2013

2013

NAUKA
MATEMATYK

DO użycia

SZKOŁY ELEMENTARNEY ARTYLER

I INŻENIERÓW.

PRZEZ

Alexandra Karola Konkowskiego Profe
Matematyki w téyże szkole.

TOM I.

Obeymuiący

ARYTMETYKĘ.

W WARSZAWIE

W DRUKARNI WIKTORA DĄBROWSKIEGO.

1811.

JAŚNIE OŚWIECONEMU XIĘCIU JMCI

JOZEFOWI

PONIATOWSKIEMU

Ministrowi Woyny, Generałowi Dywizyi, Naczelnemu Dowódzcy woysk Polskich Xięstwa Warszawskiego, Orderów wielkiey wstęgi Legionu honorowego, Wielkiego Krzyża woyskowego Polskiego, Neapolitańskiego, Orła białego i innych Kawalerowi.

JAŚNIE OŚWIECONY MCI XIĄŻE!

W samèy prawie chwili odrodzenia się bytu naszego, kiedy Wasza Xięcia Mość gromadziłeś pod znaki Oyczyste waleczne swych Rodaków zastępy, uczułeś zarazem iako plemiennik ś. p. Króla Stanisława Augusta, *owego Wskrzesiciela i dzielnego Opiekuna nauk w Narodzie, tę ważną i zbawienną prawdę: że ten tylko woiownik staie się prawdziwie użytecznym swoièy Oyczyźnie, i naypewnièy drogą postępuie chwały, który do świetnèy waleczności i męstwa łączy talenta i gruntowną naukę. W skutku tego, bez zwłoki, bo prawie wposrzód szczęku oręża i boiu, pièrwsze rzuciłeś Wasza Xięcia Mość zasady Szkoły Elementarnèy Artyleryi i Inżenierów. Wspaniałomyślna Dobroczynność Waszèy Xięci Mości była ièy nasieniem, a staranie i wpływ JE-*

GO tyle dokazały, że łaskawy Monarcha dziś nam szczęśliwie panuiący, wspiéraiąc zawsze zbawienne dla Kraju zamiary, ustalił iéy byt wyznaczeniem stałego funduszu. Już nasiona szczodrą ręką rzucone wydaią owoce, iuż ztéy szkoły corocznie usposobione do wyższych nauk wychodzą latorośle, a tém samém prawdziwie usłużni Oyczyźnie Synowie i Obywatele.

Pełniąc obowiązki Nauczyciela Matematyki w téy Szkole, niedostatek dzieła potrzebnego do tego przedmiotu, stał mi się powodem, że zaradzaiąc mu, szczupłe méy pracy owoce poważam się na iéy poświęcić użytek, a razem zaszczycić ie Imieniem Waszéy Xięci Mości iako iéy Wskrzesiciela, Dobroczyńcy i szczególnego Opiekuna. Łaskawe przyięcie onych do dalszéy pobudzi mię pra-

cy i usiłowań, abym okazał się godnym zaufania we mnie położonego, zostaiąc z naygłębszém uszanowaniem

WASZÉY XIĄŻĘCÉY MOŚCI,

Nayniższy sługa

A. K. Konkowski,

Profes: Matem: w Szkole Elemen: Ar: i Inże:

PRZEDMOWA

Niedokładność iednych, a trudność nabycia innych dzieł Matematycznych w oyczystym ięzyku dotąd wydanych, stała mi się powodem do przedsięwzięcia, którego część uskutecznioną na widok publiczny wydaię. Daleki od tego, abym się miał kusić o sławę Autora, chciałem tylko zaradzić potrzebie, którą w Instytucie ſzkoły Elementarnéy Artyleryi i Inżenieryi spostrzegłem. Może się tu komu zdaie, iż téy potrzebie nayłatwiéy zaradzić można było, przelaniem na ięzyk Polski iakowego dzieła zagranicznego; lecz ktokolwiek dobrze się rozpatrzył w literaturze Matematycznéy tak *Francuzów* iak *Niemców*, przyzna, iż mimo bardzo znacznéy liczby dzieł tego rodzaiu, w każdym coś takowego spostrzegł, co mu nie do iego myśli przypadło. To moie doświadczenie stwierdzone przez wielu biegłych w Matematyce mężów, nakłoniło mię, abym czerpaiąc z dzieł za wzorowe uznanych, porządną i zgodną w swych częściach całość podług méy myśli ułożył. Czylim tego w téy piérwszéy części dokazał, niech mi się do Znawców i światłych Sędziów odwołać godzi, których bezstronne zdanie z nayczulszą przyimę wdzięcznością i do poprawy dzieła mego użyć nieomieszkam. Z resztą iakikolwiek czeka me prace wyrok, tymczasowo zaspokaia mię to przekonanie, iż bez uchybień piérwotnych dzieł doskonałych otrzymać niemożna, i w téy myśli do wydania następnych części, ile mi ważność przedmiotu i rozmaite poboczne okoliczności pozwolą, spiesznym postępować będę krokiem.

REJESTR

RZECZY w TYM TOMIE ZAWARTYCH.

---

o Liczbach całkowitych i częściach dziesiętnych.

o Liczbach ułamkowych.

Działania z liczbami Wielorakiemi.

o Potęgach i Pierwiastkach.

o Stosunkach.

Nota. *Niedostatek znaku mnożenia* X *był powodem do użycia prawie wszędzie w mnożeniach kropek.*

NAUKA MATEMATYKI

ARYTMETYKA

ROZDZIAŁ I.

O Liczbach całkowitych, i częściach dziesiętnych.

§. 1.

Wiadomości poprzedzaiące.

1. Wszystko co powiększoném lub zmnieyszoném bydź może, nazywa się *Wielkością*, albo *Ilością* (Grandeur ou quantité). Tak *np długość*, *przeciąg czasu*, *ciężar i. t. d*, są ilościami.

2. Uważaiąc z rzeczy i z istot nas otaczaiących każdą poiedynczo bez względu na inne téyże saméy natury; nabywamy wyobrażenia o *Jedności* (unité). Jedność więc iest to ilość do któréy przyrównywaią się ilości téyże saméy natury, końcem wymierzenia lub ocenienia onych.

3. Zbiór wielu iedności iednéyże natury, lub iednego gatunku bez oznaczenia ich wielości, stanowi *mnóstwo* (multitude). Gdy mnóstwu temu czyli wielości, naznaczamy granice i gdy nabywamy wyobrażenia o każdéy iedności

1.

wielość tę składaiącéy, mamy wyobrażenie o *liczbie* (nombre). Liczba więc iest to wielość ograniczona iedności podobnych, albo uważanych za podobne, i wyraża stosunek oznaczaiący ile razy ilość iaka zawiéra w sobie ilość tego gatunku, którąśmy obrali za iedność. Nauka któréy przedmiotem iest oznaczenie takowego stosunku nazywa się *Matematyką* (Mathematiques).

4. *Matematyka czysta* (pures) zawiera w sobie *Arytmetykę* i *Algebrę* czyli *rachunek*, *Jeometryę* albo wymiar rozległości i *Przystosowanie rachunku do Jeometryi*.

5. *Matematyka mieszana* (mixtes) albo Nauki *Fizyczno-Matematyczne* zawiéraią w sobie *Mechanikę*, *Astronomią*, *Optykę*, i. t. d.

6. Arytmetyka iest Nauka o liczbach i składa się z liczenia i rachunku.

7. Podług tego iak wyrażamy, lub nie wyrażamy gatunek iedności z których ſię iaka liczba składa, nazywamy liczbę *Mianowaną* (concret) lub *niemianowaną* czyli *oderwaną* (abstrait). Tak *np* *Sześć kul* iest liczbą mianowaną, przeciwnie *ſześć*, iest liczbą oderwaną.

8. Ponieważ każdą prawie iedność wystawić sobie można podzieloną na części równe; ztąd liczba złożona z iedności całych *np.* trzy, nazywa się *liczbą całą*, (entier); złożona z iedno-

ściów i części iedności *np pięć i poł, liczbą łamaną* (nombre rompu). — Nakoniec z samych tylko części iedney iedności *np trzy ćwierci* liczbą *ułamkową* albo tylko *ułamkiem* (fraction).

§. 2.

O Liczeniu (Numeration) *liczb całych.*

9. Aby nabydź wyobrażenia o iakiéy wielości rzeczy, lub istot nas otaczaiących, musiemy ie liczyć. Tym końcem rozkładamy liczby one składaiące na rozmaite podziały, to iest, na podział *iedności*, na podział *tysięcy*, na podział *milionów*, *bilionów*, *trylionów i. t. d.* każdy z takowych podziałów ma swoie iedności, dziesiątki i sta, a że na mocy umowy ieden tysiąc waży dziesięć stów iedności, milion waży dziesięć stów tysięcy, bilion waży dziesięć stów milionów, trylion waży dziesięć stów bilionów, (*) powyższe zatém podziały, łącząc się z sobą iedne z drugich powstaią.

Wymawiaiąc więc iaką liczbę, wymawia się nayprzód sta, dziesiątki i iedności przedziału naywyższego w wartości, poczém koleyno sta, dziesiątki i iedności podziałów bezposrzednio niższych.

(*) *Jest to sposób liczenia Autorów* Francuzkich, *Autorowie zaś* Niemieccy *rachuią, na bilion, milion milionów, na Trylion, Milion bilionów i. t. d.*

10. Grammatyka podaie sposób wypisania liczb głoskami. *np* Rok ma dni *trzysta sześćdziesiąt pięć*. W rachunku zaś piszą się one, lub wymawiaią przez dziesięć znaków nazwanych *cyframi* (chiffres). Cyfry te i ich nazwiska czyli wartości są:

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
zero,	iedno,	dwa,	trzy,	cztéry,	pięć,	sześć,	siedm,	ośm,	dziewięć.

11. Żeby przy pomocy tych dziesięciu cyfer wszystkie inne liczby wyrazić, zgodzono się: *aby każda z tych cyfer położona po lewéy stronie cyfry drugiey, ważyła dziesięć razy więcey, iakby ważyła zaymuiąc miéysce téy drugiéy cyfry;* Jedne więc cyfry maią wartość zależącą i od miéysca które zaymuią, i od sposobu wymówienia samychże liczb. Prócz tego wymyślono cyfrę 0, która nazywa się *zero* i która niema żadnéy wartości szczególnéy.

Stosownie do téy ugody, aby napisać liczbę: 9 *więcey* 1, którą nazywamy *dziesięć*, pisze się 10; 10 *więcéy* 1 albo iedenaście pisze sie 11, i tak daléy *dwanaście*, *trzynaście*, *czternaście*, *piętnaście*, *szesnaście*, które piszą się 12, 13, 14, 15, 16; We wszystkich tych przypadkach cyfra 1 waży dziesięć, ponieważ zaymuie miéysce drugie od prawéy ręki.

Podobnież *dwadzieścia*, *dwadzieścia ieden* ..... *i t d*, wyrażaią się przez 20, 21, 22....

ponieważ cyfra 2 drugiego miéysca czyli porządku waży dwa razy 10, to iest liczbę, którą z godzono się nazywać *dwadzieścia*. *Sto*, to iest *dziesięć razy dziesięć; Sto iedno; Sto dwa .... i t d*, piszą się 100, 101, 102.... i. t. d.

Ztąd iuż łatwo poznać możemy, że na mocy takowéy ugody, można wypisać wszelkie liczby przy pomocy dziesięciu znaków; bo aby liczbę iakąkolwiek *np* 537 powiększyć o iedno, dosyć iest cyfrę 7 będącą od prawéy ręki, zastąpić przez cyfrę po niéy następuiącą w porządku 1. 2. 3. 4... 7. 8. 9. i wypadnie 538.

Gdyby cyfrą od prawéy ręki było 9, zastąpiłoby się ią przez 0, a powiększenie o *iedno* odniosłoby się do cyfry położonéy po lewéy stronie tych 9. Tak w 539 *więcey* 1, na miéyscu 3 położyłoby się 4, a na miéyscu 9, położyłoby się zero, co daie 540 *równe* 539 *więcéy* 1. Podobnież 12999 *więcéy* 1, wyrównywa 13000; 509 *więcéy* 1, wyrównywa 510; 999 *więcéy* 1, *równa się* 1000... i, t, d.

Rachuiąc więc miéysca takowe od prawéy ręki do lewéy, piérwsze trzy cyfry składaią podział iednościów, trzy następuiące podział tysięcy, cyfry z porządku 7ma, 8ma, 9ta, składaią podział Milionów, trzy następuiące podział bilionów i. t. d. W każdym zaś podziale cyfry położone na piérwsém miéyscu od prawéy, wyrażaią *iedności*, na 2^{giem} *dziesiątki*, na 3^{ciem} *Sta*.

Stosownie do tego tłumaczenia, łatwo iest wyrazić w cyfrach liczbę wymówioną, albo napisaną w głoskach, a to podług następuiącego prawidła.

Wyraża się koléyno sta, dziesiątki i iedności każdego podziału zaczynaiąc od tego, który ma naywiększą wartość; dla rozróżnienia zaś podziałów między sobą; robią się po między niemi małe ustępy. Tak *np* liczba napisana pod *N*rem 10 wyraża się 365.

Wtymże roku słonecznym znayduie się minut wtórych czyli sekund: *Trzydzieści ieden milionów, pięćkroć (*) pięćdziesiąt sześć tysięcy, dziewięćset dwadzieścia dziewięć:* co się tak przez cyfry wyraża: 31 556 929.

Jeżeli w iakim podziale niedostaie stów, dziesiątków, albo iednościów, kładzie się na to miéysce zero, iednakże ieżeli podług téy reguły znalazłoby się iedno lub dwa zer po lewéy ręce cyfer *znaczących* (significatifs), takowe, iako niepotrzebne odrzucaią się.

Aby wyrazić *np* że okrąg ziemi składa się *z dwudziestu milionów pięćkroć dwudziestu dwóch tysięcy, dziewięćset sześćdziesiąt sążni* Francuzkich (toise) albo, ze *czterdziestu milio-*

(*) *Zamiast dwieście tysięcy, trzysta tysięcy.... i, t, d. używamy w ięzyku naszym: dwakroć stotysięcy, trzykroć stotysięcy... i t d.*

nów metrów; co do liczby piérwszéy ta wyraża się : 20 522 960, co do drugiéy 400 00 000.

12. Nie trudno iest także wymówić lub napisać w głoskach liczbę wyrażoną w cyfrach. Tym końcem *dzieli się liczbę zadaną na podziały o trzech cyfrach, a to postępuiąc od prawéy ku lewéy ręce, poczém wymawia się lub pisze, sta, dziesiątki i iedności każdego podziału zwymienieniem nazwiska podziału; ieżeli trafią się zera; te się pomiiaią, nic na ich miéyscu niepisząc, ani wymawiaiąc.*

Tak *np* liczba 1 234 567 890 wymawia się i pisze : *ieden bilion, dwieście trzydzieści cztéry milionów, pięć kroć szesdziesiąt siedem tysięcy, osiemset dziewięćdziesiąt.* Podobnież 100 002 000 030. wymawia się *Sto bilionów, dwa miliony trzydzieści (*)*

13. Postępuiąc od prawéy ręki do lewéy, wartość cyfer rośnie w postępie dziesiątkowym, i iedności któréykolwiek cyfry, są dziesięć razy większe od iednościów cyfry położonéy po iéy prawey ręce; przeciwnie zaś, iedności każdéy cyfry, są dziesiątemi częściami iednościów cyfry położonéy po lewéy ręce piérwszéy.

(*) Sposobem liczenia Autorów Niemieckich, liczba piérwsza czyniłaby tylko *ieden tysiąc, dwieście trzydzieści cztéry miliony, pięćkroć sześćdziesiąt siedem tysięcy, ośmset dziewięćdziesiąt.* Druga zaś : *Sto tysięcy dwa milionów trzydzieści.* Rzadko się zdarzaią liczby więcéy iak z 12 cyfer złożone.

14. Liczbę więc każdą można koléyno powiększyć razy 10, 100, 1000.... *i.t.d.* kładąc po prawéy iéy ręce iedno, dwa, trzy, *i. t. d.* zer. Tak *np* liczba 3 600 iest sto razy większa od 36, a 2400 Złotych czynią 24 000 trzygroszniaków.

Gdy iaka liczba kończy się na zera; zmniéyszemy ią o 10, albo 100, albo 1000 *i. t. d.* razy, odrzucaiąc od niéy 1, albo 2, albo 3 zer. Tak 360 iest dziesiątą częścią, a 36 setną częścią liczby 3600. Tak 300 000 trzygroszniaków czynią Złotych 30 000.

§. 3.

O Liczeniu części dziesiętnych.

15. Ponieważ podług systematu naszego liczenia postępuiąc od ręki lewéy ku prawéy, iedności z których każda liczba składa się, coraz dziesięć razy zmniéyszaią się i przeciwnie; w takowém więc ubywaniu, przybywszy do iedności głównych, nic nas niewstrzymuie, abyśmy niemogli uważać nowych iednostek wypadaiących z podzielenia iedności główney na dziesięć cząstek równych. Te nowe iedności względem iedności główney, nazywaią się *dziesiętne* (décimales), a będąc od nich dziesięć razy mniéysze, po prawéy ich ręce pisać ie należy.

16. Żeby zaś wszelkiéy wątpliwości zapobiedź i niedać okazyi do brania dziesiętnych za

iedności, zgodzono się, aby ich od iedności głównych oddzielać kropką lub kreską. *Tak* 5,3 *znaczy* 5 *iedności głównych czyli całości, i* 3 *dziesiętne.*

Podobnież dziesiętne te znowu uważać można iako iedności złożone z dziesięciu innych, każda dziesięć razy mniéysza, iak dziesiętne, i dla téyże saméy przyczyny po prawéy ręce dziesiętnych pisać ie należy: Te nowe iednostki dziesięć razy mniéysze iak dziesiętne, będą od iedności głównych sto razy mniéysze, i dla tego nazywaią się *setne.* Chcąc więc wyrazić *dwadzieścia cztery iedności*, *trzy dziesiętne*, *pięć setnych* pisać należy 24, 35.

Też setne wystawmy sobie podobnież iak gdyby z dziesięciu części złożone były, natenczas cząsteczki te, od iedności główney, będą tysiąc razy mniéyszemi, i ztąd nazywaią się *tysiączne*, a że są dziesięć razy mniéysze od setnych; zatém po prawéy ręce ich pisać ie wypada. Tym sposobem podzielaiąc co raz przez dziesięć, można składać coraz nowe iedności, nazwane koléyno *dziesięciotysiączne*, *stótysiączne*, *milionowe*, *dziesięcio milionowe*, *bilionowe* i. t. d. które piszą się coraz daléy po prawéy ręce kreski. A ztąd widziemy że części dziesiętne tak się liczą iak całkowite; iakoż zaczynaiąc *np* od tysiącznych, widziemy, że 10 tysiącznych czynią 1 setną; a

10 setnych 1 dziesiętną; a 10 dziesiętnych, iednę całość, i przeciwnie.

Nazwisko dziesiętnych dla tego im nadano, ponieważ są dziesiętnemi częściami iedne drugich; iakoż setne można uważać iako dziesiętne dziesiętnych, tysiączne iako dziesiętne setnych, i tak o innych.

Podział takowy iedności iest naywygodniéyszy w rachunkach, i tego też użyto w nowych miarach francuzkich, iak to zobaczemy mówiąc o miarach.

17. Co należy do sposobu wymawiania dziesiętnych, ten iest tenże sam, co i do innych liczb. Wymówiwszy cyfry po lewéy ręce kreski będące, dziesiętne podobnymże sposobem wymawiaią się, lecz naostatku przydaie się nazwisko iedności dziesiętnych ostatniego gatunku.

Tak chcąc wymówić liczbę 34,572; mówię: *trzydzieści cztéry iedności pięćset siedemdziesiąt i dwie tysiącznych.*

Przyczyna tego łatwo pokazuie się, uważywszy, że w liczbie 34,572 cyfrę 5 wyrazić można przez *pięć dziesiętnych*, albo przez *pięćset tysiącznych*, co na iedno wychodzi, ponieważ dziesiętna będąc z dziesięciu setnych złożona, a setna z dziesięciu tysiącznych, zatém dziesiętna zamykać w sobie będzie stotysiącznych. Toż samo dzieie się i z cyfrą 7, którą podobnież wyrazić można przez 7*setnych* albo *siedemdziesiąt ty-*

siącznych, ponieważ setna z dziesięciu tysiącznych złożona była.

Gatunek ostatniéy cyfry zawsze wynaléśdź można, rachuiąc koléyno od kreski zacząwszy następuiącemi nazwiskami: *dziesiętne*, *setne*, *tysiączne*, *dziesięciotysiączne i. t. d.*

18. Gdyby iedności głównych niebyło, ale tylko cząstki iedności, dla zastąpienia miéysca iednościów, zero położyć trzeba. Tak chcąc naznaczyć 125 *tysiącznych* pisze się 0,125; chcąc wyrazić: 25 *tysiącznych* pisze się: 0,025, kładąc zero, tak dla naznaczenia że niema dziesiętnych, iako też dla dania następuiącym częściom należytéy wartości. Podobnież 6 milionowych pisze się 0,000006.

Przykłady wyrażenia w cyfrach liczb dziesiętnych wymówionych, lub napisanych w głoskach, i przeciwnie wymówienia lub wypisania w głoskach liczb dziesiętnych wyrażonych w cyfrach.

Chcąc wyrazić *trzy iedności i pięćset czterdzieści i dwa tysiącznych;* pisze się 3,542.

Chcąc wyrazić: *Siedem iedności i pięćset cztery tysiącznych*, pisze się 7,504.

Chcąc wyrazić: *Trzysta piętnaście Stótysiącznych*, pisze się: 0,00315.

I na wzaiem; 16,4056 czyta się; 16 *iedności*, *czterytysiące pięćdziesiąt sześć dziesięcio tysiącznych;* ---- 5,0101304, czyta się: *pięć iedności*, *sto ieden tysięcy trzysta cztery dziesięcio milionowych.*

19. Roztrząśniéymy teraz, iaką uczynić można odmianę w liczbie, odmieniwszy położenie kreski.

Ponieważ kreska oznacza miéysce iednościów, i ponieważ wszystkie inne cyfry biorą wartość swoią od odległości od teyże kreski; zatém cofnąwszy kreskę o iedno, dwa, trzy . . . i. t. d. miéysca ku lewéy ręce; liczba przez to, staie się 10, 100, 1000. . i. t. d. razy mniéyszą; przeciwnie zaś, powiększa się 10, 100, 1000, i. t. d. razy; posunąwszy tęż samę kreskę o iedno, dwa, trzy *i, t d.* miéysca ku prawéy ręce. W rzeczy saméy, maiąc liczbę 4327,5264, i posunąwszy kreskę o iedno miéysce ku lewéy, iako to: 432,75264, pokazuie się iaśnie: że tysiące pierwszéy liczby, przemieniaią się w sta drugiéy; sta staią się dziesiątkami, dziesiątki iednościami, iedności dziesiętnemi, dziesiętne setnemi i. t. d.

A zatém każda część pierwszéy liczby przez przestawienie kreski, dziesięć razy stała się mniéyszą. Przeciwnym sposobem kreskę o iedno miéysce, ku prawéy posunąwszy, gdy się pisze 43275,264; tysiące pierwszéy liczby, przemieniaią się w dziesiątki tysięców, sta w tysiące, dziesiątki w sta, iedności w dziesiątki, dziesiętne w iedności *i. t. d.* A zatém ta nowa liczba iest dziesięć razy większa od pierwszéy.

Z tegoż samego fundamentu pokazuie się; iż cofaiąc kreskę ku lewéy o dwa lub trzy miéysca, liczba 100 lub 1000 razy stanie się mniéyszą, iakoteż 100 lub 1000 razy większą, posunąwszy tęż kreskę o dwa lub trzy miéysca ku prawéy.

Ostatnia uwaga którą względem dziesiętnych ieszcze uczynić mamy, iest, że na końcu ostatniéy cyfry dziesiętnéy dodawszy zer tyle, ile się podoba, wartość przez to liczby bynaymniéy nieodmienia się. Tak 43,25 iest iedno co 43,250 *albo* 43,2500 albo 43,250000 *i. t. d.* Każda albowiem setna będąc wartą 10 tysiącznych, albo 100 dziesięćtysiącznych, *i. t. d;* 25 setnych warte będą 250 tysiącznych, albo 2500 dziesięćtysiącznych.

20. Postąpmy teraz do czteréch działań fundamentalnych natychże liczbach, zważaiąc że wszelka liczba mianowana niemoże bydź powiększoną ani zmniéyszoną, tylko gdy do niéy przybywaią lub od niéy ubywaią iedności tegoż samego gatunku.

Ztąd wypada: że dwie tylko ilości albo liczby iednego gatunku czyli *iednorodne* (homogènes) można porownywać z sobą, uwazaiąc czyli są równie wielkie, lub czy iedna z nich większą iest od drugiéy. I tak można dochodzić co iest większego czyli 5 Złł: czyli 3 Złł: podobnież czyli funt 1, czyli 7 łotów, gdyż 1 funt składa się z 32 łotów.

21. Dla oznaczenia równości zachodzącéy między dwoma ilościami, używać będziemi znaku = kładąc go między ilościami sobie równemi, to iest takiemi, z których iednę za drugą wziąsdź można *np* Łokieć 1=24 Calom wymawia się: 1 *Łokieć równa się 24 calom.* Takowy stan porównania dwóch ilości nazywa się *zrównaniem* (Equation). Po lewéy iego stronie znayduiące się ilości, składaią część piérwszą, a po prawéy, część drugą zrównania.

Dla wyrażenia zaś zachodzącéy nierówności między ilościami, używać będziemy znaku > kładąc ilość większą przy rozwartości iego *np* Złł: 1 > 20 gr: m. czyta się: 1 *Złoty większy iest od 20 gr: miedziannych.*

§. 4.

Dodawanie (Addition) *liczb całych i części dziesiętnych.*

22. Działanie przez które dochodziémy liczby tak wielkiéy iak wiele czyni liczb iednorodnych połączonych razem, nazywa się *dodawaniem.* Dodawanie to wskazuie się znakiem + który wymawia się *więcéy* (plus), i nazywa się *dodatny* (positif.) Wypadek zdodania nazywa się *zbiorem* lub *ſummą* (somme.) Tak 2 + 4 + 3 = 9 znaczy że 9 iest ſummą liczb 2, 4, i 3.

Gdy liczby dane złożone są z iednéy cyfry; użycie samo nauczyć powinno wynaydowania ich summy. Tak dodać 5 do 9, iest to dodać 5 razy raz po raz 1, do 9. Ale gdy maiąc liczby złożone z wielu cyfer *np* 44 dodać do 68, byłoby bardzo zmudno i przykro, dodawać 68 razy iedność, do liczby 44, albo 44 razy iedność, do liczby 68; Zastanowiwszy się iednak nieco, widziemy, że do tego wypadku przyisdź można drogą daleką krótszą. Jakoż dodać 44 do 68 iest to dodać 4 dziesiątki i 4 iedności, do 6 dziesiątków i 8 iedności, zkąd widziemy, że summa szukana zawierać powinna 10 dziesiątków i 12 iedności.

Rachunek takowy odbywa się wygodniéy, *kładąc liczby dane iedne pod drugiemi tak, aby cyfry iednego porządku, to iest iedności pod iednościami, dziesiątki pod dziesiątkami i. t. d. przypadały pod sobą w iednéy kolumnie pionowey: Poczém zaczynaiąc dodawanie od kolumny iednościów, pisze się pod spodem każdéy summę zniéy wypadłą, gdy ta nieprzechodzi 9, ieżeli zaś przechodzi 9, kładą się natenczas tylko iedności, dziesiątki zaś zatrzymuią się dla dodania ich do następuiącéy kolumny.*

	44
	68
Summa	112

Tak w przykładzie powyższym mówię: 4+8 iedności, czynią 12 iedności, to iest 1 dziesiątek i 2 iedności; iedności

2 piszę pod iednościami, a ieden dziesiątek dodaię do kolumny następuiącéy dziesiątków, mówiąc; 1 dziesiątek zatrzymany +6+ 4 dziesiątków czynią dziesiątków 11, a że wypadek ten iest wypadkiem ostatniéy kolumny, pisze go więc całkowicie, i otrzymuię na ſummę żądaną 112.

Lepiéy to ieszcze obiaśnią następuiące przykłady.

Niechby potrzeba dodać razem trzy liczby 2323+3212+2362. Ułożywszy ie tak, iak to widziemy na boku, i dla niezmięszania wypadku szukanego podkreśliwszy liniiką, biorę summy szczególne każdéy z osobna kolumny; a że żadna z nich nieprzechodzi 9, piszę więc ie pod każdą kolumną, i otrzymuię na summę 7897.

	2323.
	3212.
	2362.
Summa	7897.

Niechby wypadło ieszcze dodać liczby położone na boku; ponieważ w nich summa iednościów iest 19, to iest 1 dziesiątek i 9 iedności, piszę więc 9 pod kolumną iednościów, dziesiątkę zaś 1 zatrzymuię do kolumny następuiącéy. Summa dziesiątków z dziesiątką zatrzymaną z kolumny poprzedzaiącéy czyni dziesiątków 20, a że 10 dziesiątków czynią Sto, więc 20 dziesiątków czynią zupełnie 2 ſta, piszę więc pod kolumną dziesiątków 0, a otrzymane 2 sta, zatrzymuię dla dodania ich do kolumny następuiącéy stów. Tym sposobem postępuie się i z innemi kolumnami.

	5423.
	8297.
	3589.
Summa	17309.

23. *Uwaga* Gdy wiele znayduie się liczb do dodania, zdarzyć się może, że summa z iakiéy kolumny składa się z trzech albo więcéy cyfer, natenczas podobnież kładzie się tylko z niéy piérwsza cyfra od prawéy ręki pod odpowiadaiącą kolumną, a pozostałe cyfry dodaią się do kolumny następuiącéy. *np* Gdyby ſumma kolumny iednościów czyniła 124, położyłbym piérwszą iéy cyfrę

ſrę 4 od prawéy ręki pod kolumną iednościów, a pozostałe 12 dziesiątków dodałbym do kolumny dziesiątków; iakoż $124 = 100 + 20 + 4$. Toż się rozumie o innych kolumnach.

W podobnych przypadkach, gdy iest bardzo wiele liczb do dodania, dla uniknienia omyłki, można liczby dane na dwie, lub więcéy podzielić części, każdą z nich osobno dodać i dopiéro ſummy z nich ſzczególne w iednę ſummę ogólną zebrać.

24. Chcąc się przekonać czyli niezaszło omyłki w dodawaniu, nayłepszą do tego próbą iest powtórzenie tegoż działania, a to dodaiąc od dołu, ieżeli za piérwszym razem dodawało się od góry, albo przeciwnie; natenczas ieżeli w obydwóch przypadkach otrzymuiemy iednakowe ſummy, dodawanie było dokładne. Inną próbę podamy niżéy. (35.)

Przykłady dodawania liczb całkowitych dla wprawy.

	5783.		77756.		10376786.
	4328.		3388.		789639.
	5987.		9763.		589.
	8521.		90257.		73.
Summa	24619.	Summa	181164.	Summa	11167087.

25. Zagadnienie. *Znaleśdź summę wiele liczb zawieraiących w sobie części dziesiętne.*

Ponieważ części dziesiętne tak się liczą iak liczby całkowite, zatém sposób dodawania ich, iest takiż, iak na liczby całkowite, to iest: Liczby dane piszą się pod sobą, kładąc iedności albo części dziesiętne iednego gatunku w iednéy linii pionowéy, poczém dodaie się tak iak liczby całkowite (22); w wypadłéy ſummie kładzie się kreska po prawéy ręce cyfry wyrażaiącéy iedności; albo po lewéy téy, która wyraża dziesiętne.

Przykład. Gdyby wypadło dodać 49,876534 + 15,798249, + 6,789012 + 4,789656.

Wzór działania.

	49,876534.
	15,798249.
	6,789012.
	4,789656.
Summa - -	77,253451.

Ponieważ piérwsza summa cząstkowa iest 21, kładzie się więc 1, a zatrzymuie się 2, które dołączaią się do liczb kolumny następuiącéy. Summa z téy drugiéy kolumny iest 15, kładzie się więc z niéy 5, zatrzymane zaś 1, dodaie się do liczb następuiącéy kolumny trzeciéy, i tak postępuie się daléy.

26. *Uwaga.* Gdyby z liczb danych iedne niemiały w sobie tyle cyfer dziesiętnych co drugie, natenczas dla uniknienia pomyłki można po prawéy ręce téy liczby co ma mniéy dziesiętnych, dodać zer tyle, aby liczba dziesiętnych cyfer we wszystkich była iednakowa.

Gdyby *np* wypadło dodać 1,234. + 5,67. + 8,90123 + 0,456789. Natenczas, ponieważ ostatnia liczba ma naywięcéy dziesiętnych, to iest sześć, zatém do piérwszéy liczby od prawéy ręki dołączam trzy zera, do drugiéy zer cztéry, do trzeciéy zero iedno, (co uczynić wolno n° 19.) poczém uskutecznia się działanie sposobem podanym (n° 25.)

To iest:

1,234.		1,234000.
5,67.	albo	5,670000.
8,90123.		8,901230.
0,456789.		0,456789.
16,26[illegible]19.		16,262019.

Widzimy tu że przy uwadze można się obeyśdź bez dopisania zer.

27. *Uwaga.* Gdyby wypadło dodać liczbę iaką do siebie saméy razy *np* 8, 9, 10, 100... *i. t. d;* dodawanie takowe odbywa się za pomocą dodawania skróconego nazwanego *mnożeniem* o którém wkrótce powiemy.

§. 5.

Odciąganie (Soustraction) *liczb całych i części dziesiętnych.*

28. Zmniéyszenie ilości danéy, drugą ilością daną iednéyże natury, to iest: wynalezienie o ile ilość iedna większą iest, lub mniéyszą od drugiéy, nazywa się *Odciąganie.* Wypadek z tego działania nazywa się *resztą* albo *nadmiarem* ilości większéy nad mniéyszą, albo *różnicą* (reste, l'excès, difference).

Działanie to wskazuie się znakiem — który wymawia się *mniéy* (moins), kładąc go między ilościami danemi i nazywa się *przeczącym* albo

2 *

uiemnym (negatif.) Tak $9-5=4$, znaczy: 9 *mniéy* 5 *równa się* 4.

29. Gdy liczby do odciągania składaią się z iednéy cyfry, odciąganie takowe prosta uwaga wskazuie. Tak chcąc odiąć 7 od 9, oczéwista iest, że dóydzimy żądanéy reszty, odéymuiąc 7 razy raz po raz iedność od liczby 9, tak, iż na resztę, albo różnicę otrzymamy 2.

Ale gdybyśmy żądali odiąć *np* 54 od 89, byłoby bardzo długo i przykro, odéymować 54 razy, raz po raz iedność od liczby 89. Zastanowiwszy się iednak nieco, widzimy, że odiąć 54 od 89, iest to odiąć 5 dziesiątków i 4 iedności od 8 dziesiątków i 9 iedności, a dokonawszy tego, postrżegamy natychmiast że reszta żądana składa się z 3 dziesiątków i 5 iedności to iest że reszta cała iest 35.

Ztąd wypada: *Że aby odiąć od siebie dwie liczby całkowite; wypada ie pod sobą podpisać tak iak w dodawaniu, kładąc z nich mniéyszą na spodzie, i odéymować każdą cyfrę niższą poczynaiąc od ręki prawéy od odpowiadaiącéy wyższéy iak to widzimy na boku.*

	89
	54
Reszta -	35

Gdyby znowu dwoma zadanemi liczbami były *np* 47 odiąć od 84. Na piérwszy rzut oka, zdaie się, że niemożna do nich przystosować rozumowania poprzedzaiącego, ponieważ niemożna odiąć 7 iedności od 4 iedności, lubo przekonywamy się dostatecznie że 47 od 84 odciągnąć można. Trudność ta iednak zniknie, ieżeli liczbę 84 uważać będziemy iako złożoną z 7 dziesiątków i 14 iedności, a postępuiąc sobie dopiéro iak w przykładzie poprzedzaiącym, otrzymamy na resztę żądaną 3 dziesiątki i 7 iedności to iest 37.

	84
	47
Reszta -	37.

30. W powszechności więc, *Gdy cyfra wyższa mniéyszą iest od odpowiadaiącéy spodniéy; wtakowym przypadku, pożycza się myślą od cyfry wyższéy kolumny następuiącéy iednéy iedności, która czyni dziesięć takich, z iaką odbywa się działanie, a która będąc dodana do cyfry za małéy, czyni podobném odięcie. Poczém cyfrę od któréy się pożyczyło, uważa się o iednę iéy iedność zmniéyszoną.*

Daymy np że mamy odciągnąć 19689 od 43397. Napisawszy ie sposobem wyżéy podanym; widziemy; że niemożna odiąć 9 od 7; ale wystawiwszy sobie cyfrę następuiącą wyższą 9 zmniéyszoną iedną iednością, która znaczy ieden dziesiątek, i połączywszy go myślą z 7 iednościami, wypadnie całośc złożona z 17 iedności, od których zatém można iuż odciągnąć 9, i wypadnie na resztę 8, które piszą się pod kolumną iednościów. Przechodząc do dziesiątków, nie-

	48397.
	19689.
Reszta	28708.

potrzeba przepomnieć, że cyfra wyższa 9, zmniéyszoną została o 1, i że zatém waży tylko 8, to iest 8 dziesiątków, od których odéymuiąc cyfrę niższą téyże saméy kolumny, która wyraża także osiem dziesiątkow, resztą z téy kolumny będzie 0, napiszę więc 0 pod kolumną dziesiątków. Przechodząc do stów, niemożna znowu odiąc 6 od 3, ale pożyczywszy tysiąca albo 10 stów od cyfry następuiącéy 8, wypadnie odiąć 6 od 13, co da na resztę 7; które piszą się pod kolumną stów. Cyfra wyższa 8 kolumny następuiacéy, maiąc iuż wartość mniéyszą od wartości cyfry niższéy, którą od niéy odciągnąć wypada, zmniéyszoną iuż była o 1, i waży tylko 7, to iest 7 tysięcy, ale widzimy i tu że pożyczywszy myslą iednéy iedności od cyfry po niéy następuiącéy 4, która wyraża dziesiątki tysięcy; iedność ta waży dziesięć tysięcy, a te połączone z cyfrą poprzedzaiącą wypadnie na odięcie 9 od 17, czego dokonawszy, wypada na resztę 8, które piszą się pod kolumną tysięcy. Tym sposobem cyfra wyższa 4 będąc zmniéyszoną o 1, waży iuż tylko, 3, a odéymuiąc od nich 1, daie na resztę 2, które piszą się pod kolumną dziesiątków, tak iż na żądaną różnicę wypadnie. 28708.

31. Jeden ieszcze w odciąganiu wydarza się przypadek, którego pominąć niemożna, to iest: gdy cyfra niższa będąc większą od cyfry wyższéy odpowiadaiącéy; po téy ostatniéy po lewéy ręce następuie iedno lub więcéy zer. Dáymy że wypada odiąć 4569 od 5008. Ułożywszy ie iak wyżéy, widzimy náyprzód, że niemożna odiąć 9 od 8, ani pożyczyć od cyfry wyższéy następuiącéy, ponieważ ta będąc zerem, żadnéy z siebie niema wartości, ale od cyfry dalszéy 5 tysięcy, można pożyczyć tego, co potrzeba, aby uskutecznić odciąganie;

	5008
	4569
Reszta -	439

że zaś do tego niepotrzeba więcéy nad 10 iedności, potrzeba więc rozłożyć 5000 na 4990 i 10, to iest przypuścić, że na miéyscu piérwszych trzech cyfer od lewéy ręki, znayduie się 499 i że do nich dołączone są 18 iedności. Tym sposobem zera zamieniaią się na 9^{ki}, a cyfra 5 zmniéyszy się swoią iednością. Po odprawionem odciąganiu wypada na resztę 439. Ten sposób postępowania stosuie się do wszelkich przypadków, i daie poznać; że *ieżeli pomiędzy cyfrą od któréy się odciąga i piérwszą cyfrą znaczącą* (significatif), *znayduie się iedno lub więcéy zer, natenczas pożycza się od ostatniéy, która tym sposobem o iednę iedność zmniéyszoną zostaie, a wszystkie posrzednie zera, uważaią się iuż, iak tyleż* 9^{tek}.

Maiąc *np* odiąć 8768 od 10000, napisawszy ie sposobem wiadomym, znaydziemy łatwo że na resztę z nich wypadłą pozostaie 1232. Uważaiąc; że 10000=9990+10.

$$\begin{array}{rr} & 10000. \\ & 8768. \\ \hline \text{Reszta -} & 1232. \end{array}$$

32. *Uwaga.* Gdy w iakiéy kolumnie cyfra wyższa znayduie się mniéyszą od cyfry niższéy, widzieliśmy, że potrzeba w takowym przypadku udać się do cyfry wyższéy następuiącéy kolumny, pożyczyć od niéy myślą iednéy iedności, i uważać ią odtąd, iako zmniéyszoną o 1; wygodniéy iest iednak w praktyce tego działania cyfrze wyższéy wartość iaką miała przed pożyczeniem zostawić; a cyfrę niższą, którą od niéy odciągnąć

wypada, wystawić sobie powiększoną o 1. Sposób ten nietylko niema wpływu na wypadek, ten ma ieszcze pożytek, że niemorduie pamięci. W przykładzie poprzedzaiącym zaczynaiąc od iedności ów, można powiedzieć 8 od 10 zostaie 2, które piszą się pod kolumną iednościów; przechodząc do dziesiątków, zamiast odéymować 6, odeymuię 7 od 10 i zostaie 3, które piszą się pod kolumną dziesiątków, postępuiąc do stów, zamiast 7, odéymuię 8 od 10, i zostaie 2, nakoniec postępuiąc do tysięcy zamiast 8 odéymuię 9 od 10 i zostaie na ostatnią resztę 1.

Niektóre przykłady Odciągania na liczbach całkowitych dla wprawy.

	8115	6704	9000800106
	2051	6356	43491638
Reszta -	6064.	348.	8957308468

33. ZAGADNIENIE. *Znaleśdź różnicę dwóch liczb zawiéraiących w sobie części dziesiętne?*

Prawidło odciągania i przyczyna, są też same iak na liczby całkowite.

Przykład I. Odiąć 4,612304 od 9,876528

Działanie

od	9,876528.
odiąć	4,612304.
	5,264224.

Przykład II. Odiąć od 9,106002, 4,612304.

Działanie

9,106002.

4,612304.

4,493698:

Przykład III. Znaleśdź różnicę liczb 2,4512 i 10,25?

Działanie

10,2500.

2,4512.

7,7988.

W piérwszym przykładzie niema żadnéy trudności; w drugim, mówi się 4 odięte od 12 zostaie 8, pożyczone 1 odięte od 10 daie na resztę 9; daléy 3 a 1 pożyczone albo 4 odięte od 10 daie na resztę 6 *i. t. d.* W przykładzie trzecim postępuie się iak w drugim po dopisaniu dwóch zer od prawéy ręki liczbie 10,25.

34. Chcąc się przekonać czyli odciąganie iest dokładném, to iest: czyli reszta iest taką, iaką bydź powinną, potrzeba resztę tę dodać do liczby mniéyszéy którą się odciągało. Jeżeli ſumma ztąd wypadła, równa się liczbie większéy od któréy się odéymowało; działanie iest dokładném.

Tak ieżeli $8115 - 2051 = 6064$.

to też $6064 + 2051 = 8115$.

35. Na odciąganiu gruntuie się także proba dodawania a to w następuiący sposób: Chcąc ſprawdzić czyli ſumma w przykładzie na boku położonym iest dokładną, dodáymy na nowo każdą kolumnę koléyno ale zaczynaiąc od kolumny piérwszéy z zle-

	437
	58
	9
	9642
Summa -	10 146
	1120

wéy strony. Summa z téy kolumny iest 9, to iest 9 tysięcy, a że w wypadku na tém miéyscu znáyduie się 10 tysięcy, zatém tysiąc zbywaiący powstać musiał z zatrzymania go z kolumny poprzedzaiącéy, kolumna więc ta złożyła ſummę 11 stów, że zaś czyni tylko stów 10, zatém zbywaiące sto, musiało znowu powstać z zatrzymania go] z kolumny poprzedzaiącéy, ta więc kolumna musiała mieć na wypadek 14 dziesiątków, że zaś ma ich tylko 12, zatém dwa dziesiątki zbywaiące pochodzą z kolumny iednościów, która złożyła 26 na ſummę, więc powinna i teraz iako ostatnia złożyć tę liczbę, ponieważ niemogła bydź powiększoną żadném zatrzymaniem poprzedzaiącém; iakoż kolumna ta w rzeczy saméy daie na summę 26 iedności, wnosimy więc z tego, że ſumma ta iest dokładną.

A tak *dodaiąc koléyno każdą kolumnę zaczynaiąc od téy która iest od lewéy ręki, ieżeli odciągniemy summę szczególną każdéy kolumny, od summy którą zdaie się że złożyła, i gdy pisać będziemy koléyno każdą resztę pochodzącą z zatrzymania pod kolumną do któréy należy, reszta ostatnia, ieżeli dodawanie iest dokładne, powinna bydź zerem.*

Uwaga. Ponieważ szczególnie dla wspomożenia pamięci, piszemy reszty 1, 1, 2, 0, każdą pod kolumną iéy odpowiadaiącą, po użyciu więc onych, można ie przekréślić iak to widziémy w przykładzie powyższym aby ie niemięszać z wypadkiem działania.

36. *Uwaga.* Ponieważ summa iest zbiorem wszystkich liczb dodanych; odéymuiąc więc od niéy koléyno te liczby, ostatnia z nich powinna ią znieść zupełnie. Mogłoby to służyć za próbę dodawania, ale bardzo długą i zmudną.

37. *Uwaga.* Gdyby od iakiéy liczby danéy, odéymować wypadło iednę i tęż samę liczbę, wiele razy *np* razy 6, 20, 100 *i. t. d.* dla dowiedzenia się ile razy większa przewyższa mniéyszą, na ówczas używamy odciągania skróconego które nazywa się *Dzieleniem.* (7)

§. 6.

Mnożenie (Multiplication) *liczb całych i części dziesiętnych.*

38. Działanie przez które wynayduiemy sposobem prędkim summę z iakiéy liczby wziętéy lub dodanéy do siebie saméy pewną liczbę razy, nazywa się *Mnożeniem.* Liczba maiąca się do siebie dodawać nazywa się *Mnożny* (Multiplicande); Liczba okazuiąca wiele razy to uskutecznić należy nazywa się *Mnożnik* (Multiplicateur). Obydwie razem nazywaią się *Czynnikami* (facteurs) ſummy ztąd wypadłéy, która na-

zywa się ich *Mnogością* lub *Wieloczynem* (produit).

39. Ztąd wypada. 1^{od} że *mnożyć dwie liczby przez siebie, iest to brać z nich iednę, tyle razy, ile druga ma w sobie iedności.* Tak mnożyć *np* 4 przez 3, iest to wziąśdź liczbę 4 razy 3; gdzie 4 i 3 są czynnikami, a wypadek 12 mnogością.

2re *Ze mnogość iest summą mnożnego wziętego tyle razy, ile iest iednościów w mnożniku,* albo co na iedno wychodzi, *mnogość tyle razy zawiéra w sobie mnożnego, ile razy mnożnik zawiéra w sobie iedność.* Tak powyższa mnogość 12, zawiéra w sobie mnożnego razy 3, i mnożnik 3 ma w sobie iedności trzy.

3^{cie} *Że mnożnik zawsze iest liczbą oderwaną*, ponieważ zawsze wyraża tylko, liczbę powtórzeń mnożnego.

40. Aby wskazać mnożenie, używa się znaku $\times$ albo . Tak 2×4 albo $2.4=8$, znaczy: 2 *rozmnożone przez* 4, *czyli wzięte razy cztéry, równa się* 8.

41. Dodaiąc 7 pięć razy i 5 razy siedem, otrzymuiemy iednakową mnogość 35; Zatém $7.5=5.7$, a że tego dowieśdź można na wszelkich innych liczbach; wypada więc: że *można*

przemienić porządek Czynników, niezmieniaiąc wniczém onych mnogości. Jakoż złożywszy Tablicę A z pięcią linii każdą o 7 kropkach, liczba kropek w niéy zawartych, iest 7. 5; ale odwróciwszy tę Tablicę iak iest w B, liczba kropek pozostanie w niey taż sama cô piérwsza, ale wyrażona będzie przez 5. 7, zkąd wypada: że 5.7=7.5=35.

. . . .
. . . .
A . . . .
. . . .
. . . .

. . . . .
. . . . .
. . . . .
B. . . . . .
. . . . .
. . . . .
. . . . .

Napisawszy 7.5.2, wyrażenie to znaczy: że pomnożywszy 7 przez pięć, mnogość wypadłą 35, potrzeba ieszcze rozmnożyć przez 2, że zaś mnogość 7.5 znaczy toż samo co 7+7+7+7+7, aby więc wypadek takowy pomnożyć przez 2; dosyć iest część iego każdą powtórzyć dwa razy, to iest 14+14+14+14+14; zatém 7.5.2=7.2.5. Ponieważ więc, można odmienić miéysce, dwóm ostatnim czynnikom, i toż samo można uczynić z dwoma piérwszémi, łatwo ztąd wnieść, *że porządek mnożenia dwóch czynników, może bydź przemieniony do upodobania.* Toż mówić o większéy liczbie czynników.

42. Gdy się zdarza, że iaka liczba iest wiele razy czynnikiem *np* 3.3.3.3 gdzie 3 iest czynnikiem razy cztéry, mówi się na ów czas *że 3 iest wyniesione do potęgi* 4^éy^ (élevé à la 4^me^ puiſsance) i mnogość tę oznaczamy tak; 3^4 : cyfra 4 nazywa się *Wykładnikiem* (exposant). *Wykładnik ten wskazuie liczbę razy, ile iaka liczba iest Czynnikiem.* Podobnież $2^3=2.2.2=8$. Potęga druga nazywa się także *Kwadratem* (Carré), a potęga 3^cia^ *Sześcianém* (Cube) zobaczemy tego przyczynę w Jeometryi. Tak 49 iest kwadratem z 7 albo z $7.7=7^2$; 216 iest sześcianem z 6, albo $6.6.6=6^3$.

I na wzaiem liczba maiąca wykładnika, nazywa się *Pierwiastkiem* (Racine). Tak 7 iest pierwiastkiem kwadratowym z 49, Sześciennym z 343; 4^tym^ z 2401; ponieważ $7^2=49$. $7^3=343$, $7^4=2401$. Pierwiastki te wskazuią się znakiem $\sqrt{\;}$; Tak $7=\sqrt[3]{343}=\sqrt[4]{2401}$. Gdy niewskazuiemy stopnia pierwiastku, przypuszczamy, że idzie o pierwiastek kwadratowy, mówiemy więc, że 7 iest piérwiastkiem z 49, oznacza się zaś $7=\sqrt{49}$.

43. Aby otrzymać mnogość z liczb *poiedynczych* (simples), niema na to żadnéy reguły. Widzimy oczywiście że $2.3=2+2+2=6$. Tym końcem wypada tylko nauczyć się dokładnie mnogości liczb poiedynczych przez siebie,

które znayduią się w następuiącéy Tablicy zwanéy *Pythagoresa*.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.

Chcąc podług téy Tablicy wynaleśdź *np* mnogość z 7.5, szuka się wrzędzie poziomym czynnika 7, od tego, spuszcza się na dół tąż samą linią pionową, póki się nie natrafi na liczbę iak tu 35, leżącą wrzędzie poziomym zaczynaiącym się od czynnika drugiego 5 i wypadnie 7.5=35.

44. Aby otrzymać mnogość z liczb przywiększych, byłoby bardzo zmudno, gdybyśmy mieli dodawać mnożnego tyle razy, ile iest iedności w mnożniku, iak to widzimy z opisu mnożenia. Podamy więc tu sposoby wygodniéysze służące do otrzymania téy mnogości. Dwa się tu wydarzaią przypadki.

1wszy *Przypadek*. Aby rozmnożyć *np* 2957 przez 8, wystawmy sobie na moment, że w saméy rzeczy dodaiemy do siebie osiem razy liczbę 2957. Na ówczas kolumna iednościów, będzie złożoną z cyfry 7 powtórzonéy razy 8, ſumma więc ta będzie: 7.8 albo 56 to iest 5 dziesiątków i 6 iedności, położemy więc 6 iedności pod iednościami, 5 zaś, zatrzymamy dla dołączenia ich do kolumny dziesiątków; kolumna ta iest złożona z cyfry 5 wziętéy razy 8, powiemy więc 5.8 albo 40, a dodawszy do nich zatrzymane 5 dziesiątków, wypada 45 dziesiątków, położemy więc pod tą kolumną, 5 dziesiątków, a 4 sta odniesiemy do kolumny następuiącéy. *i. t. d.*

	2957
	8
Mnogość - -	23656

Widzimy więc że działanie wypada na rozmnożenie każdéy cyfry mnożnego przez mnożnika, zaczynaiąc od iednościów, i pisząc pod każdą cyfrą iedności, które mnogość wydała, dziesiątki zaś zatrzymuiąc dla dołączenia ich do mnogości następuiącéy.

Postępowanie to właściwie wówiąc iest samém dodawaniem, ztą tylko różnicą, że tym sposobem unikamy pisania wiele razy iednéy liczby dla dodania iéy do siebie.

2gi *Przypadek.* Aby pomnożyć 2327, przez 532, widoczna iest, że można dodać do siebie 2327 razy 2, razy 30 i razy 500, potém dodać wszystko razem.

Pomno-

Pomnożymy więc nayprzód 2327 przez 2 sposobem poprzedzaiącym, i otrzymamy 4654. Daléy aby rozmożyć 2327 przez 30, uważmy, że ieżeli w rzeczy saméy dodaiemy do siebie 30 razy liczbę 2327 albo co na iedno wypada, liczbę 30, razy 2327, na kolumnę iednościów wypadłoby zero, a na kolumnę dziesiątków 2327.3 albo 6981.

	2327
	532
	4654
	6981
	11635
Mnogość -	1237964.

A tak widzimy: że wypada szukać mnogości z mnożnego 2327 przez 3 i mnogość tę 6981, napisać pod 4654, ale posuwaiąc ią o iedno miéysce ku lewéy ręce. Podobne rozumowanie dowodzi: że aby rozmnożyć 2327 przez 500; potrzeba napisać mnogość 2327.5 albo 11635 posuwaiąc ią o dwa miéysca ku lewéy ręce. Ztego wszystkiego wypada: *że potrzeba mnożyć iednego z Czynników przez każdą z cyfer czynnika drugiego, i mnogości wypadłe pisać tym sposobem, żeby iedności każdéy przypadały pod cyfrą mnożnika, który wydał takową mnogość, poczém wszystko się dodaie.*

324
205
1620
648
66420.

Niechby wypadło ieszcze rozmnożyć 324×205. Ułożywszy ie iak to widzimy na boku; mówię: 4.5 albo 5.4 czyni 20, piszę na miéyscu iedności 0, a zatrzymuię 2; daléy 5.2 czynią 10, a zatrzymane 2, czynią 12, kładę więc 2, a zatrzymuię 1; daléy 5.3; czynią 15; a zatrzymane 1 czynią 16, które wypisuią się całkowicie. Postępuiąc do dziesiątków widzę. że na ich miéyscu iest 0, zatém ponieważ dziesiątków w mnożniku niemasz, więc też ich i w mnogości bydź niemoże. Postępuiąc do trzeciéy cyfry mnożnika mówię; 2.4 czynią 8, które piszę pod spodem wprost mnożnika 2, to iest pod stami, daléy 2.2 czynią 4; nakoniec 2.3 czynią 6. Zbieraiąc dopiéro w iednę summę mnogości cząstkowe, w tym samym porządku iak są pod sobą położone, otrzymuię na mnogość 66420.

Inne przykłady dla wprawy.

$$\begin{array}{r} 886633 \\ \underline{777} \\ 6206431 \\ 6206431 \\ \underline{6206431} \\ 688913841. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53687 \\ \underline{908} \\ 429496 \\ \underline{483183} \\ 48747796. \end{array}$$

45. Gdy ieden przynaymniéy z Czynników kończy się na zera; ze sposobu którysmy dopiéro wyłożyli wypada: że zera takowe można opuścić aby tylko takąż ich liczbę dodać na końcu wypadłéy mnogości *np* 406.27=10962 zatém 4060.2700 daią tęż samę mnogość zdołączeniem do niéy trzech zer, to iest: 10962000. Podobnież, aby otrzymać mnogość 1000 X 100000, kładzie się osiem zer po 1 i wypada 100000000.

Abyśmy prawdy i znich wydobyte wnioski o mnożeniu na początku podane, tym dokładniéy poięli; weźmy sobie przykład mnożenia liczb mianowanych. Daymy że chcemy wiedzieć, wiele potrzeba zapłacić za 4 sztuki materyi iakiéy, któréy iedna sztuka kosztuie Złotych 75. W tym przykładzie Złotych 75 iest mnożnym, a 4 mnożnikiem, ponieważ oczéwista iest, że summa Złotych które za tę materyą zapłacić potrzeba, równa się cztery razy wziętym Złotym 75, zatém mnożąc 75 przez 4, otrzymamy Złotych 300 na mnogość szukaną, która oczewiście składa się z iednościów téyże saméy natury, iakie są iedności mnożnego. Widzielibyśmy podobnież, że 4 iedności innego iakiego gatunku iako to: 4 Łokcie, 4 Tomy iakiego dzieła, każdy po Złotych 75, kosztowałyby zarówno Złotych 300. Zatém natura iedności zawartych w mnogości, zależy szczególnie od natury iednościów, z których się składa mnożny.

46. Dla przekonania się o dokładności dobrze odprawionego mnożenia, potrzeba odmienić porządek czynników, ponieważ tym sposobem mnogość odmienić się niemoże. Można też podwoić lub potroić iednego z Czynników; poczém odbywszy mnożenie, podwoić lub potroić mnogość z piérwszego mnożenia wypadłą, natenczas mnogość ta powinna bydź równa mnogości z drugiego działania. *np* $365 . 24 = 8760$. Chcąc mnogość tę sprawdzić, podwaiam 24 będzie: $24 . 2 = 48$. Mnożąc przez 48 liczbę 365 wypadnie $365 . 48 = 17520$ która iest zupełnie podwóynością

piérwszéy mnogości 8760. O innéy probie dowi-my się zdzielenia. (68.)

Mnożenie części dziesiętnych.

47. Części dziesiętne tak się mnożą iak liczby całkowite nieuważaiąc z początku n i kreskę, ale znalazłszy mnogość, od prawéy ręki odcina się wniéy kreską tyle cyfer na dziesiętne; ile ich znayduie się razem w obydwóch czynnikach.

Przykład	Mnożyć	12,34	
	przez	5,6	
		7404	Mnogość przez 6
		6170	Mnogość przez 5
		69,104	

Przyczyna tego iest ta: że czynnik 12,34= 1234 setnym, ponieważ 12 całych czynią 1200 setnych, dodawszy więc 34 setnych wypada: 12,34=1234 setnym; gdyby więc drugim czynnikiem było 56 całych, mnogość wyrażałaby 69104 setnych; ale że czynnik ten iest tylko dziesiątą częścią takowych całości; zatém mnogość powinna bydź dziesięć razy mniéyszą, czyli wyrażać powinna tylko dziesiętne setnych albo tysiączne, zatém w mnogości powinny się znaydować trzy cyfry dziesiętne i to się też wyraża, kładąc kreskę między 9 i 1. Toż samo rozumowanie służy i do innych liczb dziesiętnych.

Przykład II. Rozmnożyć 0,123
przez 0,045
615 mnogość przez 5
492 mnogość przez 4
0,05535 Mnogość całkowita

W tym przykładzie trzeba odciąć pięć cyfer na dziesiętne w mnogości, a że ich tylko iest cztery znaczących, piszą się dwa zera od lewéy ręki, iedno, dla zastąpienia miéysca dziesiętnych, drugie dla zastąpienia iednościów, Jakoż czynnik 0,123=123 tysiącznych; wypadłoby więc na mnogość 5535 tysięcznych gdyby drugim czynnikiem była liczba całkowita 45, ale że nim iest liczba sto razy mniéysza, mnogość więc wyrażać będzie setne z tysiącznych albo sto tysiączne, zatém powinno bydź 5 cyfer na dziesiętne.

48. *Uwaga.* Powiększaiąc więc lub zmniéyszaiąc iednego Czynnika razy 2, 3... *i. t. d.* mnogość też powiększa się lub zmniéysza razy 2, 3... i. t. d.

§. 7.

Dzielenie (division) *liczb całkowitych i części dziesiętnych.*

49. Dzielić iest to w ogólności szukać wiele razy iedna i taż sama liczba od drugiéy da się odciągnąć, aby się dowiedzieć wiele razy iedna w drugiéy mieści się.

50. Liczba która ma bydź tym sposobem dzielona nazywa się *Dzielny* (Dividende) ta przez którą dzieli się, *Dzielnikiem*, (diviseur) a ta, co pokazuie wiele razy dzielnik mieści się w dzielnym, ma nazwisko *Wielorazu* (quotient). Tak chcąc się dowiedzieć wiele razy 4 mieści się we 12; naynaturalniéyby było, odéymować 4 od 12 tyle razy, ile tylko można, a że po cztéro-krotném odięciu 4 niezostaie nic; wnosimy: że liczba 4 mieści się w liczbie 12 razy 3. Czego krótszym dochodzimy sposobem, szukaiąc prosto, wiele razy 4 mieści się we 12. Wtym przykładzie 12 iest dzielny, 4 dzielnikiem, a 3 wielorazem.

51. Zwiadomości poprzedzaiących wypada: 1od *Że dzielny zawiéra w sobie tyle razy dzielnika, ile wieloraz zawiéra w sobie iedności*, ponieważ wieloraz przez swoie iedności wyraża liczbę odciągań, które uskutecznić potrzeba dla wyczerpania dzielnego; co się tak krótko wyraża: *iedność ma się do wielorazu iak dzielnik do dzielnego.* Tak w powyższym przykładzie, dzielny 12, zawiéra w sobie dzielnika 4, razy 3, to iest tyle razy, ile 3 ma w sobie iedności.

2re *Że dzielnik wzięty tyle razy, ile iedności znayduie się w wielorazie, powinien bydź równy dzielnemu*, ponieważ iest to wziąśdź dzielnika tyle razy, ile się go odięło, co powinno złożyć dzielnego, albo co na iedno wypada: *mnogość z dzielnika przez wieloraz równa się dzielnemu.* Zatém:

3cie *Dla sprawdzenia czyli wieloraz wypadły iest dokładnym, potrzeba rozmnożyć go przez dzielnika, i mnogość ztąd wypadłą porównać z dzielnym, bo ieżeli mnogość ta iest większą, wieloraz iest zawielki i przeciwnie.* Ztąd zaś wypada:

4te *Że dzielnego uważać można iak mnogość powstaiącą z mnożenia którego dzielnik i wieloraz są Czynnikami.* A tak dzielić dzielnego przez dzielnika, aby otrzymać wieloraz, iest toż samo, co dzielić mnogość przez iéy iednego czynnika dla wynalezienia Czynnika drugiego; ponieważ mnogość ta składa się się z mnożnego dodanego do siebie tyle razy, ile iest iedności w mnożniku. Zatém

5te *Znaiąc mnogość i iednego iey Czynnika dla wynalezienia Czynnika drugiego potrzeba podzielić mnogość przez wiadomego czynnika.*

52. Dzielenie służy także do podzielenia liczby danéy na części równe których liczba albo wartość są dane. *np* Chcąc podzielić 35 na części 5 równych, wypada oczéwiście żeby każda z tych części zawiérała się pięć razy w 35, zatém 35 po-

winno się uważać iak mnogość którey ieden z czynników iest 5, drugim zaś iest liczba szukana. Zatém aby podzielić iaką liczbę na tyle części równych na ile żądamy; potrzeba ią podzielić przez tę liczbę części, a wypadły wieloraz okaże, iak wielka iest każda z tych części.

53. Z takowego zaś opisu wypada:

1od *Że w wszelkiém dzieleniu, dzielnik iest liczbą oderwaną*, ponieważ oznacza na wiele części równych, potrzeba rozłożyć dzielnego.

2re *Że wieloraz ma iedności téyże saméy natury co dzielny*, ponieważ iest iednym z iego części.

Z tego co poprzedziło widzimy: że lubo niezawsze celem iest dzielenia wiedzieć, wiele razy iedna liczba, drugą w sobie mieści, działanie iednak zawsze tak się odbywa iakby do tego celu zmierzało, zaczém w każdym razie uważać go można iako działanie przez które dochodzimy wiele razy dzielnik mieści się w dzielnym.

54. Aby wskazać dzielenie pisze się pospolicie dzielnika pod dzielnym i przedziela się ich liniiką, albo kładzie się między dzielnym i dzielnikiem znak : Tak $\frac{24}{6}$ albo 24 : 6 znaczy 24 *podzielone przez* 6.

55. Gdy dzielny naywięcéy z dwóch, a dzielnik z iedney składaią się cyfer, użycie samo i ta-

blica mnożenia uczy wynaydowania wielorazu.

56. Aby uskutecznić inne działania, dwa roztrząśniemy przypadki, podług tego iak dzielnik ma iednę cyfrę lub więcéy.

I. *Przypadek.* Daymy *np* iż wypada podzielić 9468 przez 4. Zagadnienie to można uważać iak gdyby miało za cel, wynalezienie takiéy liczby, aby mnożąc iéy iedności, dziesiątki, sta *i. t. d.* wypadły na mnogość iedności, dziesiątki sta *i. t. d.* dzielnego 9468; albo też że téy liczby wypada oznaczyć część 4ta. Ułożywszy więc te dwie liczby iak to widzimy na boku, uważam 1^{od} że działanie powinno się zacząć od lewéy ręki dzielnego, to iest od iednościów nayższego porządku, bo ieżeli iaka pozostanie reszta, z takowych iedności, obrócimy ią na iedności mniéyszego gatunku, aby mieć znich część 4ta; czego uskutecznić niemożna, postępuiąc od prawéy ręki do lewéy; ponieważ reszta *np.* z dziesiątków, niemoże złożyć stów, podobnież reszta z stów, niemoże złożyć tysięcy *i. t. d.*

$$
\begin{array}{rl}
\text{Dzielny } 9468 & \left.\begin{array}{l} 4 \text{ dzielnik} \\ \hline 2367 \text{ wieloraz} \end{array}\right. \\
\underline{8} & \\
14 & \\
\underline{12} & \\
26 & \\
\underline{24} & \\
28 & \\
\underline{28} & \\
0. &
\end{array}
$$

2re Aby tém wygodniéy działanie to odprawić, potrzeba nayprzód uważać piérwszą cyfrę dzielnego całkowitego, który tu maiąc w sobie 9 iedności tysiąców, niektóre z nich muszą się znaydować w wielorazie, kładę więc nad piérwszą cyfrą dzielnego kropkę dla oznaczenia piérwszego dzielnego cząstkowego i mówię, czwarta część 9 iest 2, i ieszcze coś, piszę więc 2 w wielorazie, a rozmnożywszy te 2 przez dzielnika 4, mnogość wypadłą 8 odciągam od 9, co daie na resztę 1. Reszta ta iest 1 tysiąc który obrócić potrzeba na sta, aby otrzymać z nich część czwartą, za dodaniem do nich stów dzielnego. Wszystko to robi się od razu spuszczaiąc po prawéy ręce r.szty 1, cyfrę następuiącą 4 z dzielnego, którą znaczę kropką i co wyrażać będzie 14 stów, a odprawuiąc dalsze działanie mówię; czwarta część tych 14 stów, są 3 sta, i ieszcze coś, piszę więc 3 w wielorazie, a mnożąc trzy przez dzielnika 4, mnogość 12 stów podpisuię pod 14 i odciągam, wypada mi na resztę 2 sta, których ieszcze 4éy części niewziąłem. Dla znalezienia téy czwartéy części, zamieniam te 2 sta na 20 dziesiątków i obok nich spuszczam dziesiątki dzielnego co mi daie 26 dziesiątków, których część czwarta iest 6 dziesiątków i ieszcze coś; piszę więc 6 w wielorazie, a mnożąc 6 przez 4 i mnogość 24 odéymuiąc od 26, pozostaie mi 2 dziesiątki, których ieszcze powinieniem wsiąśdź część czwartą. Dla otrzymania tego, zamieniam te 2 dziesiątki na 20 iedności, a dołączaiąc do nich 8 iedności z dzielnego, mówię: czwarta część 28 iedności iest 7 iedności, które piszę w wielorazie; nakoniec mnożąc 7 przez 4 i mnogość 28 odéymuiąc od ostatniego dzielnego cząstkowego, na resztę wypada mi 0, zatém wnoszę: że wielorazem prawdziwym z 9468 przez 4 iest 2367. Oczém przekonać się można na mocy (51. 3^{cie})

Przykład II.

dzielny	2534	7 dzielnik
	21	362 wieloraz
	43	
	42	
	14	
	14	
	0	

Niech będzie 2534 do podzielenia przez 7. Uważam że tu wieloraz niemoże zawiérać w sobie iedności tysiąców, ponieważ potrzebaby ich przynaymniéy mieć 7 w dzielnym, aby z nich znaydował się ieden w wielorazie; a tak do piérwszego dzielnego cząstkowego dobieram drugą iego cyfrę 5; i otrzymamy tym sposobem 25 stów, a zatém wieloraz maiąc się zaczynać od stów niemoże miéć więcéy cyfer nad trzy; dzielę więc 25 przez 7 i wypada na wieloraz 3, a rozmnożywszy 3 przez 7, i mnogość 21 odiąwszy od 25 wypada mi na resztę 4 sta. Dla zamienienia tych stów na dziesiątki i wzięcia z nich czwartéy części, spuszczam obok 4, cyfrę następuiącą dzielnego 3, dzielę te 43 przez 7 i mnogość 42 odéymuię od 45, zostaie mi na resztę 1", co wyraża ieden dziesiątek, nakoniec obok tey reszty spuściwszy ostatnią cyfrę dzielnego mam 14 iedności do podzielenia przez 7, i wypada 2 bez żadnéy reszty, zatém wielorazem z 2534 podzielonych przez 7 iest 362.

Uwaga. Ponieważ każde dzielenie cząstkowe ma tylko wydać iednę cyfrę w wielorazie, wypada więc, że piérwszy dzielny cząstkowy, powinien zawiérać tylę cyfer, ile znayduie się ich w dzielniku albo tylko o iednę cyfrę więcéy. A ztąd maiąc dwie liczby zadane, łatwo iest wiedzieć, zwielu cyfer będzie się składał wieloraz, maiąc ie dzielić przez siebie.

II *Pzrypadek.* Gdy dzielnik składa się z wielu cyfer.

$$\begin{array}{l|l} \text{Dzielny } 6\dot{2}\dot{5}\dot{8} & 21 \text{ dzielnik} \\ \hline \quad 42 & 298 \text{ wieloraz} \\ \hline \quad 205 & \\ \quad 189 & \\ \hline \quad\ \ 168 & \\ \quad\ \ 168 & \\ \hline \quad\ \ \ 0. & \end{array}$$

Daymy iż wypada podzielić 6258 przez 21. Uważam 1od że w tym przypadku wieloraz niemoże zawiérać w sobie tysięcy, ponieważ potrzeba ich przynaymniéy 21 wdzielnym, aby mieć z nich ieden w wielorazie; zatém dołączaiąc tysiące do następuiących stów które zncazę kropką, czyni 62 stów. Szukam nayprzód 21ey ich części, część ta iest stów 2 i ieszcze coś, piszę więc 2 w wielorazie i te będą stami które w sobie zawiérąć może. Mnożąc 21 przez 2 i mnogość 42 odéymuiąc od 62, zostaie 20 stów które zamieniam na dziesiątki, spuszczaiąc obok cyfrę 5 dzielnego, mam 205 dziesiątków do podzielenia przez 21. Aby tém łatwiéy było odprawić działanie, przestaię na podzieleniu dwóch piérwszych cyfer tego dzielnego i na piérwszéy cyfrze dzielnika, mówiąc 20 podzielone przez 2 daie 10, ale uważam razem, że gdybym tu napisał te dwie cyfry w wielorazie, położyłbym dziesiątki dziesiątków to iest sta, i na ówczas cyfra poprzedzaiąca niewyrażałaby dosyć stów, co się przytrafić niemoże podług tego sposobu którегośmy użyli. Niepodobna więc iest, *aby w iakiémkolwiek dzieleniu cząstkowém, wypadło pisać razem dwie cyfry, to iest więcey nad 9 w wielorazie.* Nim tu napiszemy cyfrę 9, probuię ią, mnożąc na stronie 21 przez 9, a że mnogość 189 może bydź odiętą od 205 z resztą 16 mniéyszą od dzielnika; piszę więc 9 w wielorazie. Nakoniec spuściwszy ostatnią cyfrę 8 dzielnego, obok pozostałéy reszty 16 wypada 168, to iest zamieniaią się tym sposobem dziesiątki na iedności. Żeby ie podzielić przez 21, probuię na stronie podzielenia dwóch piérwszych cyfer tego dzielnego cząstkowego przez piérwszą cyfrę dzielnika dzieląc 16 przez 2, co daie 8, liczba ta pomnożona przez 21 daie 168, a 168 odięte od dzielnego cząstkowego niedaiąc żadnéy reszty, wnoszę; że wielorazem dokładnym z 6258 przez 21 iest 298.

57. Wnieśmy ztąd: *Że aby odprawić dzielenie; potrzeba od lewéy ręki dzielnego odłączyć liczbę cyfer potrzebnych do umieszczenia w nich dzielnika, a na ówczas naywiększa liczba razy powtórzonego dzielnika zawarta w téy części, daie piérwszą cyfrę po lewéy ręce wielorazu, poczém mnoży się dzielnik przez tę cyfrę i mnogość odéymuie się od dzielnego cząstkowego. Nakoniec obok reszty pozostałéy, spuszcza się cyfrę następuiącą dzielnego danego i postępuie się daléy w działaniu, póki wszystkie cyfry dzielnego nieźniosą się.*

Przykład

```
Dzielny 11739 } 39 dzielnik
        117   } 301 wieloraz
        ---
          39
          39
          --
          0.
```

Niech będzie zadano, podzielić 11739 przez 39. Uważam 1^{od} że ponieważ dzielny niezawiéra w sobie 39 iedności z porządku tysięcy; wieloraz też niebędzie miał w sobie tysięcy, ale tylko sta; a tak piérwszego dzielnego cząstkowego posuniętego aż do stów znaczę kropką i szukam 39téy części 117 stów. Probuiąc wynalezienia go przy pomocy dwóch piérwszych cyfer dzielnego i piérwszéy cyfry dzielnika, mówię: część trzecia 11 iest 3 co probuię na stronie mnożąc 3 przez 39, a ponieważ mnogość 117 może bydź odiętą od dzielnego cząstkowego piszę 3 w wielorazie.

Ponieważ żadnéy niepozostaie reszty, spuszczam następuiącą cyfrę 3 i kładę w wielorazie 0, dla oznaczenia, że ten niemoże zawiérać w sobie dziesiątków. Nakoniec spuściwszy obok 3 następuiącą cyfrę 9; zostaie mi 39 iedności do podzielenia przez 39, co daie na wieloraz 1, bez żadnéy reszty.

58. *Uwaga*. W przykładach poprzedzaiących pod każdym dzielnym cząstkowym, kładliśmy mnogość

dzielnika przez wieloraz cząstkowy odpowiadaiący; ale takowe działanie skrócić można niepisząc takowéy mnogości i odéymuiąc w miarę iak się mnoży każdą cyfrę dzielnika. Przykład ieden do-

$$\begin{array}{r|l} 1755 & 39 \\ \hline \underline{195} & 45 \end{array}$$

stateczny będzie na obiaśnienie tego. Daymy iż wypada podzielić 1755 przez 39, Napisawszy te liczby sposobem zwyczaynym, postrzegamy 1^{od} iż potrzeba uskutecznić dzielenie na trzech piérwszych cyfrach dzielnego, ponieważ dwie piérwsze wzięte z osobna niezawiéraią w sobie dzielnika; dzieląc więc 175 przez 39 wieloraz iest 4, które piszą się w porządku dziesiątków. mnożąc 39 przez 4, powiem $4.9=36$, a że 36 odiąć niemożna od 5 przypuśćmy, że w téy kolumnie znayduie się 45, a to pożyczaiąc cztérech iedności od kolumny następuiącéy; odéymuiąc 36 od 45 zostaie 9, kładę więc 9, a zatrzymuię 4 dla dodania ich do liczby maiącéy się odiąć od kolumny następuiącéy (podług uwagi pod n^{em} 32.). Przechodząc do téy kolumny powiemy: $4.3=12$, a zatrzymane 4, czyni 16, to 16 odięte od 17 daie na resztę 1, położymy więc 1 w wypadku, i otrzymamy na resztę całkowitą 19. Sposób takowego dzielenia iest równie prosty i krótki, używać go więc będziemy w następuiących działaniach.

59. Jeżeli dzielny i dzielnik kończą się na zera od prawéy ręki, można od obydwóch odiąć ich tyle, ile się ich znayduie mniéy w iednym iak w drugim; poczém odprawić działanie iak zwyczaynie, a wieloraz się niezmieni. Jakoż wieloraz z 80 przez 40 iest taki, iak z 8 przez 4, ponieważ 8 dziesiątków zawiéraią w sobie 4, tyle razy, co 8 iedności zawiéra 4 iedności. Podobnież wieloraz z 84000 przez $400 = \frac{840}{4}$, ponieważ 840 stów zawiéraią w sobie 4 tyle razy, co 840 iedności zawiéra 4 iedności. To rozumowanie do wszelkiego przypadku rozciągnąć można.

60. Aby podzielić iaką liczbę zakończoną przez wiele zer przez 10, dosyć iest odciąć od niéy od prawéy ręki iedno zero; aby podzielić ią przez 100, potrzeba od niéy odciąć dwa zera; aby podzielić przez 20 potrzeba od niéy odciąć iedno zero, i resztę podzielić przez 2 *i. t. d.* Wypada to znaszego układu liczenia.

61. Jlość mogąca się dzielić zupełnie i bez reszty przez iaką liczbę, nazywa się *Wielokrotnością* (multiple) téy liczby, albo iest *dzielną* (divisible) przez tęż liczbę; ponieważ równa się mnogości téy liczby przez wieloraz z dzielenia. Tak 8 iest wielokrotnością ze 4^{ch}, z 2^{ch}; 12 iest wielokrotnością z 6, ze 4, ze 3, z 2;

Przeci-

62. Jlość któréy druga iest wielokrotnością, nazywa się *częścią wielokrotną* (partie aliquote) téy wielokrotności. Tak 4 i 2 są częściami wielokrotnemi z 8. Wielokrotności z 2ch są liczbami *parzystemi* (pairs), liczby zaś niedzielne przez 2 zowią się *nieparzyste* (impairs).

63. Mówimy znowu, że liczba iest *pierwotną* (premier), gdy iest tylko dzielną przez 1, i przez siebie samą *np* 3, 17, 59, 97 i. t. d. których iest bardzo wiele.

64. Ponieważ $35 = 7.5$, wnosimy ztąd: że 35 podzielone przez 7, daie 5 na wieloraz, ale chcąc podzielić 38 przez 7, musimy rozłożyć 38 na dwie części z którychby iedna była 7.5; to iest że $38 = 7.5 + 3$, natenczas 3 nazywa się *resztą* (reste) z dzielenia, które niemoże bydź dokładnie wyrażone w liczbach całkowitych. Reszta ta kładzie się przy wielorazie a pod nią dzielnika. Tak $\frac{38}{7} = 5\frac{3}{7}$.

Biorąc więc za dzielnego i dzielnika dwie liczby iakiekolwiek, powinno się powiedzieć: że *wieloraz pomnożony przez dzielnika, wydaie mnogość do któréy dodawszy resztę, wypada na summę dzielny*. Resztą ta powinna bydź mniéyszą od dzielnika, gdyż inaczéy, iedna z części rozłożonego dzielnego, niebyłaby naywiększą wielokrotnością dzielnika.

65. Ponieważ podwaiaiąc, potraiaiąc *i. t. d.* mnożnego, mnogość staie się podwóyną, potróyną *i t d.* gdy mnożnik nieodmienia się, zatém, *można pomnożyć dzielnego i dzielnika przez iedną liczbę bez odmiany wielorazu, można też podzielić iednego i drugiego przez iedną liczbę.* Tak $\frac{36}{9}$ ma tenże sam wieloraz 4, co $\frac{72}{18}$, co $\frac{12}{3}$.

Przykłady dzielenia na liczbach całych.

$$\begin{array}{r} 72312146 \\ 53601 \\ 33874 \\ 3986 \\ \hline \end{array}\left\}\begin{array}{l} 8369. \\ \hline 8640. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} 38678267 \\ 871216 \\ 721207 \\ \hline \end{array}\left\}\begin{array}{l} 99887. \\ \hline 387 \end{array}\right.$$

Reszta - - - 3986. Reszta - - 21998.

§. 8.

Dzielenie części dziesiętnych.

66. 1wszy *Przypadek.* Gdy dzielny i dzielnik maią równą liczbę cyfer dziesiętnych, odrzuca się kreskę z iednego i z drugiego, poczém uskutecznia się dzielenie iak w liczbach całych.

Przykład. Podzielić 368,64 przez 1,92. Odrzucaiąc kreskę dzieli się 36864 przez 192 (65.). Wieloraz z tego ostatniego dzielenia 192, iest razem wielorazem dzielenia żadanego, iak się o tém przekonać można mnożąc dzielnika 1,92 przez 192 (51. 3cie)

Odrzucenie kreski w niczém niezmienia wielorazu żądanego; ponieważ wieloraz niepowinien mieć cyfer dziesiętnych, gdy dzielny i dzielnik maią ich iednakową liczbę; gdyż inaczéy mnogość z dzielnika pomnożonego przez wieloraz miałaby więcéy cyfer dziesiętnych od dzielnego, co bydź niemoże (47. 51. 3^{cie}). Albo ponieważ w takim przypadku dzielnik i dzielny maią iednakową liczbę cyfer dziesiętnych, odrzucaiąc więc w nich kréskę, obydwóch powiększa się tym sposobem iednakową liczbę razy (19.), co podług (65) nieodmienia wielorazu.

2^{gi} *Przypadek.* Gdy dzielny ma mniéy cyfer dziesiętnych od dzielnika, po prawéy ręce dzielnego przypisuie się iedno lub więcéy zer, aby niemi zapełnić miéysca cyfer dziesiętnych których mu niedostaie. Poczém uskutecznia się działanie podług przypadku 1^{o}.

Przykład. Podzielić 3686,4 przez 1,152. Po prawéy ręce dzielnego dopisuie się 2 zera, poczém odrzuca się kreskę i dzieli się 3686400 przez 1152, wieloraz z tego dzielenia iest 3200, i iest wielorazem żądanym. Pomnożywszy bowiem dzielnika danego 1,152 przez wieloraz 3200, mnogość iest 3686,400 albo 3686,4, odrzucaiąc dwa zera (19.)

3^{ci} *Przypadek.* Jeżeli dzielny ma więcéy cyfer dziesiętnych iak dzielnik, pisze się po prawéy ręce dzielnika iedno lub więcéy zer (19) dla zastąpienia w nim miéysca cyfer dziesiętnych których mu niedostaie, poczém odbywa się działanie podług przypadku 1^{o}.

Przykład. Podzielić 36,864 przez 4, 8. Po prawéy ręce dzielnika dopisuią się dwa zera, poczém odrzuciwszy kreskę dzieli się 36864 przez 4800. Na wieloraz wypada 7 z resztą 3264, zatém wielorazem dokładnym iest $7+\frac{3264}{4800}$.

Chcąc doświadczyć tego wielorazu, gdy go tym końcem mnożymy przez dzielnika danego 4,8 natrafiamy na nową trudność w uskutecznieniu tego na wyrażeniu $\frac{3264}{4800}$. Trudność tę ułatwia następuiąca uwaga i teorya ułamków o któréy niżéy.

67. Gdy wielorazem nieiest liczba całkowita, można go mieć w częściach dziesiętnych niekiedy dokładnie, a zawsze sposobem bardzo przybliżonym. W teoryi ułamków wyłoży się, kiedy wieloraz ten może bydź wyrażony dokładnie, albo tylko przybliżonym sposobem.

Zwróćmy się teraz do podzielenia 36864 przez 4800. Obróćmy resztę 3264 na dziesiętne, co się uskutecznia mnożąc ią przez 10, albo pisząc po prawéy iéy ręce zero, i wypadnie 32640. Podzieliwszy przez 4800, napiszmy wieloraz 6 po prawéy stronie wielorazu 7 iuż wynalezionego, uważaiąc aby go od niego oddzielić kreską, dla oznaczenia że to są dziesiętne. Pomnożywszy 6 przez 4800 i odiąwszy mnogość od dzielnego cząstkowego 32640, wypadłą znow resztę 3840 obróćmy na dziesiętne dziesiętnych albo setne, pisząc zero po prawéy iéy ręce, a wypadnie 38400. Dzielmy daléy tego nowego dzielnego przez 4800 i wieloraz 8 napiszmy obok 6 po prawéy iego ręce, dla oznaczenia że to są dziesiętne dziesiętnych. albo setne. Po odprawiouém mnożeniu i odięciu, niepozostaie iuż żadnéy reszty. A tak wieloraz z 36864 podzielonych przez 4800 iest 7,68, i iest razem wielorazem z 36,864 przez 4,8 (66. n° 3.), o czém przekonać si można, mnożąc ten wieloraz przez 4,8.

Dzielny	36,864	4,8	dzielnik
albo	36 864	4800	
	32640	7,68	wieloraz
	38400		
	00000.		

Po wyłożeniu ułamków zwyczaynych mówić ieszcze będziemy o rachunku części dziesiętnych uważanych pod inną postacią, końcem dokładnieyszego onych poznania.

68. *Proba mnożenia* uskutecznia się dzieląc mnogość przez iednego iéy Czynnika na wieloraz powinien wypaśdź czynnik drugi, ale proba takowa podleglèyszą iest pomyłce iak samo prawidło. Można także iednego z czynników podzielić przez iednego z iego dzielników dokładnych, a drugiego pomnożyć przez niego i uskutecznić działanie. W obydwóch przypadkach otrzymana iednakowa mnogość okazuie dokładność działania.

§. 9.

Prawdy niezawodne (Axiomes)

69. 1od Całość równa iest wszystkim swoim częściom razem wziętym, a większa iest od każdéy swéy części.

2re Dwie ilości równe trzeciéy są i sobie równe. Jeżeli zaś iedna ilość większa iest lub mniéysza od dwóch równych sobie ilości, iest też większa lub mniéysza od drugiéy.

3cie Do ilości równych dodane ilości równe, daią summy równe.

4te Do ilości nierównych, dodaiąc nierówne, ta summa iest większą, gdzie ilość większą dodaie się.

5^{te} Od równych ilości odéymuiąc równe, różnice są równe.

6^{te} Jeżeli od rownych ilości, odéymuiemy nierówne, różnice pozostałe są nierówne, a to tam różnica większa, gdzie się mniéy odciągało.

7^{me} Jeżeli od nierównych ilości odéymuiemy równe, tam iest różnica większa, gdzie wprzód była ilość większa.

8^{me} Mnożąc ilości równe przez równe, wypadaią mnogośći równe. Tak *np* ponieważ $8 = 5 + 3$ mnożąc więc przez 4 będzie $8 \cdot 4 = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 32$.

Otrzymuiemy więc iednakową mnogość czyli wszystkie części, iakiéy ilości, czyli całą ilość przez drugą ilość mnożymy.

9^{te} Mnożąc zaś równe ilości przez nierówne, albo nierówne przez równe, otrzymuiemy mnogości rozmaite, a to tam mnogość większą gdzie czynniki są większe.

10^{te} Dzieląc ilości równe przez równe, wielorazy są równe.

Wszystko więc na iedno wypada, czyli całość czyli każdą iéy część przez iedną liczbę dzielimy.

11^{te} Dzieląc przeciwnie nierówne ilości przez równe, tam wypada wieloraz większy gdzie dzielny iest większy.

Dotąd mówiliśmy o cztérech działaniach zwanych *fundamentalnemi* a to na liczbach całkowitych i częściach dziesiętnych uważanych sposobem oderwanym. Działania na liczbach całych mianowanych w tém tylko różnią się od nich, że wiedzieć częstokroć wypada, wiele iedności mnieyszych, idzie na złożenie naybliższéy iedności większéy. — Dokładniéy to wyiaśni rozwiązanie niektórych zagadnień na liczbach mianowanych.

70. *Przystosowanie* (Application) powyższych działań do rozwiązania niektórych zagadnień. (problême).

I. Armia iakiégo Mocarstwa składa się z 238500 Piechoty, z 65840 Kawaleryi, z 10830 Artylleryi i z rozmaitych innych Korpusów wynoszących 12640 ludzi, iest pytanie iak wielka iest siła zbroyna tego Mocarstwa?

Ponieważ przez siłę zbroyną rozumie się zebranie w iedno całego woyska.

Zatém:	238500	Piechoty,
	65840	Kawaleryi,
	10830	Artyleryi,
	12640	Korpusy oddzielne,
Summa	327810	Ludzi czyni siłę zbroyną.

II. Armia o 280000 ludzi wyruszyła w pole. W piérwszéy Kampanii utraciła ludzi 25648, a na to miéysce dostała 36000 ludzi nowozaciążnych. W drugiéy Kampanii utraciła ludzi 38794, a nowo zaciążnych dostała 40500. W trzeciéy Kampanii utraciła ludzi 8456; a na ich miéysce dostała nowozaciążnych 50000. Jakże mocna iest ta Armia po ukończonéy trzeciéy Kampanii?

Gdyby ta Armia z 280000 ludzi złożona nic nie traciła, ale powiększała się, byłoby:

	280000	ludzi na początku.
i	36000	Nowozaciążnych
i	40500	Nowozaciążnych
i	50000	Nowozaciążnych
Składałaby się więc z	406500	ludzi

Że zaś	w $1^{éy}$	Kampanii traci ludzi	25648
	w $2^{giéy}$	— — —	38794.
	w $3^{ciéy}$	— — —	8456.
		To iest traci razem ludzi	72898.

Zatém nic nie tracąc miałaby	406500 Ludzi
A że z nich traci —	72898 Ludzi
Ma zatém po trzeciéy Kampanii	333602 Ludzi.

Użycie Mnożenia.

71. Znaleśdź wartość wielu rzeczy, znaiąc wartość każdéy?

I. *Np.* Wiele przypadnie za 1234 Koni, gdy każdy kosztuie 75 Talarów?

Za 1234 Koni przypada zapłacić 1234 razy tyle co za iednego, zatém $1234 . 75 = 92550$ Talarów.

II. Wiele ważą 680 Kul, gdy każda waży 24 funtów, wszystkie ważą $24 . 680 = 16320$ funtów.

72. Zamienić iedności pewnégo gatunku na inne iedności mniéysze.

Np. Rok pospolity złożony z 365 obrócić na godziny? Ponieważ dzień pospolity ma godzin 24, zatém dni $365 . 24 = 8760$ godzin.

Podobnież przypuszczaiąc że Rok słoneczny srzedni składa się z 365 dni, 5 godzin z $48'$ i z $48''$ (*). Wypadnie nayprzód $365 . 24 = 8760$ godzin a że 1 godzina ma minut 60 zatém $8760 . 60 = 525600'$ a że $1'$ ma sekund 60 zatém $525600' . 60 = 31536000''$

godzin 5 czynią $5 . 60 = 300' . 60'' =$		18000
$48' = 48 . 60''$ - - -	$=$	2880
$48''$ - - -	$=$	48
Cały więc Rok srzedni słoneczny	$=$	$31536928.''$

(*) *Minuty oznaczaią się przez* $'$, *Sekundy czyli Minuty wtóre przez* $''$; *Minuty trzecie przez* $'''$ i. t. d.

III. Gdy każdy żołnierz bierze na miesiąc żołdu Złł 15, Kompania złożona ze 150 Ludzi, wiele bierze żołdu na 1 Rok?

Rok 1=12 Miesiącom, a że ieden Żołnierz bierze na Miesiąc Złł: 15, zatém na 12 Miesięcy czyli 1 Rok bierze 15.12 =180 Złł; Żołnierzy więc 150 biorą na rok 180 . 150=27000 Złotych.

IV. Stosownie do nałożonéy kontrybucyi wyrachowano, że od 1 Złotego kapitału czyli dochodu wypada 0, zł: 123456 (*) zapłacić; wieleż tym sposobem przypadnie od 10, od 100 i od 1000 Złotych *i. t. d.*

Jeżeli od 1 Złotego przypada 0, zł: 123456, łatwo iest wnieść (19) że od Złł: 10 przypada 1, zł: 23456; od Złł: 100, wypada 12, zł: 3456; od Złł 1000, przypada 123, 456. *i. t. d.*

Użycie Dzielenia.

73. Znaleśdź wartość każdéy rzeczy, wiedząc wartość wszystkich.

Np. Za 2348 Korcy Owsa zapłacono Złotych 18784 po wieleż przypada korzec?

Jeden Korzec kosztuie 2348 razy mniéy, to iest $\frac{18784}{2348}=8$ Złotych.

V. Wypada przewieśdź 6144 ładunków kartaczowych, których w iednéy skrzyni 256 w mieścić można, wieleż takich skrzyń użyć do tego potrzeba?

$$\frac{6144 \text{ Ładunków} -}{256 \text{ Ładunków} -} \quad 24 \text{ Skrzyń.}$$

Zagadnienia w które wchodzi więcéy iak iedno działanie.

VI. Gdy drogi są dobre i powozy bez przeszkody iechać za sobą mogą, na wóz sześciokonny bierze się pospoli-

(*) *Uważamy tu 1 Złoty Polski podzielony na części równych dziesięć, i każdą ztych części znowu na dziesięć części równych* i. t. d.

cie 24 Cetnarów ciężaru. Wieleż potrzeba użyć takich wozów, a wiele koni do przewiezienia 8544 Cetnarów ciężaru?

Wypada tu wynaleśdź liczbę wozów taką, aby na każdy naładowawszy 24 Cetnarów, cały ciężar 8544 Cetnarów zabrały, zatém

$$\frac{8544 \text{ Cetnarów}}{24 \text{ Cetnarów}} = 356$$ wozów, a że do iednego takiego woza, potrzeba 6 Koni, zatém potrzeba $6 . 356 = 2136$ Koni.

VII. Na Mundur potrzeba ſukna Łokci 5, wieleż mundurów zrobić można ze ſztuk ſukna 65, gdy każda sztuka trzyma łokci 36?

Ponieważ w iednéy sztuce iest Łokci 36, zatém w 65 Sztukach iest $36 . 65 = 2340$ Łokci a że na ieden mundur potrzeba Łokci 5, zatém z tych wszystkich łokci otrzymamy

$$\frac{2340 \text{ Łokci}}{5 \text{ Łokci}} = 468$$ Mundurów.

VIII. Z Woyska składaiącego się z 68400 ludzi, część 3cia stoi na granicach, część 4ta po fortecach i przy robotach, część 10ta za granicą, wieleż reszty zostaie na każdą potrzebę?

		Ludzi.
Ponieważ część 3cia iest na granicach, więc	$\frac{68400}{3}$ =	22800
część 4tą po fortecach, więc - -	$\frac{68400}{4}$ =	17100
część 10tą za granicą więc - -	$\frac{68400}{10}$ =	6840
Zatém wykomenderowanych liczba iest		= 46740.

A że całéy Armii iest 68400 ludzi, zatém $68400 - 46740 = 21660$ ludzi pozostaie do każdéy potrzeby.

IX. Ludzi 426 czyszczą zamulony kanał maiący długości Sążni 10224, każdy z nich może wyczyścić na dzień Sążni 2, za co bierze Złł: 3; iakże długo będą robić około tego kanału, i wiele wyczyszczenie to kosztować będzie?

Ponieważ ieden człowiek wyrabia na dzień 2 Sążnie, wszyscy więc wyrobią Sążni $426 . 2 = 852$ Sążni na 1 dzień, zatém około ſążni 10224 robić będą $\frac{10224}{852} = 12$ dni.

Ponieważ każdy bierze na dzień Złł: 3, zatém za 12 dni bierze Złł: 3 . 12=36 Złotych ; gdy ieden bierze za dni 12, Złotych 36, wszyscy wezmą Złotych 36 . 426=15336 Złotych i tyle cała robota kosztować będzie.

Uwaga. Potrzeba początkowym ćwiczyć się w podobnych zagadnieniach, bo gdy nabędą wprawy w prostych kombinacyach w zawiklańszych nie znaydą trudności.

Ćwiczenie się także w rachunek z pamięci wielce iest potrzebném i użyteczném.

ROZDZIAŁ II.

O Liczbach ułamkowych. (Des nombres fractionaires)

74. Dzieląc iedność mianowaną lub oderwaną na części równe i biorąc z nich iednę lub kilka, części te względem iedności nazywaią się *ułamkiem* (fraction). Do wyrażenia zatém ułamka, dwóch liczb potrzeba. Jedna która nazywa się *mianownik* (denominateur), mianuie na wiele równych części iedność iest podzielona, druga która ma nazwisko *licznika* (numerateur) liczy wiele takowych części bierze się. *Np przez pięć siodmych*, albo *pięć siodemek*, rozumiemy że iedność podzielona iest na 7 części czyli ilości równych, i że z nich bierze się 5, co tym sposobem pisze się $\frac{5}{7}$, gdzie 5 iest licznikiem a 7 mianownikiem. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ wymawia

się *pół*, *dwie tróyki*, albo *dwie trzecie*, *trzy ćwierci*, albo *trzy czwórki*, *pięć osemek* albo *pięć osmych*.

75. Gdy w iakim ułamku licznik mnieyszy iest od mianownika, to iest, że się niebiorą wszystkie części całéy iedności zawarte w mianowniku, ułamek takowy, zawsze iest <1 i iest ułamkiem właściwym. Tak *np* $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{1}{3}$ są ułamki właściwe.

76. Gdy licznik ułamka równa się swemu mianownikowi *np* $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ *i. t. d*, w tenczas ponieważ wszystkie części iedności biorą się, każdy takowy ułamek $=1$. Gdy nakoniec licznik większy iest od swego mianownika, wyrażenie takowe nazywa się *liczbą łamaną*, bo więcéy się części bierze iak ich iest w całości *np* $\frac{4}{3}$, $\frac{11}{2}$ ... *i. t. d.* są liczbami łamanemi. A że wyrażenia takowe oznaczaią dzielenie, (54) wiemy więc do czego są równe (64.)

77. Prócz powyższego opisu ułamka, (74.), *Każdy ieszcze ułamek można uważać iako wieloraz wypadaiący z podzielenia licznika przez mianownika.* Bo lubo liczba większa mianownik, w liczbie mnieyszéy liczniku, mieścić się niemoże; części iednak czyli iednostki liczby większéy, mieszczą się niektóre w liczbie mnieyszéy. Gdy więc liczbę mnieyszą przez większą podzielić wy-

pada, wieloraz będzie ułamkiem okazuiącym, wielerazy pewna część liczby większéy mieści się w mniéyszéy. *Np* 4 niemieści się w 3, ale iednostka czyli $\frac{1}{4}$ ze 4ch mieści się w 3 razy trzy, co daie na wieloraz $\frac{3}{4}$. Ztąd mówić się pospolicie zwykło że 4 w 3ch mieści się $\frac{3}{4}$ razy, a zatém $\frac{3}{4}$ iednéy iedności *np* złotego, toż samo znaczy co czwarta część 3ch całych iedności *np* 3ch Złotych.

1od Ztąd widzimy co znaczą owe reszty w dzieleniach w postaci ułamka wyrażone.

2re Że wielorazy można uważać i oznaczać iak ułamki, a ułamki iak wielorazy.

3cie Co się następnie okaże o ułamkach, toż samo służy i wielorazom.

78. Łatwo iest obracać całości na wyrażenia ułamkowe. Tak aby zamienić *np* 7 na piątki, ponieważ iedność ma mieć pięć piątek, zatém iedności 7, będą mieć $7.5 = \frac{35}{5}$. Więc 1od każdą iedność można wyrazić przez ułamek, dzieląc ią na części równe żądane, i biorąc ie wszystkie. Tak aby wyrazić 1 w szostkach, pisze się $\frac{6}{6}$... *i. t. d.*

2re Każdą liczbę całkowitą można wyrazić pod postacią ułamka, podpisuiąc iéy za mianownika 1, bo iedność niezmienia wielorazu. Tak $5 = \frac{5}{1}$.

3cie Aby iaką liczbę mianowaną odniesioną do iedności gatunku większego, przez ułamek wyrazić, potrzeba iéy za mianownika podpisać liczbę wyrażaiącą wiele iedności takiego iak iest ona gatunku, idzie na iedność gatunku większego. Tak 25 groszy miedziannych $= \frac{25}{30}$ Złotego; 3 Złote $= \frac{3}{8}$ Talara.

4te Liczba całkowita z przyłączonym ułamkiem zamienia się na liczbę łamaną, mnożąc liczbę całkowitą przez mianownika, do wypadłéy mnogości dodaiąc licznika ułamka, a pod wypadkiem podpisuiąc mianownika. Tak $11\frac{3}{5} = 11 + \frac{3}{5} = \frac{11.5+3}{5} = \frac{58}{5}$.

79. *Powiększaiąc licznika ułamka, wartość też iego powiększa się*, bo tym sposobem bierze się więcéy części z iedności, gdy wielość ich wyrażona przez mianownika zostaie taż sama. Przeciwnie, *powiększaiąc mianownika bez naruszenia licznika, wartość ułamka zmniéysza się*, bo iedność dzieląc się tym sposobem, na części więcéy, części takowe staią się mniéysze, a liczba ich wskazana przez licznika zostaie nieodmienna. Tak $\frac{5}{7} < \frac{6}{7}$; $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$; $\frac{4}{5} > \frac{4}{9}$ *i. t. d.*

Zmniéyszaiąc licznika ułamka, bez naruszenia iego mianownika, zmniéysza się iego wartość, ponieważ z iedności bierze się mniéy części. Tak $\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$; $\frac{6}{8} > \frac{5}{8}$ *i. t. d.*

I przeciwnie, *nienaruszaiąc licznika, gdy zmniéyszam, iego mianownika, wartość ułamka* *powiększa się*, ponieważ tym sposobem iedność dzieląc się na mniéy części, części te staią się większe, a liczba ich wskązana przez licznika w obydwóch przypadkach zostaie iednakową. Tak $\frac{2}{10}<\frac{2}{5}$; $\frac{5}{12}<\frac{5}{6}$. Łatwo więc rozpoznać w niektórych przypadkach który z dwóch ułamków iest większy.

80. Ztąd wypadaią dwa sposoby mnożenia ułamku przez całkowite; to iest albo mnożąc iego licznika, albo dzieląc iego mianownika. Piérwszego zawsze użyć można, drugiego niezawsze, ale użycie drugiego iest dogodniéysze, bo na ówczas ułamek ma postać prościéyszą, ponieważ iego dwa wyrazy są liczbami mniéyszemi.

81. Są także dwa sposoby dzielenia ułamka przez całkowitą, albo dzieląc iego licznika, albo mnożąc iego mianownika. Sposobu drugiego zawsze użyć można; ieżeli piérwszy użyć się daie przenieść go należy nad drugi (80)

82. Ponieważ mnożyć *np* $\frac{1}{7}$ przez 7, iest to $\frac{1}{7}$ wziąśdź razy 7 co czyni $\frac{7}{7}$ czyli ieden; mnożąc więc $\frac{5}{7}.7$ wypadnie mnogość pięć razy większa to iest $5.1=5$. Ztąd wypada: *Że wszelki ułamek przez swego mianownika pomnożony wydaie na mnogość licznika*, czyli co na iedno wypada: odrzucaiąc mianownika w iakim ułamku iest toż samo co mnożyć go przez tęż samę liczbę. Tak *np* w u-

łamku $\frac{2}{3}$ odrzucaiąc mianownika, iest to zamienić go na 2 całości, czyli rozmnożyć go przez 3.

Powyższe prawdy powiększania i zmnieyszania ułamku można tak krótko wyrażić.

Mnożąc Dzieląc	Licznika	mnoży się dzieli się	ułamek.
Mnożąc Dzieląc	Mianownika	dzieli się mnoży się	ułamek.

83. Rozważaiąc dobrze co poprzedziło, wnieść można:

1° *Że mnożąc liczuika i mianownika ułamka przez iednakową liczbę, ułamek nieodmienia swoiéy wartości;* bo ieżeli z iednéy strony mnożąc licznika, ułamek powiększa się razy 2, 3, *i. t. d*, mnożąc znowu przez tę liczbę iego mianownika, bierzemy go tym sposobem połowę, część trzecią *i. t. d.* słowem dzielemy go nazad przez tęż same liczbę, przez którą był nayprzód mnożony. Tak $\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{3}=\frac{3}{15}$; $\frac{5}{21}=\frac{5}{21}\cdot\frac{2}{2}=\frac{10}{42}$.

2° *Że dzieląc licznika i mianownika przez iednakową liczbę, wartość także ułamka niezmienia się.* Bo ieżeli ziednéy strony dzieląc licznika, ułamek zmnieyszamy razy 2, 3 . . *i. t. d*, dzieląc znowu przez tęż liczbę iego mianownika, bierzemy go tym sposobem, dwa, trzy *i. t. d.* razy,

zy,

zy, słowem mnożymy go przez tęż liczbę, przez którą był nayprzód dzielony. Tak $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ *i. t. d.*

To ostatnie działanie często iest użyteczne do przywiedzenia ułamków do prościeyszego wyrażenia bez odmiany onych wartości, co się nazywa *skróceniem ułamka.*

§. 10.

Przywiedzenie ułamków do nayprostszego wyrażenia.

84. Znayduie się nieskończenie wiele ułamków maiących iednakową wartość, a wyrażonych w liczbach rozmaitych. A że łatwiéy iest mieć wyobrażenie o wielkości ułamka, gdy ten wyrażony iest w liczbach mniéyszych; wypada więc, *przywieśdź go do nayprostszego wyrażenia* czyli go *skrócić.*

Tym końcem możnaby probować podzielenia iego wyrazów przez liczby 2, 3, 4 i. t d. Tak dzieląc oba wyrazy ułamka $\frac{210}{315}$ przez 5 wypada $\frac{42}{63}$, daléy dzieląc przez 3 wypada $\frac{14}{21}$, nakoniec dzieląc przez 7 wypada $\frac{2}{3}=\frac{210}{315}$. Ale postępowanie takie iest tylko dochodzeniem niepewném, i gdyby ułamek zadany niemógł bydź skróconym, niemoglibyśmy tego rozpoznać aż po długich i przykrych probach. Lepiéy więc iest szukać natychmiast *naywiększego wspólnego dzielnika* dziełącego spełna licznika i mianownika ułamku, lub się przekonać, że ułamek dany iuż bydź skróconym niemoże. Prosta uwaga poda nam sposób wynalezienia takowego dzielnika. A nayprzód ieżeli wyraz mnieyszy danego ułamka iest dokładnym dzielnikiem większego, oczewista że on iest naywiększym wspólnym dzielnikiem obydwóch.

Tak w ułamku $\frac{13}{65}$, ponieważ $65=5.13$ wypada więc $\frac{13}{65}=\frac{1}{5}$. Téy więc nayprzód próby doświadczyć należy. Jeżeli to piérwsze dzielenie zostawia resztę, ponieważ liczba większa składa się z wielokrotności liczby mnieyszéy, więcey pozostałéy reszty, dzielnik więc wspólny dwom liczbom powinien i tę resztę podzielić, inaczéy dzieliłby tylko liczbę mnieyszą. Tak w ułamku $\frac{28}{60}$ iest: $60=2.28+4$. Jeżeli dzielnik wspólny niedzieli 4, może podzielić 2.28 które są piérwszą częścią 60, ale niepodzieli części drugiéy, zatém dzielnik szukany maiąc bydź wspólnym dzielnikiem liczby mnieyszéy i reszty piérwszéy, powinien bydź także dzielnikiem reszty z ich podzielenia, a następnie i wszystkich reszt wypadłych z podzielenia następnego reszty piérwszéy przez drugą, drugiéy przez trzecią . . . . *i. t. d.* A zatém dzielenia takowe tak daleko posuwać należy, póki niedóydziemy do dzielenia bez reszty, a na ówczas biorąc ostatniego dzielnika, który iest także ostatnią resztą, za dzielnika wspólnego, przekonamy się łatwo, że iest dzielnikiem wszystkich innych, i dzielnik ten wspólny, będzie dzielnikiem nay większym między temi wszystkiemi, które mogą podzielić dwie liczby zadane, ponieważ sam siebie dzielić powinien.

Ztąd wypada: że *aby wynaleśdź naywiększego dzielnika dwóch liczb zadanych, dzieli się większą przez mnieyszą. Poczém resztę z dzielenia tego wypadłą, bierze się za dzielnika, a dzielnika pierwszego za dzielnego, i tak postępuie się daléy w działaniu, póki się niewynaydzie dzielnika dokładnego, który będzie nayiększym dzielnikiem szukanym.*

W takowém działaniu pisze się pospolicie każdą resztę po prawéy stronie dzielnika, aby natychmiast zaymowała mieysce właściwe wdzieleniu następuiącém. Widzimy to w następuiącym przykładzie dochodząc wspólnego dzielnika ułamka $\frac{40103}{101549}$:

101549	40103	21343	18760	2583	679	546	133	14	7
21343	2	1	1	7	3	1	4	9	2
	18760.	2583.	679.	546.	133.	14.	7.	0.	

Naywiększym wspólnym dzielnikiem tego ułamka iest 7; podzieliwszy więc przez niego obydwa wyrazy ułamka, na wie lorazy wypadnie 5729;

i 14507, zatém $40103 = 5729 \cdot 7$, a $101549 = 14507 \cdot 7$. Ułamek więc zadany można wyrazić przez $\frac{5729 \cdot 7}{14507 \cdot 7}$. zkąd ruguiąc wspólnego czynnika 7 z licznika i mianownika, wypadnie $\frac{5729}{14507}$ ułamek skrócony z ułamka zadanego.

85. Można także otrzymać dwa wyrazy ułamka skróconego, używaiąc do tego wielorazów sposobem następuiącym. Niech *np* będzie ułamek $\frac{799}{2961}$. Wynalazłszy dzielnika wspólnego 47 przy pomocy następuiącego działania:

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2
...	....	....	....	....	.....
63	17.	12.	5.	2.	1.

napiszmy iedność pod ostatnim wielorazem 2, albo raczéy pod dzielnikiem 47; połóżmy ostatni wieloraz pod poprzedzaiącym 2, pomnóżmy ie przez siebie i dodaymy do mnogości 1, otrzymamy 5; napisawszy tę liczbę pod dzielnikiem 235, pomnóżmy ią przez wieloraz 2 i dodaymy do téy mnogości 2 będące po prawéy stronie, summę ztąd wypadłą 12 napiszmy pod 564; a postępuiąc tym sposobem daléy w działaniu, wypadnie 17 pod 799, a 63 pod 2961. Zastanowiwszy się nieco, poznaiemy łatwo, że liczby te 63, 17, 12, 5, 2, 1 wyrażaią wiele razy liczby 2961, 799, 564, 235, 94, 47, zawiéraią w sobie dzielnika wspólnego 47.

Ponieważ w wynáydowaniu naywiększego wspólnego dzielnika, reszty z dzieleń koléynych wypadłe zmniéyszaią się koléyno, powinniśmy więc tym sposobem dóyśdź przynáymniéy do iedności, która iest dzielnikiem liczb wszelkich. Tak 21, i 50 maią za náywiększégo wspólnégo dzielnika 1, zatém dwa wyrazy ułamka $\frac{21}{50}$ będąc pierwotne między sobą, ułamek takowy niemoże bydź skróconym. Przykro iest, że takowego przypadku rozpoznać póty niemożna, póki, nieużyiemy całego powyższego działania.

86. Ponieważ naywiększy wspólny dzielnik dwóch liczb, powinien dzielić każdą resztę, ieżeli więc w ciągu działania, otrzymamy na resztę liczbę piérwotną, która niedzieli dokładnie reszty poprzedzaiącéy, niepożyteczna iest na ówczas ciągnąć daléy rachunku, który zakończyć się musi na iedności.

Dla wprawy dóydźmy że ułamek $\frac{202904}{293215}$. nieda się skrócić; że $\frac{840}{1848}=\frac{5}{11}$; że $\frac{3661}{11506}=\frac{7}{22}$; że $\frac{14349}{38264}=\frac{3}{8}$.

87. Aby mieć naywiększego wspólnego dzielnika między trzema liczbami *np* 150, 90 i 40, szuka się go náyprzód między 150 i 90, który iest 30; potém dzielnika wspólnego między 30 i 40 który iest 10, zatém 10 iest dzielnikiem żądanym liczb 150, 90 i 40, a zatém liczby te niemaią innych dzielników prócz 1, 2, 5 i 10. Toż

samo postępowanie okaże nam wszystkich dzielników wspólnych tylu liczbom ilu zechcemy.

88. Nie zawsze iednak potrzebne iest szukanie dzielnika wspólnego do dwóch wyrazów ułamka zadanego. Częstokroć dostateczne są do tego przepisy następuiące.

1od Wszelka liczba iest dzielną przez 2, ieżeli ostatnia iéy cyfra iest parzysta albo 0, ponieważ wszelką liczbę można uważać iaką złożoną z dziesiątków i iednościów, a że dziesiątki składaią liczbę parzystą, ieżeli więc iedności są parzystemi, cała taka liczba iest parzystą. Tak *np* $72=70+2$, obydwie części téy liczby są parzystemi, zatém i cała iest parzystą, więc iest dzielną przez 2.

2re Wszelka liczba iest dzielną przez 4 ieżeli iéy ostatnie dwie cyfry są wielokrotnością ze 4ch bo rozkładaiąc ią na dwie części, iednę złożoną ze stów, które są wszystkie dzielne przez 4, ponieważ $100=4.25$; ieżeli więc i druga część złożona z dziesiątków i iednościów iest dzielną przez 4, cała taka liczba iest dzielną przez 4, czyli iest wielokrotnością 4ch. Tak $1328=1300+28$, iest wielokrotnością 4ch

3cie Podobnież liczba iest dzielną przez 8; ieżeli trzy ostatnie iéy cyfry składaią wielokrotność z 8; przez 16 ieżeli cztéry ostatnie iéy cyfry są wielokrotnością z 16, i. t. d. Bo wszystkie tysiące są dzielne przez 8.

4^te^ Wszelka liczba iest dzielną przez 5 ieżeli iéy ostatnią cyfrą iest 5 albo 0; ponieważ dziesiątki są wielokrotnościami z 5, dosyć więc iest żeby iedności było 5 lub zero, a cała liczba iest dzielną przez 5.

5^te^ Aby liczba była dzielną przez 9, potrzeba żeby ſumma iéy cyfer była wielokrotnością 9. Jakoż rozebrawszy tę liczbę na iéy iedności, dziesiątki, sta ..... *i. t. d.* Widzimy: że $10=9+1$; $20=2.9+2$; $30=3.9+3$ .... *i. t. d.*

Ztąd wypada: *że wszelka liczba dziesiątków podzielonych przez 9 zostawia resztę równą cyfrze znaczącéy* dziesiątki.

Podobnież $100=90+10=99+1$.

$$200=2.90+20=2.90+2.9+2.$$

$$300=3.90+30=3.90+3.9+3.$$

To iest *że wszelka liczba złożona ze stów*, podzielona przez 9, *wydaie resztę równo iéy cyfrze znaczącéy Sta.* Tęż samę własność znaydziemy w tysiącach, w dziesiątkach tysięcy i. t. d.

Zatém summa cyfer, przez które liczba iaka iest wyrażona bez względu na ich wartość miéyscową iest taka, iak ſumma reszt któreby wypadły dzieląc oddzielnie iéy rozmaite części, iako to: *np* dziesiątki tysiąców, tysiące, sta, dziesiątki i iedności przez 9; więc ieżeli ſumma ta iest samo wielokrotnością z 9; powiedzieć na ówczas można że niewydaie reszty, i że tym sposobem liczba ta iest dzielną przez 9. *np* 3456 iest wielokrotnością z 9, ponieważ $3+4+5+6=18=2.9$. Przeciwnie 347 nie iest wielokrotnością z 9, ponieważ $3+4+7=14=9+5$, zatém reszta z dzielenia przez 9 wypadnie 5.

Ale ieżeli takowa summa cyfer czyni tylko wielokrotność z 3, liczba też ta iest tylko dzielna przez 3, ponieważ 9 będąc wielokrotnością z 3, liczba takowa składa się na ówczas z wielokrotności 9 lub 3, więcéy reszty, wielokrotnéy z 3; zatém téż całkowitoś iest wielokrotnością z 3. Tak 27642 iest wielokrotnością z 3, ponieważ $2+7+6+4+2=21=7.3$.

6te Liczba iest dzielna przez 6, ieżeli iest zarazem dzielna przez 2 i przez 3; iest dzielną przez 12, ieżeli iest dzielną przez 4 i przez 3, *i. t. d.* Poznaiemy ztąd, że czynniki powinny bydź pierwotnemi między sobą.

7^{e} Jeżeli liczba kończy się na 25, 50, 75; lub 00, liczba ta iest dzielną przez 25, bo wszystkie sta, są wielokrotnościami 25, a że i 25, 50 i 75 są wielokrotnością z 25; zatém cała liczba przez 25 podzielić się daie.

Te i tym podobne prawdy iaśniéy i dokładniéy okazać się daią, używaiąc Algebry.

§. 11.

Przywiedzenie ułamków do wspólnego Mianownika.

89. Z własności powiększania i zmniéyszania się wartości ułamka (79.) wypada: że gdy ułamki maią iednakowych mianowników, ten z nich iest większy, który ma większego licznika, przeciwnie, gdy maią iednakowych liczników, ten z nich większy który ma mianownika mniéyszego. Aby więc rozpoznać, który zdwóch ułamków iest większy, dosyć iest przywieśdź ich do iednégo mianownika a to następuiącym sposobem. *Mnoży się oba wyrazy piérwszego przez mianownika drugiego, i nawzaiem oba wyrazy drugiego przez mianownika piérwszego co nieodmienia wartości ułamka* (83.) a tym sposobem każdy z nich ma za mianownika mnogość z mianowników danych. Tak *np* $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{7}$ przywodząc do iednego mianownika będzie: $\frac{3}{4} \times \frac{7}{7}$ i $\frac{5}{7} \times \frac{4}{4}$ albo $\frac{21}{28}$ i $\frac{20}{28}$. Które są równe ułamkom danym $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{7}$ a że $\frac{21}{28} > \frac{20}{28}$ więc też $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$.

Podobneż rozumowanie okaże, że maiąc więcéy iak dwa ułamki wszystkie przywiedziemy do iednego mianownika, mnożąc dwa wyrazy każdego prz z mnogość z innych mianowników, mianownik więc w spólny bedzie mnogością ze wszystkich mianowników danych. I tak maiąc przywieśdź do iednego mianownika $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$ mnożą się dwa wyrazy piérwszego $\frac{2}{3}$ przez 7.4 albo 28 które są mnogością z innych mianowników; dwa wyrazy drugiego $\frac{5}{7}$ przez 3.4 albo 12; nakoniec dwa wyrazy trzeciego $\frac{3}{4}$ przez 3.7 albo 21 i wypadnie $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{63}{84}$. Zkąd się wnosi: że $\frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$. Tym sposobem można sądzić o wielkości względnéy wielu ułamków przywodząc ie wszystkie do iednego mianownika.

90. *Uwaga.* Niech będą dwa ułamki iakiekolwiek, $\frac{7}{11}$ i $\frac{35}{55}$, po przywiedzeniu ich do iednakowego mianownika, wnieść można, czy są sobie równe lub nie, podług tego iak mnogości na krzyż 7.55 i 11.35 służące za liczników nowym ułamkom są równe lub nie. Maiąc więc dwie mnogości równe $35.11 = 7.55$ można z nich złożyć dwa ułamki właściwe równe, to iest $\frac{35}{55} = \frac{7}{11}$.

91. Stosownie do tego weźmy sobie dwa ułamki równe *np* $\frac{7}{11}$ i $\frac{35}{55}$ zkąd wypadną mnogości $35.11 = 7.55$. Z iednéy i zdrugiéy strony tego zrównania odéymiymy 7.11 a otrzymamy $35.11 - 7.11 = 7.55 - 7.11$. czyli: $(35-7)11 = (55-11)7$ (*). Z tych dwóch mnogości równych składa-

(*) *Często używać będziemy takowego wyrażenia które iak tu oznacza. że odiąwszy 7 od 35,resztę wypada rozmnożyc przez 11, podobnież po drugiey stronie.*

iąc ułamki, będzie $\frac{35-7}{55-11}-\frac{7}{11}$ czyli $\frac{28}{44}-\frac{7}{11}$; a że ułamek ten $\frac{28}{44}$ iest różnicą między licznikami i mianownikami ułamków równych $\frac{7}{11}$ i $\frac{35}{55}$. Zatém *gdy dwa ułamki są równe; ułamek złożony z różnicy (albo z summy) ich liczników i mianowników iest im ieszcze równy.*

92. Przypuśćmy teraz że $\frac{7}{11}$ iest ułamkiem którego skrócić niemożna (irreductible), to iest: że żaden ułamek iemu równy niemoże bydź wyrażony w liczbach mnieyszych. Daymy że ułamek $\frac{30}{47}$ iest równy ułamkowi $\frac{7}{11}$. Czyniąc podobne poprzedzaiącemu działanie, to iest biorąc różnicę między ich licznikami i mianownikami, różnica ta $\frac{23}{36}$ powinna bydź równa ułamkowi $\frac{7}{11}$ to iest $\frac{7}{11}-\frac{23}{36}$. Biorąc znowu różnicę liczników i mianowników w tych równych ułamkach byłoby $\frac{16}{25}-\frac{7}{11}$ *i. t. d.* Posuwaiąc takowy rachunek aż do uczynienia różnicy z liczników <7 a z mianowników <11; po takowych działaniach wypada tu ułamek $\frac{2}{3}$ maiący mieć też samę wartość co ułamek $\frac{7}{11}$ i wyrażony iest w liczbach mnieyszych, co się sprzeciwia założeniu. Prócz tego te następne odciągania, powinny przywieśdź ułamek $\frac{30}{47}$, żeby miał 7 i 11 za dwa swoie wyrazy, zatém byłyby one wielokrotnościami z 7 i 11. Zkąd wypada: *ze zdwóch ułamków równych, ieżeli ieden skrócić się nieda, dwa wyrazy dru-*

giego są wielokrotnościami wyrazów piérwszego.

Wnieśmy ztąd 1^{od} *Że ieżeli mnogość iaka* np 35.11 *iest dzielną przez iaką liczbę piérwotną* np 7, *ieden przynaymniéy z iéy czynników iest dzielny przez tęż liczbę.* Tak ieżeli $\frac{35.11}{7}=55$, pomnożywszy obydwie strony tego zrównania przez 7 będzie $\frac{35.11.7}{7}=55.7$ czyli $35.11=55.7$, zatém (90) $\frac{35}{55}=\frac{7}{11}$, a ponieważ $\frac{7}{11}$ iest ułamkiem niedaiącym się skrócić, (92.) zatém 35 i 55 są w szczególności wielokrotnościami z 7 i 11.

2re *Że mnogość zdwóch liczb piérwotnych, niemoże miéć innych dzielników nad też liczby, iedność i samą mnogość.*

3^{cie} Jeżeli *np 7 i 11 niemaią żadnego wspólnego dzielnika, to iest że są pomiędzy sobą piérwotnemi, dwie też potęgi iakiekolwiek z 7 i 11* np 7^3 *i* 11^4, *są także piérwotnemi między sobą;* bo gdyby miały dzielnika wspólnego, byłby on razem dzielnikiem 7 i 11.

93. Zdarzaią się przypadki w których do wielu ułamków można znaleśdź wspólnego mianownika sposobem krótszym od powyższego (89). Maiąc *np* ułamki $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, widzimy, że ułamki $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{6}$ mogą bydź przywiedzione do iednego mianownika, mnożąc wyrazy piérwszego przez 2, to iest przez liczbę okazuiącą wiele razy iego mia-

nownik 3 zawiéra się w mianowniku 6 i tym sposobem otrzymamy $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{6}$; Podobnież postąpić sobie można i z ułamkami $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{8}$ mnożąc oba wyrazy piérwszego przez 2, tak że cztéry ułamki dane zamienią się na $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$. Uważmy tu że liczby 6 i 8 składaiące nowych mianowników są nawzaiem równe 2.3 i 2.4; można więc opuścić wspólnego ich czynnika 2 i pomnożyć tylko dwa piérwsze ułamki przez 4, a wyrazy dwóch drugich przez 3. Zkąd wypadną ułamki $\frac{16}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{21}{24}$.

Jakoż ażeby mianownik wspólny składał się z iednakowych czynników, mianownik takowy niepowinien zawiérać w sobie więcéy nad ieden raz każdego z czynników z których się składaią mianowniki szczególne; zatém składaiąc go, niepotrzeba powtarzać czynnika który iuż wszedł w niego. Maiąc *np* ułamki $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$ przywieśdź do iednego mianownika, i złożywszy mnogość 24 z dwóch piérwszych mianowników, mnogości téy niemnożę przez mianowników 3, 8, 12, ponieważ czynniki te wchodzą iuż w mnogość 24. Będzie więc wspólnym mianownikiem 24. Aby w takowym przypadku otrzymać liczników, oczéwista iest, że potrzeba podzielić mianownika wspólnego przez każdego mianownika szczególnego i wieloraz pomnożyć przez licznika. Tym sposobem wypadną ułamki $\frac{20}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{21}{24}$, $\frac{22}{24}$ na miéysce piérwszych, to iest piérwszy powstał z podzielenia 24 przez mianownika 6 i zrozmnożenia wielorazu 4 przez licznika 5, tak iż ułamek $\frac{20}{24}$ iest toż samo co $\frac{5}{6}$ którego oba wyrazy pomnożyły się przez 4, Toż samo postępowanie służy dla innych.

94. Gdyby potrzeba było ułamek iaki zamienić na inny, którego mianownik byłby dany, natenczas mnoży się licznika przez mianownika danego, a mnogość dzieli się przez dawnego mianownika: *np.* chcąc zamienić $\frac{86}{125}$ na inny ułamek któregoby mianownik$=1000$; nowym licznikiem będzie $\frac{86.1000}{125}=\frac{688}{=1000}=\frac{86}{=125}$: Podobież chcąc zamienić $\frac{5}{6}$ na inny ułamek którego mianownikiem byłoby 32, nowym licznikiem będzie: $\frac{5.32}{6}=26\frac{2}{3}$; zatém $\frac{5}{6}=\frac{26\frac{2}{3}.}{32.}$. (Co to ostatnie wyrażenie znaczy, zobaczymy w dzieleniu ułamków.)

95. Gdyby wypadło przeciwnie ułamek dany zamienić na inny, któregoby licznik był dany, na ówczas, mnoży się mianownika ułamku przez danego licznika, i mnogość wypadłą dzieli się przez licznika dawnego, na wieloraz wypadnie nowy mianownik. Chcąc *np* $\frac{3}{4}$ zamienić na inny ułamek, któregoby licznikiem było 12. Mianownikiem będzie $\frac{12.4}{3}=16$ i wypadnie $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$:

Że tym sposobem wartość ułamka niezmienia się, okazuie się z (83).

§. 12.

Dodawanie i Odciąganie ułamków.

96. Bardzo iest łatwo dodawać i odciągać ułamki gdy maią iadnakowych mianowników, ponieważ naówczas dodaią się lub odciągaią ich liczniki iako wskazówki biorących się części iednościów. Tak *np* $\frac{7}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$; Podobnież w odciąganiu *np* $\frac{7}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4}{12}$ albo $\frac{1}{3}$; Podobnież: $\frac{7}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}-\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$.

97. Jeżeli zaś ułamki maiące się dodać lub odiąć, niemaią iednakowych mianowników, potrzeba ie wprzód przywieśdź do tego stanu sposobem (89 i 93.) i dopiéro liczników dodawać lub odéymować. Tak *np* $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{21}{28}+\frac{20}{28}=\frac{41}{28}=1+\frac{13}{28}$.

Podobnież $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{3}{4}$ przywodzą się do: $\frac{56}{84}+\frac{60}{84}+\frac{63}{84}=2+\frac{11}{84}$.

Przykład $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}$. przywiódłszy nayprzód tak ułamki maiące się dodać, iakoteż ułamki maiące się odciągnąć, wszystkie do iednego mianownika sposobem podanym (93.) to iest wziąwszy za wspólnego mianownika 120 wypadnie; $\frac{60+80+72+84+56+100-45-30-50}{120}=\frac{327}{120}=2+\frac{29}{40}$.

98. Gdy ułamki zadane połączone są z całkowitemi, działanie nayprzód obydwa się na ułamkach. Tak aby dodać $3+\frac{1}{2}$ do $5+\frac{3}{4}$, dodaie się $\frac{1}{2}$ do $\frac{3}{4}$ i wypada $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$, kładzie się więc $\frac{1}{4}$ w wypadku, a całość dodaie się do 3 i 5, i na całą summę wypadnie $9+\frac{1}{4}$.

Podobnież $3+\frac{1}{2}-(1+\frac{1}{4})$; znaydziemy resztę odéymuiąc nayprzód $\frac{1}{4}$ od $\frac{1}{2}$, potém 1 od 3, to iest będzie $2+\frac{1}{4}$.

Niech będzie iescze $3+\frac{1}{2}-(1+\frac{3}{4})$; ponieważ ułamku $\frac{3}{4}$ od $\frac{1}{2}$ czyli $\frac{2}{4}$ odiąć niemożna, do ułamku więc $\frac{2}{4}$ dodaie się 1 i wypadnie $\frac{6}{4}-\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$; postępuiąc do całkowitych, wypadnie na resztę z całkowitek 1, ponieważ od 3 pożyczyło się iuż iedności, zatém na całą resztę wypada $1+\frac{3}{4}$.

Niektóre przykłady dla wprawy:

$$\frac{2}{27}+\frac{5}{27}+\frac{19}{27}+\frac{17}{27}=\frac{2+5+19+17}{27}=\frac{43}{27}=1+\frac{16}{27};\quad \frac{13}{25}-\frac{8}{25}=\frac{13-8}{25}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5};$$

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+\frac{7}{11}+\frac{1}{2}=\frac{198+220+210+165}{330}=2+\frac{133}{330};\quad \frac{2}{3}-\frac{7}{11}=\frac{22-21}{33}=\frac{1}{33};$$

$$3\tfrac{2}{5}+7\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}=3+7+\tfrac{2}{5}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}=10+\frac{12+15+20}{30}=10+\frac{47}{30}=11+\frac{17}{30};$$

§. 13.

Mnożenie Ułamków.

99. Wmnożeniu ułamków żadnéy nieznaydziem trudności, gdy każdy ułamek uważać będziemy iako wieloraz. Zachodzą zaś takowe przypadki.

1$^{\text{od}}$ Albo przypada mnożyć ułamek przez liczbę całkowitą lub przeciwne.

2$^{\text{re}}$ Albo ułamek przez ułamek,

3$^{\text{cie}}$ Albo nakoniec liczbę całkowitą z ułamkiem, przez liczbę całkowitą z ułamkiem lub bez ułamka.

Co do 1$^{\text{go}}$ Aby pomnożyć *np* $\frac{3}{4}$ przez 5, ponieważ to wypada na dodanie ułamka $\frac{3}{4}$ razy 5, zatém potrzeba tylko pomnóżyć licznika 3 przez 5 i wypadnie $\frac{3}{4}\cdot 5=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$.

A że

A że to do wszelkich podobnych przypadków przystosować można, zatém: *aby rozmnożyć ułamek przez liczbę całkowitą, potrzeba tylko licznika iego przez tęż liczbę całkowitą pomnożyć.*

Uwaga. Można też w tym przypadku podzielić mianownika przez całkowitą, ieżeli mianownik ten iest wielokrotnością téy całkowitéy. Tak ponieważ $\frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{3\cdot 2}{2\cdot 2}$; można więc w téy oznaczonéy mnogości, czynnika wspólnego 2 z licznika i mianownika wyrugować, co wypada na rozdzielenie licznika i mianownika przez iednakową liczbę (83 n° 2), i wypadek $\frac{3}{2}$ będzie żądaną mnogością, to iest takim, iaki wypada dzieląc od razu mianownika 4 ułamku zadanego przez 2.

Podobnież $\frac{11}{18}\cdot 36 = \frac{11}{1}\cdot 2 = 22$ (gdzie 18 i 36 dzieli się przez 18).

100. Aby rozmnożyć liczbę całkowitą przez ułamek; ponieważ w takim przypadku mnożnik będąc ułamkiem, mniéyszy iest od iedności, opisu więc mnożenia na liczby całkowite (39. n° 1.) stosować tu niemożna, gdyż w tym razie nieidzie o powtórzenie mnożnego razy tyle, ile iedności ma mnożnik. Tak *np* maiąc mnożyć 6 przez $\frac{1}{5}$, iest to brać liczby 6 część piątą, ponieważ mnożnik $\frac{1}{5}$ będąc piątą częścią iedności, oznacza, że mnogość powinna bydź piątą częścią mnożnego.

6.

Podobnież mnożyć przez $\frac{4}{5}$ iest to brać zmnożnego część taką, któraby była iego cztéremi piątemi częściami, albo któraby się równała cztéry razy piątéy części tego mnożnego. Powiemy więc; że *iakiżkolwiek iest mnożny, mnożenie przez ułamek ma za cel, wzięcie ztego mnożnego części takiéy, iaka iest oznaczona przez ułamek.*

Można to ieszcze i tak obiaśnić: Maiąc *np* rozmnożyć 25 przez $\frac{5}{6}$, uważam mnożnika $\frac{5}{6}$ iako ilość sześć razy mniéyszą od 5, zatém złożywszy mnogość z 25.5, mnogość ta będzie 6 razy za wielka, ponieważ 5 iest 6 razy większe iak $\frac{5}{6}$; zatém żeby mieć prawdziwą mnogość, potrzeba ten piérwszy wypadek podzielić przez 6 i wypadnie $\frac{25.5}{6} = \frac{125}{6} = 20 + \frac{5}{6}$. *To iest aby rozmnożyć, liczbę całkowitą przez ułamek potrzeba ią mnożyć przez licznika; a mnogość podzielić przez mianownika.*

Uwaga. Widzimy tu oraz, że takowe działanie, składa się z dwóch innych, to iest z dzielenia i mnożenia, w których dzielnik i mnożnik są liczbami całkowitemi. Z resztą ponieważ w iakimkolwiek porządku mnożą się przez siebie czynniki, mnogość wypada zawsze iednostayna (41.), zatém mnożenie ułamka przez całkowitą, lub całkowitéy przez ułamek, wydać musi iednakową mnogość.

Co do 2^{go} Aby pomnożyć *np* ułamek $\frac{2}{3}$ przez $\frac{4}{5}$, uważaiąc zawsze mnożnika iako wieloraz z 4 podzielonych przez 5, albo iak ilość 5 razy mniéyszą od 4, pomnożymy nayprzód przez 4, i wypadnie $\frac{2.4}{3}=\frac{8}{3}$, wypadek który iest 5 razy za wielki, ale zrobimy go 5 razy mniéyszym, dzieląc go przez 5, to iest mnożąc iego mianownika 3 przez 5, i wypadnie na prawdziwą mnogość $\frac{8}{3.5}=\frac{8}{15}$. A że rozumowanie to, przystosować można do wszelkich podobnych przypadków, wniesiemy więc: *że aby pomnożyć ułamek przez ułamek, potrzeba mnożyć licznika z licznikiem, mianownika z mianownikiem, a mnogości te będą dwoma wyrazami ułamka wynikłego z dwóch czynników ułamkowych.*

Co do 3^{go} Jeżeli ieden z czynników albo obydwa składaią się z całkowitek i ułamków, wiadomo nam, (78 n° 4) że całkowite z ułamkami wyrazić można w iednym ułamku, co uskuteczniwszy, postępuie się w działaniu sposobem powyższym. Tak *np* $3\frac{2}{9}.7\frac{1}{3}=\frac{29}{9}.\frac{22}{3}=\frac{638}{27}=23\frac{17}{27}$; Podobnież $45\frac{3}{4}.17\frac{2}{3}=\frac{183}{4}.\frac{53}{3}=\frac{9699}{12}=808\frac{1}{4}$.

101. Częstokroć iednak mnożenie takowe odbywa się wygodniéy i krócéy mnożąc przez całkowitą i ułamek iednego czynnika, liczbę całkowitą i ułamek czynnika drugiego. Tak aby rozmnożyć $3\frac{1}{4}.8$; mnożę nayprzód 3 przez 8 i wypada 24, da-

6*

léy $\frac{1}{4}$ przez 8 i wypada 2, zatém $3\frac{1}{4}\cdot 8 = 24 + 2 = 26$. Podobnież postępuie się w przykładzie na boku położonym, gdzie złożywszy mnogość z całościów $45\cdot 17$, i z ułamków $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$, mnoży się ieszcze każdą całkowitę przez ułamek będący przy drugim czynniku.

$$\begin{array}{rr}
 & 45\frac{3}{4} \\
 & 17\frac{2}{3} \\
\hline
 & 315 \\
 & 45 \\
\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \ldots\ldots & \frac{1}{2} \\
45\cdot\frac{2}{3} = \ldots & 30 \\
17\cdot\frac{3}{4} = \ldots & 12\frac{3}{4} \\
\hline
\text{Mnogość} = & 808\frac{1}{4}.
\end{array}$$

Ztego co poprzedziło o mnożeniu ułamków wnosimy:

1od Że gdy czynniki są mniéysze od iedności, mnogość z nich iest mniéysza od każdego czynnika.

2re Że można przemienić porządek w czynnikach tak iak w liczbach całkowitych (78 n° 4) *np* $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7} = \frac{15}{28}$.

3cie Ile razy licznik mnożnika, równa się mianownikowi mnożnego, lub mianownik mnożnika, równa się licznikowi mnożnego, na ówczas wspólne te wyrazy pominąć można w mnożeniu *np* $\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7} = \frac{5}{7}$; $\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{8}$;

102. Mnogość wypadła z dwóch lub więcéy ułamków nazywa się ieszcze *ułamkiem ułamków*

(fraction de fractions). Tak aby mieć $\frac{2}{3}$ z $\frac{3}{4}$, z $\frac{5}{6}$ z $\frac{4}{5}$ iedności, potrzeba wszystkie trzy ostatnie ułamki rozmnożyć, przez $\frac{2}{3}$ i wypadnie: $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=$ $\frac{3.5.4.2}{4.6.5.3}=\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$ ułamek ułamków.

Uwaga. Gdy wypadnie wiele ułamków mnożyć koleyno przez siebie, a liczniki niektórych i mianowniki są sobie równe, lub też przez iednakową liczbę podzielić się daią; w piérwszym przypadku opuścić ie można w mnożeniu, a w drugim podzielić. Tak w powyższym przykładzie $\frac{3.5.4.2}{4.6.5.3}$, opuściwszy liczników i mianowników 3, 5, 4, wypadnie mnogość żądana $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

§. 14.

Dzielenie Ułamków.

103. W dzieleniu ułamków też same zachodzą przypadki co i w mnożeniu ułamków.

1od Aby rozdzielić ułamek przez liczbę całkowitą *np* $\frac{5}{6}$ przez 8, iest to oczéwiście ułamka tego $\frac{5}{6}$ wziąść tylko część osmą, czyli iest to go zmnieyszyć razy 8, zatém (79) wypada tylko iego mianownika przez 8 rozmnożyć i wypadnie $\frac{5}{6}:8=\frac{5}{6.8}=\frac{5}{48}$. Jakoż dzielić $\frac{5}{6}$ przez 8 iest to szukać na wieloraz ułamka, któryby wzięty 8 razy wyrównywał dzielnemu $\frac{5}{6}$, a więc wieloraz ten iest tylko osmą częścią dzielnego $\frac{5}{6}$; to iest bydź musi $\frac{5}{6.8}=\frac{5}{48}$.

Uwaga. Można także w takim przypadku podzielić licznika ułamka przez całkowitą, ieżeli licznik ten iest wielokrotnością téy całkowitéy. Tak $\frac{15}{11} : 5 = \frac{3 \cdot 5}{11} : 5 = \frac{3 \cdot 5}{11 \cdot 5}$, a znosząc w tém wyrażeniu wspólnego czynnika 5 z licznika i mianownika wypadnie na wieloraz $\frac{3}{11}$.

2re Aby rozdzielić liczbę całkowitą przez ułamek *np* 25 przez $\frac{4}{7}$, uważam nayprzód, że gdy dzielny zostaie iednakowy, wieloraz staie się tém mnieyszy, im dzielnik iest większy; uważaiąc więc $\frac{4}{7}$ iako ilość 7 razy mnieyszą od 4; dzielę 25 przez 4 i otrzymuię $\frac{25}{4}$ to iest wieloraz 7 razy za mały, ponieważ użyłem dzielnika 7 razy większego; zatém wypadek ten potrzeba pomnożyć przez 7, i wypadnie $\frac{25 \cdot 7}{4} = \frac{175}{4} = 43\frac{3}{4}$ na wieloraz żądany.

3cie Jeżeli i dzielny iest także ułamkiem, to iest gdy wypada podzielić ułamek przez ułamek *np* $\frac{5}{13}$ przez $\frac{3}{4}$, natenczas dzielę nayprzód $\frac{5}{13}$ przez 3, mnożąc przez 3 mianownika 13, i wypada $\frac{5}{13 \cdot 3} = \frac{5}{39}$ na pierwszy wypadek 4 razy za mały, iako wynikły z dzielnika 4 razy większego; zatém aby otrzymać wypadek prawdziwy, mnożę licznika 5 przez 4 i otrzymuię $\frac{5 \cdot 4}{39} = \frac{20}{39}$.

4te Jeżeli dzielny albo dzielnik albo też obydwa składaią się z całościów i ułamków, chcąc ich przez siebie dzielić, potrzeba każdego z nich wyrazić w iednym ułamku, poczém maiąc dzielić ułamek przez ułamek postępuie się w działaniu sposobem okazanym w n^{e} 3^{cim}.

Tak szukaiąc wielorazu z $3\frac{1}{5}$ podzielonych przez $\frac{2}{7}$ będzie nayprzód $3+\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$ które maią bydź podzielone przez $\frac{2}{7}$ wypadnie więc $\frac{16}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{112}{10}=11\frac{2}{10}$;

Podobnież $\frac{7}{13}$ podzielone przez $2\frac{1}{3}=\frac{7}{13}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{13}$; a $4\frac{1}{5}$ podzielone przez $2\frac{1}{7}=\frac{21}{5}\cdot\frac{7}{15}=\frac{147}{75}=\frac{49}{25}=1\frac{24}{25}$.

104. Z powyższego zatém rozumowania o dzieleniu ułamków wypada: *że potrzeba pomnożyć licznika ułamku wyrażaiącego dzielnego przez mianownika ułamku oznaczaiącego dzielnika, a mianownika ułamku dzielnego rozmnożyć przez licznika ułamku dzielnika*, albo co na iedno wypada: *rozmnożyć ułamek dzielnego przez ułamek dzielnika, odmieniwszy w nim wprzódy porządek wyrazów.* Tak dzielić $\frac{5}{6}$ przez $\frac{3}{4}$ iest to $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{18}=1\frac{2}{18}=1\frac{1}{9}$.

Uwaga. Uważmy tu razem że aby wziądź $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ *i. t. d.* iakiéy ilości, iest to pomnożyć ią przez $\frac{1}{4}$, przez $\frac{2}{3}$ *i. t. d*, zamiast dzielenia iéy przez $\frac{1}{4}$, przez $\frac{2}{3}$ *i. t. d.* to iest dochodzenia wiele razy $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ *i. t. d.* zawiéra się wdzielnym, co iest wcale co inszego. Tak $\frac{2}{3}$ ze 100 czynią $66\frac{2}{3}$; kiedy 100 podzielone przez $\frac{2}{3}$ czyni $100\cdot\frac{3}{2}=150$.

Uważmy tu razem że iedność podzielona przez ułamek wyraża toż samo co tenże ułamek którego wyrazy są odwrócone. Tak $\frac{1}{\frac{2}{5}}=1\,.\,\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$.

§. 14.

Ułamki dziesiętne (Fractions decimales)

105. Ztego co się powiedziało o liczeniu części dziesiętnych, (15.) iakoteż w powszechności o ułamkach, (74) okazuie się, że części dziesiętne są ułamkami iedności główney; że na piérwszém mieyscu po kresce cyfrze wyrażaiącey dziesiętne, domyśla się za mianownika 10, cyfrze setnych odpowiada mianownik 100; cyfrze tysiącznych mianownik 1000.. i. t. d. Słowem, że części dziesiętne możnaby wyrażać przez ułamki z mianownikami: 10, 100, 1000... i. t. d; że zaś mianowników takowych łatwo iest się domyślać; zgodzono się więc, aby ich napisać. Tak 3,406 znaczy toż samo co 3 całe $\frac{4}{10}$ i $\frac{6}{1000}$. Widzimy ztąd, że cyfry położone po prawéy stronie kréski, składaią licznika ułamka, którego mianownik domyślny iest zawsze iednością maiącą po sobie zer tyle, ile znayduie się cyfer dziesiętnych po kresce. Można więc części dziesiętne nazwać inaczéy *ułamkami dziesiętnemi* (fractions decimales).

106. Wymawiaiąc wartość iakiéy liczby, mianownik domyślny czyta się iak gdyby znaydował

się w saméy rzeczy. Tak *np* $3,125=3+\frac{125}{1000}=3+\frac{100}{1000}+\frac{20}{1000}+\frac{5}{1000}=3+\frac{1}{10}+\frac{20}{100}+\frac{5}{1000}$. W liczbie téy znayduie się 3 cyfer dziesiętnych, albo tylko 3 dziesiętnych, mianownik iest więc 1000, i czytać się powinno: *trzy iedności, sto dwadzieścia pięć tysiącznych;* albo *trzy iedności, iedna dziesiętna, dwie setne i pięć tysiącznych.* Piérwszy sposób wymawiania iest powszechniéyszy iako prostszy.

Ztąd łatwo iest wywieśdź dwa prawidła, podług których można napisać liczbę iaką dziesiętną zadaną, lub przeczytać liczbę wszelką dziesiętną napisaną.

1ᵒᵈ Aby *np* napisać: *trzy tysiące cztérdzieści pięć stotysięcznych*; widzę: że mianownik domyślny iest tu 100000, potrzeba więc 5 cyfer dziesiętnych, a że w liczbie zadanéy 3045 znayduie się ich tylko 4, potrzeba więc położyć zero przedniemi dla dopełnienia liczby dziesiętnych; poczém na miéyscu iedności które się nie znayduią, kładzie się zero, a przy niém po prawéy stronie kreskę, i wypadnie: 0,03045. Ztąd wypada następuiące prawidło: *liczba zadana dziesiętna pisze się iak liczba zwyczayna, a ieżeli w niéy niemasz tyle cyfer ile potrzeba dziesiętnych; liczbę ich należy dopełnić zerami położonemi od ręki lewéy, po czém napisać liczbę* *całkowitą z kréską lub zero zastępuiące iéy miéysce a po niém kréskę.*

2re Aby wymówić iaką liczbę dziesiętną, dosyć iest przypomniéć sobie: że liczba cyfer dziesiętnych iest taka, iak liczba zer po iedności następuiących w mianowniku odrzuconym. *Czytać więc należy liczbę dziesiętną iak liczbę całkowitą, a na koncu tego wymówienia wyrazić mianownika odrzuconego.* Tak w liczbie 3,0042017, widzę że mianownik należący do niéy iest 10000000; czytać się więc powinna: 3 *iedności, cztérdzieści dwa tysiące siedémnaście, dziesięciomilionowych.*

Przykłady dla wprawy:

Cztéry iedności, trzydzieści osiem tysiącznych pisze się: 4,038; — *Dwa tysiące cztéry, stu tysiącznych*, pisze się: 0,02004;

16,0063 czyta się: 16 *iedności i sześćdziesiąt trzy dziesięciotysiącznych;* 100,04011 czyta się: 100 *iedności, cztéry tysiące iedénaście stu tysiącznych.*

Uwaga. Pilnie uważać należy mianownika domyślnego, aby się niepomylić. Gdyby *np* wypadło napisać: *Sto cztéry setne*, ponieważ to wyrażenie wychodzi na ułamek $\frac{104}{100}$, zatém wypada napisać: 1,04. Toż się rozumie o innych podobnych wyrażeniach.

107. Zastanawiaiąc się daléy nad ułamkami dziesiętnemi, poznać można, że wszelka liczba dziesiętna, niezmiéni swoiéy wartości, ieżeli na końcu iéy dopiszemy iedno lub wiele zer, ponieważ tym sposobem mnoży się licznika i mianownika ułamku przez iednakową liczbę (83). Tak *np* na końcu liczby 0,47 dopisawszy dwa zera, wypada 0,4700 i liczba ta zdaie się bydź pomnożoną przez 100, ale uważaiąc że gdy z mianownika piérwszego domyślnego którym było 100; powstał mianownik 1000, widzę zarazem że: dwa wyrazy ułamka będąc tym sposobem pomnożone przez iednakową liczbę; ułamek ten wartości swéy niezmienił. Jakoż $\frac{4700}{10000}=\frac{47}{100}$. Dla podobnéyże przyczyny można odrzucić zera będące na końcu ułamka dziesiętnego, bo to wychodzi na podzie/le ąnie dwóch wyrazów ułamka przez iednakową liczbę. Ztąd wypada że $0{,}47=0{,}4700$, ponieważ $\frac{47}{100}=\frac{4700}{10000}$.

108. To założywszy gdyby wypadło dodać wiele liczb dziesiętnych, możemy przypuścić że maią iednakowego mianownika, daiąc im iednakową liczbę cyfer dziesiętnych przez dołączenie do nich zer na końcu (107.); na ówczas dodawanie liczb dziesiętnych, wypada na dodawanie ułamków z iednakowym mianownikiem, które iakieśmy widzieli (96) uskutecznia się przez do-

danie liczników. Tak $0{,}3+4{,}52+17{,}0025=0{,}3000+4{,}5200+17{,}0025=21{,}8225$.

109. Maiąc odciągać liczby dziesiętne od liczb dziesiętnych, można podobnież dać im iednakową liczbę dziesiętnych, ieżeli iéy niemaią; poczém odbywa się odciąganie podług reguły podanéy na odciąganie ułamków z iednakowemi mianownikami. Tak $4{,}17-0{,}037=4{,}170-0{,}037=4{,}133$.

110. Aby otrzymać mnogość z dwóch liczb dziesiętnych, mnoży się ich przez siebie iak liczby całkowite, a w mnogości wypadłéy oddziela się kréską od prawéy ręki tyle cyfer na dziesiętne, ile ich było razem w obydwóch czynnikach. Jakoż mianownik domyślny iest zawsze iednością maiącą po sobie zer tyle, ile iest dziesiętnych w obydwóch czynnikach. *np* $10{,}21\cdot 2{,}003=\frac{1021}{100}\cdot\frac{2003}{1000}=\frac{2045063}{100000}=20{,}45063$; $0{,}012\cdot 0{,}0004=\frac{12}{1000}\cdot\frac{4}{10000}=\frac{48}{10000000}=0{,}0000048$.

111. Aby podzielić liczbę dziesiętną przez liczbę dziesiętną, uważmy: że chcąc dzielić ułamek przez drugi z tymże samym mianownikiem, dosyć iest podzielić licznika piérwszego przez licznika drugiego. Zatém maiąc daną w dzielnym i w dzielniku iednakową liczbę dziesiętnych, działanie odbywa się sposobem zwyczaynym iak na liczbach całkowitych. Jakoż dzielić 275 przez 2,5,

iest to dzielić 275,0 przez 2,5 albo $\frac{2750}{10}$ przez $\frac{25}{10}$ albo nakoniec $\frac{2750}{25}=110$.

Niechby było ieszcze 12,52 podzielić przez 4,3; wypada to na podzielenie 12,52 przez 4,30 albo $\frac{1252}{100}$ przez $\frac{430}{100}$ albo nakoniec $\frac{1252}{430}=2+\frac{392}{430}$ $=2,9116$. (67.)

Można dzielić liczbę dziesiętną przez 10, przez 100, 1000 *i. t. d.* posuwaiąc kreskę o iedno, dwa, trzy mieysca i. t. d. ku lewey ręce. Jakoż w liczbie *np* dziesiętney $34,7=\frac{347}{10}$, położywszy kreskę między 4 i 3, wypadnie $3,47=\frac{347}{100}$ to iest liczba dziesięć razy mnieysza. W liczbie $224,3=\frac{2243}{10}$ położywszy kreskę między pierwszą i drugą cyfrą od lewey ręki, wypadnie $2,243=\frac{2243}{1000}$ liczba sto razy mnieysza.

Można podobnież pomnożyć liczbę dziesiętną przez 10, przez 100, przez 1000 *i. t. d.* posuwaiąc kreskę o iedno, o dwa, o trzy mieysca *i. t. d.* ku prawey ręce. Jakoż *np* w liczbie $5,27=\frac{527}{100}$ położywszy kreskę między drugą i trzecią cyfrą, wypadnie $52,7=\frac{527}{10}$ to iest liczba dziesięć razy większa.

112. Zamienienie ułamka zwyczaynego na dziesiętny (67) podaie okazyą do niektórych uwag ważnieyszych. Niech będzie *np* $\frac{5}{7}=0,714285714....$ Widzimy tu, że w takowey zamianie po pier-

wszych 6 cyfrach, okazuią się znowu też same cyfry i w tymże samym porządku i to bydź musi. Jakoż w wielorazie powinno wypaśdź tyle cyfer rozmaitych, ile dzielenie wydaie reszt różnych, a że dzielnik 7 niemoże zostawić na resztę cyfrę sobie równą; niemoże więc bydź ich w wielorazie więcéy nad 6 rozmaitych, poczém wpadamy znowu na iedną ztych cyfer która iuż wypadła, a na ówczas ponieważ okoliczności dzielenia powstaią też same, wypadki też z niego muszą bydź takiemiż. Takowy powrót cyfer iednakowych w wielorazie nazywaio *powrotem peryodycznym* (retour periodique). Niema on miéysca, gdy dzielenie odprawić się może dokładnie, ale łatwo iest widzieć, że ponieważ w ułamku podług przypuszczenia licznik nie iest dzielnym przez mianownika; dzielenie też niemoże bydź ukończone inaczéy, chyba, że iedna z liczb: 10, 100, 1000.... i. t. d. przez którą mnożymy licznika ułamku, będzie wielokrotnością mianownika iego, potrzeba więc żeby mianownik ten niemiał innych czynników nad te, które składaią 10, 100, 1000.... a że takowemi czynnikami są: 2 i 5; ztąd wypada, że same tylko ułamki których mianowniki są złożone z takowych czynników, daią się dokładnie obrócić na dziesiętne. Tak $\frac{1}{2}=0,5$; $\frac{3}{4}=0,75$. $\frac{1}{25}=0,04$; $\frac{7}{8}=0,875$.

113. I na wzaiem można obrócić ułamki dziesiętne na ułamki zwyczayne, kładąc pod piérwszémi ich mianowników i takowe przywodząc do wyrażenia prostszego. Tak *np* $0{,}875 = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$, dzieląc obydwa wyrazy przez 125; $0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$. Co się tycze ułamków peryodycznych ich obrócenie na ułamki zwyczayne zależy od uwag następuiących. :

Ponieważ $\frac{1}{9} = 0{,}11111$; $\frac{1}{99} = 0{,}010101\ldots$; $\frac{1}{999} = 0{,}001001001\ldots$. Podług więc tego, maiąc iaki ułamek peryodyczny, w którym peryod ma tylko iednę cyfrę *np* $0{,}333\ldots$; widzimy, że ułamek ten wyrównywa trzy razy wziętemu ułamkowi $0{,}1111\ldots = \frac{1}{9}$, ułamek więc zadany $0{,}333\ldots$ wyrównywa $\frac{3}{9}$ albo $\frac{1}{3}$. Jeżeli peryod składa się z dwóch cyfer iak *np* $0{,}363636\ldots$ widzimy, że ten ułamek wyrównywa 36 razy wziętemu ułamkowi $0{,}010101\ldots = \frac{1}{99}$, a zatém znaczy $\frac{36}{99} = \frac{4}{11}$ *i. t. d.*

114. Ztąd możemy wnieść następuiącą regułę: *Ułamek dziesiętny peryodyczny równa się ułamkowi zwyczaynemu, którego licznik iest sam peryod, a mianownik składa się z tylu* 9^{tek}, *ile iest cyfer w peryodzie.* Tak $0{,}324324\ldots = \frac{324}{999} = \frac{12}{37}$; $0{,}00270027 = \frac{27}{9999} = \frac{3}{1111}$.

Jeżeli peryod niezaczyna się od piérwszéy cyfry dziesiętnéy, przypadek ten przywiedziémy do poprzedzaiącego, za przestawieniem kreski. Maiąc *np* 4,278181.... Położywszy kreskę po 7, otrzymamy: 427,818181.... wyrażenie sto razy większe od pierwszego, i które będąc zamienione na ułamek zwyczayny, znaczy: $427+\frac{81}{99}$, ale ostatnią tę wartość potrzeba podzielić przez 100 zkąd wypada:

$\frac{427}{100}+\frac{81}{9900}=\frac{427 \cdot 99+81}{9900}=\frac{42354}{9900}=\frac{2353}{550}$, więc 4,278181.... $=\frac{2353}{550}$; o czem przekonać się można łatwo obróciwszy ułamek ten na dziesiętne. Znaydziemy podobnież że 0,08333....$=\frac{1}{12}$, a 0,231212....$=\frac{763}{3300}$.

W zamianie na ułamki dziesiętne ułamków zwyczaynych, których licznikiem iest iedność, a mianownikiem liczba iaka pierwotna; następuiąca uwaga może posłużyć do skrócenia działani . Gdy liczba cyfer peryodu ma bydź parzystą; poznaiemy to z reszty wypadłéy z ostatniéy cyfry połowy pierwszéy peryodu, gdyż na ówczas, reszta takowa równa się mianownikowi zmniéyszonemu iednością, cyfry zaś drugiéy połowy peryodu wypadną, biorąc koléyno dopełnienie cyfer pierwszéy połowy do 9. Tak w zamianie $\frac{1}{7}$ na dziesiętne, reszta trzecia iest 6 i wypadnie $\frac{1}{7}=0,142857$, gdzie widzimy, że trzy ostatnie cyfry 8, 5, 7 są $9-1, 9-4; 9-2$. Taż sama uwaga służy i w ułamkach $\frac{1}{11}=0,09$; $\frac{1}{13}=$ 0,076923, *i. t. d.*

Dotąd

Dotąd iednak niemożna było wynaleśdź sposobu do rozpoznania przed samém działaniem czyli liczba cyfer peryodu iest parzystą lub nie, lub mniéyszą od mianownika zmniéyszonego iednością.

115. Uważmy że omyłka któréy się dopuszczamy zaniedbuiąc ostatniéy cyfry ułamka dziesiętnego, tém iest mniéyszéy wagi, im ułamek takowy ma więcéy cyfer. Tak biorąc 0,4 zamiast 0,43 zachodzi niedokładność o $\frac{3}{100}$; biorąc 0,04 zamiast 0,043 bierzemy tylko o $\frac{3}{1000}$ za mało. Zdarza się częstokroć, że przystaiemy na dwóch lub trzech cyfrach dziesiętnych, a zaniedbuiemy reszty, ponieważ tym sposobem powstaią pomyłki mniéy znaczne. Rzadko zaś w rachunkach zwyczaynych potrzebuiemy więcéy nad 6 cyfer dziesiętnych.

Jeżeli wypadkiem z iakiego działania iest *np* 4,837123 można wziąśdź 4, 8, albo 4, 83, albo 4,837.... Naówczas wartość w piérwszym przypadku iest przybliżona mniéy iak o $\frac{1}{10}$, w drugim mniéy iak o $\frac{1}{100}$; w trzecim mniéy iak o $\frac{1}{1000}$, dla zmniéyszenia iednak omyłki tyle ile można w takowym razie, *kładzie się w ostatniéy cyfrze zatrzymanéy o iednę iedność więcéy*, *gdy następuiąca przechodzi 4*. Tak w powyższym przykładzie zamiast 4,83 powinno się wziąśdź 4,84 a to dla cyfry 7, która iest na miéyscu tysiącznych.

§. 15.

O Przybliżonéy Mnogości i zbliżonym wielorazie zwłaszcza w ułamkach dziesiętnych.

116. Częstokroć żądamy mieć tylko wypadek z rachunku zbliżony, gdy nie idzie o zupełną ścisłość; Szukaymy więc sposobów do tego. W mnożeniu możemy zacząć działanie od cyfry naywyższego porządku mnożnika; potrzeba tylko na ówczas każdą cząstkową mnogość posunąć o iedno miéysce ku prawéy ręce, iak to widzimy na boku w przykładzie: Postępowanie to nieróżni się od postępowania (38 II) tylko w tém: Że rząd piérwszy napisany iest ostatnim, rząd drugi przed ostatnim *i. t, d.* Tym sposobem otrzymuiemy tę korzyść, że natychmiast poznaiemy te cyfry, które maią naywiększą wartość, a na których częstokroć przestaiemy.

$$
\begin{array}{l}
934528 \\
\underline{34277} \\
2803584 \\
3738112 \\
1869056 \\
6541696 \\
\underline{6541696} \\
32032816256
\end{array}
$$

Gdyby teraz wypadło szukać *np* mnogości z 9,34528 . 3,44776 z pięciu tylko cyframi dziesiętnemi, Mnożę:

1od Wszystkie cyfry mnożnego przez piérwszą cyfrę mnożnika zaczynaiąc od lewéy ręki.

2re Mnożę ie daléy przez drugą cyfrę mnożnika od lewéy ręki, ale pisząc tę mnogość, niezważam tylko na dziesiątki które może wydać rozmnożenie piérwszéy cyfry od prawéy ręki mnożnego. Dodaię ie do mnogości drugiéy iego cyfry, i następnie piszę ztąd ſummę pod piérwszą cyfrą mnogości iuż napisanéy.

3cie Używam trzeciéy cyfry mnożnika dla rozmnożenia cyfer mnożnego, zaczynaiąc od iego cyfry drugiéy, a zatrzymuiąc ztego mnożenia same dziesiątki, dla dodania ich do iedności mnogości następuiącéy, i ſummę ztąd wypadłą piszę pod dwoma mnogościami iuż napisanemi.

4te W miarę iak postępuię ku prawéy ręce mnożnika, zaczynam mnożenie od cyfry coraz dalszéy ku lewéy ręce mnożnego leżący, a zatrzymuiąc dziesiątki z téy piérwszéy mnogości, dodaię ie do iednościów z następuiącéy, póki niedóydę do ostatniéy cyfry mnożnika.

5te Wszystkie te mnogości dodawszy razem, w ich summie oddzielę tyle dziesiętnych, ile ich było w mnożnym, gdym go mnożył przez iedności mnożnika, albo co iest ogólniéy, uważam iake miéysce trzymaią w dwóch czynnikach, tak dziesiętna przez którą mnożę za każdym razem, iakoteż ta, od któréy w tym razie zaczyna się mnożenie. Summa z takowych dwóch rzędów, wskaże zawsze liczbę dziesiętnych którą miéć powinna mnogość powszechna.

Trzy przykłady następuiące dostateczniéy nas obeznaią z takowym sposobem;

....	.....	....
9,34528	2,302585	0,234567
3,44776	0,984977	0,003431
......	......	....
28 03584	20 723265	703701
3 73811	1 842068	93827
37381	92103	7037
6541	20723	234
654	1611	0,000804799
56	161	
32,22027	2,2679931	

W piérwszym przykładzie, mnożę nayprzód przez 3 i piszę mnogość: mnożę daléy przez 4, to iest $4.8=32$, z téy mnogości zatrzymuię tylko 3 dziesiątki dla dodania ich do mnogości następuiącéy, a 2 iedności zaniedbuię. Mnożę daléy $4.2=8$, a zatrzymane 3 czynią 11, piszę 1 pod 4; i postępuię daléy w działaniu zwyczaynie.

Mnożę daléy przez 4 następuiącą cyfrę mnożnika, zaczynaiąc od cyfry 2 mnożnego, to iest: $4.2=8$, zatrzymuię 1 ponieważ 8 bardziéy się zbliża do 10 iak do 1; daléy mnożę $4.5=20$ a 1 zatrzymane czyni 21, piszę 1 wtymże samym rzędzie co piérwsze cyfry innych mnogościów *i. t. d.*

Po odbyciu tych wszystkich mnożeń, dodaię mnogości, i wniéy oddzielam pięć cyfer na dziesiętne, ponieważ znaydowało się ich pięć w mnożnym, gdym mnożył przez 3 iedności mnożnika; albo ponieważ mnożąc przez piérwszą dziesiętną mnożnika, zacząłem od czwartéy cyfry mnożnego.

Odprawuiąc sposobem zwyczaynym takowe mnożenie wypadłoby na mnogość 32,2202825728, to iest że mnogość wynaleziona sposobem przybliżonym nieróżni się od mnogości dokładnéy iako o $\frac{1}{100000}$ iedności.

Aby rozpoznać do iakich dziesiętnych mnożnego i mnożnika odwołuiemy się za każdym razem, nieodrzeczy iest znaczyć ie kropką w miarę iak ich używamy, iak to widać w przykładach.

Ponieważ łatwo iest naznaczyć przyczynę takowego postępowania, dochodzenie więc tych małych szczegółów pomiiamy. Uważmy tylko że w mnogości trzeciego przykładu potrzeba dodać trzy zera, ponieważ 3 znayduiąc się na trzeciém miéyscu dziesiętnych mnożnika, a 7 na szostêm mnożnego, mnogość powinną miéć 9 dziesiętnych cyfer.

117. Podobnież w dzieleniu, gdy takowe sposobem zwyczaynym dla wielkiéy liczby dziesiętnych, byłoby bardzo długie, można użyć następuiącego skrócenia.

Daymy iż żądamy doświadczyć mnogości 32,22027 wynalezionéy wyżêy, i dzielemy ią przez 9,34528. Ułożywszy dwie te liczby iak w dzieleniu zwyczaynêm, uważam wiele razy 9 zawiéra się w 32, i 3 piszę w wielorazie. Mnożę daléy całego dzielnika przez 3; a odiąwszy tę mnogość od dzielnego, pozostaie na resztę 418443.

```
            .....
32,22027 } 9,34528
28 03584 } 3,44776
--------
 4 18443
 3 73811
--------
   44632
   37381
--------
    7251
    6541
--------
     710
     654
--------
      56
      56
--------
       0
```

Dzielę tę resztę przez 9 sposobem zwyczaynym i 4 kładę na wieloraz, a mnożąc dzielnika przez 4 mówię 4.8 czynią 32 z których opuściwszy 2 iedności, zatrzymuię tylko 3 dziesiątki które dodaię do następuiącéy mnogości iak to widzieliśmy w mnożeniu, ponieważ tu iest działanie odwrotne.

Odéymuiąc od 418443 to co wypada z tego mnożenia, dzielę resztę 44632 przez tegoż samego dzielnika, i kładę w wielorazie drugie 4, przez które mnożę dzielnika zaczynaiąc od 2, mówiąc 4.2 = 8; zatrzymuię 1, które dodaię do 20 = 5.4 i t d, póki nie znaydę 3,44776.

§. 16.

Niektóre własności ułamków ciągłych (Fractions Continues.)

118. Częstokroć rachunek prowadzi nas do ułamka o dwu wyrazach, które niemaiąc wspól-

nego czynnika, bydź skróconemi niemogą. W takowym razie aby mieć wartość iego przynaymniey zbliżoną wyrażoną w mnieyszych wyrazach; dzielimy licznika i mianownika iego przez licznika, zkąd wypadnie ułamek maiący za licznika 1, a za mianownika liczbę całkowitą z przyłączonym ułamkiem. Postępuiąc z tym przyłączonym ułamkiem podobnież; ułamek dany zamieni się tym sposobem w szereg ułamków, które nazywaią się *ułamkiem ciągłym*, to iest, takim którego licznikiem iest 1, a mianownikiem liczba całkowita z przyłączonym ułamkiem, którego znowu licznikiem iest 1, a mianownikiem liczba całkowita i ułamek *i. t. d.* Tak *np* aby $\frac{361}{1495}$ zamienić na ułamek ciągły. Dzielę 361 i 1495 przez licznika 361 i wypadnie $\frac{1}{4+\frac{51}{361}}$; dzielę znowu licznika i mianownika przyłączonego ułamka, przez licznika i wypadnie $\frac{1}{7+\frac{4}{51}}$; dzielę znowu 4 i 51 przez 4 i wypadnie $\frac{1}{12+\frac{3}{4}}$; dzielę daley 3 i 4 przez 3 i wypada $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$.

Zamieniemy więc tym sposobem ułamek $\frac{361}{1495}$ na ułamek ciągły

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3.}}}}}$$

Gdy w iakim ułamku ciągłym, weźmiemy ieden iego wyraz *np* w przykładzie poprzedzaiącym

$\frac{1}{4}$; a inne iego wyrazy pominiemy, ułamek $\frac{1}{4}$ iest nieco większy iak prawdziwa wartość całego ułamka ciągłego; bo ponieważ tym sposobem mianownika zmnieyszamy, ułamek więc takowy staie się (79.) większy. Jeżeli weźmiemy dwa iego wyrazy $\frac{1}{4+\frac{1}{7}} = 1 : \frac{29}{7} = \frac{7}{29}$; ułamek ten iest znowu nieco mnieyszy; wziąwszy znowu ułamek z trzeh wyrazów: $\frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{12}}} = \frac{1}{4+1:\frac{85}{12}} = \frac{1}{4+\frac{12}{85}} = 1 : \frac{352}{85} = \frac{85}{352}$. ułamek ten ostatni iest znowu nieco za wielki; a ze cztérech wyrazów iest znowu mnieyszy od prawdziwéy wartości ułamka ciągłego i tak na przemian daléy, tym atoli sposobem, że różnica albo oddalenie się od prawdziwéy wartości będą zawsze coraz mnieysze, im więcéy wyrazów ciągłego ułamka weźmiemy, tak dalece, że nakoniec za wzięciem wszystkich wyrazów ułamka ciągłego, prawdziwą wartość iego otrzymuiemy. W przykładzie obranym ułamek $\frac{85}{352}$ z trzech wyrazów ciągłych zebrany, zgadza się z prawdziwą wartością ułamka $\frac{361}{1495}$ aż do stutysięcznych, oczém przekonać się można łatwo, gdy obydwa takowe ułamki na ułamki dziesiętne zamienimy, ponieważ $\frac{361}{1495} = 0{,}241471\ldots$
a $\frac{85}{352} = 0{,}241477\ldots$

Różnią się zatém od siebie o 0,000006.

Rodzay takowy ułamków wiele ma bardzo ważnych własności w Algebrze, w niéy więc więcéy o nich powiemy.

3-10 19-26
2-6 13+26
1 = 6 =
13-10
19-26

§. 17.

Wiadomość o Wagach i miarach Krajowych.

119. W naukach, sztukach handlu i rozmaitych zatrudnieniach ludzkich, używaią się różne gatunki iednościów pod nazwiskiem *Miar i Wag.* Że zaś rzeczy do ważenia, mierzenia mogą bydź cięższe lub lżeysze, dłuższe lub krótsze, droższe lub tańsze, mierząc więc, ważąc i rachuiąc głównemi lub zasadowemi miarami, w iednych przypadkach miary takowe przywiodłyby nas do liczb bardzo wielkich, w drugich do bardzo małych. Zapobiegaiąc więc temu z iedności zasadowych poskładano miary większe do wymiarów większych, do wymiarów zaś mnieyszych, podzielono ie na inne miary mnieysze. Tym więc sposobem iedne względem drugich są ułamkami. Chcąc do nich przystosować rachunek, wypada nam ie dokładnie rozpoznać.

Znayduią się zaś;

1ᵒᵈ Miary długości zwane miarami *liniowemi.*

2ᵗᵉ Miary Powierzchniów zwane miarami *kwadratowemi.*

3ᶜⁱᵉ Miary obiętościów czyli Bryłowatościów zwane *Sześciannemi.*

4ᵗᵉ Miary, wagi, miary monet, miary czasu *i. t. d.*

I. Jednością długościów iest u nas pospolicie Łokieć. Ten dzieli się na dwie części nazwane *pół-łokciami* albo *stopami.* Stopa dzieli się na 2 części równych, nazwane *ćwierciami łokcia.* — Ćwierć dzieli się na 6 części równych, i każda z nich nazywa się *Calem.* Cal składa się z linii 12. — Linią dzielą ieszcze niektórzy na 12 punktów.

Do wymiarów większych długości złożono:
Długość z 3 Łokci, nazwano *Sążniem.*
Długość z 15 Stóp, nazwano *Prętem.*
Długość z 10 Prętów nazwano *Sznurem mierniczém.*

Wielkie odległości mierzą się milami.

Mile Polskie niemaią iednostayney długości. Na srzednią milę Polską rachuie się pospolicie Sążni 3333 i 1 Łokieć. Mil takich 17 liczy się na ieden Stopień południka.

W wymiarach planów woiennych, używa się ludzkich lub końskich kroków. Zwyczayny krok człowieka srzedniego w zrostu trzyma $2\frac{1}{2}$ do 2 i $\frac{2}{3}$ Stóp pospolitych.

Na srzednią milę Polską niektórzy rachuią 8000 kroków.

II. Jednością zasadową powierzchniów iest Łokieć kwadratowy (*)

Ten składa się ze Stóp kwadratowych 4, Stopa kwadratowa ma ćwierci kwadratowych 4. Ćwierć kwadratowa ma linii kwadratowych 144; — Linia kwadratowa ma punktów kwadratowych 144.

Do wymiarów większych Powierzchniów złożono.

Kwadrat którego bok ma długości Sążeń nazywaią *Sążniem kwadratowym.*

Kwadrat którego bok ma 1 pręt długości nazywa się *prętem kwadratowym.*

Kwadrat którego bok ma 10 prętów długości nazywa się *Sznurem kwadratowym.*

(*) *Kwadratem nazywa się figura* A B C D, *w którey wszystkie* 4 *linie proste* AB, BC, CD, AD, *nazwane iego bokami i wszystkie iego kąty*, A, B, C, D *są sobie nawzaiem równe. Jeżeli każdy bok takiey figury ma* 1 *Łokieć długości; mieysce takiemi cztérema liniami obwiedzione, nazywa się* Łokciem kwadratowym. *Jeżeli ma iednę stopę długości*, Stopą kwadratową, *ieżeli cal, calem kwadratowym; Jeżeli Sążeń* Sążniem kwadratowym; *Jeżeli milę*, Milą Kwadratową *i. t. d.*

D C

A B

Morgiem nazwano miarę do samego gruntu ornego służącą. Rozumie się przez niego miéysce obwiedzione cztérema bokami schodzącemi się tak iak w kwadracie, maiące 3 Sznury długości, a 1 Sznur szerokości. Figura takowa nazywa się *prostokątem*. Trzydzieści takich Morgów czynią *Włókę* 1. a 3 Włóki czynią 1 *Łan*. (Zobacz Jeometryą praktyczną X *Zaborowskiego* o Łanach).

Powierzchnia całéy Ziemi lub rozległéy iéy części rachuie się na Mile kwadratowe.

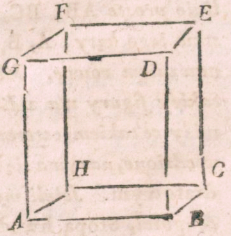
III. Jednością obiętościów iest Łokieć Sześcienny (*) z którego tak iak w powierzchniach składaią się miary Sześcienne, większe, a przez podział iego na części, miary sześcienne mniéysze.

IV. Jednością Wagi srzedniéy iest u nas *Funt*. Ten dzieli się na 2 półfuncia czyli *grzywny*. cwierć funta iest czwartą częścią funta, i dzieli się na 2 części nazwane *pół ćwierciami*. Półćwiercie funta dzieli się na 4 części nazwane *łótami*. Łót dzieli się na pół łocia i ćwierci.

Wagi większe od funta są:

Kamień maiący funtów 32, lub Kamień mniéyszy funtów 24. — Cetnar ma Kamieni 5 albo funtów 160 — Szyfunt ma Kamieni 13 albo 416 funtów.

(*) *Ustawiwszy* 6 *kwadratów równych, aby schodząc się z sobą pod kątami równemi iak* A B C D E F G H *obéymowały miéysce podobne do kostki od grania, figura takowa nazywa się* Sześcianem. (Cube). *Jeżeli kwadraty obéymuiące go są łokciami kwadratowemi, Sześcian nazywa się* łokciem sześciennym. *Jeżeli są Stopami,* Stopą sześcienną *i. t. d.*



Toż się rozumie o sążniu, pręcie, sznurze sześciennym i. t. d.

Napełniwszy wydrążenie Cala Sześciennego Wodą i zważywszy, możnaby dóyśdź tym sposobem co znaczy cal sześcienny.

Miara srzednia służąca za równo do mierzenia rzeczy ciekłych iako i sypnych iest u nas *garniec*. Ten dzieli się na 2 *półgarce*. Półgarca na 2 Kwarty, Kwarta na 4 Kwaterki. Garniec maiący figurę wałka, trzyma w *srzednicy* swoiéy (to iest w linii prostéy przechodzącéy przez srzodek dna iego) cali 5, linii 11; a w wysokości $8\frac{1}{2}$ calów Warszawskich; a zatém zawiéra w sobie 234 calów Sześciennych, z małém bardzo uchybieniem.

Beczka zawiérała dawniéy garcy 72.

Półbeczek garcy 36. — *Ćwierćbeczek* czyli *Antał* garcy 18.

Beczka pospolita ma tylko garcy 27.

Korzec iest miara do mierzenia rzeczy sypkich, ma w sobie garcy 32, dzieli się na Ćwierci, z których każda ma garcy 8.

Na *Łaszt* rachowano 27 Korcy Warszawskich.

Monety. Jednością zasadową monet Polskich był i iest dotąd Złoty Polski. Dla monet Xięstwa przyięta iest Stopa menniczna Pruska. Podział gatunków monet srebrnych, i miedzianych iest taki iak dawniéy. Dukaty są w wartości Dukatów Hollenderskich.

Podział Czasu. Rok składa się z 12 Miesięcy które czynią Tygodni 52 i 1 do 2 dni; To iest Rok pospolity ma 365 dni; Rok przybyszowy ma ich 366 i w nim Luty ma dni 29. Dzień ma godzin 24, godzina ma minut 60, Minuta 60 minut wktórych *i. t. d.*

Dzień cywilny kończy się o 12 po północy, tak iż pierwsza godzina w nocy iest piérwszą godziną z dnia następuiącego.

Rzeczy które przedaią się na sztuki, sztuk 12 nazywać się zwykło *Tuzinem*; sztuk 15 *Mendlem*; 30 *Półkopą*; 60 *Kopą*.

Papiér rachuie się na Bele, Ryzy, Libry i Arkusze.

1 Bela ma 10 Ryz.

1 Ryza ma 20 Liber.

1 Libra papieru Drukarskiego Arkuszy 25.

1 Libra papieru do pisania Arkuszy 24.

O Przemianie iedności iednorodnych na iedności gatunku większego, lub mniéyszego.

120. Wiedząc podział każdego gatunku iedności, łatwo iest przy pomocy dotąd podanych działań obracać czyli przemieniać iedne na drugie.

Chcąc np obrócić sążni 8, stóp 5, cali 9 na same cale, obracam sążni 8 na stopy a dodąwszy do nich 5 stop, stopy te obracam na cale, do których dodawszy 9 cali, otrzymam całkowitość sążni 8, stóp 5; i cali 9. wyrażoną w samych calach?

Tak Sążni $8 \cdot 6 = 48$; $48 + 5 = 53$ Stopom; $53 \cdot 12 = 636$ calom; $636 + 9 = 645$ calom.

Przeciwnie aby się dowiedziéć wiele 645 całów, czynią sążni, stóp i cali, mogę nayprzód dowiedziéć się, wiele te cale czynią stóp, a że stopa iedna ma cali 12 zatém $\frac{645}{12}$ Cali $=$ 53 stop, 9 cali; ponieważ ną sążeń idzie Stóp 6, zatém $\frac{53}{6}$ stóp $=$ 8 sążni i 5 stóp; więc 645 cali $=$ 8 sążni, 5 stóp, 9 cali.

Możnaby też dowiedziéć się od razu, wiele 645 cali czynią sążni, dowiedziawszy się wprzód wiele na 1 sążeń idzie cali; a że 1 sążeń ma stóp 6, a 1 stopa cali 12; zatém $1 \cdot 6 \cdot 12 = 72$ calom $=$ 1 sążeń, dzieląc nakoniec $\frac{645}{72}$ cali $=$ 8 sążni $+$ 69 cali, obracaiąc 69 cali na stopy będzie $\frac{69}{12} = 5$ stopom $+$ 9 calom; Ztąd 645 cali $=$ 8 sąż: 5 stop: i 9 calom.

Toż postępowanie służy do wszelkiego innego, gatunku iednościów, chcąc ie zamieniać na większe lub mnieysze.

§, 18.

Działania z liczbami wielorakami (Complexes)

121. Liczba złożona z części odniesionych do rozmaitych podziałów iednéyże iedności, nazy-

wa się *Liczbą Wieloraką*, Tak *np* 3 Złote, 12 groszy m: szelągów 2 iest liczbą wieloraką, w któréy Złoty iest główną iednością; a grosz który iest trzydziestą częścią Złotego, i szeląg który iest trzecią częścią grosza, są iednościami *posiłkowemi* (secondaires) albo też ułamkami iedności głównéy.

Przeciwnie liczby złożone z samych iedności całkowitych, albo z iednego tylko gatunku podziału iedności, nazywaią się *liczbami samotnemi* (simples). Tak 8 Złotych, albo 8 Cetnarów, albo 9 Sążni, *i. t. d.* są liczby samotne.

§. 19.

Dodawanie liczb Wielorakich.

122. *Aby otrzymać summę z wielu liczb wielorakich, potrzeba ie iedne pod drugiemi podpisać, uważaiąc, aby w iednéy kolumnie przypadały iedności iednego gatunku.* *Poczém zaczyna się dodawanie od prawéy ręki, to iest od iedności naymnieyszego gatunku, a ieżeli summa z takowéy onych kolumny wyrównywa lub przewyższa liczbę iedności, których potrzeba na złożenie naybliższego gatunku wyższego, natenczas pisze się tylko reszta pod tą kolumną, a iedność lub iedności wypadłe, odnoszą się do summy z kolumny następuiącéy.* Toż samo zachowuie się i względem innych kolumn.

Daymy iż mamy dodać wiele liczb złożonych ze Złotych, groszy i ſzelągów.

np	984 Złł:	12 g: m:,	2 ſzelą;
	38 —	6 — —	1 —
	1413 —	14 — —	1 —
	319 —	18 — —	2 —
Summa - -	2755 Złł;	22 gr; m.	0. ſzel:

Napisawszy te liczby iak tu widzimy; zaczyna się dodawanie od ręki prawéy, iak tu od szelągów, dodawszy ie razem czynią ſzelągów 6; a że grosz zawiéra w sobie szelągów 3, zatém ſzelągów 6=2 gr; m; grosze 2 otrzymane, odnoszę do kolumny groszy, a pod kolumną ſzelągów dla oznaczenia że niemasz żadnych, piszę 0. Summa kolumny groszów i zdodanemi 2 groszami z ſzelągów, czyni 52 gr. m, to iest czynią 1 Złoty i gr. m: 22; piszę więc 22 pod kolumną groszy, a ieden Złoty dodaię do kolumny Złotych, która czyni Złł; 2755. To iest na całą ſumę wypada Złł; 2755 gr: m: 22.

Przykład II. Ma się dodać;

Sążni 154.	Stóp 3.	Cali 7.	Linii $9\frac{1}{2}$
— 23.	— 2.	— 8.	— $11\frac{1}{3}$
— 132.	— 5.	— 10.	— $3\frac{5}{6}$
— 0.	— 2.	— 7.	— 1
Summa Sążni 311.	Stóp 2.	Cali 10.	Linii $1\frac{2}{3}$.

Tu kolumna liniów z ich ułamkami czyni 25 linii i $\frac{2}{3}$, albo 2 cale, 1 linia i $\frac{2}{3}$, ponieważ 12 linii czynią cal 1; kładzie się więc pod kolumną liniów $1\frac{2}{3}$; cali zaś 2 odnosi się do kolumny następuiącéy calów, która wydaie 34 cale czyli 2 stopy i 10 calów. I tak daléy.

Przykład III. Ma się dodać:

Dni 2.	Godzin 10.	Minut 42.
— 5.	— 9.	— 17.
— 0.	— 21.	— 3.
Summa Dni 8.	Godzin 17.	Minut 2.

§. 20.

Odciąganie liczb Wielorakich.

123. *Chcąc odciągać od siebie liczby wielorakie kładzie się mnieysza pod większą, uważaiąc zawsze aby iedności iednego gatunku przypadały w iedney kolumnie; poczém zaczyna się odciągać od ręki prawey, to iest od iedności naymnieyszego gatunku rzędu spodniego od wyższego i pisząc pod spodem resztę. Jeżeli liczba wyższa mnieysza iest od opowiadaiącey niższey; uczyni się odciąganie podobném do uskutecznienia przez pożyczenie od gatunku nayblizszego większego. Przykład obiaśni takowe prawidło,*

Tak maiąc Czer: Złł:	143. Złł:	17. groszy	6.
odiąć	75. —	12. —	9.
Reszta Czer: Złł:	68. Złł,	4. groszy	27.

w tym przykładzie zaczynaiąc odciąganie od prawey ręki: ponieważ 9 groszy od 6 gr: odiąć niemogę, pożyczam więc od następuiącey kolumny Złotych, 1 Złotego który czyni groszy 30, te dodane do groszy 6 czynią 36 groszy, z których odiąwszy 9 zostaie 27 groszy; odeymuię daley 12 Złotych iuż nie od 17 ale od 16 które po pożyczeniu pozostały i zostaie na resztę 4; Nakoniec odiąwszy Dukatów 75 od 143. zostaie na resztę Dukatów 68.

Przykład II: Od Funtów	168.	Ćwierć funt:	o. Łotów	5.
Wypada odiąć	84.	—	— 3. —	7.
Reszta Funtów	83.	Ćwierć funt;	o. Łotów	6.

ponieważ tu 7 łotów od łotów 5 odiąć niemożna, pożycza się więc od funtów 168 iednego funta, który ponieważ ma ćwierci funtów 4, zostawia się więc myślą 3 ćwierci funta na mieyscu ćwierci funtów, a iednę ćwierć od nich pożyczoną obróciwszy na łotów 8; łoty te dodaią się do łotów 5 i dopiero od Summy łotów 13 odiąwszy łotów 7, zostaie na resztę łotów 6. Z resztą postępuie się wdziałaniu dalszém iak w poprzedzaiącym przykładzie.

§. 21.

Dodawanie i Odeymowanie przeciągu Czasu.

124. *Przygotowanie*: Napisawszy 1810 Roku 11 Marca; natenczas od Narodzenia Chrystusa Pana upłynęło lat 1809 i Miesięcy 2 (to iest Styczeń i Luty z Roku 1810) i ieszcze dni 10, ponieważ 11ty dzień trzeciego Miesiąca Marca ieszcze się nieskończył, kiedy się pisze 11go Marca.

Napisawszy 1810 Roku 11 Marca zrana o godzinie 10; natenczas od Narodzenia Chrystusa upłynęło lat 1809, 2 Miesięcy, 10 dni i 10 godzin, bo piérwsza godzina o połnocy iest iusz iedną godziną z dnia następuiącego, a zatém też do godziny 10 zrana, upłynęło 10 godzin zdnia następuiącego.

Przykład. Umarł Jan Roku 1770 dnia 11 Marca w wieczór o godzinie 8, a urodził się 1701 Roku, dnia 8 Lutego zrana o godzinie 7méy. Wieleż żył lat, miesięcy, dni i godzin? Tak tu rozumować będziemy:

Od Narodzenia Chrystusa do śmierci o któréy tu mowa, upłynęło:

	Lat 1769, Miesięcy 2 dni 10 god: 20.
Od Narodzenia Chrystusa do urodzin Jana upłynęło . .	- Lat 1700, Miesiąc 1, dni 7, god; 7.
	Zatém żył Lat 69, Miesiąc 1, dni 3, god; 13.

Przykład II. Gustaw Adolf urodził się Roku 1594 Grudnia 9, a w Roku 1632 dnia 9 Listopada na Batalii zginął. Wieleż żył lat?

Od

Od Narodzenia Chrystusa do śmierci Gustawa upłynęło	-	Lat 1631, Miesięcy 10, dni 5.
Do iego urodzin upłynęło	-	Lat 1593, — 11, — 8.
Żył zatém		Lat 37, Miesięcy 10, dni 28.

Wtym przykładzie 8 dni od 5 odiąć niemożna, potrzeba więc od ostatniego z upłynionych Miesięcy iednego Miesiąca pożyczyć. Ten pożyczony Miesiąc iest dziesiątym w Roku, zatém iest nim Październik. Że zaś Październik ma dni 31, zatém 31 † 5—8 dni pozostaie dni 28. Daléy ponieważ 11 Miesięcy od 9 odiąć niemożna, pożycza się więc Roku czyli 12 Miesięcy i odbywa się odciąganie zwyczayne.

125. *Próba odciągania* liczb Wielorakich odbywa się tak, iak na liczbach samotnych, bo dodaiąc resztę do liczby mniéyszéy, powinna wypaśdź na summę liczba większa.

126. *Próba na dodawanie* takichże liczb, odbywa się podobnież iak na liczbach samotnych; zaczynaiąc działanie od ręki lewéy i ſummę każdéy kolumny odéymuiąc od summy położonéy pod nią na spodzie, naówczas ieżeli działanie iest dobre, na resztę pod ostatnią kolumną od prawéy ręki powinno wypaśdź zero. Jakoż postępowanie któregośmy użyli dodaiąc liczby, powinno złożyć summę całkowitą wszystkich części, które składały liczby do dodawania; ieżeli więc od summy téy odéymuiemy koléyno wszystkie części które ią składaią, na resztę nic niepowinno pozostać, ieżeli działanie dobrze się odbyło. Lepiéy nas wtém obiaśni przykład dodawania wyżéy położony.

Dni	2,	godzin	10,	minut	42.
—	5,	—	9,	—	17.
—	0,	—	21,	—	3.
SUMMA dni	8,	godzin	17,	minut	2.

Kolumna dni daie dni 7, a że wiéy summie znayduie się dni 8, zatém 1 dzień powstać musiał z godzin, obróciwszy go więc na godziny i dodawszy do nich 17 godzin w summie kolumny godzin będących, wypada na summę godzin 41, a że kolumna godzin czyni tylko godzin 40, zatém 1 godzina musiała powstać z minut, obróciwszy więc ią na minuty i dodawszy do nich summę z kolumny minut, to iest minut 2, summa 62 minut powinna bydź summą téy ostatniéy kolumny; co gdy się prawdzi, działanie dodawania było dokładném.

§. 22.

Mnożenie liczb Wielorakich.

127. Potrzeba tu sobie nayprzód przypomnieć, że w wszelkiém mnożeniu, mnożnik iest liczbą oderwaną, (39. n° 3.) mnożny zaś liczbą mianowaną téyże natury iakiéy ma bydź mnogość, co łatwo iest zawsze rozpoznać, ponieważ stan zagadnienia uczy nas niezawodnie, iakiéy natury ma bydź wypadła mnogość.

Mnożenie liczb wielorakich może bydź przywiedzione do mnożenia ułamków, ponieważ każdy czynnik składa się z iedności głównych, i z ułamków téyże iedności.

Przykład. Chcąc się *np* dowiedzieć wiele ma kosztować roboty iakiéy Sążni 27, Stóp 4, Cali 8, gdy Sążeń 1 téy roboty przypada po złł: 72, gr: 6, ſz: 2? ponieważ tu mnożny Złotych 72 gr: 6, ſz: 2, składa się z 72 iedności, i z $\frac{6}{30}$ i $\frac{2}{90}$ iedności główney złotego; dwa więc te ułamki przywiedzione do iednego mianownika daią $\frac{18}{90}$ † $\frac{2}{90} = \frac{20}{90}$; zatém mnożny iest: złł: $72 \dagger \frac{20}{90} = \frac{6500}{90}$ złł: albo 6500 ſzelągów, które także otrzymamy obracaiąc Złote na grosze to iest: mnożąc ie przez 30 wypadnie gr: 2160 † 6 = 2166 gr:, a te obracaiąc na szelągi i mnożąc przez 3, wypadnie ſzelągów 6498 † 2 = 6500 ſzelągów. Przez temuż podobne postępowanie mnożnik może bydź wyrażony przez Sążn: $27 \dagger \frac{4}{6} \dagger \frac{8}{72} =$ Sążni $27 \dagger \frac{48}{72} \dagger \frac{8}{72} =$ Sążni $27 \dagger \frac{56}{72} = \frac{2000}{72}$ Sążni; albo obracaiąc Sążnie na Stopy i tym końcem mnożąc przez 6, wypadnie stóp 162 † 4 = 166 Stóp, obracaiąc te Stopy na cale i mnożąc przez 12, wypadnie cali 1992 † 8c = 2000 Cali.

A tak zagadnienie przywiedzioném zostanie do rozmnożenia $\frac{6500}{90}$ zł:. $\frac{2000}{72}$ Sążni $= \frac{13000000}{6480}$ Złotych $= \frac{325000}{162}$ Złotych, $= 2006 \dagger \frac{14}{81}$ Złotych; ułamek ten Złotego zamieniony na grosze daie groszy 5 i $\frac{5}{27}$. Więc mnogością szukaną iest Złotych 2006, groszy m: $5\frac{5}{27}$.

128. Zatém za prawidło powszechne położyć można: *że potrzeba obydwóch czynników obrócić na ich naymnieyszy gatunek, poczém obydwa wypadki rozmnożyć przez siebie i mnogość wypadłą podzielić przez mnogość z dwóch liczb które wyrażaią, wiele iedność główna każdego czynnika zawiéra w sobie iedność naymnieyszego podziału. Tym sposobem otrzymamy ułamek z którego wyciągniemy koléyno iedności każdego gatunku mnogości.*

129. Ale sposób w naywiększém używaniu będący a razem krótszy w takowych działaniach; iest działanie przy pomocy części wielokrotnych, do którego teraz przystępuiemy.

Wiadomo nam (61) iuż, co są części wielokrotne, można tu ieszcze to o nich przydać: że części wielokrotne są ułamkami maiącemi iedność za licznika i że dla tego nadano im to nazwisko, ponieważ iedność składa się z iedney z takowych części wziętey pewną liczbę razy. *np* 5 gr: m: są wielokrotną cząstką 1 złotego, bo wzięte razy 6. czynią 1 złoty; podobnież 6 gr: m:, 3 gr:m: 10 gr: m: 15 gr: m:, 2 gr: m: są wielokrotnemi cząstkami złotego ponieważ są $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{15}$ iednego złotego; ale 4 gr: m: nie są wielokrotną częścią złotego, bo 4 gr: m: wzięte pewną liczbę razy niemoże złożyć dokładnie iednego złotego.

To założywszy zwróćmy się nazad do powyższego przykładu.

Potrzeba rozmnożyć	72 Złł:,	6 gr: m:	2 ſzel:	
przez	27 Sąż:	4 St:	8 Cali.	
	504 Złł:	0 gr: m:	0 ſzel:	
	144			
po 5 gr: - - -	4	- - 15	- - 0	—
po 1 gr: - - -		- - 27	- - 0	—
po 1 ſzel: - - -		- - 9	- - 0	—
po 1 ſzel: - - -		- - 9	. - 0	—
za 3 Stopy - -	36	- - 3	- - 1	—
za 1 Stopę - -	12	- - 1	- - $0\frac{1}{3}$	—
za 6 Cali - - -	6	- - 0	- - $1\frac{2}{3}$	—
za 2 Cale - -	2	- - 0	- - $0\frac{5}{9}$	—
Zatém za 27 Sąż: 4 St: 8 Cali	2006 Złł,	5 gr: m:	$\frac{5}{9}$ ſzel:	

Rozmnażam nayprzód Złł: 72 przez 27 sążni, potém chcąc rozmnożyć 6 gr: przez 27 sąż: rozkładam ie na 5: 1 gr:, ponieważ 5 groszy czynią $\frac{1}{6}$ złotego, zatém uważaiąc 1 Sążeń po 1 złoty, za 27 ſążni przypadłoby zł: 27, a że 1 sążeń uważam tylko $\frac{1}{6}$ złotego, zatém przypadnie tylko za 27 sążni, $\frac{1}{6}$ część złotych 27, to iest zł: 4 gr: m: 15. Uważaiąc sążeń po 1 gr:, który iest piątą częścią pięciu groszy, wypada zatém wziąść piątą część zł: 4 gr; 15, to iest gr: 27. W mnożeniu przez ſzelągi uważam, że gdyby sążeń 1 kosztował 1 gr:, sąż: 27 kosztowałoby gr: 27, uważaiąc więc sążéń po 1 ſzelągu czyli $\frac{1}{3}$ grosza, wypadnie tylko wziąśdź $\frac{1}{3}$ część 27 groszy to iest gr: 9; po drugim szelągu za 1 sążeń przypadnie podobnież gr: m: 9.

Aby teraz doyśdź co przypada zą 4 stóp téyże roboty, uważam 4 Stopy złożone z 3 stóp czyli pół sążnia i 1 stopy. Za półsążnia przypada połowę złł; 72 gr: 6, ſzelą: 2, to iest złotych 36, gr: 3, ſzel; 1, a za 1 stopę przypadnie trzecia część złotych 36, gr; 3, szel: 1 to iest złł: 12 gr: 1; szel: $\frac{1}{3}$. Nakoniec aby się dowiedziéc wiele przypada za 8 cali, rozbiéram ie na 6 cali czyli pół stopy i na 2 cale które są trzecią częścią 6 cali. Za 6 cali przypada połowę wartości za 1 stopę, to iest: złł: 6, szel: $1\frac{2}{3}$, a za 2 cale przypada część trzecia złł: 6 ſzel: $1\frac{2}{3}$ to iest złł; 2, i $\frac{5}{9}$ ſzeląga; te wszystkie cząstkowe mnogości dodawszy razem, otrzymam na całkowitą mnogość 2006 złł:, 5 gr: i $\frac{5}{9}$ szełąga, wartość zgadzaiąca się z wartością powyższą otrzymaną przez ułamki, bo $\frac{5}{6}$ szeląga toż samo czyni co $\frac{5}{27}$ grosza.

130. Prawidło więc powszechne które z takowego działania wnieść można, iest: *Aby napisać mnożnika pod mnożnym, pomnożyć całego mnożnego przez całkowitego mnożnika, rozkładaiąc koléyno niższe iego podziały iedności na części wielokrotne podziału poprzedzaiącego, potém na podziały niższe mnożnika wziąść części przyzwoite wielokrotne mnożnego, a summa z tych mnogości cząstkowych będzie mnogością całkowitą.*

Przykład następuiący dokładniéy obiaśni przystosowanie tegoż sposobu.

Wiele przypada za 2 dni, 6 godzin i minut 30 iakiéy roboty, rachuiąc na dzień o 12 godzinach po Złotych 17?

		17 Zł:		
		2 dni,	6 godzin,	30 minut.
Za 2 dni	- -	34 Złł:	0 gr:	0 Szel:
Za 6 godzin	-	8 —	15 —	—
Mnogość przybrana Za 1 godzinę	-	~~1~~	~~12~~	~~1½~~
Za 30 minut	- -	—	21 —	¾ —
Mnogość	.	43 Złł:	6 gr:	¾ Szel:

Wziąwszy za 2 dni dwa razy mnożnego a za 6 godzin iego połowę; bierze się daléy $\frac{1}{6}$ część téy mnogości aby mieć wartość za 1 godzinę, a téy znowu połowę aby otrzymać wartość za półgodziny albo za 30 minut. Poczém wartość za iednę godzinę iako wartość przybraną i nienależącą do mnogości całkowitéy przekreśla się. Możnaby także za 30 minut wziąść $\frac{1}{12}$ część mnogości za 6 godzin.

Gdyby treść zagadnienia była: że za 1 Złoty robi robotnik dni 2, godzin 6, i minut 30, iakże długo robić będzie za Złotych 17?

Widzimy że tu 17 iest mnożnikiem i że wypada wziąśdź 2 dni, 6 godzin i 30 minut razy 17 iak następuie:

	2 dni,	6 godzin	30 minut.
	17 Złł;		
	34 dni		
	8	- 6	—
	1	- 5	
	0	- 8	30'
Mnogość	43 dni,	2, godz:	30.

Bierze się nayprzód 17 razy 2 dni, co czyni 34 dni, daléy 17 razy 6 godzin albo 17 razy $\frac{1}{2}$ dnia, co czyni połowę 17 dni, to iest 8 dni, 6 godzin. Poczém możnaby wziąśdź $\frac{1}{6}$ część téy mnogości, któraby odpowiadła mnogości za godzinę, co czyni 17 godzin albo 1 dzień i 5 godzin, czego połowa, to iest 8 godzin i 30', będzie mnogością za półgodziny albo 30 minut, natenczas mnogością całkowitą będzie summa z tych mnogości cząstkowych, przekreśliwszy mnogość przybraną 1 dzień, 5 godzin.

Wystawiwszy sobie okręg koła podzielony na 360 części ównych nazwanych *Stopniami* (degrès) każdy sopień na 60 minut, a każdą minutę na 60 *minut wtórych* albo sekund; iest pytanie wiele stopni, minut i secund, przebiega na Niebie gwiazda w 27 latach, 9 miesiącach gdy co rok przebiega część tego okręgu czyli *łuk* (arc) o 2 Stopniach, 35 minutach. Wypada:

	2 Stopnie		35'			
Mnożyć przez	27 lat,		9. m:			
	54 Stopni					
Po 30' - -	13	- -	30'	-	0	połowa 27°
Po 5' - -	2	- -	15'	-	0	$\frac{1}{6}$ mnogości z 30'
Za 6 mies:	1	- -	17'	-	30''	połowa mnożnego
Za 3 mies:	0	- -	38'	-	45''	połowa mnogości z 6 m:
	71 Stopni		41'	-	15''	

§. 23.

Dzielenie liczb wielorakich.

131. Widzieliśmy (51.) że mnogość wielorazu przez dzielnika wyrównywa dzielnemu. Za-

tém dzielnika i wieloraz uważać można iak dwóch czynników dzielnego, ale ieden z tych czynników powinien bydź oderwany, a drugi téyże natury co mnogość. Jeżeli więc dzielnik iest téyże natury co dzielny, wieloraz będzie oderwany, i to iest:

I^wszy^ *Przypadek.*

132. Jeżeli dzielnik nie iest z dzielnym iednéy natury, na ówczas dzielnik iest oderwany wieloraz zaś mianowany i téyże natury co dzielny i to iest:

II^gi^ *Przypadek.*

133. W żadnym przypadku niemożna dzielić przez dzielnika wielorakiego; potrzeba więc zawsze przygotować działanie tak, aby dzielnika wyrazić w postaci poiedynczéy, ale prócz tego w piérwszym przypadku potrzeba, aby dzielny podobnież był wyrażony, gdyż inaczéy niemożnaby otrzymać wielorazu oderwanego.

Daymy na piérwszy przykład: że za pewnę liczbę karabinów zapłacono czer: złł: 79 złoty 1 gr: m: 6, płacąc za ieden po czer: złł: 3, złł: 5 gr: m: 9, ileż ich kupiono? Idzie tu o doyście wiele razy czer: złł: 3, złł: 5 gr: m: 9, zawieraią się w czer: złł: 79, złł: 1 gr: m: 6. Ponieważ tu dzielnik iest wieloraki, wypada go obrócić na iedno wyrażenie ułamkowe, to iest czer: złł: 3, złł: 5, gr: m: $9 =$ czer: złł: $3 + \frac{53}{180} = \frac{593}{180}$ czer: złł: ; podobnież dzielny czer: złł: 79. złł: 1, gr: m: $6 =$ czer: złł: $79 + \frac{1}{15} = \frac{1186}{15}$ zzer: złł:; potrzeba więc podzielić $\frac{1186}{15}$ czer: złł; przez $\frac{593}{180}$ czer: złł: co daie $\frac{1186}{15}$ czer: Złł: $\times \frac{180}{593}$ czer: złł: $= 1186$ czer złł: $\times \frac{12}{593}$ czer: złł: $=$ 24 Karabinów.

Natura tego zagadnienia niemogła wydać iak wieloraz całkowity, ale rozumowanie i działanie byłyby ieszcze też same, gdyby wieloraz oderwany miał się także przemienić w liczbę wieloraką. *np*, Zapłacono Złł: 2006, gr: m: 5 i $\frac{5}{27}$ gr: za pewną liczbę sążni, stóp, cali iakiéy roboty, płacąc za 1 sążeń Złł: 72, gr: m: 6, szel: 2, iakaż była ta liczba?

Tu wieloraz może składać się z całości i ułamków, a natura zagadnienia wymaga aby to był ułamek sążnia, albo żebyśmy go zamienili na stopy, cale *i. t. d.* co się łatwo uskutecznić daie. Nayprzód dzielnikiem iest złł: $72 + \frac{6}{30} + \frac{2}{90}$ albo złł: $72 + \frac{18}{90} + \frac{2}{90} =$ złł: $72 + \frac{20}{90} =$ złł: $72 + \frac{2}{9} = \frac{650}{9}$ złł:; dzielny zaś złł: 2006 gr: m: $5\frac{5}{27} =$ złł: $2006 + \frac{14}{81} =$ złł: $\frac{162500}{81}$; wypada więc podzielić złł: $\frac{162500}{81}$ przez $\frac{650}{9}$ złł:, albo złł: $\frac{162500}{81} . \frac{9}{650} = \frac{16250}{9} . \frac{1}{65}$ złł: $= \frac{16250}{585}$ sąż: $= 27$ sąż: $+ \frac{455}{585}$ sąż: $= \frac{91}{117}$ sążni.

Aby ułamek ten sążnia obrócić na stopy, rozmnożmy iego licznika przez 6, co daie $\frac{91.6}{117} = \frac{546}{117}$

stóp $= 4 + \frac{26}{39}$ stóp. Zamieniaiąc podobnież $\frac{26}{39}$ stopy na cale, potrzeba iego licznika rozmnożyć przez 12 co daie $\frac{26 \cdot 12}{39} = \frac{312}{39} = 8$ cali. Zatém wielorazem iest sążni 27, stóp 4, cali 8. Przykład ten służy razem za próbę tegoż przykładu podanego w mnożeniu.

134. Zatém prawidło którego w tym piérwszym przypadku użyć można iest: *ażeby dzielnego i dzielnika każdego z osobna obrócić na iedno wyrażenie poiedyncze, to iest na podziały naymniéysze ich iednościów głównych, a ieżeli dwa takowe wypadki maią iednakowego mianownika, dzieli się ieden licznik przez drugiego; ieżeli zaś mianowniki są rozmaite, postępuie się w działaniu iak w dzieleniu ułamków, mnożąc ułamek dzielnego przez ułamek dzielnika odwrócony, na wieloraz wypadnie ułamek z którego wyciągnąwszy całkowite, reszta ieżeli iest, obraca się na mniéyszy gatunek iedności główney zawartéy w zagadnieniu.*

Gdyby dzielny był mniéyszy od dzielnika, wieloraz tymże samym sposobem otrzymuie się:

Np Za Złotych 7 gr: m: 6, wiele będzie łótów iakiego towaru, kiedy funt iego przypada po Złł: 9 gr: m: 18?

Widzimy tu że dzielny iest tu złł: 7 gr: m: 6 to iest złł: $7 + \frac{6}{30} =$ złł: $7 + \frac{1}{5} =$ złł: $\frac{36}{5}$, dzielnik zaś złł: 9 gr: m: $18 =$ złł; $9 + \frac{18}{30} =$ złł: $9 + \frac{3}{5} =$ złł: $\frac{48}{5}$. Wypada więc podzielić $\frac{36}{5}$ złł: przez złł: $\frac{48}{5}$ czyli $\frac{36}{5} \times \frac{5}{48} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ fun: Aby ułamek ten wyrażał łóty potrzeba go rozmnożyć przez 32 i wypadnie $\frac{3.32}{4}=\frac{96}{4}=24$ Łótów.

135. W przypadku drugim wieloraz powinien bydź téyże samėy natury co dzielny; ponieważ w nim idzie o podzielenie dzielnego na pewną liczbę całkowitą lub ułamkową części oznaczoną przez dzielnika.

Na ówczas sam tylko dzielnik powinien bydź poiedynczy, a ieżeli nim nie iest, obróci się go tak, iak wyżéy na iedno wyrażenie ułamkowe, poczém postąpi się w działaniu iak w dzieleniu ułamków, mnożąc dzielnego przez mianownika ułamku dzielnika, i mnogość tę dzieląc przez licznika.

Np 57 sąż:; 5 stóp, 5 cali roboty kosztowały 854 złł:, 17 gr: m: i 1 szel:, poczemuż przypada iéy sążeń. Dzielnikiem iest tu 57 sąż:; 5 stóp, 5 cali $= 57+\frac{5}{6}+\frac{5}{72}$ sąż: $=$ sąż: $57+\frac{60}{72}+\frac{5}{72}=$ sąż: $57+\frac{65}{72}=\frac{4269}{72}$ sąż:, a tak wypada podzielić dzielnego na $\frac{4169}{72}$ części, albo 72 razy wziętego dzielnego przez 4169 części.

Dzielny pomnożony przez 72, daie:

854 Złł:, 17 gr: 1 szel;	57 sąż; 5 stóp 5 cali
72	4169 calów
61529 Złł:, 18 gr: —	14 Złł: 22 gr: 2 szel; $\frac{1232}{4169}$.
3163	
94908 gr:	
11528	
3190	
9570 szel:	
1232	

Dzieląc 61529 Złł: przez 4269 daię na wieloraz 14 złotych i 3163 na resztę. Te 3163 Złł: obracam na grosze i mam wraz z 18 groszami dzielnego 94908 gr:, które rozdzieliwszy przez 4169 mam wieloraz 22 grosze i 3190 groszy zostaiącéy reszty. Te 3190 gr: obróciwszy na szelągi uczyni mi 9570 szelągów, które podobnież, przez 4169 rozdzielam, i mam wieloraz 2 szel: i 1252 szel: reszty; zatém całkowity wieloraz iest 14 Złł:, 22 gr: 2 szel: i $\frac{1232}{4169}$ szeląga.

136. Gdyby wypadło obrócić liczbę wieloraką na dziesiętne i przeciwnie tak sobie postąpić należy.

Niechby *np* wypadło obrócić na dziesiętne: 3 stopnie, 18 minut, 20 sekund. Uważam: że ponieważ iedna sekunda iest $\frac{1}{60}$ minuty, zatém $18'\frac{20}{60} = 18'\frac{1}{3} = 18', 333 \ldots$ daléy $18', 333 \ldots = \frac{18°, 333}{60} = \frac{1°, 8333\ldots}{6} = 0°, 3055\ldots$ Zatém $3°, 18', 20'' = 3°, 3055$.

Niech będzie ieszcze 5 sążni, 4 stóp, 3, cale 7 linii do zamienienia na dziesiętne.

Nayprzód 7 linii $= \frac{7}{12}$ cala $= 0,58 \overset{\text{cala}}{\ldots}$ Zatém liczba zadana iest: 5 sąż:, 4 stopy, $3 \overset{\text{ca}}{,} 58\ldots$ Aby obrócić $3 \overset{\text{ca}}{,} 58\ldots$ na ułamek dziesiętny stopy, potrzeba podzielić przez 12, ponieważ $3 \overset{\text{ca:}}{,} 58 = \frac{3, 58}{12}$ stóp $= \overset{\text{st:}}{0, 298}\ldots$, iest więc 5 sąż: $4 \overset{\text{st:}}{,} 298\ldots$ Ale $\overset{\text{st:}}{4, 298} = \frac{4, 298}{6}$ sąż: $= \overset{\text{sąż:}}{0, 7163}$; więc nakoniec 5 sąż; 4 st:, 3 cali 7 linii $= \overset{\text{sąż:}}{5, 7163}$ przybliżony mniéy iak o iednę dziesięciotysiączną.

137. Ztąd widzimy: *iż potrzeba zacząć od naymnieyszego podziału iedności głównéy, i dzielić koléyno przez liczbę wyrażaiącą ile każdy podział zawiéra się w poprzedzaiącym.*

138. Postępowanie odwrotne podaie sposób przetworzenia ułamka dziesiętnego na liczbę wielorakę.

Powróćmy do przykładu poprzedzaiącego, szukaiąc co znaczy w sążniach, stopach, calach, liniach, liczba $5,^{\text{sąż:}}7163$. Łatwo iest widzieć nayprzód, że 0, 7163 będąc ułamkiem sążnia, mnożąc go więc przez 6, obrócimy go na stopy, zkąd wypadnie że $0,^{\text{sąż:}}7163=4,^{\text{st:}}2978$. Podobniez ułamek $0,^{\text{st:}}2978$ pomnożony przez 12 wyda cale, to iest $0,^{\text{st:}}2978=3^{\text{cal}},5736$. Nakoniec ułamek $0,^{\text{cal:}}5736$ pomnożony przez 12 wyda linie, tak, że: $0,^{\text{cal:}}5736 = 6^{\text{lin:}},8832$ około 7^{linii}. A więc $5,^{\text{sąż:}}7163=5$ sąż: 4st:, 3 cal:, 7 linii.

Widzimy więc: że *takowa zamiana odbywa się postępowaniem przeciwném poprzedzaiącemu, mnożąc koléyno przez liczby wskazuiące ile razy każdy gatunek iedności zawiéra w sobie gatunek następuiący niższy.*

Przystosowanie działań poprzedzaiących do rozwiązania niektórych zagadnien.

I. Potrzeba na iaki mundur sukna łokci 2, cali 4; na kamizelkę 3 cwierci, na spodnie pół-łokcia i cali 9, wieleż potrzeba na wszystko?

Ponieważ 1 łokieć ma cali 24; zatém cali 4 względem łokcia są $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$ łokcia; cwierci 3 są $\frac{3}{4}$ ł:, pół-łokcia czyli cali 12 i 9 cali czynią $\frac{21}{24}$ ł: $= \frac{7}{8}$ łó: Zatém $2\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = 2\frac{4}{24} + \frac{18}{24} + \frac{21}{24}$ ł: $= 2\frac{4}{2}$ $= 3\frac{19}{24}$ ł;

II Armata ulana niewywiercona waży Cetnarów 56, funtów 60, a po wywierceniu waży tylko cetnarów 51, funtów 80, wieleż zniéy ubyło spiżu przez wywiercenie?

Ponieważ 1 Cetnar ma funtów 160, zatém funtów 60 względem cetnara są $\frac{60}{160} = \frac{3}{8}$ cet: podobnież funtów 80 względem cetnara są $\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$ cet:; zatém 56 cet: + 60 funt: $= 56\frac{3}{8}$ cet: a 51 cet: + 80 funt: $= 51\frac{1}{2}$ cet. Różnica więc między $56\frac{3}{8}$ a $51\frac{1}{2}$ wyda ilość spiżu ubyłego, to iest $56\frac{3}{8} - 51\frac{1}{2} = 56\frac{3}{8} - 51\frac{4}{8} = 4\frac{7}{8}$ cet:

III. Podróżny iaki uchodzi we 4 godzinach mil 3; idąc tylko przez 48 minut, wieleż mógł uyśdź?

Uchodząc we 4 godzinach mil 3, w iednéy godzinie uchodzi tylko część 4tą mil 3, to iest $\frac{3}{4}$ mili, zatém w minutach 48 czyli $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$ godziny, uydzie $\frac{3}{4} X \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ mili.

IV. Kupiono sukna łokci $7\frac{1}{2}$ i cali 4, płacąc za łokieć po Złł: 28 ileż zapłacono za wszystko? — Ponieważ pół-łokcia i cali $4 = 16$ calom $= \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ łokcia, zatém $7\frac{2}{3}$ Ł.

$$
\begin{array}{rr}
 & 28 \text{ Złł:} \\
\hline
 & 196 \\
28 \cdot \frac{2}{3} = \ldots & 18\frac{2}{3} \\
\hline
\text{Złł:} & 214\frac{2}{3}
\end{array}
$$

V. Wiele może bydź ładunków z 3 cetarów i 80 funtów prochu, ieżeli na każdy ładunek potrzeba go funt 1 i łotów 24? Ponieważ 3 c: i 80 funt: $= 560$ funt:, a 1 funt i 24 łot: $= 1\frac{24}{32}$ f. $= 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ funt:; zatém liczba szukanych ładunków będzie:

$$560 \text{ funtów} : \frac{7}{4} \text{ funt:} = 560 \cdot \frac{4}{7} = 320 \text{ ładunków.}$$

VI. Wiadomo z doświadczenia że złoto zanurzone w wodzie utraca wniéy około $\frac{2}{37}$ swego ciężaru, srebro zaś utraca $\frac{2}{21}$ a miedź $\frac{5}{43}$; wieleż utraci na swéy wadze ciało w którém znayduie się $1\frac{1}{2}$ funta złota; $3\frac{2}{3}$ funt: srebra, a $2\frac{3}{4}$ funt: miedzi, będąc zanurzone w wodzie?

Jedność iakakolwiek złota *np* funt 1 utraca w wodzie $\frac{2}{37}$, zatém $1\frac{1}{2}$ funta złota utraci $\frac{2}{37}$ z $1\frac{1}{2}$ funt: $= \frac{2}{37} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{37}$ funt: złota, podobnież rozumuiąc względem srebra będzie $\frac{2}{21}$ z $3\frac{2}{3}$ funt: $= \frac{2}{21} \cdot \frac{11}{3} = \frac{22}{63}$ funt: srebra, nakoniec względem miedzi będzie $\frac{5}{43}$ z $2\frac{3}{4}$ funt: $= \frac{5}{43} \cdot \frac{11}{4} = \frac{55}{172}$ funt: miedzi. Zatém utraca to ciało w wodzie $\frac{3}{37} + \frac{22}{63} + \frac{55}{172} = \frac{300721}{400932} = 24$ łotów blisko.

VII. Dwie wyprawy odległe od siebie na mil 284 iadą naprzeciw siebie, iedna uieżdża we 2 godzinach mil $2\frac{1}{2}$, druga w godzinach 5 mil $6\frac{3}{4}$, za wieleż dni ziadą się z sobą gdy co dzień iadą po godzin 9?

Piérwsza iadąc w godzinach 2 mil $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ mili, w iednéy więc godzinie uieżdża $\frac{5}{2}$ mil $: 2 = \frac{5}{4}$ mil; druga iadąc w godzinach 5 mil $6\frac{3}{4} = \frac{27}{4}$ mil, w iednéy uieżdża mil $\frac{27}{4} : 5 = \frac{27}{20}$ mil, obydwie więc w 1 godzinie uieżdzaią $\frac{5}{4} + \frac{27}{20} = \frac{25}{20} + \frac{27}{20} = \frac{52}{20}$ mil na 1 godzinę, a zatém na dzień czyli 9 godzin uieżdżaią mil $\frac{52}{20} \cdot 9 = \frac{468}{20}$ mil; zatém 284 mil $: \frac{468}{20} = 284 \cdot \frac{20}{468} = \frac{5680}{468} = 12\frac{16}{117}$ dni.

Chcąc dóyśdź co znaczy $\frac{16}{117}$ dnia, ponieważ tu uważaią się dni po godzin 9 zatém $\frac{16 \cdot 9}{117} = 1\frac{3}{13}$ godzin, to iest ziadą się z sobą za dni 12 i godzin $1\frac{3}{13}$.

VIII. W woysku iakim codzienna racya Owsa na konie Artyleryczne wynośi 109 korcy cwierć iednę i garcy 4, gdy na iednego konia wychodzi na dzień garcy $2\frac{1}{3}$, wieleż iest takich koni?

Korcy $109 \cdot 4 = 436$ cwier: a 1 c: $= 436 + 1 = 437$ c: $\cdot 8$ garcy $= 3500$ garcy, a że na iednego konia wychodzi gar: $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ g:, zatém $3500 : \frac{7}{3} = 3500 \cdot \frac{3}{7} = \frac{10500}{7}$ koni $= 1500$ koni Artylerycznych.

ROZDZIAŁ III.

O Potęgach i Piérwiastkach.
(Des Puissances et des Racines).

§. 24.
Składanie potęg.

139. Wimy iuż (42) co iest potęga iakiéy liczby. W ogólności mnożąc iaką liczbę przez sie-

bie samą razy 1, 2, 3 *i. t. d*, otrzymuiemy iéy potęgę 1szą, 2gą, 3cią ... *i. t. d.*

Abyśmy poznali iak nagle powiększaią się potęgi liczb, im te wynosimy do wyższych stopni, uważmy 7 piérwszych potęg z liczb naturalnych od 1 aż do 9.

1sza	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2ga	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3cia	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4ta	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5ta	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6ta	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7ma	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

Widzimy tu że *np* 7ma potęga z 2 iest iuż 128, a potęga 9 czyni 4782969.

140. Ponieważ mnożąc ułamek przez ułamek, mnożą się osobno ich liczniki a osobno ich mianowniki, zatém: *Składamy z ułamka iakąkolwiek potęgę, gdy obydwa iego wyrazy do téyże potęgi wynosimy.*

Ztąd zaś łatwo widzimy: że potęgi ułamków właściwych nagle się zmniéyszaią, ponieważ potęgi mianownika staią się coraz bardziéy większe ze względu na potęgi licznika. Tak *np* 7mą potęgą z $\frac{1}{2}$ iest $\frac{1}{128}$, a potęga 9tą iest tylko $\frac{1}{4782969}$.

§. 25.

§. 12.

Wyciąganie pierwiastków kwadratowych (Extraction des racines carrées).

141. Żeby z iakiego kwadratu powrócić nazad do liczby która go złożyła, i która nazywa się iego *pierwiastkiem kwadratowym*, zważmy tym końcem prawo podług którego składamy takowy kwadrat. Aby z liczby iakiéy złożonéy z dwóch cyfer zrobić kwadrat *np* z 35, potrzeba 35 rozmnożyć przez 35; co wymaga cztérech mnogości cząstkowych. 1^{od} mnożąc 5.5 robi się kwadrat z iednościów. 2re mnożąc 30.5, powstaie mnogość dziesiątków przez iedności. 3^{cie} Mnożąc drugi raz 30.5 powstaie drugi raz taż sama mnogość. Nakoniec 4te mnożąc 30.30 składamy kwadrat z dziesiątków. A że to na każdéy liczbie złożonéy z dwóch cyfer zawsze się prawdzi; zatém: *Kwadrat liczby złożonéy z dwóch cyfer składa się: 1^{od} z kwadratu dziesiątków, 2re Z podwóynéy mnogości dziesiątków przez iedności, i nakoniec 3^{cie} z kwadratu iednościów.*

$$\begin{array}{r} 35 \\ \underline{35} \\ 175 \\ \underline{105} \\ 1225 \end{array} \text{ kwadrat}$$

Tak $(35)^2 = 30^2 + (2\cdot 30)\cdot 5 + 5^2 = 900 + 300 + 25 =$ 1225 Kwadrat.

Aby rozmnożyć $7\dagger 5$ przez $7\dagger 5$, pomnóżmy nayprzód 7 i 5 przez 7, potém przez 5, co nam da $7^2\dagger 7\cdot 5$; mnożąc znowu 7 i 5 przez 5, otrzymamy $7\cdot 5\dagger 5^2$. Ztąd wypada, że aby z $7\dagger 5$ złożyć kwadrat, niedosyć iest wynieść do kwadratu 7 i 5, potrzeba ieszcze dodać podwóyną mnogość z 7 przez 5, i tym sposobem wypadnie: $49\dagger 25\dagger 2\cdot 35$ albo $144=12^2$. A tak *kwadrat iakiéy liczby złożonéy z dwóch części składa się: z kwadratu każdéy téy części, powiększonéy podwóyną ich mnogością.*

Gdyby liczba którą żądamy wynieść do kwadratu składała się z trzech cyfer, rozłożylibyśmy ią także na dwie części *np* rozkładaiąc liczbę 975 wypadłoby $900\dagger 75$, albo $970\dagger 5$.

Uważaiąc ią złożoną z dwóch części 900 i 75, i mnożąc ią przez siebie, widzielibyśmy, że iéy kwadrat składa się: z kwadratu stów, więcéy podwóyności stów pomnożonéy przez dziesiątki i iedności, więcéy z kwadratu liczby wyrażonéy przez dwie ostatnie cyfry.

Uważaiąc znowu liczbę 975 iako złożoną z dwóch części $970\dagger 5$ i mnożąc $970\dagger 5$ przez siebie, widzilibyśmy, że kwadrat z 975 składa się z kwadratu liczby wyrażonéy przez dwie piérwsze cyfry, więcéy podwóyności stów i dziesiątków pomnożonych przez iedności, więcéy kwadratu z iedności ów; zatém kwadrat iakiéy liczby złożonéy z trzech cyfer, może bydź uważany dwoma rozmaitemi sposobami, to iest: 1^{od} Że kwadrat ten składa się z kwadratu stów, więcéy podwóyności stów pomnożonéy przez dziesiątki i iedności, więcéy z kwadratu liczby wyrażonéy przez dwie ostatnie cyfry. 2re Albo że kwadrat takiéy liczby składa się z kwadratu liczby wyrażonéy przez dwie piérwsze cyfry, więcéy podwóyności stów i dziesiątków pomnożonéy przez iedności, więcéy z kwadratu iedności ów. Nakoniec stosuiąc to do własności okazanéy wyżéy, powiedzieć można: *że kwadrat iakiéy liczby złożonéy z dwóch części, składa się: z kwadratu każdéy części powiększonych podwóyną ich mnogością.*

Toż rozumowanie służy gdyby liczba składała się i z więcéy cyfer.

142. Zrozumiawszy dobrze to co poprzedziło, nie będziemy mieć żadnéy trudności w wyciąganiu pierwiastka kwadratowego z liczby złożonéy z ilukolwiek bądź cyfer, zwłaszcza uważaiąc co następuie:

Kwadraty z liczb	10.	100.	1000.	10000.	100000.
są	100.	10000.	1000000.	100000000.	10000000000.

Widzimy tu, że wszelka liczba złożona z iednéy cyfry, a zatém wpadaiąca między 1 i 10 ma za swóy kwadrat liczbę wpadaiącą między 1 i 100, to iest, kwadrat iéy składa się z iednéy lub dwóch cyfer; podobnież wszelka liczba złożona z dwóch cyfer ma w swoim kwadracie cyfer 3 lub 4 *i. t. d.* Wogólności więc powiedzieć można: *że kwadrat iakiéy liczby, ma podwóyność, albo podwóyność mniéy iedno cyfer swego piérwiastka.*

Liczby złożone z iednéy lub dwóch cyfer, maią swoie piérwiastki kwadratowe albo w Tablicy mnożenia, albo w Tablicy (139.) Co do liczb innych dwa rozróżnimy przypadki.

Przypadek 1wszy. Jeżeli liczba zadana ma trzy lub cztéry cyfry *np* 784, iéy pierwiastek ma ich dwie, a zatém 784 składać się musi z kwadratu dziesiątków, z kwadratu iedności, i z podwóynéy mnogości dziesiątków przez iedności. A że kwadrat z dziesiątków powstaie, dodaiąc dwa zera do kwadratu cyfry znaczącéy wyrażaiącéy dziesiątki, ztąd wypada: że kwadrat ten niewchodzi w dodanie tych trzech części, aż dopiéro w porządku stów. Oddzieliwszy więc dwie cyfry 84 od liczby zadanéy 784, pozostałe 7 zawiérać będzie, kwadrat cyfry dziesiątków uważanych iak iedności proste, i prócz tego zawiérać ieszcze będzie sta, które powstały z innych części kwadratu. Weźmy więc piérwiastek naywiększego kwadratu 4 zawiéraiącego się w 7, a że 7 wpada między kwadraty z 2^{ch} i 3^{ch}, liczba też zadana 784 wpada między 20^2 i 30^2, a zatém, piérwiastek iéy znayduię się między 20 i 30, to iest na cyfrę dziesiątków wypada 2. Odiąwszy kwadrat z

	28 Pierwia:	
7,84	49	48
384	9	8
384	441.	384

tych 2, to iest 4 od 7, reszta 3 musi bydź wypadkiem z kwadratu iednościów i podwóyności dziesiątków pomnożonych przez iedności, zatém w 384 muszą zawiérać się obydwie te części; A że podwóyność dziesiątków pomnożonych przez iedności powstaie, mnożąc podwóyność cyfry wyrażaiącéy dziesiątki przez iedności i kładąc zero po prawéy iéy ręce, zatém wdodawaniu mnogość ta przypada w porządku dziesiątków, więc mieści się w 38 po oddzieleniu cyfry 4 iednościów. W tych 38 prócz dziesiątków powstałych z kwadratu iednościów, mogą ieszcze zawiérać się dziesiątki powstałe dla tego; że liczba 784 może niebydź dokładnym kwadratem; gdyby więc takowe dziesiątki były wiadome, odéymuiąc ie od 38, i resztę dzieląc przez 4, to iest przez podwóyność cyfry dziesiątków iuż wynalezionych, na wieloraz powinny wypaśdź iedności. Podzielmy więc 38 przez 4, ale przypuściwszy, że w téy reszcie znayduią się dziesiątki powstałe dla tego, że 784 nie iest dokładnym kwadratem; dzielny 38 byłby większy od dzielnego, którego w téy mierze użyć potrzeba, zatém i wieloraz wypadły, byłby za wielki, doświadczyć go iednak można w następuiący sposób: Jeżeli wieloraz z $\frac{38}{4}$ albo 9, w samych liczbach całkowitych, wyraża w samėy rzeczy iedności pierwiastka szukanego; zatém położywszy 9 obok podwóyności 4, cyfry wyrażaiącey dziesiątki, wypadłe 49 będą podwóynością dziesiątków dodanych do iedności, a 49.9 będzie podwóyną mnogością dziesiątków przez iedności, więcey kwadrat z iedności. Że zaś $49 . 9 = 441$ które iest > 384, zatém 9 iest za wielkie. Doświadczmy tymże sposobem wielorazu 8, a że $48 . 8 = 384$ które odięte daią na resztę 0, widzimy więc: że 784 iest kwadratem dokładnym z 28. Wzór takowego działania położony iest wyżey:

27,35	52 Piérwia:
2 35	102
2 04	2
31.	204.

Podobnież wyciągaiąc pierwiastek kwadratowy z 2735, otrzymuiemy na niego 52 z resztą pozostałą 31, tak że 52 iest pierwiastkiem naywiększego kwadratu iaki mieści się w 2735.

Znayduiemy także: że $\sqrt{576} = 24$; że $\sqrt{9216} = 96$.

Przypadek 2gi Jeżeli kwadrat składa się z więcey iak 4ch cyfer, używamy podobnegoż rozumowania, bo na ówczas lubo pierwiastek ma więcey iak dwie cyfry, można go iednak uważać iako złożony z dziesiątków i iednościów. Tak *np* pierwiastek

523 można uważać iako złożony z 52 dziesiątków i 3 iedności.

Maiąc więc szukać pierwiastka liczby 273529, uważać możemy, że pierwiastek ten składa się także, z kwadratu dziesiątków uważanych iak iedności proste zawarte w 2735 po oddzieleniu dziesiątków i iednościów od liczby 273529. Wyciągaiąc więc pierwiastek z 2735 powyższym sposobem, znayduie na niego 52 dziesiątków i 31 na resztę, tak, że spuściwszy 29 obok 31, otrzymuię 3129 na podwóyną mnogość dziesiątków przez iedności, więcéy kwadrat z iednościów; oddzielaiąc więc kreską cyfrę 9; zostanie do podzielenia 312 przez 104 które są podwóynością wynalezionych dziesiątków 52, dokonywaiąc tego, wypadną na wieloraz iedności pierwiastka albo liczba większa. Nakoniec kładąc wynaleziony wieloraz 3 po prawéy stronie 104, będzie 1043, a mnożąc liczbę tę przez 3 i mnogość ztąd wypadłą 3129 odéymuiąc od reszty, ponieważ liczby te znoszą się; żądanym więc pierwiastkiem iest 523.

273529	523 Piér:	
235	102	1043
204	2	3
3129	204.	3129.
3129		
0		

143. Ponieważ postępowanie to do każdéy liczby stosowaném bydź może, wnosimy więc:

że ażeby z liczby iakiéy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, potrzeba zaczynaiąc od prawéy ręki, liczbę te podzielić na przedziały (tranches) *każdy o dwu cyfrach, zatém ieżeli liczba cyfer zadanych iest nieparzysta, ostatni przedział od lewéy ręki ma tylko cyfrę iednę. Poczém szuka się naywiększego kwadratu zawartego wpiérwszym przedziale od lewéy ręki, pierwiastek tego kwadratu, kładzie się na miéyscu pierwiastka i kwadrat z niego odéymuie się od tegoż przedziału. Obok pozostałéy reszty spuszcza się następuiący przedział, którego ostnią cyfrę odciąwszy kreską, pozostałą część dzieli się przez podwóyność znalezionéy cyfry pierwiastka i wieloraz wynaleziony kładzie się obok pierwiastka iako drugą iego cyfrę i obok dzielnika po prawéy stronie. Rozmnożywszy wynaleziony wieloraz przez dzielnika tak powiększonego, mnogość wypadłą odéymuie się od całego przedziału spuszczonego z liczby zadanéy. Do reszty pozostałéy spuszcza się znowu następuiący przedział, którego ostatnią cyfrę oddzieliwszy kreską, a uważaiąc dwie cyfry pierwiastka iuż wynalezionego za iednę, postępuie się wdziałaniu tymże samym sposobem, dopóki wszystkie cyfry liczby zadanéy niezostaną spuszczone.*

Uwaga. Pilnie uważać należy, że przez podwóyność dziesiątków, nietrzeba dzielić tylko część po oddzieleniu ostatniéy cyfry po lewéy ręce pozostałéy, tak dalece, że gdyby podwóyność dziesiątków w niéy się mieścić niemogła, oddzielonéy do tego cyfry nie należy używać i tylko na miéyscu piérwiastka piszę się o. Choćby zaś przytrafiło się przeciwnie, żeby podwóyność dziesiątków więcéy iak 9 razy w takowéy części zawierała się, dla tego iednak wielorazu niemożna pisać większego nad 9. Przyczyna tego taż sama co w dzieleniu,

Przykład. Z liczby 19079424 wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Podzieliwszy ią od prawéy ręki na przedziałów 4, wnoszę że piérwiastek szukany będzie miał cyfer 4, kwadrat nayblizszy 19 iest 16, którego piérwiastek iest 4, które kładą się na mieyscu pierwiastka. Zrobiwszy zniego kwadrat odeymuie się go od piérwszego przedziału, to iest 19 — 16 pozostaie 3. Obok téy reszty spuszcza się następuiący przedział 07, a oddzieliwszy od niego tymczasowo cyfrę ostatnią 7, część pozostałą po lewéy ręce 30, dzieli się przez podwóyność 8, pierwiastka wynalezionego; na wieloraz wypada 3. Mnogość 249 odiąwszy od 307, pozostaie na resztę 58. Obok téy reszty spuszcza się następuiący przedział 94. Opuszczaiąc na moment iego ostatnią cyfrę 4, dzieli się 589 przez podwóyność ze 43 albo 86, wieloraz wynaleziony 6, położywszy obok w pierwiastku i po prawéy ręce dzielnika, mnoży się tak powiększonego dzielnika 866 przez 6 i mnogość 5196 odéymuie się od 5894. Pozostaie na re-

19,07,94,24	4368 Pier:		
30,7	83	866	8728
5894	3	6	8
69 82,4	249	5196.	69824
69 82 4			
0			

sztę 698; Obok téy reszty, spuszcza się następuiący przedział 24, a opuszczaiąc na chwile iego ostatnią cyfrę 4, dzieli się 6982 przez podwóyność części otrzymanéy pierwiastka. wieloraz iest 8. Wieloraz ten kładzie się i w pierwiastku i po prawéy stronie dzielnika i tak powiększonego mnoży się przez tenże wieloraz 8, a ponieważ mnogość wyrównywa części pozostałéy z liczby zadanéy; zatém piérwiastkiem dokładnym iest 4368.

144. Liczbami *wymiernemi* (Commensurables ou Rationels), nazywaią się liczby maiące wspólną miarę z iednością *np* $\frac{2}{5}$ iest liczbą wymierną, ponieważ 5ta część iedności, mieści się 5 razy w 1, a 2 razy w $\frac{2}{5}$. Przeciwnie $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$ i tym podobne których pierwiastka kwadratowego dokładnie oznaczyć niemożna, to iest: że niepodobna iest rozłożyć ie na dwóch czynników równych, któreby pomnożone przez siebie wydały nazad liczbę zadaną, nazywaią się *niewymiernemi* (Irrationels, ou incommensurables), ponieważ ich stosunku z iednością oznaczyć niemożna. Tak *np* $\sqrt{7}$ iest większy od 2 bo $2.2=4<7$, a mniéyszy od 3, bo $3.3=9>7$, zatém piérwiastek téy liczby 7 wpada między 2 i 3. Gdybyśmy więc piérwiastek ten, oznaczyć mogli, byłoby nim 2 więcéy iakiś ułamek. Daymy że ta całość z ułamkiem zamienia się na iedno wyrażenie ułamkowe i przywodzi się go do naymniéyszego wyrażenia; gdyby ten skrócony ułamek był piérwiastkiem kwadratowym z 7, wypadłoby że kwadrat ułamka skróconego wydałby liczbę całkowitą co bydź

niemoże. Jakoż ponieważ oba wyrazy ułamka niemaią wspólnego dzielnika, oczéwista iest że i kwadrat licznika niebędzie miał żadnego dzielnika wspólnego z kwadratem mianownika; ieżeli zaś to niema miéysca, niepodobna też iest, żeby wieloraz z kwadratu licznika przez kwadrat zmianownika był liczbą całkowitą, zatém kwadrat ilości ułamkowéy którą przypuściliśmy za piérwiastak z 7 nie iest nią w rzeczy saméy. Słowem: *Jeżeli liczba całkowita niema piérwiastka w liczbach całych, niema go także i w liczbach łamanych, i liczba ta nazywa się* niewymierną.

145. Lubo zaś z wielu bardzo liczb piérwiastka kwadr: wyciągnąć spełna niemożna, zbliżyć się iednak do niego podług potrzeby lub upodobania zawsze możemy, tak, że niedokładność która ztąd powstaie w kwadracie, będzie mniéyszą od iakiéy zechcemy ilości, a to zamieniaiąc tę liczbę na ułamek któregoby mianownik był kwadratem, a na ówczas pierwiastek z licznika wzięty szczególnie w liczbach całkowitych wydaie pierwiastek liczby zadaney wyrażoney w iednościach ułamkowych gatunku oznaczonego przez pierwiastek kwadratowy mianownika. Tak *np* $\sqrt{2}$ będąc niewymiernėm, zamieniam liczbę 2 na 25^{tek} a że $1 = \frac{25}{25}$, zatém $2 = \frac{50}{25}$. Wyciągaiąc piérwiastek ztego ułamka podług tego co się powiedziało o skła-

daniu kwadratu z ułamka (140), wypada wyciągnąć pierwiastek z licznika 50 i zmianownika 25. Pierwiastek z 50 w liczbach całkowitych iest 7, a pierwiastek z 25 będąc zupełny 5, wypadnie $\frac{7}{5}$ albo $1\frac{2}{5}$ na pierwiastek z 2 przybliżony mniéy iak iednę 5tkę.

Oczéwista iest, że działanie to zasadzaiąc się natém: że kwadrat z ułamka wyraża się przez nowy ułamek któryby miał za licznika kwadrat z licznika poprzedniego, a za mianownika kwadrat z mianownika iego, stosuie się do ułamka iakiegokolwiek gatunku, a tém łatwiéy do ułamków dziesiętnych iako do innych. Jakoż wiadomo iest: że kwadrat iakiéy liczby wyrażonéy w dziesiątkach zawiéra w sobie sta, że kwadrat iakiéy liczby wyrażonéy w stach zawiéra w sobie dziesiątki tysięcy *i. t. d.* a zatém: *że liczba cyfer dziesiętnych kwadratu iest zawsze dwa razy większa od liczby cyfer pierwiastka.* Tę ostatnią własność wywieśdź można i z mnożenia dziesiętnych, w którém iak wiadomo, mnogość zawiéra w sobie tyle cyfer dziesiętnych ile ich się znayduie razem w obu czynnikach. Zatém w przypadku teraźniéyszym, liczba zadana uważana iak mnogość powstała z swego pierwiastka rozmnożonego przez siebie, powinna miéć dwa razy tyle cyfer dziesiętnych ile ich ma ten pierwiastek.

Zrozumiawszy to dobrze co poprzedziło, łatwo iest wnieść; że chcąc mieć pierwiastek kwadratowy *np* z 227 przybliżony mniéy iak o $\frac{1}{100}$; potrzeba liczbę tę obrócić na dziesięciotysiączne; to iest dodać do niéy od końca zer cztéry, co da 2270000 dziesięciotysięcznych, z których wyciąga się pierwiastek iak z liczb całkowitych, ale dla oznaczenia że na wypadek powinny wypaśdź setne, potrzeba oddzielić kreską dwie cyfry iego od prawéy ręki. Tym sposobem znaydziemy, że pierwiastek z 277 przybliżony mniéy iak o $\frac{1}{100}$ iest 15,06.

146. Gdyby liczba zadana zawiérała iuż w sobie dziesiętne, a była nieparzystą, przez dodanie zera, potrzeba uczynić dziesiętne iéy parzystemi. Aby *np* wyciągnąć pier: z 51, 7 dołączemy do téy liczby zero, żeby przynaymniéy znaydowały się setne, poczém wyciąga się pierwiastek z 51,70. Chcąc mieć w pierwiastku ieszcze o iednę cyfrę dziesiętną więcéy; potrzeba dołączyć na końcu téy liczby dwa zera, co uczyni 51,7000 a wyciągnąwszy pierwiastek wypadnie że $\sqrt{(51{,}7000)} = 7{,}19$.

Dla wprawy szukaymy pierwiastków z liczb 2 i 3 z siedmiu cyframi dziesiętnemi, co wymaga aby po tych liczbach położyć zer czternaście i wypadnie $\sqrt{2} = 1{,}4142136$; $\sqrt{3} = 1{,}7320508$.

Inne przykłady: $\sqrt{0,3}$ przybliżony mniéy iak o $\frac{1}{100}$ iest 0,54. $\sqrt{5,7} = \sqrt{57000} = 2,38$; $\sqrt{594,823321} = 24,389$.

147. *Uwaga.* Wynalazłszy więcéy iak połowę cyfer żądanych w pierwiastku, resztę ich można otrzymać przez samo dzielenie, dzieląc resztę wypadłą przez podwóyność cyfer wynalezionych.

Tak *np* z liczby 32976 pierwiastek iest 181 z resztą 215, dzieląc tę reszte 215 przez podwóyność z 181 to iest przez 362 i posuwaiąc wieloraz aż do dwóch dziesiętnych, wypadnie 0,59 które potrzeba dodać do 181, i wypadnie 181,59 na pierwiastek z 32976 przybliżony mniéy iak o $\frac{1}{100}$.

Przyczynę tego zobaczymy w Algebrze.

148. Gdy wypada wyciągnąć pierwiastek z ułamka niewymiernego, to iest że licznik i mianownik iego nie są doskonałemi kwadratami, natenczas dla uniknienia podwóynego przybliżenia, *robi się ieden zwyrazów iego dokładnym kwadratem, mnożąc licznika i mianownika iego przez mianownika iako oznaczaiącego podział iedności, poczém z każdego wyciąga się osobno pierwiastek.* Tak *np* $\sqrt{\frac{3}{7}}$ rozmnożywszy licznika i mianownika iego przez mianownika 7, wypadnie $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{21}{7^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, a że $\sqrt{21} = 4,582$, a $\sqrt{7^2} = 7$, zatém $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{4,582}{7} = 0,654$.

149. Jeżeli całkowite są połączone z ułamkami takowe zamięniaią się na ułamki i odprawia się działanie iak z ułamkami, Tak *np* $(\sqrt{3\frac{5}{7}}) = \sqrt{\frac{26}{7}} = \frac{\sqrt{26.7}}{7^2}$; a że $\sqrt{182} = 13{,}4907$, zatém $\sqrt{3\frac{5}{7}} = \frac{13{,}4907}{7} = 1{,}9272$.

W powszechności podciągaiąc iaką ilość niewymierną pod rachunek, potrzeba się zawsze domyślać, że rozumowania ściągaią się do wartości tylko przybliżonéy téyże ilości, a zatém takowym działaniom naznaczamy przyczynę, tymże samym sposobem co na liczby ułamkowe. Ztąd łatwo nabywamy wyobrażenia co znaczy $4 . \sqrt{7}$, albo $4\sqrt{7}$; 2re że $4 . \sqrt{7} = \sqrt{7} . 4 = \sqrt{(4^2 . 7)} = \sqrt{112}$. 3cie że $\sqrt{2} . \sqrt{3} = \sqrt{3} . \sqrt{2} = \sqrt{(2.3)} = \sqrt{6}$. 4te Możemy rozmnożyć przez iednakową liczbę obydwa wyrazy ułamka niewymiernego:

Np $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{7}} \ldots$ *i. t. d.*

150. Zakończmy to niektóremi ieszcze uwagami.

1od Liczby dane powinny się przygotować w ten sposób, aby w rachunek wyciągania pierwiastków same tylko liczby całkowite wchodziły.

2re Że liczba cyfer dziesiętnych iakiego kwadratu, iest zawsze parzystą i podwóyną cyfer iego pierwiastka, potrzeba więc dodawać zera albo odcinać dziesiętne, aby tego warunku dopełnić we wszelkich przypadkach.

3^{cie} Gdy kwadrat iakiéy liczby *np* 18 iest wiadomy, aby mieć kwadrat liczby następuiącéy 19; ponieważ $19 = 18 + 1$, zatém kwadratem z nich iest $18^2 + 2.18 + 1$ (141.), zatém do 324 które są kwadratem z 18, doda się 37 i wypadnie $361 = 19^2$. W powszechności *maiąc kwadrat iakiéy liczby wiadomy, dodaiąc do niego iedno, więcéy podwóyność téyże liczby, otrzymuiemy kwadrat liczby następuiącéy.* Ztąd zrozumieć można nieiako wyżéy położoną własność (143.) że każdy przedział niemoże wydać reszty większéy nad podwóyność pierwiastka otrzymanego, ponieważ na ów czas potrzebaby położyć o iednę iedność więcéy w takowym pierwiastku.

§. 25.

Wyciąganie pierwiastków Sześciennych (Extraction des racines Cubiques.)

151. Nim postąpimy do wyciągania *pierwiastka sześciennego* potrzeba nam nayprzód roztrząsnąć prawo podług którego składa się sześcian, który iest mnogością iakiéy liczby przez iéy kwadrat. Wystawiwszy sobie liczbę tę niech nią będzie *np* 47 rozłożoną na dwie części $40 + 7$, widzieliśmy (141.) że kwadrat iéy $(40 + 7)^2 = 40^2 + (40.2.7) + 7^2$.

Ażeby

Ażeby mieć sześcian z téyże liczby, potrzeba trzy ilości iéy kwadrat składaiące, mnożyć ieszcze przez dwie części $40 \dagger 7$. Mnożąc więc kwadrat części piérwszéy przez 40, otrzymuiemy:

1od - - $40^2 . 40$ - - $= 40^3$ (*sześcian części 1wszéy.*)

2re Mnożąc $(40 . 2 . 7)$ przez 40 iest $(40.40.2.7)$ albo $= (40^2.2.7)$ (*dwa razy kwadrat części 1széy przez 2gą*)

3cie Mnożąc 7^2 przez 40. iest $= (7^2 . 40)$ (*Mnogość kwadratu części 2giéy przez 1szą*)

Podobnież mnożąc przez część drugą 7, liczby zadanéy otrzymuiemy:

1od - - - - $(40^2 . 7)$ (*kwadrat 1éy części pomnożonéy przez część 2gą*)

2ra $(40 . 2 . 7) . 7$ albo = $(7^2.2.40)$ (*dwa razy mnogość kwadratu części 2giéy przez 1wszą*)

3cie $7^2 . 7$ czyli - - 7^3 (*sześcian z części drugiéy*)

Dokładniéy rozpoznamy te części w wzorze następuiącym:

$$\text{Kwadrat } (47.)^2 = (40+7)^2 = 40^2 + 40 . 2 . 7 + 7^2$$

$$\text{Mnożąc przez } \underline{47 = (40+7) = 40+7}$$

$$\text{Otrzymuiemy } 47^3 = (40+7)^3 = 40^2 . 40 + 2 . 40.40.7 + 40.7^2 + 40^2 . 7 \dagger 40 . 2 . 7 . 7 \dagger 7^2 . 7$$

Albo ponieważ z poiedyńczych mnogości po prawéy stronie będących $40^2 . 40 = 40^3$; $2.40.40 . 7$

$7 = 2.40^2.7$; $40.2.7.7 = 2.40.7^2$; nakoniec $7^2.7 = 7^3$; wypada więc że:

$$(47)^3 = (40+7)^3 = 40^3 + \underline{2.40^2.7} + \overline{40.7^2} + \underline{40^2 7} + \overline{40.2.7^2} + 7^3.$$

Że zaś i w tych poiedyńczych mnogościach, mnogość 2ga i 4ta iakoteż 3a i 5ta zebrane bydź mogą tak, że: $2.40^2.7 + 1.40^2.7 = 3.40^2.7$; a $1.40.7^2 + 40.2.7 = 3.40.7^2$; wypada więc nakoniec że:

$$47^3 = (40+7)^3 = 40^3 + \underline{3.40^2.7} + \underline{3.40.7^2} + 7^3$$

to iest: $47^3 = 103823 = 64000 + 33600 + 5880 + 343.$

$$\begin{array}{rr} \text{czyli } 40^3 = & 64000 \\ 3.40^2.7 = & 33600 \\ 3.40.7^2 = & 5880 \\ 7^3 = & 343 \\ \hline (47)^3 = & 103823. \end{array}$$

152. Ztąd widzimy że sześcian wszelkiéy liczby złożonéy z dziesiątków i iedności składa się:

1od *Z sześcianu części piérwszéy* (40^3)

2re *Z potróynego kwadratu częsci piérwszéy rozmnożonego przez część drugą* ($3.40^2.7$).

3cie *Z potróynego kwadratu części drugiéy przez piérwszą* ($3.7^2.40$)

4te *Z sześcianu części drugiéy* (7^3).

Podobnież maiąc liczbę *np* 12 i rozłożywszy ią na dwie części $7+5$, sześcian z niéy:

$$(7+5)^3 = 7^3+3\cdot 7^2\cdot 5+3\cdot 5^2\cdot 7+5^3.$$

to iest: $12^3 = 343+735+525+125 = 1728.$

152. Sposobem podanym (143) okazać możemy, że sześcian iakiéy liczby zawiéra w sobie zawsze potróyność cyfer które ma w swoim pierwiastku albo potróyność mniéy 1, albo potróyność mniéy 2.

Pierwiastki liczb <1000 maiąc tylko iednę cyfrę, można ie widzieć w Tablicy położonéy (139.). Co do pierwiastków sześciennych z liczb innych dwa rozróżniemy, przypadki.

153. *Przypadek I^wszy* Jeżeli pierwiastek składa się tylko z dwóch cyfer, sześcian iego ma ich 4; 5 albo 6. Ażebyśmy więc z sześcianu powyższego 103823 powrócili do iego pierwiastka 47, uważam że sześcian z dziesiątków powstaie: wynosząc do sześcianu cyfrę znaczącą dziesiątki i kładąc po prawéy iego ręce 3 zera; tak 64000 które są sześcianem ze 4 dziesiątków, niemaią żadnych cyfer znaczących w porządku niższym od tysięcy, zatém szukaiąc sześcianu dziesiątków liczby 103823, można wniéy od prawéy ręki oddzielić trzy cyfry 823. Ułożywszy więc działanie tak iak do wyciągania pierwiastku kwadratowego, oddzielimy trzy pierwsze cyfry

od prawéy ręki kreską, a naywiększy sześcian zawarty w 103 będzie sześcianem dziesiątków uważanych iak iedności proste, i prócz tego zawiéraią się ieszcze tysiące które powstały z innych części.

$\sqrt{103,823}$	47 Pier:	Sze:
64	48	48
398,23	96	84
	64	49
	5824	5689
	8	7
	46592.	39823.

Szukaiąc naywiększego sześcianu zawartego w 103 znayduię 64, których pierwiastkiem sześciennym iest 4, i te są cyfrą dziesiątków piérwiastka; bo ponieważ 103823 iest $> 40^3$ albo 64000, a $< 50^3$ albo 125000, zatém piérwiastek dziesiątków szukanych, wpada między 40 i 50. Odiąwszy 64 to iest sześcian ze 4, od 103, pozostaie z dołączeniem cyfer odciętych na resztę ostatnią 39823. W téy liczbie znayduią się ieszcze trzy inne części sześcianu; to iest: potróyny kwadrat dziesiątków pomnożonych przez iedności, albo $40^2 . 3 . 7$; potróyność dziesiątków pomnożonych przez kwadrat z iedności albo $40 . 3 . 7^2$, i sześcian z iedności albo 7^3. Gdybyśmy znali wartość $40^2 . 3 . 7$, ponieważ znamy dziesiątki 4, dzieląc tę mnogość przez $3 . 40^2$, otrzymalibyśmy iedności 7, a lubo nieznamy $40^2 . 3 . 7$, wiemy iednak, że mnogość z trzech razy wziętego kwadratu dziesiątków przez iedności powstaie, mnożąc kwadrat z dziesiątków to iest 16 trzy razy wzięty to iest $16.3=48$. przez iedności i kładąc po prawéy ręce téy mnogości dwa zera, zatém mnogość ta niema żadnych cyfer znaczących w porządku niższym od stów, ponieważ zawiéra czynnika 4^2 wyrażaiącego kwadrat z dziesiątków. Oddziélmy więc dwie ostatnie cyfry 23 a część pozostała 398, musi zawiérać w sobie $16 . 3$ albo 48, i prócz tego sta wynikłe z dwóch innych części sześcianu, które z oddzieloną częścią 23 powinny składać $40 . 3 . 7^2$, to iest potróyność dziesiątków pomnożonych przez kwadrat z iedności i sześcian z iedności 7^3. Dzieląc więc 398 przez 48, które tu wyraża potróyność kwadratu dziesiątków $4^2 . 3$, znayduiemy na wieloraz 8; ale powyższe rozumowanie przekonywa nas, że nie należy tych iedności uznawać za iedności pierwiastka szukanego, bez doświadczenia onych, a to składaiąc trzy ostatnie części sześcianu, które powinna zawiérać reszta 39823. Dokonywaiąc więc tego pod 48 czyli 4800, które są potróynością kwadratu dziesiątków położmy potróyną mnogość dziesiątków przez 8 albo $40 . 3 . 8=960$; daléy kwadrat z 8 albo 64, i pomnożmy summę 5824 przez 8. Jeżeli 8 iest cyfrą iednościów, mnogość ta powinna bydź równa reszcie pozostałéy lub od niéy mniéysza, ponieważ tym sposobem składamy trzy częsci które ta reszta w sobie zawiéra. A że mnogość ta iest większa od 39823, wypada więc, że iedności piérwiastka są <8. Bierze się więc na tę iedności 7, a że czyniąc podobną próbę, znayduiemy zupełnie 39823, wnosimy ztąd: że 47 iest dokładnym piérwiastkiem sześciennym z 103823.

Postępowanie któregośmy użyli w przykładzie poprzedzaiącym służy do wszelkich liczb wyrażonych w więcéy iak trzech cyfrach, a mniéy iak w 7.

154. *Przypadek* 2gi. Jeżeli pierwiastek ma miéć więcéy iak dwie cyfry, iak *np* 12 305 472 000. rozumować będziemy podobnie iak (142 II.), to iest uważmy nayprzód że iakażkolwiek byłaby liczba cyfer tego pierwiastka; wystawiwszy go sobie z dziesiątków i iednościów, sześcian z nich niemoże bydź częścią trzech ostatnich cyfer od prawéy ręki, zatém znaydować się musi w 12 305 472. Ale gdy naywiększy sześcian zawarty w téy liczbie ma więcéy iak iedną cyfrę w swoim pierwiastku, może więc bydź podobnież rozłożony na iedności i dziesiątki, a że sześcian ztych dziesiątków niema cyfer pełnych w porządku iednościów, dziesiątków i stów; zatém niemoże bydź częścią trzech ostatnich cyfer 472. Używaiąc podobnegoż rozumowania i względem innych cyfer pozo-

stałych, dóydziemy nakoniec do naznaczenia miéysca sześcianu iednościów porządku naywyższego żądanego pierwiastka; wypada zatém:

1^{od} Liczbę daną zaczynaiąc od prawéy ręki podzielić na przedziały o trzech cyfrach, z których ostatni od lewéy ręki może ich miéć mniéy iak trzy.

2re Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z ostatniego przedziału 12, który tu iest 2 i znaczy cyfrę tysięcy pierwiastka, od 12 odiąć sześcian 8 z tysięcy i pozostaie na resztę 4.

3^{cie} Obok téy reszty 4 dołączyć następuiący przedział 305, z którego dwie ostatnie cyfry 05, oddzielaią się kreską, i podzielić 43 przez 12 to iest przez potróyność kwadratu cyfry iuż otrzymanéy. Wielorazu 3 doświadczyć należy sposobem dopiéro wskazanym, a poznamy że powinny wypaśdź 3 sta i reszta 138.

4to Obok téy reszty spuścić znowu następuiący przedział 472, którego podobnież odciąwszy dwie cyfry ostatnie 72, podzielić 1384 przez 1587, to iest potróyność kwadratu z 23.

Toż postępowanie zachowuiąc daléy, znaydziemy, że:

	2308 Pier:	Sze:
$\sqrt[3]{}$ 12 305,472,000		
4 305	12	158700
4 167	18	5520
1384,72	9	64
1384720,00	1389	15925264
1274021 12	3	8
Reszta - 110698 88	4167.	127402112.

155. *Uwaga.* Jeżeli liczba do podzielenia po lewéy ręce pozostała, niemoże zamykać w sobie liczby przez którą wypada ią dzielić, na ów czas w pierwiastku potrzeba położyć zero, a spuściwszy dopiéro przedział następuiący postępuie się daléy w działaniu iak wyżéy. Przyczyna tego iest taż sama co (149).

156. Gdy liczba nie iest dokładnym sześcianem, pierwiastku też iéy dokładnego wynaleśdź niemożna, zbliżyć się iednak do niego można za pomocą ułamków dziesiętnych. Tym końcem uważmy iak się składa sześcian z liczby maiącéy części dziesiętne.

Przykłady.

1od $(1{,}2)^3 = 1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44 \times 1{,}2 = 1{,}728$;
2re $(0{,}12)^3 = 0{,}001728$;
3e $(1{,}25)^3 = 1{,}953125$;
4te $(0{,}125)^3 = 0{,}001953125$;

Ztych przykładów widzimy że w sześcianie 3 razy tyle znayduie się cyfer dziesiętnych co w pierwiastku, i uwaga ta iest powszechna. Jakoż ponieważ sześcian iest mnogością, powinien więc mieć tyle cyfer dziesiętnych, ile ich maią wszystkie iego czynniki razem, a zatém 3 razy tyle co ieden z iego czynników, ponieważ iest ich w nim 3 iednakowych.

Ażeby więc z liczby iakiéy wyciągnąć pierwiastek sześcienny przez przybliżenie, potrzeba od prawéy ręki dołączyć do niéy 3 razy tyle zer, ile chcemy mieć cyfer dziesiętnych w iéy piérwiastku. Poczém uskutecznia się wyciąganie pierwiastku sposobem poprzedzaiącym i w wypadku odcina się kreską od prawéy ręki liczbę przyzwoitą cyfer dziesiętnych. Tak *np* aby mieć $\sqrt[3]{2}$, przybliżony mniey iak o $\frac{1}{1000}$, dołączam po prawey stronie 2, zer 9, ponieważ chcę mieć w pierwiastku 3 cyfry dziesiętne; poczém wyciąga się pierwiastek sześcienny z liczby 2000000000 sposobem powyższym, a wynalazłszy w piérwiastku cztéry cyfry, odcinam z nich kreską od prawéy ręki trzy na dziesiętne, stosownie do zamierzonego celu. Dla większéy wprawy kładzie się tu wzór takowego działania.

$\sqrt[3]{2,000,000,000}$	1,259		
1	3	432	46875
1000	6	180	3375
728	4	25	81
272000	364	45025	4721331
225125	2	5	9
46875000	728	225125	42491979
42491979			
4383021			

A tak $\sqrt[3]{2} = 1,259$ przybliżony mniéy iak o $\frac{1}{1000}$ do prawdziwego. Jakoż $(1,259)^3 = 1,995616979$; a $(1,260)^2 = 2,000376000$,

157. Gdyby liczba zadana miała iuż dziesiętne, potrzeba do niéy dołączyć zer tyle, aby liczba całkowita dziesiętnych była w niéy potróynością liczby dziesiętnych żądanych w piérwiastku. Tak niechby potrzeba wyciągnąć piérwiastek sześcienny z 1,25 przybliżony mniéy iak o $\frac{1}{100}$. Żądamy więc w piérwiastku dwóch cyfer dziesiętnych, potrzeba więc aby ich było sześć w sześcianie, a że iest iuż ich dwie, zatém po prawéy stronie 1,25 potrzeba dołączyć zer cztéry, dokonawszy tego wyciąga się piérwiastek sześcienny z 1250000. Piérwiastek ten wpada między 105 i 106. Zatém piérwiastek 1,25 znayduie się między 1,05 i 1,06. Tak $\sqrt{1,25} = 1,05$ albo 1,06. przybliżony mniéy iak o $\frac{1}{100}$. Wartość piérwsza

bardziéy iest przybliżoną, bo gdybyśmy szukali piérwiastka z 3 dziesiętnemi, trzecia dziesiętna byłaby słabszą o pół setnéy.

158. Sześcian z ułamku otrzymuiemy wynosząc do sześcianu oddzielnie licznika i mianownika tego ułamku. Jakoż $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$.

I na odwrót wynayduiemy piérwiasték sześcienny, wyciągaiąc piérwiastek sześcienny z licznika i mianownika tego ułamka. Tak *np*

$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$. Takiego postępowania używać potrzeba gdy licznik i mianownik ułamka są doskonałemi sześcianemi. W wszelkim zaś innym przypadku postępuie się następuiącym sposobem;

Jeżeli sam tylko mianownik iest doskonałym sześcianem, wyciąga się piérwiastek sześcienny z licznika przez przybliżenie i piérwiastek takowy dzieli się przez mianownika. *Np*

$$\sqrt[3]{\frac{2}{27}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1,260}{3} = 0,420.$$

Jeżeli mianownik nie iest doskonałym sześcianem, mnożą się obydwa wyrazy ułamka przez kwadrat z mianownika. Tym sposobem otrzymamy ułamek którego mianownik iest doskonałym sześcianem, i wyciąga się piérwiastek z licznika przez przybliżenie.

Tak $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3} = \frac{2,62}{3} = 0,87.$

Możnaby także zamienić na inny ułamek któregoby licznikiem był sześcian dokładny. *np* $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\cdot4}{3\cdot4}}=\sqrt[3]{\frac{8}{12}}=\frac{2}{2,289}=0,87$, iak wyżéy.

Sposób ten nie iest w używaniu, a to dla tego, że na końcu pozostaie dzielenie do odbycia które iest mniéy proste od sposobu powyższego. Nakoniec można obrócić na części dziesiętne ułamek którego chcemy dochodzić piérwiastka sześciennego. *Np* $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{0,666667}=0,87$ iak wyżéy.

Reguła ta równie iest wygodną iak piérwsza, potrzeba tylko używaiąc iéy, aby liczba dziesiętnych dołączonych ułamkowi była potróynością liczby dziesiętnych żądanych w piérwiastku.

159. Umieiąc wyciągnąć piérwiastek kwadratowy i sześcienny, można wyciągnąc piérwiastek stopnia czwartego, stopnia szostego, osmego, dziewiątego, dwunastego, szesnastego, osiemnastego, dwudziestego czwartego *i. t. d.* a w powszechności stopień piérwiastka którego wykładnik iest potęgą z 2, albo stopień z 3, albo mnogość z iakiéy potęgi 2 pomnożonéy przez potęgę z 3.

Otrzymuiemy piérwiastek czwartego stopnia przez wyciąganie koléyno piérwiastka kwadratowego. Piérwiastek szostego stopnia przez 2 piérwiastki koléyne iednego kwadratowego, a drugiego sześciennego. Piérwiastek osmy, przez trzy wyciągania koléyne piérwiastka kwadratowego. Piérwiastek 9go stopnia przez 2 wyciągnienia koléyne piérwiastka sześciennego. Piérwiastek stopnia 12go przez 3 wyciągania koléyne dwóch piérwiastka kwadratowego, a iednego sześciennego. *i. t. d.*

Przykłady

Niechby *np* wypadło wyciągnąć piérwiastek czwartego, szóstego, dwunastego stopnia z 4096.

$\sqrt[4]{4096}=8$; ponieważ $\sqrt{4096}=64$; a $\sqrt{64}=8$.

$\sqrt[6]{4096}=4$, ponieważ $\sqrt{4096}=64$; a nakoniec $\sqrt[3]{64}=4$;

$\sqrt[12]{4096}=2$, ponieważ $\sqrt{4096}=64$; $\sqrt{64}=8$ a nakoniec $\sqrt[3]{8}=2$.

Przyczyna takowego postępowania łatwo okażuie się w Algebrze.

Do Algebry także należą wyciągania piérwiastków liczbowych których wykładniki są liczbami piérwotnemi różnemi od 2 lub 3. Takowy rodzay wyciągania piérwiastków, będąc bardzo składany, uskutecznia się łatwo przy pomocy logarytmów o których niżéy powiémy.

ROZDZIAŁ IV.

O Stosunkach (Rapports)

§. 26.

O Równonadmiarze (*) (Equidifference) *i Proporcyach* (Proportions.)

160. W dwoiakim względzie porównywać można między sobą dwie ilości iednorodne, albo szukaiąc różnicy lub nadmiaru iedney nad drugą; albo też liczby razy wiele iedna zawiéra w sobie drugą. W pierwszym razie dochodzimy wypadku z takowego porównania przez odciąganie, i różnicę takową nazywamy *Stosunkiem nadmiaru* (rapport par difference) w drugim zaś przez dzielenie i wieloraz ten nazywamy *stosunkiem ieometrycznym* albo właściwiey *stosunkiem wielorazu* (rapport ou raison par quotient). Tak *np* różnica między 39 i 13 to iest 26 iest stosunkiem nadmiaru i stosunek ten oznacza się tak : 39—13, a wieloraz wypadaiący z podzielenia 39 przez 13

(*) *Przez wyraz* Równonadmiar, *rozumieć będziemy* proporcyą Arytmetyczną, *ponieważ proporcya w ięzyku naszym maiąc znaczenie pewne i stałe w żaden sposób niesłuży liczbom maiącym między sobą różnice równe. Prócz tego proporcya jeometryczna, niemniey iest także arytmetyczną. Zresztą wszyscy prawie Matematycy* Francuzcy *używaią teraz tego nazwiska iako tłumaczącego dokładniey naturę rzeczy.*

to iest $\frac{39}{13}$ albo 3, iest stosunkiem wielorazu i oznacza się tak: 39 : 13 albo przez ułamek $\frac{39}{13}$.

Możnaby podobnież uważać że stosunek wielorazu 39 : 13 iest $\frac{13}{39}$ albo $\frac{1}{3}$; ponieważ oboiętną iest rzeczą mówić, że piérwsza z liczb iest potróynością drugiéy, lub że druga iest trzecią częścią piérwszéy. Odtąd dzielić będziemy piérwszą przez drugą.

Piérwszy wyraz stosunku nazywa się *poprzednikiem* (Antécédent), drugi *następnikiem* (Consequent).

161. Nieźmienia się oczéwiście różnicy między dwoma ilościami dodaiąc do nich lub odéymuiąc iednakową liczbę, więc i stosunek nadmiaru niezmienia się, gdy do poprzednika i następnika iego dodaie się, lub od nich odéymuie się iednakowa liczba *np* 12—5 iest toż samo co 13—6 (za dodaniem 1 do obydwóch wyrazów) i toż samo co: 11—4 (za odięciem od obydwóch 1.)

162. Ponieważ stosunek wielorazu iest toż samo co dzielenie albo ułamek, zatém, iakie własności służą wielorazowi lub ułamkowi, takież służą i stosunkowi wielorazu. Można więc poprzednika i następnika iego pomnożyć lub podzielić przez iednakową liczbę bez naruszenia stosunku między ilościami.

Własność podzielenia wyrazów stosunku wielorazu przez iednakową liczbę służy do prościeyszego wyrażenia iego.

Tak maiąc *np* uważać stosunek długości dwóch armat, z których iedna iest na $3\frac{2}{3}$ stopy, a druga na $4\frac{3}{4}$ stóp długa; obróciwszy wszystko na ułamek będzie $\frac{11}{3} : \frac{19}{4}$ albo (po przywiedzeniu do iednego mianownika) $\frac{44}{12} : \frac{57}{12}$ albo (odrzucaiąc mianownika a zatém mnożąc obydwa wyrazy przez niego), wypadnie $44 : 57$. równy stosunkowi $3\frac{2}{3} : 4\frac{3}{4}$.

163. Łatwo także mieć wyobrażenie o *stosunku niewymiernym*; ponieważ ilości takowe wchodząc w rachunek; wyrażaią tylko swe wartości przybliżone. Z resztą stosunek takowy może niekiedy stać się wymiernym. Tak *np* $\sqrt{12} : \sqrt{3}$ albo $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{\frac{4}{1}}$ (po rozdzieleniu iego wyrazów przez 3). Wyciągaiąc więc piérwiastek z $\frac{4}{1}$ będzie $\sqrt{\frac{4}{1}} = \frac{2}{1}$, albo $2 : 1$, to iest stosunek wymierny.

164. Stosunkami równemi są te, które maią wielorazy równe *np* $8 : 4 = 2$; $6 : 3 = 2$; są stosunki równe.

165, Stosunkami *ciągłemi* (continues) są te, których następnik każdego iest razem poprzednikiem drugiego. *np* 1 : 2
2 : 5
5 : 4
4 9

są stosunki ciągłe i dla skrócenia piszą się wiednym rzędzie, pisząc liczbę dwa razy wchodzącą raz tylko, to iest: 1 : 2 : 5 : 4 : 9. W każdym takowym szeregu stosunków liczba między dwoma kropkami leżąca iest następnikiem poprzedzącéy, a poprzednikiem następuiącéy.

166. *Wszelkie stosunki wielorazu można zamienić na ciągłe; ieżeli wyraziwszy ie w liczbach całkowitych (162) położymy ie pod sobą, poczém piérwszego poprzednika pomnożymy przez wszystkich innych, każdego zaś następnika przez wszystkie następne poprzedniki i poprzedne następniki, i mnogości ztąd wypadłe weźmiemy za razem za poprzedników następuiących.* 36

Tak stosunki :

1 : 2.	zamienione na ciągłe	1.3.6.5 : 2.3.6.5 albo	90 : 180.
3 : 4.		3.2.6.5 : 4.2.6.5.	180 : 240.
6 : 5.		6.2.4.5 : 5.2.4.5.	240 : 200.
5 : 9.		5.2.4.5 : 9.2.4.5.	200 : 360.

Że tym sposobem stosunki dane nieodmieniły swoiéy wartości, bo się pomnożyły obydwa wyrazy każdego przez iednakową liczbę. Dla téyże przyczyny gdy wszystkie poprzedniki i następniki stosunków ciągłych maią wspólnego dzielnika; można ie skrócić bez naruszenia ciągłości.

Tak powyższe przywodzą się do: 9 : 18
18 : 24
24 : 20
20 : 36

167. Jeżeli w szeregu ilukolwiek stosunków wielorazu, rozmnożymy z osobna wszystkie ich poprzedniki i następniki; mnogości te nazywaią się *stosunkiem złożonym* (raison composée) bo wieloraz iego iest mnogością z wszystkich stosunków poiedynczych.

Tak *np* z 3 : 12.
i 7 : 21.
stosunkiem złożonym będzie 3 . 7 : 12 . 21 czyli 21 : 252.

Jeżeli stosunki poiedyncze są wszystkie równe, natenczas wieloraz stosunku złożonego, iest zawsze iakąś potęgą wielorazu iednego z stosunków poiedynczych; to iest, wieloraz ten będzie kwadratem, gdy było dwa stosunki równe, sześcianem, gdy ich było trzy *i. t. d.*

Stosunek złożony z dwóch stosunków równych, nazywa się ieszcze *stosunkiem dwumnożnym* (raison doublée); z trzech, tróymnożny (triplée) *i. t. d.*

168. Ze stosunków poiedyńczych wynayduie się stosunek złożony w liczbach całkowitych, gdy stosunki poiedyncze w liczbach całych wyrazimy; i z nich zrobimy stosunek złożony.

np	$1 : \frac{2}{3}$ albo	$3 : 2.$	Stosunki poiedyncze.
	$\text{i } \frac{4}{5} : \frac{6}{7}$ albo	$28 : 30.$	
będzie	$\frac{4}{5} : \frac{12}{21} =$	$84 : 60.$	Stosunek złożony.

169. Otrzymuiemy nayprostszy stosunek złożony, gdy wszystkie poiedyncze stosunki w liczbach całych wskażemy, a dopiéro równe poprzedniki i następniki, iakoteż równe ich czynniki w równéy liczbie wyruguiemy. Wieloraz 1 niepisze się, ale się domyśla.

Maiąc *np* stosunki poiedyncze:

$2 : 1\frac{2}{3}$	albo	$2 : \frac{5}{3}$	albo	$3 \cdot 2 : 5$
$4\frac{4}{7} : 3$		$\frac{32}{7} : 3$		$32 : 3 \cdot 7.$
$\frac{3}{8} : \frac{4}{5}$		$\frac{3}{8} : \frac{4}{5}$		$5 \cdot 3 : 4 \cdot 8.$
$2\frac{4}{5} : 3\frac{3}{7}$		$\frac{14}{5} : \frac{24}{7}$		$7 \cdot 14 : 24 \cdot 5.$

będzie stosunek złożony $\frac{2688}{280} : \frac{1440}{105}$ albo $7 : 10$ stosunek złożony nayprostszy.

Gdy stosunki poiedyncze ciągłe, sposobem (168) wyrazimy; szukaiąc z nich stosunku złożonego, takowym będzie piérwszy poprzednik i ostatni następnik. *np* 1 : 2.

2 : 3.

3 : 5.

5 : 6.

Stosunek złożony: 1 : 6. iest nayprostszy $= 1 . 2 . 3 . 5 : 2 . 3 . 5 . 6$.

§. 27.

O Równonadmiarze i Proporcyach.

170. Gdy różnica między dwoma liczbami *np* między 10 i 8, iest taka, iaka pomiędzy dwoma innemi *np* 7 i 5; cztéry takowe ilości składaią Równonadmiar i pisze się tak: $10 - 8 = 7 - 5$. Dwa więc stosunki nadmiaru równe, składaią równonadmiar, który wymawia się: 10 *ma się do* 8 *iak nadmiarowo* 7 *do* 5. Wyrazy 10 i 5 nazywaią się *skrayne* (extrèmes), 8 i 7 *srzednie* (moyens).

Równonadmiar ciągły (Equidifference continue) iest to równonadmiar, w którym dwa srzednie wyrazy są sobie równe. Znak $\div$, kładzie się na iego początku, wskazuiąc, że wyraz w nim srzedni, który nazywa się *srzodkiem nadmiaru* (moyen par difference), powinien się w wymawianiu powtórzyć. Tak $12 - 9 = 9 - 6$ iest równonadmiar ciągły i pisze się tak: $\div 12 - 9 - 6$.

171. Gdy reszty z dwóch odciągań *np* $10-8$ i $7-5$ są równe lub nie, zostaną ieszcze takiemi, gdy do nich dodamy summę $8+5$ z dwóch ilości od nich odiętych. I tak ponieważ $10-8$ i $7-5$ daią reszty równe, zatém dodawszy do nich summę z ilościów od nich odiętych $8+5$ będzie: $10-8+8+5=7-5+8+5$, a że $-8+8$ w piérwszéy części i $-5+5$ w drugiéy części zrównania znoszą się, powstanie więc $10+5=7+8$. To iest że *w każdym równonadmiarze summa wyrazów skraynych, równa się summie wyrazów srzednich*. Jeżeli więc $10+5=7+8$ wypadnie równonadmiar $10-8=7-5$.

172. Ztąd w każdym równonadmiarze maiąc trzy wyrazy wiadome, łatwo iest wynaleśdź czwarty do nich należący. Tak gdyby było $10-8=7-x$ (*) ponieważ $x+10$ powinno bydź równe $8+7$ albo 15, wypada więc: $x+10=15$. Zatém $x=15-10=5$. To iest *dla wynalezienia wyrazu skraynego wrównonadmiarze, potrzeba od summy wyrazów srzednich odiąć skrayny wiadomy, reszta będzie wyrazem skraynym żądanym.*

173. W równonadmiarze więc ciągłym, ponieważ wyraz srzedni, zastępuie miéysce dwóch wyrazów, i summa skraynych, równa się po-

(*) *Jlości niewiadome będziemy odtąd oznaczać przez x, y, z.*

dwóynemu wyrazowi srzedniemu; zatém, *szukaiąc wyrazu srzedniego, potrzeba wziąśdź połowę summy wyrazów skraynych; szukaiąc zaś wyrazu skraynego, potrzeba, od podwóyności srzedniego, odiąć wiadomy skrayny.* Tak chcąc mieć srzodek nadmiaru *np* między 7 i 15 dodaię 7 i 15, i biorąc summy 22 połowę, mam wyraz srzedni 11, albo równonadmiar ciągły $\div$ 7—11—15.

174. *Proporcya* iest równość dwóch stosunków wielorazu, czyli tylkostosunków równych. Tak *np* 20 i 10 iakoteż 14 i 7 maią za stosunek 2, zatém między 20, 10, 14 i 7 zachodzi proporcya, która pisze się tak: 20 : 10 :: 14 : 7 i wymawia się: 20 *ma się do* 10 *iak* 14 *do* 7. Proporcya więc, iest to porównanie dwóch wielorazów równych, a zatém przez dwa ułamki wyrażoną bydź może. Tak powyższą proporcyą wyrazić można $\frac{20}{10}=\frac{14}{7}$. Przyimuiąc to ostatnie wyrażenie, którego często używać będziemy, zachowamy mu iednak piérwsze wysłowienie, lubo w istocie wysłowienie 20 podzielone przez 10 równa się 14 podzieloném przez 7, iedno z piérwszém znaczy.

175. Ponieważ proporcya może bydź wyrażona przez dwa ułamki równe, więc nawzaiem z dwóch ułamków równych, można złożyć proporcyą, stosuiąc liczników do ich mianowników.

176. Otrzymuiemy także proporcyą, gdy dwie iakiekolwiek liczby, za dwa piérwsze wyrazy proporcyi, a otrzymane z nich mnogości czyli wielokrotności przez liczbę iakąkolwiek trzecią, za dwa drugie wyrazy weźmiemy. *np* 3 i 4 wziąwszy za dwa piérwsze wyrazy proporcyi, wielokrotności z nich *np* 3.2 i 4.2 albo 6 i 8 mogę wziąśdź za dwa drugie wyrazy proporcyi i będzie: 3 : 4 :: 6 : 8.

177. Gdy w proporcyi dwa wyrazy srzednie są sobie równe, proporcya takowa nazywa się *Ciągłą* (Continue). Taką iest następuiąca: 16 : 24 :: 24 : 36, a przez skrócenie pisze się tak: ∺ 16 : 24 : 36. Znak położony na początku przypomina, że wyraz srzedni w wymawianiu dwa razy wymówić trzeba i nazywa się *srzednim proporcyonalnym* (moyen proportionel)

178. Nayistotniéysza własność wszelkiéy proporcyi wielorazu iest: *że mnogość wyrazów skraynych równa się mnogości z srzednich*; co bydź tak okazaném może: Niech będzie proporcya 2 : 4 : : 6 : 12 albo $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$, dwa te ułamki równe przywiedzione do iednego mianownika wydaią $\frac{2.12}{4.12} = \frac{6.4}{4.12}$. W tym stanie, ponieważ mianowniki są równe, liczniki są także równe, ale z tych liczników ieden wyraża mnogość skraynych, drugi

mnogość srzednich, więc mnogości te są sobie równe.

Ta własność pochodząca z istoty saméy proporcyi dowodem iest, że gdy pomiędzy cztérema liczbami ma miéysce, liczby te znayduią się w proporcyi.

Widzimy ztąd. 1od Że gdyby cztéry liczby zadane, niebyły w proporcyi, własność powyższa niemiałaby miéysca, ponieważ ułamek, piérwszy stosunek wyrażaiący, niebędąc równy ułamkowi wyrażaiącemu stosunek drugi, przywiódłszy ie do iednego mianownika, licznik też iednego, niebyłby równy licznikowi drugiego ułamka.

2re Że maiąc cztéry liczby 6, 3, 14 i 7 takie, że mnogość $6.7=3.14$, z tych dwóch mnogości równych, wniesiemy równość ich stosunków albo proporcyą to iest: $\frac{6}{3}=\frac{14}{7}$ albo $6:3::14:7$. *Z Czynników więc dwóch mnogości równych, zawsze można złożyć proporcyą, stosuiąc czynnika z lewéy strony do czynnika z prawéy, iak czynnika z prawéy do czynnika z lewéy.*

179. Dwie zatém mamy cechy po których można poznać czyli cztéry wyrazy są w proporcyi; gdy ich stosunki są równe, i gdy mnogość skraynych równa się mnogości srzednich. Tak *np* w proporcyi $6:3::14:7$. Z którey wypada $6.7=3.14$. można.

I. Przemienić mieysca skraynym albo srzednim (co się zwykło nazywać *Alternando*), tak: 6 : 14 :: 3 : 7.

albo 7 : 3 :: 14 : 6.

albo 7 : 14 :: 3 : 6.

II. Kładąc skrayne na mieysce srzednich (co nazywaią *Invertendo*) będzie :

3 : 6 :: 7 : 14.

albo 3 : 7 :: 6 : 14.

albo 14 : 6 :: 7 : 3.

albo 14 : 7 :: 6 : 3.

W każdéy z tych proporcyów, mnogość skraynych równa się mnogości srzednich.

III. Nakoniec ponieważ w każdéy proporcyi mieysce srzednim wyrazom odmienić, a dwa wyrazy stosunku (162.) przez iednakową liczbę podzielić można, zatém *proporcya zostaie nienaruszoną, gdy w niéy wyraz skrayny i srzedni przez iednakową liczbę pomnożymy lub podzielimy*. Tak *np* w proporcyi 55:21::165:63 odmieniwszy mieysca srzednim będzie:

55 : 165 :: 21 : 63.

(dzieląc piérwszy stosunek przez 5.) 11 : 33 :: 21 : 63.

(dzieląc go ieszcze przez 11). 1 : 3 :: 21 : 63.

(dzieląc drugi stosunek przez 21.) 1 : 3 :: 1 : 3.

180. Proporcya ostatnia i iéy podobne nazywaią się proporcyami *tożsamości* (indentiques).

Zkąd wypada 1od Że proporcye wyrażone w liczbach wielkich mogą bydź częstokroć skrócone.

2re Że proporcye w które wchodzą ułamki lub liczby łamane, mogą bydź w liczbach całych wyrażone. *np* w proporcyi $\frac{44}{9} : \frac{33}{5} :: x : \frac{27}{10}$ ruguiąc mianownika 5 w wyrazie drugim, mnożę go tém samém; więc i piérwszy wyraz stosunku rozmnożyć trzeba; podobnież w wyrazie czwartym, ruguiąc mianownika 10, a tém samém mnożąc go przez 10, wypada i wyraz drugi proporcyi przez 10 rozmnożyć będzie więc:

$$44 \cdot 5 : 33 \cdot 9 \cdot 10 :: x : 27,$$

czyli $220 : 2970 :: x : 27.$

czyli $22 : 297 :: x : 27.$

Jeżeli w proporcyi zdarzaią się liczby łamane, takowe zamieniaią się na ułamki i postępuie się iak w przykładzie poprzedzaiącym.

Np $4\frac{8}{9} : 6\frac{3}{5} :: x : 2\frac{7}{10}$. będzie $\frac{44}{9} : \frac{33}{5} :: x : \frac{27}{10}$.

181. Ponieważ mnogość skraynych równa się mnogości srzednich; można więc wziąśdź iednę za drugą; a zatém *dzieląc mnogość skraynych przez ieden srzedni, na wieloraz musi koniecznie wypaśdź drugi srzedni;* wypada więc: *że dzieląc mnogość srzednich przez skrayny, wy-*

pada podobnież na wieloraz drugi skrayny. Można więc na tym fundamencie wynaleśdź którykolwiek wyraz w proporcyi, maiąc trzy inne wiadome, ponieważ wyrazem żądanym niemoże bydź tylko ieden skrayny lub srzedni.

Tak *np* $6 : 3 :: 14 : x$; ponieważ $3 . 14$ albo 42 powinno bydź równe 6 razy wziętéy ilości niewiadoméy x, to iest $6x$, zatém x iest wielorazem z 42 podzielonych przez 6, albo $\frac{42}{6}=7=x$. Podobnież szukaiąc srzedniego $6 : x :: 14 : 7$; ponieważ $14x=6.7=42$; zatém $\frac{42}{14}=3=x$.

182. Mnogość ze srzednich staie się kwadratem, gdy srzednie te są sobie równe, zatém srzednia proporcyonalna między dwoma liczbami iest piérwiastkiem kwadratowym z ich mnogości.

Tak między 3 i 12 srzodek proporcyonalny x iest $x=\sqrt{3.12}=\sqrt{36}=6$.

I na wzaiem maiąc $6^2=3.12=36$, można z tego złożyć proporcyą ciągłą $\div 3 : 6 : 12$.

183. Ztąd wypada że każdy stosunek można zamienić na stosunek iemu równy, któryby miał za poprzednika lub następnika swego, liczbę iaką daną; gdy następnika lub poprzednika szukanego stosunku oznaczymy przez x, a przypuszczaiąc wiadomy stosunek bydź równy stosunkowi żądanemu, dochodzić będziemy wyrazu czwartego szukanego w takowéy proporcyi.

Chcąc *np* stosunek $2:3$ zamienić w stosunek iemu równy, któryby miał za poprzednika lub następnika liczbę iaką zadaną *np* 1 lub 2; *i. t. d.* będzie:

$$\left.\begin{array}{r l} 1^{od} & 2:3::1:x. \\ \text{zatém} & x=\frac{3\cdot 1}{2}=\frac{3}{2}. \\ \text{a ztąd propor:} & 2:3::1:\frac{3}{2}. \end{array}\right\} \begin{array}{l l} 2^{re} & 2:3::x:2. \\ \text{zatem} & x=\frac{2\cdot 2}{3}=\frac{4}{3}. \\ \text{ztąd:} & 2:3::\frac{4}{3}:2. \end{array}$$

184. Stosuiąc okazaną prawdę w ułamkach (91) względem summy lub różnicy dwóch ułamków równych, a które i z każdéy proporcyi powstaią, powiemy: że maiąc proporcyą *np* $30:6::15:3$, albo $\frac{30}{6}=\frac{15}{3}$; dla równości tych dwóch ułamków wypada że: $\frac{30\pm 15}{6\pm 3}=\frac{15}{3}=\frac{30}{6}$,

$$\text{to iest } 30\pm 15:6\pm 3::15:3.$$
$$\text{albo } 30\pm 15:6\pm 3::30:6.$$

Zatém: *W każdéy proporcyi summa lub różnica poprzedników ma się do summy lub różnicy następników iak którykolwiek poprzednik do swego następnika.*

Odmieniaiąc w tych dwóch proporcyach miéysce wyrazom srzednim będzie:

$$30\pm 15:15::6\pm 3:3.$$
$$\text{i } 30\pm 15:30::6\pm 3:6.$$

a stosuiąc to do proporcyi zadanéy będzie: *summa lub różnica poprzedników, ma się do iedne-*

go z poprzedników, iak summa lub różnica następników do iednego z następników.

Odmieniaiąc znowu w proporcyi danéy miéysce srzednim będzie: $30 : 15 :: 6 : 3$.
czyli $\frac{30}{15} = \frac{6}{3}$

Zatém $\frac{30 \pm 6}{15 \pm 3} = \frac{30}{15} = \frac{6}{3}$ a składaiąc proporcyą

będzie: $30 \pm 6 : 15 \pm 3 :: 30 : 15$.
albo $30 \pm 6 : 15 \pm 3 :: 6 : 3$.

a odnosząc to do piérwszéy danéy proporcyi widzimy: *że w proporcyi, summa lub różnica dwóch piérwszych wyrazów ma się do summy lub różnicy dwóch drugich iak ieden z poprzedników do swego następnika.*

Ponieważ $30+6 : 15+3 :: 30 : 15$.
i $30-6 : 15-3 :: 30 : 15$.

Za tém dla stosunku wspólnego $30 : 15$ wypada:
$30+6 : 30-6 :: 15+3 : 15-3$.

a odnosząc to do piérwszéy proporcyi, wypada: *że summa dwóch piérwszych pyrazów, ma się do ich różnicy iak summa dwóch drugich, do ich różnicy.*

Czyniąc inne odmiany w proporcyi danéy można tym sposobem okazać inne własności, Maiąc podobnież wiele stosunków równych *np* $6:3$, $10:5$, $14:7$, $30:15$.

albo $\frac{6}{3}=\frac{10}{5}=\frac{14}{7}=\frac{30}{15}$ i biorąc summę z ich liczników i z ich mianowników będzie:

$\frac{6+10+14+30}{3+5+7+15}=\frac{14}{7}=\frac{30}{15}$. Zatém składaiąc proporcyą,

będzie: $6+10+14+30:3+5+7+15::4:7$.

albo - - - - - $::30:15$ *i.t.d.*

to iest w szeregu stosunków równych *summa poprzedników ma się do summy następników iak ieden z poprzedników do swego następnika.*

185. Położymy tu niektóre użycia prawd wyżéy okazanych.

1od Każdy wyraz w proporcyi może bydź przestawiony na którekolwiek miéysce (179 I.) *np* w proporcyi $3:6::9:18$, chcąc mieć 6 na czwartém miéyscu, można położyć: $9:18::3:6$.

2re Gdy w proporcyi wyraz skrayny i srzedni są niewiadome, tylko ich summa, każdy takowy wyraz w szczególności wynaleśdź można. *Np* w proporcyi $6:x::9:y$, gdy tak x iak y są niewiadome, ale ich summa $x+y=25$, ponieważ $6:x::9:y$, iest też $6:9::x:y$ (179 I.) zatém $6+9:9::x+y:y$, tudzież $6+9:6::x+y:x$, czyli $15:9::25:y$, i $15:6::25:x$; (181), zkąd $y=\frac{9.25}{15}=15$, a $x=\frac{6.25}{15}=10$.

Podobnież można wynaleśdź wyraz srzedni i skrayny, maiąc wiadomą ich różnicę.

186. Gdy wyrazy dwóch lub więcéy proporcyi porządkiem przez siebie rozmnożymy, wypadłe ztąd mnogości składaią proporcyą i proporcya ta nazywa się *złożoną* (composée)

Tak $30 : 15 :: 6 : 3.$
i $\;\;2 : \;\;3 :: 4 : 6.$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{wypada} & 30.2 : 15.3 :: 6.4 : 3.6. \\ \text{czyli} & 60 : 45 :: 24 : 18.\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{proporcya} \\ \text{złożona.}\end{array}$$

Jakoż ponieważ proporcye te daią ułamki równe, to iest: $\frac{30}{15}=\frac{6}{3}$ i $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; mnożąc więc dwa piérwsze ułamki równe każdy wszczególności przez każdy z dwóch innych ułamków równych, wypadną na mnogość dwa ułamki także równe, to iest: $\frac{30}{15}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{3}\times\frac{4}{6}$ czyli $30.2 : 15.3 :: 6.4 : 3.6$ to iest: $60 : 45 :: 24 : 18.$

Ztąd zaś wypada: *że wszystkie wyrazy proporcyi można wynieść do kwadratów, sześcianów i. t. d, lub ze wszystkich wyciągnąć pierwiastki kwadratowe. sześcienne i. t. d.*

187. W złożeniu więc dwóch proporcyów, gdy które ich wyrazy są iednakowe, proporcya z nich złożona może bydź skróconą.

1ᵒᵈ Gdy wyraz srzedni i skrayny iednéy proporcyi są iednakowe z skraynym i srzednim drugiéy, inne wyrazy wzięte porządkiem są w proporcyi. Tak $3:6::5:10.$

$$\frac{5:10::7:14.}{}$$

składaiąc iest $3:6::7:14.$

bo tym sposobem obydwa poprzedniki są podzielone iak tu przez 5, a obydwa następniki przez 10.

Podobnież $3:6::\ 5:10.$

$$\frac{6:9::10:15.}{}$$

składaiąc iest $3:9::\ 5:15.$ (ruguiąc wſpólnych czynników w piérwszym stosunku 6, wdrugim zaś 10.)

Podobnież $3:6::\ 5:10.$

$$\frac{12:6::20:10.}{}$$

przemieniaiąc w drugiéy proporcyi miéysca skraynym będzie $3:\ 6::\ 5:10.$

$$\frac{6:12::10:20.}{}$$

Zatém $3:12::\ 5:20.$

2re Gdy dwa skrayne w iednéy proporcyi, dwom skraynym drugiéy, lub dwa srzednie iednéy, dwom srzednim drugiéy lub też obydwa skrayne iednéy, dwóm srzednim drugiéy proporcyi są równe, pozostałe wyrazy wzięte na odwrot znayduią się w proporcyi.

Tak $3:6::\ 5:10.$

$$\frac{3:2::15:10.}{}$$

będzie $2:6::\ 5:15.$ (po przemianie miéysc skraynym wdrugiéy proporcyi.)

albo

albo $3 : 6 :: 5 : 10.$
$15 : 6 :: 5 : 2.$

iest też $3 : 15 :: 2 : 10.$ (przemieniaiąc podobnież miéysca wdrugiéy proporcyi.)

albo $3 : 6 :: 5 : 10.$
$15 : 3 :: 10 : 2.$

iest też $15 : 6 :: 5 : 2.$

3cie Gdy wyraz ostatni iednéy proporcyi wyrazowi trzeciemu drugiéy iest równy.

Np $3 : 6 :: 5 : 10.$
$4 : 8 :: 10 : 20.$

iest też $3.4 : 6.8 :: 5 : 20.$

4te Podobnież gdy wiele proporcyi maiąc bydź złożone, a zawsze wyraz czwarty poprzedzaiącéy proporcyi równa się trzeciemu proporcyi następuiącéy *np*

$3 : 6 :: 5 : 10.$
$2 : 4 :: 10 : 20.$
$5 : 7 :: 20 : 28.$
$6 : 9 :: 28 : 42.$

iest też $180 : 1512 :: 5 : 42.$

§. 28.

O Regule Trzech poiedynczéy
(Regle de Trois simple)

188. Nauka o proporcyach wpływaiąc we wszystkie części Matematyki, w zatrudnieniach

także pospolitych przystosowania iéy są bardzo użyteczne.

Wiele rzeczy wchodzących w rachunki maią między sobą stosunek.

Gdy z dwóch ilości iedna tym sposobem powiększa się lub zmniéysza iak druga, to iest, że gdy piérwsza staie się 2, 3 *i. t. d.* razy większą lub mniéyszą, druga podobnież powiększa się lub zmniéysza, mówić się zwykło że ilości te są *w stosunku prostym* (raison droite) *np* kto dwa razy więcéy towaru kupuie, płacić też za niego dwa razy więcéy musi, kupuiący trzy razy więcéy lub mniéy, płaci też trzy razy więcéy lub mniéy. Do roboty sześć razy większéy, potrzeba też sześć razy więcéy czasu, lub sześć razy większéy liczby robotników i. t. d.

Przeciwnie gdy z dwóch ilości iedna tym sposobem powiększa się, iak druga zmniéysza i przeciwnie, tak że gdy piérwsza staie się 2, 3 *i. t. d.* razy większą, druga staie się 2, 3 *i. t. d.* razy mniéyszą, mówimy, że ilości te są *w stosunku odwrotnym* (raison inverse), *np* im więcéy używa się ludzi do iakiéy roboty, tém też mniéy czasu do niéy potrzeba, im węższa iest iaka materya, tém też więcéy iéy potrzeba łokci do iakiego użycia.

Gdy więc ilości dane w iakiém zagadnieniu maiąc pomiędzy sobą takowe stosunki, mogą składać proporcyą, któréy ostatnim wyrazem iest niewiadoma, na ów czas rachunek bardzo prosty (181) daie iéy wartość, i to iest co się nazywa *Regułą trzech*. Tak *np* ieżeli 30 robotników wyrobiło iakiéy roboty sążni 20, robotników 21 z tąż usilnością pracuiących w tymże samym czasie wiele sążni téy roboty wyrobią?

W tém zagadnieniu oczéwiście mniéysza liczba ludzi to iest 21 robotników, mniéy też zrobią roboty, iak robotników 30 w tymże samym czasie, wyraz więc czwarty szukany który oznaczać będziemy przez x, to iest sążnie, mniéyszy bydź powinien od sążni 20, wypadnie więc proporcya prosta, w któréy ponieważ wyraz czwarty szukany z natury samego zagadnienia ma bydź mniéyszy od sążni 20, który z nim iest iednorodny, zatém też z dwóch pozostałych wyrazów także iednorodnych, mniéyszy powinien zaiąc miéysce drugie w proporcyi i wypadnie 30 rob: 21 rob :: 20 sąż : x sąż:
Szukaiąc więc x potrzeba (181) $\frac{21 \cdot 20}{30} = 14 = x$ sążni.

Uwaga. Wyraz szukany x możnaby położyć na którémkolwiek miéyscu w proporcyi, aby tylko zachować powyższą uwagę w układaniu wyrazów; układać ie iednak będziemy zawsze sposobem powyższym. Że zaś w każdéy proporcyi wyrazy srzednie mogą odmiénić miéysca, możnaby więc proporcyą powyższą i tak ułożyć; 30 rob: 20 sążni :: 21 rob : x sążni i tak ią układaią niektórzy; ale to może tylko wtenczas miéć miéysce, gdy stosunki są proste i gdy wyrazy uważaią się sposobem oderwanym.

Że powyższe ułożenie wyrazów z natury samego zagadnienia wypada; można się o tém przekonać rozwiązuiąc go przez samo rozumowanie.

1^{od} Gdyby każdy robotnik wyrabiał roboty sążni 20, robotników 21, wyrobiłoby $20 \times 21 = 420$ sążni; że zaś nie ieden ale 30 robotników wyrabiaią sążni 20, każdy więc z nich wyrabia 30 razy mniéy, zatém też i 21 robotników nie 420 sążni, ale 30 razy mniéy wyrobią, to iest $\frac{420}{30} = 14$ sążni. Albo

2re Ponieważ 30 robotnibów wyrabiaią 20 sążni, ieden wyrabia tylko $\frac{20}{30}$ sążnia, zatém robotników 21 wyrobią $\frac{20}{30} \times 21 = 14$ sążni.

Tego rozumowania w każdéy regule trzech gdy zachodzą stosunki proste użyć zawsze można.

189. Z tego co poprzedziło wnosimy: że rozwiązanie iakiego zagadnienia zależy od reguły trzech, gdy wyrażenie iego składa się z dwóch

części; gdy dwa wyrazy czyli ilości części piérwszéy są iednorodne względem dwóch drugich ilościów części drugiéy, to iest: że uważane po dwie są iednéy natury i że prócz tego mogą bydź pomnożone lub podzielone przez iednakową liczbę. Tak w powyższym przykładzie 30 robotników i 21 są iednorodne, i możnaby ie rozmnożyć lub podzielić przez 2, 3 *i. t. d*, niezmieniaiąc nic w zagadnieniu. Przeciwnie czas którego potrzebuie kamień w swym spadku, niebędąc podwóyny, gdy spada zwysokości dwa razy większéy; naczynie niepotrzebuiąc do wypróżnienia czasu potróynego, gdy iego obiętość iest potróyna, ilości takowe niemogą bydź częścią reguły 3ch

190. Rozpoznawszy czyli rozwiązanie iakiego zagadnienia może nastąpić za pomocą proporcyi, cała na tém trudność ażeby każdemu wyrazowi naznaczyć miéysce, które w niéy zaiąc powinien; do czego tak w stosunkach prostych iako i odwrotnych następuiące służy prawidło: Wyraz czwarty szukany, zaymuie miéysce ostatnie w téy proporcyi, a wyraz z nim iednorodny wiadomy z którym tylko porównać się daie, zaymuie miéysce trzecie. Prócz tego sama natura zagadnienia uczy, który z tych dwóch wyrazów przewyższa drugiego, ieżeli takim iest czwarty szukany, na ów czas z dwóch wyrazów pozostałych iednoro-

dnych, większy zaiąc powinien miéysce drugie, a mniéyszy piérwsze i przeciwnie, ponieważ poprzedniki powinny bydź razem mniéysze lub większe od swych następników i wypadnie proporcya: Wyraz mniéyszy pierwszego gatunku, ma się do wyrazu większego tegoż gatunku, iak wyraz mniéyszy drugiego gatunku do wyrazu większego tegoż gatunku, lub przeciwnie.

Przykłady następuiące dokładniéy to ieszcze obiaśnią:

I. Pewną robotę ukończyło 57 ludzi w dniach 5, wieleżby potrzeba dni 19tu ludziom do iéy ukończenia?

Ponieważ tu mogłoby bydź 2 lub 3 razy więcéy dni. a tyleż razy mniéy robotników, zagadnienie więc to zależy od proporcyi. Położymy więc nayprzód dni $5 : x$ dni, a że potrzeba więcéy dni 19tu ludziom iak 57 dla ukończenia téyże roboty, zatém powinien bydź następnik $x > 5$, więc też 57 powinno bydź następnikiem piérwszego stosunku i wypadnie:

19 Ludzi : 57 Ludzi :: 5 dni : x dni, zkąd $x = \frac{5 \times 57}{19} = 15$ dni.

Przekonać się o têm można drogą samego rozumowania 1$^{\text{od}}$ Kiedy 57 ludzi ukończa iaką robotę w dniach 5, człowiek ieden ukończyłby ią dopiéro w czasie 57 razy większym, to iest w dniach $57 \cdot 5 = 285$; ludzi więc 19tu ukończą ią w czasie 19 razy mniéyszym, to iest: $\frac{285}{19} = 15$ dniach (*)

Albo 2$^{\text{re}}$ Gdyby ieden człowiek ukończał tę robotę w dniach 5ciu, ludzi 19 ukończyliby ią w czasie 19 razy mniéyszym to iest: w $\frac{5}{19}$ dnia, ale tym sposobem przypuszczamy tych

---

(*) *Nieuważamy tu na naturę roboty i na pomoc wzaiemną, któréy mogą sobie udzielać wielu robotników pracuiąc razem.*

ludzi 57 razy usilniéyszemi w swéy pracy, iak są w saméy rzeczy, zatém 19tu ludzi, łożyć musi 57 razy więcéy czasu, iak $\frac{5}{19}$ dnia do ukończenia roboty danéy to iest: $\frac{5}{19} \times 57 = 15$ dni.

Uwaga. W tém zagadnieniu i iemu podobnych czasy potrzebne robotnikom do ukończenia roboty, są w stosunku odwrotnym z liczbą tychże robotnikow, to iest, liczba dni piérwszéy partyi robotników, ma się do liczby dni szukanych dla partyi drugiéy, iak na odwrót partya druga robotników do partyi piérwszéy.

Porównaymy proporcyą tego zagadnienia z proporcyą poprzedzaiącego.

II. Potrzeba 6 łokci iakiéy materyi szerokiéy na $\frac{3}{4}$ łokcia, na powleczenie iakiego mebla, wieleż będzie potrzeba na toż powleczenié materyi szerokiéy na $\frac{2}{3}$ łokcia?

Lubo w tém zagadnieniu cztéry wyrazy są łokciami, poznaiemy iednakże, że liczba 6 łokci iest iednorodną z liczbą niewiadomą, ponieważ one tylko wyrażaią długość, a tak proporcya kończy się na łokci 6 : x łokci; że zaś więcéy potrzeba długości materyi, im ta iest węższa, ponieważ $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, więc $x > 6$, a zatém $\frac{3}{4}$ iest następnikiem piérwszego stosunku i będzie $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} :: 6 : x$ zkąd $x = \frac{3}{4} \times 6 \times \frac{3}{2} = 6\frac{3}{4}$ łokci.

191. Jeżeli wyrazy każdego stosunku są wyrażone w iednakowych iednościach, albo gdy tak nie iest, przywiedzione do iednakowego gatunku iedności; natenczas wyrazy te w proporcyi można uważać iak liczby oderwane, podług więc (179 III.) skraca się piérwszy i drugi wyraz, lub piérwszy i trzeci, ile to daie się uczynić, poczém dochodzi się ilości niewiadoméy. Można też natychmiast po ułożeniu proporcyi i zredukowaniu, oznaczyć w postaci ułamka, do czego się

równa liczba niewiadoma i dopiéro w tém wyrażeniu skracać licznika i mianownika. Innych skróceń których użyć można w przyprowadzeniu wyrazów do iednakowego gatunku, sama wprawa i zasady dobrze zrozumiane nauczą.

III. Wiele kosztuie 9 funtów, 24 łotów iakiego towaru, gdy za 5 funtów iego przypada złł: 4 groszy 15? Za więcéy towaru przypada większa wartość. Reguła prosta zatém 5 funtów : $9\frac{24}{32}$ funtów :: $4\frac{15}{30}$ złotych : x złł: czyli skróciwszy ułamki $5 : 9\frac{3}{4} :: 4\frac{1}{2} : x$ zkąd $x = \frac{9\frac{3}{4} \times 4\frac{1}{2}}{5} = \frac{39}{4} \times \frac{9}{2} : 5 = \frac{39 \times 9}{4.2.5} = \frac{351}{40} = 8\frac{31}{40}$ Złł.

IV. Gdy roczne zasługi służącego czynią złotych 144, wieleż mu się należy za 8 miesięcy dni 12 służby? Za mniéy iak za rok, mniéy mu się też należy, Reguła prosta, zatém obróciwszy rok 1 na miesiące będzie:

12 m : $8\frac{12}{30}$ m :: 144 złł : x złł, czyli (skracaiąc i zamieniaiąc na ułamek) będzie:

$60 : 42 :: 144 : x$, zkąd $x = \frac{42 \cdot 144}{60} = 100\frac{4}{5}$ złł.

V. Podróżny odbył pewną podróż w 8 dniach iadąc po godzin $7\frac{3}{4}$ na dzień, wieleżby łożył czasu, gdyby iechał po 10 godzin na dzień? Im więcéy łoży czasu na dzień, tym krócéy iechać będzie. Reguła odwrotna zatém:

10 godzin : $7\frac{3}{4}$ godzin :: 8 dni : x dni, więc $x = \frac{31}{4} . 8 : 10 = 6\frac{1}{5}$ dni.

VI. Okręt iaki ma zapasu na 10 dni, ale chcąc zostawać przez dni 15 na morzu; o ileż powinna się zmniéyszyć każda racya?

Tu nieznayduie się cztérech wyrazów, oczéwista iest iednak, że się iednego domyśleć potrzeba, to iest zagadnienie wypada na to: Danoby 1 racyą każdemu człowiekowi, gdyby wypadło zostać na morzu dni 10, wieleż wypadnie mu dać chcąc zostawać na niém przez dni 15? Reguła odwrotną i iest $15 : 10 :: 1 : x = \frac{2}{3}$ racyi.

VII. Bateryia na wałach tak iest opatrzoną w Amunicyą, że przez 24 godzin, co godzina 20 razy ognia dać może, ale nie spodziewaiąc się aż za 32 godzin świeżéy amunicyi, wypada iéy znayduiącą się amunicyą tak rozdzielić, aby iéy na ten czas wystarczyła. Wieleż razy może dać ognia na godzinę? Reguła odwrotna, zatém $32:24::20:x$

Zkąd $x = \frac{24 \cdot 20}{32} = 15$ razy.

VIII. W iakiéy fortecy znayduie się 6000 ludzi na garnizonie i opatrzeni są w żywność na dwa miesiące, forteca ta będąc zagrożoną oblężeniem, Komendant iéy dostaie rozkaz ażeby się w niéy trzymał przez 3 miesiące i 10 dni. Wieleż powinien ludzi odesłać z téy fortecy? Reguła odwrotna.

$$3\tfrac{1}{3}\,m : 2\,m :: 6000\,L : x\,L.$$

$$\text{zatém } x = \frac{6000.2}{\frac{10}{3}} = 6000 \,.\, 2 \,.\, \tfrac{3}{10} = 3600 \text{ ludzi}$$

którzy mogą zostać w fortecy, zatém powinno bydź $6000 - 3600 = 2400$ ludzi zniéy wysłanych.

Przystosowanie Reguły trzech do Procentów (d'intérêt) *i Otrącania* (d'Escompte)

192. Pożyczaiący komu pieniędzy nazywa się *Wierzycielem*, a ten co od niego pożycza *Dłużnikiem*. Wierzyciel pożyczaiący pieniędzy z rzeka się pożytku któryby mu pieniądze na pożycce będące przynieść przez tenczas mogły, przeciwnie dłużnik pieniędzmi pożyczonemi zarabiać może: słuszna więc iest, ażeby za to dłużnik wierzycielowi póki iego pieniędzmi robi, corocznie albo w powszechności wczasach oznaczonych iakiś zysk opłacał.

Pieniądze pożyczone nazywaią się *Kapitałem*, to co dłużnik płaci od nich rocznie albo wczasach naznaczonych nazywa się *prowizyą*. Prowizya ta stanowi się podług tego co dłużnik od każdego sta kapitału na rok płacić obowiązuie się. Procent w naywiększym używaniu będący niepowinien bydź większy podług prawa nad 5 od 100 co się tak oznacza 5 od $\frac{0}{0}$, lubo częstokroć pobiera się i po 6 od $\frac{0}{0}$. Procenta które znacznie przechodzą procenta prawne, nazywaią się *Lichwą*, a wierzyciel takowe pobiéraiący *lichwiarzem*.

Daiąc kapitał na prowizyą, albo termin wypłaty iest nieoznaczony, albo gdy iest, może iednak stosownie do okoliczności w summie maiącéy się wypłacić zayść iaka odmiana. Tak *np* będąc winnym komu czer: 500 z prowizyą po 5 od $\frac{0}{0}$ którą summę we 2 latach wypłacić wypada, gdy po zaszłey ugodzie ma bydź summa ta wypłacona za rok, na tenczas pozostaie tylko summę czer: 500 natychmiast z wrócić. Bo lubo tym sposobem dłużnik utraca korzyść z użytku tych pieniędzy w drugim roku, ten ma iednak pożytek który właśnie na toż samo wypada, że iuż żadnéy prowizyi nieopłaca. Toż się rozumie o wierzycielu.

Wcale przeciwny przypadek iest, gdy dłużnik nie iest obowiązany opłacać prowizyi od swoich długów. Tak *np* kupuiąc dom, maiętność lub coś podobnego częstokroć w kupnie tém zakłada się warunek, że cała summa nie ma bydź płaconą od razu, ale tylko częściami w oznaczonych terminach i bez prowizyi. Stosownie do układu może się zdarzyć że takowa wypłata prędzéy lub późniéy nastąpić powinna i w takowym przypadku różne rachunki miéysce miéć mogą. Daymy *np* iż wypada mi czer: 500 w dwóch latach bez prowizyi wypłacić, ale znayduie dogodnie wierzyciel żeby się zemną teraz ułożył. Niemoże on żądać abym mu teraz całą summę wypłacił boby tym sposobem korzystał z użytku czer: 500 przez 2 lata do czego niema prawa, a ia utraciłbym go który się do mnie słusznie należy. Musi więc wierzyciel przystać na pewne odtrącenie od kapitału i to nazywa się *Regułą odtrącenia*. Nie tylko zaś reguły odtrącania używa się wtenczas, gdy summa iaka wypłaca się prędzéy, ale gdy bądź z iakiegokolwiek powodu z summy pewnéy odstępuie się iaka część oznaczona. Dokładniéy nas w tém wszystkim przykłady obiaśnią, a nayprzód te które służą do wynaydowania prowizyów, czasu albo kapitału.

I. Wiele prowizyi przynoszą 6800 złł: w 7 latach biorąc na rok po 5 od % ?

Dochodzi się nayprzód iaką daią prowizyą 6800 złotych w 1 roku, będzie więc $100 : 6800 :: 5 : x$.

zatem za 1 rok prowizyi $\frac{6800 \cdot 5}{100}$ Złł:

a więc za lat 7 będzie $\frac{6800 \cdot 5 \cdot 7}{100} = 68 \cdot 5 \cdot 7 = 2380$ złł:

II. Wiele daią prowizyi złł: 100000 po 4 od % na rok w dniach 5?

Dochodzi się nayprzód wiele daią w 1 roku to iest:

$$100 : 100000 : 4 : x$$

$$\text{czyli } 1 : 1000 : 4 \; x; \; x = 4000 \text{ złł:}$$

Jeżeli więc na 1 rok czyli 365 dni, złł: 100000 daią prowizyi złł: 4000, zatém w dniach 5 dadzą mniéy,

$$\text{będzie więc } 365 : 5 :: 4000 : y.$$

$$\text{czyli } 73 : 1 :: 4000 : y.$$

$$y = \tfrac{4000}{73} = 54 \text{ złł: } 23\tfrac{61}{73} \text{ gr:}$$

III. Jakiego potrzeba kapitału, ażeby biorąc od % po 5 mieć prowizyi na rok złł: 600?

będzie 5 pr : 600 pr :: 100 k : x

$$x = \frac{600 \cdot 100}{5} = 12000 \text{ złł: kapit:}$$

IV. Jak długo kapitał złł: 4000 musi zostawać na prowizyi, aby biorąc po 5 od %, uczynił prowizyi złł: 5000?

Dochodzę nayprzód iaką daią prowizyą złł: 4000 na rok po 5 od % i iest 100 k : 4000 k :: 5 p : x pr $x = 200$ złł: prowizyi na 1 rok.

Chcąc mieć prowizyi złł: 5000, kapitał ten dłużéy musi bydź na prowizyi iak 1 rok zatém:

$$200 : 5000 :: 1 \text{ rok} : y \text{ lat}; \; y = \frac{5000 \cdot 1}{200} = 25 \text{ lat.}$$

V. Kapitału 1000 czer: w 8 latach czynią prowizyi czer: 400, iakże długo czer; 700 zostawać muszą na prowizyi, aby przyniosły czer: 800 prowizyi?

Kapitał czer: 700 będąc mniéyszy od kapitału czer: 1000, dłużéy zostawać musi na prowizyi, gdyby nawet przy téy saméy prowizyi którą daią czer: 1000, wypada więc;

$$700 : 1000 :: 8 : x; \quad x = \frac{1000 \cdot 8}{700} = 11\tfrac{3}{7} \text{ lat.}$$

A że żądamy mieć od 700 czer: nie czer: 400 prowizyi, ale 800 czer: to iest prowizyi dwa razy więcéy wypadnie więc, żeby czer: 700 zostawało przez czas dwa razy dłuższy na prowizyi iak przez lat $11\frac{3}{7}$ to iest przez lat $22\frac{6}{7}$.

VI. Kupiec *A* pożyczył kupcowi *B* złł: 4000 na 18 miesięcy, nieżądaiąc żadnéy od niego prowizyi. Kupiec *B* chcąc mu się wywdzięczyć pożycza w innym czasie kupcowi *A* złotych 2400, z tym warunkiem, aby summę tę bez prowizyi tak długo trzymał, póki za wyświadczone dobrodzieystwo zupełnie wynadgrodzonym niebędzie, iakże długo kupiec *A* może trzymać tę summę?

Im summa druga 2400 iest mniéyszą od 4000, tém też czas należący do piérwszéy iest mniéyszy od czasu należącego do summy drugiéy. Jest więc: $2400 : 4000 :: 18 : x$.

albo $1 : 5 :: 6 : x$.

to iest $x = \frac{5 \cdot 6}{1} = 30$ miesięcy.

VII. Jak wielki musi bydź kapitał ażeby we dwóch latach tyle przyniósł prowizyi ile 6000 czer; we 4 miesiącach?

Ponieważ lat 2 czynią miesięcy 24, a im czas dłuższy, tém kapitał powinien bydź mniéyszy, zatém:

$$24 : 4 :: 6000 : x$$

czyli $6 : 1 :: 6000 : x$.

$$x = \frac{6000 \cdot 1}{6} = 1000 \text{ czer: kap:}$$

VIII. Po wiele bierze się od $\frac{0}{0}$ kiedy od 1200 Talarów za 5 miesięcy przypada prowizyi Talarów $22\frac{1}{2}$?

W tém zagadnieniu trzeba się nayprzód dowiedzieć wiele 1200 Talarów daią prowizyi we 12 miesiącach, kiedy w 5 daią T: $22\frac{1}{2}$ iest więc $5 : 12 :: 22\frac{1}{2} : x$

czyli $10 : 12 :: 45 : x$

$$x = \frac{12 \cdot 45}{10} = 6 \cdot 9 = 54 \text{ Talar:}$$

Jeżeli więc na rok od 1200 talarów przypada talarów 54, zatém od talarów 100 będzie;

$$1200 : 100 :: 54 : y$$

czyli $2 : 1 :: 9 : y$; $y = \frac{9 \cdot 1}{2} = 4\frac{1}{2}$ Talar:

IX. Ma kto zapłacić za 7 miesięcy i dni 20 złł: 7200, ileż mu teraz zaraz przypada zapłacić, wytrącaiąc prowizyą po 6 od %.?

Wynayduiąc prowizyą roczną od 7200 będzie:

$100 : 7200 :: 6 : x$; $x = \frac{7200 \cdot 6}{100} = \frac{72 \cdot 6}{1} = 432$ złł:

Jeżeli więc za 1 rok czyli 12 miesięcy przypada prowizyi złł: 432; za miesięcy 7 dni 20 czyli $7\frac{20}{30}$ mies; $= 7\frac{2}{3}$ przypadnie: $12 : 7\frac{2}{3} :: 432 : y$.

czyli $36 : 23 :: 432 : y$; $y = \frac{23 \cdot 432}{36} = 276$ złł:

Zatém odtrąciwszy prowizyą tę od 7200 będzie: $7200 - 276 =$ 6924 złł: przypada mu zaraz zapłacić.

X. Bierze kto z Prochowni za 370 talarów prochu, i odstępuią mu po 7 od %, wieleż za ten proch zapłacić mu przypadnie?

Można tego dóyśdź tym sposobem; gdy kupuiący bierze prochu za 107 Talarów, płaci tylko 100 Talarów, zatém wypada proporcya:

107 tal: w towarze : 370 tal: w towarze :: 100 tal: w gotow: : x.

zatém $x = \frac{370 \cdot 100}{107} = 345\frac{85}{107}$ Tal: w gotowiźnie.

Takby wypadło, gdyby to odtrącenie po 7 od % nie w pieniądzach, ale w towarze zawarowaném było; gdyby zaś takowe odtrącenie miało bydź w pieniądzach, na ów czas wypadłoby na 100 Talarach które maią bydź wypłacone, 7 Tal: odtrącić, to iest, byłaby proporcya:

100 tal: w towarze : 370 tal: w towarze :: 93 tal: w pien: x.

zkąd $x = \frac{370 \cdot 93}{100} = 344 \frac{1}{10}$ Tal: w pieniądzach.

193. *Uwaga.* Ponieważ (38 2^re^) mnogość tyle razy zawiéra w sobie mnożnego, ile razy mnożnik zawiéra w sobie iedność, widzimy więc, że wszelkie mnożenia liczb, pod regułę trzech podciągniętemi bydź mogą, któréy piérwszym wyrazem iest 1, a dwa srzednie mnożny i mnożnik.

Podobnież ponieważ (51.) dzielny zawiéra w sobie tyle razy dzielnika, ile wieloraz iedności, zatém dzielny i ~~[illegible]~~ dzielnik są srzedniemi, wieloraz zaś i 1 są skraynemi w proporcyi.

194. *Proba zagadnień do Reguły 3^ch^ należących* zasadza się na tém; aby po rozwiązaniu zagadnienia, mnogość wyrazów skraynych porównać z mnogością wyrazów srzednich, które powinny bydź sobie równe. Można też odmienić zagadnienie tak, aby ilość wynalezioną wziąśdź za wyraz wiadomy, a ieden z trzech wyrazów danych wziąśdź za wyraz niewiadomy. Tegoż sposobu użyć można i w następuiących gatunkach Reguły 3^ch^ i iéy przystosowaniach.

Przystosowanie Reguły 3ch do zamian wag i miar iednego Kraiu na wagi i miary Kraiu drugiego.

195. Ponieważ wagi i miary w różnych Krajach pod iedném nazwiskiem częstokroć są rozmaite, zgodzono się aby dla porównania ich między sobą, stosować ie do pewnych i stałych.

Tym końcem do porównania wag użyto: Grzywny Kolońskiey, albo funta Holenderskiego nazwanego (*Troys Gewicht*), albo nakoniec funta Paryzkiego (Poids de Marc).

Grzywnę Kolońską (których idzie dwie na funt Koloński złożoną z 16 łotów) podzielono na 65536 części równych *Richtfenig*.

Funt holenderski używany pospolicie w Amsterdamie składa się z 10240 części równych nazwanych *asami*. Jest ieszcze inny funt nazwany funtem *handlowym* holenderskim maiący 10280 Asów, i funt aptekarski trzymaiący tylko 7680 asów.

Funt Paryzki ma 9216 *ziarn* (grains)

Do porównania miar liniowych użyto prawie powszechnie stopy francuzkiéy podzielonéy na 1440 części równych.

Stosownie do takowego podziału wag i miar stałych, uważano wiele takich części znayduie się

w fun-w funtach i łokciach lub stopach krajów innych i poskładano Tablice do zamian miar i wag iednych na drugie służące (Zobacz Tablice niektórych miar i wag przy końcu położone.)

Tak stopa czyli półłokcia warszawskie ma takich części $1308\frac{1}{2}$, iakich paryzka ma 1440, iest więc stosunek stopy warszawskiéy do paryzkiéy iak $1308\frac{1}{2} : 1440$, albo podzieliwszy stopę paryzką na 14400 części, stopa warszawska ma takich 13085, to iest stosunek stopy war: do paryz: iest iak: $13085 : 14400$ albo iak $2617 : 2880$ albo $\frac{2617}{2880}$.

Gdy stosunek takowy między miarami i wagami iest w liczbach przy wielkich, wyraziwszy go przez ułamek, gdy nie idzie o zupełną ścisłość, można go bez znacznéy iego odmiany w liczbach mniéyszych sposobem podanym (118.) wyrazić, lub zamienić go na ułamek dziesiętny przybliżonéy tak daleko, iak tylko żądamy.

195. Maiąc wiadomy stosunek między miarami lub wagami dwóch miéysc, aby z niego dóyśdź porównania między temiż miarami, potrzeba stosunek takowy odwrócić, a wypadnie porównanie. Tak *np* wiedząc że funt paryzki ma 9216 ziarn, warszawski zaś ma ich 7597,8 to iest: że stosunek funta war: do paryz: iest iak $7597,8 : 9216$, stosunek ten odwróciwszy będzie porównanie, to iest: funtów war: $9216 = 7597,8$. funt: paryz:

Jakoż ponieważ 7597,8 : 9216 wyraża stosunek; zatém 1 funt war: $= \frac{7597,8}{9216}$ funta paryz: więc 9216 funtów war: czynią $\frac{7597,8 \cdot 9216}{9216} = 7597,8$ funt: paryz:

Chcąc więc pewną liczbę funtów warsza: na funty paryz: zamienić, dosyć iest ilość takową funtów, przez ułamek $\frac{7597,8}{9216}$, albo przez ułamek skrócony lub do niego przybliżony rozmnożyć. I przeciwnie chcąc pewną ilość funtów paryz: na funty warsz: zamienić, potrzeba ilość tę funtów przez $\frac{9216}{7597,8}$ albo przez ułamek skrócony lub przybliżony rozmnożyć. Toż się rozumie o zamianie miar innych, gdy iest dany onych stosunek.

Uwaga. W wielu Arytmetykach zamiast stosunków między miarami, znayduie się ich porównanie, na ówczas iuż się porządku pomiędzy niemi niezmienia.

Przykłady

I. Wiadomo iest że funt Koloński ma się do funta par: iak 43 : 45, to iest że 45 funtów Kolońskich $=$ 43 funtom paryz: iest pytanie wiele 94 funtów paryzkich czynią Kolońskich? Używaiąc reguły trzech będzie:

43 paryz : 94 paryz :: 45 Kol: x funt: Kol:

zatém $x = \frac{94 \cdot 45}{43} = 98\frac{16}{43}$ funt: Kol: $=$ 98 funt: i $11\frac{39}{43}$ łótów.

II. Wiele czyni długość o 100 stopach Wiedeńskich w stopach francuz: ? wiedząc że 1440 stóp Wiedeń: czynią paryzkich 1401, będzie:

1440 w st : 100 w st :: 1401 p st : x p st

Zatém $x = \frac{1401 \cdot 100}{1440} = \frac{467 \cdot 10}{48} = 97\frac{7}{24}$ p st.

§. 29.

O Regule Trzech składaney (Regle de Trois composée)

197. Zagadnienia któreśmy dotąd za pomocą reguły 3^{ch} rozwiązywali, były takiemi, że w nich właściwie dwa tylko zachodziły stosunki; zdarzaią się iednak takie, w których więcéy iak dwa stosunki uważać wypada: *np* w tém zagadnieniu: *Ludzi* 5 *w dniach* 6 *robiąc co dzień po godzin* 8, *wyrobili* 600 *faszyn*, *wieleż faszyn wyrobi ludzi* 150 *w dniach* 3 *robiąc co dzień po godzin* 12. W to zagadnienie wchodzą cztéry stosunki, ludzi, czasu, godzin codziennych roboty i liczba faszyn.

Rozwiązanie takowych zagadnień w które więcéy iak dwa wchodzą stosunki zwykło się nazywać *Regułą 3^{ch} składaną*. Znayduią się w niéy dwie części, iedna w któréy wszystkie wyrazy są wiadome, druga w którą wchodzi iedna niewiadoma. Tak w powyższym przykładzie częścią wiadomą iest: 5 ludzi w 6 dniach wyrabiaią 600 faszyn, robiąc co dzień po godzin 8.

198. Każda reguła trzech składana może bydź rozwiązaną za pomocą powtórzonéy reguły 3^{ch} prostéy lub odwrotnéy, biorąc za każdym razem dwa rozmaite stosunki, inne zaś okoliczno-

ści uważaiąc za iednostayne. Tak powyższy przykład ze czterema stosunkami przy pomocy trzy razy powtórzonéy reguły 3^{ch} da się rozwiązać, uważaiąc tylko za każdym razem dwa stosunki, a inne pomiiaiąc, to iest szuka się nayprzód liczby faszyn którą wyrobią 150 ludzi w tymże samym czasie w którym 5 ludzi wyrabiaią faszyn 600 i wypada 5 l : 150 l :: 600 fa : x fa; $x = \frac{150.600}{5} =$ 18000 fa:

Wiedząc teraz wiele faszyn ci ludzie w 6 dniach wyrobią, daie się także wynaleśdź wiele faszyn ciż ludzie w dniach 3 danych wyrobią, gdy znowu dziennie godziny roboty pominiemy i będzie 6 d. : 3 d. :: 18000 f : x fa:

$$x = \frac{3.18000}{6} = 9000 \text{ faszyn.}$$

Nakoniec uważaiąc i dzienne godziny roboty będzie 8 g : 12 g :: 9000 f : x faszyn

$$x = \frac{12.9000}{8} = 1125 . 12 = 13500 \text{ faszyn.}$$

które 130 ludzi we trzech dniach wyrobią robiąc co dzień po godzin 12.

Tymże sposobem możnaby każdą bądź z ilukolwiek stosunków złożoną regułę 3^{ch} rozwiązać.

199. Aby zaś okazać, iak każda reguła trzech składana krócey iak za pomocą reguły trzech poiedyńczéy może bydź rozwiązaną, ułożmy zda-

nego zagadnienia, tyle poiedyńczych reguł trzech ile tylko można, ale za każdym razem wyraz czwarty niewiadomy uważaiąc iakby iuż wiadomy, porównaymy go z innemi warunkami zagadnienia. Dokładniéy to wyiaśni rozwiązanie tym sposobem powyższego zagadnienia, Maiąc nayprzód wzgląd na liczbę faszyn którą 150 ludzi w tymże samym czasie wyrobią, będzie:

5 l : 150 L : 600 f : x f. Ponieważ faszyny te wyrobiliby w dniach 6, zatém w dniach 3 wyrobią liczbę faszyn mniéyszą, którą nazwawszy y będzie:

$$6 \text{ dni} : 3d :: xf : y\,fa:$$

Nakoniec uważaiąc godziny roboty na dzień, ponieważ ludzi 150 robią co dzień po godzin 12, a piérwsi robią tylko po godzin 8, więc drudzy wyrobią faszyn więcéy iak y, co nazwawszy z będzie $8g : 12g :: y\,fa : z$ fa;

Wypadną więc te trzy proporcye:

$$\begin{array}{l} 5\,l : 150\,l :: 600\,fa : x\,fa \\ 6\,d : 3\,d :: x\,fa : y\,fa: \\ \underline{8\,g : 12\,g :: y\,fa : z\,fa:} \end{array}$$

Zatém $5.6.8. : 150.3.12 :: 600\,fa : z\,f$: (187 n°4)

$$\text{więc } z = \frac{150.3.12.600}{5.6.8} = 1350 \text{ faszyn.}$$

to iest liczby wyrobionych faszyn maią się do siebie, iak mnogości z liczby robotników, przez dni robocze i godziny dziennéy roboty, albo liczby faszyn znayduią się z liczbą ludzi, z dniami i codziennemi godzinami roboty, w stosunku złożonym.

200. Gdy więc oznaczenie niewiadoméy ilości w iakiém zagadnieniu, tym sposobem od wielu ilości zawisło że szukana ilość z osobna uważana z każdą inną znayduie się w stosunku prostym, na tenczas ilość ta znayduie się ze wszystkiemi innemi ilościami w stosunku złożonym. *Np* wielość roboty z liczbą robotników i z czasem do niéy potrzebnym znayduie się w stosunku złożonym, ponieważ ta wielość roboty z liczbą robotników i czasem, znayduią się w stosunku prostym.

Rozwiązuiąc powyższe zagadnienie przez rozumowanie zważmy, że 5 ludzi robiąc przez dni 6, co dzień po godzin 8 wyrabiaią tyle co $5.6 = 30$ ludzi na 1 dzień robiąc po godzin 8; ludzi 30 robiąc przez 8 godzin na dzień wyrabiaią tyle, co $30.8 = 240$ ludzi na 1 godzinę. Podobnież 150 ludzi w dniach 3 wyrabiaią tyle, co $150.3 = 450$ ludzi na 1 dzień robiąc po godzin 12, a 450 ludzi robiąc co dzień po godzin 12, wyrobią tyle, co $450.12 = 5400$ ludzi na 1 godzinę, zatém zagadnienie to przywodzi się do Reguły trzech poiedyńczéy; to iest 240 ludzi wyrobili 600 faszyn w 1 godzinie, ludzi 5400 wiele wyrobią faszyn w tymże czasie, będzie więc:

$$240 : 5400 :: 600\, fa : x\, fa;$$

$$\text{albo} \quad 2 : 5400 :: 5 : x \;\Big\}\; x = \frac{5400.5}{2} = 13500.\ \text{f:}$$

Podobnegoż rozumowenia i w innych temu podobnych zagadnieniach użyć zawsze można.

II. Jeżeli furmanowi od przewiezienia 50 cetnarów iakiego towaru za mil 30, płaci się 320 złł:, wieleż mu potrzeba zapłacić od 60 cetnarów towaru za mil 45?

Opłata od przewiezienia iest w stosunku prostym, bo im więcéy towaru, tém też większa takowa opłata. Opłata z drogą znayduie się także w stosunku prostym, bo im większa droga, tém też większa opłata, zatém opłata z towarem i z drogą znayduie się w stosunku złożonym.

Jest zaś stosunek towarów 50 cet : 60 cet:
Stosunek dróg - 30 mil : 45 mil

Zatém też $50 \cdot 30 : 60 \cdot 45 :: 320$ złł : x złł.

więc $x = \frac{60 \cdot 45 \cdot 320}{50 \cdot 30} = 2 \cdot 9 \cdot 32 = 576$ złł.

III. Na iaki mur na 6 sążni długi, na 8 stóp wysoki, na $1\frac{1}{2}$ stopy gruby, potrzeba cegły 5184, wieleż potrzeba takich cegeł na mur na $8\frac{1}{3}$ sążni długi, na 2 stopy gruby, a na 6 stóp wysoki?

Liczba cegeł z długością, wysokością i grubością muru, w szczególności z każdym wymiarem, znayduie się w stosunku prostym, bo im dłuższy, im grubszy, im wyższy mur, tém więcéy cegeł, zatém liczba cegeł z długością, szerokością i grubością muru iest w stosunku złożonym.

Są zaś stosunki długościów muru $6 : 8\frac{1}{3}$
wysokościów — $8 : 6$
grubościów — $1\frac{1}{2} : 2$.

Zatém $6 \cdot 8 \cdot 1\frac{1}{2} : 8\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 :: 5184$ cegeł : x cegeł

Zkąd $x = \frac{8\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5184}{6 \cdot 8 \cdot 1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{25}{3} \cdot 2 \cdot 5184}{8 \cdot \frac{3}{2}} =$

$\frac{25 \cdot 2 \cdot 5184 \cdot 2}{8 \cdot 3 \cdot 3} = 25 \cdot 288 = 7200$ cegeł.

201. To postępowanie służy do wszelkich zagadnień w które wchodzą stosunki proste. Jeżeli zaś wypadaią stosunki które ze stosunkiem w iakim znayduie się ilość niewiadoma z osobna

uważane, nie w proporcyi prostéy, ale w odwrotnéy między sobą zostaią; wyżéy podana prawda (200) wtenczas dopiéro przystosowaną bydź może, gdy takowe stosunki wprzód odwrócimy.

Np. Jeżeli 100 ludzi w dniach 5 wyrabiaią iakiéy roboty 250 sążni, wieleż potrzeba użyć ludzi, gdy wypada wyrobić 1000 sążni w dniach 2?

Uważaiąc czas iednakowy, do większéy roboty potrzeba więcéy ludzi, będzie więc:

250 sążni : 1000 sążni :: 100 ludzi : x ludzi

A że w drugim przypadku czas iest mniéyszy, zatém im mniéyszy czas, tém więcéy potrzeba ludzi; nazwawszy więc ich przez y będzie; 2 dni : 5 dni :: x ludzi : y ludzi

Wypadaią więc dwie proporcye:

$$\frac{\begin{array}{c} 250 \text{ sążni} : 1000 \text{ sążni} :: 100 \text{ ludzi} : x \text{ ludzi} \\ 2 \text{ dni} : 5 \text{ dni} :: x \text{ ludzi} : y \text{ ludzi}\end{array}}{}$$

Zatém $250.2 : 1000.5 :: 100 : y$

to iest $y = \frac{1000.5.100}{250.2} = 1000$ ludzi.

Albo, Stosunek roboty iest 250 sążni : 1000 sążni
Stosunek czasu, iak 5 dni : 2 dni

a że im mniéy czasu, tém więcéy potrzeba ludzi, zatém stosunek czasów powinien bydź odwrócony,

będzie więc: 250 sążni : 1000 sążni
iak 2 dni : 5 dni

Zatém stosunek złożony $250.2 : 1000.5 :: 100$ *lu* : y *ludzi*

to iest $y = \frac{1000.5.100}{250.2} = 1000$ ludzi iak wyżéy;

to iest wtenczas dopiéro stosunek ludzi iest równy stosunkowi złożonemu z liczby sążni i z liczby dni, gdy wprzód stosunek dni odwrócimy.

IV. Forteca iaka tak iest opatrzoną w żywność, że 6000 ludziom przez 90 dni, każdemu człowiekowi co dzień 2 funty chleba dostarczyć może, tym czasem wychodzi z niéy 1000 ludzi, a pozostałych 5000 ludzi, maią się tą żywnością utrzymać przez 130 dni, wieleż funtów chleba każdemu dać można?

Uważaiąc czas iednakowy, im mniéy ludzi, tém więcéy każdy żywności dostanie proporcya odwrotna 5000 ludzi : 6000 ludzi :: 2 *fu* : x funt. Im czas większy, tém każdy mniéy żywności dostanie; proporcya odwrotna:

iest więc : 130 dni : 90 dni :: x *fu* : y funt: wypadaią więc dwie proporcye;

5000 *ludzi* : 6000 *ludzi* :: 2 funty : x *funty*
130 dni : 90 dni :: x : y

zatém 5000 . 130 : 6000 . 90 :: 2 : y

$$y = \frac{6000 . 90 . 2}{5000 . 130} = \frac{6 . 9 . 2}{5 . 13} = 1\tfrac{43}{65} \text{ funtów.}$$

Albo stosunek ludzi iest 6000 : 5000
stosunek dni - 90 : 130.

Położywszy więc 2 *funty* : x *funt*: uważam: że na mniéy ludzi to iest 5000, więcéy przypadnie żywności, stosunek więc 6000 : 5000 odmieniam na 5000 : 6000; podobnież na więcéy dni to iest 130, mniéy wypadnie żywności, więc i tu stosunek 90 : 130 odmieniam na 130 : 90 będzie więc:

$$\left.\begin{matrix} 5000 : 6000 \\ 130 : 90 \end{matrix}\right\} \; 2 : y \text{ łotów}$$

Zatém 5000 . 130 : 6000 . 90 :: 2 : y. (proporcya powyższa).

To iest ilość żywności znayduie się tu odwrotnie w stosunku złożonym z liczby dni i czasu.

202. Zastanowiwszy się nieco nad takowém postępowaniem, wyciągniemy zniego ogólny sposób do rozwiązania bardzo łatwo wszelkiéy reguły trzech złożonéy z ilukolwiek bądź stosunków prostych lub odwrotnych. Przykład ieden tym sposobém rozwiązany dokładniéy to wyiaśni, iak obszernie wypisane prawidło.

V. Gdy 100 ludzi w 3 dniach wykopuią fosę na 250 sążni długą, na 7 szeroką, a na 3 stopy głęboką, w wieluż dniach 300 ludzi wykopią fosę na 600 sążni długą, na 8 stóp szeroką, a na 4 stopy głęboką, robiąc z podobną piérwszym usilnością?

Napiszmy nayprzód wszystkie wyrazy części wiadoméy zagadnienia w szeregu poziomym w iakimbądźkolwiek porządku, a wyrazy części drugiéy w tymże samym porządku pod niemi, będzie:

100 ludzi	3 dniach,	250 sąż: dłu;	7 st: sz:	3 st: gł:	
300 —	x —	600 — —	8 —	4 — —	

Co uczyniwszy kładzie się:

wyraz iednoznaczny z szukanym x, na miéyscu trzeciém iak tu trzy dni, dopiéro zaczynaiąc od wyrazów piérwszych. uważam że im więcéy iest ludzi w drugiéy części, tém też

$$\left.\begin{array}{r} 300 : 100 \\ 250 : 600 \\ 7 : 8 \\ 3 : 4 \end{array}\right\} 3 \text{ d.} : x \text{ dni}$$

mniéy czasu potrzebuią do roboty, iest więc pomiędzy 100 i 300 stosunek odwrotny, zatém go odwrócić wypada, to iest: nie 100:300, ale 300 do 100 stosować należy. Postępuiąc do długości uważam: że im dłuższa iest fosa, tém też więcêy dni potrzeba iest więc stosunek prosty, zatém: 250 : 600; postępuiąc do szerokości i głębokości, ponieważ te w drugiéy części są większe, więc też większego czasu robota wymaga, zatém są stosunki proste kładę więc 7:8 i 3 : 4. To uczyniwszy, ponieważ wszystkie wyrazy drugie w tém wyrażeniu maią się mnożyć przez trzeci, a mnogość tę wypada rozdzielić przez mnogość wyrazów piérwszych, zatém oznaczywszy do czego iest równa ilość niewiadomą x, wyrażenie takowe dla krótkości roboty skrócić należy dzieląc dzielnika i mianownika iego przez iednakowe liczby; Tak w teraźniéyszym przykładzie;

$$x = \frac{100 \cdot 600 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3}{300 \cdot 250 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{128}{35} = 3\tfrac{23}{35} \text{ dni}$$

VI. Jeżeli 20 Tkaczy w 8 tygodniach robiąc cotydzień po 5 dni, a codzień po godzin 10 wyrabiaią sztuk 100 płótną każdą sztukę na 30 łokci długą a na $1\frac{1}{4}$ łokcia szeroką; wieleż sztuk płótna wyrobią 80 Tkaczy w 15 tygodniach, robiąc na tydzień po dni 6, a codzień po 12 godzin, gdy każda sztuka ma miéć 40 łokci długości a 1 łokieć szerokości.

Tkaczy	tygodni	dni	godzin	sztuk	łok: dłu:	łok: szer:
20	8	5	10	100	30	$1\frac{1}{4}$
80	15	6	12	x	40	1

$$\left.\begin{array}{ll} \text{im więcéy ludzi tém więcéy sztuk} & 20:80 \\ \text{im więcéy tygodni tém więcéy sztuk} & 8:15 \\ \text{im więcéy dni tém więcéy sztuk} & 5:6 \\ \text{im więcéy godzin tém więcéy sztuk} & 10:12 \\ \text{im długość większa tém mniéy sztuk} & 40:30 \\ \text{im mniéysza szerok: tém więcéy sztuk} & 1:1\tfrac{1}{4} \end{array}\right\} :: 100:x$$

Zatém sztuk $x = \frac{100.80.15.6.12.30.1\frac{1}{4}}{20.8.5.10.40.1} = 3.3.3.30\,\frac{5}{4} = \frac{4050}{4} = 1012\frac{1}{2}$ sz.

Przystosowanie Reguły 3ch składanéy do niektórych procentów składanych.

203. *Przykłady.* I. Kapitału złł: 100 we 12 miesią: daią prowizyi 5 złł:, biorąc 5 od % wieleż dadzą 3200 złł: kapitału we 30 miesiącach, biorąc po 4 od %?

Ka:	mie:		pro:
100.	12.	5% pr:	5.
3200.	30.	4	x pro:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{im większy kapitał tém większa pr:} & 100:3200 \\ \text{im dłuższy czas tém większa pro:} & 12:30 \\ \text{im mniéy od \% tém mniéysza pro:} & 5:4 \end{array}\right\} :: 5:x.$$

Zatém prow: $x = \frac{5.3200.30.4}{100.12.5} = 5.32.2 = 320$ Złł:

II. Od 100 czer: kapitału odebrano za rok 1 czerw: 4 prowizyi, w wieluż latach od 9000 czer: wypadnie czer: 800 prowizyi?

Kap:	Rok	pro:
100	1	4
9000	x lat	800.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{im większy kapitał tém mniéyszy czas,} & 9000 : 100 \\ \text{im większa prowizya tém większy czas} & 4 \;\; : 800\end{array}\right\} :: 1 : x$$

$$\text{Zatém } x = \frac{1.100.800}{9000.4} = \frac{20}{9} = 2\tfrac{2}{9} \text{ lat.}$$

III. Wiele prowizyi daią 800 czer: kapitału w 9 latach, kiedy kapitał ten w 5 latach daie prowizyi 230 czer:

Kapi:	lat	pro:
800	5	230
800	9.	x.

Równe kapitały w czasach dłuższych daią wiącéy prowizyi

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{zatém } 800 : 800 \\ \text{im czas dłuższy tém większa pro} & 5 : \;\; 9\end{array}\right\} :: 230 : x.$$

$$\text{więc prow: } x = \frac{230.800.9}{800.5} = 46.9 = 414 \text{ czer: pro:}$$

IV. Złotych 283 gr: m: 15 w 3 latach, 4 miesią: daią prowizyi złł 56 gr: m: 21, wieleż 1333 złł, 10 gr: m: kapitału dadzą prowizyi we trzech latach, i 9 miesią: ?

Złł: $283\frac{15}{30}$ k	$3\frac{4}{12}$ Lat	$56\frac{21}{30}$ złł: pro:
$1333\frac{10}{30}$	$3\frac{9}{12}$	x pro:

$$\left.\begin{array}{ll}283\frac{1}{2} : & 1333\frac{1}{3} \\ 3\frac{1}{3} : & 3\frac{3}{4}\end{array}\right\} :: 56\frac{7}{10} : x$$

$$\text{będzie prowizyi } x = 100 . 3 = 300 \text{ złł.}$$

Niektórzy Arytmetycy podług liczby wyrazów w zagadnienie wchodzących nazywaią Regułą 5ciu gdy w zagadnienie wchodzą pięć wyrazów, Regułą 7mu gdy siedem *i. t. d.* Widzimy że podział takowy w cale iest niepotrzebny.

§. 30.

Reguła spółki czyli podziału.

(Regle de societé ou de partage)

203. Celem téy reguły iest podzielenie iakiéy liczby tymże sposobem, iak druga iest podzielo-

ną. Tak chcąc podzielić 100 na 2 części któreby się miały iak $2 : 3$; uważam 2 i 3 iako części iednéy summy to iest 5; poczém oznaczywszy części proporcyonalne na które ma bydź rozłożone 100 przez x, y, powinna wypaśdź proporcya $x : 2 :: y : 3$, a że wiadomo nam (184.) że w szeregu stosunków równych, summa poprzedników ma się do summy następników, iak ieden z poprzedników ma się do swego następnika, zatém z powyższéy proporcyi wypadnie:

$$x + y : 5 :: x : 2 \text{ albo } :: y : 3.$$

albo ponieważ $x + y = 100$ zatém:

$$100 : 5 :: x : 2, \text{ i } 100 : 5 :: y : 3.$$

albo przemieniaiąc srzednie na skrayne będzie:

$$5 : 100 :: 2 : x \quad \text{zkąd } x = \frac{100 \cdot 2}{5} = 40.$$

$$5 : 100 :: 3 : y \quad y = \frac{100 \cdot 3}{5} = 60.$$

Tego postępowania używa się pospolicie zawsze iakażkolwiek iest liczba części.

Przykład 1. Trzéy wspólnie prowadzący handel końmi, zakupili ich 212 które sprzedano bez braku po czer: 32, iakiż będzie zysk piérwszego, który do tego kupna włożył czer: 1342, drugiego który włożył czer: 1178, trzeciego który włożył 630 czerw: ?

Sprzedaiąc te konie biorą $212 . 32 = 6784$ czer:,
Summa zaś składek wynosi $1342 + 1178 + 630 = 3150$ czer:
Zatém zarobek wynosi czer: $6784 - 3150 = 3634$ czer:

Nazwawszy więc piérwszego zarobek przez x, drugiego przez y, trzeciego przez z; będzie:

$$\begin{array}{ll} \text{skład:} & \text{zysk} \\ 3150 & : \ 3634 \end{array} \left\} \begin{array}{rl} 1342 : x = & 1548\frac{628}{3150} \text{ czer:} \\ :: 1178 : y = & 1359\frac{2}{3150} \\ 630 ; z = & 726\frac{2520}{3150} \\ \hline & 3634. \ 0 \text{ czer:} \end{array} \right.$$

Uważaiąc czerwony złoty po złotych 18, aby doyśdź wartości każdego z tych ułamków wypada ie nayprzód skrócić, poczém postąpić podług (77)

204. W przykładzie poprzedzaiącym i w innych do téy reguły należących chcąc uniknąć reguły 3^ch^ powtórzonéy, można także składki szczególne osób, podzielić przez iednakową liczbę, zkąd wypadnie: że składki maią się do siebie iak liczby 671 : 589 : 315, zebrawszy liczby te w iedną summę czyni 1575; dzieląc na ów czas zysk całkowity przez tę summę i mnożąc koléyno wielorazy przez liczby 671, 589, i 315; otrzymamy na zyski szczególne toż samo co przez poprzedzaiące działanie.

205. *Uwaga.* Gdyby liczba wchodzących w spółkę była dosyć znaczna, i składki ich bardzo się od siebie różniły, sposób użyty w powyższym przykładzie byłby bardzo długi. W takim przypadku układaią się tablice, co zyskuie 1000, 100, 10 i 1 złł: lub dukatów, a na ów czas mnożąc te ilości przez liczby wyrażaiące rozmaite części składki każdego, całe prawie działanie przywodzi się do małych dodawań bardzo łatwych.

II. Do dobrego prochu potrzeba 16 części salitry, 2 części siarki, a 3 części węgli; Chcąc zrobić 600 cetnarów prochu, wieleż potrzeba użyć z każdéy z tych materyi w szczególności?

Ponieważ w iakiéykolwiek ilości prochu, ilość salitry, siarki i węgli maią się mieć do siebie iak 16 : 2 : 3, zatém;

$$16+2+3 : 600 \left\{ :: \begin{array}{l} 16 : x = 457\tfrac{1}{7} \text{ Cetnarów salitry:} \\ 2 : y = 57\tfrac{1}{7} \text{ Cet: siarki.} \\ 3 : z = \underline{85\tfrac{5}{7} \text{ Cet: węgli.}} \\ \quad\;\; 600 \text{ Cet:} \end{array} \right.$$

III. Ma bydź odbyta rewiia z 12 Pułkami i z 6 Batalionami Grenadyerów, do których maią bydź użyte 2 Baterye 12° funtowe (*) Każda o 10 działach, prócz tego do każdego Batalionu maią bydź dodane 2 działa 6° funtowe; a do każdego Pułku 2 działa 3 funtowe. Do tego wszystkiego wyznaczono 24 Cetnarów prochu. Jest pytanie wiele potrzeba prochu do każdego gatunku dział, aby każdy uczynił iednakową liczbę wystrzałów, gdy do 12 funtowego działa potrzeba naboiu funtów $1\frac{1}{2}$; do 6° funtowego funt 1, a do 3ch funtowego $\frac{3}{4}$ funta?

Ponieważ 2 Baterye użyte bydź maią, każda o 10 działach, zatém w obydwóch iest $10 . 2 = 20$ dział, a że na każdy nabóy wychodzi $1\frac{1}{2}$ funt: prochu, więc na 1 wystrzał ze wszystkich potrzeba $20 . 1\frac{1}{2} = 30$ funt: każdy batalion granadyerów ma 2 działa 6° funt:, zatém wszystkie $2 . 6 = 12$ dział, a do każdego potrzeba naboiu funt 1, zatém na 1 wystrzał ze wszystkich potrzeba $12 . 1 = 12$ funt. Nakoniec ponieważ do każdego Pułku dano iest po 2 działa 3 funtowe, zatém dano $12 . 2 = 24$ dział 3 funtowych, a że do każdego nabóy czyni $\frac{3}{4}$ funtów; zatém potrzeba $24 . \frac{3}{4} = 18$ funtów prochu.

Zatém części z 24 Cetnarów albo $24 . 110 = 2640$ funtów prochu należących do każdego gatunku dział, muszą się mieć do siebie iak 30, 12, i 18 funtów; Można więc wnieść że:

1 wystrzał	do 12°	funtowego	działa	wymaga		30	funtów	prochu
—	— do 6°	—	—	—	—	12	—	—
—	— do 3	—	—	—	—	18	—	—

Zatém na 1 wystrzał do wszystkich potrzeba 60 funtów.

(*) *Baterya w Artyleryi znaczy pewną liczbę armat; armata* 12° *funtowa nazywa się ta do któréy kula użyta waży* około 12 *funtów.*

Toż się rozumie o działach 24° 6° *funtowych*, i. t. d.

Zkąd nakoniec wypada:

$$60 : 2640 :: 30 : x,$$

$$\text{albo} \quad 1 : 44 \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{l} 30 : x = 1320 \text{ fu: pr: do 12 funtowych.} \\ :: 12 : y = 528 \quad \text{— do 6 —} \\ 18 : z = 792 \quad \text{— do 3 —} \end{array}$$

Do wszystkich dział razem 2640. funtów prochu;

A że na wszystkie wystrzały, potrzeba prochu funtów 60; zatém liczba wystrzałów będzie $\frac{2640}{60} = 44$

206. Zdarza się częstokroć w regule spółki że nietylko składki, ale i czasy przez które każdy ma swoią summę w handlu są rozmaite. *np.* Dwie osoby A i B wszedłszy z sobą w handel iedna dała 6500 złł: na 6 miesięcy, druga 5400 złł: na 5 miesięcy, i zyskuią tém 12000 złł:, wieleż z tego dla każdéy przypadnie?

W takim przypadku zyski muszą się mieć do siebie iak mnogości ze składek przez czasy, to iest: zysk znayduie się ze składką i czasem w stosunku złożonym, ponieważ zysk ze składką w szczególności, iakoteż z czasem w stosunku prostym znayduie się. *Zatém summa mnogościów ze składek przez czasy, ma się do całego zysku, iak każda poiedyncza mnogość do należącego zysku.*

będzie więc $6.6500 + 5.5400 : 12000 :: 6.6500 : x$

$$x = 7090 \tfrac{10}{11} \text{ Złł:}$$

$$6.6500 + 5.5400 : 12000 :: 5.5400 : y$$

$$y = 4909 \tfrac{1}{11} \text{ Złł.}$$

IV.

IV. Włożył kto w handel złotych 2000, po upłynionym roku, przyiaciel iego dołożył do niego 1800 złł, w trzecim roku dołączył się do nich trzeci daiąc złł: 2600; nakoniec w czwartym roku dołączył się czwarty daiąc 3600 złł. Po upłynionych 3 latach rachuiąc od czasu połączenia się ich wszystkich, towarzystwo to zyskało temi pieniędzmi 50000 złotych. Jest pytanie wiele na każdego przypadnie z takowego zysku?

Jakożkolwiek zagadnienie to zdaie się bydź zawikłaném, łatwo go iednak rozwiązać można, uważaiąc iego warunki: Nayprzód widoczna iest, że zysk nietylko w stosunku składki każdego, ale i w stosunku przeciągu czasu przez który składka ta w handlu zostawała, musi bydź podzielony; zważać więc tu wypada, iak długo każdego część była w handlu, co się wynaydzie postępuiąc w porządku odwrotnym, i mówiąc: Nim ostatni przyłożył się do składki, handel trwał ieszcze lat 3, zatém:

czwartego składka	złł: 3600	była	w handlu	lat 3.
trzeciego —	złł: 2600	—	— —	lat 4.
drugiego —	złł: 1800	—	— —	lat 5.
piérwszego —	złł: 2000	—	— —	lat 6.

Postępuiąc więc od piérwszego do czwartego wypada: że

Złł: 2000 w 6 lat tyle zarobią co	6 . 2000 = 12000 złł:	w 1 Roku.
Złł: 1800 w 5 — — —	5 . 1800 = 9000 złł:	— —
Złł: 2600 w 4 — — —	4 . 2600 = 10400 złł:	— —
Złł: 3600 w 3 — — —	3 . 3600 = 10800 złł:	— —

Zatém 10000 złł: w różnych czasach
daią tyle co — — 42200 złł: w 1 roku.
to iest zysku złł: 50000.
będzię więc:

42200 złotych : 50000 złotych :: 12000 : x

albo

$$422 : 500 :: \left\{ \begin{array}{l} 1200 : x = 14218\tfrac{4}{422} \text{ zł: część 1go} \\ 900 : x' = 10663\tfrac{214}{422} \text{ — — 2go} \\ 10400 : y = 12332\tfrac{116}{422} \text{ — — 3go} \\ 10800 : z = 12796\tfrac{88}{422} \text{ — — 3go} \end{array} \right.$$

Jakoż części te zysku czynią 50000 Złotych.

V. Wypada w iakiéy fortyfikacyi wykopać ziemi 15600 sążni sześciennych; użyto do téy roboty mieszkańców z pięciu wiosek téy okolicy. Wieś piérwsza oddalona iest od miéysca fortyfikacyi o $1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ mili, i dostawia za pańszczyznę ludzi 36, wieś druga oddalona na $1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$ mili i dostawia ludzi 25; wieś trzecia oddalona na $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$ mili, dostawia ludzi 32, czwarta oddalona na mil $2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ i dostawia ich 27; nakoniec wieś piąta dostawiaiąc ludzi 50 oddalona iest na 2 mile; Jest pytanie wiele przypadnie téy roboty na każdą wieś?

Widoczna iest że na każdą partyę ludzi wypadnie ilość sążni sześciennych tém większa, im iest w niéy więcéy ludzi, ale znowu tém mniéy, im bardziéy są od pracy oddaleni; a tak część na każdą wieś przypadaiąca iest w stosunku prostym z liczbą robotnika którą posyła, ale w stosunku odwrotnym odległości od miéysca do którego przychodzą robić. Dzieląc więc liczbę ludzi przez liczby wyrażaiące ich odległości względne, wypada podzielić liczbę 15600 sążni sześciennych w stosunku liczb następuiących $36\cdot\frac{4}{5}$, $25\cdot\frac{4}{7}$, $32\cdot\frac{4}{11}$, $27\cdot\frac{4}{9}$, $50\cdot\frac{4}{8}$ albo ponieważ 4 iest wspólnym czynnikiem tym wszystkim mnogościom, dzieląc więc ie wszystkie przez tęż liczbę, wypadnie podzielić 15600 sążni w stosunku ułamków $\frac{36}{5}$, $\frac{25}{7}$, $\frac{32}{11}$, $\frac{27}{9}$ albo 3 i $\frac{50}{8}$ albo $\frac{25}{4}$.

Przywiodłszy te ułamki do mianownika wspólnego nayprostszego, znaydziemy następuiące liczby 11088, 5500, 4480, 4620, 9625, których summa iest 35313 przez którą potrzeba podzielić 15600 sążni szes: zkąd wypada na wieloraz $\frac{5200}{11771}$, który mnożąc koléyno przez liczby wyżéy wynalezione, znaydziemy: że części odpowiadaiące są:

$$4898\frac{3242}{11771};\ 2429\frac{8241}{11761};\ 1979\frac{1191}{11771}\ 2040\frac{11160}{11771};\ \text{i}\ 4251\frac{11479}{11771},$$

których summa równa się liczbie 15600 sąż: sześciennym które wykopać należało.

§. 31.

O Regule łańcuchowéy

(Regle Conjointe)

207. Reguła 3^{ch} składana ma także swoie przystosowania, gdy z stosunków posrzednich między dwoma ilościami z których iedna iest wiadoma, ma się dochodzić ilości drugiéy. Nazywaią ią regułą łańcuchową dla tego, że wnią wchodzi wiele proporcyi, które nieiako w iedno ogniwo łączyć się daią.

Używa się iéy szczególniéy w zamianie miar wag i pieniędzy iednego kraiu na drugie, w rachunkach wexlowych i. t. d.

Abyśmy użycie iéy dokładnie poięli, rozwiążmy zagadnienie iakie układaiąc wyrazy iego tak, ażeby każdy po lewéy stronie położony, był iednorodnym z wyrazem naybliższym po prawéy stronie będącym, póki niedóydzie się do wyrazu iednorodnego z wyrazem szukanym a kończącym prawą stronę.

Np. Wiedząc że 23 łokci Warsz: czynią 24 łokci Lipskich, a łokci warsz: 35 czynią 86 łokci Gdańskich, iest pytanie wiele 560 łokci Lipskich czynią łokci Gdańskich?

Szukaiąc wiele na 560 łokci Lip: idzie łokci Gdańskich, które oznaczmy przez x, połóżmy to x po lewéy stronie, mówiąc wiele łokci x Gdańskich idzie na 560 łokci Lipskich kiedy 24 ł: Lip: czynią 23 ł: W: a 35 ł: War: czynią 36 ł: Gda: tak, że strona prawa kończy się na iednościach tego gatunku, od których zaczyna się lewa, i każdy wyraz z prawéy strony odpowiada następuiącemu z lewéy. Po takowém ułożeniu wyrazów, dzielą się po iednéy i drugiéy stronie przez wspólnych czynników, a wypadłe wielorazy z prawéy strony rozmnożywszy między sobą, mnogość tę dzieli się przez mnogość z wielorazów z lewéy strony i na wieloraz wypadnie ilość szukana.

x ł G	560 ł L
ł L 24	23 ł W
ł W 35	36 ł Gd:

$$x = \frac{112.23.3}{2.7} = 552$$

łokci Gdańskich.

Żeby się teraz przekonać że ułożenie takowe wyrazów, gruntuie się na Regule 3^{ch} poiedynczéy napisawszy 560 łokci Lipskich w drugim rzędzie na trzeciém miéyscu, wypadnie proporcya 24 ł L : czynią 23 ł War: : wieleż 560 ł Lip: czynią łokci Warsz: ; na dóyście więc téy wartości potrzeba $\frac{23.560}{24}$, wyraz ten wynaleziony czyli oznaczony znaczący łokcie Warsz: które są wartością łokci Lipskich 560, położywszy znowu na miéyscu trzeciém w rzędzie trzecim, będzie druga proporcya 35 ł War: czynią 36 Gdań:, łokci Warszaw: $\frac{23 \cdot 560}{24}$ (wartość 560 ł: Lips:) wieleż czynią Gdańskich? wypadnie więc nakoniec $\frac{23 \cdot 560 \cdot 36}{24 \cdot 35}$ ł: Gdańskich, gdzie wyrazy położone w liczniku, odpowiadaią wyrazom ułożonym po prawéy stronie, a położone w mianowniku, odpowiadaią wyrazom położonym po lewéy.

208. *Uwaga.* W ułożeniu wyrazów w téy regule można się pomylić, gdy albo piérwszy rząd do którego iest przywiązane pytanie nie iest zupełnie dokładnym, albo zagadnienie nienależy do reguły łańcuchowéy, w czém trzymać się należy następuiącego prawidła: *gdyby wyraz położony po prawéy, do którego iest przywiązane pytanie, był dwa razy większy iak iest w saméy rzeczy, wyraz też szukany musiałby także wypaśdź dwa razy większy, to iest byłby stosunek prosty. Tym sposobem doświadcza się drugiego rzędu i innych; a ieżeli w którym rzędzie zachodzą iakie niezwyczayne wyrazy, na tenczas, położywszy w nim na trzeciém miéyscu, wyraz bądź iakkolwiek wielki, aby tylko iednorodny z piérwszym tegoż rzędu, uważa się czyli wyrazy te składaią regułę 3ch prostą. Jeżeli to wszystko ma miéysce, ułożenie wyrazów iest dobre i zagadnienie może bydź rozwiązane przez regułę łańcuchową.*

Gdyby *np* wiedzieć wypadło, na wiele tygodni wystarczy iaka żywność trzem ludziom, gdy 80 ludziom wystarcza na dni 6. Ułożywszy wyrazy iak iest na boku; z uwag poprzedzaiących przekonywamy się, że zagadnie-dnienie to niemoże bydź rozwiązane podług reguły łańcuchowéy, ponieważ dwa razy więcéy ludzi iak 3 to iest 6, tąż samą żywnością niemogą się utrzymać przez czas dwa razy większy, ale przeciwnie, iest więc stosunek odwrotny, i zagadnienie to należy do reguły 3ch odwrotney i składanéy.

x ty	3 lu:
lu: 80	6 dni
dni 7	1 tydz:

II. Wiele kosztuie 10 łótów iakiego towaru, za którego funtów 4, przypada złł: 40?

W tém zagadnieniu przypuściwszy że na wartość 10 łotów wypadną złote lub ułamek złotego, widzę że podług wyżéy przepisanéy reguły powinny następować łoty, których w zagadnieniu nie znayduie się, zatém dla dopełnienia tego warunku przybiéram sobie łóty, kładąc 32 łoty czynią 1 funt, abym tym sposobem doszedł do 4 funtów danych i zakończył stronę prawą na gatunku takim, od iakiego się léwa zaczyna. Tego postępowania używa się we wszelkich temu podobnych zagadnieniach. Jeżeli przy liczbach całkowitych znayduią się iedności niższego gatunku, takowe zamieniaią się na ułamki iedności wyższych, mianowniki ich z iednéy strony znoszą się, ale kładą się po drugiéy, bo tym sposobem mnożą się obydwie strony przez iednakową liczbę, poczém skróciwszy dochodzi się ilości niewiadoméy.

Złł: x	10 łót:
łót: 32	1 funt
funt: 4	40 złł:

$x = \frac{5 \cdot 5}{8} = 3\frac{1}{8}$ złł:

III. Pożyczył kto od swego sąsiada 30 korcy Pszenicy, niemaiąc pszenicy chce mu ią oddać Owsem, wieleż powinien mu dać korcy owsa za iego pszenice, gdy pszenicy korzec przypada po Złotych 30, a Korzec Owsa po złł: 7 gr: 15?

K O x	30 K: Psz:
P K 1	30 złł:
Złł: $7\frac{1}{2}$	1 K: Ow:

x=30 . 2 . 2=120 K: Ow:

IV. Wypada 6000 ludzi codziennie chlebem opatrzyć, gdy co dzień na iednego przypada $2\frac{1}{2}$ funtów chleba, a 3 funty i łotów 4 chleba, kosztuią gr: m: 12, wieleż codziennie będzie kosztował chleb na 6000 ludzi?

Złł: x	6000 lu:	albo x	20
czło: 1	$2\frac{1}{2}$ fun:		8
funt: $3\frac{1}{8}$	12 gr: m:		12 zatém x=20 . 8 . 12=1920 złł.
gr: m: 30	1 złł.		

V. Ma kto po upłynionym czasie wypłacić 1000 złł:, ieżeli zaś dług ten w czasie naznaczonym prędzéy, lub monetą oznaczoną, lub na przeznaczoném miéyscu wypłaci, ustępuie mu Wierzyciel iego po gr: m: 3 na 1 złotym, gdy dłużnik warunku tego dopełni, wieleż za złł: 1000 ma zapłacić?

Złł: x	1000 złł:
złł: 1	30 gr: m:
za gr: 30	27 gr: m:
gr: 30	1 złł:

x=100 . 9=900 złł:

W tém zagadnieniu mówię: wiele x złł: przypadnie za 1000 złł: kiedy ieden złoty czyni gr: m: 30, a za 30 gr: m: ma dać gr: m: 27, a 30 gr: m: czynią złoty.

VI. Gdy sztuka holenderskiego sukna z 30 Brabanckich łokci złożona kosztuie złotych holenderskich 260, a ieden holenderski złł: czyni 20 Stywrów, a 104 Stywry czynią ieden holenderski dukat, a 1 holenderski dukat idzie na grubą monetę po złł: Pol: $19\frac{1}{2}$; wieleż kosztuie sukna tego łokieć War: przypuściwszy że 100 łokci War: czynią Brabanckich łokci 86?

Złł: x	1 Łok: W:
ł W: 100	86 łok: Br:
ł Br: 30	260 Złł: Hol:
Złł: h: 1	20 Styw:
Sty: 104	1 Hol: duk:
Hol: d: 1	$19\frac{1}{2}$ Złł: Polskich.

$x=\frac{43 . 13}{10 . 2}=27\frac{19}{20}$ Zł; Pol:

209. *Uwaga*. Podług téy reguły rozwiązać można także niektóre reguły trzech procentów składanych aby tylko stosunki zachodziły proste, iakoteż wszelkie przykłady mnożeń i dzieleń wielorakich, uważać iednak potrzeba, którym sposobem łatwiéy dóyśdź można ilości szukanéy.

210. *Próba* zagadnień przez regułę łańcuchową rozwiązanych, uskutecznia się biorąc wyraz wynaleziony za niewiadomy, a wyraz ieden zwiadomych za niewiadomy.

§. 32.

O Regule Mięszaniny.
(Régle d'Alliage)

211. Maiąc z dwóch lub więcéy rzeczy rozmaitéy ceny, dochodzić wiele z każdéy z nich wziąśdź należy, aby otrzymać mięszaninę wartości srzedniéy; prawidło którém tego dochodzimy, nazywa się *Regułą mięszaniny*.

212. *Uwaga*. Ponieważ w téy regule, ani stosunki wchodzących w tę mięszaninę rzeczy są dane, ani idzie o dochodzenie ceny mięszaniny z mnogości wchodzących wnią rzeczy, ale tylko summa części wchodzących rozmaitéy wartości, ma składać iedność, danéy srzedniéy ceny; takowy zatém rachunek, ani na proporcyach, ani na regule podziału nie zasadza się, i właściwie należy do Algebry. Że zaś często iéy używać wypada, przeto przestaniemy tu na podaniu samego prawidła, zachowuiąc okazanie iego do Algebry.

I. Mięsza kto 2 garce wina Francuzkiego, garniec po złotych 10, garcy 3 wina podleyszego, garniec po złotych $8\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ garca wódki garniec po złotych 8, wraz z 2 funtami czerwoney farby funt po złł: 1. Wieleż kosztuie garniec téy mięszaniny ?

W tém i podobnych zagadnieniach oczewista iest:

że 2	garce wina fran: po złotych 10 kosztuią	Złł:		20.
3	— podléyszego po złotych $8\frac{1}{2}$	—	—	$25\frac{1}{2}$.
$\frac{1}{4}$	— Wódki po złotych 8.	—	—	2.
	2 funty farby po złł: 1.	—	—	2.
zatém $5\frac{1}{4}$	garcy mięszaniny kosztuią	—	— złotych	$49\frac{1}{2}$.

więc 1 garniec kosztuie $49\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} =$ złotych $9\frac{3}{7}$.

II. Doświadczaiąc doniosłóści iakiego moździerza, wystrzelono z niego 5 razy, pierwszego razu doniósł do 2260 kroków, drugiego do 2510, trzeciego do 2365, czwartego do 2475, a piątego do 2380 kroków, iakaż iest iego srzednia doniosłość?

1° razu	2260	kroków.
2°	2510	—
3°	2365	—
4°	2475	—
5°	2380	—
5 wystrzałów czynią	11990	—

więc na ieden srzedni wystrzał wypada $\frac{11990}{5} = 2398$ kroków.

III. Z dwóch trunków z których garniec piérwszego przypada po talarów 12, a drugiego garniec po talarów 8, wypada mieć garniec mięszaniny na talarów 9, wieleż z każdego gatunku wziąśdź należy.

213. *Prawidło* podług którego tu i w każdym razie, gdy z dwóch rzeczy rozmaitéy ceny, odnoszących się iednak do iednakowéy miary, ma bydź razem zmięszana takoważ miara ceny srzedniéy, iest następuiące :

1[od] *Odéymuie się cena podleyszego gatunku od ceny mieszaniny.*

2[re] *Odéymuie się także taż cena od ceny lepszego gatunku, tym sposobem otrzymana różnica piérwsza będzie licznikiem, a druga mianownikiem ułamka, który wskaże część miary maiącey się wziąśdź z lepszego gatunku.*

Tak w powyższém zagadnieniu zdroższego gatunku potrzeba wziąśdź $\frac{9-8}{12-8}=\frac{1}{4}$ garca, zatém: z tańszego wypada wziąśdź $\frac{3}{4}$ garca. Jakoż $\frac{1}{4}$ garca piérwszego kosztuie zupełnie 3 talary, a $\frac{3}{4}$ garca drugiego kosztuie $\frac{3 \cdot 8}{4}=6$ talarów, zatém razem kosztuie talarów 9.

Uwaga. Rozumie się tu, że wszystkie trzy ceny są wyrażone w iednakowego gatunku iednościach.

IV. Cwierć Jęczmienia kosztuie złotych 5, cwierć owsa złotych $3\frac{1}{2}$, żądamy mieć mięszaninę któréyby cwierć kosztowała złotych 4.

Bierze się $\frac{4-3\frac{1}{2}}{5-3\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ cwierci jęczmienia, zatém $\frac{2}{3}$ cwierci owsa.

Jakoż $\frac{1}{3}$ cwierci jęczmienia kosztuie $\frac{1}{3}\cdot 5=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ złł:

a $\frac{2}{3}$ cwierci owsa kosztuie $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 2}=\frac{14}{6}=2\frac{2}{6}=2\frac{1}{3}$ złł:

Zatém razem Złł: $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}=4$ złł.

V. Z żyta którego korzec przypada po $1\frac{5}{8}$ talara, i z jęczmienia którego korzec przypada po $1\frac{1}{8}$ talara, ma bydź złożona mięszanina któréyby korzec kosztował $1\frac{1}{2}$ talara.

Bierze się $\frac{1\frac{1}{2}-1\frac{1}{8}}{1\frac{5}{6}-1\frac{1}{8}}=\frac{1\frac{4}{8}-1\frac{1}{8}}{1\frac{20}{24}-1\frac{3}{24}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{17}{24}}=\frac{3\cdot24}{8\cdot17}=\frac{3\cdot3}{17}=\frac{9}{17}$ korca żyta, zatém $\frac{8}{17}$ korca jęczmienia.

Próba uskutecznia się iak w przykładzie poprzedzaiącym.

214. Jeżeli przypada mięszać z sobą więcéy rzeczy iak dwie, lepiéy iest dochodzić różnicy sposobem podanym w następuiącém zagadnieniu.

VI. Gdyby mięszanina miała się składać z wina którego garniec piérwszego przypada złotych 15, drugiego złotych 10, a trzeciego złotych 8, aby otrzymać wino któregoby garniec wypadał na złotych 12; na ówczas porównawszy 15 i 8 z ceną

$$12\left\{\begin{array}{lcl} 15 & - - - - & 4+2=6 \\ 10 & - - - - & 3 \\ 8 & - - - - & 3 \end{array}\right.$$

srzednią, różnice wypadłe układaią się na odwrót, to iest 15—12=3, kładzie się obok 8, a 12—8=4 obok 15, porównawszy daléy 15 i 10 z tąż ceną srzednią 12, kładzie się różnice wypadłe podobnież na odwrót, to iest: 15—12=3 obok 10, a 12—10=2 obok 15. ~~Rozmnożywszy~~ Dodawszy różnice 4 i 2 położone przy 15 ~~przez~~ do siebie, wypadnie wziąść z wina na złotych 15 garcy 6, na złotych 10 garcy 3, na złotych 8 także garcy 3, a pomięszawszy razem wypadnie 12 garcy wina po złotych 12.

215. Gdyby w mięszaninę miało wchodzić cztéry, pięć lub sześć gatunków trunków rozmaitéy ceny, porównać ie trzeba z sobą koléyno po dwie z ceną srzednią, uważaiąc aby za iednym razem porównywać z sobą dwie tylko ceny, to iest: iednę większą, drugą mniéyszą od ceny srzedniéy.

VII. Ma kto czworakiego gatunku iakiego towaru, piérwszego funt kosztuie 58 złotych, drugiego złotych 49, trzeciego złotych 28, a czwartego złotych 22, wieleż potrzeba zmięszać funtów trzech ostatnich gatunków z 12 funtami piérwszego, aby mieć funt tegoż towaru na złotych 36.

W tém zagadnieniu uważam iak gdyby liczba funtów piérwszego gatunku towaru niebyła oznaczoną; sposobem więc powyższym znayduie się że mięszaiąc 14 funtów po złotych 58, z 8 funtami po złotych 49, z 13 funtami po złł: 28 i z 22 funtami po złotych 22, otrzymałbym towar któregoby funt wypadł na złotych 36. Że zaś ilość piérwszego gatunku towaru iest oznaczona, mówię więc: że ieżeli na 14 funt~~ach~~ tów po złotych 58 mam z niego 8 funtów po złotych 49; 13 funtów po złotych 28 i 22 funt: po 22 złote; na funtów 12 towaru po złotych 58, wieleż potrzeba wziąśdź funtów z każdego z trzech gatunków ostatnich. Dóydę liczbę tych funtów za pomocą następuiących Reguł trzech.

$$36 \left\{ \begin{array}{llll} 58 & - & - & 14 \\ 49 & - & - & 8 \\ 28 & - & - & 13 \\ 22 & - & - & 22 \end{array} \right.$$

$$14 : 12 :: \left\{ \begin{array}{l} 8 : x = \frac{12 . 8}{14} = \frac{96}{14} = 6\frac{6}{7} \text{ funt:} \\ 13 : y = \frac{12 . 13}{14} = \frac{156}{14} = 11\frac{1}{7} \\ 22 : z = \frac{12 . 22}{14} = \frac{264}{14} = 18\frac{6}{7}. \end{array} \right.$$

Łatwo iest przekonać się że $6\frac{6}{7}$ funta towaru po złotych 49; $11\frac{1}{7}$ funt: po złotych 28, i $18\frac{6}{7}$ funta po złotych 22 pomięszane z 12 funtami po złotych 58, dadzą mi towar którego funt przypadnie na 36 złotych.

§. 33.

O Postępie nadmiaru
(Progression par difference).

216. Szereg wyrazów liczbowych z których każdy przewyższa tego co go poprzedza, albo iest od niego przewyższonym iednakową ilością, albo szereg stosunków nadmiarowych ciągłych tak ułożony, że następnik każdego stosunku iest poprze-

dnikiem stosunku następuiącego, nazywa się *Postępem nadmiaru.* Tak liczby 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 i. t. d. czynią postęp nadmiaru który tak się oznacza:

$\div$ 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. . . ,

Różnicą czyli stosunkiem iest w tym postępie 3.

217. Gdy wyrazy w postępie coraz się powiększaią, postęp takowy nazywa się *rosnący* (progression croissante); przeciwnie nazywa się *ubywaiący* (decroissante).

Każdy rosnący biorąc od lewéy ręki, staie się ubywaiącym; uważać więc będziemy same rosnące.

W każdym postępie nadmiaru wyraz iego drugi równa się piérwszemu więcéy stosunek, wyraz trzeci równa się drugiemu więcéy stosunek, czyli piérwszemu więcéy dwa razy stosunek, wyraz czwarty składa się podobnież z trzeciego więcéy stosunek, albo z piérwszego więcéy trzy razy stosunek i. t. d.

218. W powszechności *którykolwiek wyraz postępu nadmiaru, składa się z piérwszego, więcéy stosunek powtórzony tyle razy, ile go wyrazów poprzedza.* Tak w powyższym przykładzie wyraz osmy $22 = 1 + (3 \cdot 7) = 22$.

Ztąd wypada 1ᵒᵈ Że maiąc piérwszy wyraz i stosunek, możemy składać i ciągnąć do upodoba, nia wyrazy postępu dodaiąc do każdego poprzednika różnicę panuiącą.

2re Że można wynaleśdź którykolwiek wyraz postępu niewynayduiąc tych które go poprzedzaią. Tak 100ny wyraz powyższego postępu $= 1 + (3 \cdot 99) = 298$, co znaczy że w tym postępie wyraz 100ny równa się wyrazowi piérwszemu 1, więcéy stosunek 3 wzięty razy 99, bo tyle wyrazów, wyraz setny poprzedza.

3cie Że pomiędzy dwoma liczbami choćby pomiędzy sobą naybliższemi, można wcisnąć tyle srzodków nadmiarowych, ile się podoba. *Np* aby między 4 i 32 wcisnąć sześć srzodków nadmiarowych, to iest: aby związać te dwie liczby przez 6 srzodków posrzednich; uważam, że ponieważ wyraz ostatni 32 postępu, równa się piérwszemu 4 powiększonemu stosunkiem wziętym razy tyle, ile go wyrazów poprzedza iak tu 7, zatém ieżeli od ostatniego wyrazu 32 odciągniemy wyraz piérwszy 4, reszta 28 składa się z samego stosunku niewiadomego wziętego tyle razy, ile wyrazów wyraz ostatni postępu poprzedza, zatém na stosunek poiedynczy wypadnie w tym przykładzie $\frac{28}{7} = 4$, który maiąc wiadomy, złożymy następuiący postęp:

$\div$ 4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32. a tém samém pomiędzy 4 i 32 wciśniemy sześć srzodków nadmiaru.

219. W powszechności więc: *aby wcisnąć pomiędzy dwie liczby zadane pewną liczbę srzodków nadmiaru proporcyonalnych, potrzeba, podzielić różnicę między temi ilościami, przez liczbę maiących się wcisnąć srzodków zwiększoną o 1, a wieloraz wypadły będzie stosunkiem, który maiąc, można iuż złożyć postęp.*

Przykłady. Aby wcisnąć osiem srzodków między 4 i 11, znayduiemy różnicę $=\frac{11-4}{9}=\frac{7}{9}$, a składaiąc postęp będzie:

$$\div\ 4.\ 4\tfrac{7}{9}.\ 5\tfrac{5}{9}.\ 6\tfrac{3}{9}.\ 7\tfrac{1}{9}.\ 7\tfrac{6}{9}.\ 9\tfrac{4}{9}.\ 10\tfrac{2}{9}.\ 11.$$

Podobnież gdyby było zadano znaleśdź dziewięć srzodków między 0 i 1; znayduiemy różnicę $=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}$ albo 0, 1, a zatém postęp wypadnie;

$$\div\ 0.\ 0,1.\ 0,2.\ 0,3.\ 0,4.\ 0,5.\ 0,6.\ 0,7.\ 0,8.\ 0,9.\ 1.$$

§. 34.

O Postępie Wielorazu.
(Progression par quotient.)

220. Postęp wielorazu iest to szereg wyrazów z których każdy zawiéra w sobie tego który go poprzedza iednakową liczbę razy; albo, iest to szereg stosunków ciągłych wielorazowych równych.

Taki iest postęp:

$$\div\ 3:6:12:24:48:96:192\ldots\ldots\ i.\ t.\ d.$$

W postępie tym iest stosunek 2.

W każdym postępie wielorazu, wyraz drugi równa się piérwszemu rozmnożonemu przez stosunek; Wyraz trzeci drugiemu pomnożonemu przez stosunek, a zatém piérwszemu rozmnożonemu przez kwadrat stosunku; podobnież wyraz 4ty iest mnogością wyrazu 1go przez sześcian ze stosunku i. t. d.

221. W powszechności: *wyraz którykolwiek postępu wielorazu, iest mnogością z pierwszego przez stosunek wyniesiony do stopnia oznaczonego przez liczbę wyrazów którego poprzedzaią.* Tak *np* w powyższym postępie, wyraz czwarty $24 = 3 \cdot 2^3$; wyraz siódmy $192 = 3 \cdot 2^6$ i. t. d.

Ztąd wnosimy 1od że w każdym postępie wielorazu, można wynaleśdź wartość każdego wyrazu niewynayduiąc tych, które go poprzedzaią. Tak dziesiątym wyrazem powyższego postępu iest $3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$.

2re Że można wcisnąć między dwie liczby zadane pewną liczbę srzodków wielorazu. *np* aby między 3 i 1536 wcisnąc osiem srzodków proporcyonalnych; uważam, że ostatni wyraz 1536 postępu żądanego, będąc równy piérwszemu 3 pomnożonemu przez stosunek wyniesiony do potęgi 9ey, bo tyle wyrazów, wyraz ostatni poprzedza; ieżeli więc 1536 podzielimy przez wyraz piérwszy 3, wieloraz otrzymany 512 iest dziewiątą potęgą stosunku; to iest stosunek postępu wchodzi w 512 za czynnika razy dziewięć; stosunek więc ten będzie $= \sqrt[9]{512} = 2$; a zatém *aby*

po

po między liczby żądane wcisnąc pewną liczbę srzodków proporcyonalnych; potrzeba wziąsdź ich wieloraz i wyciągnąć zniego pierwiastek stopnia któryby się równał liczbie srzodków więcey 1, a ten pierwiastek będzie stosunkiem.

To wyciąganie pierwiastków iest działaniem bardzo trudném, lecz wkrótce stanie się bardzo łatwym przy pomocy pięknych własności Logarytmów.

Aby między 8 i 64 wcisnąć cztery srzodki proporcyonalne, potrzeba wyciągnąć pierwiastek 5^{go} stopnia z $\frac{64}{8}$ albo $\sqrt[5]{8}$; a że ilość ta iest niewymierną, niemożna więc naznaczyć dokładnie w liczbach tych srzodków; zbliżyć się iednak do nich można tak daleko iak tylko zechcemy. Zobaczymy wkrótce, że $\sqrt[5]{8}=1,5157$, i to iest stosunkiem postępu żądanego. Postęp więc szukany będzie: $\div\!\!\div 8:12,1257:18,3792:27,8576:42,2243:64$.

Inne własności postępów nadmiaru i wielorazu wyłożą się w Algebrze, a to cośmy tu o nich powiedzieli potrzebném iest nam do nauki następuiącey o Logarytmach.

§. 34.

O Logarytmach. (Des Logarithmes)

222. Wziąwszy dwa postępy ieden wielorazowy, drugi nadmiarowy tak ułożone, aby ich wy-

razy odpowiadały sobie na wzaiem. *Np.*

$\div\div$ 1:3:9:27:81:243:729:2187. liczby

$\div$ 0:2.4. 6 . 8 . 10 . 12 . 14. Logarytmy.

Każdy wyraz postępu drugiego nazywa się *Logarytmem* liczby odpowiadaiącéy postępu piérwszego. Tak 0 iest logarytmem 1, 2 iest logarytmem 3 *i. t. d.* to iest: *Logarytmy są liczby w postępie nadmiarowym odpowiadaiące wyraz w wyraz liczbom innym składaiącym postęp wielorazowy.*

Ponieważ logarytmy wtenczas tylko maią swóy użytek, gdy ieden z postępów zaczyna się od 1, a drugi od 0; o takich więc mówić tylko będziemy.

223. W piérwszym z takowych postępów, wyraz którykolwiek równa się stosunkowi wyniesionemu do potęgi oznaczonéy przez liczbę wyrazów które go poprzedzaią, w drugim zaś wyraz którykolwiek równa się stosunkowi, rozmnożonemu przez liczbę wyrazów które go poprzedzaią.

Ponieważ mnożenia i dzielenia które odbywamy na liczbach postępu piérwszego odpowiadaią dodawaniom i odciąganiom na liczbach w postępie drugim. Tak *np* dodaiąc dwa wyrazy postępu drugiego 2 i 8, summie ich odpowiada wyraz 243 który iest mnogością z dwóch wyrazów 3 i 81 odpowiadaiących piérwszym. Podobnież odeymuiąc od siebie dwa wyrazy w postępie drugim 2 i 10, różnicy 8 odpowiada wyraz 81 w postępie pierwszym, który iest wielorazem dwóch wyrazów 243 i 3 odpowiadaiących pierwszym, przewidzieć więc można, że logarytmy, bardzo nam ułatwią rachunek, o czém się niezabawem przekonamy;

224. *Własności Logarytmów.* Ztego co się powiedziało o postępach nadmiaru i wielorazu, (§ 33 i 34) iakoteż że ieden z naszych postępów zaczyna się od 1, a drugi od 0, wypada; że w pierwszym, wyraz którykolwiek składa się ze stosunku wchodzącego tyle razy za czynnika do niego, ile w postępie drugim, stosunek tego postępu iest dodany w wyrazie iemu odpowiadaiącym. Tak *np* w powyższych postępach uważaiąc szóste wyrazy 243 i 10 w pierwszym stosunek 3 iest wyniesiony do potęgi 5tey, w drugim zaś stosunek 2 iest dodany do siebie razy 5, a że to względem każdych dwóch wyrazów sobie odpowiadaiących prawdzi się; wniesiemy więc: *że stosunek tyle razy iest czynnikiem w którymkolwiek wyrazie pierwszego postępu, ile stosunek w drugim postępie dodany iest w wyrazie iemu odpowiadaiącym.*

Tak mnożąc przez siebie dwa wyrazy postępu wielorazowego *np*: 243 i 9 stosunek 3 będzie 7

15. *

razy czynnikiem w mnogości, ponieważ w 9 zawiéra się razy 2, a w 243 razy 5; więc $9 \cdot 243$ albo 2187 będzie osmym wyrazem piérwszego; dodaiąc znowu w postępie nadmiaru wyrazy 4 i 10 piérwszym odpowiadaiące, stosunek 2 będzie także dodany w summie ich 14, razy 7, zatém mnogość 2187 i summa 14, są dwoma wyrazami sobie odpowiadaiącemi, co się mówić zwykło: *że summa logarytmów dwóch liczb iest logarytmem ich mnogości.*

225. Ztąd zaś wypada: że podwóyność logarytmu iakiéy liczby, iest logarytmem kwadratu téyże liczby, w powszechności: *mnożąc logarytm iakiey liczby przez iakiego czynnika, otrzymuiemy logarytm potęgi teyże liczby, to iest potęgi oznaczoney przez tegoż czynnika.* *np* na 9^3 otrzymuiemy $3 \cdot 4 = 12$ które odpowiada $729 = 9^3$.

226. Działania odwrotne łatwo iest także okazać, ponieważ logarytm wielorazu, więcéy logarytmem udzielnika powinien złożyć logarytm dzielnego uważanego za mnogość którego czynnikami są dzielnik i wieloraz ztąd wypada: *że logarytm wielorazu dwóch liczb, iest różnicą logarytmów tychże liczb.*

Podobnież logarytm piérwiastka iakiéykolwiek liczby iest wielorazem logarytmu téyże liczby podzielonym przez stopień tegoż piérwiastka, to iest 9.

227. Gdyby na mieysce stosunku 3 w piérwszym postępie, obraliśmy za stosunek postępu wielorazu ilość daleko mnieyszą, na tenczas liczby z których by się składał takowy postęp, byłyby bardzo siebie bliskiemi i przez przybliżenie znaleźlibyśmy liczby 1, 2, 3, 4, *i. t. d.* Wystawmy więc sobie że ułożono takowe Tablice, w których umieściwszy takowe liczby, obok nich położono ich logarytmy, opuszczaiąc wszystkie inne wyrazy posrzednie, na tenczas podania któreśmy okazali byłyby niemniéy prawdziwe. Przypuściwszy więc takowe Tablice, widzimy że:

1ᵒᵈ Aby pomnożyć przez siebie dwie liczby dane, dosyć iest wziąśdź z Tablicy ich logarytmy, dodać ich do siebie i szukać summy między ich logarytmami; a liczba odpowiadaiąca téy summie będzie mnogością żądaną.

2ʳᵉ Aby podzielić dwie liczby przez siebie, odéymuiemy logarytm dzielnika od logarytmu dzielnego, reszty wypadłéy szukać będziemy między logarytmami, téy reszcie odpowiadaiąca liczba, będzie wielorazem żądanym.

3ᶜⁱᵉ Aby odprawić regułę 3ᶜʰ dodamy logarytm wyrazów srzednich, a od ich summy odéymiemy logarytm wyrazu skraynego, liczba odpowiadaiąca wypadkowi będzie ilością żądaną.

4te Aby mieć logarytm ułamka, odéymiemy logarytm mianownika od logarytmu licznika, reszta będzie logarytmem żądanym.

5te Aby wynieść iaką liczbę do potęgi, pomnożymy iéy logarytm przez stopień potęgi, mnogości téy poszukamy między logarytmami, liczba odpowiadaiąca wyda potęgę żądaną.

6te Aby wyciągnąć piérwiastek z iakiéy liczby, podzielimy iéy logarytm przez stopień piérwiastka i poszukamy wielorazu między logarytmami, liczba odpowiadaiąca będzie piérwiastkiem żądanym.

Ztąd widzimy: że rachunki naybardziéy poskładane staią się tym sposobem bardzo prostemi. Tak mnożenia i dzielenia zastępuią dodawania i odciągania, wynoszenie do potęg i wyciąganie piérwiastków przywodzą się do mnożeń i dzieleń. Skrócenia te winniśmy *Neperowi* sławnemu Jeometrze *Szkockiemu*, którego pamięć przyiemną bydź powinna wszystkim miłośnikom nauk.

228. *Ułożenie Tablic.* Idzie teraz o wytłumaczenie iakim sposobem otrzymać można logarytmy wszystkich liczb całkowitych. Dotąd postępami naszemi nadmiarowemi i wielorazowemi były postępy iakiekolwiek, tak dalece, że iedna liczbą mogła mieć nieskończoną liczbę logarytmów. Nie-

zabawem przekonamy się dla czego przeniesiono nad inne postępy następuiące:

$$\div\div 1:10:100:1000:10000:100000:1000000:\text{i.t.d.}$$
$$\div\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.$$

W tych postępach 0, 1, 2, 3, *i. t. d.* są logarytmami liczb 1, 10, 100, *i. t. d.* Idzie tylko o wynalezienie logarytmów liczb posrzednich 2, 3, 4, *i. t. d.* które oczewiście wpadaią między 0 i 1, iakoteż logarytmów liczb 11, 12, 13..99. które wpadaią między 1 i 2. Logarytmów tych otrzymać niemożemy tylko przez przybliżenie, przestaiąc pospolicie na 7 dziesiętnych cyfrach.

Uważmy teraz, że ieżeli w postępie iakim *np* $\div$ 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24, i. t. d. na iednym wyrazie pominiemy wyraz ieden, albo na iednym pominiemy ich dwa albo trzy *i. t. d.* otrzymamy inne postępy:

$\div$ 0. 4. 8. 12. 16. 20 i. t. d.

albo $\div$ 0. 6. 12. 18. 24. i. t. d.

możemy więc wysatwić sobie, że na mieysce postępów powyższych, wzięto postępy inne, którychby wyrazy były daleko pomiędzy sobą bliższemi i składały tylko część tamtych.

Wystawmy więc sobie że w postępie powyższym dziesiątkowym pomiędzy 1 i 10 wciśnięto bardzo wielką liczbę srzodków proporcyonalnych wielorazu, a że na ów czas od 1 do 10 postępuie się tym ściśléy, zdarza się, że pomiędzy temi srzodkami natrafiemy na liczby 2, 3, 4, 5.... *i. t. d.* przybliżone o dziesięcio milionowe. To założywszy ieżeli podobnież liczbę srzodków nadmiaru w ściśniemy między 0 i 1, srzodki te które zaymować będą toż samo mieysce co srzodki piérwsze 2, 3, 4, 5... i. t. d. w postępie wielorazu, będą logarytmami tych liczb.

Toż samo rozumowanie służy względem srzódków proporcyonalnych między 10 i 100, między 100 i 1000 i. t. d, iako też względem ich logarytmów między 1 i 2 między 2 i 3 *i. t. d.*

A lubo iest prawdą, że aby w cisnąć wielką liczbę srzodków wielorazowych, potrzeba wyciągnąć piérwiastek stopnia bardzo wysokiego (221.) unikniemy iednak téy trudności przy pomocy koleynych piérwiastków kwadratowych *np* szukamy logarytmu liczby 3, srzodkiem wielorazowym między 1 i 10 iest 3,16227766, srzodkiem zaś nadmiaru między 0 i 1 iest 0, 5, a zatém 0, 5 iest logarytmem 3, 16227766, to iest liczby która iuż się zbliża do 3, ale iest nieco za mocna. Używaiąc podobnego temuż działania, szukaymy srzodka proporcyonalnego między 1 i 3, 1622776... iakoteż srzodka nadmiaru między 0 i 0, 5; piérwszy iest 1, 77827941... drugi, który iest iego logarytmem wypada 0,25. Podobnież szukaiąc srzodka między 1,77827941... i między posrzednim 3,162277... z iednéy strony, i między 0,25 i 0,5 z drugiéy strony, znaydziemy 2,37137370... a na iego logarytm 0,375. Postępuiąc tak daléy w działaniu i ścieśniaiąc coraz bardziéy takowe granice, znaydziemy na logarytm liczb 2, logarytm 0,30102999, a na logarytm liczby 3, logarytm 0,47712125.

Rachunki takowe iak widzimy są bardzo trudne, lubo na liczby tylko piérwsze odbywać ie trzeba. Postępowanie to dla tegośmy tu wyłożyli, aby miéć wyobrażenie o ułożeniu Tablic; w Algebrze podamy do tego sposoby łatwiéysze i krótsze;

229. Łatwo iest teraz poiąć dla czego dwóm postępom poprzedzaiącym dano nad innemi piérwszeństwo.

1^{od} Wszelki logarytm składa się z liczby całkowitéy która nazywa się iego *Cechą* (Caracteristique) i z ułamka dziesiętnego. Z cechy téy dochodzić można w którym dziesiątku zawiéra się liczba do któréy ten logarytm należy. *np* ieżeli iaka liczba ma cechę 3, dochodzę zaraz, że należy do tysiąców, bo logarytm 1000 iest 3, a że logarytm 10000 iest 4, to też każda liczba od 1000 aż do 10000, niemoże mieć za cechę tylko 3 i ułamek dziesiętny, słowem, *logarytm wszelkiey liczby ma za cechę tyle iedności, ile liczba ta ma* *cyfer całkowitych mniey iedno.* Tak liczba *np.* 543,21 ma 2 iedności całkowite w swym logarytmie, a 3,47712125 iest logarytmem liczby złożoney ze cztérech cyfer: Częstokroć cechy takowe iako łatwo domyślne opuszczaią się w tablicach.

2re Chcąc iaką liczbę pomnożyć lub podzielić przez 10, 100, 1000 i. t. d... potrzeba w piérwszym razie dodać, a w drugim odiąć od iéy cechy 1, 2, 3.., *i. t. d.* iedności, zkąd wypada: że zwiększyć lub zmniéyszyć cechę o 1, 2, 3, i. t. d, iest to dodać lub odiąć od niéy 1, 2, 3... i. t. d, zer, iest to nakoniec posunąć kreskę o 1, 2, 3 i. t. d. miéysca ku prawéy lub lewéy ręce. Tak logarytmy liczb 3,4578; 34, 578; 345,78 maią też same cyfry dziesiętne, same tylko ich cechy są odmienne, to iest liczby piérwszéy iest cecha zero, drugiéy 1, trzeciéy 2 i. t. d.

Dla skrócenia wyraz *logarytm* będziemy pisać *log*, a w rachunkach często nawet głoskę tylko iego początkową. Tak logarytm 9, log 5, l 5 znaczy zarówno logarytm liczby 5.

230. *Użycie Tablic.* Potrzeba mieć podręką Tablice PP. *Caleta*, *Bordy*, *Dalemberta*, *Wegi*, lub P. *Lalanda* z pięciu tylko cyframi dziesiętnemi co w zwyczaynych rachunkach iest dostatecznem, a które są w naywiększém używaniu. Niebędziemy tu wykładać onych użycia, bo takowe znay-

dnie się przy nich ; roztrząśniemy tylko niektóre własności maiące związek z samą onych nauką.

1^{od} Logarytmy liczb <1, to iest ułamków przedstawiaią nam nieiaką trudność. W powszechności wiemy (226.), że potrzeba odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika, aby otrzymać logarytm ułamka albo wielorazu, ale gdy takowy ułamek iest <1, odciągania tego wykonać niemożna. Aby *np* pomnożyć 5 przez $\frac{3}{4}$, ponieważ to na iedno wychodzi co podzielić 5 przez $\frac{4}{3}$; iest więc rzeczą oboiętną albo dodać l $\frac{3}{4}$ do l 5, albo odiąć l$\frac{4}{3}$ od l 5, i w takowym przypadku ostatnie działanie przenosimy nad pierwsze. Widzimy więc, iż potrzeba odiąć logarytm licznika od logarytmu mianownika, ale że logarytmu tego użyć należy w przeciwném znaczeniu, to iest: odciągnąć go, gdyby go wypadało dodać, dodać zaś, gdyby go wypadało odciągnąć. Takowym wartościom dano nazwisko logarytmów *przeczących* (negatifs) rozróżniaiąc ie od innych znakiem — położonym przed niemi.

Dla ułatwienia i zrozumienia działań uskuteczniaiących się przez logarytmy kładą się tu niektóre przykłady.

I. Niechby *np* wypadło z działań iakich ze: $x = \frac{42,212 \cdot \frac{3}{5}}{0,04}$.

Aby wypadku tego dóyśdź przez logarytmy, biorą się nayprzód z Tablic: logarytmy licznika i mianownika i będzie:

$$L\ 5 = 0{,}6989700$$
$$L\ 3 = 0{,}4771213$$

Po odięciu będzie $L\frac{3}{5} = -0{,}2218487$.

Szuka się teraz log: 42,212 czyli log: liczby 42212, który iest 4,6254359, a że liczba zadana iest 1000 razy mnieysza; zatém, tym log: będzie tylko 1,6254359; a że liczba 42,212 ma bydź rozmnożoną przez $\frac{3}{5}$; zatém ich logarytmy powinny bydź do siebie dodane będzie więc: $L\ \frac{3}{5} = -0{,}2218487$

$$L\ 42{,}212 = 1{,}6254359.$$

to iest $42{,}212 \cdot \frac{3}{5} = 1{,}4035872$.

Ponieważ wypadek ten ma bydź podzielony przez 0,04 czyli $\frac{4}{100}$ albo rozmnożony przez $\frac{100}{4}$, a

$$L\ 100 = 2{,}0000000$$
$$L\ 4 = 0{,}6020600$$

więc $L\ \frac{100}{4} = 1{,}3979400.$

dodaiąc zatém $L\ 42{,}212 + \frac{3}{5} = 1{,}4035872.$

będzie $L\ \dfrac{42{,}212 \cdot \frac{3}{5}}{0{,}04} = 2{,}8015272.$

Szukaiąc nakoniec tego log: bez względu na iego cechę 2 w Tablicach, znayduię że odpowiada liczbie 63318 która ma za cechę 4, a że log: 2,8015272 ma cechę 2. odpowiada więc liczbie sto razy mnieyszéy od 66318 musi więc nią bydź 633,18;

$$\text{zatém } x = \frac{42{,}212 \cdot \frac{3}{5}}{0{,}04} = 633{,}18.$$

II. Wynaleśdź przez logarytmy $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$

$$\text{Log: } 5 = 0{,}6989700$$
$$\text{Log: } 7 = 0{,}8450980$$
$$\text{Log: } \frac{5}{7} = -0{,}1461280.$$

a że z $\frac{5}{7}$ wypada wyciągnąć piérwiastek kwadratowy, wypada więc log: ten podzielić przez 2, co czyni $-0{,}0730640$, abym teraz znalazł liczbę odpowiadaiącą temu logarytmowi przeczącemu, odéymuię go od 1, co czyni liczbę 10 razy większą i otrzymuię na logarytm twierdzący 0,9269360 który odpowiada w Tablicach liczbie 84515, a że logarytm téy liczby powinien mieć cechę 4, a 0,9269360 ma cechę 0, zatém liczba do tego logarytmu należąca powinna bydź tylko, 8,4515, a że nakoniec przez odięcie logarytmu $-0{,}0730640$ od 1, liczba do niego należąca 10 razy powiększyła się, zatém do logarytmu 0,9269360 należy liczba 10 razy mniéysza to iest 0,84515, więc nakoniec $x = \sqrt{\tfrac{5}{7}} = 0{,}84515$.

III. Niech będzie $x = \dfrac{\sqrt[3]{0{,}00027}}{32{,}41}$

Ponieważ 0,00027 iest toż samo co $\frac{27}{100000}$

$$\begin{array}{rl} \text{Zatém L } 100000 & = 5{,}0000000 \\ \text{L } \quad 27 & = 1{,}4313638 \\ \hline \end{array}$$

po odięciu wypada $L\ 0{,}00027 = -3{,}5686362$.

a maiąc z 0,00027 wyciągnąć piérwiastek sześcienny, wynaleziony więc logarytm dzielę przez 3 i iest: $-1{,}1895454$. Szukam teraz logarytmu 32,41 czyli 3241, który iest: 3,5106790, zatém L 32,41 iest tylko 1,5106790; a że 0,00027 ma bydź podzielone przez $\frac{3241}{100}$ czyli rozmnożone przez $\frac{100}{3241}$, zatém logarytm téy liczby 1,5106790 trzeba dodać do log: $-1{,}1895454$ co czyni $L - 2{,}7002244$.

Odéymuiąc go od 3, co czyni liczbę 1000 razy większą, otrzymuiemy 0,2997756; temu logarytmowi odpowiada 19942 któréy logarytm powinien miéć cechę 4, a że iest nią 0; liczba więc należąca do 0,2997756 iest tylko 1,9942; Nakoniec przez odięcie $-2{,}7002244$ od 3, liczba 1000 razy powiększyła się; zatém do L 0,2997756 należy liczba 0,0019942, więc $x = \dfrac{\sqrt[3]{0{,}00027}}{32{,}41} = 0{,}0019942$.

2re Uwaga iakiéy wymaga rachunek z logarytmami przeczącemi, radzi przekładać nad nie logarytmy, których sama *tylko cecha iest przeczącą*. Tak aby otrzymać $L\ \frac{3}{5} = L\ 3 - L\ 5$, odciąganie takowe można uczynić podobném, dodaiąc 1 do cechy logarytmu 5, ale potrzeba odiąć 1 od reszty i wypadnie $L\,\frac{3}{5} = -1 + 0{,}7781513$ który się tak pisze $\bar{1}{,}7781513$ gdzie sama tylko cecha iest przeczącą dla oznaczenia, że w rachunku w który wchodzi ten logarytm, zachowuiemy sobie odięcie téy iedności. Podobnież $l\,0{,}04 = l\,4 - l\,100 = l\,4 - 2 = \bar{2}{,}6020600$. Widzimy tu, iaką sposób ten daie łatwość w ułamkach dziesiętnych. Tym sposobem powyższe przykłady rozwiążą się następuiącym sposobem.

W przykładzie 1. Wynalazłszy Log: Liczni: $3 = 0{,}4771213$.
i Log: Mianow: $5 = 0{,}6989700$.
ponieważ log: mianownika od log licznika odiąć niemożna, dodaię 1 do cechy licznika, a po odięciu, wreszcie wypadłéy odéymuię toż 1 od cechy. Ponieważ $\frac{3}{5}$ ma bydź rozmnożone przez 42,212, zatém logarytmy ich dodaię do siebie, nakoniec, ponieważ wypadek takowy ma bydź podzielony przez 0,04, a lóg $4 = 0{,}6020600$, Log $100 = 2{,}0000000$, po dodaniu więc 2 do cechy licznika i po odięciu 2 od cechy z reszty pozostałéy, wypadnie $L\,0{,}04 = \bar{2}{,}6020600$. Odiąwszy na reszcie takowy log od L 1,4035872 wypadnie tak iak wyżéy L 2,8015272.

W przykładzie 2. aby odciągnąć L 7 od L 5 dodaie się do cechy L 5 iedność i od reszty odéymuie się taż iedność od cechy, a że z $\frac{5}{7}$ ma się wyciągnąć piérwiastek kwadratowy, wynalezionego więc logarytmu $\bar{1}{,}8538720$ bierze się połowa; żeby zaś uczynić go zupełnie dzielnym przez 2, dodaię do cechy iego należytą liczbę iedności, iak tu daię mu następuiącą postać:
$-2 + 1{,}8538720$ którego połowa iest $\bar{1}{,}9269360$.

W Przykładzie 3. Aby odciągnąć logarytm mianownika od logarytmu licznika, do cechy licznika dodaię 4 iedności i zreszty od cechy odéymuię 4 iedności. Żeby logarytm ten uczynić dzielnym przez 3, dodaię i odéymuię od cechy iego 2 i po rozdzieleniu przez 3 wypadnie na $L\sqrt[3]{0{,}00027} = \bar{2}{,}8104546$, a że logarytm ten ma bydź podzielony przez logarytm 32,41 który iest 1,5106790, odéymuiąc go więc od logarytmu $\bar{2}{,}8104546$ maiąc wzgląd na ich cechy, wypadnie nakoniec na

$$\begin{array}{rl} L\ 27 = & 1{,}4313638 \\ L\ 100000 = & 5{,}0000000 \\ \hline L\ 0{,}00027 = & \bar{4}{,}4313638. \\ & \bar{2}{,}8104546. \\ L\ 32{,}41 = & 1{,}5106790. \\ \hline \end{array}$$

$$\text{zatém } L\,\frac{\sqrt[3]{0{,}00027}}{32{,}41} = \bar{3}{,}2997756.$$

$$L\,\frac{\sqrt[3]{0{,}00027}}{32{,}41} = \bar{3}{,}2997756.$$

Uwaga. Gdy wypada dzielić logarytm maiący cechę przeczącą, potrzeba go uczynić dzielnym dodaiąc liczbę iedności dostateczną do iego cechy. Postępowaliśmy tak wdwóch ostatnich przykładach, o czém zawsze pamiętać należy.

3$^{\text{cie}}$ Skracaią się bardzo działania z logarytmami przez użycie *Dopełnień* (Complémens) kiedy w działaniu odbytém przy pomocy logarytmów, znayduią się logarytmy które trzeba odéymować, przez następuiącą uwagę, działanie można uczynić prościeyszém. Chcąc odiąć liczbę iaką od drugiéy złożonéy z iedności, po któréy następuie tyle zer, ile iest cyfer w piérwszéy liczbie, dosyć iest *odiąć iedności od* 10, *a inne cyfry od* 9 i odięcie takowe nazywa się *dopełnie-*

niem arytmetycznêm téy liczby. Tak 1000000 — 279953 daią na resztę 720047. Rachunek takowy tak iest prosty, że go ledwie policzyć można pomiędzy działania. Używa się go do zamienienia wszełkiego odciągania w dodawanie, a to w następuiący sposób: niechby wypadło odiąć $3487-259$, oczéwista iest: że do liczby od któréy się odciąga można dodać 1000 aby tylko tęż liczbę odiąć od liczby którą wypada odéymować, zatém dodaiąc i odéymuiąc 1000 będzie $3487+1000-259-1000$; a że dopełnieniem 259 iest $741=1000-259$, zatém na różnicę żądaną, otrzymamy $3487+741-1000$, albo $4228-1000=3228$. Widzimy ztąd że: zamiast odięcia iakiéy liczby od drugiéy, można dodać do niéy iéy dopełnienie, aby tylko po takowém dodaniu w summie odiąć iednę iedność z porządku bezposrzednie wyższego od porządku liczby maiącéy się odciągnąć.

Działanie to wskazuie się na ów czas iak tu widzimy na boku znacząc przez $\bar{1}$, że cyfra 1 powinna bydź odięta od cyfry naywyższego porządku. Dodaiąc dwa dopełnienia, potrzeba od piérwszéy cyfry od lewéy ręki odiąć dwie iedności *i. t. d.*

$$\begin{array}{r} 3487 \\ \bar{1}741 \\ \hline 3228. \end{array}$$

Rachunek takowy wtenczas szczególniéy iest użyteczny, gdy wypada wiele dodawań i odciągań następnych. Gdyby wypadło np $32731 + 5729 - 371 - 4834$, używaiąc dopełnień liczb 371 i 4834 które są $\bar{1}629$ i $\bar{1}5166$ otrzymuiemy na wypadek 33255.

$$\begin{array}{r} 32731 \\ 5729 \\ \bar{1}629 \\ \bar{1}5166 \\ \hline 33255. \end{array}$$

Używaiąc takowych dopełnień w przykładzie piérwszym wyżéy położonym, aby mieć Log $\frac{3}{5}$ dodaie się L 3 do dopełnienia L 5.

$$\begin{array}{rl} \text{L } 3 = & 0{,}4771213. \\ \text{Dopeł: L } 5 = & \bar{1}{,}3010300. \\ \text{L } 42{,}212 = & 1{,}6254359. \\ \text{Dopeł: L } 0{,}04 = & 1{,}3979400. \\ \hline \frac{42{,}214 \times \frac{3}{5}}{0{,}04} = & 2{,}8015272. \end{array}$$

4te Nim do iakiego przykładu przystosuiemy rachunek logarytmowy, wypada nayprzód wyrażenie iego ieżeli można uprościć.

Tak w powyższym przykładzie $\frac{42{,}212 \times \frac{3}{5}}{0{,}04}$ można nayprzód licznika i mianownika rozmnożyć przez 10, co się tu uskutecznia przez posunięcie kreski o iedno miéysce ku prawéy ręce i wypadnie $\frac{422{,}12 \cdot \frac{3}{5}}{0{,}04} = \frac{422{,}12 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{4}{10}} = \frac{422{,}12 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{422{,}12 \cdot 3}{2}$, wyrażenie daleko prostsze od piérwszego, a ieżeli działanie odprawiliśmy na piérwszém, uczyniło się to szczególnie dla tego, żeby lepiéy rozpoznać własność logarytmów przeczących.

5te Gdyby wypadło szukać logarytmu liczby przechodzącey granice Tablic co ma miéysce *np* w Tablicach P. *Calleta* rozciągniętych tylko do 108 tysięcy. Gdybyśmy *np* żądali logarytmu liczby 5487344, nayprzód po prawéy ręce téy liczby oddzielam kreską tyle cyfer, ile potrzeba, aby reszta mogła się znaleśdź w tablicy, tu oddzielam 2 cyfry, wypadnie więc szukać logarytmu liczby 54873,44, którego część dziesiętna iest taż sama. Logarytm liczby 54873 iest 4,7393587, biorę oraz na boku tego logarytmu położoną różnicę 79 między tym logarytmem, a logarytmem liczby 54874, to zrobiwszy, układam następuiącą proporcyą: Jeżeli 1 (różnica między dwiema liczbami 54873 i 54874), daie mi różnicy między ich logarytmami 79, wiele mi da, między dwoma liczbami 54874,44 i 54873 to iest różnica 0,44? zatem: $1 : 79 :: 0{,}44 : x$, zkąd $x = 0.44 \cdot 79 = 34{,}76$, albo pominąwszy dziesiętne i ostatnią cyfrę 34 powiększywszy iednością, wypadnie $x = 35$. Różnicę tę dodawszy do logarytmu 4,7393587 wypada 4,7393622. Uważać tu potrzeba że 79 i 35 wyrażaią w naszéy proporcyi: 0,0000079 i 0,0000035. Żeby teraz mieć logarytm liczby 5487344, potrzeba tylko dodać dwie iedności do cechy wynalezionego logarytmu i będzie żądany logar: 6,7393622, liczba albowiem 5487344 iest sto razy większa od 54873,44.

Ta reguła trzech, podług któréy przypuszcza się, że liczby powiększaią się proporcyonalnie do swych logarytmów iest oczéwiście fałszywą, ale liczby 1, 10, 100... *i. t. d.* maiąc za logarytmy 0, 1, 2,... log: liczb od 1 do 10, od 10 do 100 i. t. d. dzielą nierówno pomiędzy sobą iedność, zkąd wypada: że im liczby staią się większe, tym mniéy ich logarytmy następne różnią się. Liczby więc z pięciu cyfer złożone powinny miéć za swe logarytmy iednakową różnicę, przynaymniéy w pewnéy rozległości przestaiąc na 7 cyfrach dziesiętnych. Jakoż widzimy w Tablicy że około 100 liczb następnych sąsiednich liczbie 54873 maią 79 za różnicę logarytmową.

6te Aby znaleśdź liczbę odpowiadaiącą logarytmowi: z cechą przeczącą *np* $\bar{1}$,7393622, widzimy nayprzód, że logarytm ten wpada między logarytmy liczb 54873 i 54874 i że różnica pomiędzy tym logarytmem i logarytmem liczby 54873 iest 35, a tak przypuszczaiąc 8 iedności całkowitych na cechę logarytmu zadanego, logarytm ten odpowiada liczbie 54873 powiększonéy ułamkiem, który otrzymamy odwracaiąc tylko proporcyą powyższą i wypadnie: 79 : 1 :: 35 : x zatém $x=\frac{35}{79}=0,44$, i $\bar{1}$,7393622 iest logarytmem 0,5487344.

TABLICE WAG I MIAR (*)

I.

231. Porównanie wag niektórych Krajów podług funta Holenderskiego zwanego *Wagą Troys* maiącego 10240 Asów; Wagi Francuzkiéy zwanéy *Poids de Marc* maiącéy 9216 granów *(grains)*; i funta aptekarskiego Wiedeńskiego z 12 Uncyi maiącego 5760 granów.

	Asy Holenderskie.	*Grany paryzkiego funta.*	*Grany funta Aptekarskiego.*
Amsterdamski funt handlowy składa się -	10280	9294,2	6773,7
— — Wagi *Troys* -	10240.	9258.	6747,3
— — Grzywna Menniczna z 8 uncyi -	5120.	4629.	3373,7
Augsburgski f: h: wagi większy -	10220.	9220,6	6734,2
— — wagi lżeyszéy -	9836.	8892,7	6481,1
Bawarski funt handlowy - -	11682.	10561,7.	7697,5
Berliński f: h: - - - -	9750.	8816.	6424,5
Drezdeński f: h: - - - -	9716.	8784,2	6402,1
Francuzka waga *Poids de Marc* złożona z 2 Grzywien=16 uncyów które składaią funt handlowy=128 Gros=9216 grany -	10188.	9216.	6713,0

(*) *Wielka iest trudność w pogodzeniu niezgodnych częstokroć między sobą podań o prawdziwéy wielkości i dokładnym stosunku wag i miar rozmaitych krajów. Podane tu porównania wyięte są z dzieł Matematycznych P. Wegi, którego podięte w téy mierze pracę i ściśle badania wszystkim są prawie wiadome Znawcom.*

	Asy Holenderskie.	Grany paryzkiego funta.	Grany f: Aptek: Wiedeńskiego.
Frankfurtski f: h: - -	9720.	8792,6	6404,7
Gdański f: h: - - -	9062.	8192,9	5971,2
Genueński funt lżeyszy z 12 uncyi. - - - -	6600.	5970.	4348,8
Hamburski f: h: z 32 łotów -	10080.	9118.	6641,9
Koloński f: h: z 32 łotów - -	9735.	8806.	6414,6
— Grzywna menniczna o 16 łótach. - - - -	4867,5	4403.	3207,3
Lipski f: h. takiż iak Drezdeński.	9716.	8784,2	6402,1
Londyński funt *Avoir du poids* z 16 Uncyi. - - -	9441.	8538.	6221.
Moskiewski f: h: - - -	8512.		5608,7
Neapolitański z 12 Uncyi - -	6677.	6039.	4399,6
Nyrnbergski f: h: - - -	10610		6991,1
Polski funt z 32 łótów (*) -	8442.	7597,8	5562,5
Funt takowy maiąc 8442 asów, powinienby mieć granów francuzkich 7636,6.			
Podług P. *Tillet* wyznaczonego w 1767 r. od Paryzkiéy Akademii do uregulowania wag, funt Polski zawiéra 7644 granów francuzkich.			
W téy niedokładności wypada oczekiwać Urzędowego obwieszczenia.			
Rzymski funt z 12 Uncyi - -	7060	6386.	4652.
Sztokolmski z 32 łotów waga żywnościów. - - - -	8848.	8000.	5830,1

(*) *Podług podania JW. Hrabi* Chodkiewicza, *którego pracowicie wyrachowanie Tablice do zamiany wag i miar nowych Francuzkich na Polskie, i Polskich na nowe Francuzkie wyidą zapewne niezabawem na widok.*

	Asy Holenderskie.	*Grany paryzkiego funta.*	*Grany f: Aptek: Wiedeńskiego.*
Wiedeński f: h: z 32 łotów -	11655,43	10544.	7680.
Wiedeńska grzywna menniczna = $\frac{6}{5}$ grzywny Kolońskiéy -	5841.	5282.	3848,8
Wrocławski funt, który Edyktem Rządu Pruskiego w 1796 był zaprowadzony do krajów zabranych Polskich składa się -	8426,75		
100 takich funtów. wyrównywało z małą różnicą 99,876 dawnym funtom Polskim.			

Uwaga. Unikaiąc niezgodności w porównaniu wag rozmaitych wyrażonych w asach Holenderskiéy wagi *Troys*, która lubo pod iednem nazwiskiem zdaie się że w Niemczech i w Holandyi nieiednakową bydź musi; położyły się obok nich wyrażenia w granach funta aptekarskiego Wiedeńskiego, który iak naydokładniéy sporządzony, za mierną cenę z Wiednia sprowadzić zawsze można.

II.

252. Porównanie niektórych Stóp i Łokci z Stopą Paryzką podzieloną na 144 linii

	Stopa	Łokcie
	Paryzkich linii	
Amsterdamska - - - - -	125,5	306,0
Augsburska - - - - -	131,3	270,2
Bawarska - - - - - -	128,2	354,2
Berlińska - - - - - -	137,3	295,6
Brabancki łokieć w Niemczech - -		306,5
Drezdeńska - - - - - -	125,5	250,9
Francuzka - - - - - -	144,0	526,8
Frankfurtska nad Menem - - -	127,0	239,2
Genueńska *Palmo* - - - -	110,75	
Gdańska - - - - - -		254,35
Hamburgska - - - - - -	127,0	254,0
Kolońska - - - - - -	122,0	308,0
Lipska - - - - - - -	125,3	250,6
Londyńska - - - - - -	135,1	405,3
Moskiewska - - - - -	238,6	315,4
Częściey używaną iest stopa Londyńska	135,1	
— — — Werszok - - - -	19,71	
Neapolitańskie *Palmo* - - - -	117,1	
Nyrenbergska - - - - -	134,7	292,4
— — — Artyleryczna - - -	129,83	
Polska - - - - - - -	132,1	264,2
Reńska - - - - - - -	139.13	
Rzymskie *Palmo* - - - - -	99,0	
Szwedzka - - - - - -	131,6	263,2
Wenecka - - - - - -	154,0	282,3
Wiedeńska - - - - - -	140,13	345,42
Wrocławska wraz z funtem Wrocławskim 1796. do Krajów zabranych Polskich wprowadzona - - - - -	126,0	255,3

Przy pomocy poprzedzaiących Tablic porównania wag i miar mieysc rozmaitych, łatwo iest maiąc zadaną pewną liczbę funtów, iakoteż sążni lub stop iednego kraiu, zamienić ie na równąważną znią liczbę miar podobnych kraiu drugiego podług sposobów podanych wyżéy. (195.)

III.

253. Porównanie niektórych monet z oznaczeniem ich szącunku w pieniądzach *Francuzkich* stosownie do Ustawy wydanéy w *Berlinie* 1806 przez P. *Esteve* Podskarbiego Generalnego Korony.

Podług tey ustawy Złote pieniądze rachowane są według wartości na Franki.

		Wartość Pieniędzy.						
		w Pieniądzach Pruskich.				w Pieniądzach Francuz:		
		Talar:	fr: gr:	Fenig:	ułamek	Frank:	Centin	ułamek
Pieniądze Francuzkie.								
Złoto	Podwóyny Napoleon d'or -	10	19	5	$\frac{19}{37}$	40		
	Poiedyńczy Napoleon d'or	5	9	8	$\frac{28}{37}$	20		
Srebro	5 Franków - - -	1	8	5	$\frac{7}{37}$	5		
	2 Franki - - - -		12	11	$\frac{25}{37}$	2		
Złoto	Podwóyny Louis d'or - -	12	19	6	$\frac{10}{111}$	47	40	$\frac{20}{27}$
	Poiedyńczy Louis d'or -	6	9	9	$\frac{5}{111}$	23	70	$\frac{10}{27}$
Srebro	Talar o 6 Liwrach - -	1	14	5	$\frac{29}{111}$	5	29	$\frac{16}{27}$
Pieniądze Pruskie								
Złoto	Dukat - - - - -	3	3	5	$\frac{47}{185}$	11	63	
	Podwóyny Fridrichs d'or -	11	5	10	$\frac{2}{37}$	41	60	
	Poiedyńczy Fridrichs d'or -	5	14	11	$\frac{1}{37}$	20	80	
	$\frac{1}{2}$ Fridrichs d'or - -	2	19	5	$\frac{19}{37}$	10	40	

Wszystkie pieniądze mniéysze od Talara zredukowane są na talary i ich ułamki, rachuiąc na 1 talar 3 Franki i 70 centimów.

		Wartość Pieniędzy						
		w Pieniądzach Pruskich.				w Pieniądzach Francuz:		
		Talar:	Sr: gr:	Fenig:	ułamek	Frank:	Centi:	ułamek
Srebro	Talar	1	—	—	—	3	70	—
	$\frac{1}{2}$ Talara	—	12	—	—	1	35	—
	$\frac{1}{3}$ Talara	—	8	—	—	1	23	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{4}$ Talara	—	6	—	—	—	92	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{6}$ Talara	—	4	—	—	—	61	$\frac{2}{3}$
	$\frac{2}{12}$ Talara	—	2	—	—	—	30	$\frac{5}{6}$

Następuiąca moneta Pruska będąc bilionową przyimowaną iest tylko iako resztki summy. Toż się rozumie o złych bilionach.

Biliony.	Srebrny grosz	—	1	—	—	—	15	$\frac{5}{12}$
	$\frac{1}{2}$ Srebrnego grosza czyli 6 fenigów	—	—	6	—	—	7	$\frac{17}{24}$
	$\frac{1}{4}$ Srebrnego grosza	—	—	3	—	—	3	$\frac{41}{48}$
	Fenig	—	—	1	—	—	1	$\frac{41}{144}$

Pieniądze Konwencyine.

Talary Konwencyine Saskie i Austryackie maią kurs po 2 Złote Reńskie (8 Polskich) to iest 120 Kreutzerów Austryackich czyli 144 Kreutzerów w Rzeszy.

Pieniądze Saskie i Brunświckie.

Złoto	Dukat	3	3	5	$1\frac{47}{185}$	11	63	
	Podwóyny August d'or	11	5	10	$\frac{2}{37}$	41	60	
	Poiedyńczy August d'or	5	14	11	$\frac{1}{37}$	20	80	
	$\frac{1}{2}$ August d'or	2	19	5	$\frac{19}{37}$	10	40	
Srebro	Talar Konwencyiny	1	9	6	$\frac{78}{185}$	5	17	
	$\frac{1}{2}$ Talara Konwencyinego	—	16	9	$\frac{39}{185}$	2	58	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$ Talara Konwencyinego	—	8	4	$\frac{112}{185}$	1	29	$\frac{1}{4}$
	Pieniądz o 4 srebrnych gro:	—	4	2	$\frac{56}{185}$	—	64	$\frac{5}{8}$
	Pieniądz o 2 srebrnych gro:	—	2	1	$\frac{28}{185}$	—	32	$\frac{5}{16}$

Pieniądze Austryackie Węgierskie i Czeskie.

Pieniądze od 20, 10, 5, czyli od 24, 12, 6 Kreutzerów redukowane są także na Franki, tak iż 60 Kreutz: Stopy menniczney od 20 Reńskich czyli 72 Kreutz: Stopy menniczńey od 24 Reńskich, rachowane będą na złoty Reński, równaiący się 2 Frankόm 58 Centimom.

		Wartość Pieniędzy w Pieniądzac Pruskich.				w Pieniądzach Francuz:		
		Talar	Sr: gr:	Fenig	ułamek	Frenk:	Centii:	ułamki
Złoto	Dukat - - - - -	3	3	5	$\frac{47}{185}$	11	63	
	Podwóyny Souverain d'or	9	9	10	$\frac{58}{185}$	34	82	
	Poiedyńczy Touverain d'or	4	16	11	$\frac{29}{185}$	17	41	
Srebro	Talar Konwencyiny Reichstaler - - - -	1	9	6	$\frac{78}{185}$	5	17	
	$\frac{1}{2}$ Talara (złoty Reński)	—	16	9	$\frac{30}{185}$	2	58	$\frac{1}{2}$
	Pieniądz od 20 kreutzarów czyli $\frac{1}{3}$ złotego - -	—	5	7	$\frac{13}{185}$	—	86	$\frac{1}{6}$
	Talar Brabancki - -	1	13	8	$\frac{134}{185}$	5	81	$\frac{5}{8}$
	Brabanckie talary i bankolary są warte 135 Kreutzarów według stopy od 20 Reńskich czyli 162 kreutzarow.							
	Pieniądze Hamburgskie.							
Złoto	Dukat. - - - -	3	3	5	$\frac{47}{185}$	11	63	
Srebro	Reischstaler bankowy -	1	13	8	$\frac{134}{185}$	5	81	$\frac{5}{8}$
	Grzywna Lubecka - -	—	9	10	$\frac{58}{185}$	1	52	
	Pieniądze Holenderskie.							
Złoto	Dukat - - - -	3	3	5	$\frac{47}{185}$	11	63	
Srebro	Złoty - - - -	—	13	9	$\frac{3}{185}$	2	12	
	Pieniądze Newszatelskie.							
	Talar od 21 Batzow - -	—	17	6	$\frac{6}{37}$	2	70	

§. IV.

Wiadomości o nowych Miarach Francuzkich.

234. Ta rozmaitość wag i miar z których tylko niektóre w poprzedzaiących tablicach wyliczyliśmy, czyniąc działania zniemi bardzo zawikłane, i dla mnostwa tylu rożnorodnych stosunków i ułamków, po mechanicznym rachunku częstokroć iednak omyłkom podległe, była powodem od dawna uczonym, iakimby sposobem podział wszelkich iedności mianowanych przywieśdź do iednostaynego prawa. Wypadło więc tym końcem. 1od Wynaleśdź iedność zasadową o któréy dokładności możnaby się w każdym czasie i w każdym kraju gdzieby zaprowadzoną była zapewnić. 2re Z téy iedności zasadowéy złożyć wszelkie miary i wagi. 3cie Każdy gatunek iedności mianowanéy podzielić na takie wielokrotności i podziały mniéysze, któreby maiąc naybliższy stosunek z naszém systematem liczenia wiodły do rachunków nayprostszych. 4te Nadać im nazwiska z iak naymniéy liczby wyrazów złożone. 5te Wszelkim podziałom i wielokrotnościom każdego gatunku iedności mianowaney nadać nazwiska wskazuiące ich stosunek z iednością zasadową. 6te Uchronić się iak tylko można ułamków przez podział każdéy iedności mianowanéy sposebm naywygodniéyszym do iéy użycia. Wszystkiego tego dokazały sławne geniusze Francyi: *Laplace*, *La-*

grange, *Monge*, *Dalambre*, *Legendre*, *Mechain*, *Lefebvre - Gineaut* i inni.

Granice tego dzieła niedozwalaią wyliczać ogromnych prac w téy mierze podiętych, i o samym tylko onych wypadku powiemy:

Miary liniowe albo długości.

235. Dla wynalezienia iedności zasadowéy, wymierzono iak naydokładniéy rozległość od bieguna do rownika na południku przechodzącym przez Paryż, rozległość ta okazała się z 5130740 sążni Francuzkich albo z 30784440 stóp Francuzkich. Rozległość tę podzieliwszy przez dziesięć milionów, wieloraz wypadły $3^{st}, 0784440$, wzięto za iedność zasadową długościów i nazwano ią (metre) *metrem*. Metr ten czyni 3 stopy, 0 cali, $11^{linii}, 295936$ francuzkie, albo przestaiąc na tysiącznych linii, czyli 3 stopy 11 linii $\frac{296}{1000}$ linii $= 443^{linii}, 296$.

236. Z téy iedności dla otrzymania miar większych poskładano wielokrotności mnożąc ią przez 10, przez 100, przez 1000, i tym wielokrotnościom nadano nazwisko wyrazów greckich: *deca*, *hecto*, *kilo*, *myria* znaczących 10, 100, 1000, 10000, którym przydano wyraz *metr* wzięty także z greckiego i znaczący miarę. Aby złożyć mnieysze

podziały dziesiętne pomnożoną metr przez 0,1, 0,01, 0,001 i dano im nazwiska początkowych głosek z ięzyka łacińskiego *deci*, *centi*, *milli* znaczących dziesięć, sto, tysiąc, a ztąd powstał szereg miar liniowych następuiący:

			st	sąż:	st	ca	linii
Myriametre	albo	10000 m: =	30784, 44 =	5130	4	5	3,36
Kilometr	—	1000 — =	3078, 444 =	513	,,	5	3,936
Hectometr	—	100 — =	307, 8444 =	51	1	10	1,5936
Decametr	—	10 — =	30, 784440 =	5	-	9	4,95936
Metr	—	1 — =	3, 078444 =	-	3	-	11,295936
Decimetr	—	0,1 met: =	0, 3078444 =	-	-	3	8,3296
Centimetr	—	0,01 — =	0, 03078444 =	-	-	-	4,43296
Millimetr	—	0,001 — =	0, 003078444 =	-	-	-	0,443296

Widzimy ztąd że całe to systema używa tylko siedmiu wyrazów, które zarazem posłużą i do innego gatunku miar odmieniaiąc tylko wyrazy końcowe podług gatunku tychże miar.

Myrametr wyrównywa blisko dwom srzednim milom francuzkim, podwóyny metr może zastąpić sążeń francuzki od którego mniey nieco iak na dwa cale iest większy; a podwóyny decimetr czyniący nieco mniey o 7 cali i pół, daie miarę wygodną do podręcznego użycia dla rzemieślnika na mieyscu dawney stopy krolewskiey. Metr zastępuie łokieć paryzki z 3 stóp 7 cali 10 linii i $\frac{5}{6}$.

Metr ten czyni około $\frac{21}{25}$ albo nieco więcéy od $\frac{5}{6}$ łokcia.

Miary Powierzchniów.

237. W powszechności iednością miar powierzchniów iest metr kwadratowy (119.) zawieraiący sto decimetrów kwadratowych albo 10000 centimetrów kwadratowych albo 1000000 millimetrów kwadratowych. Uważać potrzeba, ażeby niemięszać decimetru kwadratowego z dziesiątą częścią metra kwadratowego, który czyni dziesięć decimetrów kwadratowych : ani centimetru kwadratowego z setną częścią metra kwadratowego który czyni sto centimetrów kwadratowych.

Tak liczba $\overset{m}{3}\overset{k}{,}\ 263075$ wyraża 3 metry kwadratowe, 26 decimetrów kwadratowych; 30 centimetrów kwadratowych, 75 milliametrów kwadratowych. Można wziąśdź za iedność decimetr lub centimetr kwadratowy, a przeniesienie kreski o dwa lub cztéry miéyſca daley ku prawéy ręce, uskuteczni zamianę na tę nową iedność. Tak liczba powyższa czyni $\overset{dm}{326}\overset{k}{,}\ 3075$ albo $\overset{cm}{32630}\overset{k}{,}\ 75$.

238. Tym czasem za miarę powierzchni gruntów lub pól wzięto decametr kwadratowy który nazwano *are*. Zawiera on sto metrów kwadratowych. A tak metr kwadratowy nazywa się w takowym przypadku *centiare*, sto arów składaią *hectar* który zatém zawiéra w sobie 10000 metrow kwadratowych; a tak hectar iest hectometrem kwadratowym.

Hectar takowy odpowiada blisko dwom dawnym tak nazwanym *arpanom* (arpens) miarze służącey do wymiaru powierzchni wód i lasów.

Miary bryłowałości czyli obiętości (Volume)

239. Jednością obiętościów iest *metr sześcienny*; który nazywaią także *sterem* (stère), gdy idzie o drzewo do palenia. Metr sześcienny składa się z 1000 decimetrów sześciennych, albo z 100000 centimetrów sześciennych albo z 1000000000 millimetrów sześciennych. Tak dalece, że obiętość iaka, będąc wyrażoną w metrach sześciennych i ułamkach dziesiętnych teyże iedności, chcąc wziąśdź za iedność decimetr sześcienny, potrzeba posunąć kreskę o trzy mieysca ku prawey ręce, albo o mieysc sześć gdy wypada brać centimetr sześcienny za iedność i. t. d. *Np* $4^{m},^{sz}273045976 = 4273^{dm},^{sz}045976 = 4273045^{cm},^{sz}976$.

Za miarę zaś obiętościów (capacité) do rzeczy ciekłych i sypnych wzięto *litr* (litre) wyrównywaiący decimetrowi sześciennemu, z którego poskładano wielokrotności i drobnieysze podziały zaczynaiące się od tychże samych początkowych głosek co wyżey, podług tegoż samego sposobu o którym mówiło się w miarach liniowych, to iest:

Kilolitr

Kilolitr albo	1000 litrów		$=1^{m \text{ sześcian}}$
Hectolitr —	100 —		$=0,1$
Decalitr —	10 —		$=0,01.$
Litr —	1	$=0,001$	$=1^{dm \text{ sze}}$
Decilitr —	0,1	$=0,0001$	$=0,1$
Centilitr —	0,01	$=0,00001$	$=0,01$
Millilitr —	0,001	$=0,000001$	$=0,001=1^{cm \text{ sze}}$

Litr teraźnieyszy przechodzi około $\frac{1}{14}$ dawną miarę Paryzką zwaną *pintem* (pinte). Dla zastąpienia dawnéy miary Francuzkiey zwanéy (boisseau) złożono miarę ze 20 litrów nazwawszy ią *podwóyny dekalitr* (double decalitre).

Do rzeczy ciekłych są ieszcze miary: *półlitra* (demi-litre) który zastępuie dawnieyszą miarę (chopine), daley podwoyny decilitre i. t. d.

Wagi lub miary ciężarów.

240. Starano się aby materya maiąca służyć za iedność ciężarom, była materyą powszechną od saméy natury wskazaną. Obrano tym końcem wodę, że zaś przy obiętości iednakowey, ciężar takowéy materyi może się odmieniać dla wielu przyczyn, bo i pomięszaną iest pospolicie z istotami obcemi, i odmiana powietrza zmienia iéy obiętość; aby więc uniknąć pierwszéy przyczyny, obrano do tego wodę dystylowaną, a aby mieć punkt temperatury powietrza staleczny, uważa-

no: że woda zsiada się w miarę swego oziębienia zacząwszy od swego naywiększego waru aż blisko do 4^{go} stopnia na termotrze podzielonym na sto części. Ztąd okazuie się: że około 4^{go} stopnia woda zaczyna prawdziwie przechodzić ze stanu płynnego do stanu lodu, a tym samym w tym punkcie czysta woda posiada naywiększą swoią gęstość i naywiększą *ważność przyrodną* (pesanteur specifique (*) albo że iest na ów czas iak się mówić zwykło w swoiey *naywiększéy gęstości* (à son maximum de densité). I w tym to stanie temperatury zważono pewną obiętość wody czystéy i poznano, że waga iednego decimetru sześciennego takiey wody czyni $18827^{\text{granów}},15$; zatém centimetru sześciennego czyni $18^{\text{granów}},82715$, i wagę takową wzięto za iedność i nazwano ią *gramem* (gramme): Gram iest więc waga centimetru sześciennego wody czystéy w naywiększéy swoiéy gęstości. Wielokrotności i podziały drobnieysze tego sześcianu daią szereg podobny wag do miar poprzedzaiących.

(*) *Ważnością przyrodnią iest waga iakiegokolwiek bądź ciała wiadomey obiętości. Tak mówiąc:* że ciało iakie waży 12. funtów, *wyraża się tylko tym sposobem waga tego ciała, ale nieważność przyrodna téy materyi z któréy składa się to ciało. Mówiąc zaś,* że 12 calów sześciennych wody pospolitéy, ważą 7 uncyi i 7 ziarn, *w tém wyrażeniu iuż naznacza się ważność przyrodna wody tego gatunku służąc za razem za zasadę przy pomocy któréy można wynaleść wagę iakiéykolwiek innéy obiętości teyże wody.*

	gram	gran	f: u: g: grain	
Myriagr:	10000 =	18827,15 =	20-6-6-63,5	
Kilogr:	1000 =	18827,15 =	2-0-5-35,15	waga 1 dms wody.
Hectogr:	100 =	1882,715 =	0-3-2-10,715	0,1
Decagr:	10 =	188,2715 =	0-0-2-44,2715	0,01
Gramme	1 =	18,82715 =	0-0-0-18,82715	cm: sz: 0,001 = 1 wo:
Decigr:	0,1 =	1,88271 =	0-0-0 - 1,88271	cm: sz: 0, 1
Centigr:	0,01 =	0,188275 =	0-0-0 - 0,18827	0, 01
Milligr:	0,001 =	0,01883 =	0-0-0 - 0,018827	mm: sz: 0,001 = 1 wo

Cetnar (quintal) metryczny składa się z 100 Killogramów albo 10 myriag:r; waży więc 204 funt:, 4 uncye, 5 gros:, 59 gran.

Monety.

241. Jednością monet iest frank składa on się z $\frac{9}{10}$ czystego srebra, i z $\frac{1}{10}$ przymieszki, wartość franka porównana z wartością liwra zwanego *tournois*, okazała się bydź równą 1 liwro: + $\frac{1}{80}$: Frank waży 5 gramów, sztuka zaś o 5 frankach waży 25 gramów.

Frank dzieli się na 10 decimów, a decima na 10 centimów. Sztukami srebrnemi są: czwarta część franka, połfranka, frank, podwóyny frank i sztuka o 5 frankach.

Sztuki złote są o 20 frankach i 40 frankach.

Stosunek złota do srebra w równéy wadze iest iak 31 : 2 stosownie do prawa.

Aby obrócić monety dawne na nowe i nawzaiem, uważmy że 1 frank = $\frac{81}{80}$ liwra, zatém

80 fr:$=$81 liwr: więc 1 frank$=1^{\text{liwr}}$,0125, a liwr $=\frac{80}{81}$ fran:$=$0 fr, 98765432098... więc ieden ſou czyni 0 fr, 049 około pięć centimom, a 1 denar czyni 0 fran:, 0042 blisko. (Liwra ma 20 sous, a 1 sou 12 denarów)

Podług więc tego chcąc obrócić 1083 liwry 12 sous i 10 denarów na franki, będzie:

Nayprzód 1083 liwry$=$	1083 fr: $\times \frac{80}{81}$		$=$1069 fr, 63
12 sou $=$	12 . 0,049	$=$0 fr, 588	$=$ 0, 59.
10 denar: $=$	10 . 0,0042	$=$0,041	$=$ 0, 04.

Zatém 1083 liwry, 12 sous, 10 denar: $=1070^{\text{fr}}$,26.

Nawzaiem aby obrócić na liwry summę iaką wyrażoną w frankach, *np* 1070 fr, 26 będzie: $1070^{\text{fr:}},26 = 1070^{\text{fr}},26 \times 1,0125$ albo $1070^{\text{fr}}, 26 \times \frac{81}{80}$ liwrów$=1083^{\text{liwr:}}, 64 =$1083 liwrom, 12 sous i 10 denarów.

W pospolitèm użyciu ieden ſou idzie w 5. centimach.

Ponieważ wielokrotności i podziały takowych miar francuzkich podlegaią prawu dziesiętnemu, zatém liczenie i ich rachunek, takie są iak z liczbami dziesiętnemi.

Aby odnieść iaką nowę miarę francuzką wyrażoną w liczbach dziesiętnych, do iakichkolwiek iedności mianowanych iéy innego gatunku, dosyć iest przenieść kreskę dziesiętną po prawéy stronie cyfry wyrażaiącéy iedności porząd-

ku żądanego. Tak aby obrócić $4567^m,8$ na hektometry czyli sta metrów, przeniesiemy kreskę po prawéy stronie cyfry 5 stów metra i napiszemy $45^h,678$. Aby też samę liczbę obrócić na kilometry, ponieważ kilometr czyni tysiąc metrów, przeniesiemy kreskę po prawéy stronie cyfry 4, która zastępuie mieysce tysięcy i napisze się $4^k,5678$. Prawidło to zarówno służy do przypadku, w którym liczba zadana już iest odniesiona do iakiéy wielokrotności, albo do iakiego podziału iedności głównéy. *Np* aby zamienić $45^h,678$ na metry, przeniesiemy kreskę po prawéy stronie cyfry 7, która wyraża setne hektometrów, albo metry, zkąd wypadnie: $4567^m,8$. *Gdyby liczba cyfer potrzebnych do położenia kreski niebyła dostateczna, zastąpilibyśmy mieysca te zerami.* Tak aby zamienić $0^m,7$ w kilometry ponieważ kilometr ma 100 metrów, cyfra więc kilometrów, zaymuie mieysce tysięcy, potrzeba więc położyć 3 zera po lewey stronie liczby zadaney, zkąd wypadnie: $000^m,7$. Kładąc dopiero w tém wyrażeniu kreskę po prawéy stronie piérwszego zera, które zaymuie mieysce kilometrów, otrzymamy: $0^{ki},0007$.

Miary takowe będąc wyrażone dokładnie przy pomocy dziesiętnych, rachunek zniemi iest takiż iak i liczb dziesiętnych.

Tak znaydziemy ze summa liczb $37^m,74+9^m,368=47^m,108$; a ich różnica iest $28^m,372$.

Gdyby liczba zadana składała się z iedności ów wielkości rozmaitéy, odniesiemy ie nayprzód do iedneyże iedności. Tak aby dodać lub odiąć liczby $377^{decim},4$ i $0^{kilm:},009368$ których głównemi iednościami są decimetry, i kilometry, nayprzód odniesiemy ie do iednéy iedności *np* do metra, zkąd wypadnie $37^m,74$, i $9^m,368$, uskuteczniwszy dopiero rachunek na tych dwóch ostatnich liczbach, znaydziemy że summa liczb zadanych iest $47^m,108$ a ich różnicą iest $28^m,372$.

Mnożenie odbywa się podobnież iak z ułamkami dziesiętnemi (110). Znaydziemy że $20^m,4 \cdot 2,4489=49^m,9576$.

W dzieleniu toż samo. Tak $49^m,95756 : 20^m,4$ gdzie iednością główną iest metr, uskutecznia się dzielenie odrywaiąc uwagę od natury iedności głównéy, a wypadek będzie wielorazem żądanym. Jéżeli odmieniaiąc porządek czynników, wypada nam podzielić liczbę mianowaną $49^m,95756$ przez liczbę oderwaną $2,4489$, uskuteczniemy dzielenie odrywaiąc uwagę od natury iednościów dzielnego, wieloraz $20,4$ maiąc bydź teyże natury co dzielny, będzie $20^m,4$. Nakoniec gdyby wypadło podzielić $4995^{cm},756$ przez $20^m,4$, obróciłoby się dzielnego na metry i zagadnienie przywiodłoby się do podzielenia $49^{m},95756$ przez $20^{m},4$ i wieloraz byłby 2,4489.

Słowem wszystko co się powiedziało o ułamkach dziesiętnych ma mieysce i w nowych miarach francuzkich.

242. *Obrócenie miar liniowych dawnych Francuzkich na miary nowe i nawzaiem.*

Stosunki zachodzące między miarami dawnemi i nowemi francuzkiemi, wywodzą się z wartości metra w stopach. Metr 1 wymierzony dokładnie czyni $3^{st},0784440$, zatém 10000000 metr: $=30784440$ stopom francuzkim, wiec stopa $1=\frac{10000000}{30784440}$ metra, albo $0^{m},324839431$.

Sążeń złożony z 6 stóp, czyni 6 razy wartość stopy, to iest $1^{m},949036591$; dwunasta część wartości stopy, daie $0^{m},027069953$ na wartość cala. Dzieląc wartość cala przez 12, znaydziemy że linia czyni $0^{m},002255829$. Ponieważ metr czyni $3^{st},0784440$ a potrzeba 6 stóp na 1 sążeń, zatém wartość metra w sążniach otrzymamy biorąc szóstą część 3,0784440, tym sposobem znaydziemy, że 1 metr $=0^{są:},5130740$.... i. t. d.

Ponieważ 1 stopa $=12$ linii; zamienienie na cale wartości $3^{st},0784440=1$ metrowi, uskuteczni się mnożąc 3,0784440 przez 12, zkąd wypadnie $36^{cal},941328$.., na wartość metra w calach.

Mnożąc znowu tę liczbę ostatnią przez 12, zobaczymy że 1 metr wyrażony w liniach czyni $443^{li},296\ldots$ Inne stosunki tymże się sposobem wywodzą.

Przykłady

Maiąc obrócić w metry i części dziesiętne metra 13 sążni 5 stóp, 3 cale, 8 linii francuzkich będzie:

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad\ ^{m} \\
13 \text{ sążni} = & 25,\ 337481. \\
5 \text{ stóp} = & 1,\ 624195. \\
3 \text{ cale} = & 0,\ 081210: \\
8 \text{ linii} = & 0,\ 018047. \\
\hline
\text{czyni} & 27,\ 060933.
\end{array}
$$

I nawzaiem

$$
\begin{array}{llllll}
27^{m} = 27^{\text{sąż:}} \times 0{,}513074 = 13^{\text{sąż:}},853 = 13^{\text{sąż:}} & 5^{\text{stóp}} & 1^{\text{cal}} & 5^{\text{linii}} \\
6^{cm} = 6 \times 4^{li},4 \qquad = \quad - \quad - & - & 2 & 2. \\
\frac{9^{mm}}{10} = 9 \times 0{,}04 \qquad = \quad - \quad - & - & & 1. \\
\hline
\text{czyni} \quad = \quad - \qquad\quad 13^{\text{sąż:}} & 5^{\text{st:}} & 3^{\text{cal}} & 8^{\text{linii}}
\end{array}
$$

Sposobem podobnym temu znaydziemy wartość łokcia paryzkiego w metrach. Wiedząc iuż że 1 łok: paryz: = 3 st:, 7 cali, $10\frac{5}{8}$ linii na tym więc fundamencie będzie:

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad\ ^{m} \\
3 \text{ stopy} = & 0,\ 9745185. \\
7 \text{ cali} = & 0,\ 1894897. \\
10 \text{ linii} = & 0,\ 0225584. \\
\frac{5}{8} \quad = & 0,\ 0018799. \\
\hline
1 \text{ Ł: fr:} = & 1,\ 1884465.
\end{array}
$$

243. *Porównanie miar powierzchni dawnych Francuzkich z miarami nowemi.*

Ponieważ (235) 5130740 sążni = 10000000 metrom więc

$$1 \text{ sążeń podłużny} = \frac{10000000}{5130740} = 1,9490359^{m}.$$

więc 1 sąż kw: $= 1^{m},94903659 \cdot 1^{m},94903659 = 3,79874364$ metrom kw: (Uskuteczniaiąc takowe mnożenie przy pomocy mnogości przybliżonéy n° 116.)

Ztąd zaś: 1 stop kwad: $= \frac{3^{m},^{k}79874364}{36} = 0^{m},^{k}1055207$.

1 cal kwadrat: $= \frac{0^{m},^{k}1055207}{144} = 0^{m},^{k}00073278$

1 linia kwdr: $= \frac{0^{m},^{k}00073278}{144} = 0^{m},^{k}000005089$.

I nawzaiem 1 metr kwadratowy iest $\frac{1 \text{ sąż: kwa:}}{3,7984364} = 0^{s},^{k}2632449$

albo też otrzymamy 1 metr kw: $= 0^{\text{sąż:}},513074 \cdot 0^{\text{sąż:}},513074 = 0^{s:},^{k:}263245$. Mnożąc to wyrażenie przez 36 otrzymamy wyrażenie metra kwadratowego w stopach kwadr: $= 9^{st},^{k}476817$, a ostatnie to wyrażenie mnożąc przez 144 daie $144 \cdot 9,476817 = 1364^{c},^{k}6617$, na wyrażenie metra kwadratowego w calach kwadratowych.

Ztąd wypada że *Ar* czyni $26^{\text{sąż}},^{kw}32449$,

a hektar $2632^{\text{sąż}},^{kw}449$.

244. *Porównanie miar pełności dawnych Francuzkich z nowemi.*

Aby mieć sążeń sześcienny wyrażony w metrach sześciennych, dosyć iest pomnożyć wyrażenie sążnia kwadratowego przez wyrażenie sążnia podłużnego, co daie:

Sążeń sześcienny $= 3^{m},^{k}79874364 \cdot 1^{m},94903659 = 7^{m},^{sz}40389034$.

Stopa sześcienna $= \frac{7^{m},^{\text{sze:}}40389034}{216} = 0^{m},^{sz}03427727 = 34^{d},^{m\,sz}27727$.

Cal sześcienny $=\frac{34^{dm}, ^{sz} 27727}{1728}=0^{dm}, ^{sz} 019836=19^{cm}, ^{s}836.$

I nawzaiem otrzymamy metr sześcienny $=0^{sąż}, ^{k}263245 \times 0^{sąż}, 513074=0^{są:}, ^{sz:}135064=29^{st:}, ^{s:}1739.$

Zatém decimetr sześcienny $=\frac{29^{st:}, ^{s}1739}{1000}=0^{st:}, ^{s}029174=50^{cal:}, ^{s}41242$, iest to ocenienie litry na cale sześcienne.

A że *pinta* (pinte) paryzka zawiéra około $46^{cal}, ^{s}95.$ więc stosunek pinty do litra iest: $\frac{46,95}{50,41242}=0,93132.$ więc pinta $=0^{litr}, 93132$:

Stosunek litra do pinty $=\frac{50,4124}{46,95}=1,07375$, więc litr $=1^{pin}, 07375.$ Zatém delikatr $=10^{pin}, 7375.$ Hektolitr $=107^{pin}, 375$ a Kilolitr $1073^{pin}, 75.$

245. *Porównanie Wag dawnych Francuzkich z nowemi.*

Poniewaz Kilogramme waży $18827^{gram}, 15$ więc gran waży $\frac{1000 \text{ gramów}}{18827,15}$, funt zaś składaiąc się z 9216 grain, waży więc: $\frac{9216000 \text{ gramów}}{18827,15}=\frac{921600000 \text{ gram}}{1882715}=489^{gram}, 506$;

Uncya $=\frac{489^{gram}, 506}{16}=30^{gram}, 594$

Gros $=\frac{30^{gram}, 594}{8}=53^{gram}.824$; grain zaś $=\frac{3^{gram}, 824}{72}=0^{gram}, 0531$ albo $53^{mgr.}$

246. *Porównanie dawnych podziałów koła znowemi.*

Dawny podział koła każdego na 360 części lub stopnie nazywał się *podziałem sześćdziesiątkowym* (sexagésimale). Podług podziału nowego dzieli się koło na 400 części czyli *gradusów* i nazywa się podziałem *setkowym* (centésimale), ponieważ czwarta część okręgu koła, która bierze się pospolicie za iedność łuku, zawiéra 100 gradusów, zktórych każdy dzieli się na 100 minut, a każda minuta na 100 sekund, gdy tym czasem stopień dzieli się na 60 minut, a minuta na 60 sekund. Stopień więc czyni 3600 sekund.

Minuta setkowa iest iedną setną gradusu albo dziesięciotysiączną czwartéy części okręgu, a sekunda setkowa iest iedną setną minuty, albo iedną dziesięciotysięczną gradusa, albo iedną milionową czwartéy części okręgu. Podług więc tego biorąc czwartą część okręgu za iedność, gdy chcemy napisać 25 gradusów, 4 minuty, 17 sekund, pisze się: 0,250417 czwartéy częśści okręgu, albo 25^{grad}, 0417.

Jeżeli 100 gradusów ważą stopni 90, 1 gradus czyni $\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ stopni: Wypada zatém: *że aby zamienić gradusy na stopnie, dosyć iest wziąść z nich* $\frac{9}{10}$, *co wypada na odięcie od nich dziesiątéy części. Np* Łuk iaki składa się z 47^{grad}, 2995780 wieleż gradusy te czynią stopni?

$$\begin{array}{r} \text{Odeymuię od nich } \frac{1}{10} = 4^{grad},\ 7299578 \\ \hline \text{Reszta } 42^{grad},\ 5696202. \end{array}$$

wyrażą stopnie. Aby ten ułamek dziesiętny stopnia obrócić na minuty, pomnożymy go przez 60 zkąd wypadnie: $34'$ 177212: toż się zrobi ztym ułamkiem dziesiętnym sekund zkąd wypadnie: $10''$ 63272.

Zatém $47^{grad}, 299578 = 42^{\circ}, 34', 10'', 63272$.

I na wzaiem aby obrócić pewną liczbę stopni i części dziesiętnych stopnia na gradusy i. t. d. dosyć iest powiększyć ią o $\frac{1}{9}$ teyże liczby, ponieważ $9^{\circ} = 10$ gradusom.

$$\begin{array}{r} \text{Tak } np\ 42^{\circ},\ 5696202. \\ \text{dodaiąc } \frac{1}{9} = 4,\ 7299578. \\ \hline \text{Wypada } 47^{gr}, 2995780. \end{array}$$

Jeżeli części stopnia wyrażone są w minutach i sekundach, zamienić ie należy na dziesiętne dzieląc przez 60. Tak *np* $34', 10'', 63 = 34', 177 = 0^{\circ}, 5696$.

Dla ułatwienia zamiany miar dawnych francuzkich na nowe i przeciwnie, ułożono tym końcem Tablice obeymuiące wartości miar dawnych i nowych wyrażonych przez liczby z iednéy cyfry w miarach nowych i dawnych.

Ułożenie takowych tablic iest łatwe, bo wartości każdego gatunku iednościów będąc wiadome, ieżeli pomnożymy ie przez liczby z iednéy cyfry, mnogości wyrażać będą wartości odpowiadaiące tym liczbom. Tak ponieważ 1 sążeń francuzki = $1^m, 949036$... Zatém sążni 9 czynią $1^m, 949036 . 9 = 17^m, 541329$

247. *Stosunki bardzo przybliżone niektórych miar nowych francuzkich do miar dawnych, wyrażone w liczbach całkowitych.*

4 Myriametri które nazywaią teraz we Francyi milami nowemi czynią 9 mil ziemskich francuzkich.

82 Metri	=	69 łokciom Paryz:
76 Metrów	=	39 sążniom francuz:
13 Decimetrów	=	4 stopy.
19 Centimetrów	=	7 calom.
9 Millimetrów	=	4 liniom:
24 Hektarów	=	47 Arpanów (miara do powierzchni wód i lasów.)
40 Hektarów	=	117 Arpanów (*)
19 Metrów kwa.	=	5 sążni kwadr:
38 Dekalitrów	=	51 miar zwanych *Velte* paryz:
27 Litrów	=	29 miar zwanych *Pinte* paryz:
118 Kilolitrów	=	63 miar zbożowych paryz: zwanych *Muid.*
64 Hektolitry	=	41 miar zbożowych paryz: zwanych *Setier.*
13 Dekalitrów	=	10 miar zboż: paryż: zwanych *Boisseau.*
13 Litrów	=	16 miar do rzeczy płynnych zwanych *Litron.*

(*) *Arpan składa się ze* 100 *miar kwadratowych zwanych* Perche. Perche *niema iednostayney długości, ma* 18, 20, *lub* 22 *stóp długości; o stopach* 18 *iest w naywiększém używaniu w Paryżu, i na ówczas* Perche *kwadratowe ma* 9 *sążni kwadratowych, a Arpan* 900 *sążni kwadr:*

37 Metrów sześciennych = 5 sążni[illegible]
96 Sterów = 25 (cordes de bois) mi[illegible] do drzewa na opał.
36 Decisterów = 35 (solive) miar ciesielskich.
70 Kilogramów = 143 funtom (livre) wagi *poids de Marc.*
11 Hektogramów = 36 uncyom.
13 Dekagramów = 34 gros.
14 Gramów = 11 denarów.
8 Decigramów = 15 grain.
80 Franków = 81 liwrów *tournois.*

248. *Porównanie niektórych miar zagranicznych znowemi miarami Francuzkiemi.*

Miary Liniowe	*millim:*
Dawna stopa francuzka	= 324,8.
Stopa Angielska	= 304,7
Miara Kastyliyska zwana *Vare*	= 836,6.
Stopa Reńska	= 313,9
— Wiedeńska	= 316,0
— Amsterdam:	= 283,0.
— Szwedzka	= 297,1.
— Moskiewska	= 354,1.
— Polska czyli połłokcie kor:	= 297.8.
— Berlińska	= 293,3.
— Drezdeńska	= 283,1.
— Wrocławska	= 284,2.
— Hamburgska	= 286,5.

Wagi	*gramów*
Funt francuzki poids de Marc	= 489,5.
Angielski *funt troy*	= 372,6.
Angielski avoir du poids	= 453,1.
Funt Kastyliyski	= 459,4.
— Koloński	= 467,4.
— Wiedeński	= 558,6.
— Amsterdam.	= 491,4.
— Szwedzki	= 424,6.
— Moskiewski	= 409,3.
— Polski	= 403,5.
— Berliński	= 468,4.
— Drezdeński	= 466,8.
— Wrocławski	= 402,8.
— Hamburgski	= 484,3.

249. *Porównanie miar i wag Polskich znowemi Francuzkiemi.* (*)

Co do miar liniowych.

Ponieważ 1 stopa czyli półłokcie Polskie ma takich części 131,9 iakich francuzka ma 144,0 , stosownie więc do tego 1 stopa Polska = 0^{m}, 297769, zatém 1 łokieć = $0,^{m}$ 595538 = 595^{m}, ^{m} 538 --

(*) *Podług podania JW. Hrabiego* Chodkiewicza.

$$1 \text{ Cal} = \frac{0^{m},297769}{12} = 0^{m},024814 = 24^{mm},814\ldots$$

$$1 \text{ Linia} = \frac{0^{m},024814}{12} = 0^{m},0020678\ldots = 2^{mm},0678\ldots$$

1 Mila Polska z których każda ma mieć łokci kor: Polskich 14290, cali $10\frac{1}{6} = 5555^{m},555481$, albo 5 Kilometr; 5 Hektometr; 5 Dekametr, i $5^{m},555481$.

Przeciwnie, aby się dowiedzieć wiele 1 Metr czyni stóp Polskich, ponieważ 131,9 stóp Francuzkich czynią 144,0 stóp polskich (195), więc 1 metr czyli 3,07844 stóp francuzkich uczynią 3,36084 stóp Polskich, czyli 1 łokieć, 16 cali, 3,9 linii = 483,595566 linii.

1 Dekametr = 4835,95566 liniom pol:
1 Hektometr = 48359,5566...
1 Kilometr = 483595,566... i. t. d.

Ponieważ 2 stopy francuz: czynią zupełnie 1 łokieć Litewski wię 1 metr czyli 3,07844 stopy francuz; czynią $\frac{3,07844}{2} = 1,53922$ łokci Litewskich.

Co do miar powierzchniów.

Ponieważ 1 Linia $= 2^{m},^{m}0678$, zatém:

1 Linia w kwadr: $= 2^{m},^{m}0678 . 2^{m},^{m}0678 = 4^{mm},^{k}275797$

1 Cal kwadratowy $= 615^{mm},^{k}74071366\ldots$

1 Łokiec w kwadr: $= 354666^{mm},^{k}65107\ldots$

1 Sznur w kwadr: $= 19949\,99912^{mm},^{k}268837$.

1 Morg czyli sznurów kwadr: $3 = 5984999736^{mm},^{k}806512$.

1 Włóka Chełm: czyli morgów $30 = 179549992104^{mm},^{k}195364$. to iest: 1 Kiliar, 7 Hektar, 9 Dekar, 5 Ar, 4 Deciar, 9 Cetnary, 99 Decimetr: kwadrat:, 21 Centimetr. kwadratow: i $4,195336\frac{1}{4}$ millimetry kwadrat:

Przeciwnie

1 Milimetr kwadr: = 0,2338646719384
1 Centimetr kwadr: = 23,386467193840 0
1 Decimetr kwadr: = 2338,6467193840000
1 Ara czyli metrów kwadr: 100 = 23386467,19384559....

liniom Polskim kwadratowym.

Co do miar Sześciennych.

Ponieważ iedna Linia Polska kwadrat: = 4^{m}, ^{mk}275797....

Zatém 1 Linia sześcienna Polska = 8^{m}, ^{sz}842052066697..

1 Cal Polski sześcienny = 15279^{mm}, $^{sze:}$065971252358...

1 Łokieć sześcienny = 211217807^{mm}, $^{sze:}$986592602186...

1 Kwarta Polska = 942228^{mm}, $^{sze:}$200275554097....

1 Garniec Polski = 3768912, 801102216390....

1 Korzec Polski iakich 30 idzie na.
łaszt = 120605209,635270924496....

Przeciwnie

1 Millimetr sze: = 0,113095918510...
1 Centimetr sze: = 113,095918510. . . .
1 Litra sześcien: = 113095,918510414245..

liniom Polskim sześciennym.

Co do Wag.

1 Funt Polski ważący 7597, 8 granów funta francuzkiego rozdzielony został tak iak francuzki na 9216 granów Polskich.

1 Gran taki czyni - - - 43^{m}, $^{gr:}$788588950519...
1 Uncya iakich 16 idzie na
1 funt polski - - 25222^{m}, $^{gr:}$227235499333....

1 Funt Polski - - - 403555^{m}, $^{gr:}$635767989336....

Przeciwnie

1 Milligram iakich 1000000000 czynią 1 metr sześcienny wody czystéy, waży 0,0228369998661 1 grana polskiego iakich 9216 znayduie się w iednym funcie Polskim.

1 Centigram czyli 10 Milligr: = 0,2283699986611 gr: pol:
1 Decigram czyli 100 Milligr: = 2,283699986611. — —
1 Gram czyli 1000 Milligr: = 22,83699986611. — —
1 Dekagram czyli 10000 Milligr: = 228,3699986611. — —

i. t. d.

TREŚĆ
Prawd Arytmetycznych.

Ilością iest to wszystko co bydź może większém lub mnieyszém. *Numer bieżący* - - - 1.

Jedność iest ilość do któréy przyrównywaią się ilości teyże samey natury, celem ocenienia onych - - - 2.

Mnóstwo iest zbiór iedności iedneyże natury bez oznaczenia ich liczby - - - 3.

Naznaczaiąc granice iakiemu mnóstwu iedności, iednéyże natury, mnóstwo takowe nazywa się liczbą - - - 3.

Arytmetyka iest nauka o liczbach - - - - 6.

Liczba *mianowana* iest ta przy któréy wyraża się gatunek iedności. *Oderwana* zaś któréy niewyraża się gatunek iedności. 7.

Liczba cała składa się z całych iedności, złożona z iednościów i części iedności iest liczbą *łamaną*, a z samych tylko części iednéy iedności iest *ułamkiem*. 8.

Liczenie iest sposób wymówienia liczby napisanéy i nawzaiem, przy pomocy dziesięciu cyfer i na fundamencie ugody: żeby *każda z nich położona po lewéy stronie cyfry drugiéy, ważyła dziesięć razy więcéy iakby ważyła, zaymuiąc mieysce téy drugiéy cyfry.* - - 9,11.

Dziesiętne, są części coraz dziesięć razy mniéysze iak iedność, wyrażaią się przy pomocy kreski położonéy po prawéy stronie iednościów. : 15,16.

Liczba iaka staie się dziesięć razy większa lub mniéysza posuwaiąc lub cofaiąc kreskę o iedno mieysce ku prawéy lub lewéy stronie. - - - 19.

Zrównanie iest porównanie między sobą dwóch ilości równych. - - - 21.

Dodawanie iest działanie przez które łączymy wiele liczb w iednę, która nazywa się ich summą - - - - 22.

Odciąganie iest działanie którém dochodzimy różnicy między liczbą większą i mniéyszą. - - - - 28.

Mnożenie iest działanie przez

które liczba iaka bierze się tyle razy, ile iest iedności w drugiéy. Piérwsza iest *mnożny*, druga *mnożnik*, którym iest zawsze liczba oderwana. Wypadek nazywa się *mnogością*, która zawsze ma też same iedności co mnożny. Mnożny i mnożnik nazywaią się ieszcze Czynnikami. - - 38—39.

Potęga iakiéy liczby iest to mnogość powstała z rozmnożenia iéy saméy pewną liczbę razy przez siebie, a *Wykładnikiem* potęgi iest liczba wyrażaiąca przez swe iedności, wiele razy liczba iaka wchodziła za Czynnika do téy potęgi. *Pierwiastkiem* zaś iest liczba z któréy powstała iaka potęga. 42.

Jeżeli w mnożeniu znayduią się w iednym lub w obydwóch Czynnikach dziesiętne, w mnogości znayduie się ich tyle, ile w obu razem. - - - 47.

Dzielenie iest działanie przez które dochodzi się wiele razy iedna liczba w drugiéy zawiéra się. - - - - 49.

Liczba która się dzieli, nazywa się *dzielny*, przez którą się dzieli *dzielnikiem* a wypadek nazywa się *wielorazem*. - 50.

Dzielenie można ieszcze uważać iako działanie przez które z wiadomości mnogości i iéy iednego czynnika, dochodzi się drugiego. - - 51, 5te.

Wielokrotnością iakiéy liczby nazywa się ilość daiąca się zupełnie przez tę liczbę podzielić, ta zaś liczba dzieląca, nazywa się iéy *częścią wielokrotną* 61,62.

Liczba iest *pierwotną* gdy iest tylko dzielna przez 1. i przez siebie samą. - - 63.

Mnożąc lub dzieląc przez iedną liczbę dzielnego i dzielnika wieloraz się nieodmienia 65.

Gdy dzięlny lub dzielnik lub obydwa razem maią dziesiętne dopisuie się po prawéy stronie iednego lub drugiego zer tyle, ile potrzeba, aby liczba cyfer dziesiętnych w iednym i drugim była iednakowa, poczém nieuważaiąc na kreskę, dzieli się tak iak liczby całkowite. - 66.

O Ułamkach.

Ułamek iest iedna albo wiele części iedności podzielonéy na liczbę równych części. Liczba wyrażaiąca na wiele równych części dzieli się iedność nazywa się *mianownik*. a wyrażaiąca wiele z nich bierze się *licznik*. 74.

Ułamek właściwy iest ten, którego licznik mniéyszy iest od mianownika. - - 75

Gdy licznik równa się mianownikowi swemu, ułamek takowy zawsze iest iednością a gdy licznik iest większy, ułamek taki nazywa się *liczbą łamaną* 76.

Każdy ułamek iest wielorazem wypadaiącym z podzielenia licznika przez mianownika 77.

Każdą iedność można wyrazić przez ułamek, dzieląc ią na części równe żądane, i biorąc ie wszystkie - - 78.

Liczba całkowita z ułamkiem zamienia się na liczbę łamaną, mnożąc ią przez mianownika i dodaiąc licznika, a mianownika podpisuiąc. - - 78.

Wartość ułamka powiększa się, za powiększeniem iego licznika, a zmniéysza się za iego zmniéyszeniem. Przeciwnie za zmniéyszeniem mianownika bez naruszenia licznika wartość ułamku powiększa się, a za powiększeniem iego mianownika, wartość iego zmniéysza się - 79.

Wszelki ułamek przez swego mianownika pomnożony wydaie na mnogość licznika. - 82.

Mnożąc lub dzieląc licznika i mianownika przez iednakową liczbę wartość ułamka nieodmienia się. - - - 83.

Dzielić licznika i mianownika przez iednakową liczbę iest to go *skracać*. - - 84.

Wynayduie się naywiększego dzielnika dwóch liczb zadanych, dzieląc większą przez mniéyszą, poczém bierze się się resztę zdzielenia tego wypadłą za dzielnika, a dzielnika piérwszego za dzielnego, i tak postępuie się daléy, póki się niewynaydzie dzielnika dokładnego, który będzie naywiększym dzielnikiem szukanym. - 84.

Aby przywieśdź ułamki do iednego mianownika potrzeba przez mnogość z innych mianowników, mnożyć iego licznika i mianownika. - - 89.

Dwa ułamki są równe gdy mnogości na krzyż z ich liczników przez mianowników są równe. - - - - 90.

Gdy dwa ułamki są równe, ułamek złożony z różnicy lub summy ich liczników i mianowników iest im równy. - 91.

Jeżeli z dwóch ułamków równych ieden skrócić się nieda, drugi musi bydź iego wielokrotnością. - - - 92.

Jeżeli mnogość iaka iest dzielną przez iaką liczbę pierwotną, ieden przynaymniéy z iéy czynników iest dzielny przez tęż liczbę. - - - - - 92.

Mnogość z dwóch liczb pierwotnych niemoże mieć innych dzielników nad też liczby iedność i samą mnogość. - 92.

Jeżeli dwie liczby niemaią żadnego wspólnego dzielnika, dwie z nich potęgi niemaią go także. - - - - 92.

Aby dodać lub odiąć ułamki potrzeba ie przywieśdź do iednego mianownika, poczém dodaie się lub odeymuie ich liczników, i pod resztą podpisuie się mianownika wspólnego. 96.

W mnożeniu ułamków, mnoży się licznik z licznikiem, mianownik z mianownikiem. 99.

Ułamek ułamów iest mnogość wypadła z rozmnożenia kilku ułamów przez iaki ułamek. 102.

Aby podzielić ułamek przez ułamek potrzeba pomnożyć ułamek dzielnego, przez odwrócony porządek w ułamku dzielnika. - - - - 103.

Ułamki dziesiętne maią za mianowników domyślnych iedność z tylu zerami ile iest w nich cyfer dziesiętnych, zkąd wypada że liczba dziesiętna niezmienia swoiéy wartości, gdy po niéy kładzie się iedno lub wiele zer. - - - - 105.

Jeżeli ułamek zwyczayny ma za mianownika liczbę któraby miała innych czynników iak 2 i 5, ułamek taki niemoże bydź zupełnie zamieniony na dziesiętne i wieloraz wypada peryodyczny. - - - - 112.

Ułamek dziesiętny peryodyczny równa się ułamkowi zwyczaynemu maiącemu za licznika peryod, a za mianownika tyle 9, ile iest cyfer w peryodzie 113.

Przybliżona mnogość lub zbliżony wieloraz iest to mnogość lub wieloraz tylko przybliżony do prawdziwego. - 116.

Ułamek ciągły iest to ułamek którego licznikiem iest 1 a mianownikiem liczba cała z ułamkiem *i: t. d.* Ułamek zwyczayny będąc w wyrazach wielkich niedaiących się skrócić zamienia się na ułamek ciągły dzieląc licznika i mianownika iego przez licznika. - - - 118.

o Liczbach wielorakich.

Liczby wielorakie są liczby złożone z części odniesionych do rozmaitych podziałów iedneyże iedności, przeciwnie *samotne* składaią się z samych iedności całkowitych. - - 121.

Ich dodawanie i odciąganie w tém tylko różnią się od dodawania i odciągania liczb samotnych, że w nich iednóść główna dzieli się na rozmaite podziały. - - 122; 125.

Mnożą się liczby wielorakie przez siebie, przywodząc obydwóch czynników do ich naymnieyszego gatunku, i mnogość wypadłą z ich rozmnożenia dzieląc przez mnogość z dwoch liczb wyrażaiących ile iedność główna każdego czynnika zawiéra w sobie razy naymnieyszy gatunek. - - - 127.

Mnożą się ieszcze liczby wielorakie przy pomocy części wielokrotnych, które tu uważaią się iako ułamki maiące iedność za licznika. Prawidło zaś do tego służące iest: ażeby mnożyć nayprzód całego mnożnego przez całkowitego mnożnika, rozkładaiąc koléyno mnieysze podziały mnożnego na części wielokrotne iedności poprzedzaiącéy, potém brać na podziały mniéysze mnożnika, części przyzwoite wielokrotne mnożnego. 129-130.

Dzielenie liczb wielorakich potrzeba zawsze przywieśdź do tego stanu, ażeby dzielnik był zawsze samotnym ieżeli nim nie iest. - - - - 133.

Prócz tego ieżeli iest iednéy natury z dzielnym, natenczas cały dzielny powinien bydź wyrażony pod postacyą iednego wyrażenia ułamkowego. 134.

Jeżeli dzielny i dzielnik są różnéy natury, dosyć iest uczynić dzielnika samotnym. 135.

Aby zamienić liczbę wieloraką na dziesiętne, potrzeba zacząć od naymniéyszego podziału, dzieląc kolêyno przez liczbę okazuiącą ile razy każdy podział zawiéra się w poprzedzaiącym. - - - 136.

Przeciwnie obraca się ułamek dziesiętny na liczbę wieloraką, mnożąc koléyno przez liczby okazuiące wiele razy każdy podział zawiéra się w następuiącym. - - - - 138.

o Potęgach i Pierwiastkach.

Składamy z ułamka iakąkolwiek potęgę, gdy obydwa iego wyrazy do téyże potęgi wynosimy. - - - 140.

Kwadrat wszelkiéy liczby złożonéy z dwóch części składa się: z kwadratu każdéy téy części, powiększonych ich podwóyną mnogością. - - 141.

Kwadrat każdéy liczby ma podwóyność, albo podwóyność mniéy iedno cyfer swego piérwiastka i na tém gruntuie się wyciąganie piérwiastka kwadratowego z liczby złożonéy z więcéy iak z dwóch cyfer. 142.

Liczby wymierne są te które maią wspólną miarę z iednością, przeciwne liczby których piérwiastka kwadratowego dokładnie oznaczyc niemożna, nazywaią się niewymiernemi. 144.

Zbliżenie się do piérwiastka kwadratowego uskutecznia się przy pomocy dziesiętnych ułamków, dodaiąc na końcu liczby zadaney dwa razy tyle zerów, wiele się żąda mieć dziesiętnych w pierwiastku. - - 145.

Gdy licznik i mianownik ułamka są niewymiernemi natenczas ieden z wyrazów iego robi się dokładnym kwadratem, mnożąc licznika i mianownika iego przez mianownika. 148.

Maiąc kwadrat iakiéy liczby wiadomy, aby mièć kwadrat liczby o iednę iedność większéy, potrzeba do niego dodać iedność, więcéy podwóyność téyże liczby. - - - 150. 3cie

Sześcian liczby rozłożonéy na dwie części składa się z szescianu części piérwszéy; z potróynego kwadratu części piérwfzéy rozmnożonego przez część drugą; z potróynego kwadratu części drugiéy przez piérwfzą i z fześcianu części drugiéy. - 151.

Ztąd wypada że sześcian iakiéy liczby zawiéra w sobie zawsze potróyność cyfer które ma w swoim piérwiastku albo potróyność mniéy 1, albo potróyność mniéy dwa. - 152.

Wyciągnąć piérwiastek sześcienny przez przybliżenie, potrzeba do liczby dodać od prawéy ręki trzy razy tyle zer, ile chcemy mieć cyfer dziesiętnych w piérwiastku. - - 156.

Co do wyciągania piérwiastku sześciennego z ułamka taż sama uwaga służy co i do piéwiastku kwadratowego z ułamka. 158.

Pierwiastek czwartego stopnia wynayduie się przez wyciągnienie podwóyne piérwiastku kwadratowego; Piérwiastek szóstego stopnia przez dwa piérwiastki koléyne iednego kwadratowego, a drugiego sześciennego; Piérwiastek osmego stopnia przez trzy wyciągania koleyne pierwiastka kwadratowego. Pierwiastek 9go stopnia przez dwa wyciągania koleyne pierwiastka sześciennego. 159.

o Równonadmiarze i Proporcyach.

Stosunkiem nazywa się wypadek z porównania z sobą dwóch ilości. Stosunek nadmiarowy wyraża ich rożnice, a stosunek wielorazowy ich wieloraz wypadaiący z podzielenia iednéy przez drugą. Piérwszy wyraz nazywa się poprzednik, drugi następnik. - - 160:

Stosunkami ciągłemi są te, których następnik każdego iest poprzednikiem drugiego. 165.

Wszelkie stosunki wielorazu zamienić można na ciągłe, ieżeli wyraziwszy ie w liczbach całkowitych położymy ie pod sobą i pierwszego poprzednika pomnożymy przez wszystkich innych, każdego zaś nastąpnika przez wfzystkie naftępne poprzedniki i poprzednie następniki, i mnogości ztąd wypadłe weźmiemy zarazem za poprzedników następaiących. - - 166.

Maiąc pewną liczbę stosunków wielorazu, gdy z osobna wszystkie ich poprzedniki, iako też wszystkie ich następniki pomnożymy przez siebie, mnogości te czynią stosunek złożony. - - - 176.

Równonadmiar iest porównanie dwóch stosunków równonadmiarowych. - - 170.

Gdy w Równonadmiarze dwa wyrazy srzednie są iednakowe Równonadmiar nazywa się ciągły: - - - - 170.

W każdym równonadmiarze summa wyrazów skraynych równa się summie wyrazów srzednich. - - - 171.

Równość dwóch stosunków wielorazowych albo tylko stosunków nazywa się proporcyą. - - - - 174.

Proporcya nazywa się ciągłą gdy wniéy dwa wyrazy srzednie są sobie równe. - 177.

W wszelkiéy proporcyi mnogość wyrazów skraynych równa się mnogości z srzednich. 178.

Ztąd wypada: że z czynników dwóch mnogości równych zawsze można złożyć proporcyą. - - - - 178.

W każdey proporcyi można przemienić miéysca skraynym albo srzednim i położyć skrayne na miéyscu srzednich. 179.

Proporcya zostaie nienaruszoną, gdy w niéy wyraz skrayny i srzedni przez iednakową liczbę pomnożymy lub podzielimy. - - - - 179.

Dzieląc mnogość skraynych przez ieden srzedni, na wieloraz musi wypaśdź drugi srzedni i przeciwnie. - - 181.

W każdéy proporcyi summa lub różnica poprzedników, ma się do summy lub różnicy następników iak którykolwiek poprzednik do swego następnika. - - - - 184.

Summa lub różnica poprzedników, ma się do iednego z poprzedników, iak summa lub różnica następników do iednego z następników. - - 184.

Summa lub różnica dwóch pierwszych wyrazów, ma się do summy lub różnicy dwóch drugich, iak ieden z poprzedników do swego następnika. - 184

Summa dwóch pierwszych wyrazów, ma się do ich różnicy, iak summa dwóch drugich, do ich różnicy. - - 184.

W szeregu stosunków równych, summa poprzedników ma się do summy następników iak ieden z poprzedników do swego następnika *i. t. d.* 184.

Gdy wyrazy dwóch lub więcéy proporcyi przez siebie pomnożymy, wypadłe ztąd mnogości składaią proporcyą złożoną. - - - - 186.

Wszystkie wyrazy proporcyi można wynieść do kwadratów, sześcianów *i. t. d.* lub ze wszystkich wyciągnąć pierwiastki kwadratowe, sześcienne *i. t. d.* - - - - - 186.

Jeżeli z dwóch ilości iedna tym sposobem powiększa się lub zmnieysza iak druga, ilości te są w stosunku prostym. Przeciwnie gdy z dwóch ilości iedna tym sposobem powiększa się, iak druga zmniéysza się, ilości te są w stosunku odwrotnym. - - - - 188.

Ztąd gdy ilości maią między sobą takowe ſtosunki, mogą składać proporcyą któréy ostatnim wyrazem iest niewiadoma 188.

Niewiadoma ta oznacza się przez x a uważaiąc z natury zagadnienia czyli ma bydź większą lub mnieyszą od ilości wiadomey tegoż gatunku; w pierwszym przypadku; z dwóch pozostałych wyrazów kładzie się na drugim miéyscu wyraz większy, ieżeli zaś ma bydź mniéyszą, kładzie się wyraz mniéyszy. - - - - 190.

Regułą składaną nazywa się ta do któréy więcéy iak dwa wchodzą stosunki. - - 198.

Każda reguła składana może bydź rozwiązaną za pomocą reguły trzech, biorąc za każdym razem dwa tylko stosunki, a inne okoliczności uważaiąc za iednostayne. - - 198.

Reguła spółki czyli podziału służy do podzielenia liczby iakiéy na wiele części któreby między sobą miały stosunki dane. - - - - 203.

Summa mnogosciów ze składek przez czasy, ma się do całego zysku, iak każda poiedyńcza mnogość do należącego zysku. - - - - 206

Reguła łańcowa nazywa się ta w którą w chodzi wiele proporcyi, które łączyć się daią, i gdy z stosunków posrzednich między dwoma ilościami, z których iest iedna wiadoma, ma się dochodzić ilości drugiéy. 207.

Układaią się w niéy wyrazy tak, ażeby każdy po lewéy stronie położony był iednorodny z wyrazem nayblizszym po prawéy stronie będacym, poki niedóydzie się do wyrazu iednorodnego zwyrazem szukanym 207.

Gdy z dwóch lub więcéy rzeczy rozmaitéy ceny, wypada dochodzić wiele z każdéy wziąśdź wypada, aby otrzymać mięszaninę wartości srzednicy, prawidło którém tego dochodzimy nazywa się Regułą *mięszaniny* 211.

Prawidło służące iak z dwóch rzeczy rozmaitéy ceny odnoszących się iednak do iednakowéy miary doyśdź wiele z każdéy wziąść należy, aby otrzymać mięszaninę wartości srzedniey iest: odiąć cenę podléyszego gatunku od ceny mięszaniny, daléy też cenę od ceny lepszego gatunku, piérwsza różnica będzie licznikiem, druga mianownikiem ułamka, który okaże część miary maiącéy się wziąśdz z lepszego gatunku. - 213.

Postęp nadmiaru iest to szereg wyrazów liczbowych z których każdy przewyższa tego co go poprzedza albo iest od niego przewyższonym iednakową ilością. - - - - 216.

Własność takowego postępu iest: że którykolwiek wyraz iego składa się z pierwszego, więcéy stosunek powtórzony tyle razy, ile go wyrazów poprzedza. - - - - 218.

Aby wcisnąć pomiędzy dwie liczby zadane pewną liczbę srzodków nadmiaru, potrzeba rożnicę pomiędzy temi ilościami podzielić przez liczbę maiących się wcisnąć srzodków zwiększoną o 1, a wieloraz wypadły będzie stosunkiem, który maiąc, można iuż złożyć postęp. 219.

Postęp wielorazu iest to szereg wyrazów z których każdy zawiéra w sobie tego który go poprzedza iednakową liczbę razy. - - - - 220.

W tym postępie wyraz którykolwiek, iest mnogością z pierwszego przez stosunek wyniesiony do stopnia oznaczonego przez liczbę wyrazów które go poprzedzaią. - - 221.

Aby pomiędzy dwie liczby w takowym postępie wcisnąć pewną liczbę srzodków proporcyonalnych, potrzeba wziąśdz ich wieloraz i wyciągnąć zniego pierwiastek stopnia któryby się równał liczbie srzodków więcéy 1, a ten pierwiastek będzie stosunkiem. - 221.

o Logarytmach.

Logarytmy są liczby w postępie nadmiaru zaczynaiącym się od 0, a odpowiadaiące wyraz w wyraz liczbom innym składaiącym postęp wielorazowy, zaczynaiącym się od 1. - 222.

Własność Logarytmów iest; że stosunek tyle razy iest czynnikiem w którymkolwiek wyrazie pierwszego postępu, ile stosunek w drugim postępie dodany iest w wyrazie iemu odpowiadaiącym. - - 224.

Summa logarytmów dwóch liczb iest logarytmem ich mnogości. - - - 224.

Mnożąc logarytm iakiéy liczby przez iakiego czynnika otrzymuiemy logarytm potęgi teyże liczby, to iest potęgi oznaczonéy przez tegoż czynnika. 225.

Logarytm wielorazu dwóch liczb, iest różnicą logarytmów tychże liczb. - - 226.

Zatém aby pomnożyć przez siebie dwie liczby potrzeba ich logarytmy wzięte z Tablicy do siebie dodać i szukać summy między ich logarytmami, a liczba odpowiadaiąca téy summie, będzie mnogością żądaną. 226.

Chcąc podzielić dwie liczby przez siebie odeymuiemy logarytm dzielnika od logarytmu dzielnego, reszty wypadłéy szukaiąc między logarytmami, a odpowiadaiąca liczba będzię wielorazem żądanym. - - 226.

Aby odprawić regułę trzech dodamy logarytmy wyrazów srzednich, a od ich summy odeymiemy logarytm wyrazu skraynego, liczba odpowiadaiąca wypadkowi będzie żądaną ilością. - - - - 226.

Aby miéć logarytm ułamka, odeymuiemy logarytm mianownika od logarytmu licznika, reszta będzie logarytmem żądanym. - - - - 226.

Aby wynieść iaką liczbę do potęgi, iey logarytm mnoży się przez stopień potęgi, mnogości tey szukaiąc między logarytmami, liczba odpowiadaiąca wyda potęgę zadaną. - - 226.

Aby wyciągnąć piérwiastek z iakiéy liczby, podzielimy iéy logarytm przez stopień pierwiastka i poszukamy wielorazu między logarytmami, liczba odpowiadaiąca będzie pierwiastkiem żądanym. - - - 226.

Do ułożenia Tablic użyto dwóch postępów, wielorazowego dziesiątkowego zaczynaiącego się od 1, i nadmiarowego którego piérwszym wyrazem iest 0, a innemi są liczby wporządku naturalnym idące. - 228.

Dosyć iest mieć logarytmy liczb pierwszych aby z nich złożyć wszystkie inne. - 228.

Cechą iakiego logarytmu iest liczba całkowita poprzedzaiąca ułamek dziesiętny; Z cechy téy poznać można w którym dziesiątku znayduie się liczba, do któréy ten logarytm należy 229.

Chcąc iako liczbę pomnożyć lub podzielić przez 10, 100.... *i. t. d*, potrzeba w pierwszym razie dodać, a w drugim odiąć od iey cechy 1, 2, 3 *i. t. d* iedności. - - - 229.

Logarytmy przeczące, są logarytmy ułamków właściwych. - - - 230.

Aby mieć logarytm z cechą tylko przeczącą, potrzeba do cechy logarytmu liczby mniéyszéy dodać iaką liczbę iedności, ale od reszty potrzeba od cechy odiąć tyleż iedności. - - 230.

Dopełnienie Arytmetyczne

o *Miarach nowych Francuzkich.*

KONIEC TOMU I.

POMYŁKI ZNACZNIEYSZE w TOMIE PIÉRWSZYM.

Karta	wiérsz			
17	*przedostatni*	wiele	*czytay*	wielu
23	20	1231	—	1232
32	21	wowiąc	—	mówiąc
38	8	czterokrotném	—	trzykrotném
44	14	Pzrypadek	—	Przypadek
53	53	Do ilości nierównych	—	Do ilości równych
76	12	za mnogość	—	że mnogość
81	9	$\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2} : \frac{2}{2}$	—	$\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2} \times \frac{2}{2}$
91	16	podzieaɪnie	—	podzielenie
101	4	znayduiące się	—	znayduiąc się
107	15	Nonety	—	Monety
111	11	Odciągane	—	Odciąganie
119	20	ównych	—	równych
123	19	$\frac{4269}{72}$	—	$\frac{4169}{72}$
123	20	$\frac{4269}{72}$	—	41[illegible]/72
127	*przedostatni*	Wimy	—	Wiemy
142	11	285	—	182
173	19	pyrazów	—	wyrazów
191	4	$334\frac{1}{10}$	—	$344\frac{1}{10}$
191	14	i dzielnik	—	i iedność
191	14	i iedność	—	i dzielnik
207	15	$2\frac{1}{2}$	—	$1\frac{1}{2}$
219	11	$4 \cdot 2$	—	$4+2$
219	18	Rozmnożywszy	—	Dodawszy
219	19	przez siebie	—	do siebie
220	9	na 14 fun[illegible]h	—	na 14 funtów
221	10	mam zniego	—	mam wziąśdź
232	4	podobnież	—	podobnąż
236	5	$L\frac{3}{5} = 0{,}2218487$	—	0,2218487

Aby podzielić całość przez ułamek: mnoży się całość przez mianownik a pod tym iloczynem podpisuje się licznik za mianownik