \vartheta \frac{\partial s}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \vartheta = c_\varepsilon^0(\alpha_i)$$

i w konsekwencji, energia swobodna  $\phi$  przyjmuje postać

$$(2.2.57) \quad \begin{aligned} \phi = & \phi_N(\bar{\mathbf{e}}^\varepsilon, \beta, \alpha_i) - (\vartheta - \vartheta_0) s_1(\bar{\mathbf{e}}^\varepsilon, \beta, \alpha_i) + c_\varepsilon^0(\alpha_i) (\vartheta - \vartheta_0) - \\ & - c_\varepsilon^0(\alpha_i) \vartheta \ln(\vartheta/\vartheta_0) + u^*(\alpha_i) - \vartheta s^*(\alpha_i), \end{aligned}$$

gdzie

$$\phi_N(\mathbf{0}, 1, \alpha_i) = 0, \quad s(\mathbf{0}, 1, \alpha_i) = 0, \quad \frac{\partial \phi_N}{\partial \bar{\mathbf{e}}^\varepsilon} = \frac{\partial \phi_N}{\partial \beta} = 0 \quad \text{dla } \beta = 1, \bar{\mathbf{e}}^\varepsilon = 0.$$

Teraz wyprowadzimy funkcję  $\phi_N$ . Uwzględniając  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{e}^\varepsilon} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\mathbf{e}}^\varepsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \beta \mathbf{1}$ , z równań (2.2.51) i (2.2.57) otrzymamy dla części dewiatorowej i kulistej tensora  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$(2.2.58) \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\mathbf{e}}^\varepsilon} = \frac{\partial \phi_N}{\partial \bar{\mathbf{e}}^\varepsilon} - (\vartheta - \vartheta_0) \frac{\partial s_1}{\partial \bar{\mathbf{e}}^\varepsilon}, \quad -p_r = \frac{1}{3} \tau_{kk} = \beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta}.$$

Zdefiniujemy sprężysty moduł odkształcenia postaciowego jako

$$(2.2.59) \quad \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial \bar{\varepsilon}_{kl}^\varepsilon} \equiv \frac{1}{\varrho} \mu^{(\boldsymbol{\tau})} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

i jeśli, niezależnie od temperatury, wpływ  $\bar{\epsilon}_{ij}^e(\bar{\tau}_{ij})$  na sprężysty moduł odkształcenia postaciowego jest mały, to z (2.2.57)–(2.2.59) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{\varrho^*(\alpha_i)} \beta \mu^{(\tau)}(\beta, \vartheta, \alpha_i) \bar{\mathbf{e}}^e \cdot \bar{\mathbf{e}}^e + \frac{1}{\varrho^*(\alpha_i)} \left[ \Gamma_1(\beta, \alpha_i) - (\vartheta - \vartheta_0) \Gamma_2(\beta, \alpha_i) \right] + \\ (2.2.60) \quad & + c_e^0(\alpha_i) (\vartheta - \vartheta_0) - c_e^0(\alpha_i) \vartheta \ln(\vartheta/\vartheta_0) + u^*(\alpha_i) - \vartheta s^*(\alpha_i) \end{aligned}$$

oraz

$$(2.2.61) \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\varrho} = 2\mu^{(\tau)}\beta \frac{1}{\varrho^*} \bar{\mathbf{e}}^e, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu^{(\tau)}\bar{\mathbf{e}}^e,$$

gdzie

$$(2.2.62) \quad \mu^{(\tau)}(\beta, \vartheta, \alpha_i) = \mu_0^{(\tau)}(\beta, \alpha_i) - \mu_T^{(\tau)}(\beta, \alpha_i)(\vartheta - \vartheta_0).$$

Funkcje  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  spełniają warunki

$$(2.2.63) \quad \Gamma_1 = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \beta} = \Gamma_2 = 0 \quad \text{dla } \beta = 1.$$

Zajmiemy się teraz częścią kulistą tensora  $\boldsymbol{\tau}$ . Zdefiniujemy sprężysty moduł objętościowy jako:

$$\begin{aligned} (2.2.64) \quad K^{(h)} = & -\beta \frac{\partial p}{\partial \beta}, \quad \text{gdzie } -p = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \\ \frac{1}{\varrho} K^{(\tau)} = & -\frac{\partial p_\tau}{\partial(\text{tre}^e)} = -\beta \frac{\partial p_\tau}{\partial \beta} K^{(\tau)} = -p + K^{(h)}. \end{aligned}$$

W przypadku małych ciśnień (np. rzędu granicy plastyczności) zakładamy, że wpływ sprężystej zmiany gęstości (reprezentowany przez  $\beta$ ) na moduły sprężystości  $\mu^{(\tau)}$ ,  $K^{(\tau)}$  jest pomijalnie mały. Wtedy  $\beta = 1 + \text{tre}^e + O(|e^e|^2)$  (zob. (2.1.4)) i przy takim stopniu dokładności ( $1 - \beta$  jest rzędu  $10^{-3}$ ) mamy następujące przybliżenia:

$$\begin{aligned} (2.2.65) \quad \Gamma_1 = & \frac{1}{2} K_0(\alpha_i) (\beta - 1)^2, \\ \Gamma_2 = & 3\alpha_0(\alpha_i) K_0(\alpha_i) (\beta - 1) + \frac{1}{2} K_T(\alpha_i) (\beta - 1)^2 + \dots \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (2.2.66) \quad \mu^{(\tau)} = & \mu(\vartheta, \alpha_i) + O(|\beta - 1|), \\ \mu(\vartheta, \alpha_i) = & \mu_0(\alpha_i) - \mu_T(\alpha_i)(\vartheta - \vartheta_0). \end{aligned}$$

Średnie ciśnienie wynosi

$$\begin{aligned} -p_r &= \frac{\partial \phi}{\partial(\text{tre}^\epsilon)} = \beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} = \frac{\beta}{\varrho^*} \{K_0(\beta - 1) - (\vartheta - \vartheta_0)[3\alpha_0 K_0 + K_T(\beta - 1)]\} \\ (2.2.67) \quad &= \frac{\beta}{\varrho^*} [K(\beta - 1) - 3\alpha_0 K_0(\vartheta - \vartheta_0)], \end{aligned}$$

gdzie  $K = K_0 - (\vartheta - \vartheta_0)K_T$  jest zwykłym sprężystym modulem objętościowym. Ostatecznie, energia swobodna przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\varrho^*} \beta \mu(\vartheta, \alpha_i) \bar{\mathbf{e}}^\epsilon \cdot \bar{\mathbf{e}}^\epsilon + \frac{1}{2\varrho^*} [K_0(\alpha_i) - K_T(\alpha_i)(\vartheta - \vartheta_0)](\beta - 1)^2 - \\ (2.2.68) \quad &- \frac{3}{\varrho^*} \alpha_0(\alpha_i) K_0(\alpha_i)(\beta - 1)(\vartheta - \vartheta_0) + c_e^0(\alpha_i)(\vartheta - \vartheta_0) - \\ &- c_e^0(\alpha_i) \vartheta \ln(\vartheta/\vartheta_0) + u^*(\alpha_i) - \vartheta s^*(\alpha_i). \end{aligned}$$

Ta postać energii, uwzględniając (2.2.47) pozwala nam zapisać

$$(2.2.69) \quad \frac{\varrho_0}{\varrho} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu^{(\tau)} \bar{\mathbf{e}}^\epsilon, \quad \text{gdzie} \quad \mu^{(\tau)} = \frac{\beta}{1 - \Upsilon} \mu(\vartheta, \alpha_i)$$

i dla części kulistej

$$(2.2.70) \quad \frac{\varrho_0}{3\varrho} \sigma_{kk} = K^{(\tau)}(\beta - 1) - 3\alpha_0 K_0^{(\tau)}(\vartheta - \vartheta_0),$$

gdzie:

$$(2.2.71) \quad K^{(\tau)} = \frac{\beta}{1 - \Upsilon} [K_0 - (\vartheta - \vartheta_0)K_T], \quad K_0^{(\tau)} = \frac{\beta}{1 - \Upsilon} K_0(\alpha_i).$$

Z równań (2.2.70)–(2.2.71) otrzymamy

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{1} \frac{\text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{3}) = \varrho_0 \boldsymbol{\tau} = 2\mu^{(\tau)} \mathbf{e}^\epsilon + (K^{(\tau)} - \frac{2}{3}\mu^{(\tau)}) \mathbf{1} \text{tr} \mathbf{e}^\epsilon - 3\alpha_0 K_0^{(\tau)}(\vartheta - \vartheta_0) \mathbf{1},$$

stąd

$$(2.2.72) \quad \varrho_0 \boldsymbol{\tau} = \mathbf{L}^{(\tau)} \mathbf{D}^\epsilon - 3\alpha_0 K_0^{(\tau)}(\vartheta - \vartheta_0) \mathbf{1}.$$

Różniczkując ten związek względem czasu i uwzględniając wyprowadzoną relację w Załączniku A.2:

$$(2.2.73) \quad \dot{\bar{\mathbf{e}}}^\epsilon \equiv \dot{\mathbf{e}}^\epsilon + \mathbf{e}^\epsilon \boldsymbol{\omega}^\epsilon - \boldsymbol{\omega}^\epsilon \mathbf{e}^\epsilon = \mathbf{D}^\epsilon + O(|\dot{\mathbf{e}}^\epsilon|^2),$$

możemy otrzymać prędkościowy związek między  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ ,  $\mathbf{D}^\epsilon$  i  $\dot{\vartheta}$  dla części termosprężystej. Dla ciał izotropowych  $\boldsymbol{\omega}^\epsilon = \boldsymbol{\omega}$  (zob.(2.2.18)), (2.2.73), jest zwykłą pochodną Zarembki-Jaumann tensora  $\mathbf{e}^\epsilon$  z całkowitym spinem. Uogólniony izotermiczny tensor podatności sprężystej  $\mathbf{L}^{(\tau)}$  w (2.2.72) może być przedstawiony w postaci

$$L_{ijkl}^{(\tau)} = \mu^{(\tau)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + (K^{(\tau)} - \frac{2}{3}\mu^{(\tau)}) \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

**Dyssypacja. Prawa płynięcia.** Moc dyssypacji mechanicznej (2.2.16)  $\mathcal{F}$  ma teraz postać

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \dot{W} - \dot{W}^0 = \text{tr}(\mathbf{T}^* \mathbf{V}^*) - \pi_i \dot{\alpha}_i = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \pi_i \dot{\alpha}_i \\ (2.2.74) \quad &= \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - p_r \text{tr} \mathbf{D}^p - \pi_i \dot{\alpha}_i. \end{aligned}$$

Uwzględniając relacje (2.2.44), (2.2.46), możemy zapisać powyższy związek w postaci

$$(2.2.75) \quad \mathcal{F} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - p_r \dot{F} - \pi_i \dot{\alpha}_i, \quad \text{gdzie} \quad F = \ln \frac{1}{1 - \Upsilon}.$$

Plastyczne prawa płynięcia wiążą siły termodynamiczne  $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, -p_r, \pi_i)$  z prędkościami  $(\bar{\mathbf{D}}^p, \dot{F}, \dot{\alpha}_i)$  występującymi we wzorze (2.2.75).

Jako przykład podamy wszystkie przedstawione równania dla szczególnego przypadku.

Ponieważ udział objętościowy mikropustek jest mały, co najwyżej kilkuprocentowy (oprócz ostatniej fazy, gdy łączą się one przed zniszczeniem), pominiemy wpływ  $\Upsilon$  na właściwości sprężyste materiału. Dla części sprężystej mamy:

$$(2.2.76) \quad \varrho_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \varrho_0 (\dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{L} \mathbf{D}^e - \mathbf{B} \dot{\vartheta},$$

gdzie  $\mathbf{L}$  jest uogólnionym izotermicznym tensorem podatności sprężystej a  $\mathbf{B}$  - tensorem naprężenia cieplnego matrycy.

Dla części plastycznej, przyjmujemy na przykład funkcję płynięcia plastycznego wg Gursona (1977) w postaci

$$(2.2.77) \quad f(\boldsymbol{\tau}, \sigma_e(\alpha, \vartheta), \Upsilon) \equiv \frac{3}{2} \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\sigma_e^2} + 2\Upsilon \cosh\left(-\frac{3p_r}{2\sigma_e}\right) - (1 + \Upsilon^2) = 0,$$

która zawiera dwa parametry:  $\Upsilon$  - udział objętościowy pustek i miarę bieżącego naprężenia matrycy  $\sigma_e$ . To naprężenie zależy od temperatury  $\vartheta$  i parametru wewnętrznego  $\alpha$ , który spełnia równanie

$$(2.2.78) \quad \dot{\alpha} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p.$$

Z (2.2.77) mamy

$$(2.2.79) \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{3}{\sigma_e^2} \bar{\boldsymbol{\tau}} + \frac{\Upsilon}{\sigma_e} \sinh\left(-\frac{3p_r}{2\sigma_e}\right) \mathbf{1}$$

i

$$(2.2.80) \quad \bar{\mathbf{D}}^p = 3\Lambda \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}}{\sigma_e^2}, \quad \text{tr} \mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\Upsilon}{\sigma_e} \sinh\left(-\frac{3p_r}{2\sigma_e}\right) \mathbf{1}.$$

Przedstawiliśmy uogólnienie wyników dla ciał z mikropustkami i mikropęknięciami. Wykorzystując miarę logarytmiczną odkształcenia sprężystego jako parametr stanu, wyprowadzono analityczną postać energii swobodnej, ważną w zakresie dużych deformacji.



## 2.2.2 Przypadek anizotropii indukowanej odkształceniami plastycznymi

W ostatnich latach poświęcono dużo wysiłków w celu wyprowadzenia równań konstytutywnych dla ciał z anizotropią indukowaną odkształceniami plastycznymi (zob. Nguyen (1992a)). Obszerną bibliografię aktualnych prac na temat modeli skończonych deformacji plastycznych z efektem anizotropii indukowanej odkształceniem podano w pracy habilitacyjnej Pęcherskiego (1998). Proponowane modele mają zastosowanie w zagadnieniach, gdzie obrót materiału odgrywa istotną rolę, np. przy dużym skręceniu próbek.

### 1. Założenia i postać energii swobodnej

Rozwijając wyrażenie (2.1.4)<sub>3</sub> w szereg i zachowując jedynie jego pierwszy człon, otrzymamy następujący związek:

$$(2.2.81) \quad \mathbf{U}^e = \beta^{\frac{1}{2}}(1 + \bar{\mathbf{E}}_{(0)}^e) + O(|\bar{\mathbf{E}}_{(0)}^e|^2).$$

Ten przybliżony związek wykorzystał w swoich pracach Willis (1969; 1975). W naszych rozważaniach zakładamy, że sprężyste deformacje postaciowe są małe i można zastosować powyższe przybliżenie. Pomijając człony drugiego rzędu, związki kinematyczne (1.1.7) przyjmują postać:

$$(2.2.82) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}^e &= \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{1} + \mathbf{R}^e \dot{\bar{\mathbf{E}}}_{(0)}^e \mathbf{R}^{eT}, & \boldsymbol{\omega}^e &= \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT}, \\ \mathbf{D}^p &= \mathbf{R}^e \mathbf{D}^* \mathbf{R}^{eT} - \mathbf{R}^e (\boldsymbol{\omega}^* \bar{\mathbf{E}}_{(0)}^e - \bar{\mathbf{E}}_{(0)}^e \boldsymbol{\omega}^*) \mathbf{R}^{eT}, \\ \boldsymbol{\omega}^p &= \mathbf{R}^e \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{R}^{eT} - \mathbf{R}^e (\mathbf{D}^* \bar{\mathbf{E}}_{(0)}^e - \bar{\mathbf{E}}_{(0)}^e \mathbf{D}^*) \mathbf{R}^{eT} \end{aligned}$$

albo równoważnie:

$$(2.2.83) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}^e &= \check{\mathbf{e}}^e + O(|\check{\mathbf{e}}^e|^2), \\ \mathbf{R}^e \mathbf{D}^* \mathbf{R}^{eT} &= \mathbf{D}^p + (\boldsymbol{\omega}^p \check{\mathbf{e}}^e - \check{\mathbf{e}}^e \boldsymbol{\omega}^p) + O(|\check{\mathbf{e}}^e|^2), \\ \mathbf{R}^e \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{R}^{eT} &= \boldsymbol{\omega}^p + (\mathbf{D}^p \check{\mathbf{e}}^e - \check{\mathbf{e}}^e \mathbf{D}^p) + O(|\check{\mathbf{e}}^e|^2). \end{aligned}$$

W celu uproszczenia zapisu, przyjmiemy teraz tylko jeden wewnętrzny parametr tensorowy symetryczny drugiego rzędu  $\boldsymbol{\alpha}$  i jeden parametr skalarny  $\varrho$ . Zostaną one określone później. Wydaje się, że dla metali uzasadnione jest przyjęcie następujących założeń:

1. Materiał jest plastycznie nieściśliwy, czyli:

$$(2.2.84) \quad \varrho_* = \varrho_0 = \text{const}, \quad \beta = \frac{\varrho_0}{\varrho}.$$

2. Wzmocnienie materiału nie wpływa na własności termosprężyste.
3. Część postaciowa odkształcenia sprężystego jest liniowa i mała. Materiał jest izotropowy w zakresie sprężystym w konfiguracji chwilowej odciążonej ( $k_*$ ).
4. Ciepło właściwe przy stałej objętości  $c_v$  jest stałe (klasyczna teoria Debye'a metali, zob. np. Callen (1960)).
5. Energia swobodna jest funkcją izotropową i kwadratową parametru tensorowego  $\alpha$ .

Przyjmując założenia (1),(2),(3),(5), energia swobodna ma następującą postać:

$$(2.2.85) \quad \phi = \phi_1(\beta, \vartheta) + \frac{\beta\mu}{\varrho_0} \bar{\mathbf{e}}^e \cdot \bar{\mathbf{e}}^e + u^*(\alpha, \alpha) - \vartheta s^*(\alpha^*),$$

gdzie  $\mu$  jest postaciowym izotermicznym modułem sprężystości Lamé'go. Może on w ogólnym przypadku zależeć od  $\beta, \vartheta$  (Raniecki i Nguyen (1984)). Wielkości  $u^*, s^*$  są zmagazynowaną energią wewnętrzną i zmagazynowaną entropią w stanie naturalnym, gdzie  $\sigma = 0$  oraz  $\vartheta = 0$ :

$$(2.2.86) \quad u^*(\alpha, \alpha) = \frac{1}{\varrho_0} \phi_2(\alpha) + \frac{1}{2\varrho_0} (c_0 + c_T \vartheta_0) \alpha \cdot \alpha,$$

$$s^*(\alpha) = \frac{1}{2\varrho_0} c_T \alpha \cdot \alpha,$$

gdzie  $c_0$  i  $c_T$  są stałe. Związki naprężenie - odkształcenie sprężyste (2.2.3)<sub>1</sub> mają postać:

$$(2.2.87) \quad \bar{\sigma} = 2\mu \bar{\mathbf{e}}^e, \quad -p \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{ii}/3 = \varrho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} + \frac{\partial(\beta\mu)}{\partial \beta} \bar{\mathbf{e}}^e \cdot \bar{\mathbf{e}}^e,$$

gdzie

$$(2.2.88) \quad \bar{\sigma} = \sigma + \mathbf{1} p$$

oraz

$$(2.2.89) \quad \phi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{dla } \beta = 1 \text{ i } \vartheta = \vartheta_0.$$

Zależność (2.2.85) dla ciał izotropowych wyprowadził po raz pierwszy Willis (1975) zakładając, że stosunek granicy plastyczności przy ścinaniu do modułu Lamé'go  $\mu$  jest znacznie mniejszy od jedności. Powyżej wyprowadziliśmy taką postać funkcji energii swobodnej, gdzie  $\bar{\mathbf{e}}^e$  jest dewiatorem logarytmicznego odkształcenia sprężystego. Funkcja  $\phi_1$  musi być określona na podstawie zachowania materiału pod dużym ciśnieniem  $p$ . Zgodnie z wzorem (2.2.9)<sub>3</sub>, mamy

$$(2.2.90) \quad c_e = c_v(\beta, \vartheta) - \frac{\beta \vartheta}{\varrho_0} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \vartheta^2} \bar{\mathbf{e}}^e \cdot \bar{\mathbf{e}}^e, \quad c_v = -\vartheta \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \vartheta^2},$$

gdzie  $c_v$  jest ciepłem właściwym przy stałej objętości. Uwzględniając założenie trzecie, człony zawierające  $\bar{\mathbf{e}}^e \cdot \bar{\mathbf{e}}^e$  mogą być pominięte. Wtedy z zależności (2.2.87)<sub>2</sub> i (2.2.90) otrzymamy:

$$(2.2.91) \quad -p = \varrho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta}, \quad c_e = c_v(\beta, \vartheta).$$

Wykorzystanie założenia czwartego daje  $c_e = c_v = \text{const}$ . Wtedy równanie (2.2.90)<sub>2</sub> może być scałkowane tak jak w pracy Swana i Thornhilla (1974) i znajdujemy funkcję  $\phi_1$  w postaci:

$$(2.2.92) \quad \phi_1 = -c_v \vartheta \ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0} + c_v (\vartheta - \vartheta_0) - (\vartheta - \vartheta_0) \phi_0(\beta) + \psi(\beta),$$

gdzie

$$\phi_0 = \psi = \frac{d\psi}{d\beta} = 0 \quad \text{dla } \beta = 1.$$

Różne szczególne postaci  $\phi_0$  i  $\psi$  omówiono w pracach Swana i Thornhilla (1974).

Wykorzystując zależności (2.2.85) i (2.2.6) możemy znaleźć tensory  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{B}$  występujące w równaniach (2.2.7), pomijając przy tym czony rzędu  $\bar{\mathbf{e}}^e \cdot \bar{\mathbf{e}}^e$ :

$$(2.2.93) \quad L_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} (K_T - p) + \mu \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \\ + \frac{1}{\mu} \frac{\partial(\beta\mu)}{\partial\beta} (\delta_{ij} \bar{\sigma}_{km} + \delta_{km} \bar{\sigma}_{ij}),$$

$$B_{ij} = \alpha_v K_T \delta_{ij} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial\mu}{\partial\vartheta} \bar{\sigma}_{ij},$$

gdzie  $K_T$  jest izotermicznym modułem ścisłości objętościowej a  $\alpha_v$  współczynnikiem rozszerzalności cieplnej w hydrodynamicznej teorii ciał stałych:

$$(2.2.94) \quad K_T = \varrho_0 \beta \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \beta^2}, \\ \alpha_v = - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \beta \partial \vartheta} \left( \beta \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \beta^2} \right)^{-1}.$$

Przyjmując przybliżenie pierwszego rzędu dla  $|\bar{\mathbf{e}}^e|$ , ostatnie czony w zależności (2.2.93) możemy pominąć.

## 2. Prędkościowe równania konstytutywne

Na podstawie związków (2.2.3), (2.2.85) i (2.2.86), postępując podobnie jak w punkcie (2.2.1) dla części termosprężystej, mamy

$$(2.2.95) \quad \overset{\circ}{\mathbf{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\omega}^e \mathbf{T} + \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}^e = \beta (\mathbf{L} \mathbf{D}^e - \mathbf{B} \dot{\vartheta}) + O(|\dot{\mathbf{e}}^e|^2),$$

$$\varrho \dot{\vartheta} \dot{\mathbf{s}} = \dot{\vartheta} \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}^e + \varrho c_v \dot{\vartheta} + \frac{\varrho}{\varrho_0} \dot{\vartheta} c_T \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} + O(|\dot{\mathbf{e}}^e|^2),$$

gdzie  $\mathbf{T} = \varrho_0 \boldsymbol{\tau} = \beta \boldsymbol{\sigma}$  jest tensorem naprężenia Kirchhoffa. Zakładamy dodatkowo, że  $\mu = \text{const}$ ,  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{B}$  są odpowiednio uogólnionym tensorem modułu sprężystości i tensorem naprężeń cieplnych w konfiguracji aktualnej. Mają one postać:

$$(2.2.96) \quad L_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} (K_T - p) + \mu \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right),$$

$$B_{ij} = \alpha_v K_T \delta_{ij}.$$

Zajmiemy się teraz równaniami konstytutywnymi dla części plastycznej. Bierzemy najprostszą postać dla parametru wewnętrznego tensorowego w konfiguracji chwilowej odciążonej  $\boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{R}^{eT} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{R}^e$ :

$$(2.2.97) \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}^* = \mathbf{D}^*, \quad \text{tr} \boldsymbol{\alpha}^* = 0.$$

Z równań (2.1.19), (2.2.85) i (2.2.86) możemy wyliczyć siły termodynamiczne  $\pi_1$  i  $\boldsymbol{\pi}^*$  skoniugowane z parametrami wewnętrznymi  $\alpha$  i  $\boldsymbol{\alpha}^*$ :

$$(2.2.98) \quad \pi_1 = \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\phi_2}{d\alpha}, \quad \boldsymbol{\pi}^* = \frac{1}{\varrho_0} \left[ c_0 - c_T (\vartheta - \vartheta_0) \right] \boldsymbol{\alpha}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varrho_0} c \boldsymbol{\alpha}^*.$$

Załóżmy, że siłę  $\boldsymbol{\pi}^*$  można utożsamiać z naprężeniem szczątkowym 2-go rodzaju (ang. *back stress*), które określa położenie środka symetrii powierzchni plastyczności. Wówczas równanie ewolucji dla tej siły w konfiguracji odciążonej izoklinicznej ( $k_*$ ) ma postać:

$$(2.2.99) \quad \dot{\boldsymbol{\pi}}^* = \frac{1}{\varrho_0} c \mathbf{D}^* - \frac{c_T}{c} \dot{\vartheta} \boldsymbol{\pi}^*,$$

a moc dyssypacji (2.1.15) wynosi:

$$(2.2.100) \quad \mathcal{F} = (\mathbf{T}^R - \boldsymbol{\pi}^*) \cdot \mathbf{D}^* - \pi_1 \dot{\alpha}.$$

Przyjmując uogólniony warunek plastyczności Hubera-Misesa w konfiguracji odciążonej:

$$(2.2.101) \quad f = \frac{3}{2} (\bar{\mathbf{T}}^R - \boldsymbol{\pi}^*) \cdot (\bar{\mathbf{T}}^R - \boldsymbol{\pi}^*) - Y^2(\vartheta, \pi_1) = 0,$$



stowarzyszone z nim prawa płynięcia plastycznego możemy zapisać w postaci:

$$(2.2.102) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}^* &= j \Lambda_* \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{T}}^R}, \\ -\dot{\boldsymbol{\alpha}}^* &= j \Lambda_* \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}^*}, \\ -\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= j \Lambda_* \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}_1}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(2.2.103) \quad j = \begin{cases} 1 & \text{dla } f = 0 \wedge \Lambda_* \geq 0 \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge \Lambda_* < 0) \vee f < 0. \end{cases}$$

Współczynnik  $\Lambda_*$  na powierzchni  $f = 0$  znajdziemy z warunku zgodności

$$(2.2.104) \quad \Lambda_* = \varrho_0 \frac{3(\bar{\mathbf{T}}^R - \boldsymbol{\pi}^*) \cdot \left( \dot{\bar{\mathbf{T}}}^R + \frac{c_\tau}{c} \dot{\nu} \boldsymbol{\pi}^* \right) - 2Y \frac{\partial Y}{\partial \dot{\nu}} \dot{\nu}}{2Y^2 \left[ 3c + 2 \left( \frac{\partial Y}{\partial \pi_1} \right)^2 \frac{d^2 \phi_2}{d\alpha^2} \right]}.$$

Układ równań (2.2.101)–(2.2.104) jest układem równań konstytutywnych dla części plastycznej w konfiguracji  $(k_*)$ . Możemy go przetransformować do konfiguracji aktualnej przy pomocy relacji (1.1.7) i (2.2.82). Ze związków (2.2.83) wynika fakt, że dla ciał anizotropowych w zakresie plastycznym, normalność w konfiguracji odciążonej  $(k_*)$  nie implikuje normalności w konfiguracji aktualnej  $(k)$ , tak jak w przypadku ciał izotropowych. Ma to miejsce tylko wtedy, gdy możemy pominąć człony  $(\boldsymbol{\omega}^p \bar{\mathbf{e}}^e - \bar{\mathbf{e}}^e \boldsymbol{\omega}^p)$  oraz  $(\mathbf{D}^p \bar{\mathbf{e}}^e - \bar{\mathbf{e}}^e \mathbf{D}^p)$ . Wówczas  $\mathbf{D}^p$ ,  $\boldsymbol{\omega}^p$  i  $\boldsymbol{\tau}$  zdefiniowane w konfiguracji  $(k)$ , różnią się od  $\mathbf{D}^*$ ,  $\boldsymbol{\omega}^*$  oraz  $\bar{\mathbf{T}}^R$  tylko obrotem  $\mathbf{R}^e$ .

Oznaczmy przez  $\boldsymbol{\Pi} = \varrho_0 \boldsymbol{\pi}$  i  $\sigma_Y = \varrho_0 Y$  zwykle naprężenie wewnętrzne i granicę plastyczności przy rozciąganiu. Prawa płynięcia w konfiguracji aktualnej mają postać:

$$(2.2.105) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}^p &= 3j \Lambda (\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi}) - (\boldsymbol{\omega}^p \bar{\mathbf{e}}^e - \bar{\mathbf{e}}^e \boldsymbol{\omega}^p), \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \frac{1}{\sigma_Y} \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Pi} \left[ \mathbf{D}^p + (\boldsymbol{\omega}^p \bar{\mathbf{e}}^e - \bar{\mathbf{e}}^e \boldsymbol{\omega}^p) \right] \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi}), \\ \check{\boldsymbol{\Pi}} &= c \left[ \mathbf{D}^p + (\boldsymbol{\omega}^p \bar{\mathbf{e}}^e - \bar{\mathbf{e}}^e \boldsymbol{\omega}^p) \right] - \frac{c_\tau}{c} \dot{\nu} \boldsymbol{\Pi} \end{aligned}$$

oraz  $\Pi = \varrho_0 \pi_1$ .

Warunek Hubera-Misesa zachowuje swoją postać w konfiguracji  $(k)$

$$(2.2.106) \quad f = \frac{3}{2} (\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi}) \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi}) - \sigma_Y^2 (\dot{\nu}, \Pi) = 0.$$

Parametr  $\Lambda^*$  transformuje się do  $\Lambda$  w konfiguracji aktualnej

$$(2.2.107) \quad \Lambda = \frac{3(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \left( \bar{\mathbf{T}} + \frac{c_T}{c} \dot{\mathbf{\Pi}} \right) - 2\sigma_Y \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \dot{\mathbf{\Pi}}} \dot{\mathbf{\Pi}}}{2\sigma_Y^2 \left[ 3c + 2 \left( \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Pi} \right)^2 \frac{d^2 \phi_2}{d\alpha^2} \right]}$$

Wyraz w nawiasie (w mianowniku wyrażenia (2.2.107)) oznaczamy przez  $H$ . Jest to moduł wzmocnienia plastycznego

$$(2.2.108) \quad H = 3c + 2 \left( \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Pi} \right)^2 \frac{d^2 \phi_2}{d\alpha^2}$$

Składa się on z części wzmocnienia kinematycznego  $h_a = 3c$  oraz części izotropowej  $h_i$  (drugi człon).

Na podstawie zależności (2.2.95)<sub>2</sub> możemy określić równanie dla temperatury w konfiguracji aktualnej. Zmianę temperatury powodują: dyssypacja energii mechanicznej, ciepło odkształcenia sprężystego, ciepło wewnętrznych przemian oraz wymiana ciepła z otoczeniem (zob. Raniecki i Mróz (1989)). Równanie to ma postać:

$$(2.2.109) \quad \rho_0 c_v \dot{\vartheta} = \left( 1 - \frac{\Pi}{\sigma_Y} \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Pi} \right) (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot [\mathbf{D}^p + (\omega^p \bar{\mathbf{e}}^e - \bar{\mathbf{e}}^e \omega^p)] - \beta \operatorname{div} \mathbf{q} - \\ - \vartheta \beta \alpha_v K_T \operatorname{tr} \mathbf{D} - \vartheta \frac{c_T}{c} \mathbf{\Pi} \cdot [\mathbf{D}^p + (\omega^p \bar{\mathbf{e}}^e - \bar{\mathbf{e}}^e \omega^p)],$$

gdzie  $\mathbf{q}$  jest wektorem strumienia ciepła. Można wykazać, że w przypadku ciał izotropowych  $\alpha^* = \alpha = 0$ . Wtedy podane tu równania konstytutywne redukują się do równań podanych w poprzednim punkcie, a w przypadku ciał sztywno-plastycznych sprowadzają się do równań przedstawionych w pracy Ranieckiego i Samanty (1988).

Podsumowując, w punkcie 2 zaproponowano prosty model dla ciał metalicznych ze złożonym wzmocnieniem izotropowym i liniowo-kinematycznym, zmodyfikowanym przez efekt termiczny. Uproszczono równanie konstytutywne, przyjmując stowarzyszony warunek plastyczności Hubera-Misesa oraz pomijając efekt lepkości. Jeśli wymagają tego mechanizmy zjawiska płynięcia można przyjąć inną postać warunku płynięcia. Opis Mandela może być wykorzystany do utworzenia innego bardziej złożonego modelu teorii plastyczności.

W następnym punkcie, wyprowadzimy prawa płynięcia dla procesów izotermicznych i adiabatycznych, wykorzystując procedurę zastosowaną w pracy Nguyenena (1984).

### 3. Izotermiczne i adiabatyczne prawa płynięcia

W poprzednim punkcie wyprowadziliśmy równania konstytutywne dla metalicznych ciał sprężysto-plastycznych w przypadku anizotropii indukowanej. Równania te są podobne do równań zastosowanych dla małych odkształceń. Mogą być one stosowane w całym procesie odkształcenia. Zbadamy teraz równania płynięcia dla procesów izotermicznych lub adiabatycznych. W procesie izotermicznym zakładano, że odbiór ciepła jest na tyle intensywny, iż cząstki ciała nie zmieniają temperatury, a w procesie adiabatycznym nie uwzględnia się transportu ciepła między sąsiednimi cząstkami ciała. Są to dwie skrajnie idealizacje procesów rzeczywistych, często spotykane w obliczeniach oraz w doświadczeniach, np. przy badaniu dynamicznych własności metali. Izotermiczne i adiabatyczne prawa płynięcia dla ciał izotropowych omówiono w pracach Ranieckiego (1976) oraz Nguyena (1984). Pokażemy, że podobnie jak w przypadku małych odkształceń, gdzie niektóre sprzężone efekty termomechaniczne są pominięte, różnica między tymi prawami sprowadza się tylko do postaci funkcji wzmocnienia. W przypadku dużych odkształceń spin plastyczny powoduje odchylenie praw płynięcia od postaci stowarzyszonej. Jest to znany czynnik destabilizujący w procesie lokalizacji odkształceń, zob np. Rice (1976).

Dla przejrzystości, przepisujemy z poprzedniego punktu równania w opisie eulrowskim, pomijając człony rzędu  $|\dot{\mathbf{e}}^e|$ :

$$(2.2.110) \quad \check{\mathbf{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\omega}^e \mathbf{T} + \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}^e = \beta (\mathbf{L} \mathbf{D}^e - \mathbf{B} \dot{\vartheta}),$$

gdzie:  $\mathbf{T} = \beta \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  – tensor naprężenia Cauchy'ego,  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{B}$  zaś są postaci

$$(2.2.111) \quad L_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} (K_T - p) + \mu \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right),$$

$$B_{ij} = \alpha_v K_T \delta_{ij},$$

przy czym  $K_T$  jest izotermicznym modulem sprężystości objętościowej,  $p$  – średnim ciśnieniem,  $\alpha_v$  – termicznym współczynnikiem rozszerzalności objętościowej,  $c_v$  – ciepłem właściwym przy stałej objętości,  $\mu$  – modulem Lamégo.

Plastyczne prawo płynięcia, z warunkiem Hubera–Misesa, w przypadku wzmocnienia izotropowego i liniowo-kinematycznego ma postać:

$$(2.2.112) \quad f = \frac{3}{2} (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) - \sigma_V^2 (\vartheta, \pi(\alpha)) = 0,$$

$$D^p = 3j \Lambda (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}),$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{gdy } f = 0 \wedge \Lambda \geq 0, \\ 0 & \text{gdy } (f = 0 \wedge \Lambda < 0) \vee f < 0, \end{cases}$$

$$\Lambda = \frac{3(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \left( \check{\mathbf{T}} + \frac{c_T}{c} \dot{\vartheta} \mathbf{\Pi} \right) - 2\sigma_V \frac{\partial \sigma_V}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}}{2\sigma_V^2 H},$$



gdzie  $\mathbf{D}^p$  jest tensorem prędkości deformacji plastycznej. Plastyczny moduł wzmocnienia  $H$  składa się z części kinematycznej i izotropowej:

$$(2.2.113) \quad H = 3c + 2 \left( \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Pi} \right)^2 \frac{d\Pi}{d\alpha},$$

gdzie  $\alpha$  jest skalarnym parametrem modyfikującym "rozmiar" powierzchni płynięcia, a  $\Pi$  jest skoniugowaną z nim skalarną siłą termodynamiczną. Równanie ewolucji dla  $\alpha$  ma postać:

$$(2.2.114) \quad \dot{\alpha} = \frac{1}{\sigma_Y} \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Pi} \mathbf{D}^p \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}).$$

Funkcja  $\Pi(\alpha)$  może być wyprowadzona z postaci energii zmagazynowanej  $\rho_0 u^*$  (Raniecki i Nguyen) (1984). Energia zmagazynowana reprezentuje różnicę między wykonaną pracą plastyczną oraz ciepłem emitowanym w izotermicznym cyklu obciążenia. Jest to mierzalna wielkość w doświadczeniach makroskopowych (zob. np. Oliferuk et al. (1985)). Autorzy ci opracowali metodę pomiaru i analizy zmiany energii zmagazynowanej w trakcie rozciąganiu próbki przy pomocy kamery termowizyjnej.

Przesunięcie powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeniowej określa się przez tensor naprężenia wewnętrznego  $\mathbf{\Pi}$ , którego równanie ewolucji przyjmuje się w postaci liniowego wzmocnienia kinematycznego zmodyfikowanego efektem termicznym

$$(2.2.115) \quad \dot{\mathbf{\Pi}} = c \mathbf{D}^p - \frac{c_T}{c} \dot{\vartheta} \mathbf{\Pi},$$

gdzie  $c = c_0 - c_T(\vartheta - \vartheta_0)$ ,  $c_0, c_T, \vartheta_0 = \text{const}$ . Zmianę temperatury  $\vartheta$  wyraża równanie:

$$(2.2.116) \quad \rho_0 c_v \dot{\vartheta} = \left( 1 - \frac{\Pi}{\sigma_Y} \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Pi} \right) (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{D}^p - \beta \operatorname{div} \mathbf{q} - \vartheta \beta \alpha_\nu K_T \operatorname{tr} \mathbf{D} - \vartheta \frac{c_T}{c} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{D}^p,$$

gdzie  $\mathbf{q}$  jest wektorem strumienia ciepła. Równanie to możemy zapisać w innej formie

$$(2.2.117) \quad \rho_0 c_v \dot{\vartheta} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}^p - \rho_0 \dot{u}^* - \beta \operatorname{div} \mathbf{q} - \vartheta \beta \alpha_\nu K_T \operatorname{tr} \mathbf{D}.$$

Z równań (2.2.110), (2.2.112) otrzymujemy

$$(2.2.118) \quad \dot{\bar{\mathbf{T}}} = 2\mu\beta \left[ \bar{\mathbf{D}} - 3j \Lambda(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \right].$$

Z zależności (2.2.118) możemy wyliczyć człon  $\dot{\bar{\mathbf{T}}} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi})$ . Tensor prędkości deformacji plastycznej napiszemy natomiast w innej postaci:



$$(2.2.119) \quad \bar{\mathbf{D}}^p = \frac{3j(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi})}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}_i} \left[ \mathbf{D} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) - m_\vartheta \dot{\vartheta} \right] = \frac{3j(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi})}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}_i} \Psi,$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{dla } f = 0 \wedge \Psi \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge \Psi < 0) \vee f < 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.2.120) \quad \mathcal{H}_i = 1 + \frac{H}{6\mu\beta} \quad - \text{izotermiczna funkcja wzmocnienia,}$$

$$m_\vartheta = \frac{1}{6\mu\beta} \left[ 2\sigma_Y \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \vartheta} - 3 \frac{c_T}{c} (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{\Pi} \right] \quad - \text{współczynnik termicznego osłabienia} \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2 \text{K}} \right].$$

Z równania (2.2.116) otrzymujemy

$$(2.2.121) \quad \dot{\vartheta} = j \frac{q_d + q_r}{\mathcal{H}_i} \Psi + Q - h_\varepsilon \text{tr} \mathbf{D},$$

tu

$$(2.2.122) \quad q_d = \frac{1 - \frac{n}{\sigma_Y} \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Pi}}{\rho_0 c_v} \quad - \text{termiczny współczynnik}$$

dysypacji energii mechanicznej  $\left[ \frac{\text{K m}^2}{\text{N}} \right],$

$$q_r = - \frac{3c_T(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{\Pi}}{2c \rho_0 c_v \sigma_Y^2} \quad - \text{termiczny współczynnik ciepła}$$

przemian wewnętrznych  $\left[ \frac{\text{K m}^2}{\text{N}} \right],$

$$(2.2.123) \quad h_\varepsilon = \frac{\vartheta \beta \alpha_v K_T}{\rho_0 c_v} \quad - \text{termiczny współczynnik ciepła deformacji}$$

sprężystej  $[K],$

$$Q = - \frac{\beta}{\rho_0 c_v} \text{div} \mathbf{q} \quad - \text{miara ciepła pobieranego}$$

z otoczenia  $\left[ \frac{\text{K}}{\text{s}} \right].$

Korzystając z definicji (2.2.120)–(2.2.123), z równań (2.2.119) i (2.2.121) otrzymujemy:

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \frac{3j(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi})}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}_a} \left[ \mathbf{D} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) - m_\vartheta(\mathcal{Q} - h_\varepsilon \text{tr} \mathbf{D}) \right] = \frac{3j(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi})}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}_a} \Psi_a,$$

$$(2.2.124) \quad j = \begin{cases} 1 & \text{dla } f = 0 \wedge \Psi_a \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge \Psi_a < 0) \vee f < 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_a = \mathcal{H}_i + m_\vartheta(q_d + q_r) \quad - \text{adiabaticzna funkcja wzmocnienia,}$$

$$(2.2.125) \quad \dot{\vartheta} = j \frac{q_d + q_r}{\mathcal{H}_a} (\mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D} - m_\vartheta \mathcal{Q}) + \mathcal{Q} - h_\varepsilon \text{tr} \mathbf{D},$$

gdzie

$$(2.2.126) \quad \mathbf{\Lambda}^f = (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) + m_\vartheta h_\varepsilon \mathbf{1}.$$

Gdy  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$  ze związków (2.2.118), (2.2.119), (2.2.121) możemy otrzymać prawa płynięcia plastycznego oraz równanie temperatury w procesie izotermicznym:

$$(2.2.127) \quad \check{\mathbf{T}} = \beta \mathbf{L} \mathbf{D} - \frac{3j\mu\beta(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi})}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}_i} \left[ \mathbf{D} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \right],$$

$$(2.2.128) \quad 0 = \left( 1 - \frac{\pi}{\sigma_Y} \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \pi} - \frac{3\vartheta_0 c_\tau (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{\Pi}}{2\rho_0 c c_v \sigma_Y^2} \right) \frac{(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{D}}{\mathcal{H}_i} - \beta \text{div} \mathbf{q} - \\ - \vartheta_0 \beta \alpha_v K_\tau \text{tr} \mathbf{D}.$$

Gdy  $\mathcal{Q} = 0$ , zachowanie materiału w procesie adiabaticznym opisuje następujące równanie:

$$(2.2.129) \quad \check{\mathbf{T}} = \beta \mathbf{L}^a \mathbf{D} - \frac{3j\mu\beta}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}_a} (\mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}) \mathbf{\Lambda}^g.$$

Uwzględniono w nim zależności (2.2.118), (2.2.124); przy czym

$$(2.2.130) \quad \mathbf{\Lambda}^g = (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) + \frac{\alpha_v K_\tau (q_d + q_r) \sigma_Y^2}{3\mu} \mathbf{1}$$

oraz

$$(2.2.131) \quad L_{ijkl}^a = \delta_{ij} \delta_{kl} \left[ (1 + \alpha_v q_\varepsilon) K_\tau - p \right] + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl})$$

jest uogólnionym adiabatycznym tensorem modułów sprężystych. Dla małych ciśnień, możemy pominąć rozszerzalność termiczną (człony zawierające  $\alpha_v$ ), ciepło deformacji sprężystej (człony zawierające  $h_e$ ), tak jak uczynili to Mróz i Raniecki (1976), to znaczy, że możemy pominąć drugi człon po prawej stronie równań (2.2.126) i (2.2.130). Oprócz tego, z równania (2.2.131) mamy  $\mathbf{L}^s = \mathbf{L}$ , a różnica między (2.2.127), (2.2.129) jest taka, że  $\mathcal{H}_i \neq \mathcal{H}_a$ .

Równania (2.2.115), (2.2.127), (2.2.129) nie są wygodne w stosowaniu, ponieważ spin sprężysty  $\omega^s$  występuje po ich lewej stronie. W procesach izotermicznych i adiabatycznych (gdym pominięte są niektóre wspomniane wyżej efekty sprzężone) prawa płynięcia możemy wyrazić przy użyciu pochodnej Zaremby-Jaumanna  $\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \omega\mathbf{T} + \mathbf{T}\omega$  następująco:

$$(2.2.132) \quad \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \beta \mathbf{L} \mathbf{D} - \frac{3j\mu\beta \mathbf{D} \cdot (\overset{\nabla}{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi})}{\sigma_v^2 \mathcal{H}} \left[ (\overset{\nabla}{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) + \mathbf{P} \right],$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{dla } f = 0 \wedge \mathbf{D} \cdot (\overset{\nabla}{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge \mathbf{D} \cdot (\overset{\nabla}{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) < 0) \vee f < 0. \end{cases}$$

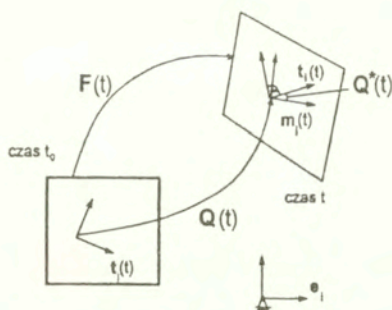
gdzie  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i$  w procesie izotermicznym, a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a$  w procesie adiabatycznym. Zwykle  $\mathcal{H}_a < \mathcal{H}_i$ . Tensor  $\mathbf{P}$  występujący w (2.2.132) otrzymujemy po przekształceniu wyrażenia  $(\omega^s \mathbf{T} - \mathbf{T} \omega^s)$  w funkcję  $\mathbf{D}^p$ , gdzie  $\omega^p$  jest tensorem spinu plastycznego. Widać tu niestowarzyszony charakter praw płynięcia uwzględniający spin plastyczny. Jeśli  $\omega^p$  jest tego samego rzędu co  $\mathbf{D}^p$ , to człon zawierający  $\mathbf{P}$  można pomijać wtedy, gdy rząd wielkości naprężenie/moduł Lamégo jest mniejszy od jedności. Wówczas tensor plastycznego spinu nie odgrywa znaczącej roli w związku pomiędzy  $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$  i  $\mathbf{D}$ .

#### 4. Tensor spinu plastycznego

W poprzednich punktach nie rozważaliśmy postaci tensora spinu plastycznego dla ciał anizotropowych. Badania ostatnich lat wskazują na konieczność jego użycia w poszukiwaniu równania ewolucji dla tensora naprężenia wewnętrznego. Aby zamknąć układ równań, musimy podać trzy dodatkowe równania dla  $\omega^s$  albo  $\omega^p$  (zob. Kleiber i Raniecki (1985)). Problem, jaka postać tego spinu będzie przyjmowana jest tu otwarty. Jak wiemy, spin plastyczny nie jest wielkością mierzalną w doświadczeniach makroskopowych określających własności metali. Teoria reprezentacji funkcji izotropowych wraz z pojęciem tensorowych parametrów strukturalnych, były stosowane w określaniu związków matematycznych tensora spinu plastycznego, a następnie w ich badaniu (Onat (1982; 1984), Loret (1983), Dafalias (1984; 1985), Paulun i Pęcherski (1987)). Inną możliwość zaprezentowali Raniecki i Mróz (1989) dla ciał sztywno-plastycznych. Zakładali, że orientację tekstury w dowolnej chwili czasu procesu odkształcenia można określić trójką wzajemnie ortogonalnych wektorów jednostkowych. Wówczas spin plastyczny można utożsamić z różnicą spinu materialnego i spinu tekstury. Położenie osi

tekstury można w pewnych etapach deformacji wyznaczyć na podstawie badań metalograficznych. Te informacje mogą być wykorzystane przy wyprowadzaniu prawa konstytutywnego dla spinu plastycznego albo jego weryfikacji. Takie podejście jest ściśle związane z ideą Mandela (1971; 1982). Opis zaproponowany w pracy Ranieckiego i Mroza pozwala zrozumieć znaczenie fizyczne tensora spinu plastycznego i pokazuje sposób znalezienia na drodze doświadczalnej równania ewolucji dla tensora spinu plastycznego.

**Podstawowe relacje.** Za Ranieckim i Mrozem (1989), rozważamy jednorodny element materiału sztywno-plastycznego. Zakładamy, że orientacja tekstury w każdej chwili procesu jest określona przez trójkę wektorów jednostkowych ortogonalnych (triada). Niech  $\mathbf{t}_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) będzie triadą reprezentującą położenie początkowe tekstury w konfiguracji beznapężeniowej ( $k_0$ ). Niech w chwili  $t$  orientacja tekstury będzie określona przez triadę  $\mathbf{t}_i(t)$ . Oczywiście mamy  $\mathbf{t}_i(t_0) = \mathbf{t}_i^0$ . Niech  $\mathbf{Q}(t)$  będzie tensorem ortogonalnym ( $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ ), który transformuje początkową triadę  $\mathbf{t}_i^0$  w triadę chwilową  $\mathbf{t}_i(t)$ . Znaczy to, że  $\mathbf{t}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{t}_i^0$ , zob. rys.2.



Rys.2

Tensor *chwilowego spinu tekstury*  $\omega^t$  jest zdefiniowany jako:

$$(2.2.133) \quad \dot{\mathbf{t}}_i(t) = \omega^t(t) \mathbf{t}_i(t),$$

gdzie

$$(2.2.134) \quad \omega^t(t) = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{t}}_i(t) \otimes \mathbf{t}_i(t) \equiv \dot{\mathbf{t}}_i \otimes \mathbf{t}_i.$$

Wprowadzimy pojęcie *triad odniesienia tekstury*  $\mathbf{m}_i$  takich, że wektor  $\mathbf{m}_1$  reprezentuje materialne włókno położone na wybranej powierzchni materialnej z wektorem normalnym  $\mathbf{m}_2$  oraz  $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ , Mandel (1971; 1974a). Kinematykę triady takiego typu przedstawiono również w pracy Blińskiego (1994).



Tensor spinu  $\omega^m(m, t)$  triady odniesienia  $\mathbf{m}_i$  jest zdefiniowany następująco

$$(2.2.135) \quad \omega^m(m, t) = \dot{\mathbf{m}}_i \otimes \mathbf{m}_i, \quad \dot{\mathbf{m}}_i = \omega^m(m, t) \mathbf{m}_i.$$

Symbol  $m$  w nawiasie oznacza, że  $\omega^m(m, t)$  zależy od wyboru triady odniesienia tekstury. To podejście jest związane z pojęciem "reper kierunkowy" zaproponowanym przez Mandela (1971; 1974a). Powstanie tekstury tego typu zaobserwowano również w doświadczeniach z blachami metalowymi, np. Carlson i Bird (1987).

Niech  $\mathbf{V}$  będzie gradientem prędkości  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ , gdzie  $\mathbf{F}$  jest gradientem deformacji. Aby wyrazić spin  $\omega^m$  poprzez  $\mathbf{V}$  oraz  $\mathbf{m}_i$ , poszukujemy najpierw pochodnej materialnej wektorów triad odniesienia. Pochodną wektora  $\mathbf{m}_1$  znajdujemy z relacji  $\mathbf{m}_1 = \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|}$ :

$$(2.2.136) \quad \dot{\mathbf{m}}_1 = \mathbf{V}\mathbf{m}_1 - (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{V}\mathbf{m}_1) \mathbf{m}_1.$$

Podobnie mamy dla  $\mathbf{m}_2 = \frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}$ , gdzie  $f(\mathbf{x}, t) = 0$  jest powierzchnią materialną w konfiguracji aktualnej

$$(2.2.137) \quad \dot{\mathbf{m}}_2 = (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{V}\mathbf{m}_2) \mathbf{m}_2 - \mathbf{V}^T \mathbf{m}_2.$$

Ze związku  $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$  wynika

$$(2.2.138) \quad \dot{\mathbf{m}}_3 = \dot{\mathbf{m}}_1 \times \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1 \times \dot{\mathbf{m}}_2.$$

Podstawiając (2.2.136), (2.2.137) i (2.2.138) do (2.2.135)<sub>1</sub> możemy znaleźć związek pomiędzy spinem  $\omega^m$  triad odniesienia  $\mathbf{m}_i$  i tensorem prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  (zob. Kleiber i Raniecki (1985), Raniecki i Samanta (1988)):

$$(2.2.139) \quad \begin{aligned} \omega^m(m, t) &= \omega(t) - \hat{\omega}(m, t), \\ 2\hat{\omega}(m, t) &= \hat{\omega}_{ij}(\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j - \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_i), \\ \hat{\omega}_{12} &= \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{D}\mathbf{m}_2, \quad \hat{\omega}_{13} = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{D}\mathbf{m}_3, \quad \hat{\omega}_{32} = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{D}\mathbf{m}_3. \end{aligned}$$

Jeśli tensor ortogonalny  $\mathbf{Q}^*$  transformuje  $\mathbf{m}_i$  w  $\mathbf{t}_i$ , to

$$(2.2.140) \quad \mathbf{t}_i = \mathbf{Q}^*(t) \mathbf{m}_i, \quad \mathbf{Q}^*(t) = \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{m}_i.$$

Zdefiniujmy *względny tensor spinu tekstury*  $\omega^r$  w następujący sposób:

$$(2.2.141) \quad \omega^r(m, t) = \dot{\mathbf{Q}}^* \mathbf{Q}^{*T}.$$

Możemy również napisać

$$(2.2.142) \quad 2\omega^r(m, t) = \dot{\mathbf{Q}}_{ik}^*(t) \mathbf{Q}_{jk}^*(t) (\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j - \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_i),$$

gdzie  $Q_{ij}^*$  jest macierzą kosinusów kierunkowych kątów pomiędzy wektorami  $t_i$  i  $m_j$ :

$$(2.2.143) \quad Q_{ij}^* = m_i(t) \cdot t_j(t) = m_i \cdot Q^* m_j, \quad Q^* = Q_{ij}^* m_i \otimes m_j.$$

Różniczkując (2.2.143)<sub>2</sub> względem czasu i uwzględniając (2.2.135)<sub>2</sub>, mamy

$$\dot{Q}^* = \dot{Q}_{ij}^* m_i \otimes m_j + \omega^m Q^* - Q^* \omega^m,$$

a po uwzględnieniu (2.2.142) otrzymamy

$$(2.2.144) \quad \dot{Q}^* Q^{*T} = \omega^r + \omega^m - Q^* \omega^m Q^{*T}.$$

Z drugiej strony, różniczkując (2.2.140)<sub>2</sub> względem czasu  $t$ , uwzględniając (2.2.133) i (2.2.135)<sub>2</sub>, a potem mnożąc obie strony przez  $Q^{*T}$ , otrzymamy

$$(2.2.145) \quad \dot{Q}^* Q^{*T} = \omega^t - Q^* \omega^m Q^{*T}.$$

Z relacji (2.2.144), (2.2.145) i (2.2.139)<sub>2</sub> wynika, że

$$(2.2.146) \quad \omega^t = \omega^m + \omega^r = \omega(t) - (\hat{\omega}(m, t) - \omega^r(m, t)).$$

Niech *plastyczny spin tekstury*  $\omega^p(t)$  będzie różnicą  $\omega(t)$  i  $\omega^t$ . Mamy wówczas następujący związek pomiędzy tymi spinami (Raniecki i Mróz (1989))

$$(2.2.147) \quad \omega^p(t) = \omega - \omega^t = \hat{\omega}(m, t) - \omega^r(m, t).$$

Symbol  $m$  w nawiasie podkreśla fakt, że  $\hat{\omega}(m, t)$  zależy od wyboru triady odniesienia tekstury. Ponieważ  $\omega^t$  i  $\omega$  są niezależne od tego wyboru, zatem z (2.2.147) wynika, że tensor plastyczny spinu tekstury  $\omega^p(t)$  nie zależy od wyboru  $m_i$ , zaś równanie (2.2.147)<sub>2</sub> sugeruje możliwość mierzenia  $\omega^p$  metodami metalograficznymi.

Zakładamy, że jeśli w chwili  $t$ , triady odniesienia tekstury  $m_i$  pokrywają się z  $t_i$ , to oznaczając odpowiednio tensory przez  $\hat{\omega}$  i  $\omega^r$  oraz opuszczając symbol "m" w nawiasie, nazwiemy je odpowiednio *tensorami: R-spin tekstury* oraz *R-spin plastyczny*. W ogólnym przypadku, w następnej chwili  $m_i(t + \delta t) \neq t_i(t + \delta t)$ . Podstawmy  $m_i(t) = t_i(t)$  w (2.2.139), (2.2.141). Otrzymamy następujący związek pomiędzy tensorami R-spinami:

$$(2.2.148) \quad 2\hat{\omega} = \hat{\omega}_{ij}(t_i \otimes t_j - t_j \otimes t_i),$$

$$\hat{\omega}_{12} = t_1 \cdot Dt_2, \quad \hat{\omega}_{13} = t_1 \cdot Dt_3, \quad \hat{\omega}_{32} = t_2 \cdot Dt_3$$

oraz

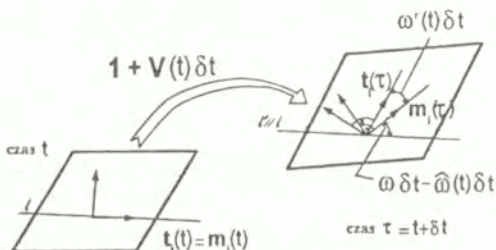
$$(2.2.149) \quad 2\omega^r = \omega_{ij}^r(t_i \otimes t_j - t_j \otimes t_i).$$

Tensor  $\omega^r \delta t$  reprezentuje kąt pomiędzy wektorami  $t_i(t + \delta t)$  i  $m_i(t + \delta t)$ , a tensor  $(\omega - \hat{\omega}) \delta t$  kąt pomiędzy  $m_i(t)$  oraz  $m_i(t + \delta t)$ , zob. rys.3.

Związek (2.2.147) jest nadal obowiązujący, zatem:

$$(2.2.150) \quad \omega^p = \omega - \omega^t = \dot{\omega} - \omega^r.$$

W ten sposób tensor spinu plastycznego został podzielony na dwie części. Ze związku (2.2.148) widzimy, że  $\dot{\omega}$  jest znaną funkcją  $\mathbf{t}$ , i  $\mathbf{D}$ . Tensor względny spinu tekstury i tensor plastyczny spinu odniesienia (w tym również tensory R-spinu) są tensorami obiektywnymi. Aby uzupełnić opis, musimy zaproponować równanie konstytutywne dla  $\omega^r$ . Możemy je zweryfikować metodami metalograficznymi, śledząc zmianę orientacji tekstur podczas procesu odkształcenia. Ze względu na brak takich doświadczeń, przyjmowano różne założenia teoretyczne. Np. Raniecki i Samanta (1988) zakładali  $\omega^r = 0$ , to znaczy, że zmiana orientacji tekstury i jej triad odniesienia jest identyczna w czasie odkształcenia. W następnym punkcie, podamy interpretację wprowadzonych tutaj pojęć na przykładzie prostego ścinania. Następnie, wykorzystując sugestię Hilla, proponujemy pewną postać tensora spinu plastycznego. Było to przedstawione w pracach Nguyena (1990), Nguyena i Ranieckiego (1999a).



Rys.3

**Ogólna postać równania ewolucji.** Zakładamy, że powierzchnia płynięcia plastycznego jest określona przez naprężenie zredukowane  $\sigma - \Pi$ , gdzie  $\sigma$  jest tensorem naprężenia Cauchy'ego, a  $\Pi$  jest przesunięciem tej powierzchni. Niech  $\mathcal{A}$  będzie zbiorem zmiennych

$$(2.2.151) \quad \mathcal{A} = (\mathbf{D}, \sigma, \Pi, \mathbf{t}_i, \alpha),$$

gdzie:  $\mathbf{t}_i$  jest triadą tekstury, a  $\alpha$  skalarną zmienną wewnętrzną. Zakładamy, że znane są położenia triad  $\mathbf{t}_i^0$  w chwili początkowej oraz początkowe naprężenia tekstury  $\Pi(t_0) = \Pi^0$ . Ogólna postać równania ewolucji jest następująca

$$(2.2.152) \quad \dot{\omega}^r = \mathcal{P}(\mathcal{A}), \quad \dot{\Pi} = \mathcal{Q}(\mathcal{A}), \quad \dot{\alpha} = \mathcal{K}(\mathcal{A}),$$

gdzie:  $\dot{\Pi}$  jest współobrotowa z teksturą

$$(2.2.153) \quad \dot{\Pi} = \dot{\Pi} + \Pi \omega^t - \omega^t \Pi$$

oraz  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  i  $\mathcal{K}$  są odpowiednio antysymetryczną, symetryczną i skalarną izotropową funkcją wszystkich zmiennych tensorowych. Są one jednorodnymi funkcjami pierwszego rzędu prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  dla materiału niewrażliwego na prędkość odkształcenia (typu "rate-independent").

W celu określenia postaci  $\mathcal{P}$  wprowadzamy następujące założenia. Dla liniowego kinematycznego wzmocnienia, równanie ewolucji dla  $\Pi$  przyjmujemy w postaci

$$(2.2.154) \quad \dot{\Pi} = c \mathbf{D},$$

gdzie  $c = \text{const.}$  Dla tego prawa, równanie (2.2.151)<sub>2</sub> można scałkować. Otrzymamy wówczas następującą postać dla zmiennych wewnętrznych (zob. Raniecki i Mróz (1989)):

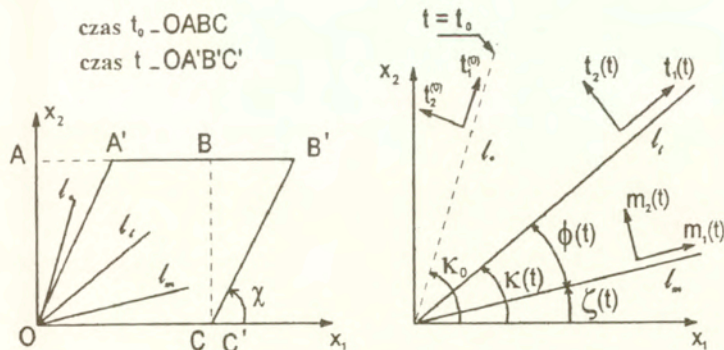
$$(2.2.155) \quad \Pi(t) = c \left( \int_{t_0}^t \mathbf{t}_i(\tau) \cdot \mathbf{D}(\tau) \mathbf{t}_j(\tau) d\tau \right) \mathbf{t}_i(t) \otimes \mathbf{t}_j(t) + \mathbf{n}_{ij}^0 \mathbf{t}_i(t) \otimes \mathbf{t}_j(t),$$

gdzie  $\mathbf{n}_{ij}^0$  są początkowymi naprężeniami tekstury w początkowej triadzie tekstury

$$(2.2.156) \quad \mathbf{n}_{ij}^0 = \mathbf{t}_i^0 \cdot \Pi^0 \mathbf{t}_j^0.$$

Pierwszy człon równania (2.2.155) opisuje zmianę naprężeń wewnętrznych spowodowaną odkształceniami plastycznymi, a drugi człon określa obrót początkowych naprężeń związanych z teksturą.

*Przykład prostego ścinania.*



Rys.4



a. *Wzory dla spinów występujących w poprzednich punktach.* W prostym ścinaniu (zob. rys.4) mamy

$$(2.2.157) \quad x_1 = X_1 + \text{ctg } \chi X_2 = X_1 + \gamma X_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3,$$

gdzie  $x_i$  i  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są współrzędnymi punktów materialnych w układzie aktualnym i początkowym,  $\gamma = \text{ctg } \chi$  jest odkształceniem postaciowym.

Gradient deformacji  $\mathbf{F}$  możemy zapisać w rozkładzie polarnym  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{R}$ . Otrzymamy następującą relację

$$(2.2.158) \quad \mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tensor prędkości deformacji  $\mathbf{D}$ , tensor prędkości obrotu  $\boldsymbol{\omega}$  (tensor spinu) oraz tensor prędkości  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$  w skróconej postaci (wszystkie składowe mające chociaż jeden indeks równy 3 są zerowe) można zapisać

$$(2.2.159) \quad \mathbf{D} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \frac{2\dot{\gamma}}{\gamma^2 + 4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Niech prostokąt OABC w chwili  $t$  będzie odkształcony do postaci równoległoboku OA'B'C', zob. rys.4. Orientacja tekstury w chwili początkowej  $t_0$  jest określona przez linię  $l_0$  (wektor  $\mathbf{t}_1^{(0)}$  jest równoległy do  $l_0$ ). W chwili  $t$  orientację tekstury reprezentuje linia  $l_t$  (wektor  $\mathbf{t}_1(t)$  ma ten kierunek). Linia materialna, która przed odkształceniem pokrywała się z  $l_0$  w chwili  $t$  zajmuje pozycję  $l_m$  (wektor  $\mathbf{m}_1(t)$  jest równoległy do tej linii). Oznaczmy przez  $\zeta(t)$  kąt pomiędzy osią  $x_1$  i  $l_m$ . Niech kąt  $\kappa(t)$  określa chwilowe położenie tekstury  $l_t$ . Wprowadzamy obrót  $\phi = \zeta(t) - \kappa(t)$ . W chwili  $t = t_0$  mamy:

$$(2.2.160) \quad \zeta(t_0) = \kappa(t_0) = \kappa_0, \quad \phi(t_0) = 0.$$

Z zależności (2.2.139) i (2.2.159) wynika, że orientacja linii  $l_m$  nie zależy od odkształcenia i jego historii:

$$(2.2.161) \quad \text{ctg } \zeta(t) = \gamma + \text{ctg } \kappa_0$$

oraz wszystkie zdefiniowane spiny mają tylko jedną niezależną składową z indeksem "12", który w celu uproszczenia opuszczamy:

$$(2.2.162) \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\gamma}/2 \quad \text{dla spinu materialnego,}$$

$$(2.2.163) \quad \boldsymbol{\omega}^t(t) = -\dot{\kappa} \quad \text{dla chwilowego spinu tekstury,}$$

$$(2.2.164) \quad \omega^r(m, t) = \dot{\phi} \quad \text{dla względnego spinu tekstury,}$$

$$(2.2.165) \quad \hat{\omega}(m, t) = \frac{\cos 2\zeta}{2} \dot{\gamma} \quad \text{dla względnego spinu plastycznego,}$$

$$(2.2.166) \quad \hat{\omega} = \frac{\cos 2\kappa}{2} \dot{\gamma} \quad \text{dla R-spinu plastycznego,}$$

$$(2.2.167) \quad \omega^r(t) = \dot{\Omega}(t) \quad \text{dla R-spinu tekstury,}$$

$$(2.2.168) \quad \omega^p(t) = \hat{\omega}(m, t) - \dot{\phi}(t) = \hat{\omega} - \dot{\Omega}(t) \quad \text{dla całkowitego spinu plastycznego.}$$

Równanie (2.2.133) określające orientację tekstury zredukuje się do jednego równania różniczkowego dla  $\kappa(t)$ . Jeśli tensor R-spin tekstury  $\Omega$  jest znany, to równanie to ma postać

$$(2.2.169) \quad \dot{\kappa} + \dot{\Omega} + \dot{\gamma} \sin^2 \kappa = 0.$$

Natomiast jeśli znany jest tensor spinu plastycznego to:

$$(2.2.170) \quad \dot{\kappa} = \omega^p(t) - \dot{\gamma}/2.$$

Równanie (2.2.155) po przekształceniu daje następujące wyrażenie dla naprężeń wewnętrznych

$$(2.2.171) \quad \begin{aligned} \pi_{22} - \pi_{11} &= -c \left[ \cos 2\kappa(\gamma) \int_0^\gamma \sin 2\kappa(g) dg - \sin 2\kappa(\gamma) \int_0^\gamma \cos 2\kappa(g) dg \right] + \\ &\quad (\pi_{22}^0 - \pi_{11}^0) \cos 2(\kappa(\gamma) - \kappa_0) + 2\pi_{12}^0 \sin 2(\kappa(\gamma) - \kappa_0), \\ \pi_{22} + \pi_{11} &= (\pi_{22}^0 + \pi_{11}^0), \\ \pi_{12} &= \frac{c}{2} \left[ \cos 2\kappa(\gamma) \int_0^\gamma \cos 2\kappa(g) dg + \sin 2\kappa(\gamma) \int_0^\gamma \sin 2\kappa(g) dg \right] + \\ &\quad (\pi_{11}^0 - \pi_{22}^0) \sin 2(\kappa(\gamma) - \kappa_0) + \pi_{12}^0 \cos 2(\kappa(\gamma) - \kappa_0), \\ \pi_{33} &= \pi_{33}^0, \end{aligned}$$

gdzie funkcję  $\kappa(\gamma)$  wyznaczono ze związków  $\kappa(t)$  i  $\gamma(t)$ ,  $\kappa|_{\gamma=0} = \kappa_0$ . Dla materiałów nieścislitych  $-\pi_{33}^0 = \pi_{11}^0 + \pi_{22}^0$ .

Jeśli przyjmujemy warunek plastyczności Hubera-Misesa

$$(2.2.172) \quad f = \frac{3}{2} (\bar{\sigma} - \Pi) \cdot (\bar{\sigma} - \Pi) - \sigma_\gamma^2 = 0,$$

gdzie  $\bar{\sigma}$  jest dewiatorem tensora  $\sigma$ , to otrzymamy

$$(2.2.173) \quad \bar{\sigma}_{11} = \pi_{11}, \quad \bar{\sigma}_{22} = \pi_{22}, \quad \bar{\sigma}_{12} = \frac{\sigma_\gamma}{\sqrt{3}} + \pi_{12}.$$

Dla zerowych wartości początkowych  $\mathbf{\Pi}$ , związki (2.2.171)–(2.2.173) dają następujące znormalizowane naprężenia względem granicy plastyczności  $\sigma_Y$ :

$$\sigma'_{11} \equiv \frac{\bar{\sigma}_{11}}{\sigma_Y} = \frac{c}{2\sigma_Y} \left[ \cos 2\kappa(\gamma) \int_0^\gamma \sin 2\kappa(g) dg - \sin 2\kappa(\gamma) \int_0^\gamma \cos 2\kappa(g) dg \right] = -\sigma'_{22}, \quad (2.2.174)$$

$$\sigma'_{12} \equiv \frac{\bar{\sigma}_{12}}{\sigma_Y} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{c}{2\sigma_Y} \left[ \cos 2\kappa(\gamma) \int_0^\gamma \cos 2\kappa(g) dg + \sin 2\kappa(\gamma) \int_0^\gamma \sin 2\kappa(g) dg \right].$$

b. Założenia dla orientacji tekstury. 1. Gdy pominiemy tensor spinu plastycznego, z (2.2.170) mamy  $\dot{\kappa} = -\dot{\gamma}/2$ , zatem  $\kappa(\gamma) = \kappa_0 - \gamma/2$ . Po wprowadzeniu tego związku do (2.2.174), otrzymujemy znane oscylacyjne rezultaty:

$$(2.2.175) \quad \sigma'_{11} = \frac{c}{2\sigma_Y} (1 - \cos \gamma), \quad \sigma'_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{c}{2\sigma_Y} \sin \gamma.$$

2. Z założeniem Ranieckiego i Samanty (1988)  $\omega^r = 0$ , z (2.2.150) wynika, że  $\omega - \omega^t = \dot{\omega}$ , co prowadzi do równania

$$(2.2.176) \quad \dot{\kappa} + \dot{\gamma} \sin^2 \kappa = 0,$$

z którego  $\gamma = \text{ctg} \kappa - \text{ctg} \kappa_0$ . Po przekształceniach z (2.2.174) otrzymujemy:

$$(2.2.177) \quad \sigma'_{11} = \frac{c}{2\sigma_Y(\gamma^2 + 1)} \left[ (\gamma^2 - 1) \ln(\gamma^2 + 1) - 2\gamma(\gamma - 2\text{arctg} \gamma) \right],$$

$$\sigma'_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{c}{2\sigma_Y(\gamma^2 + 1)} \left[ (\gamma^2 - 1)(\gamma - 2\text{arctg} \gamma) + 2\gamma \ln(\gamma^2 + 1) \right].$$

3. Dafalias w pracy (1983) omawiał współobrotową prędkość ze spinem  $\mathbf{RR}^T$ . W przypadku hyposprężystości omówił to zagadnienie Dienes (1979). Mamy wówczas

$$\dot{\kappa} = -\frac{2\dot{\gamma}}{\gamma^2 + 4} \quad \text{albo} \quad \kappa = -\text{arctg} \frac{\gamma}{2} + \kappa_0$$

i ze związku (2.2.174) otrzymujemy

$$(2.2.178) \quad \sigma'_{11} = \frac{c}{2\sigma_Y} \left[ 4 \cos(2\text{arctg} \frac{\gamma}{2}) \ln(\cos \text{arctg} \frac{\gamma}{2}) + \sin(2\text{arctg} \frac{\gamma}{2}) (4\text{arctg} \frac{\gamma}{2} - \gamma) \right],$$

$$\sigma'_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{c}{2\sigma_Y} \left[ \cos(2\text{arctg} \frac{\gamma}{2}) (4\text{arctg} \frac{\gamma}{2} - \gamma) - 4 \sin(2\text{arctg} \frac{\gamma}{2}) \ln(\cos \text{arctg} \frac{\gamma}{2}) \right].$$

Możemy pokazać, że wyrażenia te są identyczne jak w pracy Dafaliasa (1983).

4. Paulun i Pęcherski (1985; 1992) wyprowadzili postać tensora spinu plastycznego, rozważając problem prostego ścinania. W tym przypadku, chwilowy tensor spinu tekstury (2.2.163) ma postać

$$(2.2.179) \quad \dot{\kappa} = -\frac{\dot{\gamma}}{2(1+\gamma^2)}.$$

Stąd  $\kappa = \kappa_0 - \frac{1}{2} \arctg \gamma$  i równania (2.2.174) dają następujące związki:

$$(2.2.180) \quad \sigma'_{11} = \frac{c}{2\sigma_Y \sqrt{\gamma^2 + 1}} \left[ 1 - \sqrt{\gamma^2 + 1} + \gamma \ln(\sqrt{\gamma^2 + 1} + \gamma) \right],$$

$$\sigma'_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{c}{2\sigma_Y \sqrt{\gamma^2 + 1}} \left[ \ln(\sqrt{\gamma^2 + 1} + \gamma) + \gamma(\sqrt{\gamma^2 + 1} - 1) \right].$$

Równania te możemy przekształcić do postaci przedstawionej w pracy Pauluna i Pęcherskiego (1985).

5. Założenie, że podczas zaawansowanego procesu odkształcenia materiał pozostaje izotropowy nie jest spełnione. Krystaliczne ziarna są wydłużone w kierunkach największych odkształceń rozciągających. W ten sposób powstają tekstury (zob. Hill (1967)). Zakładamy, że podczas procesu odkształcenia triady tekstury mają te same kierunki główne co tensor rozciągnięcia  $\mathbf{S}$  (Nguyen (1990)). Z równania (2.2.158) możemy znaleźć kierunki główne tensora  $\mathbf{S}$ . Chwilowe triady tekstury są zdefiniowane następująco:

$$(2.2.181) \quad \mathbf{t}_1 = \left( \frac{\gamma^2 + \sqrt{\gamma^2(\gamma^2 + 4)}}{\sqrt{4\gamma^2 + [\gamma^2 + \sqrt{\gamma^2(\gamma^2 + 4)}]^2}}; \frac{2\gamma}{\sqrt{4\gamma^2 + [\gamma^2 + \sqrt{\gamma^2(\gamma^2 + 4)}]^2}} \right),$$

$$\mathbf{t}_2 = \left( \frac{\gamma^2 - \sqrt{\gamma^2(\gamma^2 + 4)}}{\sqrt{4\gamma^2 + [\gamma^2 - \sqrt{\gamma^2(\gamma^2 + 4)}]^2}}; \frac{2\gamma}{\sqrt{4\gamma^2 + [\gamma^2 + \sqrt{\gamma^2(\gamma^2 + 4)}]^2}} \right).$$

Ich chwilowa orientacja

$$\kappa = \arctg \left( \frac{2}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}} \right),$$

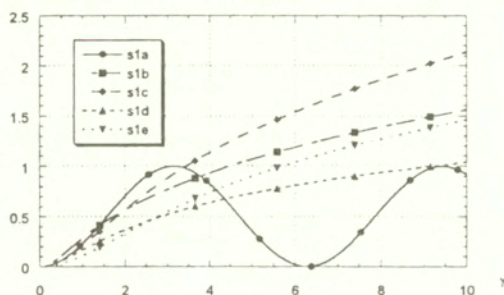
a naprężenia mają postać

$$(2.2.182) \quad \sigma'_{11} = \frac{c}{\sigma_Y \sqrt{\gamma^2 + 4}} \left[ \gamma \ln \left( \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}}{2} \right) - \sqrt{\gamma^2 + 4} + 2 \right],$$



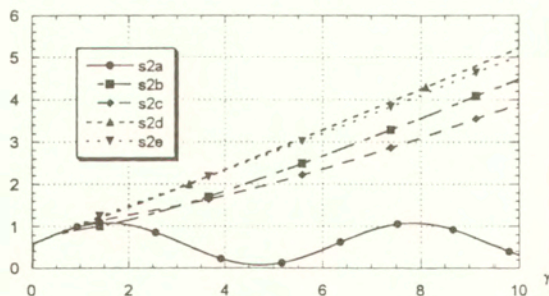
$$\sigma'_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{c}{2\sigma_Y \sqrt{\gamma^2 + 4}} \left[ \gamma(\sqrt{\gamma^2 + 4} - 2) + 4 \ln \left( \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}}{2} \right) \right]$$

Wykresy naprężeń normalnych  $\sigma'_{11}$  i postaciowych  $\sigma'_{12}$  w funkcji  $\gamma$  dla powyższych przypadków przedstawiono na rysunkach 5 i 6. Stałe materiałowe: początkową granicę plastyczności  $\sigma_Y = 207 MPa$  i moduł wzmocnienia  $c = 206.6 MPa$  przyjęto za Lee et al. (1983) dla aluminium.



Rys.5.  $\sigma_{11}/\sigma_0$  w funkcji  $\gamma$

s1a- Jaumann; s1b- Raniecki i Samanta; s1c- Dafalias  
s1d- Paulun i Pęcherski; s1e- Nguyen i Raniecki



Rys.6.  $\sigma_{12}/\sigma_0$  w funkcji  $\gamma$

s2a- Jaumann; s2b- Raniecki i Samanta; s2c- Dafalias  
s2d- Paulun i Pęcherski; s2e- Nguyen i Raniecki

Wzór w zapisie absolutnym dla zaproponowanego spinu plastycznego

Rozkład  $\mathbf{F}$  w postaci polarnej

$$(2.2.183) \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{R},$$

gdzie  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{S}$  są odpowiednio prawym i lewym tensorem rozciągnięcia, a  $\mathbf{R}$  jest tensorem ortogonalnym. Niech  $\mathbf{N}_i$  i  $\lambda_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) będą odpowiednio głównymi kierunkami i wartościami tensora  $\mathbf{U}$  ( $\lambda_i$  są również głównymi wartościami tensora  $\mathbf{S}$ ). Wówczas

$$(2.2.184) \quad \mathbf{U} = \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i.$$

Niech  $\mathbf{n}_i$  będą głównymi kierunkami tensora  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{n}_i = \mathbf{R}\mathbf{N}_i$ , wtedy

$$(2.2.185) \quad \mathbf{S} = \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i.$$

Po zróżniczkowaniu tego równania względem czasu, otrzymamy

$$(2.2.186) \quad \mathbf{S}\dot{\Omega}^S - \dot{\Omega}^S\mathbf{S} = \dot{\lambda}_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i - \dot{\mathbf{S}}.$$

Zakładamy, że  $\mathbf{S}$  jest znaną funkcją  $t$ . Możemy wówczas znaleźć  $\dot{\Omega}^S$ . Równanie tego typu było zbadane przez Guo i innych w pracy (1992). Oznaczmy przez  $I$ ,  $II$  i  $III$  główne niezmienniki tensora  $\mathbf{S}$

$$(2.2.187) \quad \begin{aligned} I &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ II &= \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2, \\ III &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Gdy wartości główne są różne, rozwiązanie równania (2.2.186) jest postaci

$$(2.2.188) \quad \begin{aligned} \dot{\Omega}^S &= \Delta^{-2} \left[ (6I \cdot III - 5I^2 \cdot II + I^4 + 4II^2)(\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S} - \mathbf{S}\dot{\mathbf{S}}) \right. \\ &+ (4I \cdot II - I^3 - 9III)(\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}^2\dot{\mathbf{S}}) \\ &\left. + (I^2 - 3II)(\mathbf{S}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}^2\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.2.189) \quad \begin{aligned} \Delta^2 &= (\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \\ &= 18I \cdot II \cdot III + I^2 \cdot II^2 - 4I^3 \cdot III - 4II^3 - 27III^2. \end{aligned}$$

Z równania (2.2.183) wynika, że  $\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T$ . Możemy wyliczyć gradient prędkości  $\dot{\mathbf{S}}$ , uwzględniając następujące związki, udowodnione w pracy Hoger (1986) (gdy wartości główne są różne):

$$(2.2.190) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} &= \frac{1}{I \cdot II - III} \mathbf{R}^T \left[ \mathbf{S}^2\mathbf{D}\mathbf{S}^2 - I(\mathbf{S}^2\mathbf{D}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^2) + (I^2 + II)\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S} - \right. \\ &\left. - III(\mathbf{S}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{S}) + (I \cdot III)\mathbf{D} \right] \mathbf{R} \end{aligned}$$

oraz

$$(2.2.191) \quad \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{I \cdot II - III} [I^2(\mathbf{D}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{D}) + I(\mathbf{S}^2\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{S}^2) + (\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}^2\mathbf{D}\mathbf{S})].$$

W szczególnym przypadku, gdy  $\mathbf{D}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{D}$  (Hoger (1986) pokazała, że jest to warunek konieczny i wystarczający na to, by pochodna Zarembki-Jaumannna tensora  $\ln\mathbf{S}$  była równa tensorowi prędkości deformacji  $\mathbf{D}$ ), związek (2.2.188) ma postać

$$(2.2.192) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^S = \Delta^{-2} \{ & (6I \cdot III - 5I^2 \cdot II + I^4 + 4II^2)[(\boldsymbol{\omega}\mathbf{S} - \mathbf{S}\boldsymbol{\omega})\mathbf{S} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^S - \mathbf{S}\boldsymbol{\omega})] \\ & + (4I \cdot II - I^3 - 9III)[(\boldsymbol{\omega}\mathbf{S} - \mathbf{S}\boldsymbol{\omega})\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}^2(\boldsymbol{\omega}\mathbf{S} - \mathbf{S}\boldsymbol{\omega})] \\ & + (I^2 - 3II)[\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{S} - \mathbf{S}\boldsymbol{\omega})\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}^2(\boldsymbol{\omega}\mathbf{S} - \mathbf{S}\boldsymbol{\omega})\mathbf{S}] \} \end{aligned}$$

i tensor spinu plastycznego (2.2.150) jest postaci

$$(2.2.193) \quad \boldsymbol{\omega}^p = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}^S.$$

Podsumowując, na podstawie sugestii Hilla zaproponowaliśmy w tym punkcie orientację chwilowej triady tekstury, aby uzupełnić opis ciał sprężysto-plastycznych w zakresie skończonych deformacji. Widać tutaj relację między dwoma sposobami definicji spinu plastycznego.

**Przypadek ciał sprężysto-plastycznych** Zaprezentujemy w skrócie rozszerzenia pomysłu przedstawionego w paragrafie pierwszym dla ciał sprężysto-plastycznych na przypadek ciał sprężysto-plastycznych. Rozważmy transformację plastyczną  $\mathbf{F}^p$ . Niech  $\mathbf{t}_i^0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , będą trójką ortogonalnych wektorów reprezentujących początkową orientację tekstury w konfiguracji  $(k_0)$ . W dowolnej chwili  $t$  orientacja tekstury jest określona przez trójkę wektorów  $\mathbf{t}_i^t$ . Chwilowym tensorem spinu tekstury będziemy nazywać wielkość  $\boldsymbol{\omega}^t$  taką, by:

$$(2.2.194) \quad \dot{\mathbf{t}}_i^t = \boldsymbol{\omega}^t \mathbf{t}_i^t.$$

Wybermy trójkę ortogonalnych jednostkowych wektorów odniesienia tekstury  $\mathbf{m}_i^*$  w następujący sposób: wektor  $\mathbf{m}_1^*$  reprezentuje włókno materialne,  $\mathbf{m}_2^*$  jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni materialnej, w której położone jest włókno materialne oraz  $\mathbf{m}_3^* = \mathbf{m}_1^* \times \mathbf{m}_2^*$ . W pracy Kleitera i Ranieckiego (1985) pokazano, że tensor spinu  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  triady  $\mathbf{m}_i^*$  jest jednoznaczną funkcją tensora prędkości deformacji  $\mathbf{D}^*$  i  $\mathbf{m}_i^*$ :

$$(2.2.195) \quad \begin{aligned} 2\hat{\boldsymbol{\omega}}(m, t) = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ij}(\mathbf{m}_i^* \otimes \mathbf{m}_j^* - \mathbf{m}_j^* \otimes \mathbf{m}_i^*), \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{12} = \mathbf{m}_1^* \cdot \mathbf{D}^* \mathbf{m}_2^*, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}}_{13} = \mathbf{m}_1^* \cdot \mathbf{D}^* \mathbf{m}_3^*, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}}_{32} = \mathbf{m}_2^* \cdot \mathbf{D}^* \mathbf{m}_3^*. \end{aligned}$$

Niech ortogonalny tensor  $\mathbf{Q}$  opisuje przekształcenie wektorów  $\mathbf{m}_i^*$  w wektory  $\mathbf{t}_i^*$  poprzez obrót. Wielkość  $\omega^r$  będziemy nazywać względnym spinem tekstury:

$$(2.2.196) \quad \omega^r(m, t) = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T.$$

W pracy Ranieckiego i Mroza (1989) udowodniono następujący związek pomiędzy tymi spinami

$$(2.2.197) \quad \omega^* - \omega^t = \dot{\omega}(m, t) - \omega^r(m, t).$$

W związkach (2.2.195)–(2.2.197) litera  $m$  w nawiasie podkreśla fakt, że  $\dot{\omega}(m, t)$  oraz  $\omega^r(m, t)$  zależą od układu odniesienia tekstury. Jeśli w pewnej chwili  $t$  trójka wektorów odniesienia tekstury  $\mathbf{m}_i^*$  pokrywa się z  $\mathbf{t}_i^*$ , oznaczamy odpowiednie tensory przez  $\dot{\omega}$  i  $\omega^r$ . Związek (2.2.197) nadal obowiązuje, mamy wtedy:

$$(2.2.198) \quad \omega^* - \omega^t = \dot{\omega} - \omega^r.$$

W przypadku ruchu izoklinicznego tekstury  $\omega^t = 0$ , wówczas równanie (2.2.198) przyjmuje postać:

$$(2.2.199) \quad \omega^* = \dot{\omega} - \omega^r.$$

Dla uproszczenia pominiemy człony  $(\omega^p \bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}} \omega^p)$  i  $(\mathbf{D}^p \bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}} \mathbf{D}^p)$  w równaniu (2.2.83). Przejście do konfiguracji aktualnej (2.2.199) daje:

$$(2.2.200) \quad \begin{aligned} \omega^p &= \omega_1^p - \omega_2^p, \\ \omega_1^p &= \mathbf{R}^e \dot{\omega} \mathbf{R}^{eT} = \mathbf{g}_1, \\ \omega_2^p &= \mathbf{R}^e \omega^r \mathbf{R}^{eT} = \mathbf{g}_2. \end{aligned}$$

Wielkość  $\mathbf{t}_i$  jest triadą tekstury w aktualnej konfiguracji. Tensor spinu plastycznego możemy podzielić na dwie części. Z zależności (2.2.195),  $\mathbf{g}_1$  jest znaną funkcją  $\mathbf{t}_i$  i  $\mathbf{D}^p$ . Aby uzupełnić opis ciał sprężysto-plastycznych, musimy dołączyć równania konstytutywne dla  $\mathbf{g}_2$ . Brakujących informacji mogłyby nam dostarczyć badania metalograficzne zmiany tekstury. W ogólnym przypadku wiemy tylko, że:

$$(2.2.201) \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2(\mathbf{D}^p, \mathbf{T}, \Pi, \alpha, \mathbf{t}_i),$$

gdzie  $\mathbf{g}_2$  jest funkcją izotropową wszystkich zmiennych tensorowych. Dla materiałów z natychmiastową odpowiedzią plastyczną  $\mathbf{g}_2$  jest dodatkowo funkcją jednorodną pierwszego rzędu względem  $\mathbf{D}^p$ .

W następnym rozdziale zastosujemy wyprowadzone powyżej równania konstytutywne w niektórych zagadnieniach dynamicznych.



## Rozdział 3

# Wybrane zagadnienia dynamiczne

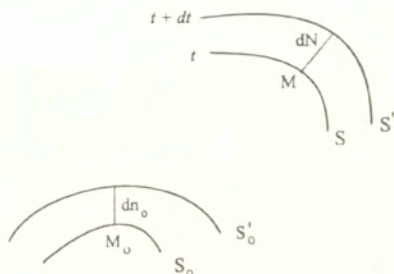
### 3.1 Propagacja fal przyspieszenia. Wartości główne

Falą nazywamy poruszającą się powierzchnię nieciągłości pola, której prędkość propagacji zależy od nieliniowych właściwości materiału ośrodka. Poruszającą się powierzchnię nazywamy falą rzędu  $n$ -tego, jeżeli pewne pochodne pola przemieszczenia  $\xi(x, t)$  względem  $x$ , lub  $t$  rzędu  $n$ -tego są nieciągłe i jeżeli wszystkie pochodne  $\xi$  względem  $x$ , lub  $t$  aż do  $n - 1$  włącznie są ciągłe przy przejściu przez tę powierzchnię. Nie ma fal rzędu zerowego, gdyż oznacza to nieciągłość ośrodka. Przy  $n = 1$  mamy do czynienia z falami silnej nieciągłości, a przy  $n = 2$  mówimy o falach przyspieszenia.

Zagadnienie fal przyspieszenia w ciałach stałych jest badane w wielu pracach, ponieważ podstawowa natura tych fal jest ściśle związana z problemami stabilności, statycznych bifurkacji itp. (zob. Perzyna (1994; 1995)). Poza tym, udoskonalenie w ostatnim czasie metody elementów skończonych umożliwia analizę lokalizacji odkształceń w strefach cienkich i to z kolei pobudza zainteresowanie tymi falami.

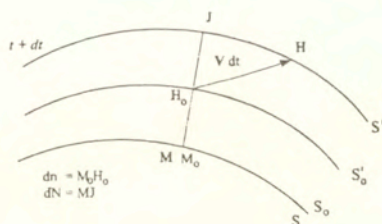
Literatura poświęcona zagadnieniom propagacji fal przyspieszenia jest bardzo bogata. W swej pionierskiej pracy Hadamard (1903) omówił fale sprężyste. W pracach Thomasa (1952; 1961) przeprowadzono badania izotermicznych fal sprężystych. Dla materiałów sprężysto-plastycznych najważniejsze prace to: Mandel (1962) i Hill (1962). Przyjmując szczególną postać równań konstytutywnych, Raniecki (1976) i Nowacki (1980) zbadali fale w metalach i gruntach. Przypadek skończonych deformacji był omówiony w pracach D'Escatha (1973), Piau (1970; 1975) i Nguyena (1984; 1985b). Guélin i Nowacki (1984a; 1984b) zaproponowali równania konstytutywne opisujące sprężysto-plastyczne zachowanie się ośrodka ciągłego, uwzględniające histerezę materiałową. Określili prędkości fal przyspieszenia w takim ośrodku. Zbadali wpływ dyssypacji spowodowanej histerezą materiałową na prędkości propagacji fal. Dla niestowarzyszonej plastyczności możemy zacytować pracę Mandela (1964) oraz Ottosena i Runessona (1991a; 1991b). W tym punkcie, pomijając w równaniach małe człony związane z postaciowymi od-

kształceniami sprężystymi, znajdziemy wartości główne tensora akustycznego. W przypadku małych deformacji zredukują się one do wyników otrzymanych przez Ottosena i Runessaona (1991a).



Rys.7. Powierzchnie nieciągłości (fale) w konfiguracji odniesienia i aktualnej

Przypomnimy krótko niektóre aspekty propagacji fal. Zbadamy teraz propagację fal przyspieszenia w trójwymiarowym nieskończonym materiale sprężysto-elastycznym. Niech  $S$  będzie położeniem fali w przestrzeni w chwili  $t$ ,  $S'$  w chwili  $t + dt$ . Punkty materialne znajdujące się na  $S$  tworzą w konfiguracji odniesienia powierzchnię  $S_0$ , a punkty na  $S'$  powierzchnię  $S'_0$ . Niech  $dN$  oznacza odcinek normalny w punkcie  $M$  między  $S$  i  $S'$ , a  $dn_0$  odcinek normalny w punkcie  $M_0$  (odzworowanie  $M$  w konfiguracji odniesienia).  $V = dN/dt$  jest prędkością poruszania się fali, a  $\Omega_0$  jest prędkością fali względem materiału w konfiguracji odniesienia (zob. rys.7). Rozprzestrzenianie się fal możemy zbadać w układzie przestrzennym we współrzędnych Eulera lub w układzie związanym z materiałem we współrzędnych Lagrange'a. Najprostsze wyniki można otrzymać, przyjmując konfigurację materialną w chwili  $t$  jako konfigurację odniesienia. Znaczący to, że śledzimy poruszanie się fali w czasie od  $t$  do  $t + dt$  względem cząstek materialnych w chwili  $t$ .



Rys.8. Materiał w chwili  $t$  jako konfiguracja odniesienia

Niech  $V$  będzie prędkością poruszania się fali,  $\Omega$ - prędkością lokalną (względem

dem materiału w chwili  $t$ ),  $v$ - prędkością cząstki materialnej oraz  $\nu$ - wektorem jednostkowym normalnym do powierzchni fal  $S$ . Istnieje następujący związek między tymi prędkościami (zob. np. Kosiński (1986))

$$(3.1.1) \quad V = \Omega + v \cdot \nu.$$

Oznaczmy przez  $[A] = A_1 - A_2$  skok (nieciągłość) pewnej wielkości  $A$  przy przejściu przez  $S$ . We współrzędnych Eulera, jeśli  $\gamma(x, t)$  jest funkcją ciągłą przy przejściu przez  $S$ , a jej pochodne są nieciągłe, to istnieje takie  $\Gamma$  (warunki zgodności Hadamarda (1903)), że

$$(3.1.2) \quad [\gamma_{,i}] = \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right] = \Gamma \nu_i, \quad [\gamma_{,i}] = \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] = -\Gamma V, \quad [\dot{\gamma}] = -\Gamma \Omega,$$

stąd wynika

$$(3.1.3) \quad [\gamma_{,i}] = -\frac{\nu_i}{\Omega} [\dot{\gamma}].$$

Równanie ciągłości i równanie ruchu mają postać

$$(3.1.4) \quad \dot{\beta} = \beta \operatorname{div} v, \quad \operatorname{div} \sigma = \rho \dot{v}.$$

Ze związków (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) otrzymujemy równanie:

$$(3.1.5) \quad (C - \rho \Omega^2 \mathbf{1}) [\dot{v}] = 0,$$

gdzie tensor  $C_{jl}$  jest nazywany tensorem akustycznym (ta nazwa wiąże się z tym, że prędkość propagacji powierzchni słabej nieciągłości równa się lokalnej prędkości dźwięku w danym ośrodku, zob. np. Włodarczyk (1994))

$$(3.1.6) \quad \begin{aligned} C_{jl} &= C_{jl}^e + C_{jl}^p, \\ C_{jl}^e &= C_{jl}^{e1} + C_{jl}^{e2}, \\ C_{jl}^{e1} &= \left( K_T + \frac{\mu}{3} \right) \nu_j \nu_l + \mu \delta_{jl}, \\ C_{jl}^{e2} &= \mu \left[ (\bar{e}_{pq} \nu_p \nu_q) - \bar{e}_{ij} \nu_i \nu_l - \bar{e}_{il} \nu_i \nu_j - \bar{e}_{jl} \nu_l \nu_i \right], \\ C_{jl}^p &= -\frac{3j\mu}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}} a_j b_l, \quad \text{gdzie} \begin{cases} a_j = [(\bar{T}_{ij} - \Pi_{ij}) + P_{ij}] \nu_i, \\ b_l = (\bar{T}_{kl} - \Pi_{kl}) \nu_k. \end{cases} \end{aligned}$$

Tensor  $C$  zależy od parametrów materiału, a także od kierunku  $\nu$ . Tensor  $C$  jest niesymetryczny ponieważ  $a_j \neq b_l$  przy uwzględnieniu członów zawierających spin plastyczny. Sprężysty tensor akustyczny  $C^e$  jest symetryczny i składa się ze zwykłego członu  $C^{e1}$  oraz członu  $C^{e2}$  (efekt geometryczny). Jeśli tensor  $C^{e1}$  jest

dotądnie określony i sprężyste odkształcenia postaciowe są małe, wtedy można pokazać, że  $C^e$  jest również dodatnio określony, tak jak pokazano w pracy Nguyen (1985a).

Wartości główne równania (3.1.5) dają prędkości fal sprężystych (gdy  $j = 0$  w zależności (3.1.6<sub>5</sub>)) albo fal plastycznych (kiedy  $j = 1$ ). Korzystając z tożsamości podanej w Załączniku A.3 oraz twierdzenia Viety, otrzymujemy wartości główne tensora akustycznego

$$(3.1.7) \quad \begin{aligned} \varrho \Omega_1^2 &= \mu \left( 1 + \bar{e}_{rs\nu_r\nu_s} \right), \\ \varrho \Omega_{II,III}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \mu + M - \frac{3j\mu}{\sigma_V^2 \mathcal{H}} a_j b_j \right) \pm \sqrt{\Delta} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie zostały pominięte czony rzędu  $O(|\bar{e}|^2)$  oraz

$$M = K_T + \frac{4\mu}{3},$$

$$\Delta = \left( \mu + M - \frac{3j\mu}{\sigma_V^2 \mathcal{H}} a_j b_j \right)^2 - 4\mu M \Lambda_A \left[ 1 + \frac{9(K_T + 2\mu)(3K_T + \mu)}{M\mu^2(3K_T + 4\mu)^2} (\bar{e}_{rs\nu_r\nu_s}) \right],$$

gdzie

$$(3.1.8) \quad \begin{aligned} \Lambda_A &= 1 - \frac{3j\mu}{\sigma_V^2 \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[ (a_k b_k) - \frac{3K_T + \mu}{(3K_T + 4\mu)} (a_j \nu_j)(b_k \nu_k) \right] - \right. \\ & - \frac{1}{\mu} \left[ (\bar{e}_{rs\nu_r\nu_s})(a_k b_k) - \frac{2(\bar{e}_{rs\nu_r\nu_s})(3K_T + \mu)^2}{(3K_T + 4\mu)^2} (a_j \nu_j)(b_k \nu_k) - \right. \\ & \left. \left. - (\bar{e}_{kj} a_j b_k) + \frac{(3K_T - 2\mu)}{(3K_T + 4\mu)} (\bar{e}_{rs\nu_r b_s})(a_j \nu_j) + \frac{(3K_T - 2\mu)}{(3K_T + 4\mu)} (\bar{e}_{rs\nu_r a_s})(b_k \nu_k) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dla małych odkształceń ( $\bar{e}_{ij} \rightarrow 0$  i  $\beta \rightarrow 1$ ) wyniki te zredukują się do wartości podanych w pracy Ottosena i Runesson (1991a) dla tzw. niestowarzyszonej plastyczności i do wyników Hilla (1962) dla stowarzyszonej plastyczności. Kiedy  $j = 0$ , otrzymamy znane prędkości fal sprężystych, które są niezależne od kierunków  $\nu$ . Gdy prędkość fal dąży do zera, z równań (3.1.7) otrzymujemy warunek lokalizacji Rice'a (1976).

W przypadku plastyczności stowarzyszonej z powierzchnią płynięcia tensor  $C$  jest symetryczny, zatem wszystkie prędkości  $\varrho \Omega^2$  są liczbami rzeczywistymi i jak pokazał Mandel (1962), dla każdego kierunku  $\nu$ , prędkość fal plastycznych nie jest większa niż odpowiednia prędkość fal sprężystych. W tym przypadku stabilność zależy od tego, czy najmniejsza prędkość fal plastycznych jest dodatnia czy ujemna. Kiedy jest ona ujemna, ma miejsce niestabilność typu "dywergencji".

Dla przypadku niestowarzyszonej plastyczności, tensor  $C$  jest niesymetryczny, to znaczy, że wartości główne  $\varrho \Omega^2$  mogą być liczbami zespolonymi. Mówimy



w tym przypadku o niestabilności typu "flater". W pracy Ottosena i Runesona (1991a) pokazano, że w przypadku małych odkształceń dla szerokiej klasy praw niestowarzyszonych plastyczności nie wystąpi niestabilność tego typu. W naszych równaniach konstytutywnych odchylenie od normalności powoduje tensor spinu plastycznego. Zależnie od przyjętych postaci tego tensora, mogą istnieć prędkości zespolone. Zagadnienia jednoznaczności wiążące zjawiska lokalizacji z falami nie były należycie zbadane dla materiałów z niestowarzyszoną plastycznością. Badania przeprowadzone w niniejszym punkcie sugerują dalsze poszukiwania w tym kierunku.

## 3.2 Sprzężone plastyczne fale proste w cienkościennym rurze

### 3.2.1 Wstęp

Propagacja fal w cienkościennym rurze dla małych odkształceń i obrotów została opisana przez Cliftona (1966) dla izotropowego wzmocnienia plastycznego i przez Lipkina i Cliftona (1968) dla wzmocnienia kinematycznego. Również przedstawiono tu metodę rozwiązania problemu początkowo-brzegowego. Goel i Malvern (1970) zaproponowali metodę pozwalającą na uwzględnienie sprzężonych efektów izotropowego i kinematycznego wzmocnienia. Ting (1973) otrzymał rozwiązania dla wszystkich możliwych kombinacji skokowych obciążeń na brzegu w chwili  $t = 0$  oraz otrzymał jawną postać fal prostych dla materiału o wzmocnieniu liniowo-kinematycznym. Endochroniczną teorię plastyczności do tego zagadnienia zastosowali Han-Chin Wu i Hsuan-Chi Lin (1974). Adiabaticzne fale proste były badane przez Ranieckiego (1976), Podolaka i Ranieckiego (1976). W pracach tych pokazano wpływ dyssypacji energii na prędkość i profile fal prostych. Izotermiczne i adiabaticzne fale proste w przypadku dużych odkształceń były badane przez Nguyena (1985a). Pokazano tam, że różnica między prędkościami wolnych izotermicznych i adiabaticznych fal może być duża.

W wyżej wymienionych pracach była pominięta bezwładność promieniowa i poprzeczna. Pokazano tam istnienie dwóch prędkości fal: szybkich  $c_f$  oraz wolnych  $c_s$ , które spełniają nierówność

$$c_s \leq c_2 \leq c_f \leq c_1,$$

gdzie  $c_1 = \sqrt{E/\rho_0}$  jest prędkością podłużnej fali sprężystej, a  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho_0}$  jest prędkością poprzecznej fali sprężystej.

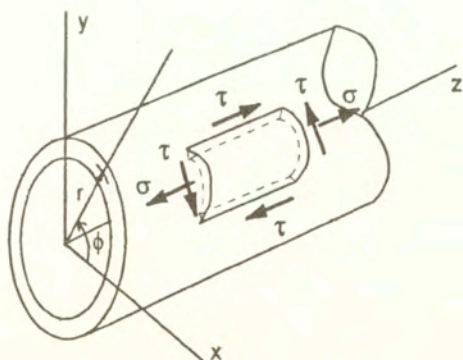
Na bazie wyprowadzonych równań konstytutywnych w Rozdziale 2, rozważymy cienkościenną rurę półnieskończoną, obciążoną na brzegu ciśnieniem normalnym i momentem skręcającym (zob. Nguyen (1995a; 1995b)). Pomijamy efekt bezwładności poprzecznej, ale uwzględniamy ruch poprzeczny. Ten drugi efekt jest ważny,

co pokazał Nowacki (1982; 1985) dla przypadku dużych deformacji. Na podstawie przykładu numerycznego pokażemy wpływ spinu plastycznego na trajektorie fal.

### 3.2.2 Kinematyka złożonego obciążenia cienkościennej rury

Oznaczmy grubość rury przed odkształceniem przez  $M$  a średni promień przez  $A$ . Położenie materiału rury w niezdeformowanej konfiguracji jest określone przez współrzędne cylindryczne  $R, \Theta, Z$ , gdzie oś  $Z$  pokrywa się z osią rury. Promień średni i grubość oznaczmy odpowiednio przez  $a$  i  $m$ . Materiałny przekrój poprzeczny przed odkształceniem znajdujący się w  $Z$  obraca się o kąt  $\omega = sZ/A$  wokół osi  $Z$  i przesuwa się jednocześnie do pozycji  $z = (1 + L)Z$  wzdłuż osi własnej. Właściwy kąt obrotu na jednostkę niezdeformowanej długości rury jest  $s/A$ . Odkształcenie  $L$  określa zmianę długości rury na jednostkę niezdeformowanej długości rury. Oznaczmy przez  $r, \phi, z$  współrzędne cylindryczne w konfiguracji aktualnej. Mamy wówczas następujące równanie

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} r &= \frac{m}{M} (R - A) + a, \\ \phi &= \Theta + \frac{sZ}{A} = \Theta + \omega, \\ z &= (1 + L) Z. \end{aligned}$$



Rys.9. Cienkościnną rurą

W tym ruchu wektor  $d\mathbf{X}$  w niezdeformowanej konfiguracji przechodzi do  $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$  w konfiguracji aktualnej, gdzie  $\mathbf{F}$  jest gradientem deformacji.

Z zależności (3.2.1) znajdujemy gradienty prędkości. We współrzędnych cylindrycznych w konfiguracji aktualnej

$$(3.2.2) \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{m}}{m} & -\frac{\dot{s}Z}{A} & 0 \\ \frac{\dot{s}Z}{A} & \frac{\dot{a}}{a} & \frac{r\dot{s}}{A(1+L)} \\ 0 & 0 & \frac{\dot{L}}{1+L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & -\frac{v_\varphi}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

gdzie  $v_r$ ,  $v_\varphi$ ,  $v_z$  są fizycznymi składowymi wektora prędkości cząstki materialnej we współrzędnych cylindrycznych. Zakłada się, że rura jest wystarczająco cienka tak, aby stan odkształcenia był jednorodny wzdłuż promienia. Tensor prędkości i tensor spinu są postaci

$$(3.2.3) \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

oraz

$$(3.2.4) \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_\varphi}{r} & 0 \\ \frac{v_\varphi}{r} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ze względu na osiową symetrię równanie ciągłości ma postać

$$(3.2.5) \quad \dot{\beta} = \beta \operatorname{div} \mathbf{v} = \beta \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right),$$

gdzie  $\beta = \rho_0/\rho$ ,  $\rho_0$  i  $\rho$  są gęstościami w konfiguracji odniesienia i konfiguracji aktualnej.

### 3.2.3 Podstawowe równania zagadnienia

Niech siła nacisku na rurę będzie  $2\pi am\sigma$ , a moment skręcający  $2\pi a^2 m\tau$ . Załóżmy, że rura jest wystarczająco cienka, by stan naprężenia był jednorodny. Wtedy tensor naprężenia Cauchy'ego ma tylko następujące składowe niezerowe

$$\sigma_{zz} = \sigma \quad \text{i} \quad \sigma_{z\varphi} = \sigma_{\varphi z} = \tau.$$

Równanie ruchu ma teraz postać:

$$(3.2.6) \quad \begin{aligned} \dot{v}_r &= \frac{v_\varphi^2}{r}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial z} &= \varrho \dot{v}_\varphi + \frac{\varrho}{r} v_\varphi v_r, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= \varrho \dot{v}_z. \end{aligned}$$

Równania konstytutywne dla procesu adiabatycznego ze sprzężonym wzmocnieniem kinematyczno-izotropowym przy niedużych ciśnieniach, przy założeniu, że rozszerzalność cieplna, ciepło odkształcenia sprężystego i ciepło wewnętrznych przemian są pominięte, mają postać (zob. (2.2.132)):

$$(3.2.7) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{T}} &= \beta \mathbf{L} \mathbf{D} - \frac{3j\mu\beta \mathbf{D} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi})}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}} \left[ (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) + \mathbf{P} \right], \\ j &= \begin{cases} 1 & \text{dla } f = 0 \wedge \mathbf{D} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge \mathbf{D} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) < 0) \vee f < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$f$  jest tu warunkiem plastyczności Hubera-Misesa

$$(3.2.8) \quad f = \frac{3}{2} (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) - \sigma_Y^2(\vartheta, \alpha) = 0,$$

gdzie  $\sigma_Y$  jest granicą plastyczności przy rozciąganiu,  $\vartheta$  jest temperaturą, a  $\alpha$  opisuje zmianę rozmiaru powierzchni płynięcia:

$$(3.2.9) \quad \dot{\alpha} = (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{D}^p.$$

Przesunięcie tej powierzchni określa się przez tensor naprężenia wewnętrznego  $\mathbf{\Pi}$ , którego równanie ewolucji jest liniowe

$$(3.2.10) \quad \dot{\mathbf{\Pi}} = c \mathbf{D}^p,$$

gdzie  $c = \text{const}$ , obrazuje wzmocnienie kinematyczne.

Zmianę temperatury opisuje równanie

$$(3.2.11) \quad \varrho_0 c_v \dot{\vartheta} = (1 - \varphi)(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{D}^p,$$

gdzie:  $\alpha_v$  jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej, a  $c_v$  jest ciepłem właściwym przy stałej objętości. Pierwszy człon po prawej stronie równania (3.2.11) określa prędkość zmiany dyssypacji energii, więc  $\varphi < 1$ . Dla większości metali  $\varphi$  przyjmuje wartość od 0.02 do 0.1 (zob. Mróz i Raniecki (1976)). W równaniu (3.2.7)  $\mathcal{H}$  jest funkcją wzmocnienia:

$$\mathcal{H} = 1 + \frac{c}{2\mu\beta} + \frac{1}{6\mu\beta} \frac{\partial(\sigma_Y^2)}{\partial\alpha} + \frac{(1 - \varphi)}{6\mu\beta\varrho_0 c_v} \frac{\partial(\sigma_Y^2)}{\partial\vartheta}.$$



Tensor  $\mathbf{P}$  otrzymujemy wyrażając człon  $(\omega^p \mathbf{T} - \mathbf{T} \omega^p)$  w funkcji  $\mathbf{D}^p$ , gdzie  $\omega^p$  jest tensorem spinu plastycznego.

Przyjmujemy następującą postać spinu plastycznego:

$$(3.2.12) \quad \omega^p = \varpi \left( \mathbf{I} \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p \mathbf{I} \right),$$

gdzie  $\varpi$ , w ogólnym przypadku, jest funkcją niezmienników tensora  $\mathbf{D}^p$  i  $\mathbf{I}$ . W pracach Onata (1984), Dafaliasa (1983; 1984) i Loreta (1983) przyjęto, że  $\varpi$  jest stałe. Na podstawie analizy problemu prostego ścinania, Paulun i Pęcherski (1987; 1992) zaproponowali i zweryfikowali poniższą relację dla  $\varpi$

$$(3.2.13) \quad \varpi = \frac{3}{\left[ \left( \frac{3c}{2} \right)^2 + \frac{3c}{2} \left( \frac{3}{2} \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} \right)^{1/2} \right]^{1/2}}.$$

Postać tę wykorzystamy w przykładzie numerycznym w dalszych rozważaniach.

Dla małych ciśnień ( $\beta = 1$ ) z relacji kinematycznych i równań konstytutywnych mamy:

$$(3.2.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{j(1-\varphi)}{\rho_0 c_v \mathcal{H}} \Psi &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v_z \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{E\tau}{2\mu} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - E \frac{\partial v_z}{\partial z} + j f^{(\sigma)} \Psi &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + v_z \frac{\partial \tau}{\partial z} - \left( \mu + \frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + j f^{(\tau)} \Psi &= 0, \\ \frac{\partial(\ln m)}{\partial t} + v_z \frac{\partial(\ln m)}{\partial z} + \frac{\tau}{2\mu} \left( 1 - \frac{E}{2\mu} \right) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \left( 1 - \frac{E}{2\mu} \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} - j f^{(m)} \Psi &= 0, \\ \frac{\partial(\ln a)}{\partial t} + v_z \frac{\partial(\ln a)}{\partial z} + \frac{\tau}{\mu} \left( 1 - \frac{E}{4\mu} \right) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \left( 1 - \frac{E}{2\mu} \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} + j f^{(a)} \Psi &= 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} + v_z \frac{\partial \pi}{\partial z} + j f^{(\pi)} \Psi &= 0, \\ \frac{\partial \pi_{23}}{\partial t} + v_z \frac{\partial \pi_{23}}{\partial z} - j f^{(23)} \Psi &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga;  $\pi$ ,  $\pi_{23}$  są niezerowymi składowymi tensora naprężenia wewnętrznego  $\Pi$ ,

$$(3.2.1i) \quad \Psi = \psi_1 \frac{\partial v_z}{\partial z} + \psi_2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \psi_3 \left( \frac{\partial \ln m}{\partial t} + v_z \frac{\partial \ln m}{\partial z} \right) - \psi_4 \left( \frac{\partial \ln a}{\partial t} + v_z \frac{\partial \ln a}{\partial z} \right)$$

oraz

$$f^{(\sigma)} = \frac{3E}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}} \left( \psi_1 - \frac{\varpi\tau}{\mu} \psi_5 \right),$$

$$f^{(\tau)} = \frac{3\mu}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}} \left( \psi_2 + \frac{\varpi\sigma}{2\mu} \psi_5 \right),$$

$$(3.2.1f) \quad f^{(m)} = \frac{3}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}} \left[ \frac{\psi_4}{2} - \left(1 - \frac{E}{4\mu}\right) \psi_1 + \frac{\varpi\tau}{2\mu} \left(1 - \frac{E}{2\mu}\right) \psi_5 \right],$$

$$f^{(a)} = \frac{3}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}} \left[ \frac{\psi_4}{2} - \frac{\psi_1}{2} - \frac{\varpi\tau}{\mu} \left(1 - \frac{E}{4\mu}\right) \psi_5 \right],$$

$$f^{(p)} = \frac{3c}{4\sigma_Y^2 \mathcal{H}} (\psi_4 - \psi_1),$$

$$f^{(23)} = \frac{3c}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}} \psi_2.$$

W powyższych zależnościach:

$$\psi_1 = \left( \frac{2\sigma}{3} - \pi \right), \quad \psi_2 = (\tau - \pi_{23}),$$

$$\psi_3 = \left( \frac{\sigma}{3} - 2\pi \right), \quad \psi_4 = \left( \frac{\sigma}{3} + \pi \right),$$

$$\psi_5 = \sigma \pi_{23}.$$

Występujące w równaniach (3.2.14)  $j$  spełnia warunki:

$$j = \begin{cases} 1 & \text{dla } f = \frac{3}{2} (\psi_1^2 + 2\psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2) - \sigma_Y^2 \\ & = \sigma^2 + 9\pi^2 - 3\sigma\pi + 3(\tau - \pi_{23})^2 - \sigma_Y^2 = 0 \\ & \wedge \Psi \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge \Psi < 0) \vee f < 0. \end{cases}$$

Natomiast

$$\mathcal{H} = 1 + \frac{c}{2\mu} + \frac{1}{6\mu} \frac{\partial(\sigma_Y^2)}{\partial\alpha} + \frac{(1-\varphi)}{6\mu\rho_0c_v} \frac{\partial(\sigma_Y^2)}{\partial\vartheta}.$$

Układ dziesięciu równań (3.2.14) jest quasi-liniowy, niesymetryczny i jednorodny. Można go przekształcić do postaci

$$(3.2.17) \quad \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}(z, t)}{\partial z} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}(z, t)}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} v_\varphi \\ v_z \\ \vartheta \\ \sigma \\ \tau \\ \ln m \\ \ln a \\ \Pi \\ \Pi_{23} \end{pmatrix}.$$

Prędkości charakterystyczne  $W$  są rozwiązaniami wyznacznikowego równania  $|\mathbf{A} - V\mathbf{B}| = 0$ , (zob. np Nowacki (1974)), gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą współczynników pochodnych względem  $z$ , a  $\mathbf{B}$  jest macierzą współczynników pochodnych względem czasu. Po rozwinięciu otrzymujemy

$$(3.2.18) \quad X^3 (\mathcal{L}X^2 + \mathcal{N}X + \mathcal{P}) = 0,$$

gdzie

$$(3.2.19) \quad X = \rho_0(V - v_z)^2 = \rho_0\Omega^2$$

i  $\Omega$  jest prędkością lokalną (względem materiału) w chwili  $t$

$$(3.2.20) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &= 1 + j\psi_3 f^{(m)} - j\psi_4 f^{(a)}, \\ \mathcal{N} &= -\left[E + \left(\mu + \frac{\sigma}{2}\right)\right] \mathcal{L} + j\frac{E}{2\mu} \psi_1 f^{(\sigma)} + j\psi_6 f^{(\tau)}, \\ \mathcal{P} &= E\mathcal{L} \left(\mu + \frac{\sigma}{2}\right) - j\frac{E}{2\mu} \left(\mu + \frac{\sigma}{2}\right) \psi_1 f^{(\sigma)} - jE \psi_7 f^{(\tau)} \end{aligned}$$

oraz

$$(3.2.21) \quad \begin{aligned} \psi_6 &= \psi_2 + \frac{\tau}{2\mu} \left(1 - \frac{E}{2\mu}\right) \psi_3 + \frac{\tau}{\mu} \left(1 - \frac{E}{4\mu}\right) \psi_4, \\ \psi_7 &= \psi_2 + \frac{\tau}{2\mu} (\psi_1 + \psi_4). \end{aligned}$$

Równanie (3.2.18) ma trywialne rozwiązanie  $X = 0$  oraz dwa pierwiastki dla części kwadratowej  $X_{1,2}$ . Większy pierwiastek  $X_f$  nazywany jest prędkością fal

szybkich, a mniejszy  $X_s$ , prędkością fal wolnych. Gdy  $j = 0$  (obszar sprężysty lub odciążenie), z równania (3.2.18) mamy

$$(3.2.22) \quad \begin{aligned} X_f &= \varrho_0 \Omega_f^2 = E, \\ X_s &= \varrho_0 \Omega_s^2 = \mu + \frac{\sigma}{2}. \end{aligned}$$

tak jak w pracy Nguyen (1984). Dla równania kwadratowego (3.2.18) po pewnych przekształceniach, otrzymamy

$$(3.2.23) \quad \Delta = \left\{ \left[ E - \left( \mu + \frac{\sigma}{2} \right) \right] \mathcal{L} - j \frac{E}{2\mu} \psi_1 f^{(\sigma)} + j \psi_6 f^{(\tau)} \right\}^2 + 2j \frac{E}{\mu} \psi_1 \psi_6 f^{(\sigma)} f^{(\tau)} + 4j E \mathcal{L} f^{(\tau)} (\psi_7 - \psi_6).$$

Gdy stosunek rzędu naprężenia do modułu sprężystego odkształcenia postaciowego jest dużo mniejszy od jedności i może być pominięty w zależności (3.2.21), mamy  $\psi_6 = \psi_7 = \psi_2$ . Tensor spinu plastycznego w tym przypadku nie odgrywa znaczącej roli (zob. np. Dafalias (1984), Nguyen (1992b)). Możemy pokazać, że

$$(3.2.24) \quad \Delta = \left[ (E - \mu) \mathcal{L} - j \frac{E}{2\mu} \psi_1 f^{(\sigma)} + j \psi_2 f^{(\tau)} \right]^2 + j \left( \frac{E \psi_1 \psi_2}{\sigma_2^2 \mathcal{H}} \right)^2 > 0.$$

Układ równań (3.2.14) jest teraz hiperboliczny. Dla małych odkształceń otrzymamy wyniki jak w pracy Goel i Malvern (1970).

Z układu równań (3.2.14) możemy wyeliminować  $\ln m$  oraz  $\ln a$ . Uwzględniając (3.2.14)<sub>6,7</sub> możemy je wyrazić przez  $\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$  i  $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ . Wyznacznik tych dwóch równań to jest  $\mathcal{L}$ . Zakładając, że  $\mathcal{L} \neq 0$ , eliminacja  $\ln m$  oraz  $\ln a$  z zależności (3.2.15) prowadzi do związku

$$(3.2.25) \quad \Psi^* = \frac{1}{\mathcal{L}} \left( \frac{E}{2\mu} \psi_1 \frac{\partial v_z}{\partial z} + \psi_6 \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right).$$

Układ równań (3.2.14) można wtedy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{j(1 - \varphi)}{\varrho_0 c_v \mathcal{H}} \Psi^* &= 0, \end{aligned}$$



$$(3.2.26) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v_z \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{E\tau}{2\mu} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - E \frac{\partial v_z}{\partial z} + j f^{(\sigma)} \Psi^* = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + v_z \frac{\partial \tau}{\partial z} - \left( \mu + \frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + j f^{(\tau)} \Psi^* = 0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + v_z \frac{\partial \pi}{\partial z} + j f^{(\pi)} \Psi^* = 0,$$

$$\frac{\partial \pi_{23}}{\partial t} + v_z \frac{\partial \pi_{23}}{\partial z} - j f^{(23)} \Psi^* = 0,$$

gdzie

$$j = \begin{cases} 1 & \text{dla } f = 0 \wedge \Psi^* \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge \Psi^* < 0) \vee f < 0. \end{cases}$$

### 3.2.4 Szczególne przypadki

W przypadku czystego skręcania ( $\sigma = \pi = 0$ ). Z równania (3.2.26)<sub>2</sub> wynika, że  $v_z = \text{const} = 0$  i z zależności (3.2.16) mamy

$$\psi_1 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = 0, \quad \psi_2 = \psi_6 = \tau - \pi_{23},$$

$$f^{(\sigma)} = f^{(\pi)} = f^{(a)} = f^{(2)} = f^{(3)} = 0; \quad f^{(\tau)} = \frac{3\mu\psi_2}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}}, \quad f^{(23)} = -\frac{3c\psi_2}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}}.$$

Układ równań (3.2.26) ma wówczas następującą postać

$$(3.2.27) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{j(1-\nu)(\tau - \pi_{23})}{\varrho_0 c_\nu \mathcal{H}} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \mu \left( 1 - \frac{j}{\mathcal{H}} \right) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \pi_{23}}{\partial t} - \frac{j c}{2 \mathcal{H}} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0,$$

gdzie

$$j = \begin{cases} 1 & \text{dla } f = (\tau - \pi_{23})^2 - \tau_Y^2 \equiv \bar{\sigma}_z^2 - \tau_Y^2 = 0 \wedge (\tau - \pi_{23}) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge (\tau - \pi_{23}) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} < 0) \vee f < 0. \end{cases}$$

$\bar{\sigma}_e$  jest tu efektywnym naprężeniem, zaś  $\tau_Y$  jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu ( $\tau_Y = \sigma_Y/\sqrt{3}$  w przypadku warunku plastyczności Hubera-Misesa).

W przypadku obciążenia czysto osiowego mamy  $\tau = \pi_{23} = 0$ . Pierwsze równanie (3.2.26) daje  $v_\varphi = \text{const} = 0$ . Układ równań (3.2.26) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{j(1-\varphi)}{\rho_0 c_v \mathcal{H}} \Psi^* &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v_z \frac{\partial \sigma}{\partial z} - E \frac{\partial v_z}{\partial z} + j f^{(\sigma)} \Psi^* &= 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} + v_z \frac{\partial \pi}{\partial z} + j f^{(p)} \Psi^* &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

gdzie  $\Psi^* = \frac{E}{2\mu\mathcal{L}} \psi_1 \frac{\partial v_z}{\partial z}$ ,  $f^{(\sigma)} = \frac{3E}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}} \psi_1$ ,  $f^{(p)} = -\frac{3c}{4\sigma_Y^2 \mathcal{H}} \psi_3$ .

Człony zawierające spin plastyczny nie występują w równaniach (3.2.27) oraz (3.2.28) w przypadku czystego skręcania i czystego rozciągania (ściskania). Tensor spinu plastycznego występuje w równaniach opisujących jednoczesne obciążenia osiowe i skręcające. Stąd wniosek, że sprężone obciążenie zwiększa wpływ tensora spinu plastycznego. Ten fakt, intuicyjnie zrozumiały, udowodniony matematycznie wskazuje na możliwość dalszych zastosowań naszych równań konstytutywnych.

### 3.2.5 Fale proste

Równania pola dla materiałów sprężysto-plastycznych niewrażliwych na prędkość odkształcenia w procesie adiabatycznym mają rozwiązania, które zależą od  $z$  i  $t$  tylko poprzez pewną funkcję  $\xi(z, t)$ . Układ równań różniczkowych cząstkowych opisujący to zjawisko sprowadza się do układu równań różniczkowych zwyczajnych względem nowej zmiennej. Pokazano (Raniecki (1976)), że powierzchnia  $\xi = \text{const}$  pokrywa się z powierzchnią fal przyspieszenia. Poruszające się powierzchnie, na których zmienne stanu są stałe, nazywane są falami prostymi. Składając różne fale proste, można znaleźć jawne rozwiązania niektórych klas zagadnień brzegowych (zob. np. Bleich i Nelson (1966)). Poszukujemy teraz rozwiązania szczególnego  $\mathbf{U} = \mathbf{U}[\xi(z, t)]$  układu równań (3.2.26). Zwróćmy uwagę na to, że

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \frac{d\mathbf{U}}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \mathbf{U}' \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{U}}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathbf{U}' \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (3.2.29)$$

gdzie  $\frac{dU}{d\xi} = U'$ . Układ równań (3.2.26) ma teraz postać

$$\begin{aligned} v'_\varphi \dot{\xi} - \frac{1}{\varrho_0} \tau' \xi_{,z} &= 0, \\ v'_z \dot{\xi} - \frac{1}{\varrho_0} \sigma' \xi_{,z} &= 0, \\ \vartheta' \dot{\xi} - \frac{j(1-\varphi)}{\varrho_0 c_v \mathcal{H}} \Psi^* &= 0, \\ \sigma' \dot{\xi} + \frac{E\tau}{2\mu} v'_\varphi \xi_{,z} - E v'_z \xi_{,z} + j f^{(\sigma)} \Psi^* &= 0, \\ \tau' \dot{\xi} - \left(\mu + \frac{\sigma}{2}\right) v'_\varphi \xi_{,z} + j f^{(\tau)} \Psi^* &= 0, \\ \pi' \dot{\xi} + j f^{(p)} \Psi^* &= 0, \\ \pi'_{23} \dot{\xi} - j f^{(23)} \Psi^* &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

gdzie  $v'_\varphi = \frac{dv_\varphi}{d\xi}$ , ...,  $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}$ ,  $\xi_{,z} = \frac{\partial \xi}{\partial z}$  oraz

$$\begin{aligned} \Psi^* &= \frac{1}{\mathcal{L}} \left( \frac{E}{2\mu} \psi_1 v'_z \xi_{,z} + \psi_6 v'_\varphi \xi_{,z} \right) \\ &= a_1 v'_z \xi_{,z} + a_2 v'_\varphi \xi_{,z}. \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Pomnożmy równania (3.2.30)<sub>1,2</sub> przez  $\xi_{,z}$  a (3.2.30)<sub>5-8</sub> przez  $\dot{\xi}$ . Następnie po wstawieniu pierwszych dwóch równań do pozostałych i uwzględnieniu związku podanego przez Ranieckiego (1976) i Nguyena (1985a):

$$\dot{\xi} = -\Omega \sqrt{\xi_{,z} \xi_{,z}}, \quad (3.2.32)$$

$v'_\varphi$  i  $v'_z$  mogą być wyeliminowane z równania (3.2.30). Otrzymujemy wówczas następujący układ równań

$$(3.2.33) \quad \begin{pmatrix} X & -\frac{j(1-\varphi)}{\varrho_0 c_v \mathcal{H}} a_1 & -\frac{j(1-\varphi)}{\varrho_0 c_v \mathcal{H}} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & X - E + j f^{(\sigma)} a_1 & \frac{E \tau}{2\mu} + j f^{(\sigma)} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & j f^{(\tau)} a_1 & X - \left(\mu + \frac{\sigma}{2}\right) + j f^{(\tau)} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & j f^{(p)} a_1 & j f^{(p)} a_2 & X & 0 \\ 0 & -j f^{(23)} a_1 & -j f^{(23)} a_2 & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta' \\ \sigma' \\ \tau' \\ \Pi' \\ \Pi'_{23} \end{pmatrix} = 0,$$

gdzie:  $X$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  były zdefiniowane we wzorach (3.2.19) i (3.2.31), a

$$j = \begin{cases} 1 & \text{dla } f = 0 \wedge a_1 \sigma' + a_2 \tau' \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge a_1 \sigma' + a_2 \tau' < 0) \vee f < 0. \end{cases}$$

### 3.2.6 Przykład numeryczny

Zakładamy, że materiał rury jest opisany przez równanie w postaci potęgowej

$$(3.2.34) \quad \tau = \begin{cases} \mu \gamma & \text{dla } \gamma < \gamma^e, \\ \tau_0 \vartheta^q (\dot{\gamma})^m \gamma^n = T \vartheta^q \gamma^n & \text{dla } \gamma \geq \gamma^e, \end{cases}$$

gdzie  $\vartheta$  jest temperaturą [ $^{\circ}\text{C}$ ],  $\gamma$  jest odkształceniem,  $\dot{\gamma}$  jest prędkością odkształcenia [ $\text{s}^{-1}$ ] oraz  $\gamma = \gamma^e + \gamma^p$ , przy czym  $\gamma^e$  i  $\gamma^p$  są odpowiednio częścią sprężystą i plastyczną odkształcenia. Wartości liczbowe parametrów występujących w zależności (3.2.34) wzięto z pracy Hartleya i innych (1986). Były one wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów z danych doświadczalnych dla próbek cienkościennych wykonanych ze stali AISI 1018, zimno walcowanej (CRS), przy nominalnej prędkości odkształcenia rzędu  $10^3 \text{s}^{-1}$ . Dane materiałowe przedstawiają poniższe tabele

Skład chemiczny ( w procentach wagowych)				
Materiał	C	Mn	P	S
1018 CRS	0.18	0.71	0.020	0.022

Parametry stali 1018CRS	
q	-0.38
n	0.015
m	0.019
$\tau_0$	436 MPa
$\dot{\gamma}$	1200 $\text{s}^{-1}$
T	498,87 MPa
$\gamma^e$	0.026
$\mu$	15384,6 MPa
$\varrho_0$	7900 $\text{kg}/\text{m}^3$
$c_v$	500 $\text{J}/\text{kg}^{\circ}\text{C}$



Badamy możliwe trajektorie naprężeń związane z falami prostymi w płaszczyźnie  $\sigma - \tau$ . Sprzężone fale proste są opisane równaniami

$$X \frac{d\vartheta}{d\sigma} = \frac{1 - \varphi}{\varrho_0 c_0 \mathcal{H}} \left( a_1 + a_2 \frac{d\tau}{d\sigma} \right),$$

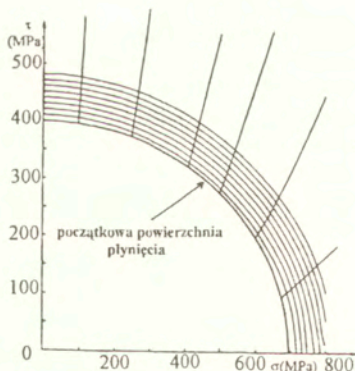
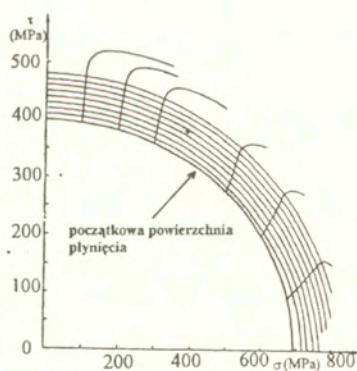
$$\frac{d\tau}{d\sigma} = - \frac{X - E + f^{(\sigma)} a_1}{\frac{E\tau}{2\mu} + f^{(\sigma)} a_2},$$

(3.2.35)

$$X \frac{d\eta}{d\sigma} = -f^{(p)} \left( a_1 + a_2 \frac{d\tau}{d\sigma} \right),$$

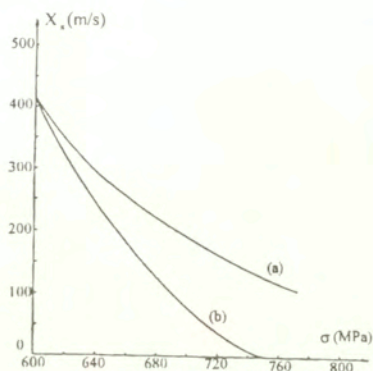
$$X \frac{d\eta_{23}}{d\sigma} = f^{(23)} \left( a_1 + a_2 \frac{d\tau}{d\sigma} \right).$$

Trajektorie naprężeń dla fal szybkich ( $X = X_f$ ) i fal wolnych ( $X = X_s$ ) są rozwiązaniami równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu (3.2.35)<sub>2</sub>. Równanie rozwiązano metodą Runge-Kutty, przyjmując parametry materiałowe stali CRS 1018. Na rysunkach 10 i 11 przedstawiono trajektorie naprężeń dla fal szybkich i wolnych w dwóch przypadkach: gdy uwzględniono człony zawierające spin plastyczny (rys.10), bez uwzględnienia spinu plastycznego (rys.11).



Rys.10. Trajektorie fal adiabatycznych z uwzględnieniem tensora spinu plastycznego (lewy)

Rys.11. Trajektorie fal adiabatycznych bez uwzględnienia tensora spinu plastycznego (prawy)



Rys.12. Prędkość fal wolnych w funkcji naprężenia  
 a) bez uwzględnienia tensora spinu plastycznego  
 b) przy uwzględnieniu tensora spinu plastycznego

Z rysunków widać, że trajektorie dla fal szybkich i wolnych nie są ortogonalne, tak jak w przypadku małych deformacji. Dla fal szybkich nie ma większych różnic między trajektoriami w tych dwóch przypadkach, lecz dla fal wolnych istnieje duża różnica co pokazuje rys. 11. Trajektorie naprężenia osiągają maksimum, a następnie maleją. Poza tym, prędkości fal wolnych szybciej dążą do zera przy uwzględnieniu tensora spinu plastycznego (rys.12).

Jak wspomniano wcześniej, ze złożenia fragmentów fal szybkich i wolnych możemy znaleźć rozwiązania niektórych zagadnień brzegowych. Jednak tej metody nie można używać w celu uzyskania rozwiązań dla dowolnych warunków na brzegu. Można ją stosować w przypadku występowania stałych skoków obciążenia na brzegu rury.

### 3.3 Proste ścinanie blach metalowych

Nowoczesne metody numeryczne pozwalają na symulację zachowania się konstrukcji cienkościennych (np. karoserii samochodów, autobusów, samolotów itp.) pod działaniem różnych obciążeń. Zdarza się czasem, że pracują one w ekstremalnych warunkach, przy różnych prędkościach odkształcania. Dlatego wymagana jest znajomość własności mechanicznych blach metalowych używanych do produkcji takich konstrukcji. Wiemy, że własności mechaniczne blach metalowych zależą nie tylko od składu chemicznego, lecz również od metod wytwarzania tych blach. Dla producentów i użytkowników niezbędna jest znajomość takich danych.

Testy na proste ścinanie są bardzo ważne przy sformułowaniu praw konstytutywnych materiałów i uzupełniają testy podstawowe (rozciąganie i ściskanie lub skręcanie). Wyniki badań dotyczących tego zagadnienia zostały opublikowane w serii prac Nowackiego i Nguyena (1995), Nguyena (1995b), Nguyena i Nowackiego (1997), Guéline, Nowackiego i Nguyena (1997), Nguyena i Nowackiego (1998), Klepaczko, Nguyena i Nowackiego (1999).

W tym punkcie przedstawimy rezultaty testów na proste ścinanie blach metalowych w zakresie obciążeń quasi-statycznych i dynamicznych z dużymi prędkościami deformacji. W tych badaniach zastosowano nowy przyrząd zaprojektowany przez Gary'ego i Nowackiego (1994), który umożliwia zamianę ściskania na proste ścinanie. W celu wykonania testów quasi-statycznych przyrząd ten był montowany w uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej. Następnie przeprowadzono testy dynamiczne w układzie prętów Hopkinsona – w dwu układach: (a) przyrząd był umieszczony między dwoma prętami, i (b) bezpośrednie uderzenie (kiedy pocisk uderza w przyrząd umieszczony na początku pręta transmitującego układu Hopkinsona w celu zwiększenia prędkości odkształcenia).

Równoległe, wykorzystując równanie konstytutywne przedstawione w rozdziale 2 sformułowano zagadnienie początkowo-brzegowe dla przebiegu doświadczenia, uwzględniając duże deformacje. Obliczenia numeryczne pozwoliły wyznaczyć optymalne wymiary próbek. Rozwiązano numerycznie zagadnienie identyczne jak w eksperymencie i porównano wyniki obliczeń z wynikami doświadczenia. Zaobserwowano jednorodność pola plastycznego odkształcenia zarówno w doświadczeniach jak i w symulacji numerycznej. Dopiero dla odkształceń większych od 0.7 obserwuje się obszary pasm ścinania.

### 3.3.1 Quasi-statyczne i dynamiczne ścinanie blach metalowych

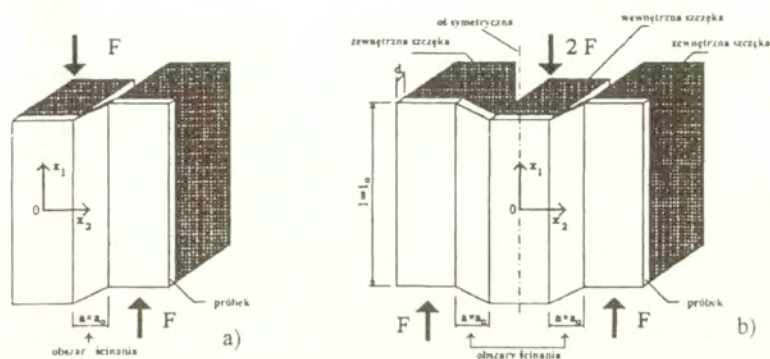
Analizą testowania próbek metalowych na ścinanie zajmował się losipescu (1975). Na podstawie analizy wytrzymałościowej, teorii sprężystości i metod elastooptyki zaproponował on schematy testów na czyste i proste ścinania. Mogą one być wykorzystane w badaniach statycznych.

Istnieją dwa schematy testów blach metalowych bazujące na ścinaniu. Pierwszy schemat (rys.13a) został przedstawiony w pracy G'Sella et al. (1983) dla badania płytek z polimerów, a następnie był stosowany: do blach stalowych przez Raucha i G'Sella (1989), do stopów litium-aluminiumowych przez Wacka i Torabiego (1993) oraz do stopu z pamięcią kształtu przez Manacha i Favier (1997). Główną wadą tego schematu jest brak symetrii, a zaletą jest stosunkowo jednorodne pole odkształcenia. To podejście jest w pewnym stopniu podobne do testu skręcania cienkościennej rury, przedstawionego w pracy Marchanda i Duffy'ego (1988).

Inny schemat (rys.13b) został zaproponowany przez Yoshidę i Myauchiego (1978). Zapewniono w nim symetrię obciążenia próbki. Dokładny montaż próbek w szcze-



kach jest bardzo ważny. W schemacie tym jednorodność pola odkształcenia jest gorsza niż w poprzednim schemacie.



Rys.13. Schemat obrazujący ścinanie próbek

Standardowe badania dynamiczne przy dużych prędkościach deformacji, w celu zmniejszenia wpływu sił bezwładności i drgań nałożonych na zarejestrowane sygnały, wymagają użycia próbek i szczęk montażowych o małych rozmiarach. Badania te wykonuje się przy użyciu układu prętów Hopkinsona. Technika ta ma pewne wady, np. ograniczoną prędkość odkształcenia i przemieszczenia. W rozciąganiu, szczególnie dla małych próbek, maksymalne odkształcenie jest ograniczone ze względu na powstanie szyjki. W przypadku ściskania próbek cylindrycznych, duży wpływ na wyniki ma tarcie i bezwładność promieniowa. Poza tym, występują tu drgania typu Pochhammer-Chree prętów Hopkinsona (zob. np. Bertholf i Karnes (1975)), które są nałożone na sygnały rejestrujące. Dla testów skręcających cienkościenną rurę maksymalne odkształcenie zależy od początkowego kąta skręcania pręta.

Gary i Nowacki (1994) zaprojektowali przyrząd do testowania blach metalowych, który zamienia obciążenia ścisające na ścinanie. Zasada działania przyrządu jest przedstawiona w następnym paragrafie. Zapewnia on dobrą jednorodność pola odkształcenia wzdłuż długości próbek.

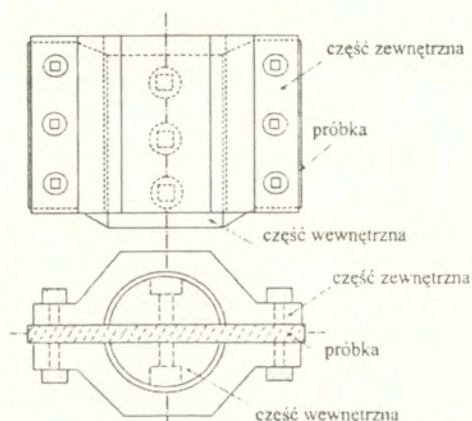
### 3.3.2 Badania doświadczalne

Przyrząd do testowania blach metalowych, pokazany na rysunku 14, składa się z dwóch współosiowych części, zwanych wewnętrzną i zewnętrzną.

Każda z nich składa się z dwóch symetrycznych szczęk. Półka jest zamocowana między nimi. Kiedy przyrząd jest pod obciążeniem ścisającym, część wewnętrzną i część zewnętrzną przesuwają się względem siebie. Dwa prostokątne



obszary próbki znajdujące się między tymi częściami podczas ścinania przekształcają się w równoległoboki o stałej długości i wysokości.



Rys.14. Przyrząd zaprojektowany przez Gary'ego i Nowackiego do testowania blach metalowych

Testowano próbki ze stali XES (standard francuski) o składzie chemicznym (w procentach wagowych): C-0.049, N-0.002, Ni-0.02, Cr-0.013, Mn-0.188, Cu-0.013, Al-0.064, Si-0.0009, P-0.014, S-0.017, o grubości 0.75mm (oraz próbki walcowane do 20%, przy  $d = 0.60\text{mm}$ ). Druga seria próbek była wykonana ze stali austenitycznej 1H18N9T (polska klasyfikacja) o składzie chemicznym: C-0.076, Mn-0.89, Si-0.45, P-0.02, Cr-17.78, Ni-9.24, Ti-0.48 i o grubości 0.5mm.

Przyjęto wartości  $a_0/l_0 = 1/10$ ,  $a_0/d = 4$  (albo  $a_0/d = 5$  dla próbek po walcowaniu). Stwierdzono, że są one dobre zarówno dla testów quasi-statycznych jak również dynamicznych, por. np. Tourabi et al. (1993) i Gary i Nowacki (1994). Na ogół przyjmuje się  $a_0/d > 2$ , by uniknąć zniszczenia próbek w czasie ich montowania w szczękach.

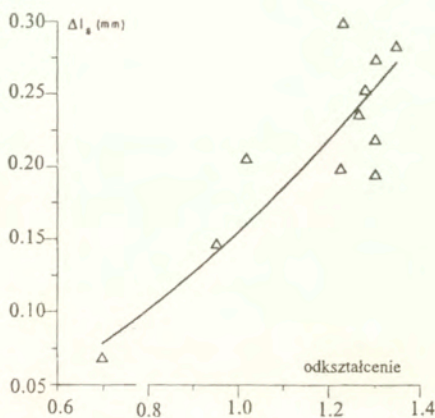
W obszarze ścinania (patrz schemat na rysunku 13) tensor naprężenia ma następujące składowe:  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  i  $\sigma_{12}$ . Występują tu składowe  $\sigma_{11}$  i  $\sigma_{22}$ , ponieważ odległość  $a = a_0 = \text{const}$ . Tensor odkształcenia ma tylko jedną niezerową składową  $\varepsilon_{12} = \gamma/2$ .

Opisany przyrząd był używany w szerokim zakresie prędkości:  $10^{-3}\text{s}^{-1} < \dot{\gamma} < 10\text{s}^{-1}$  w testach quasi-statycznych w maszynie hydraulicznej i  $10^2\text{s}^{-1} < \dot{\gamma} < 10^4\text{s}^{-1}$  w testach dynamicznych. Stosowanie tego samego przyrządu do badań, zarówno w testach quasi-statycznych jak i dynamicznych, umożliwia ich porównanie i powiększa wiarygodność wyników doświadczalnych.

### 3.3.3 Quasi-statyczne testy na maszynie wytrzymałościowej

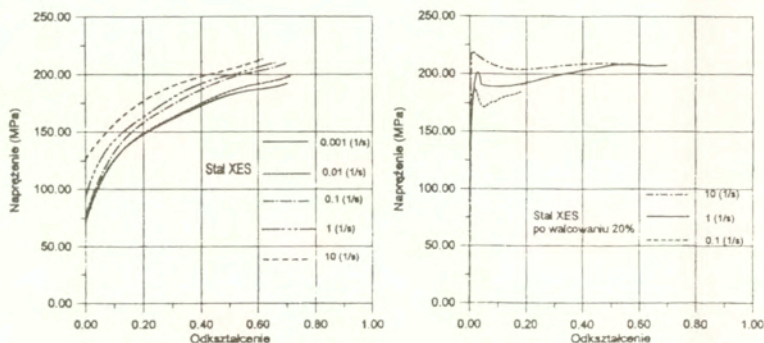
Przyrząd najpierw był testowany w maszynie wytrzymałościowej przy quasi-statycznym obciążeniu. Próbką była deformowana nie tylko między szczękami (obszar  $a_0$ ), ale również w części znajdującej się pod szczękami. Względne osiowe przesunięcie  $\Delta l$  części wewnętrznych i zewnętrznych przyrządu jest łatwe do zmierzenia, jest ono sumą  $\Delta l = \Delta l_g + 2\Delta l_s + \Delta l_e$ , gdzie  $\Delta l_g$  odpowiada odkształceniu w prostym ścinaniu ( $\gamma = \Delta l_g/a_0$ ),  $\Delta l_s$  jest przesunięciem pod szczękami, a  $\Delta l_e$  uwzględnia wpływ sprężystości systemu obciążenia. Założono, że w płaskim ścinaniu przekrój nie zmienia się:  $A_s = \text{const}$  ( $A_s = l_0 d$ ,  $d$  jest grubością próbki). Średnie naprężenie ścinające jest określone jako  $\tau = \sigma_{12} = F/2A_s$ . W quasi-statycznym teście można oceniać wartość przesunięcia pod szczękami  $\Delta l_s$  w procesie obciążenie-odciążenie. Po takim procesie, trwale odkształcenia mogą być mierzone pod mikroskopem optycznym. Po porównaniu z otrzymanymi odkształceniami pod koniec procesu odciążenia otrzymujemy  $\Delta l_s$ . Procedura ta musi być powtarzana dla różnych zakresów  $\gamma$ .  $\Delta l_e$  jest określone przez obciążenie sprężyste.

Na rysunku 15 pokazano przesunięcie  $\Delta l_s$  pod szczękami w zależności od odkształcenia plastycznego. Przesunięcie to wzrasta szybciej dla większych odkształceń i jest prawie stałe przy różnych prędkościach ścinania, w zakresie  $10^{-3} \text{ s}^{-1} < \dot{\gamma} < 10 \text{ s}^{-1}$ .



Rys.15.  $\Delta l_s$  jako funkcja odkształcenia plastycznego

Końcowe wyniki tych badań dla stali XES są pokazane na rysunku 16. Wykresy  $\tau(\gamma)$  dla próbek po 20% walcowaniu są przedstawione na rysunku 17.

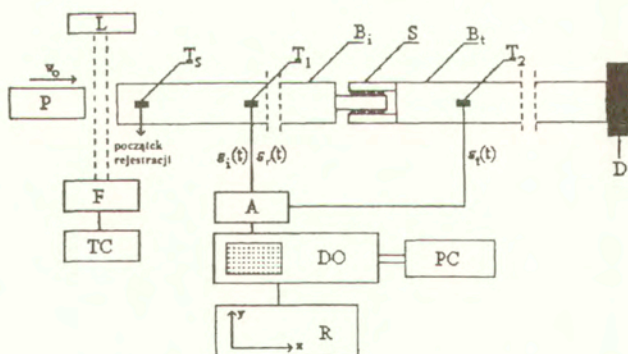


Rys.16. Wyniki badań stali XES

Rys.17. Wyniki badań stali XES po walcowaniu

### 3.3.4 Testy dynamiczne w standardowym układzie prętów Hopkinsona

Testy dynamiczne w standardowym układzie prętów Hopkinsona są podobne do testów statycznych lecz charakteryzują się wyższą prędkością deformacji. Przyrząd jest umieszczony między prętem przyjmującym a transmitującym. Schemat doświadczenia jest przedstawiony na rys.18.



Rys.18. Standardowy układ prętów Hopkinsona dla testów dynamicznych

P-pocisk; F-fotodiody; TC-czasomierz; L- źródło światła

$T_s, T_1, T_2$  - tensometry;  $B_i, B_t$  - pręty układu Hopkinsona; S-przyrząd z próbką

A-zwmacniacz; DO- oscyloskop cyfrowy; PC-komputer; R-ploter; D-amortyzator



Impedancje przyrządu i prętów muszą być w przybliżeniu takie same dla zmniejszenia drgań ubocznych. Sprężyste fale podłużne są wywołane przez pocisk uderzający w pręt przyjmujący. Pociski mogą mieć różne długości i średnice. W naszych doświadczeniach przyjęliśmy  $d_p = 25\text{mm}$ . Są one wyrzucane z prędkością  $v_0$ :  $10\text{ms}^{-1} < v_0 < 20\text{ms}^{-1}$ . Prędkość jest mierzona metodą optyczną w układzie składającym się z dwóch źródeł światła i dwóch diod. Czas lotu pocisku między dwoma równoległymi wiązkami światła jest rejestrowany przez czasomierz. Fale padające, odbite i transmitowane muszą być rejestrowane w funkcji czasu, to znaczy  $\varepsilon_i(t)$ ;  $\varepsilon_r(t)$  oraz  $\varepsilon_t(t)$ , przy pomocy tensometrów  $T_1$  i  $T_2$ . Uzyskane sygnały są wzmacniane i rejestrowane w cyfrowym oscyloskopie a następnie zapisane na dysku komputera. W kanale pierwszym oscyloskopu są rejestrowane fale padające i odbite, a fale transmitowane są rejestrowane w kanale drugim. Baza czasowa oscyloskopu jest wyzwalana przez dodatkowy tensometr  $T_s$ , umocowany na początku pręta przyjmującego. W takim układzie pomiarowym możemy otrzymać przebiegi wszystkich fal.

Ze względu na dyspersję, zarejestrowane sygnały muszą być skorygowane, szczególnie gdy są używane długie pręty w układzie Hopkinsona, a fale padające są krótkie (Bertholf i Karnes (1975), Gary i Nowacki (1994)).

Przy założeniu, że czas transmisji fal w próbce jest bardzo krótki względem całkowitego czasu obciążenia przez falę padającą z testów znajdujemy  $\sigma_{12}(\gamma)$  i powierzchnię  $f(\sigma_{12}, \gamma, \dot{\gamma}) = 0$ .

Zarówno w testach quasi-statycznych jak i dynamicznych, używane były próbki o rozmiarach  $l_0 = 30\text{mm}$ ,  $a_0 = 3\text{mm}$  i  $d = 0.75\text{mm}$  ( $0.6\text{mm}$  dla próbek po walcowaniu). W badaniach dynamicznych, w celu skrócenia czasu transmisji fal używano również próbki o długości  $l_0 = 15\text{mm}$ .

Przy obciążeniach dynamicznych mierzenie względnego przesunięcia szczęk wewnętrznych i zewnętrznych  $\Delta l$  nie jest proste. Założono, że pręty pomiarowe są sprężyste i przesunięcia  $\delta_1(t)$  i  $\delta_2(t)$  obu końców przyrządu mogą być znalezione na podstawie pomiarów fal sprężystych  $\varepsilon_i(t)$ ,  $\varepsilon_r(t)$  i  $\varepsilon_t(t)$ :

$$(3.3.1) \quad \delta_1(t) = C_0 \int_0^t [\varepsilon_i(\tau) - \varepsilon_r(\tau)] d\tau, \quad \delta_2(t) = C_0 \int_0^t \varepsilon_t(\tau) d\tau,$$

gdzie  $C_0$  jest prędkością fal podłużnych w prętach.

Średnie naprężenie ścinające  $\bar{\gamma}^*$  ma postać

$$(3.3.2) \quad \bar{\gamma}^* = \frac{\Delta l}{a_0} = \frac{1}{a_0} [\delta_1(t) - \delta_2(t)].$$

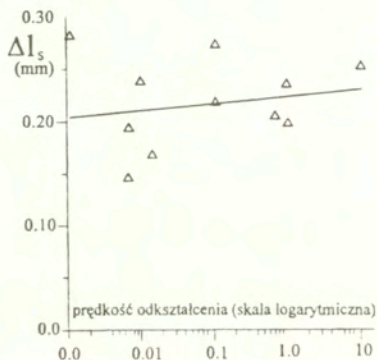
Musimy tu uwzględnić poprawki wynikające z przesunięcia próbek pod szczękami. W efekcie średnie naprężenie ścinające  $\bar{\gamma}(t)$  ma postać

$$(3.3.3) \quad \bar{\gamma}(t) = \bar{\gamma}^* - \frac{2}{a_0} \Delta l_s,$$



gdzie  $\Delta l_s$  jest zdefiniowane jako funkcja odkształcenia ścinającego  $\tilde{\gamma}^*$ .  $\Delta l_s$  znajdujemy bezpośrednio z diagramu przedstawionego na rys.19.

W przypadku dużej prędkości odkształcenia zakładamy, że korekta przesunięcia występującego pod szczękami, nie zależy od prędkości deformacji, tak jak w testach quasi-statycznych. Średnią prędkość odkształcenia liczymy ze wzoru  $\dot{\tilde{\gamma}} = \partial \tilde{\gamma} / \partial t$ .



Rys.19.  $\Delta l_s$  w zależności od prędkości odkształcenia

Średnie naprężenie ścinające  $\bar{\sigma}_{12}$  obliczamy ze wzoru

$$(3.3.4) \quad \bar{\sigma}_{12} = [F_1(t) + F_2(t)]/4A_s,$$

gdzie  $F_1(t)$  i  $F_2(t)$  są siłami działającymi na brzegach przyrządu do ścinania. Można je zapisać jako funkcje  $\varepsilon_i(t)$ ,  $\varepsilon_r(t)$  oraz  $\varepsilon_t(t)$ , używając przy tym prawa Hooke'a. Ostatecznie, średnie naprężenie ścinające ma postać:

$$(3.3.5) \quad \bar{\sigma}_{12} = \frac{1}{4} E_0 \frac{A_H}{A_s} [\varepsilon_i(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_t(t)],$$

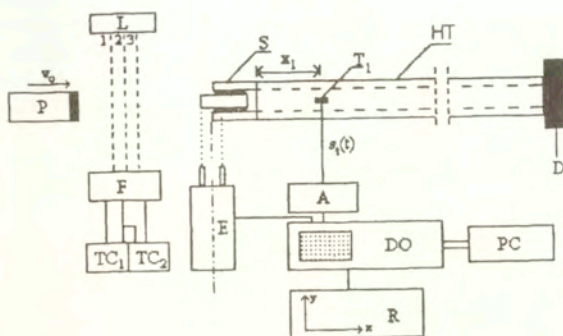
gdzie  $E_0$  jest modulem Younga i  $A_H$  jest przekrojem prętów w układzie Hopkinsona. Powyższe wzory można wyprowadzić na podstawie elementarnej teorii podłużnych fal sprężystych.

### 3.3.5 Bezpośrednie uderzenie

Największa prędkość deformacji w próbkach występuje przy bezpośrednim uderzeniu w przyrząd (rys. 20), używając tylko jednego pręta układu Hopkinsona.

Technikę tę zaproponowali Dharan i Hauser (1970). Później dla ścinania opracował ją Klepaczek (1994), i zastosował ją do blach metalowych (1995). Metoda

ta pozwala łatwo zaprogramować nominalną prędkość odkształcenia w ścinaniu i zredukować drgania typu Pochhammer-Chree.



Rys.20. Bezpośrednie uderzenie

TC1, TC2- czasomierz; E- tensometr optyczny; HT- pręt układu Hopkinsona  
pozostałe elementy-tak jak na rysunku 18

Pociski o różnych długościach, o średnicy  $d_p = 22\text{mm}$ , są wystrzeliwane z wyrzutni pneumatycznej z prędkością  $v_0$ ,  $1\text{ms}^{-1} < v_0 < 200\text{ms}^{-1}$ . Schemat rejestracji jest inny niż w tradycyjnym układzie Hopkinsona. Rejestrujemy tylko fale transmitowane  $\varepsilon_i(t)$ , przesunięcie szczęk wewnętrznych względem zewnętrznych i prędkość pocisku. Prędkość pocisku tuż przed uderzeniem jest mierzona metodą optyczną. Układ ten składa się z trzech źródeł światła przesyłanych za pomocą światłowodów 1, 2, 3 oraz z trzech niezależnych diod optycznych. Te ostatnie rejestrują okresy czasu, gdy pocisk przecina źródła światła. Użycie trzech źródeł światła pozwala określić przyśpieszenie pocisku przed uderzeniem, a zatem dokładną wartość prędkości  $v_0$ .

Osiowe przesunięcie szczęk wewnętrznych przyrządu  $u_1(t) = \delta_A(t)$  jest mierzone w funkcji czasu przez bezstykowy optyczny extensometr, który reaguje na przesunięcie kawałka czarno-białego papieru naklejonego na szczękę wewnętrzną.

Siła osiowa przenoszona przez zewnętrzną część przyrządu, może być znaleziona jako funkcja czasu z przebiegu fal transmitowanych  $\varepsilon_i(t)$ , mierzonych przy pomocy  $T_1$ . Bezpośrednie określenie osiowego przesunięcia pozwala dokładniej ocenić historię deformacji. Po wyeliminowaniu czasu, znajdujemy krzywą  $\sigma_{12}(\gamma)$  oraz  $\dot{\gamma}(\gamma)$ .

Końcowe przesunięcie  $\Delta l$  można znaleźć z zależności

$$(3.3.6) \quad \Delta l(t) = \delta_A(t) - \delta_B(t),$$

gdzie:  $\delta_A$  jest osiowym przesunięciem części wewnętrznej przyrządu względem części zewnętrznej, mierzonym optycznym tensometrem, a  $\delta_B$  jest przesunięciem

początku pręta Hopkinsona:

$$(3.3.7) \quad \delta_B(t) = C_0 \int_0^t \varepsilon_t(\tau) d\tau,$$

gdzie:  $C_0$  jest prędkością fal sprężystych w pręcie,  $\varepsilon_t(t)$  jest transmitowanym sygnałem mierzonym przy pomocy tensometru  $T_1$  zamontowanego w odległości  $5d_2$ , gdzie  $d_2$  jest zewnętrzną średnicą pręta Hopkinsona. Zakładano tu, że lokalne ciśnienie za przyrządem w pręcie rozchodzi się równomiernie w odległość  $x_1 \geq 3d_2$ ; jest to dynamiczna zasada Saint Venanta (zob. np. Bertholf i Karnes (1975), Klepaczek (1994)).

Średnie odkształcenie ścinające ma postać:

$$(3.3.8) \quad \bar{\gamma}(t) = \frac{1}{a_0} \left[ \delta_A(t) - C_0 \int_0^t \varepsilon_t(\tau) d\tau \right].$$

Średnią prędkość odkształcenia obliczymy z wzoru

$$(3.3.9) \quad \dot{\bar{\gamma}}(t) = \frac{1}{a_0} \left[ \frac{d\delta_A}{dt} - C_0 \varepsilon_t(t) \right].$$

Tak jak w normalnym układzie Hopkinsona, musimy tu także uwzględnić poprawkę dotyczącą przesunięcia próbek pod szczękami.

Siła osiowa przenoszona przez przyrząd jest opisana przez

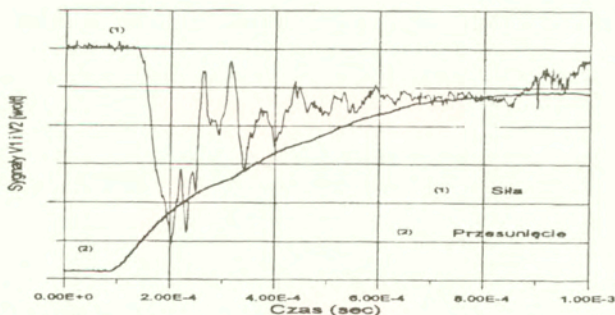
$$(3.3.10) \quad F(t) = E_0 A_T \varepsilon_t(t) \quad \text{gdzie} \quad A_T = \frac{\pi(d_2^2 - d_1^2)}{4},$$

a  $E_0$  jest modułem Younga pręta,  $d_1$  jest jego średnicą wewnętrzną. Napężenie ścinające ma postać

$$(3.3.11) \quad \bar{\sigma}_{12}(t) = \frac{F(t)}{2A_s} = \frac{E_0 A_T \varepsilon_t(t)}{2l_0 d} = \frac{\pi(d_2^2 - d_1^2)}{8l_0 d} E_0 \varepsilon_t(t).$$

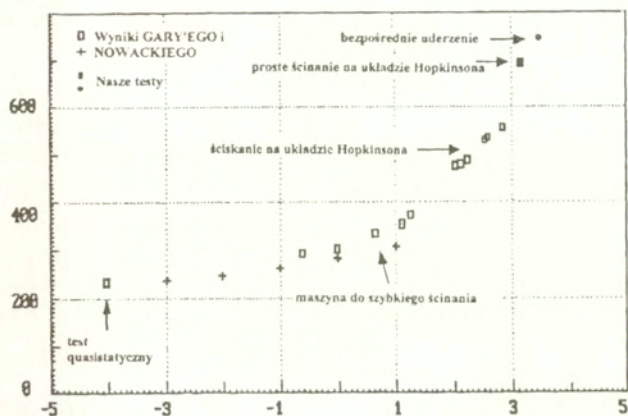
i jest proporcjonalne do sygnału przenoszonych fal podłużnych  $\varepsilon_t$ .

Typowe oscylogramy uzyskane dla stali pokazano na rysunku 21.



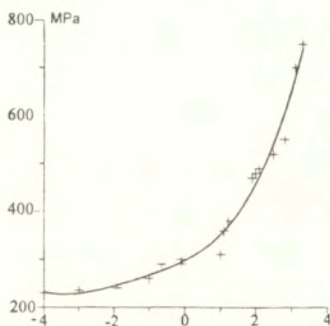
Rys.21. Typowy oscylogram uzyskany podczas testu w bezpośrednim uderzeniu

Przy prędkości odkształcenia  $\dot{\gamma} = 1.2 \times 10^3 s^{-1}$  w przyrządzie występują drgania. Transmitowany sygnał  $\varepsilon_t(t)$  jest proporcjonalny do siły (górny wykres). Widoczne są wspomniane nałożone drgania. Dolny wykres obrazuje proporcjonalne przesunięcie zewnętrznej części przyrządu montowanego na końcu pręta Hopkinsona. Opóźnienie między tymi sygnałami jest czasem potrzebnym transmitowanym falom na dotarcie do przyrządu pomiarowego. Jest on rzędu  $\sim 60 \mu s$ .



Rys.22. Porównanie wyników testów z wynikami Gary'ego i Nowackiego

Porównanie otrzymanych wyników z wynikami Gary'ego i Nowackiego (1994) przedstawiono na rys.22. Oś pionowa jest granicą plastyczności, a oś pozioma jest logarymiczną prędkością odkształcenia.



Rys.23. Wykres: maksymalne napężenie - logarymiczna prędkość odkształcenia



W przypadku bezpośredniego uderzenia, prędkość odkształcenia jest większa niż  $10^3 s^{-1}$ . Przy prędkości wyższej niż  $0.1 s^{-1}$ ,  $\partial\tau/\partial(\log\dot{\gamma})$  wzrasta bardzo szybko, jak pokazano na rysunku 23.

### 3.3.6 Analiza teoretyczna procesu prostego ścinania

Proste ścinanie w kierunku  $\mathbf{e}_1$  w układzie współrzędnych  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , jest opisane związkami

$$(3.3.12) \quad \begin{aligned} u_1 &= \gamma(t) x_2, & u_2 &= u_3 = 0, \\ v_1 &= \dot{\gamma} x_2, & v_2 &= v_3 = 0, \end{aligned}$$

gdzie  $\gamma = \text{ctg}\chi$  (por. rys.4) i  $\dot{\gamma}$  są odpowiednio plastycznym odkształceniem ścinającym i prędkością odkształcenia. Z pola prędkości  $\mathbf{v}$  obliczymy tensor gradientu prędkości  $\mathbf{V}$ , tensor prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  i tensor spinu  $\boldsymbol{\omega}$  w układzie  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ :

$$(3.3.13) \quad \mathbf{V} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego  $\boldsymbol{\sigma}$  i tensor naprężeń wewnętrznych  $\boldsymbol{\Pi}$  mają następujące niezerowe składowe

$$(3.3.14) \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{pmatrix}.$$

Równania konstytutywne dla procesu adiabatycznego, przy umiarkowanych ciśnieniach, dla materiału ze wzmocnieniem izotropowo-kinematycznym typu "rate independent", z pominięciem rozszerzalności termicznej, ciepła deformacji sprężystej i ciepła wewnętrznych przemian, mają postać (zob. rozdział 2)

$$(3.3.15) \quad \begin{aligned} \overset{\nabla}{\mathbf{T}} &= \beta \mathbf{L} \mathbf{D} - \frac{3j\mu\beta \mathbf{D} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi})}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}} [(\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi}) + \mathbf{P}], \\ j &= \begin{cases} 1 & \text{dla } f = 0 \wedge \mathbf{D} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi}) \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge \mathbf{D} \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi}) < 0) \vee f < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie  $\beta = \rho_0/\rho$  jest stosunkiem gęstości w konfiguracjach odniesienia i aktualnej,  $\mathbf{T} = \beta\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{T} + \mathbf{T}\boldsymbol{\omega}$  jest pochodną Zarembki-Jaumanna,  $\bar{\mathbf{T}}$  jest dewiatorem tensora  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{L}$  jest tensorem czwartego rzędu modułu sprężystości,  $\mu$  jest współczynnikiem Lamégo.  $f$  jest warunkiem plastyczności Hubera-Misesa.

$$(3.3.16) \quad f = \frac{3}{2} (\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi}) \cdot (\bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Pi}) - \sigma_Y^2(\vartheta, \alpha) = 0,$$

gdzie  $\sigma_Y$  jest granicą plastyczności przy rozciąganiu,  $\vartheta$  jest temperaturą a  $\alpha$  jest związane z rozmiarem powierzchni płynięcia

$$(3.3.17) \quad \dot{\alpha} = (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{D}^p.$$

Przesunięcie tej powierzchni jest określone przez tensor naprężenia szczałkowego 2-go rodzaju (ang. *back stress*)  $\mathbf{\Pi}$ , którego równanie ewolucji ma postać wzmocnienia liniowo-kinematycznego

$$(3.3.18) \quad \dot{\mathbf{\Pi}} = c \mathbf{D}^p,$$

gdzie:  $c = \text{const}$  a  $\mathbf{D}^p$  jest tensorem prędkości deformacji plastycznej. Zmianę temperatury opisuje równanie

$$(3.3.19) \quad \varrho_0 c_v \dot{\vartheta} = (1 - \wp)(\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{\Pi}) \cdot \mathbf{D}^p,$$

gdzie:  $c_v$  jest ciepłem właściwym przy stałej objętości;  $\wp$  przyjmuje wartości od 0.02 do 0.1 dla metali. W równaniu (3.3.15)  $\mathcal{H}$  jest funkcją wzmocnienia

$$\mathcal{H} = 1 + \frac{c}{2\mu\beta} + \frac{1}{6\mu\beta} \frac{\partial(\sigma_Y^2)}{\partial\alpha} + \frac{(1 - \wp)}{6\mu\beta\varrho_0 c_v} \frac{\partial(\sigma_Y^2)}{\partial\vartheta}.$$

Tensor  $\mathbf{P}$  występujący w równaniu (3.3.15) otrzymamy wyrażając związek ( $\omega^p \mathbf{T} - \mathbf{T} \omega^p$ ) przez  $\mathbf{D}^p$ , gdzie  $\omega^p$  jest tensorem spinu plastycznego. Przyjmujemy następującą postać tensora spinu plastycznego (Paulun i Pęcherski (1992))

$$(3.3.20) \quad \omega^p = \varpi (\mathbf{\Pi} \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p \mathbf{\Pi}),$$

gdzie  $\varpi$  zależy w ogólnym przypadku od niezmienników tensorów  $\mathbf{D}^p$  i  $\mathbf{\Pi}$ .

W przypadku prostego ścinania  $\beta = 1$ . Równanie (3.3.15) przyjmuje postać

$$\dot{\sigma}_{11} - \dot{\gamma}\sigma_{12} = -\frac{3j\mu}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}} [\dot{\gamma}(\sigma_{12} - \pi_{12})] \left[ (\sigma_{11} - \pi_{11}) + \frac{\varpi}{\mu} \mathcal{M}\sigma_{12} \right],$$

$$\dot{\sigma}_{12} + \dot{\gamma}\sigma_{11} = \mu \dot{\gamma} - \frac{3j\mu}{\sigma_Y^2 \mathcal{H}} [\dot{\gamma}(\sigma_{12} - \pi_{12})] \left[ (\sigma_{12} - \pi_{12}) - \frac{\varpi}{\mu} \mathcal{M}\sigma_{11} \right],$$

$$(3.3.21) \quad \dot{\pi}_{11} - \dot{\gamma}\pi_{12} = \frac{3jc}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}} [\dot{\gamma}(\sigma_{12} - \pi_{12})] (\sigma_{11} - \pi_{11}),$$

$$\dot{\pi}_{12} + \dot{\gamma}\pi_{11} = \frac{3jc}{2\sigma_Y^2 \mathcal{H}} [\dot{\gamma}(\sigma_{12} - \pi_{12})] (\sigma_{12} - \pi_{12}),$$

gdzie  $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ ,  $\pi_{11} = -\pi_{22}$ ,

$$(3.3.22) \quad \mathcal{M} = [\pi_{11}(\sigma_{12} - \pi_{12}) - \pi_{12}(\sigma_{11} - \pi_{11})],$$

$\varpi$  jest tu mnożnikiem we wzorze dla spinu plastycznego

$$(3.3.23) \quad \varpi = \sqrt{\frac{12}{c(3c + 2\sqrt{3(\pi_{11}^2 + \pi_{12}^2)})}}.$$

Warunek Hubera-Misesa (3.3.16) ma postać

$$(3.3.24) \quad \begin{aligned} f &= \frac{3}{2} (\bar{\sigma} - \Pi) \cdot (\bar{\sigma} - \Pi) - \sigma_V^2 \\ &= 3 [(\sigma_{11} - \pi_{11})^2 + (\sigma_{12} - \pi_{12})^2] - \sigma_V^2(\alpha, \vartheta) = 0. \end{aligned}$$

Z równań (3.3.21) mamy

$$(3.3.25) \quad j = \begin{cases} 1 & \text{dla } f = 0 \wedge \dot{\gamma}(\sigma_{12} - \pi_{12}) \geq 0, \\ 0 & \text{dla } (f = 0 \wedge \dot{\gamma}(\sigma_{12} - \pi_{12}) < 0) \vee f < 0. \end{cases}$$

Zmianę temperatury  $\vartheta$  opisuje następujące równanie

$$(3.3.26) \quad \rho_0 c_v \dot{\vartheta} = j \frac{(1 - \varphi) [\dot{\gamma}(\sigma_{12} - \pi_{12})]}{\mathcal{H}}.$$

Funkcja wzmocnienia  $\mathcal{H}$  ma postać

$$(3.3.27) \quad \mathcal{H} = 1 + \frac{c}{2\mu} + \frac{1}{6\mu} \frac{\partial(\sigma_V^2)}{\partial\alpha} + \frac{(1 - \varphi)}{6\mu\rho_0 c_v} \frac{\partial(\sigma_V^2)}{\partial\vartheta}.$$

W zakresie sprężystości ( $j = 0$ ) równania (3.3.21) zredukują się do

$$(3.3.28) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} - \dot{\gamma} \sigma_{12} &= 0, \\ \dot{\sigma}_{12} + \dot{\gamma} \sigma_{11} &= \mu \dot{\gamma}, \\ \dot{\pi}_{11} - \dot{\gamma} \pi_{12} &= 0, \\ \dot{\pi}_{12} + \dot{\gamma} \pi_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Przyjmując wartości początkowe:  $\gamma = 0, \sigma_{11} = \sigma_{12} = \pi_{11} = \pi_{12} = 0$ , otrzymujemy rozwiązania analityczne:

$$(3.3.29) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= \mu(1 - \cos \gamma), \\ \sigma_{12} &= \mu \sin \gamma, \\ \pi_{11} &= 0, \\ \pi_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Możemy pokazać, że w przypadku wzmocnienia kinematycznego, otrzymamy również rozwiązania analityczne.

Wprowadzając nowe zmienne  $\phi$  spełniające warunek plastyczności:

$$(3.3.30) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} - \pi_{11} &= (1/\sqrt{3}) \sigma_V^2 \cos \phi, \\ \sigma_{12} - \pi_{12} &= (1/\sqrt{3}) \sigma_V^2 \sin \phi, \end{aligned}$$

związek pomiędzy  $\phi$  i  $\gamma$  ma postać:

$$(3.3.31) \quad \frac{\sqrt{a^2-1} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} + (a-1)}{\sqrt{a^2-1} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} - (a-1)} \exp(-\sqrt{a^2-1} \gamma) = C,$$

gdzie  $a = \mu/\tau_Y$ ,  $\tau_Y = \sigma_Y/\sqrt{3}$  jest granicą plastyczności przy ścinaniu oraz

$$C = \frac{\sqrt{a^2-1} \operatorname{tg} \frac{\phi^*}{2} + (a-1)}{\sqrt{a^2-1} \operatorname{tg} \frac{\phi^*}{2} - (a-1)} \exp(-\sqrt{a^2-1} \gamma^*),$$

$$\sin(\gamma^*/2) = \tau_Y/2\mu, \quad \operatorname{tg}(\gamma^*/2) = \operatorname{ctg} \phi^*.$$

Naprężenie  $\pi_{11}$  spełnia równanie

$$(3.3.32) \quad \frac{d\pi_{11}}{d\phi} - \pi_{11} \frac{\operatorname{tg} \phi}{a \cos \phi - 1} = \frac{c}{2\mathcal{H}} \frac{\sin \phi \cos \phi}{a \cos \phi - 1}.$$

Następnie możemy wyliczyć  $\pi_{12}$  ze związku

$$(3.3.33) \quad \pi_{12} = \pi_{11} \operatorname{tg} \phi$$

i znaleźć  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  z (3.3.30). W rezultacie otrzymujemy

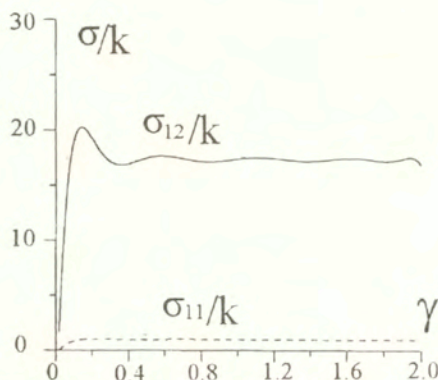
$$(3.3.34) \quad \begin{aligned} \pi_{11} &= \frac{c}{2\mathcal{H}} (\cos \phi - \cos \phi^*) \frac{\cos \phi}{(1 - a \cos \phi)}, \\ \pi_{12} &= \frac{c}{2\mathcal{H}} (\cos \phi - \cos \phi^*) \frac{\sin \phi}{(1 - a \cos \phi)}, \\ \sigma_{11} &= \frac{c}{2\mathcal{H}} (\cos \phi - \cos \phi^*) \frac{\cos \phi}{(1 - a \cos \phi)} + \tau_Y \cos \phi, \\ \sigma_{12} &= \frac{c}{2\mathcal{H}} (\cos \phi - \cos \phi^*) \frac{\sin \phi}{(1 - a \cos \phi)} + \tau_Y \sin \phi. \end{aligned}$$

Wyniki te przedstawiono w pracy Nguyena i Nowackiego (1997). Są one zbliżone do wyników otrzymanych przez Szabo i Balla (1989).

Na rysunku 24 przedstawiono wykresy zmiennych bezwymiarowych  $\sigma_{11}/\tau_Y$  i  $\sigma_{12}/\tau_Y$  dla przypadku wzmocnienia kinematycznego. Przyjęto  $\mu = 8.10^4 \text{MPa}$ ,  $c = 5333,33 \text{MPa}$ ,  $\tau_Y/\mu = 0.0577$  gdzie  $\tau_Y = \sigma_Y/\sqrt{3}$  jest granicą plastyczności przy ścinaniu.

Przedstawione równania wykorzystamy do analizy numerycznej przeprowadzonej metodą elementów skończonych w przypadku ścinania blach metalowych.





Rys.24. Wynik rozwiązania analitycznego procesu prostego ścinania

### 3.3.7 Symulacja numeryczna

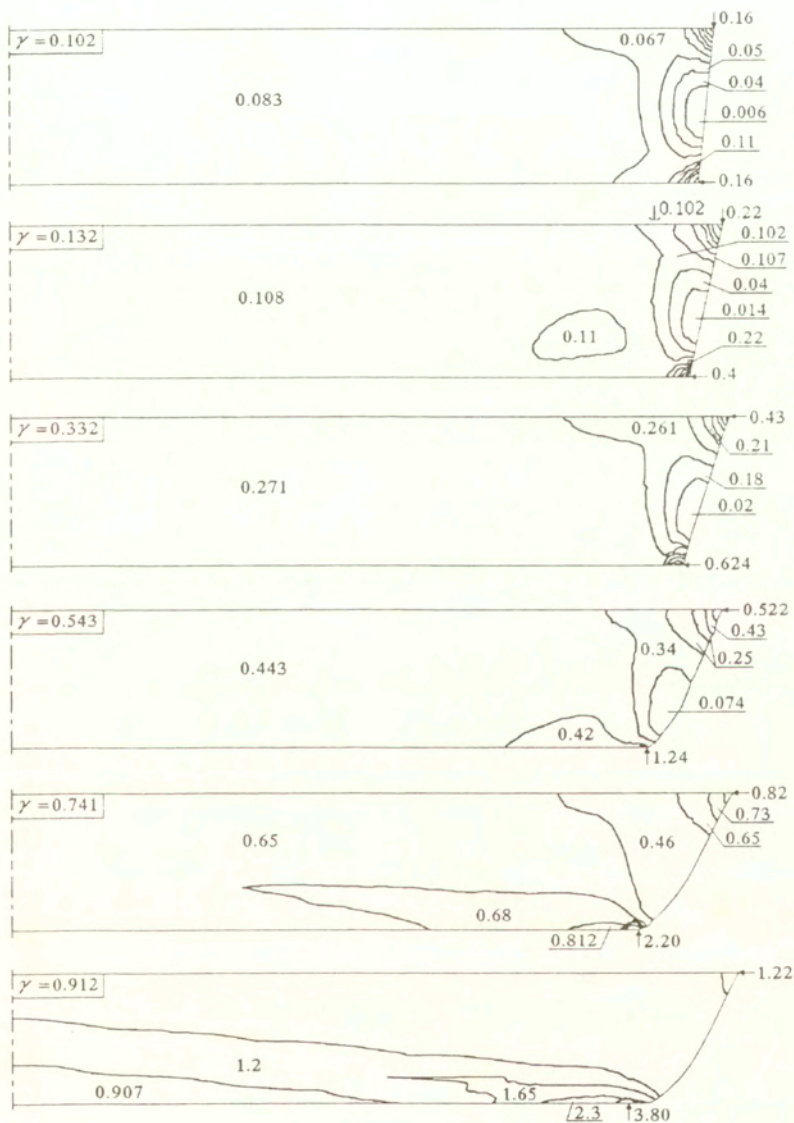
Do symulacji numerycznej zastosowaliśmy program metody elementów skończonych ABAQUS, przyjmując dla procesu prostego ścinania, w zakresie obciążeń quasi-statycznych i dynamicznych, równania konstytutywne zaprezentowane powyżej. Przyjęto podobne warunki brzegowe i początkowe jak w doświadczeniu. Ze względu na to, że wartości sił wejściowych i wyjściowych na obu końcach przyrządu są prawie takie same (Gary i Nowacki (1994)), pominięto proces propagacji fal w przyrządzie. Takie zagadnienie dynamiczne możemy traktować jako quasistatyczne.

Obszar poddany prostemu ścinaniu był podzielony na 1000 elementów. Deformacja sieci elementów, składowe tensora naprężenia  $\sigma_{12}$  i  $\sigma_{22} = -\sigma_{11}$ , intensywność naprężeń  $\sigma_i = [3/2(\sigma_{ij} - n_{ij})(\sigma_{ij} - n_{ij})]^{1/2}$  oraz ekwiwalentna intensywność plastycznego odkształcenia  $\epsilon_i = (2/3\epsilon_{ij}^p \epsilon_{ij}^p)^{1/2}$  znajdujemy w każdym kroku obliczeń.

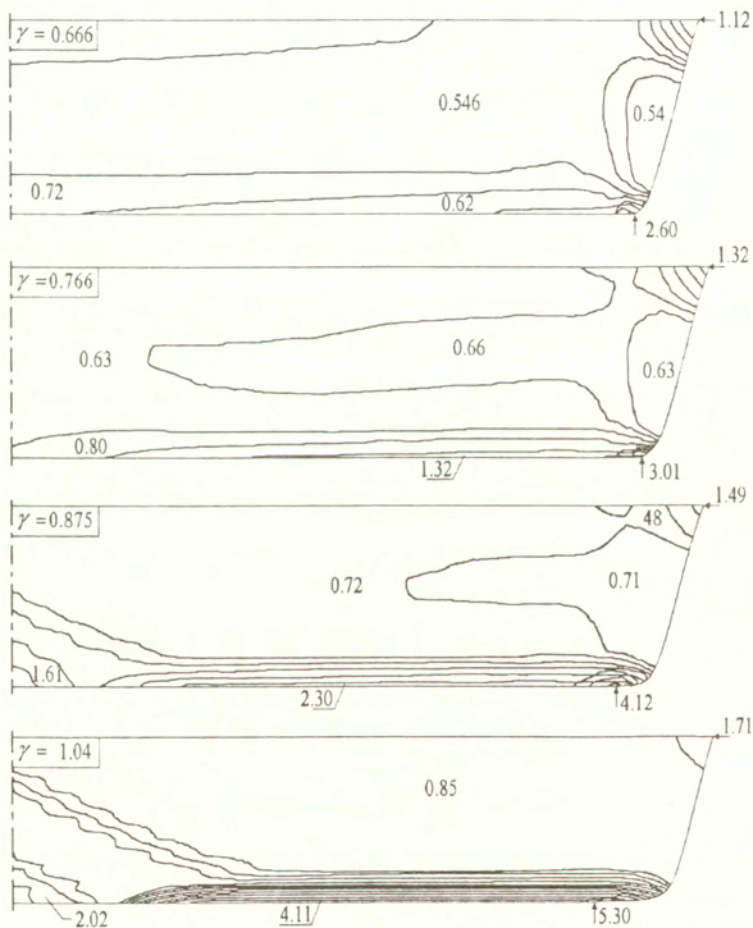
Wyniki symulacji numerycznej dla przypadku quasi-statycznego obciążenia przy prędkości  $\dot{\gamma} = 10^{-3} \text{s}^{-1}$  są przedstawione na rysunku 25.

Ze względu na symetrię względem osi  $x_2$ , pokazano tylko połowę obszaru. Widzimy kolejne etapy deformacji, dla różnych wartości odkształceń od  $\gamma = 0.102$  do  $\gamma = 0.912$ . Obserwujemy niejednorodność pól naprężenia i odkształcenia na końcach próbek, na odcinku mniejszym niż 1.7% (z dokładnością do  $10^{-4}$  odkształcenia) długości obszaru, gdy średnie odkształcenie wynosi 0.3, a na odcinku mniejszym niż 6.6%, gdy średnie odkształcenie wynosi 0.7. Rezultaty te są zgodne z wynikami doświadczeń. Stwierdzono również powstanie pasm ścinania.

Rys.25. Symulacja numeryczna testu quasi-statycznego dla stali 1H18N9T.  
 Ekwiwalentne odkształcenia plastyczne przy prędkości  $10^{-3} \text{s}^{-1}$

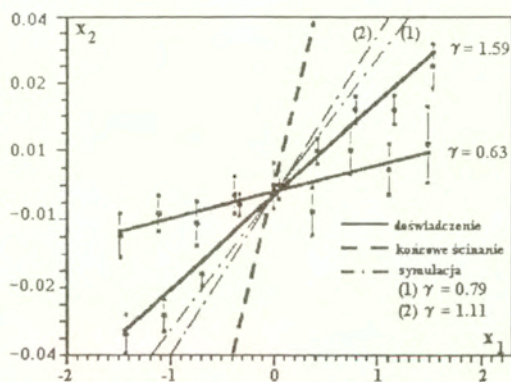


Na rysunku 26 przedstawiono wyniki dla dynamicznego obciążenia przy prędkości  $3.10^3 s^{-1}$ . Prędkość pocisku  $v_0 = 14 m/s$ . Pokazano kolejne kroki obliczeń od  $\gamma = 0.666$  do  $\gamma = 1.04$ . Inaczej niż w przypadku quasi-statycznym, początek lokalizacji nastąpił przy niższej wartości nominalnego odkształcenia. Pasma ścinania powstały w środku obszaru pod kątem  $\varphi = 51^\circ$  do osi  $x_1$  (rys.13). Obszar zaawansowanych odkształceń powstaje na zamocowanym brzegu próbki.



Rys.26. Ękwivalentne odkształcenia plastyczne dla stali XES, przy prędkości  $3.10^3 s^{-1}$

Pole temperatury było mierzone w statycznych doświadczeniach w pracy Gajda, Nowackiego i Pieczyskiej (1996). Zmianę temperatury rejestrowano kamerą termowizyjną. Zaobserwowano wahania temperatury przy wolnych brzegach, gdzie jest ona wyższa niż w innych obszarach na początku testu. Przy większym odkształceniu, zjawisko to jest trudniejsze do zaobserwowania, bo wzrasta temperatura w paśmie ścinania, a przewodność cieplna stali jest duża. Liniową aproksymację maksymalnej temperatury w paśmie ścinania przedstawiono na rysunku 27 linią ciągłą. Linia przerywana reprezentuje pozycję końcową tego pasma, a linie oznaczone przez (1) i (2) przedstawiają wyniki symulacji. Pokazują one zmianę kąta nachylenia pasma ścinania. Kąt ten powiększa się wraz z zwiększeniem prędkości odkształcania.



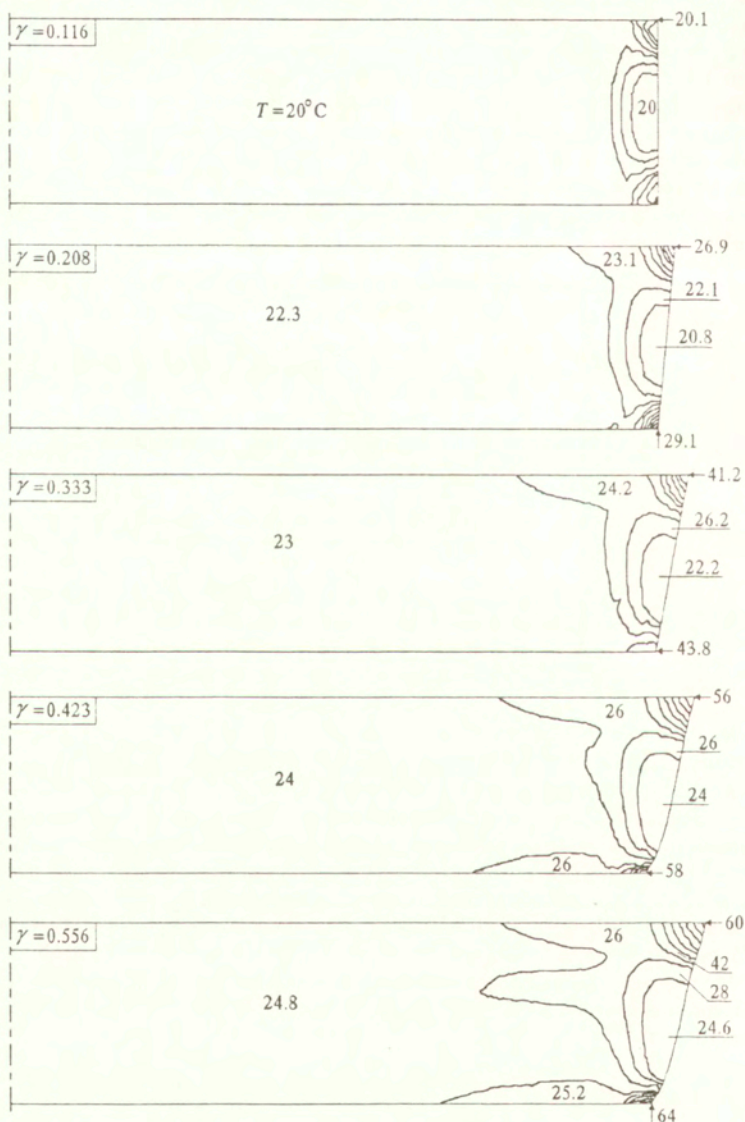
Rys.27. Maksymalna temperatura w paśmie ścinania

Na rysunkach 28 i 29 przedstawiono wyniki symulacji numerycznej pola temperatury dla stali 1H18N9T w zakresie quasi-statycznym i dynamicznym.

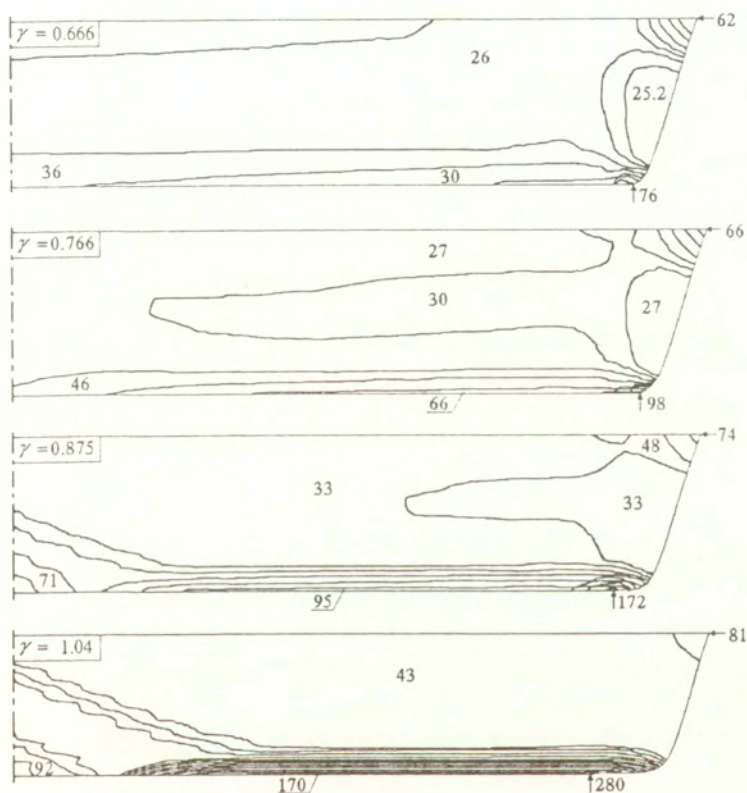
Analiza numeryczna pozwala ocenić optymalne rozmiary próbek. W naszych doświadczeniach długość obszaru ścinania jest  $l_0 = 30\text{mm}$ . Jej szerokość  $a_0$  musi spełniać dwa warunki: po pierwsze, stosunek szerokości  $a_0$  do grubości próbki  $d$  musi być  $a_0/d < 10$  by zapewnić stabilność i po drugie stosunek  $a_0/l_0$  musi być mały, żeby zminimalizować niejednorodność pól naprężenia i odkształcenia na końcach próbek  $a_0/l_0 \leq 1/10$ . W naszych testach badano próbki o grubościach 0.75mm oraz 0.6mm po walcowaniu.

Nie przeprowadzono analizy dla zaawansowanych lokalizacji. Wymagałoby to zastosowania specjalnych technik doboru elementu i podziału siatki elementów skończonych.



Rys.28. Rozkład temperatury dla stali 1H18N9T, przy prędkości  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

Rys.29. Symulacja dynamicznego testu stali 1H18N9T przy prędkości  $3 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$   
Rozkład temperatury



### 3.3.8 Wnioski

W doświadczeniach i w symulacji numerycznej zaobserwowano jednorodność pola odkształcenia przy dużych deformacjach wzdłuż długości próbek. Zaproponowany schemat doświadczeń jest jednym z nielicznych, który pozwala otrzymać taką jednorodność dla blach metalowych w szerokim zakresie prędkości obciążenia. Zastosowany przyrząd mocujący używano do testów quasi-statycznych dla  $10^{-3} \text{ s}^{-1} < \dot{\gamma} < 10^{-1} \text{ s}^{-1}$  i dynamicznych dla  $10^2 \text{ s}^{-1} < \dot{\gamma} < 10^4 \text{ s}^{-1}$  w standardowym układzie Hopkinsona oraz przy bezpośrednim uderzeniu z użyciem

tylko jednego pręta. W ten sposób powiększa się wiarygodność doświadczeń. W przypadku bezpośredniego uderzenia sprawa eliminacji drgań przyrządu wymaga dodatkowych badań.

Zastosowana tu technika może być używana do weryfikacji równań konstytutywnych. Testy na proste ścinanie są interesujące, gdyż pozwalają osiągnąć bardzo duże deformacje, unikając niestabilności typu przewężenie, które występuje, na przykład przy rozciąganiu próbek.

Dla bardzo dużych prędkości ścinania musimy używać krótszych próbek, np. takich, że  $a_0/l_0 = 1/5$ . Pozwala to uzyskać bardziej jednorodne pola naprężeń i odkształceń oraz zredukować drgania uboczne.

# Wnioski

W pracy przedstawiono wyniki badań autora na temat sprzężeń termomechanicznych w sprężysto-plastycznych deformacjach metali. Idea metody polega na użyciu miary logarytmicznej odkształcenia sprężystego jako jednego z parametrów stanu w opisie Mandela ciał sprężysto-plastycznych. Pozwala ona w sposób prosty wydzielić część postaciową i objętościową odkształcenia sprężystego. Otrzymane równania opisują materiał sprężysto-plastyczny w całym zakresie: od nieskończenie małych do dużych deformacji. Pokazano przy tym, że tensory modułów sprężystych w opisie Eulera są wyrażone jako odpowiednie pochodne energii swobodnej tak jak w przypadku małych odkształceń. Analizowano prawa płynięcia plastycznego dla procesu izotermicznego i adiabatycznego. Pokazano, że podobnie jak w przypadku małych odkształceń, gdzie niektóre sprzężone efekty termomechaniczne są pominięte, różnica między tymi prawami sprowadza się tylko do postaci funkcji wzmocnienia. W przypadku dużych odkształceń spin plastyczny powoduje odchylenie praw płynięcia od postaci stowarzyszonej. Jest to znany czynnik destabilizujący w procesie lokalizacji odkształceń.

Zaprezentowane w pracy równania konstytutywne zastosowano do analizy wybranych zagadnień dynamicznych. Znalaziono wartości główne tensora akustycznego i pokazano możliwości występowania niestabilności typu "flater" w zależności od postaci tensora spinu plastycznego. Badano wpływ tego tensora na prędkości i trajektorie fal prostych w cienkościennej rurze obciążonej momentem skręcającym i ciśnieniem na brzegu. Zastosowano wyprowadzone równania w symulacji numerycznej procesu prostego ścinania blach metalowych. Znalaziono, między innymi, rozwiązania analityczne w przypadku kinematycznego wzmocnienia.

Dalszym krokiem będzie zastosowanie proponowanych równań konstytutywnych w zagadnieniach, w których materiał znajduje się pod działaniem wysokich ciśnień.



# A

## Załączniki

### A.1

Wprowadzimy tensor  $\mathbf{d}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{D}^e \mathbf{R}^{eT}$  i oznaczymy przez  $d_{ij}^e$  i  $E_{(0),j}^e$  składowe  $\mathbf{D}^e$  i  $\dot{\mathbf{E}}_{(0)}^e$  na kierunkach głównych  $\mathbf{N}_i$  tensora  $\mathbf{U}^e$

$$(A.1.1) \quad \mathbf{d}^e = d_{ij}^e \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j, \quad \dot{\mathbf{E}}_{(0)}^e = E_{(0),j}^e \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j.$$

Korzystając z (1.1.6), mamy

$$(A.1.2) \quad \mathbf{D}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{d}^e \mathbf{R}^{eT} = d_{ij}^e \mathbf{R}^e (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j) \mathbf{R}^{eT} = d_{ij}^e (\mathbf{R}^e \mathbf{N}_i) \otimes (\mathbf{R}^e \mathbf{N}_j) = d_{ij}^e \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j.$$

Znaczy to, że równocześnie  $d_{ij}^e$  są składowymi tensora  $\mathbf{D}^e$  zdefiniowanego przez (1.1.7)<sub>1</sub> na kierunkach  $\mathbf{n}_i$ . Między  $E_{(0),i}^e$  i  $d_{ij}^e$  istnieje następujący związek udowodniony przez Hilla (1978):

$$(A.1.3) \quad E_{(0),i}^e = \begin{cases} d_{ij}^e & \text{dla } i = j, \\ \frac{2U_i^e U_j^e}{(U_i^e)^2 - (U_j^e)^2} d_{ij}^e \ln \left( \frac{U_i^e}{U_j^e} \right) & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Oznaczamy przez  $T_{ij}^R$  i  $T_{(0),j}^e$  składowe tensora  $\mathbf{T}^R$  i  $\mathbf{T}_{(0)}^e$  na  $\mathbf{N}_i$ :

$$(A.1.4) \quad \mathbf{T}^R = T_{ij}^R \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j, \quad \mathbf{T}_{(0)}^e = T_{(0),j}^e \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j.$$

Zważywszy na związek wynikający z (2.1.8)<sub>1</sub>

$$(A.1.5) \quad \dot{\mathbf{W}}^e = \frac{1}{\varrho} \text{tr} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^e) = \text{tr} (\mathbf{T}_{(0)}^e \dot{\mathbf{E}}_{(0)}^e) = \text{tr} (\mathbf{T}^R \mathbf{d}^e),$$

który musi być spełniony dla dowolnego  $\mathbf{d}^e$ , związek pomiędzy  $T_{ij}^R$  a  $T_{(0),j}^e$  musi być analogiczny do związku między  $E_{(0),i}^e$  i  $d_{ij}^e$  w (A.1.3):

$$(A.1.6) \quad T_{ij}^R = \begin{cases} T_{(0),j}^e & \text{dla } i = j, \\ \frac{2U_i^e U_j^e}{(U_i^e)^2 - (U_j^e)^2} T_{(0),j}^e \ln \left( \frac{U_i^e}{U_j^e} \right) & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

W przypadku materiału izotropowego w zakresie sprężystym kierunki główne tensorów  $\mathbf{T}_{(0)}^e$  i  $\mathbf{U}^e$  pokrywają się. Stąd  $T_{(0),j}^e = 0$  dla  $i \neq j$  i z (A.1.6) mamy  $T_{ij}^R = 0$  dla  $i \neq j$ . Znaczy to, że  $\mathbf{N}_i$  są również głównymi kierunkami tensora  $\mathbf{T}^R$  i (A.1.6) daje nam  $\mathbf{T}^R = \mathbf{T}_{(0)}^e$ . Zauważmy jeszcze, że w granicy, gdy  $U_i^e \rightarrow U_j^e$  mamy z (A.1.6)<sub>2</sub>  $\mathbf{T}^R = \mathbf{T}_{(0)}^e$  dla  $i \neq j$ .

## A.2

Policzmy pochodną materialną związku (2.1.5):

$$(A.2.1) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^e &= \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{E}_{(0)}^e \mathbf{R}^{eT} + \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{E}}_{(0)}^e \mathbf{R}^{eT} + \mathbf{R}^e \mathbf{E}_{(0)}^e \dot{\mathbf{R}}^{eT} \\ &= \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT} \mathbf{R}^e \mathbf{E}_{(0)}^e \mathbf{R}^{eT} + \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{E}}_{(0)}^e \mathbf{R}^{eT} + \mathbf{R}^e \mathbf{E}_{(0)}^e \dot{\mathbf{R}}^{eT} \mathbf{R}^e \mathbf{R}^{eT} \\ &= \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT} \mathbf{e}^e + \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{E}}_{(0)}^e \mathbf{R}^{eT} - \mathbf{e}^e \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT}. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy zależność  $\mathbf{R}^e \mathbf{R}^{eT} = \mathbf{1}$  i dlatego mamy  $\dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT} = -\mathbf{R}^e \dot{\mathbf{R}}^{eT}$ . Możemy zatem zapisać pochodną Jaumanna tensora  $\mathbf{e}^e$  ze spinem sprężystym  $\omega^e$  w postaci

$$(A.2.2) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^e &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{e}}^e + \mathbf{e}^e \omega^e - \omega^e \mathbf{e}^e \\ &= \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{E}}_{(0)}^e \mathbf{R}^{eT} + \mathbf{e}^e (\omega^e - \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT}) - (\omega^e - \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT}) \mathbf{e}^e. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez  $\omega_{ij}^e$ ,  $\omega^{R}$  i  $e_{ij}^{e*}$  odpowiednio składowe na  $\mathbf{n}_i$  tensorów  $\omega^e$ ,  $\omega^{R} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT}$  i  $\dot{\mathbf{e}}^e$ . Dla danego  $\mathbf{U}^e$  zachodzi następujący związek (por. Hill (1978))

$$(A.2.3) \quad \omega_{ij}^e - \omega_{ij}^R = \frac{U_i^e - U_j^e}{U_i^e + U_j^e} d_{ij}^e.$$

Zważywszy na wzór (1.1.6) widzimy, że składowe  $\mathbf{R}^e \dot{\mathbf{E}}_{(0)}^e \mathbf{R}^{eT}$  na  $\mathbf{n}_i$  są  $E_{(0),j}^e$ , (por. Zał. A.1). Wstawiając (A.1.3), (2.1.5) i (A.2.3) w (A.2.2) otrzymamy

$$(A.2.4) \quad \mathbf{e}_{ij}^{e*} = \begin{cases} d_{ij}^e & \text{dla } i = j, \\ \frac{2U_i^e U_j^e}{(U_i^e)^2 - (U_j^e)^2} d_{ij}^e \ln \left( \frac{U_i^e}{U_j^e} \right) & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Rozwijając (A.2.4)<sub>2</sub> w szereg, otrzymamy

$$(A.2.5) \quad e_{ij}^{\epsilon^*} = \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{U_i^{\epsilon}}{U_j^{\epsilon}} - 1 \right)^2 + \dots \right] d_{ij}^{\epsilon}.$$

Poprzestając na drugich potęgach rozwinięcia i zważywszy, że  $(U_i^{\epsilon}/U_j^{\epsilon}) - 1 = \bar{e}_i^{\epsilon} - \bar{e}_j^{\epsilon}$ , gdzie  $\bar{e}_i^{\epsilon}$  są głównymi wartościami dewiatora tensora  $\mathbf{e}^{\epsilon}$  ostatecznie otrzymamy:

$$(A.2.6) \quad \check{\mathbf{e}}^{\epsilon} = \mathbf{D}^{\epsilon} + O(|\bar{\mathbf{e}}^{\epsilon}|^2).$$

Związek (A.2.6) daje bardzo dobre przybliżenie przy warunku

$$(A.2.7) \quad \frac{5}{6} \leq \frac{U_i^{\epsilon}}{U_j^{\epsilon}} \leq \frac{7}{6},$$

bo w przypadkach, kiedy występują w nim równości, składowe różnice  $(\check{\mathbf{e}}^{\epsilon} - \mathbf{D}^{\epsilon})$  na kierunkach  $\mathbf{n}$ , są mniejsze niż 1% od składowych  $\mathbf{D}^{\epsilon}$ . Przy prostym rozciąganiu warunek ten jest równoważny nierówności  $\sigma \leq \frac{\mu}{3}$ , gdzie  $\mu$  jest modulem odkształcenia postaciowego, która, jak wiadomo, jest spełniona w przypadku większości metali i niektórych materiałów technicznych. Należy zauważyć, że  $\check{\mathbf{e}}^{\epsilon} = \mathbf{D}^{\epsilon}$ , gdy mają one wspólne kierunki główne.

### A.3

Mamy następującą tożsamość

$$(A.3.1) \quad \begin{aligned} \det(\mathbf{1} + r\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + s\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + t\mathbf{e} \otimes \mathbf{f}) &= 1 + r\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + s\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} + t\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} \\ &+ rs[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})] + rt[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})] \\ &\quad + st[(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})] \\ &+ rst[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{f} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) \\ &\quad - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})], \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  są dowolnymi wektorami a  $r, s, t$  są skalarami. Można to sprawdzić, np. rozwijając wyznacznik po lewej stronie.

W przypadku  $s = t = 0$  z (A.3.1) otrzymujemy związek wykorzystany w pracy Ranieckiego (1976):

$$(A.3.2) \quad \det(\mathbf{1} + r\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 1 + r\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

# Literatura

- ARAVAS, N. 1992. Finite elastoplastic transformations of transversely isotropic metals. *Int. J. Solids Struct.*, **29**(17), 2137-2157.
- BAI, Y.L. 1982. Thermo-plastic instability in simple shear. *J. Mech. Phys. Solids.*, **30**, 195-207.
- BERTHOLF, L.D., & KARNES, C.H. 1975. Two-dimensional analysis of the split Hopkinson pressure bar system. *J. Mech. Phys. Solids.*, **23**, 1-19.
- BLEICH, H.H., & NELSON, I. 1966. Plane waves in an elastic-plastic half-space due to combined surface pressure and shear. *J. Appl. Mech.*, **33**(1), 149-158.
- BLINOWSKI, A. 1994. *Obroty ciał odkształcalnych. Część 1: Geometria i Kinematyka*. Tech. Rept. 7. IFTR - Pol. Acad. Sci. Prace IPPT.
- BUCHDAHL, H.A. 1966. *The concepts of classical thermodynamics*. Cambridge Univ. Press.
- CALLEN, H.B. 1960. *Thermodynamics*. Wiley.
- CARLSON, J.M., & BIRD, J.E. 1987. Development of sample-scale shear bands during necking of ferrite-austenite sheet. *Acta Mech.*, **35**, 1675-1701.
- CLIFTON, R.T. 1966. An analysis of combined longitudinal and torsional in a thin-walled tube. *Fifth U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech. Proceedings ASME*, 465-480.
- DAFALIAS, Y.F. 1983. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation. *J. Appl. Mech.*, **50**, 561-565.
- DAFALIAS, Y.F. 1984. The plastic spin concept and a simple illustration of its role in finite plastic transformations. *Mechanics of Materials*, **3**, 223-233.
- DAFALIAS, Y.F. 1985. The plastic spin. *J. Appl. Mech.*, **52**, 865-871.
- DAFALIAS, Y.F. 1988. Issues in constitutive formulation at large elastoplastic deformation, Part 2: Kinetics. *Acta Mech.*, **73**, 121-146.



- D'ESCATHA, Y. 1973. Propriétés du tenseur acoustique en plasticité finie. *C.R. Acad. Sci. t.277, Série A*, 183-186.
- DHARAN, H.C.K., & HAUSER, F.E. 1970. Determination of stress-strain characteristics at very high strain rates. *Exp. Mech.*, **10**.
- DIENES, J.K. 1979. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. *Acta Mech.*, **32**, 217-232.
- ECKART, G. 1948. Theory of elasticity and inelasticity. *Phys. Rev.*, **73**, 373-380.
- GADAJ, P.S., NOWACKI, W.K., & PIECZYSKA, E. 1996. Changes of temperature during the simple shear test of stainless steel. *Arch. Mech.*, **48**, 4.
- GARY, G., & NOWACKI, W.K. 1994. Essai de cisaillement plan appliqué à des tôles minces. *Journal de Physique IV*, **C8**, 65-70.
- GOEL, R.P., & MALVERN, L.E. 1970. Biaxial plastic simple waves with combined kinematic and isotropic hardening. *J. Appl. Mech.*, **37**, 1100-1106.
- G'SELL, C., BONI, S., & SHRIVASTAVA, S. 1983. Application of the plane shear test for determination of the plastic behavior of solids polymers at large strain. *J. of Mat. Sciences*, **18**, 903-918.
- GUÉLIN, P., & NOWACKI, W.K. 1984a. O falach przyspieszenia w ośrodku sprężystoplastycznym z pamięcią dyskretną. *Rozprawy Inżynierskie*, **32**, 399-438.
- GUÉLIN, P., & NOWACKI, W.K. 1984b. Remarques sur les ondes d'accélération dans un continu élastoplastique avec hystérésis. *Arch. Mech.*, **36**, 1.
- GUÉLIN, P., NOWACKI, W.K., & NGUYEN, H.V. 1997. Localisation of thermoelastoplastic deformations in the case of simple shear. *J. Phys. IV France*, **7**, 717-722. Colloque C3, Supplément au Journal de Physique III d'Aout 1997.
- GURSON, A. L. 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth - Part 1. Yield criteria and flow rules for ductile media. *J. Engrg Mater. Technol.*, **99**(1), 2-15.
- HADAMARD, I. 1903. *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Paris.
- HALPHEN, B. 1975. Sur les champ des vitesses en thermoplasticité finie. *Int. J. Solids Struct.*, **11**, 947-960.
- HARTLEY, K.A., DUFFY, J., & HAWLEY, R.H. 1986. Measurement of the temperature profile during shear band formation in steels deforming at high strain rates. *J. Mech. Phys. Solids*, **35**(3), 283-301.

- HILL, R. 1962. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids.*, **10**, 1-16.
- HILL, R. 1950. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press.
- HILL, R. 1968a. On constitutive inequalities for simple materials -I. *J. Mech. Phys. Solids.*, **16**, 229-242.
- HILL, R. 1968b. On constitutive inequalities for simple materials -II. *J. Mech. Phys. Solids.*, **16**, 315-332.
- HILL, R. 1978. Aspects of invariances in solids mechanics. YIH, CHIA-SHIEN (ed), *Adv. Appl. Mech. V.18*. Academic Press, 1-75
- HILL, R., & RICE, J.R. 1973. Elastic potentials and the structure of inelastic constitutive laws. *SIAM J. Appl. Math.*, **25**, 448-461.
- HÖGER, ANNE. 1986. The material time derivative of logarithmic strain. *Int. J. Solids Struct.*, **22**(9), 1019-1032.
- IOSIPESCU, N. 1975. New accurate procedure for single shear testing of metals. *J. Mater.*, **2**, 537-566.
- KESTIN, J. 1973. Rola termodynamiki w termoplastyczności. *Termoplastyczność*. Wrocław, Ossolineum, 5-71.
- KESTIN, J., & RICE, J.R. 1970. Paradoxes in the application of thermodynamics to strained solids. *A Critical Review of Thermodynamics*. Mono Book Corp, 275.
- KLEIBER, M., & RANIECKI, B. 1985. Elastic-plastic materials at finite strain. SAWCZUK, A. (ed), *Plasticity Today*. Elsevier Applied Sci. Pub. Ltd., 3-46.
- KLEPACZKO, J.R. 1994. An experimental technique for shear testing at high and very high strain rates. The case of mild steel. *Int. J. Impact Engng.*, **15**, 25-39.
- KLEPACZKO, J.R. 1995. *Direct impact shear test of sheet metals*. Tech. Rept. Laboratory of Physics and Mechanics of Materials, Metz University, France.
- KLEPACZKO, J.R., NGUYEN, H.V., & NOWACKI, W.K. 1999. Quasi-static and dynamic shearing of sheet metals. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **18**, 271-289.
- KOSIŃSKI, W. 1986. *Field singularities and wave analysis in continuum mechanics*. PWN, Warszawa i Ellis Horwood, Chichester.
- LAMMERING, R., PECHERSKI, R., & STEIN, E. 1990. Theoretical and computational aspects of large plastic deformations involving strain-induced anisotropy and developing voids. *Arch. Mech.*, **42**, 347-375.

- LEE, E. H., & LIU, D.T. 1967. Finite-strain theory with application to plane wave analysis. *J. Appl. Phys.*, **38**, 19-27.
- LEE, E.H. 1969. Elastic-plastic deformation at finite strains. *J. Appl. Mech.*, **35**, 1-6.
- LEE, E.H., MALLETT, R.L., & WERTHEIMER, R.L. 1983. Stress analysis for anisotropic hardening in finite deformation plasticity. *J. Appl. Mech.*, **50**, 554-560.
- LIPKIN, J., & CLIFTON, R.J. 1968. An experimental study of combined longitudinal and torsional plastic waves in a thin walled tube. *Proc. 12th Int. Congr. Appl. Mech.*, 292-304.
- LORET, B. 1983. On the effects of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials. *Mechanics of Materials*, **2**, 287-304.
- MANACH, P.Y., & FAVIER, D. 1997. Shear and tensile thermomechanical behavior of near equiatomic NiTi alloy. *Material Sci. and Eng.*, **A122**, 45-57.
- MANDEL, J. 1962. Ondes plastique dans un milieu indéfini à trois dimensions. *J. Méc.*, **1**, 3-30.
- MANDEL, J. 1964. Propagation des surfaces de discontinuité dans un milieu élastoplastique. KOLSKY, H., & PRAGER, W. (eds), *Stress Waves in Anelastic Solids*. Springer, 331-340.
- MANDEL, J. 1971. *Plasticité et viscoplasticité*. Udine: Springer.
- MANDEL, J. 1974a. Director vectors and constitutive equations for plastic and viscoplastic media. SAWCZUK, A. (ed), *Problems of Plasticity*. Noordhoff Int. Pub., 135-143.
- MANDEL, J. 1974b. Thermodynamics and plasticity. DELGADO DOMINGERS, J.J, NINA, N.R., & WHITELAW, J.H. (eds), *Proc. Symp. Foundations of Continuum Thermodynamics*. Macmillan, London, 283-304.
- MANDEL, J. 1981. Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de constraints. *Int. J. Solids Struct.*, **17**, 873-878.
- MANDEL, J. 1982. Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal. *J. de Méc. Thé. et App.*, **1**, 7-23.
- MARCHAND, A., & DUFFY, J. 1988. An experimental study of the formation process of adiabatic shear bands in structural steel. *J. Mech. Phys. Solids.*, **36**(3), 251-283.



- MEAR, M.E., & HUTCHINSON, J.W. 1985. Influence of yield surface curvature on flow localization in dilatant plasticity. *Mechanics of Materials*, **4**, 395-407.
- MERZER, A.M. 1982. Modelling of adiabatic shear band development from small imperfections. *J. Mech. Phys. Solids*, **30**, 323-338.
- MRÓZ, Z., & RANIECKI, B. 1976. On the uniqueness problem in coupled thermoplasticity. *Int. J. Engng Sci.*, **14**, 211-221.
- NGUYEN, H.V. 1984. *Izotermiczne i adiabatyczne fale przyspieszenia w ośrodku sprężysto-plastycznym w zakresie dużych deformacji*. Ph.D. thesis, IFTR - Pol. Acad. Sci. Prace IPPT Nr 34, 1984.
- NGUYEN, H.V. 1985a. Isothermal and adiabatic simple waves in a thin-walled tube. *Arch. Mech.*, **37**(4-5), 449-464.
- NGUYEN, H.V. 1985b. Qualitative analysis of propagation of isothermal and adiabatic acceleration waves in the range of finite deformation. *Arch. Mech.*, **37**(4-5), 439-447.
- NGUYEN, H.V. 1990. An example of strain-induced anisotropy and texture at finite strain. In: *Proc. VIIth French-Polish Symposium*, Radziejowice, Poland.
- NGUYEN, H.V. 1992a. Constitutive equations for finite deformations of elastic-plastic metallic solids with induced anisotropy. *Arch. Mech.*, **44**(5-6), 585-594.
- NGUYEN, H.V. 1992b. Isothermal and adiabatic flow laws of metallic elastic-plastic solids at finite strains and propagation of acceleration waves. *Arch. Mech.*, **44**(5-6), 595-602.
- NGUYEN, H.V. 1995a. Combined plastic simple waves in a thin-walled tube. *Arch. Mech.*, **47**(2), 337-351.
- NGUYEN, H.V. 1995b. Constitutive equations for finite deformations of elastic-plastic metallic solids with induced anisotropy. Theory and application. In: *Proceedings of "Engineering Today", August 5 - 8, Hanoi*.
- NGUYEN, H.V., & NOWACKI, W.K. 1997. Simple shear of metal sheets at high rates of strain. *Arch. Mech.*, **49**(2), 369-384.
- NGUYEN, H.V., & NOWACKI, W.K. 1998. Localization of thermoplastic deformations in the case of simple shear. *Journal of Thermal Stresses*, **21**(3-4), 341-357.
- NGUYEN, H.V., & RANIECKI, B. 1998. Thermodynamics of isotropic metals with microcracks and microvoids. In: *XXXVII Polish Conference SOLMEC 98*.



- NGUYEN, H.V., & RANIECKI, B. 1999a. Observable plastic spin and comparison with other approaches. *Archives of Mechanics*, 207-221.
- NGUYEN, H.V., & RANIECKI, B. 1999b. Thermodynamics of isotropic metals with microcracks and microvoids. *Archives of Mechanics*. w przygotowaniu.
- NOWACKI, W.K. 1974. *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*. PWN.
- NOWACKI, W.K. 1980. Propagation des ondes dans un sol élasto-viscoplastique. In: NOWACKI, W.K. (ed), *Problèmes non-linéaires en mécanique*. PWN.
- NOWACKI, W.K. 1985. Thermal effects in dynamic plasticity, numerical solution and experimental investigations (thermographic-infrared detection). *Journal de Physique*, 46(8), 113-119.
- NOWACKI, W.K., & KURCYK, T. 1982. Sur le champ des températures en thermoélastoviscoplasticité finie. *J. de Méc. Thé. et App.*, 109-124. Numéro Spécial.
- NOWACKI, W.K., & NGUYEN, H.V. 1995. *Dynamic simple shear test. Experiment and numerical investigation*. Tech. Rept. DYMAT-9-TC, Munich.
- OLIFERUK, W., GADAJ, P.S., & GRABSKI, M.W. 1985. Energy storage during the tensile deformation of armco iron and austenitic steel. *Materials Sci. and Engng*, 70, 131-141.
- ONAT, E.T. 1982. Representation of inelastic behavior in the presence of anisotropy and of finite dformation. WILSHIRE, B., & OWEN, D.R.J. (eds), *Recent advance in creep and fracture of engineering materials and structures*. Swansea, U.K.: Pineridge Press, 231-254.
- ONAT, E.T. 1984. Shear flow of kinematically hardening rigid-plastic materials. DVORAK, G.J., & SHIELD, R.T. (eds), *Mechanics of material behaviour*. Elsevier, 311-324.
- OTTOSEN, N.S., & RUNESSON, K. 1991a. Acceleration waves in elasto-plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 28(2), 135-159.
- OTTOSEN, N.S., & RUNESSON, K. 1991b. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 27(4), 401-421.
- PAULUN, J.E., & PECHERSKI, R. 1985. Study of corotational rates for kinematic hardening in finite deformation plasticity. *Arch. Mech.*, 37, 661-677.
- PAULUN, J.E., & PECHERSKI, R. 1987. On the application of the plastic spin concept for the description of anisotropic hardening in finite deformation plasticity. *Int. J. of Plasticity*, 3, 303-314.

- PAULUN, J.E., & PĘCHERSKI, R. 1992. On the relation for plastic spin. *Archive of Applied Mechanics*, **62**, 376-385.
- PĘCHERSKI, R. 1998. *Opis deformacji plastycznej metali z efektami mikropasm ścinania*. Tech. Rept. 2. IPPT - PAN. Praca habilitacyjna.
- PERZYNA, P. 1971. Thermodynamic theory of viscoplasticity. *Adv. Appl. Mech.* **V.11**. Academic Press, 313-354.
- PERZYNA, P. 1978. *Termodynamika materiałów niesprężystych*. PWN.
- PERZYNA, P. 1986. Internal state variable description of dynamic fracture of ductile solids. *Int. J. Solids Structures*, **22**(7), 797-818.
- PERZYNA, P. 1994. Instability phenomena and adiabatic shear band localization in thermoplastic flow processes. *Acta Mechanica*, **106**, 173-205.
- PERZYNA, P. 1995. Interactions of elastic-viscoplastic waves and localization phenomena in solids. WEGENER, J.L., & NORWOOD, F.R. (eds), *Proc. ASME, Book No. AMR 137*, 114-121.
- PETRYK, H. 1995. Thermodynamic stability of equilibrium in plasticity. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **20**, 132-149.
- PIAU, M. 1970. Croissance d'une onde d'accélération dans milieu isotrope élastoplastique en déformation finie. *C.R. Acad. Sci. t.274, Série A*, 1567-1570.
- PIAU, M. 1975. Ondes d'accélération dans les milieux élastoplastique viscoplastique. *J. Méc.*, **14**, 1-38.
- PODOLAK, K., & RANIECKI, B. 1976. A note on the influence of energy dissipation on the propagation of elastic-plastic waves. *Arch. Mech.*, **28**, 625-634.
- RANIECKI, B. 1976. Ordinary waves in inviscid plastic media. MANDEL, J., & BRUN, L. (eds), *Mechanical waves in solids*. Springer. CISM 22, 157-219, Udine.
- RANIECKI, B. 1977. *Zagadnienia stosowanej termoplastyczności*. Tech. Rept. 29. IFTR - Pol. Acad. Sci. Praca habilitacyjna.
- RANIECKI, B. 1996. Termomechanika pseudosprężystości materiałów z pamięcią kształtu. NOWACKI, W.K. (ed), *Podstawy termomechaniki materiałów z pamięcią kształtu*, 55-140. Współczesne trendy w mechanice materiałów, Tom 1. IPPT PAN, Ośrodek Mechaniki.
- RANIECKI, B., & MRÓZ, Z. 1989. On the strain-induced anisotropy and texture in rigid-plastic solids. KLEIBER, M., & KÖNIG, A. (eds), *Inelastic Solids and Structure*. Pineridge Press. A. Sawczuk Memorial Volume, 13-32.

- RANIECKI, B., & NGUYEN, H.V. 1984. Isotropic elastic-plastic solids at finite strain and arbitrary pressure. *Arch. Mech.*, **36**(5-6), 687-704.
- RANIECKI, B., & SAMANTA, S.K. 1988. The thermodynamic model of rigid-plastic solids with kinematic hardening. *Arch. Mech.*, **40**, 747-758.
- RANIECKI, B., & THERMANN, K. 1978. *Infinitesimal thermoplasticity and kinematics of finite elastic plastic deformations. Basic concepts*. Tech. Rept. Institute for Mechanics. Ruhr-Universität, Bochum.
- RAUCH, E.F., & G'SELL, C. 1989. Flow localization induced by a change in strain path in mild steel. *Material Sci. and Eng.*, **A111**, 71.
- RICE, J.R. 1971. Inelastic constitutive relations for solids: an internal variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids.*, **19**, 433-455.
- RICE, J.R. 1975. Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanisms. ARGON, A.S. (ed), *Constitutive equations in plasticity*. The MIT Press, 23-79.
- RICE, J.R. 1976. The localization of plastic deformation. KOTTER, W.T. (ed), *Theoretical and Applied Mechanics*. North-Holland Pub. Company, 207-220.
- SIDOROFF, F. 1982. Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity. *Int. J. Engng Sci.*, **20**, 19-26.
- SWAN, G.W., & THORNHILL, C.K. 1974. Thermodynamics systems for solids and liquids. *J. Mech. Phys. Solids.*, **22**, 349-370.
- SZABO, L., & BALLA, M. 1989. Comparison of some stress rates test of stainless steel. *Int. J. Solids Struct.*, **25**, 279-297.
- THOMAS, T. 1952. On the characteristic surfaces of the von Mises plasticity equation. *J. Rational Mech. and Anal.*, **1**, 355.
- THOMAS, T. 1961. *Plastic flow and fracture in solids*. Academic Press.
- TING, T.C.T. 1973. On waves propagation problemes in which  $c_f = c_s = c_2$  occurs. *Quarterly of Applied Mathematics*, 275-286.
- TOURABI, A., et al. 1993. *Remarks on an experimental plane shear test and on an anisotropic elastic-plastic theory*. Tech. Rept. SMIRT. Stuttgart, August 15-20.
- TVERGAARD, V. 1978. Effect of kinematic hardening on localized necking in biaxially stretched sheets. *Internat. J. Mech. Sci.*, **20**, 651.



- WACK, B., & TOURABI, A. 1993. Cyclic simple shear of metallic sheets (applications to aluminium-lithium alloy). *J. Mater. Sci.*, 4535-4573.
- WANG, C.C. 1970. A new representation theorem for isotropic functions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **36**, 162-233.
- WILLIS, J.R. 1969. Some constitutive equations applicable to problems of large dynamics plastic deformation. *J. Mech. Phys. Solids.*, **17**, 359-369.
- WILLIS, J.R. 1975. Finite deformation solution of a dynamic problem of combined compressive and shear loading for elastic-plastic half space. *J. Mech. Phys. Solids.*, **23**, 405-419.
- WŁODARCZYK, E. 1994. *Wstęp do mechaniki wybuchu*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- WU, HAN CHIN, & LIN, HSUAN CHI. 1974. Combined plastic waves in a thin walled tube. *Int. J. Solids Struct.*, **10**, 903-917.
- YOSHIDA, K. & MYAUCHI, K. 1978. Experimental studies of mechanical behaviour as related to sheet metal forming. *Mechanics Sheet Metal Forming*, 19-49, Plenum Press, New York.
- ZHONG-HENG, GUO, LEHMANN, TH., HAORYUN, LIANG, & MAN, CHI-SING. 1992. Twirl tensors and the tensors equations  $\mathbf{AX} - \mathbf{XA} = \mathbf{C}$ . *Journal of Elasticity*, **27**, 227-245.



56527