1087, 1088

opis nr 48639
48640

982

Untersuchungen

über

eine Fläche dritter Ordnung

mittelst der Grassmann'schen Ausdehnungstheorie

von

Victor Schlegel.

S. Dickstein

1883.

Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung mittelst der Grassmann'schen Ausdehnungstheorie.

Einleitung.

Die Geschichte der Geometrie zeigt uns von Alters her einen Wettstreit zwischen der synthetischen und der analytischen Methode. Bis Descartes war die erstere die Alleinherrscherin; aber das antike System mit dem schwerfälligen Apparate seiner Beweise aus Dreiecks-Congruenzen reichte nur für die Elemente aus, und fristet heute auch in diesem Gebiete nur noch ein kümmerliches Dasein, wie die zahllosen vergeblichen Versuche beweisen, demselben eine dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechende Gestalt zu geben.*) — Da erschien mit der analytischen Methode von Descartes eine wesentliche Hilfe. Es entstand eine höhere Geometrie, welcher in ihrer analytischen Gestalt die Infinitesimalrechnung eine unermessliche Unterstützung brachte. Die Synthesis war aus dem Felde geschlagen. — Aber die neue Methode zeigte sich den steigenden Ansprüchen am Ende auch nicht gewachsen. Wie die synthetische Geometrie des Alterthums an dem Ballast der congruenten Dreiecke, so laborirte die analytische Geometrie der Neuzeit an demjenigen ihrer rechtwinkligen Coordinaten. Hier wie dort stand schliesslich die Einfachheit der Resultate mit dem Aufwande von Mitteln in einem unerträglichen Gegensatze. — Wieder trat die synthetische Geometrie in die Lücke ein. Steiner baute auf dem überlieferten Fundamente eine Synthesis für die höhere Geometrie auf, — auf cyklopischen Mauern einen gothischen Dom. Seine Schüler sind noch beschäftigt, den Bau zu vollenden. — Inzwischen suchte die analytische Geometrie von den Fesseln der rechtwinkligen Coordinaten sich zu befreien; Plücker, und in neuerer Zeit Hesse

*) Zur Unterstützung dieser Kritik citire ich Prof. Hankels Gelegenheitsschrift: Die Entwickelung der Math. in den letzten Jahrhunderten, Tübingen 1869, wo es auf S. 9. heisst: „So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit und Anschaulichkeit, die wahre Einfachheit auf, welche in der Allgemeinheit der Principien, und die wahre Anschaulichkeit, welche in der Erkenntniss des Zusammenhangs geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich verstellbaren Lage beruht."

und Andere schufen zahlreiche, dem jedesmaligen Gegenstande der Untersuchung angemessene Coordinatensysteme, durch welche die Rechnungen so erheblich abgekürzt wurden, dass die Leistungen beider Zweige der Geometrie gegenwärtig als ebenbürtig zu betrachten sind. Aber für beide Methoden, auch in ihrer gegenwärtigen vollkommneren Gestalt, ist der Zeitpunkt vorauszusehen, wo es heissen wird: Bis hierher und nicht weiter. — Der Synthesis erwuchsen bereits bei der Betrachtung des Imaginären die grössten Schwierigkeiten. Da sie ferner auf die bequeme Sprache der Formeln verzichtet, und, wenigstens im Gebiete des Raumes, die bildliche Darstellung ihr nur eine geringe Hilfe bietet, so ist sie auf die sprachliche Deduction angewiesen, deren Schwerfälligkeit den Fortschritt der Untersuchung wesentlich aufhält. Endlich aber — und das ist die Hauptsache — vermag sie sich nicht über das Gebiet des Raumes emporzuschwingen, sondern findet in diesem ihre natürliche Beschränkung.

Die Analysis andrerseits ist an die, mehr durch die Praxis als durch die Wissenschaft aufgestellten Zahlenoperationen gebunden, deren Gesetze, trotz aller bisherigen Erweiterungen des Zahlbegriffes, die geometrischen Untersuchungen in unbequeme Formen zwängen, ein Uebelstand, der durch keine Erfindung im Gebiete des Coordinatenwesens wird gehoben werden.

Es käme also darauf an, eine Analysis zu besitzen, welche den Anforderungen der Geometrie und der Zahlenlehre gleichmässig Rechnung trüge. Eine solche Analysis würde sich von der Synthesis nur durch die Sprache der Formeln, von der bisherigen Analysis durch die Neuheit ihrer Operationen unterscheiden. Die Operationen der bisherigen Analysis würden ebenso als specielle Fälle in ihr enthalten sein, wie die geometrischen Constructionen im Gebiete der Linie, der Ebene, des Raumes.

Eine solche Analysis aber besitzen wir, wenn sie auch bisher wenig beachtet wurde, bereits seit einem Viertel-Jahrhundert in der Ausdehnungslehre des Hrn. Professor H. Grassmann in Stettin.

Es ist nicht mein Zweck, in dem kurz bemessenen Raume eines Programms auf die Specialitäten dieser Analysis näher einzugehen. Nur einige der darin niedergelegten Ideen und der darin begründeten Operationen werde ich bei der Untersuchung einer Fläche dritten Grades verwenden, um an einem Beispiele die Eigenthümlichkeiten der neuen Analyse zu zeigen, und, wenn möglich, die Aufmerksamkeit der Leser Bestrebungen zuzuwenden, deren allgemeine Würdigung meiner Ueberzeugung nach nur noch eine Frage der Zeit ist.

In neuester Zeit hat zuerst Prof. Hankel an einigen Stellen seiner „Vorlesungen über die complexen Zahlen, Th. I. Leipzig 1867“ auf die Grassmann'sche Ausdehnungslehre aufmerksam gemacht, so namentlich auf S. 16. — Und es ist in der That hohe Zeit dazu, wenn nicht wieder, wie schon so oft geschehen, der deutschen Wissenschaft der begründete Anspruch auf Priorität geraubt werden soll. Denn während schon 1853 Cauchy in den Comptes rendus im eigenen Namen eine Methode veröffentlichte, die er dem ihm übersandten Grassmann'schen Werke einfach — entlehnt hatte,*) lassen sich Deutschlands Mathematiker gegenwärtig aus England die Hamilton'schen Quaternionen importiren, ohne zu beachten, dass ein Landsmann längst in viel ausgedehnterem Masse geleistet hat, was Hamilton mit jenen Quaternionen gewollt.

Deshalb sei hier nochmals ausdrücklich auf die Arbeiten Grassmann's verwiesen.

*) S. Grassmann, Ausdehnungslehre, Berlin 1862, Vorrede. S. IX.

1. Coordinaten.

Die vier Ecken eines Tetraeders seien mit e_1 e_2 e_3 e_4 bezeichnet. Dann lässt sich jeder Punkt X im Raume aus e_1 e_2 e_3 e_4 mittelst der reellen Zahlen α_1 α_2 α_3 α_4 durch die Gleichung ableiten:

$$X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4. \tag{1}$$

Die Bedeutung der vier Zahlen erhellt, wenn wir (1) beispielsweise mit e_1 combinatorisch multipliciren. Dann ist

$$e_1 X = \alpha_2 e_1 e_2 + \alpha_3 e_1 e_3 + \alpha_4 e_1 e_4; \tag{2}$$

d. h.: trägt man auf den von e_1 ausgehenden Kanten (e_1 e_2), (e_1 e_3), (e_1 e_4) Strecken ab, die sich zu den ganzen Kanten resp. verhalten wie $\frac{\alpha_2}{1}$ $\frac{\alpha_3}{1}$ $\frac{\alpha_4}{1}$ und legt durch jeden Endpunkt eine Ebene die resp. mit (e_1 e_3 e_4), (e_1 e_2 e_4), (e_1 e_2 e_3) parallel ist, so entsteht ein Parallelepipedon, in welchem X die zu e_1 entgegengesetzte Ecke ist. Die Formel (2) drückt dann nach der Theorie von der Addition der Strecken aus, dass die Wege von e_1 nach X gleich sind.

Bezeichnen wir $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ mit σ, so ist X ein σ-facher Punkt; σ ist stets positiv.

Ist eine der Zahlen, z. B. α_1 gleich Null, so liegt X auf der Ebene e_2 e_3 e_4;

Sind zwei der Zahlen, z. B. α_1 u. α_2 gleich Null, so liegt X auf der Geraden e_3 e_4;

Sind drei der Zahlen, z. B. α_1 α_2 α_3 gleich Null, so liegt X in dem Eckpunkte e_4.

Bezeichnen wir den geschlossenen Raum des Tetraeders mit a); diejenigen 4 Räume, welche mit a) nur eine Seite gemeinsam haben, mit b); diejenigen 6 Räume, welche mit a) nur eine Kante gemeinsam haben, mit c); diejenigen 4 Räume, welche mit a) nur eine Ecke gemeinsam haben, mit d); so liegt X

in a)	wenn	4	Zahlen	positiv,	keine	negativ,
in b)	„	3	„	„	1	„
in c)	„	2	„	„	2	„
in d)	„	1	„	„	3	„

Fällt man andrerseits von X auf die Ebenen (e_1 e_2 e_3), (e_1 e_3 e_4), (e_1 e_2 e_4), resp. die Senkrechten (X-X_4), (X-X_2), (X-X_3), und bezeichnet z. B. mit ϑ_{13} den Neigungswinkel der Kante (e_1 e_3) gegen die Ebene (e_2 e_3 e_4), so ist:

$$\begin{aligned}
x_4 = (X\text{-}X_4) &= \alpha_4 (e_1\text{-}e_4) \sin \vartheta_{41} & x_3 = (X\text{-}X_3) &= \alpha_3 (e_1\text{-}e_3) \sin \vartheta_{31} \\
&= \alpha_4 (e_2\text{-}e_4) \sin \vartheta_{42} & &= \alpha_3 (e_2\text{-}e_3) \sin \vartheta_{32} \\
&= \alpha_4 (e_3\text{-}e_4) \sin \vartheta_{43} & &= \alpha_3 (e_4\text{-}e_3) \sin \vartheta_{34} \\
x_2 = (X\text{-}X_2) &= \alpha_2 (e_1\text{-}e_2) \sin \vartheta_{21} & x_1 = (X\text{-}X_1) &= \alpha_1 (e_3\text{-}e_1) \sin \vartheta_{13} \\
&= \alpha_2 (e_3\text{-}e_2) \sin \vartheta_{23} & &= \alpha_1 (e_4\text{-}e_1) \sin \vartheta_{14} \\
&= \alpha_2 (e_4\text{-}e_2) \sin \vartheta_{24} & &= \alpha_1 (e_2\text{-}e_1) \sin \vartheta_{12}
\end{aligned} \tag{3}$$

Diese Formeln zeigen den Zusammenhang zwischen den Projections-Coordinaten x eines Punktes X, und seinen Zahlencoordinaten.

Da die Klammergrössen ebenso wie die Winkel ϑ constante Grössen sind, so sind die Variablen x einfach durch die Variablen a ausgedrückt. Die einen sind also gleichzeitig mit den anderen Null, oder positiv, oder negativ.

2. *Gleichung der Fläche f.*

Wir wollen nun den geometrischen Ort desjenigen Punktes X bestimmen, für welchen die Fusspunkte $X_1 X_2 X_3 X_4$ der 4 Projections-Coordinaten in derselben Ebene (Fusspunktebene) liegen. Dies ist aber der Fall, wenn

(4) $$(X_1 X_2 X_3 X_4) = 0$$

oder, da nach (3) $X_4 = X - x_4$; $X_3 = X - x_3$; $X_2 = X - x_2$; $X_1 = X - x_1$ ist, für

$$(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) = 0$$

Durch Lösung der Klammern folgt, da $(X X) = 0$ und $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ als Product von 4 Strecken im Raum ebenfalls $= 0$ ist:

$$- X (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) = 0;$$

d. h. (5) $$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 = 0.$$

Diese Gleichung ist diejenige einer Oberfläche 3. Grades und hat folgende geometrische Deutung:

Die geometrische Summe der vier Parallelepipeda, die aus je drei der von einem Punkte auslaufenden Strecken x gebildet sind, ist Null. Denken wir uns die ganze Gleichung (5) durch 6 dividirt, so heisst es: die geometrische Summe der vier dreiseitigen Pyramiden, deren Seitenkanten je drei der Strecken x sind, ist Null. In der That ist diese Bedingung nur dann erfüllt, wenn die vier Fusspunkte $X_1 X_2 X_3 X_4$ in derselben Ebene liegen, da sonst jene Summe gleich der Pyramide ist, deren Ecken diese vier Punkte sind.

Um die Gleichung der Oberfläche auch in Zahlencoordinaten zu erhalten, setzen wir eine Auswahl der Werthe (3) in die Gleichung (5) ein.

Wir wollen dabei so verfahren, dass jedes Glied der neuen Gleichung den Factor $(-e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_4 - e_3 e_4 e_1 + e_4 e_1 e_2)$ erhält, der nachher aus allen Gliedern weggelassen werden kann.

Zu diesem Zwecke setzen wir beispielsweise für das erste Glied:

$$\begin{aligned} P_4 = (e_x - e_1)(e_y - e_2)(e_z - e_3) &= e_x e_y e_z - e_x e_y e_3 - e_x e_2 e_z + e_x e_2 e_3 \\ &\quad - e_1 e_y e_z + e_1 e_y e_3 + e_1 e_2 e_z - e_1 e_2 e_3 \\ &= (- e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_4 - e_3 e_4 e_1 + e_4 e_1 e_2) \end{aligned}$$

woraus x, y, z zu bestimmen sind. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Sind zwei der Grössen x, y, z einander gleich, z. B. $x = y$, so kann nur $x = y = 4$ sein, oder $x = y = 3$. Im ersten Falle erhält man:

$$\begin{aligned} - e_4 e_2 e_z + e_4 e_2 e_3 - e_1 e_4 e_z + e_1 e_4 e_3 + e_1 e_2 e_z - e_1 e_2 e_3 \\ = - e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_4 - e_3 e_4 e_1 + e_4 e_1 e_2 \end{aligned}$$

oder: $$- e_4 e_2 e_z - e_1 e_4 e_z + e_1 e_2 e_z = e_4 e_1 e_2.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch die Werthe $z = 4$, $z = 2$, $z = 1$.

Danach ist:

a) $P_4 = (e_4 - e_1)(e_4 - e_2)(e_4 - e_3)$

b) $P_4 = (e_4 - e_1)(e_4 - e_2)(e_2 - e_3)$

c) $P_4 = (e_4 - e_1)(e_4 - e_2)(e_1 - e_3)$

Im zweiten Falle erhält man:

$$
\begin{aligned}
&- e_3\, e_2\, e_z - e_1\, e_3\, e_z + e_1\, e_2\, e_z - e_1\, e_2\, e_3\\
&= - e_1\, e_2\, e_3 + e_2\, e_3\, e_4 - e_3\, e_1\, e_1 + e_4\, e_1\, e_2
\end{aligned}
$$

oder:
$$- e_3\, e_2\, e_z - e_1\, e_3\, e_z + e_1\, e_2\, e_z = e_2\, e_3\, e_4 - e_3\, e_4\, e_1 + e_4\, e_1\, e_2.$$

Hier genügt nur der Werth $z = 4$; es folgt:

$$\text{d)}\quad P_4 = (e_3 - e_1)\,(e_3 - e_2)\,(e_4 - e_3).$$

2. Sind die Grössen: x, y, z alle verschieden, so muss eine davon, z. B. $x = 4$ sein; $e_x = e_4$. Dann erhält man:

$$
\begin{aligned}
&e_4\, e_y\, e_z - e_4\, e_y\, e_3 - e_4\, e_2\, e_z + e_4\, e_2\, e_3 - e_1\, e_y\, e_z + e_1\, e_y\, e_3 + e_1\, e_2\, e_z - e_1\, e_2\, e_3\\
&= - e_1\, e_2\, e_3 + e_2\, e_3\, e_4 - e_3\, e_4\, e_1 + e_4\, e_1\, e_2
\end{aligned}
$$

oder:
$$
\begin{aligned}
&e_4\, e_y\, e_z - e_4\, e_y\, e_3 - e_4\, e_2\, e_z - e_1\, e_y\, e_z + e_1\, e_y\, e_3 + e_1\, e_2\, e_z\\
&= - e_3\, e_4\, e_1 + e_4\, e_1\, e_2.
\end{aligned}
$$

Hier muss von den beiden Gliedern, welche e_y und e_z enthalten, das eine Null sein, und da $e_x = e_4$ ist, aber e_y und e_z von e_x verschieden sein sollen, so kann eine dieser Grössen nur $= e_1$ sein, z. B. $e_y = e_1$. Dann folgt weiter:

$$e_4\, e_1\, e_z - e_4\, e_1\, e_3 - e_4\, e_2\, e_z + e_1\, e_2\, e_z = - e_3\, e_4\, e_1 + e_4\, e_1\, e_2$$

oder:
$$e_4\, e_1\, e_z - e_4\, e_2\, e_z + e_1\, e_2\, e_z = e_4\, e_1\, e_2.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch die Werthe $z = 1$, $z = 2$, $z = 4$.

Demnach ist:

$$
\begin{aligned}
&\text{e)}\quad P_4 = (e_4 - e_1)\,(e_1 - e_2)\,(e_4 - e_3)\\
&\text{f)}\quad P_4 = (e_4 - e_1)\,(e_1 - e_2)\,(e_2 - e_3)\\
&\text{g)}\quad P_4 = (e_4 - e_1)\,(e_1 - e_2)\,(e_1 - e_3)
\end{aligned}
$$

Unter diesen 7 Formen sind die Formen d) und g) nicht *wesentlich* von a) verschieden, da man sie aus a) durch regressive, resp. progressive circuläre Aenderung der Indices erhält. Ferner folgt c) aus b) und e) aus f) durch Vertauschung von e_2 mit e_1, resp. e_4. Es bleiben also als *wesentlich* verschieden nur die Formen: a) b) f).

Durch circuläre Aenderung erhält man auch $P_1\ P_2\ P_3$.

Bezeichnen wir die Coefficienten der Producte aus den Variablen α mit e, f, g, h, so erhalten wir die Werthgruppen:

$$
(6)\qquad
\begin{array}{llll}
e = \sin\vartheta_{21} & \sin\vartheta_{31} & \sin\vartheta_{41} \quad f = \sin\vartheta_{32} & \sin\vartheta_{42}\ \ \sin\vartheta_{12}\\
\quad\ \ {\scriptstyle 21} & {\scriptstyle 31} & {\scriptstyle 43} \qquad\qquad\ \ {\scriptstyle 32} & {\scriptstyle 42} \qquad\ {\scriptstyle 14}\\
\quad\ \ {\scriptstyle 21} & {\scriptstyle 32} & {\scriptstyle 42} \qquad\qquad\ \ {\scriptstyle 32} & {\scriptstyle 43} \qquad\ {\scriptstyle 13}\\
g = \sin\vartheta_{43} & \sin\vartheta_{13} & \sin\vartheta_{23} \quad h = \sin\vartheta_{14} & \sin\vartheta_{24}\ \ \sin\vartheta_{34}\\
\quad\ \ {\scriptstyle 43} & {\scriptstyle 13} & {\scriptstyle 21} \qquad\qquad\ \ {\scriptstyle 14} & {\scriptstyle 24} \qquad\ {\scriptstyle 32}\\
\quad\ \ {\scriptstyle 43} & {\scriptstyle 14} & {\scriptstyle 24} \qquad\qquad\ \ {\scriptstyle 14} & {\scriptstyle 21} \qquad\ {\scriptstyle 31}
\end{array}
$$

und als Gleichung der Oberfläche:

$$(7)\qquad f = e\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4 + f.\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_1 + g.\,\alpha_4\,\alpha_1\,\alpha_2 + h.\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = 0.$$

$$(7a)\qquad \text{oder:}\quad \frac{e}{\alpha_1} + \frac{f}{\alpha_2} + \frac{g}{\alpha_3} + \frac{h}{\alpha_4} = 0$$

Nunmehr können die Verhältnisse je zweier Coefficienten stets durch ein einfaches Sinusverhältniss ersetzt werden; man hat nämlich:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{e}{f} = \frac{\sin\vartheta_{21}}{\sin\vartheta_{12}} \quad \frac{f}{g} = \frac{\sin\vartheta_{32}}{\sin\vartheta_{23}} \quad \frac{g}{h} = \frac{\sin\vartheta_{43}}{\sin\vartheta_{34}}\\
&\frac{h}{e} = \frac{\sin\vartheta_{14}}{\sin\vartheta_{41}} \quad \frac{e}{g} = \frac{\sin\vartheta_{31}}{\sin\vartheta_{13}} \quad \frac{f}{h} = \frac{\sin\vartheta_{42}}{\sin\vartheta_{24}}
\end{aligned}
$$

3. *Vertheilung der Fläche f in den Räumen des Tetraeders.*

Da die Summe σ der 4 Coordinaten α stets positiv ist, so wird durch gemeinsame Aenderung ihrer Vorzeichen kein neuer Punkt der Fläche bestimmt, obwohl die Gleichung (7) auch in diesem Falle richtig bleibt. Die Fläche existirt daher nicht gleichzeitig in solchen zwei Räumen, für deren Punkte die Coordinaten entgegengesetzte Zeichen haben. Dasselbe gilt nunmehr auch von den Coordinaten x, y, z, p.

1. Sind alle 4 Coordinaten positiv, so zerfällt Gl. (5) in die Gll.

$$x\,y\,z = 0,\ y\,z\,p = 0,\ z\,p\,x = 0,\ p\,x\,y = 0.$$

Da die Coordinaten von einander unabhängig sind, so genügen diesen Gll. nur die Werthe:

$$x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad x = 0,\quad y = 0$$
$$y = 0,\quad z = 0,\quad p = 0.\quad z = 0,\quad p = 0.$$

d. h.: Mit dem Raume a) des Tetraeders hat die Fläche nur die 6 Geraden gemeinsam, welche seine Kanten bilden.

2. Ist eine der Coordinaten negativ, z. B. $p = -p_1$, so ist

$$x\,y\,z = (xy + xz + yz)\,p_1.$$

In diesem Falle ist also eine der Pyramiden gleich der algebraischen Summe der drei übrigen, und das Viereck der Punkte $X_1\,X_2\,X_3\,X_4$ hat bei X_4 einen convexen Winkel. Die zugehörigen Theile der Fläche liegen in den 4 Räumen b).

3. Sind zwei der Coordinaten negativ, z. B. $p = -p_1$, $z = -z_1$, so ist

$$xy(z_1 + p_1) = (x + y)\,z_1\,p_1.$$

In diesem Falle sind die Summen aus je zwei Pyramiden einander gleich, und das Viereck der Punkte $X_1\,X_2\,X_3\,X_4$ enthält nur concave Winkel. Die zugehörigen Theile der Fläche liegen in dreien der Räume c).

Ausgeschlossen ist die Fläche aus den drei übrigen Räumen c) und aus den Räumen d).

4. *Tangential-Eigenschaften der Fläche.*

Zur Erläuterung des Folgenden mögen einige der bekannten Eigenschaften der Fläche*) aus Gleichung (7) abgeleitet werden. Wir erhalten zunächst

$$(9)\qquad \begin{aligned} f_1' &= \frac{df}{d\alpha_1} = h\,\alpha_2\,\alpha_3 + g\,\alpha_2\,\alpha_4 + f\,\alpha_3\,\alpha_4 \\ f_2' &= \frac{df}{d\alpha_2} = h\,\alpha_1\,\alpha_3 + g\,\alpha_1\,\alpha_4 + e\,\alpha_3\,\alpha_4 \\ f_3' &= \frac{df}{d\alpha_3} = h\,\alpha_1\,\alpha_2 + f\,\alpha_1\,\alpha_4 + e\,\alpha_2\,\alpha_4 \\ f_4' &= \frac{df}{d\alpha_4} = g\,\alpha_1\,\alpha_2 + f\,\alpha_1\,\alpha_3 + e\,\alpha_2\,\alpha_3 \end{aligned}$$

Diese Ableitungen verschwinden sammt f, wenn je drei der Grössen α gleich Null gesetzt werden, folglich sind die 4 Ecken des Tetraeders doppelte Punkte der Fläche. Die 6 Kanten sind hiernach vierfache Gerade der Fläche und repräsentiren zusammen ein System von 24 Geraden.

Setzt man die Ausdrücke (9) gleich Null, so stellen die Gleichungen einzeln die vier aus den Doppelpunkten beschriebenen Tangentenkegel an die Fläche dar; je zwei davon einen Kegelschnitt.

*) Vgl. Salmon. Analyt. Geom. des Raumes, übers. v. Fiedler. Th. II Cap. V. und Sturm, Flächen 3. Ordnung Nr. 123.

Mit Hilfe von (7) lassen sich die Ableitungen (9) einfacher schreiben:

$$(10)\quad \frac{df}{d\alpha_1} = -\frac{e\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4}{\alpha_1},\ \frac{df}{d\alpha_2} = -\frac{f\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_1}{\alpha_2},\ \frac{df}{d\alpha_3} = -\frac{g\,\alpha_4\,\alpha_1\,\alpha_2}{\alpha_3},\ \frac{df}{d\alpha_4} = -\frac{h\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}{\alpha_4}$$

Für einen Punkt auf den Kanten des Tetraeders, z. B. auf $e_1\,e_4$ verschwinden jedesmal zwei der Ableitungen, und die Gleichung der Tangentialebene erhält die Form:

$$g\,\alpha_1\,\alpha_4\,A_2 + f\,\alpha_1\,\alpha_4\,A_3 = 0$$

oder:

$$g\,A_2 + f\,A_3 = 0.$$

Demnach haben alle Punkte auf derselben Kante dieselbe Tangentialebene, in der die Kante selbst liegt. Die Lage dieser Ebene wird dadurch bestimmt, dass die Entfernungen jedes ihrer Punkte von den benachbarten Seiten des Tetraeders ($e_1\,e_3\,e_4$ und $e_1\,e_2\,e_4$) sich verhalten wie $-\dfrac{f}{g}$ oder wie $-\dfrac{\sin\vartheta_{32}}{\sin\vartheta_{23}}$

Die Gleichungen der 3 Paare von Tangentialebenen, welche durch die entgegengesetzten Kanten des Tetraeders gehen, sind also:

$$(11)\quad \begin{aligned} &a)\ g\,A_2 + f\,A_3 = 0\ ;\ h\,A_1 + e\,A_4 = 0\\ &b)\ f\,A_1 + e\,A_2 = 0\ ;\ h\,A_3 + g\,A_4 = 0\\ &c)\ e\,A_3 + g\,A_1 = 0\ ;\ h\,A_2 + f\,A_4 = 0 \end{aligned}$$

Jedes Paar dieser Gleichungen drückt eine Gerade aus, in der die entsprechenden Ebenen sich schneiden.

Diese drei Geraden liegen auf der Fläche, da ihre Coordinaten der Gl. (7a) genügen, und liegen ausserdem auf der Ebene:

$$(12)\quad \frac{A_1}{e} + \frac{A_2}{f} + \frac{A_3}{g} + \frac{A_4}{h} = 0$$

Aus den Gll. (11) folgt auch, dass die Tangentialebene einer Kante mit den benachbarten Seiten des Tetraeders vice versa gleiche Winkel bildet, wie die entgegengesetzte Kante.

Setzt man je 3 der Ableitungen (9), z. B. $f_1'\ f_2'\ f_3'$ gleich Null, so bezeichnet ein solches System von Gleichungen einen Punkt der Fläche mit folgenden Eigenschaften: 1. Die drei Tangentenkegel aus den Punkten $e_1\,e_2\,e_3$ schneiden sich in ihm. 2. Die Tangentialebene in diesem Punkte ist der Ebene $e_1\,e_2\,e_3$ parallel. 3. Die Zahl α_4 hat in ihm ein Maximum resp. Minimum.

Dieser Punkt, der einstweilen als Schnittpunkt dreier Kegelflächen erscheint, wird näher bestimmt, wenn wir die Gleichungen bilden:

$$f_1'\,\alpha_1 - f_2'\,\alpha_2 = 0\ ;\ f_2'\,\alpha_2 - f_3'\,\alpha_3 = 0\ ;\ f_3'\,\alpha_3 - f_1'\,\alpha_1 = 0.$$

Diese reduciren sich auf folgende 3 Systeme:

$$\alpha_1 = 0\ ;\ \alpha_2 = 0\ ;\ \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_4 = 0.$$

$$(12a)\quad f\,\alpha_1 - e\,\alpha_2 = 0\ ;\ g\,\alpha_2 - f\,\alpha_3 = 0\ ;\ e\,\alpha_3 - g\,\alpha_1 = 0.$$

Das erste bedeutet den Punkt e_4, das zweite die Ebene $e_1\,e_2\,e_3$, das dritte den Schnittpunkt der Fläche mit derjenigen Geraden, in welcher die drei Ebenen sich schneiden, durch welche die 3 inneren Neigungswinkel der Tetraederebenen $e_2\,e_3\,e_4$, $e_3\,e_4\,e_1$, $e_4\,e_1\,e_2$, in demselben Verhältnisse getheilt werden, wie deren Nebenwinkel durch die Ebenen (11).

Da nämlich aus je zweien der Gll. (12a) die dritte folgt, so schneiden sich alle 3 Ebenen in einen Geraden, und da diese letztere ausser durch den eben bezeichneten Punkt noch durch den doppelten Punkt e_4 geht, so schneidet sie, wie es sein muss, die Fläche in 3 Punkten.

Die oben genannten 3 Eigenschaften kommen hiernach ausser dem letztgenannten Punkte noch der Ecke e_4 und allen Punkten der drei Kanten $e_1\, e_2$, $e_2\, e_3$, $e_3\, e_1$ zu.

Setzt man nur je 2 der Ableitungen (9) z. B. f_1' f_2' gleich Null, so bezeichnet ein solches System von Gleichungen eine auf der Fläche liegende Curve mit folgenden Eigenschaften:

1. Sie ist der Durchschnitt der beiden Tangentenkegel aus den Punkten e_1 und e_2. 2. Die Tangentialebene in jedem ihrer Punkte ist der Kante $e_1\, e_2$ parallel.

Diese Curve wird näher bestimmt, wenn wir die Gleichungen bilden:

$$f_1'\, \alpha_1 - f_2'\, \alpha_2 = 0\ ;\ f_1'\, e - f_2'\, f = 0.$$

Die erste reducirt sich auf das System:

$$f\, \alpha_1 - e\, \alpha_2 = 0\ ;\ \left.\begin{matrix}\alpha_3\\ \alpha_4\end{matrix}\right\} = 0.$$

Die zweite auf $(e\, \alpha_2 - f\, \alpha_1)\, (g\, \alpha_4 - h\, \alpha_3) = 0$, oder: $f\, \alpha_1 - e\, \alpha_2 = 0$.

Die oben genannten beiden Eigenschaften haften also 1. an der Kante $e_1\, e_2$, 2. an der Curve, in welcher die Ebene $(f\, \alpha_1 - e\, \alpha_2 = 0)$ die Fläche schneidet. Diese Curve ist als Durchschnitt zweier Kegel zweiten Grades ein Kegelschnitt.

Ueberhaupt schneidet jede durch eine der Tetraederkanten gelegte Ebene die Fläche in einer Curve 2. Grades. Denn wenn $m\, \alpha_2 \pm n\, \alpha_1 = 0$ die Gleichung einer durch die Kante $e_3\, e_4$ gelegten Ebene ist, so geht durch Substitution des Werthes von α_2 in (7) diese Gleichung über in

$$\mp \frac{n}{m}\, e\, \alpha_1\, \alpha_3\, \alpha_4 + f\, \alpha_1\, \alpha_3\, \alpha_4 \quad \mp g\, \frac{n}{m}\, \alpha_1^2\, \alpha_4 \mp h\, \frac{n}{m}\, \alpha_1^2\, \alpha_3 = 0$$

oder:

$$\alpha_1\, \alpha_3\, \alpha_4\, (\mp n\, e + m\, f) \quad \mp n\, \alpha_1^2\, (g\, \alpha_4 + h\, \alpha_3) = 0$$

Diese zerfällt aber in die Systeme:

1. $\alpha_1 = 0\ ;\ \alpha_2 = 0;$
2. $m\, \alpha_2 \pm n\, \alpha_1 = 0;\ \alpha_3\, \alpha_4\, (m\, f \mp n\, e) \mp \alpha_1\, (g\, \alpha_4 + h\, \alpha_3) = 0$

Das erste giebt die Kante $e^3\, e_4$, das andre eine Curve zweiten Grades, die sich für $m = e$ und $n = f$ und die oberen Zeichen auf die Geraden

$$e\, \alpha_2 + f\, \alpha_1 = 0\ ;\ g\, \alpha_4 + h\, \alpha_3 = 0$$

und

$$\alpha_1 = 0\ ;\ \alpha_2 = 0$$

reducirt.

Die Tangentialebene einer Kante schneidet also aus der Fläche die betreffende Kante zweimal, und ausserdem eine der Geraden (11) heraus.

Setzt man die Werthe (11a) und (11b) in (9) ein, so folgt:

$$f_1' = h\, \alpha_2\, \alpha_3 = f\, \alpha_3\, \alpha_4\ ;\ f_2' = g\, \alpha_1\, \alpha_4 = e\, \alpha_3\, \alpha_4;$$

$$f_3' = h\, \alpha_1\, \alpha_2 = f\, \alpha_1\, \alpha_4\ ;\ f_4' = e\, \alpha_2\, \alpha_3 = g\, \alpha_1\, \alpha_2;$$

d. h. es ist:

$$f_1' : f_2' : f_3' : f_4' = \frac{1}{e} : \frac{1}{f} : \frac{1}{g} : \frac{1}{h}.$$

Dieselben Werthe erhält man durch Substitution von (11b) und (11c), sowie von (11c) und (11a).

Die drei Durchschnittspunkte der Geraden (11) haben also die gemeinsame Tangentialebene:

$$\frac{A_1}{e} + \frac{A_2}{f} + \frac{A_3}{g} + \frac{A_4}{h} = 0, \tag{12}$$

welches, wie wir wissen, die Ebene der 3 Punkte selbst ist.

Die Lage dieser 3 Punkte verdeutlicht sich, wenn wir in der Gleichung

$$P = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$$

die Werthgruppen einsetzen:

$$1)\ \alpha_1 = + \frac{e}{h} \alpha_4; \quad \alpha_2 = - \frac{f}{h} \alpha_4; \quad \alpha_3 = - \frac{g}{h} \alpha_4;$$

$$2)\ \alpha_1 = - \frac{e}{h} \alpha_4; \quad \alpha_2 = + \frac{f}{h} \alpha_4; \quad \alpha_3 = - \frac{g}{h} \alpha_4;$$

$$3)\ \alpha_1 = - \frac{e}{h} \alpha_4; \quad \alpha_2 = - \frac{f}{h} \alpha_4; \quad \alpha_3 = + \frac{g}{h} \alpha_4.$$

Wir erhalten, wenn wir $\alpha_4 = 1$ setzen

$$(13)\quad \begin{aligned} h P_1 &= + e e_1 - f e_2 - g e_3 + h e_4 \\ h P_2 &= - e e_1 + f e_2 - g e_3 + h e_4 \\ h P_3 &= - e e_1 - f e_2 + g e_3 + h e_4. \end{aligned}$$

Die Punkte liegen also in den, im Punkte e_4 zusammentreffenden 3 Räumen c).

5. *Ableitung der Gleichung der Fläche f aus der allgemeinen stereometrischen Gleichung der Flächen 3. Grades.*

Aus der Grassmann'schen Erzeugungsart der Flächen 3. Ordnung folgt der Satz: Wenn die vier Flächen eines Tetraeders durch feste Punkte gehen, und die 3 Kanten einer Fläche auf festen Ebenen sich bewegen, so beschreibt die ihr gegenüberliegende Ecke eine Fläche 3. Ordnung.*)

Seien die drei gegebenen Ebenen mit a, b, c, die vier gegebenen Punkte mit P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnet, der variable Punkt aber mit X, so liegen die Durchschnittspunkte der Geraden $X P_1$, $X P_2$, $X P_3$ einerseits und der Ebenen a, b, c, andrerseits, mit dem Punkte P_4 in derselben Ebene, nämlich in der dem Punkte X entgegengesetzten Ebene des variablen Tetraeders, und zwar auf den 3 Kanten dieser Ebene.

Unter Anwendung der gemischten stereometrischen Producte (worin das Product zweier Punkte der verbindenden Geraden, das Product einer Geraden und einer Ebene dem Durchschnittpunkte congruent ist), können wir jene drei Durchschnittspunkte mit den Ausdrücken bezeichnen:

$$(X P_1 a),\ (X P_2 b),\ (X P_3 c).$$

Da diese 3 Punkte mit P_4 in derselben Ebene liegen sollen, so ist das combinatorische Product der 4 Punkte Null, d. h.

$$(14)\quad (X P_1 a)(X P_2 b)(X P_3 c) P_4 = 0.$$

Dies ist die allgemeine stereometrische Gleichung der Flächen 3. Grades. Die linke Seite ist ein stereometrisches Product 0. Stufe, weil die Summe der Stufenzahlen der Factoren, 16, durch 4 theilbar ist.

Wir wollen nun durch Bestimmung der 7 Constanten diese Gleichung in die oben aufgestellte (7) überführen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$(15)\quad \begin{aligned} X &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4. \\ P_1 &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4. \\ P_2 &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4. \\ P_3 &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + c_4 e_4. \\ P_4 &= d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3 + d_4 e_4. \end{aligned}$$

*) Vgl. Salmon a. a. O. No. 291 in der 2. Anmerkung.

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
a &= A_4\,(e_1\,e_2\,e_3) + A_1\,(e_2\,e_3\,e_4) + A_2\,(e_3\,e_4\,e_1) + A_3\,(e_4\,e_1\,e_2)\\
b &= B_4\,(e_1\,e_2\,e_2) + B_1\,(e_2\,e_3\,e_4) + B_2\,(e_3\,e_4\,e_1) + B_3\,(e_4\,e_1\,e_2)\\
c &= C_4\,(e_1\,e_2\,e_3) + C_1\,(e_2\,e_3\,e_4) + C_2\,(e_3\,e_4\,e_1) + C_3\,(e_4\,e_1\,e_2)
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$
(17)\quad
\begin{aligned}
(X\,P_1) = {}& (e_1\,e_2)\,(\alpha_1\,a_2 - \alpha_2\,a_1) + (e_2\,e_3)\,(\alpha_2\,a_3 - \alpha_3\,a_2)\\
&+ (e_3\,e_4)\,(\alpha_3\,a_4 - \alpha_4\,a_3) + (e_4\,e_1)\,(\alpha_4\,a_1 - \alpha_1\,a_4)\\
&+ (e_1\,e_3)\,(\alpha_1\,a_3 - \alpha_3\,a_1) + (e_2\,e_4)\,(\alpha_2\,a_4 - \alpha_4\,a_2).
\end{aligned}
$$

Aus diesem Ausdruck erhält man die entsprechenden Ausdrücke für $(X\,P_2)$ und $(X\,P_3)$, wenn man statt der Buchstaben a die Buchstaben b, resp. c setzt.

Bei der Multiplication mit a ist nun zu beachten, dass nach den Regeln der stereometrischen Multiplication $(e_1\,e_2\,e_3\,e_4) = 1$ ist. Bringt man in jedem Gliede durch Vertauschung der Factoren (nach der Regel $e_m\,e_n = -\,e_n\,e_m$) dieses Product an die erste Stelle, und setzt

$$
(18)\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= +\,A_2\,(\alpha_1\,a_2 - \alpha_2\,a_1) - A_3\,(\alpha_1\,a_3 - \alpha_3\,a_1) + A_4\,(\alpha_1\,a_4 - \alpha_4\,a_1)\\
\mathfrak{A}_2 &= -\,A_3\,(\alpha_2\,a_3 - \alpha_3\,a_2) + A_4\,(\alpha_2\,a_4 - \alpha_4\,a_2) - A_1\,(\alpha_2\,a_1 - \alpha_1\,a_2)\\
\mathfrak{A}_3 &= +\,A_4\,(\alpha_3\,a_4 - \alpha_4\,a_3) - A_1\,(\alpha_3\,a_1 - \alpha_1\,a_3) + A_2\,(\alpha_3\,a_2 - \alpha_2\,a_3)\\
\mathfrak{A}_4 &= -\,A_1\,(\alpha_4\,a_1 - \alpha_1\,a_4) + A_2\,(\alpha_4\,a_2 - \alpha_2\,a_4) - A_3\,(\alpha_4\,a_3 - \alpha_3\,a_4)
\end{aligned}
$$

ferner $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$, und $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4$ gleich denselben Werthen mit Verwandlung der a und A in b und B, resp. c und C, so findet sich:

$$
(19)\quad
\begin{aligned}
(X\,P_1\,a) &= \mathfrak{A}_1\,e_1 + \mathfrak{A}_2\,e_2 + \mathfrak{A}_3\,e_3 + \mathfrak{A}_4\,e_4\\
(X\,P_2\,b) &= \mathfrak{B}_1\,e_1 + \mathfrak{B}_2\,e_2 + \mathfrak{B}_3\,e_3 + \mathfrak{B}_4\,e_4\\
(X\,P_3\,c) &= \mathfrak{C}_1\,e_1 + \mathfrak{C}_2\,e_2 + \mathfrak{C}_3\,e_3 + \mathfrak{C}_4\,e_4.
\end{aligned}
$$

Wenn man nun aus diesen 3 Grössen und P_4 das oben erwähnte stereometrische Product bilden wollte, so würde man, wie leicht ersichtlich, nach Weglassung des gemeinsamen Factors $(e_1\,e_2\,e_3\,e_4)$ eine homogene Gleichung dritten Grades in $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ erhalten, die alle durch die Grassmann'sche Erzeugungsart ableitbaren Flächen 3. Ordnung enthalten würde.

In den Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, d ausgedrückt lautet diese Gleichung:

$$
(20)\quad
\left.
\begin{aligned}
&+\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_3\,d_4 - \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{C}_4\,d_1 + \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{C}_1\,d_2 - \mathfrak{A}_4\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_2\,d_3\\
&-\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_4\,d_3 + \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{C}_1\,d_4 - \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{C}_2\,d_1 + \mathfrak{A}_4\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_3\,d_2\\
&-\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{C}_2\,d_4 + \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{C}_3\,d_1 - \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_4\,d_2 + \mathfrak{A}_4\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_1\,d_3\\
&+\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{C}_4\,d_2 - \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{C}_1\,d_3 + \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_2\,d_4 - \mathfrak{A}_4\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_3\,d_1\\
&+\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{C}_2\,d_3 - \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_3\,d_4 + \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_4\,d_1 - \mathfrak{A}_4\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{C}_1\,d_2\\
&-\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{C}_3\,d_2 + \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_4\,d_3 - \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_1\,d_4 + \mathfrak{A}_4\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{C}_2\,d_1
\end{aligned}
\right\} = 0.
$$

Wir gehen indess sogleich zur Bestimmung der Constanten über, unter Benutzung der bereits bekannten Eigenschaften der Fläche.

Dieselbe soll **erstens** durch die Punkte e_1, e_2, e_3, e_4 gehen. Mithin muss ihre Gleichung befriedigt werden, wenn man je drei der Zahlencoordinaten gleich Null setzt.

Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, und $\alpha_4 = 1$ ist

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= -\,A_4\,a_1\\
\mathfrak{A}_2 &= -\,A_4\,a_2\\
\mathfrak{A}_3 &= -\,A_4\,a_3\\
\mathfrak{A}_4 &= -\,(A_1\,a_1 - A_2\,a_2 + A_3\,a_3).
\end{aligned}
$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich durch die bekannte Vertauschung für die $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Setzen wir nun

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
s_1 &= (+ b_3 c_2 d_1 - b_3 c_1 d_2 + b_1 c_3 d_2 - b_1 c_2 d_3 + b_2 c_1 d_3 - b_2 c_3 d_1) \\
s_2 &= (- a_3 c_2 d_1 + a_3 c_1 d_2 - a_1 c_3 d_2 + a_1 c_2 d_3 - a_2 c_1 d_3 + a_2 c_3 d_1) \\
s_3 &= (+ a_3 b_2 d_1 - a_3 b_1 d_2 + a_1 b_3 d_2 - a_1 b_2 d_3 + a_2 b_1 d_3 - a_2 b_3 d_1) \\
s_4 &= (- a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1)
\end{aligned}
$$

so geht die Gleichung der Fläche über in

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
&- d_4 \,.\, A_4 B_4 C_4 \,.\, s_4 \\
&- (A_1 a_1 - A_2 a_2 + A_3 a_3)\, s_1 - (B_1 b_1 - B_2 b_2 + B_3 b_3)\, s_2 \\
&\qquad - (C_1 c_1 - C_2 c_2 + C_3 c_3)\, s_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Durch circuläre Vertauschung der Indicas an den Grössen A, B, C, a, b, c, d, erhält man aus dieser Gleichung drei neue, welche ausdrücken, dass die Fläche auch durch die Punkte e_1, e_2, e_3 geht.

Alle vier Gleichungen werden gleichzeitig befriedigt durch die Substitutionen:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
A_4 &= B_4 = C_4 = 0 \\
A_2 &= C_2 = 0 \\
B_3 &= A_3 = 0 \\
C_1 &= B_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (16) lehren, dass in diesem Falle

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
a &\equiv e_2\, e_3\, e_4 \\
b &\equiv e_3\, e_4\, e_1 \\
c &\equiv e_4\, e_1\, e_2.
\end{aligned}
$$

Ausserdem können wir $A_1 = (- B_2) = C_3 = 1$ setzen.

Die Formeln (18) vereinfachen sich nunmehr wie folgt:

$$
(26)\qquad
\begin{array}{lll}
\mathfrak{A}_1 = 0 & \mathfrak{B}_1 = (\alpha_2\, b_1 - \alpha_1\, b_2) & \mathfrak{C}_1 = (\alpha_3\, c_1 - \alpha_1\, c_3) \\
\mathfrak{A}_2 = (\alpha_1\, a_2 - \alpha_2\, a_1) & \mathfrak{B}_2 = 0 & \mathfrak{C}_2 = (\alpha_3\, c_2 - \alpha_2\, c_3) \\
\mathfrak{A}_3 = (\alpha_1\, a_3 - \alpha_3\, a_1) & \mathfrak{B}_3 = (\alpha_2\, b_3 - \alpha_3\, b_2) & \mathfrak{C}_3 = 0 \\
\mathfrak{A}_4 = (\alpha_1\, a_4 - \alpha_4\, a_1) & \mathfrak{B}_4 = (\alpha_2\, b_4 - \alpha_4\, b_2) & \mathfrak{C}_4 = (\alpha_3\, c_4 - \alpha_4\, c_3).
\end{array}
$$

Und in der Gleichung (20) verschwinden die 13 Glieder, welche die Grössen $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_2\ \mathfrak{C}_3$ enthalten.

Sie lautet jetzt:

$$
(27)\qquad
\left.
\begin{aligned}
&- \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{C}_4 d_1 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_4 \mathfrak{C}_1 d_2 - \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_2 d_3 \\
&+ \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{C}_1 d_4 - \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_4 \mathfrak{C}_2 d_1 - \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{C}_1 d_2 \\
&- \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_4 \mathfrak{C}_1 d_3 - \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_4 d_2 + \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{C}_2 d_1 \\
&+ \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_4 d_3 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_2 d_4.
\end{aligned}
\right\} = 0
$$

Die Fläche soll zweitens durch die 6 Kanten des Tetraeders gehen.

Für diese 6 Fälle lassen sich die Werthe der Grössen $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ in folgender Weise zusammenstellen:

(28)

	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}^3$	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{B}^3$	$\mathfrak{B}_4$	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{C}_4$	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_2$
α_1, α_2	0	$-\alpha^3 a_1$	$-\alpha_4 a_1$	$-\alpha^3 b_2$	$-\alpha_4 b_2$	0	$\alpha^3 c_4 - \alpha_4 c^3$	$\alpha^3 c_1$	$\alpha^3 c_2$
α_2, α^3	$\alpha_1 a_2$	$\alpha_1 a^3$	$\alpha_1 a_4 - \alpha_4 a_1$	0	$-\alpha_4 b_2$	$-\alpha_1 b_2$	$-\alpha_4 c^3$	$-\alpha_1 c^3$	0
α^3, α_1	$-\alpha_2 a_1$	0	$-\alpha_4 a_1$	$\alpha_2 b^3$	$\alpha_2 b_4 - \alpha_4 b_2$	$\alpha_2 b_1$	$-\alpha_4 c^3$	0	$-\alpha_2 c^3$
α_1, α_4	$-\alpha_2 a_1$	$-\alpha^3 a_1$	0	$\alpha_2 b^3 - \alpha^3 b_2$	$\alpha_2 b_4$	$\alpha_2 b_1$	$\alpha^3 c_4$	$\alpha^3 c_1$	$\alpha^3 c_2 - \alpha_2 c^3$
α_2, α_4	$\alpha_1 a_2$	$\alpha_1 a^3 - \alpha^3 a_1$	$\alpha_1 a_4$	$-\alpha^3 b_2$	0	$-\alpha_1 b_2$	$\alpha^3 c_4$	$\alpha^3 c_1 - \alpha_1 c^3$	$\alpha^3 c_2$
α^3, α_4	$\alpha_1 a_2 - a_2 a_1$	$\alpha_1 a^3$	$\alpha_1 a_4$	$\alpha_2 b^3$	$\alpha_2 b_4$	$\alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_2$	0	$-\alpha_1 c^3$	$-\alpha_2 c^3$

Substituirt man der Reihe nach die drei ersten dieser Werthgruppen in Gleichung (27) so reducirt sich dieselbe jedesmal auf 4 Glieder, deren Summe Null ist, wird also ohne weiteres dadurch befriedigt.

Substituirt man dagegen die 3 letzten Gruppen, so nimmt die Gleichung (27) folgende Formen an:

(29)
$$\begin{aligned}
&\alpha^3 \Big[b_2 (c_1 d_4 - c_4 d_1) + c_2 (d_1 b_4 - d_4 b_1) + d_2 (b_1 c_4 - b_4 c_1) \Big] \\
= \; &\alpha_2 \Big[b^3 (c_1 d_4 - c_4 d_1) + c^3 (d_1 b_4 - d_4 b_1) + d^3 (b_1 c_4 - b_4 c_1) \Big] \\
&\alpha_1 \Big[c^3 (a_2 d_4 - a_4 d_2) + a^3 (d_2 c_4 - d_4 c_2) + d^3 (c_2 a_4 - c_4 a_2) \Big] \\
= \; &\alpha^3 \Big[c_1 (a_2 d_4 - a_4 d_2) + a_1 (d_2 c_4 - d_4 c_2) + d_1 (c_2 a_4 - a_4 c_2) \Big] \\
&\alpha_2 \Big[a_1 (b^3 d_4 - b_4 d_3) + b_1 (d^3 a_4 - d_4 a_3) + d_1 (a^3 b_4 - a_4 b_3) \Big] \\
= \; &\alpha_1 \Big[a_2 (b^3 d_4 - b_4 d_3) + b_2 (d^3 a_4 - d_4 a_3) + d_2 (a^3 b_4 - a_4 b^3) \Big]
\end{aligned}$$

Alle drei Gleichungen werden befriedigt durch das System:

(30)
$$\frac{d_4}{d^3} = \frac{b_4}{b^3} = \frac{a_4}{a_3} \; ; \quad \frac{d_4}{d_1} = \frac{c_4}{c_1} = \frac{b_4}{b_1} \; ; \quad \frac{d_4}{d_2} = \frac{a_4}{a_2} = \frac{c_4}{c_2}$$

Drittens soll die Fläche durch die Geraden gehen:

$$\begin{aligned}
(11)\;\; &a)\; g\,\alpha_2 + f\,\alpha^3 = 0 \;\; ; \;\; h\,\alpha_1 + e\,\alpha_4 = 0; \\
&b)\; e\,\alpha^3 + g\,\alpha_1 = 0 \;\; ; \;\; h\,\alpha_2 + f\,\alpha_4 = 0; \\
&c)\; f\,\alpha_1 + e\,\alpha_2 = 0 \;\; ; \;\; h\,\alpha^3 + g\,\alpha_4 = 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir der Reihe nach:

$$\text{(31)} \quad \begin{aligned} &a)\ \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{C}_2 = g\,\alpha_2 + f\,\alpha_3 = 0;\\ &b)\ \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_3 = e\,\alpha_3 + g\,\alpha_1 = 0;\\ &c)\ \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 = f\,\alpha_1 + e\,\alpha_2 = 0;\end{aligned}$$

also:

$$\text{(32)} \quad \begin{aligned} e &= -a_1 = +b_1 = +c_1\\ f &= +a_2 = -b_2 = +c_2\\ g &= +a_3 = +b_3 = -c_3\end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_4 = e\,\alpha_4 + a_4\,\alpha_1 \quad \mathfrak{B}_4 = f\,\alpha_4 + b_4\,\alpha_2 \quad \mathfrak{C}_4 = g\,\alpha_4 + c_4\,\alpha_3$$

so sollen durch Substitution dieser Werthe in Gleichung (27) der Reihe nach die Gleichungen $h\,\alpha_1 + e\,\alpha_4 = 0$; $g\,\alpha_4 + h\,\alpha_3 = 0$; $h\,\alpha_2 + f\,\alpha_4 = 0$ übrig bleiben.

Die Gleichung der Fläche lautet nunmehr:

$$\text{(33)} \quad \begin{aligned} &a)\ (\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_4)\,(\mathfrak{A}_3\,d_2 - \mathfrak{A}_2\,d_3) = 0;\\ &b)\ (\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{C}_4\,\mathfrak{A}_2)\,(\mathfrak{B}_1\,d_3 - \mathfrak{B}_3\,d_1) = 0;\\ &c)\ (\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_4 - \mathfrak{A}_4\,\mathfrak{B}_3)\,(\mathfrak{C}_2\,d_1 - \mathfrak{C}_1\,d_2) = 0.\end{aligned}$$

Sie löst sich auf in die beiden Fälle:

$$\text{(34)} \quad \begin{aligned} &a)\ \mathfrak{B}_4\,\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_4\ ;\ \mathfrak{A}_3\,d_2 = \mathfrak{A}_2\,d_3;\\ &b)\ \mathfrak{C}_4\,\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{C}_2\,\mathfrak{A}_4\ ;\ \mathfrak{B}_1\,d_3 = \mathfrak{B}_3\,d_1;\\ &c)\ \mathfrak{A}_4\,\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_4\ ;\ \mathfrak{C}_2\,d_1 = \mathfrak{C}_1\,d_2.\end{aligned}$$

Der zweite Fall führt, mit Rücksicht auf (30), zu dem Resultate:

$$\text{(35)} \quad \begin{aligned} &a)\ f\,\alpha_3 - g\,\alpha_2 = 0;\\ &b)\ g\,\alpha_1 - e\,\alpha_3 = 0;\\ &c)\ e\,\alpha_2 - f\,\alpha_1 = 0,\end{aligned}$$

wodurch im Verein mit (31) die drei Kanten $e_1\,e_4$, $e_2\,e_4$, $e_3\,e_4$ bestimmt werden.

Der erste Fall führt auf die Gleichungen:

$$\text{(36)} \quad \begin{aligned} &a)\ (b_4\,\alpha_1 - e\,\alpha_4)\,g\,\alpha_2 = f\,\alpha_3\,(c_4\,\alpha_1 - e\,\alpha_4)\\ &b)\ (c_4\,\alpha_2 - f\,\alpha_4)\,e\,\alpha_3 = g\,\alpha_1\,(a_4\,\alpha_2 - f\,\alpha_4)\\ &c)\ (a_4\,\alpha_3 - g\,\alpha_4)\,f\,\alpha_1 = h\,\alpha_2\,(b_4\,\alpha_3 - g\,\alpha_4).\end{aligned}$$

Alle drei werden befriedigt, wenn man setzt:

$$\text{(37)} \quad -h = a_4 = b_4 = c_4.$$

Sie gehen nämlich über in:

$$\text{(38)} \quad \begin{aligned} &a)\ (e\,\alpha_4 + h\,\alpha_1)\,(f\,\alpha_3 - g\,\alpha_2) = 0;\\ &b)\ (f\,\alpha_1 + h\,\alpha_2)\,(g\,\alpha_1 - e\,\alpha_3) = 0;\\ &c)\ (g\,\alpha_4 + h\,\alpha_3)\,(e\,\alpha_2 - f\,\alpha_1) = 0;\end{aligned}$$

und diese Gleichungen zerfallen, wie man sieht, in das System (35) und in das verlangte.

Die Gleichungen (32) und (37) zeigen, dass die 3 Punkte $P_1\ P_2\ P_3$ mit den Punkten (13) identisch sind.

Die Formeln (26) lauten nunmehr:

$$\text{(39)} \quad \begin{aligned} &\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{C}_2 = g\,\alpha_2 + f\,\alpha_3; &\quad \mathfrak{A}_4 = e\,\alpha_4 - h\,\alpha_1;\\ &\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_3 = e\,\alpha_3 + g\,\alpha_1; &\quad \mathfrak{B}_4 = f\,\alpha_4 - h\,\alpha_2;\\ &\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 = f\,\alpha_1 + e\,\alpha_2; &\quad \mathfrak{C}_4 = g\,\alpha_4 - h\,\alpha_3.\end{aligned}$$

Ferner geben die Formeln (30):

$$\text{(40)} \quad d_1 = e;\ d_2 = f;\ d_3 = g;\ d_4 = -h.$$

(41) Also ist: $P_4 = e\,e_1 + f\,e_2 + g\,e_3 - h\,e_4$.

Addirt man diesen Ausdruck zu den Gleichungen (13), so findet sich

$$h\,P_1 + P_4 = 2\,e\,e_1;\ h\,P_2 + P_4 = 2\,f\,e_2;\ h\,P_3 + P_4 = 2\,g\,e_3.$$

Also ist P_4 der Schnittpunkt der 3 Geraden $P_1 e_1$, $P_2 e_2$, $P_3 e_3$.

Nachdem auf diese Weise sämmtliche Constanten bestimmt sind, setzen wir die Werthe (39) und (40) in (27) ein, und erhalten:

$$\mathfrak{A}_4 \mathfrak{C}_2 (\mathfrak{C}_2 d_1 - \mathfrak{A}_3 d_2 - \mathfrak{B}_1 d_3) + \mathfrak{B}_4 \mathfrak{A}_3 (\mathfrak{A}_3 d_2 - \mathfrak{B}_1 d_3 - \mathfrak{C}_2 d_1)$$
$$+ \mathfrak{C}_4 \mathfrak{B}_1 (\mathfrak{B}_1 d_3 - \mathfrak{C}_2 d_1 - \mathfrak{A}_3 d_2) + 2 d_4 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_1 = 0$$

oder, da die Klammergrössen der Reihe nach gleich $-2fg\,\alpha_1$, $-2ge\,\alpha_2$, $-2ef\,\alpha_3$ sind:

$$(e\,\alpha_4 - h\,\alpha_1)(f\,\alpha_3 + g\,\alpha_2)\,fg\,\alpha_1 + (f\,\alpha_4 - h\,\alpha_2)(g\,\alpha_1 + e\,\alpha_3)\,ge\,\alpha_2$$
$$+ (g\,\alpha_4 - h\,\alpha_3)(e\,\alpha_2 + f\,\alpha_1)\,ef\,\alpha_3 + (f\,\alpha_3 + g\,\alpha_2)(g\,\alpha_1 + e\,\alpha_3)(e\,\alpha_2 + f\,\alpha_1)\,h = 0.$$

Nach Lösung der vorderen 3 und der letzten 3 Klammern bleibt:

$$efg\,\alpha_1\,\alpha_4 (f\,\alpha_3 + g\,\alpha_2) + fge\,\alpha_2\,\alpha_4 (g\,\alpha_1 + e\,\alpha_3) + gef\,\alpha_3\,\alpha_4 (e\,\alpha_2 + f\,\alpha_1)$$
$$+ 2efgh\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = 0,$$

(7) und endlich: $$e\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4 + f\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_1 + g\,\alpha_4\,\alpha_1\,\alpha_2 + h\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = 0;$$

wodurch die verlangte Gleichung hergestellt ist.

Das geometrische Resultat dieser Untersuchung lässt sich in folgenden Sätzen ausdrücken:

Wenn durch die Gegenkanten eines Tetraeders 3 Paar Ebenen so gelegt sind, dass jede Ebene mit den 2 durch dieselbe Kante gehenden Seitenebenen gleiche Winkel bildet wie die zugehörige Kante mit den andern Seitenebenen, so schneiden sich die 3 Paar Gegenebenen in drei Geraden, die in einer Ebene liegen und sich ihrerseits in 3 Punkten $P_1\ P_2\ P_3$ schneiden.

Die Geraden, welche diese 3 Punkte der Reihe nach mit den Grundecken des Tetraeders verbinden, schneiden sich in einem vierten Punkte P_4.

Wenn nun ein variables Tetraeder sich so bewegt, dass seine 4 Seiten durch die vier Punkte P gehen, während seine 3 Grundkanten auf den Seitenebenen des festen Tetraeders sich bewegen, so beschreibt seine Spitze eine Fläche 3. Ordnung, auf welcher die 6 Kanten des festen Tetraeders als vierfache Gerade, und die 3 Geraden $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_1$ als einfache Gerade liegen.

6. Mittelpunkte der Fläche f.

Wenn ein Punkt M Mittelpunkt zwischen den Punkten X und Y ist, so besteht zwischen seinen senkrechten Coordinatenstrecken m und jenen der Punkte X (x) und Y (y) folgende Beziehung:

(42) $$m_1 = \frac{x_1 + y_1}{2};\quad m_2 = \frac{x_2 + y_2}{2};\quad m_3 = \frac{x_3 + y_3}{2};\quad m_4 = \frac{x_4 + y_4}{2}.$$

(43) oder $$y_1 = 2\,m_1 - x_1;\ y_2 = 2\,m_2 - x_2;\ y_3 = 2\,m_3 - x_3;\ y_4 = 2\,m_4 - x_4.$$

Da Y auf der Fläche *f* liegen soll, so hat man nach (5)

(44) $$y_2\,y_3\,y_4 + y_3\,y_4\,y_1 + y_4\,y_1\,y_2 + y_1\,y_2\,y_3 = 0;$$ oder:

(45) $$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0,$$

wenn $$s_1 = 8\,m_2\,m_3\,m_4 - 4\,(m_2\,m_3\,x_4 + m_3\,m_4\,x_2 + m_4\,m_2\,x_3)$$
$$+ 2\,(m_2\,x_3\,x_4 + m_3\,x_4\,x_2 + m_4\,x_2\,x_3) - x_2\,x_3\,x_4,$$

und die anderen s durch circuläre Vertauschung der Indices daraus hervorgehen.

Da nun die Gleichung (45) für jeden Punkt Y, der auf der Fläche liegt, gelten soll, und die Lage des Punktes M von X und Y unabhängig sein muss, so müssen die Coefficienten der Grössen x und ihrer Producte verschwinden. Demnach zerfällt unter Berücksichtigung des Umstandes, dass auch $x_1\,x_2\,x_3 + x_2\,x_3\,x_4 + x_3\,x_4\,x_1 + x_4\,x_1\,x_2 = 0$ ist, die Gleichung (45) in folgende 3 Gruppen:

(46) $$m_1\,m_2\,m_3 + m_2\,m_3\,m_4 + m_3\,m_4\,m_1 + m_4\,m_1\,m_2 = 0.$$

(47)
a) $m_2\,m_3 + m_3\,m_4 + m_4\,m_2 = 0$; c) $m_4\,m_1 + m_1\,m_2 + m_2\,m_4 = 0$
b) $m_3\,m_4 + m_4\,m_1 + m_1\,m_3 = 0$; d) $m_1\,m_2 + m_2\,m_3 + m_3\,m_1 = 0$.

$$\text{(48)} \qquad \begin{array}{lll} m_1 + m_2 = 0 & m_3 + m_4 = 0 & m_1 + m_3 = 0 \\ m_2 + m_3 = 0 & m_4 + m_1 = 0 & m_2 + m_4 = 0. \end{array}$$

Nach (46) liegen alle Mittelpunkte auf der Fläche f selbst, was zu erwarten war, da jede Gerade die Fläche in 3 Punkten trifft, der Mittelpunkt aber sich nur auf 2 Punkte der Fläche bezieht. Nach den Gleichungen (47), deren linke Seiten sich mittelst der Formeln (3) auf die Ausdrücke (9) zurückführen lassen, liegen die Mittelpunkte auf den aus den Ecken des Tetraeders an die Fläche beschriebenen Tangentenkegeln, und nach (48) auf den Ebenen, welche die Aussenwinkel zu den Neigungswinkeln der Tetraederebenen halbiren.

Die Gleichungen (47) aber lassen sich durch die Vereinigungen a) — b); b) — c); c) — d); d) — a); a) + c); b) + d) zurückführen auf die Gruppen:

$$\text{(49)} \qquad \begin{array}{ll} (m_1 - m_2)(m_3 - m_4) = 0; & (m_4 - m_1)(m_2 - m_3) = 0; \\ (m_2 - m_3)(m_4 - m_1) = 0; & (m_1 - m_3)(m_2 - m_4) = 0; \\ (m_3 - m_4)(m_1 - m_2) = 0; & (m_4 - m_2)(m_1 - m_3) = 0. \end{array}$$

Diese Gleichungen lehren, dass die Mittelpunkte auch auf denjenigen 6 Ebenen liegen, welche die Neigungswinkel der Tetraederebenen halbiren.

Combiniren wir die 6 Ebenen (48) und die 6 Ebenen (49) zu zweien, so ergeben sich folgende Gruppen:

$$\text{(50)} \qquad \begin{array}{lll} m_1 \pm m_2 = 0; & m_3 \pm m_4 = 0. & \\ m_1 \pm m_3 = 0; & m_2 \pm m_4 = 0. & \\ m_1 \pm m_4 = 0; & m_2 \pm m_3 = 0. & \\ m_1 \pm m_2 = 0; & m_1 \pm m_3 = 0; & m_2 \pm m_3 = 0. \\ m_1 \pm m_2 = 0; & m_1 \pm m_4 = 0; & m_2 \pm m_4 = 0. \\ m_1 \pm m_3 = 0; & m_1 \pm m_4 = 0; & m_3 \pm m_4 = 0. \\ m_2 \pm m_3 = 0; & m_2 \pm m_4 = 0; & m_3 \pm m_4 = 0. \end{array}$$

Die vier letzten Gruppen haben die Eigenschaft, dass jede ihrer Gleichungen aus den beiden anderen folgt; daher repräsentirt jede dieser Gruppen nicht mehr verschiedene Fälle, als eine der ersten 3 Gruppen, nämlich 4 Gerade, da die Zeichen sich nicht auf einander beziehen. Im Ganzen also sind durch die Gleichungen (50) 28 Gerade dargestellt, auf denen die Mittelpunkte liegen.

Die 28 Combinationen (50) kommen auf folgende Weise zu Stande:

Die Gleichungen (48) untereinander geben 15 Combinationen.
„ „ (49) „ „ 15 „
„ „ (48) und (49) „ 30 „

Von diesen 60 Combinationen gehen nach der obigen Bemerkung 32 ab, die aus 16 anderen folgen; es bleiben also 28. Die drei ersten Gruppen in (50) sagen aus, dass je 2, die 4 letzten, dass je 3 Ebenen sich in e i n e r Geraden schneiden.

Die Gruppen (50) lassen sich nun, wie folgt, zusammenfassen:

$$\text{(51)} \qquad m_a \pm m_c = 0; \quad m_b \pm m_d = 0;$$

worin a, c, b, d die Werthe 1, 2, 3, 4 annehmen, und auch jedesmal eine der ersten beiden Grössen gleich einer der letzten beiden sein kann.

Setzen wir: $m_a + m_b = s_{ab}$; $m_a - m_b = d_{ab}$,

also: $m_a = \frac{s_{ab} + d_{ab}}{2}$; $m_b = \frac{s_{ab} - d_{ab}}{2}$;
(52)
so folgt: $m_c = \pm \frac{s_{ab} + d_{ab}}{2}$; $m_d = \pm \frac{s_{ab} - d_{ab}}{2}$;

d. h. der Punkt M liegt in der Mitte zwischen 2 Punkten S und D, deren jeder durch vier gleiche, nur dem Zeichen nach verschiedene Coordinaten bestimmt wird.

Demnach sind die 28 Mittelpunkte unserer Fläche die Mittelpunkte derjenigen 28 Linien, welche je 2 Centra der 8 Berührungskugeln des Tetraeders mit einander verbinden.

7. Die Umhüllungsfläche F der Fusspunkt-Ebene.

Ein Punkt X der Fläche f sei durch die Gleichung bestimmt:

(1) $$X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4.$$

Da $e_1 e_2 e_3 e_4 = 1$, so sind $(e_2 e_3 e_4)$, $(- e_3 e_4 e_1)$, $(e_4 e_1 e_2)$, $(- e_1 e_2 e_3)$ die resp. Ergänzungen von e_1, e_2, e_3, e_4, was ausgedrückt wird durch die Formeln:

(53) $$(e_2 e_3 e_4) = | e_1; \quad (- e_3 e_4 e_1) = | e_2; \quad (e_4 e_1 e_2) = | e_3; \quad (- e_1 e_2 e_3) = | e_4.$$

Die Tangentialebene t im Punkte X ist nun

(54) $$t = \frac{df}{d\alpha_1} | e_1 + \frac{df}{d\alpha_2} | e_2 + \frac{df}{d\alpha_3} | e_3 + \frac{df}{d\alpha_4} | e_4.$$

Da X auf t liegt, so ist das combinatorische Product dieser beiden Grössen Null. Wenn wir dieses Product bilden, so erscheinen rechts die Grössen e durch i n n e r e Multiplication verbunden, und nach den Gesetzen derselben:

(55) $$e_r \,|\, e_r = 1; \quad e_r \,|\, e_s = e_s \,|\, e_r = 0,$$

erhalten wir:

(56) $$X t = \alpha_1 \frac{df}{d\alpha_1} + \alpha_2 \frac{df}{d\alpha_2} + \alpha_3 \frac{df}{d\alpha_3} + \alpha_4 \frac{df}{d\alpha_4} = 0.$$

Sei (57) $$\frac{df}{d\alpha_1} = \beta_1; \quad \frac{df}{d\alpha_2} = \beta_2; \quad \frac{df}{d\alpha_3} = \beta_3; \quad \frac{df}{d\alpha_4} = \beta_4;$$

dann geht (56) über in

(58) $$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4 = 0.$$

Dies ist die Zahlengleichung einer Ebene.

Setzt man darin für die Zahlen α der Reihe nach die Zahlencoordinaten der 4 Punkte X_1 X_2 X_3 X_4, nämlich nach (1) und (3):

(59) $$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 \left((1 + \sin \vartheta_{1x}) e_1 - \sin \vartheta_{1x} e_x\right) + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 \\ X_2 &= \alpha_2 \left((1 + \sin \vartheta_{2y}) e_2 - \sin \vartheta_{2y} e_y\right) + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1 \\ X_3 &= \alpha_3 \left((1 + \sin \vartheta_{3z}) e_3 - \sin \vartheta_{3z} e_z\right) + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ X_4 &= \alpha_4 \left((1 + \sin \vartheta_{4p}) e_4 - \sin \vartheta_{4p} e_p\right) + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \end{aligned}$$

worin $x = 2, 3, 4$; $y = 3, 4, 1$; $z = 4, 1, 2$; $p = 1, 2, 3$,

so resultiren vier Gleichungen zwischen den Grössen α und β.

Durch Elimination der Grössen β erhält man wieder die Gleichung der Fläche f, welche den Ort des Punktes X ausdrückt; durch Elimination der Grössen α hingegen die Gleichung einer Fläche F, welche den Ort der Ebenen t ausdrückt, insofern jede Ebene t die Fläche f in einem Punkte berührt.

Die Ebene (58) erscheint daher, wenn man im zweiten Falle die Grössen β durch die laufenden Coordinaten B ersetzt, als Tangential-Ebene zur Fläche F und als Fusspunktebene zur Fläche f; im ersten Falle, wenn man die Grössen α durch die laufenden Coordinaten A ersetzt, als Tangentialebene zur Fläche f, und als Fusspunktebene zur Fläche F. — Letztere Fusspunkt-Ebene wird nur die Fusspunkte dreier Normalen aus einem Punkt der Fläche auf die Tetraeder-Ebenen enthalten.

Die oben erwähnten Eliminationen vereinfachen sich, wenn man aus (10) und (57) die Werthe der Grössen β nimmt. Es findet sich:

(60) $$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \beta_4 = \frac{df}{d\alpha_1} : \frac{df}{d\alpha_2} : \frac{df}{d\alpha_3} : \frac{df}{d\alpha_4} = \frac{e}{\alpha_1^2} : \frac{f}{\alpha_2^2} : \frac{g}{\alpha_3^2} : \frac{h}{\alpha_4^2}.$$

Jenachdem man zwischen den Gleichungen (58) und (60) die Grössen β oder α eliminirt, erhält man die Zahlengleichungen der Fläche f oder der Fläche F.

Zur Ausführung der letzteren Operation nehmen wir aus (60) die Werthe:

(61) $$\alpha_1^2 = \frac{\beta_4}{\beta_1} \cdot \frac{e}{h}\, \alpha_4^2\;;\; \alpha_2^2 = \frac{\beta_4}{\beta_2} \cdot \frac{f}{h}\, \alpha_4^2\;;\; \alpha_3^2 = \frac{\beta_4}{\beta_3} \cdot \frac{g}{h}\, \alpha_4^2.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht (58) über in:

(62) $$\alpha_4 \sqrt{\frac{\beta_4}{h}} \left[\sqrt{e\,\beta_1} + \sqrt{f\,\beta_2} + \sqrt{g\,\beta_3} + \sqrt{h\,\beta_4}\right] = 0.^{*)}$$

Diese Gleichung spaltet sich in die beiden folgenden:

(63) $$\begin{cases} \beta_4 = 0. \\ \sqrt{e\,\beta_1} + \sqrt{f\,\beta_2} + \sqrt{g\,\beta_3} = -\sqrt{h\,\beta_4}. \end{cases}$$

Die erste derselben sagt aus, dass die Fusspunkte der aus X auf e_1 e_2 e_3 gefällten Normalen stets in dieser Ebene liegen. Diese ist also, als Fusspunktebene betrachtet, constant und steht in gleichem Range mit der Fläche F, weil sie mit der Fläche, die sie einhüllen soll, identisch ist.

Die zweite Gleichung giebt den Ort derjenigen Ebene an, welche durch die Fusspunkte der drei übrigen Normalen aus X bestimmt ist.

Durch Quadrirung geht diese Gleichung über in:

(64) $$e\,\beta_1 + f\,\beta_2 + g\,\beta_3 - h\,\beta_4 = 2\sqrt{e f\,\beta_1 \beta_2} + 2\sqrt{f g\,\beta_2 \beta_3} + 2\sqrt{g e\,\beta_3 \beta_1}.$$

Beachten wir nun, dass ein Punkt Y der Fläche F durch die Gleichung gegeben ist:

(65) $$Y = \beta_1\, e_1 + \beta_2\, e_2 + \beta_3\, e_3 + \beta_4\, e_4.$$

Zur Vereinfachung wollen wir die Fläche F auf ein neues Tetraeder ε_1 ε_2 ε_3 ε_4 beziehen. Zu diesem Zwecke setzen wir

(66) $$\beta_1 = \lambda_1\, \gamma_1\;;\; \beta_2 = \lambda_2\, \gamma_2\;;\; \beta_3 = \lambda_3\, \gamma_3\;;\; \beta_4 = \lambda_4\, \gamma_4\;;$$

und (67) $$\begin{aligned} Y = {} & \gamma_1 \left(\lambda_1\, e_1 - \frac{e}{h}\, e_4\right) + \gamma_2 \left(\lambda_2\, e_2 - \frac{f}{h}\, e_4\right) + \gamma_3 \left(\lambda_3\, e_3 - \frac{g}{h}\, e_4\right) \\ & + \gamma_4 \left[\frac{e\,\gamma_1 + f\,\gamma_2 + g\,\gamma_3 - h\,\gamma_4}{h\,\gamma_4} + (1 + \lambda_4)\right] e_4. \end{aligned}$$

---

*) Auch aus (7a) ergiebt sich natürlich (63) durch die Substitutionen (61).

Ferner:

$$(68)\quad \begin{cases} e\,\gamma_1 + f\,\gamma_2 + g\,\gamma_3 - h\,\gamma_4 = 0. \\ \varepsilon_1 = \lambda_1\,e_1 - \dfrac{e}{h}\,e_4;\ \varepsilon_2 = \lambda_2\,e_2 - \dfrac{f}{h}\,e_4; \\ \varepsilon_3 = \lambda_3\,e_3 - \dfrac{g}{h}\,e_4;\ \varepsilon_4 = (1 + \lambda_4)\,e_4. \end{cases}$$

Hierdurch geht (67) über in

$$(69)\quad Y = \gamma_1\,\varepsilon_1 + \gamma_2\,\varepsilon_2 + \gamma_3\,\varepsilon_3 + \gamma_4\,\varepsilon_4.$$

Die Grössen $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ werden nun am Einfachsten durch die Bedingung bestimmt, dass $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4$ nicht Punkte, sondern Strecken sein sollen. Dann muss

$$(70)\quad \lambda_1 - \frac{e}{h} = \lambda_2 - \frac{f}{h} = \lambda_3 - \frac{g}{h} = 0,$$

also (71)

$$\lambda_1 = \frac{e}{h}\,;\ \lambda_2 = \frac{f}{h}\,;\ \lambda_3 = \frac{g}{h}$$

sein; dann ist

$$(72)\quad \varepsilon_1 = \frac{e}{h}\,(e_1 - e_4)\,;\ \varepsilon_2 = \frac{f}{h}\,(e_2 - e_4)\,;\ \varepsilon_3 = \frac{g}{h}\,(e_3 - e_4).$$

Das Product $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4$ ist nun gleich dem Parallelepipedon der 3 Strecken $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$.

Also

$$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4 = \frac{efg}{h^3}\,(1 + \lambda_4)\,e_1\ e_2\ e_3\ e_4 = \frac{efg}{h^3}\,(1 + \lambda_4),$$

und da das Product der 4 Einheiten gleich 1 sein soll, so resultirt für λ_4 die Bedingungsgleichung:

$$\frac{efg}{h^3}\,(1 + \lambda_4) = 1;$$

oder (73)

$$\lambda_4 = \frac{h^3}{efg} - 1.$$

Die Gleichung (64) geht nunmehr, auf das neue Tetraeder bezogen, über in:

$$(74)\quad \sqrt{e\,f\,\gamma_1\,\gamma_2} + \sqrt{f\,g\,\gamma_2\,\gamma_3} + \sqrt{g\,e\,\gamma_3\,\gamma_1} = 0.$$

Setzen wir noch $e\,\gamma_1 = \Gamma_1\,;\ f\,\gamma_2 = \Gamma_2\,;\ g\,\gamma_2 = \Gamma_3\,;\ h\,\gamma_4 = \Gamma_4;$

so erhalten wir nach zweimaliger Quadrirung:

$$(75)\quad \Gamma_1^2\,\Gamma_2^2 + \Gamma_2^2\,\Gamma_3^2 + \Gamma_3^2\,\Gamma_1^2 - 2\,\Gamma_1\,\Gamma_2\,\Gamma_3\,\Gamma_4 = 0.$$

Die Umhüllungsfläche ist also eine Fläche 4. Klasse.

8. *Andere Form für die Gleichung der Umhüllungsfläche.*

Wir gingen vorhin aus von der Tangentialebene der Fläche f in Punkte X, und fanden

$$(54)\quad t = \beta_1\,|\,e_1 + \beta_2\,|\,e_2 + \beta_3\,|\,e_3 + \beta_4\,|\,e_4.$$

Dem entsprechend muss die Tangentialebene der Fläche F im Punkte Y, oder, was dasselbe ist, die Fusspunktebene der Fläche f zum Punkte X folgendem Ausdruck entsprechen:

$$(76)\quad p = \alpha_1\,|\,e_1 + \alpha_2\,|\,e_2 + \alpha_3\,|\,e_3 + \alpha_4\,|\,e_4.$$

Während nun die oben aufgestellte Gleichung der Fläche F aus der Tangentialebene t abgeleitet war, kann sie auch durch die Fusspunktebene p bestimmt werden. Die Coordinaten α, in denen diese neue Gleichung ausgedrückt sein wird, bestimmen dann nicht mehr den Ort des Punktes Y, sondern den seiner Tangentialebene.

Wir beachten zunächst, dass die Entfernungen der Punkte X_1 X_2 X_3 X_4 von den 4 Tetraederebenen durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

(77)

	e_2 e_3 e_4	e_3 e_4 e_1	e_4 e_1 e_2	e_1 e_2 e_3
X_1	0	$x_2 + x_1 \cos\varphi_{12}$	$x_3 + x_1 \cos\varphi_{13}$	$x_4 + x_1 \cos\varphi_{14}$
X_2	$x_1 + x_2 \cos\varphi_{21}$	0	$x_3 + x_2 \cos\varphi_{23}$	$x_4 + x_2 \cos\varphi_{24}$
X_3	$x_1 + x_3 \cos\varphi_{31}$	$x_2 + x_3 \cos\varphi_{32}$	0	$x_4 + x_3 \cos\varphi_{34}$
X_4	$x_1 + x_4 \cos\varphi_{41}$	$x_2 + x_4 \cos\varphi_{42}$	$x_3 + x_4 \cos\varphi_{43}$	0

worin z. B. φ_{12} den Neigungswinkel der Ebenen e_1 e_3 e_4 und e_2 e_3 e_4 bezeichnet.

Da nun nach (3) die Entfernungen eines Punktes von den Tetraederebenen, dem Zahlenwerthe nach wie seine durch resp. e, f, g, h, dividirten Zahlencoordinaten sich verhalten, so sind die Punkte X_1 X_2 X_3 X_4 durch folgende Ausdrücke darstellbar:

(78)
$$\begin{aligned}
X_1 &= (x_2 + x_1 \cos\varphi_{12})\, f\, e_2 + (x_3 + x_1 \cos\varphi_{13})\, g\, e_3 + (x_4 + x_1 \cos\varphi_{14})\, h\, e_4;\\
X_2 &= (x_3 + x_2 \cos\varphi_{23})\, g\, e_3 + (x_4 + x_2 \cos\varphi_{24})\, h\, e_4 + (x_1 + x_2 \cos\varphi_{21})\, e\, e_1;\\
X_3 &= (x_4 + x_3 \cos\varphi_{34})\, h\, e_4 + (x_1 + x_3 \cos\varphi_{31})\, e\, e_1 + (x_2 + x_3 \cos\varphi_{32})\, f\, e_2;\\
X_4 &= (x_1 + x_4 \cos\varphi_{41})\, e\, e_1 + (x_2 + x_4 \cos\varphi_{42})\, f\, e_2 + (x_3 + x_4 \cos\varphi_{43})\, g\, e_3.
\end{aligned}$$

Da nun alle vier Punkte auf der Ebene p liegen sollen, so hat man:

$$X_1\, p = X_2\, p = X_3\, p = X_4\, p = 0,$$

oder, wenn man noch setzt:

$$\begin{gathered}
e\,\alpha_1 = A_1;\ f\,\alpha_2 = A_2;\ g\,\alpha_3 = A_3;\ h\,\alpha_4 = A_4;\\
A_2 \cos\varphi_{12} + A_3 \cos\varphi_{13} + A_4 \cos\varphi_{14} = A'_1;\\
A_3 \cos\varphi_{23} + A_4 \cos\varphi_{24} + A_1 \cos\varphi_{21} = A'_2;\\
A_4 \cos\varphi_{34} + A_1 \cos\varphi_{31} + A_2 \cos\varphi_{32} = A'_4;\\
A_1 \cos\varphi_{41} + A_2 \cos\varphi_{42} + A_3 \cos\psi_{43} = A'_4;
\end{gathered}$$

(79)
$$\left\{\begin{aligned}
A'_1\, x_1 + A_2\, x_2 + A_3\, x_3 + A_4\, x_4 &= 0;\\
A'_2\, x_2 + A_3\, x_3 + A_4\, x_4 + A_1\, x_1 &= 0;\\
A'_3\, x_3 + A_4\, x_4 + A_1\, x_1 + A_2\, x_2 &= 0;\\
A'_4\, x_4 + A_1\, x_1 + A_2\, x_2 + A_3\, x_3 &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen, welche die Zahlengleichungen der vier Fusspunkte sind, sagen genau dasselbe aus, wie die Gleichungen (59). Setzt man in (79) die Coefficienten der Grössen x gleich Null, so sind $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ die sogenannten Punktgleichungen der Tetraederecken e_1 e_2 e_3 e_4, weil nach (58) diese Gleichungen die folgenden nach sich ziehen: $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$; $\beta_3 = \beta_4 = \beta_1 = 0$; $\beta_4 = \beta_1 = \beta_2 = 0$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Die Gleichungen $A'_1 = A'_2 = A'_3 = A'_4 = 0$ aber sind die Punktgleichungen für die Projectionen der Eckpunkte auf die gegenüberliegenden Tetraederebenen, und eben diese Punkte sind den Klammergrössen in (59) gleich.

Durch Subtraction je zweier auf einander folgenden Gleichungen in (79) erhält man weiter:

(80)
$$x_1\,(A_1 - A'_1) = x_2\,(A_2 - A'_2) = x_3\,(A_3 - A'_3) = x_4\,(A_4 - A'_4),$$

und durch Elimination der Grössen x zwischen diesem Systeme und der letzten Gleichung (79):

$$(81)\qquad \frac{A'_4}{A_4 - A'_4} + \frac{A_1}{A_1 - A'_1} + \frac{A_2}{A_2 - A'_2} + \frac{A_3}{A_3 - A'_3} = 0.$$

oder

$$(81)\qquad \left\{ \begin{array}{l} A'_4\,(A_1 - A'_1)\,(A_2 - A'_2)\,(A_3 - A'_3) + A_1\,(A_4 - A'_4)\,(A_2 - A'_2)\,(A_3 - A'_3) \\ + A_2\,(A_4 - A'_4)\,(A_3 - A'_3)\,(A_1 - A'_1) + A_3\,(A_4 - A'_4)\,(A_1 - A'_1)\,(A_2 - A'_2) = 0, \end{array} \right.$$

wodurch die verlangte Gleichung hergestellt ist.

Aus den Gleichungen (75) und (81) können nun die Eigenschaften der Umhüllungsfläche, namentlich die Beziehungen zwischen beiden Flächen mit Leichtigkeit abgeleitet werden.

9. Stereometrische Gleichung der Umhüllungsfläche.

Dem im Anfang von No. 5 ausgesprochenen Satze lässt sich ohne Schwierigkeit der folgende reciproke an die Seite stellen: Wenn die 4 Seitenebenen einer vierseitigen Pyramide durch feste Punkte gehen, während die vier Grundkanten auf festen Ebenen sich bewegen, so umhüllt die Grundebene eine Fläche vierter Klasse.

Denn sei p die Grundebene, $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ die vier festen Ebenen, und A B C D die vier festen Punkte; dann sind die Grundkanten den Producten (pp_1), (pp_2), (pp_3), (pp_4) congruent; die vier Seitenebenen den Producten $(pp_1\,A)$, $(pp_2\,B)$, $(pp_3\,C)$, $(pp_4\,D)$; und da diese vier Ebenen durch einen Punkt gehen sollen, so ist ihr combinatorisches Product Null; man hat also als stereometrische Gleichung der Fläche die Formel:

$$(82)\qquad (pp_1\,A)\,(pp_2\,B)\,(pp_3\,C)\,(pp_4\,D) = 0.$$

Das stereometrische Product auf der linken Seite ist von nullter Stufe, da die Summe seiner Stufenzahlen, 28, durch 4 theilbar ist, und stellt, da die variable Ebene p viermal als Factor darin enthalten ist, eine Fläche vierter Klasse dar.

Wenn p die Fusspunktebene von X, so sind $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ diejenigen von $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$, und A B C D sind die Ecken des Tetraeders, wie in (14) a b c drei Seitenflächen desselben waren. In der That lässt sich das Product (82) durch die betreffenden Substitutionen in die Zahlengleichung der Fläche F verwandeln.

Setzen wir:

$$(83)\qquad \begin{array}{ll} p = \alpha_1 \,|\, e_1 + \alpha_2 \,|\, e_2 + \alpha_3 \,|\, e_3 + \alpha_4 \,|\, e_4\ ; & A = e_1; \\ p_1 = + e \,|\, e_1 - f \,|\, e_2 - g \,|\, e_3 + h \,|\, e_4\ ; & B = e_2; \\ p_2 = - e \,|\, e_1 + f \,|\, e_2 - g \,|\, e_3 + h \,|\, e_4\ ; & C = e_3; \\ p_3 = - e \,|\, e_1 - f \,|\, e_2 + g \,|\, e_3 + h \,|\, e_4\ ; & D = e_4; \\ p_4 = + e \,|\, e_1 + f \,|\, e_2 + g \,|\, e_3 + h \,|\, e_4\ ; & \end{array}$$

ferner:

$$(84)\qquad \begin{array}{lll} e\,\alpha_2 + f\,\alpha_1 = \sigma_{12} & e\,\alpha_4 + h\,\alpha_1 = \sigma_{14} & e\,\alpha_4 - h\,\alpha_1 = \delta_{41} \\ f\,\alpha_3 + g\,\alpha_2 = \sigma_{23} & f\,\alpha_4 + h\,\alpha_2 = \sigma_{24} & f\,\alpha_4 - h\,\alpha_2 = \delta_{42} \\ g\,\alpha_1 + e\,\alpha_3 = \sigma_{31} & g\,\alpha_4 + h\,\alpha_3 = \sigma_{34} & g\,\alpha_4 - h\,\alpha_3 = \delta_{43} \end{array}$$

und beachten wir, dass $|\, e\alpha \,|\, e\beta = |\, e\alpha\, e\beta$,

so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} (pp_1\,A) = \sigma_{12}\,(\,|\,e_2\,e_1)\,.\,e_1 + \sigma_{13}\,(\,|\,e_3\,e_1)\,e_1 + \delta_{41}\,(\,|\,e_4\,e_1)\,e_1 \\ (pp_2\,B) = \sigma_{23}\,(\,|\,e_3\,e_2)\,.\,e_2 + \sigma_{21}\,(\,|\,e_1\,e_2)\,e_2 + \delta_{42}\,(\,|\,e_4\,e_2)\,e_2 \\ (pp_3\,C) = \sigma_{31}\,(\,|\,e_1\,e_3)\,.\,e_3 + \sigma_{32}\,(\,|\,e_2\,e_3)\,e_3 + \delta_{43}\,(\,|\,e_4\,e_3)\,e_3 \\ (pp_4\,D) = \sigma_{14}\,(\,|\,e_4\,e_1)\,.\,e_4 + \sigma_{24}\,(\,|\,e_4\,e_2)\,e_4 + \sigma_{34}\,(\,|\,e_4\,e_3)\,e_4 \end{array}$$

oder nachdem man die Zeichen | entfernt, und hernach wieder eingeführt hat:

$$(pp_1 A) = -\sigma_{12} \mid e_2 - \sigma_{13} \mid e_3 - \delta_{41} \mid e_4;$$
$$(pp_2 B) = -\sigma_{23} \mid e_3 - \sigma_{21} \mid e_1 - \delta_{42} \mid e_4;$$
$$(pp_3 C) = -\sigma_{31} \mid e_1 - \sigma_{32} \mid e_2 - \delta_{43} \mid e_4;$$
$$(pp_4 D) = +\sigma_{14} \mid e_1 + \sigma_{24} \mid e_2 + \sigma_{34} \mid e_3;$$

Indem wir nun diese 4 Gleichungen multipliciren, jedes Glied der neuen Gleichung auf den Factor $\mid e_1\, e_2\, e_3\, e_4$ bringen, der gleich 1 ist, und die linke Seite gleich Null setzen, erhalten wir die Gleichung:

$$(85)\quad \begin{aligned} &+\sigma_{41}\,\sigma_{12}\,\sigma_{23}\,\delta_{43} + \sigma_{42}\,\sigma_{23}\,\sigma_{31}\,\delta_{41} + \sigma_{43}\,\sigma_{31}\,\sigma_{12}\,\delta_{42} \\ &+\sigma_{42}\,\sigma_{21}\,\sigma_{31}\,\delta_{43} + \sigma_{43}\,\sigma_{32}\,\sigma_{21}\,\delta_{41} + \sigma_{41}\,\sigma_{13}\,\sigma_{32}\,\delta_{42} \\ &-\sigma_{12}^2\,\sigma_{34}\,\delta_{43} - \sigma_{23}^2\,\sigma_{14}\,\delta_{41} - \sigma_{31}^2\,\sigma_{24}\,\delta_{42} = 0. \end{aligned}$$

Diese lässt sich aber in folgender Zusammenfassung schreiben:

$$(86)\quad (\sigma_{12}\,\delta_{43} + \sigma_{23}\,\delta_{41} + \sigma_{31}\,\delta_{42})\,(\sigma_{43}\,\sigma_{12} + \sigma_{41}\,\sigma_{23} + \sigma_{42}\,\sigma_{31}) = 0$$

und nimmt, wenn wir die Grössen σ und δ durch ihre Werthe in α ersetzen, und

$$(87)\quad \begin{aligned} &f\,g\,\alpha_1\,\alpha_4 + g\,e\,\alpha_2\,\alpha_4 + e\,f\,\alpha_3\,\alpha_4 = \mathfrak{A}, \\ &e\,h\,\alpha_2\,\alpha_3 + f\,h\,\alpha_3\,\alpha_1 + g\,h\,\alpha_1\,\alpha_2 = \mathfrak{B} \end{aligned}$$

setzen, die Gestalt an:

$$(88)\quad (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 0;\ \text{oder}\ \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 = 0.$$

Dividiren wir nun die ganze Gleichung durch $e\,f\,g\,h$, und setzen wie in (66)

$$(89)\quad \frac{\alpha_1}{e} = \gamma_1;\ \frac{\alpha_2}{f} = \gamma_2;\ \frac{\alpha_3}{g} = \gamma_3;\ \frac{\alpha_4}{h} = \gamma_4,$$

dann geht (88) über in:

$$\begin{aligned}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)^2 \cdot \gamma_4^2 &= (\gamma_1\,\gamma_2 + \gamma_2\,\gamma_3 + \gamma_3\,\gamma_1)^2 \\ &= (\gamma_1^2\,\gamma_2^2 + \gamma_2^2\,\gamma_3^2 + \gamma_3^2\,\gamma_1^2 + 2\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3).\end{aligned}$$

Richten wir nun durch Aenderung des ursprünglichen Tetraeders, wie oben, die Sache so ein, dass $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = -\beta_4$ wird, so geht die Gleichung über in:

$$\beta_4^4 = \beta_1^2\,\beta_2^2 + \beta_2^2\,\beta_3^2 + \beta_3^2\,\beta_1^2 - 2\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4,$$

und diese lässt sich in die vierfach zählende Ebene

$$\beta_4 = 0$$

und die Fläche

$$\beta_1^2\,\beta_2^2 + \beta_2^2\,\beta_3^2 + \beta_3^2\,\beta_1^2 - 2\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4 = 0$$

zerlegen, die mit (75) identisch ist.

10. Reciprocität der Flächen f und F.

Zwischen den Flächen f und F besteht, wie bereits nachgewiesen, die Beziehung, dass ein Punkt der ersteren aus den Einheiten $e_1\, e_2\, e_3\, e_4$ vermittelst derselben Zahlen abgeleitet wird, wie eine entsprechende Tangentialebene der zweiten aus den resp. Ergänzungen jener Einheiten. — Es lässt sich nun leicht zeigen, dass diese Beziehung keine andre ist, als die Reciprocität. Wir bedienen uns zu diesem Zwecke in der Hauptsache der bekannten Joachimsthal'schen Methode.

Sei ein Punkt der Fläche f

$$X = \alpha_1\,e_1 + \alpha_2\,e_2 + \alpha_3\,e_3 + \alpha_4\,e_4;$$

ferner ein beliebiger Punkt des Raumes

$$R = \varrho_1\,e_1 + \varrho_2\,e_2 + \varrho_3\,e_3 + \varrho_4\,e_4;$$

dann ist jeder Punkt Z der Geraden X R darstellbar in der Form:

$$Z = \mu X + (1 - \mu) R$$

oder, wenn wir für X und R ihre Werthe und $\frac{1 - \mu}{\mu} = \lambda$ setzen:

$$Z = (\alpha_1 + \lambda \varrho_1) e_1 + (\alpha_2 + \lambda \varrho_2) e_2 + (\alpha_3 + \lambda \varrho_3) e_3 + (\alpha_4 + \lambda \varrho_4) e_4.$$

Setzen wir dann in der Gleichung der Fläche Z statt X, so erhalten wir eine Gleichung in λ, welche alle Punkte liefert, die die Fläche f mit X R gemeinsam hat. Diese Gleichung ist

$$\lambda \varphi_0 + \lambda^2 \varphi_1 + \lambda^3 \varphi_2 = 0,$$

wenn

$$\varphi_0 = \varrho_1 \frac{df}{d\alpha_1} + \varrho_2 \frac{df}{d\alpha_2} + \varrho_3 \frac{df}{d\alpha_3} + \varrho_4 \frac{df}{d\alpha_4},$$

$$\varphi_1 = \alpha_1 \frac{df}{d\varrho_1} + \alpha_2 \frac{df}{d\varrho_2} + \alpha_3 \frac{df}{d\varrho_3} + \alpha_4 \frac{df}{d\varrho_4},$$

$$\varphi_2 = f(\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3\ \varrho_4.)$$

Die Gleichung von λ zerfällt in die beiden Systeme:

$$\lambda = 0\ ;\ \varphi_0 + \lambda \varphi_1 + \lambda^2 \varphi_2 = 0.$$

Das erste bestimmt den Punkt X, das andre zwei neue Durchschnittspunkte. Wird nun der Punkt R so gewählt, dass $\varphi_1 = 0$ wird, so ist die durch $\varphi_1 = 0$ bestimmte Ebene die Polar-Ebene des Punktes X, und die von ihr umhüllte Fläche die Reciprocalfläche von f.

In $\varphi_1 = 0$ aber erkennen wir, wenn $\frac{df}{d\varrho}$ die laufenden Coordinaten sind, die Gleichung der Fusspunktebene von X; daher fällt die Fusspunktebene mit der Polarebene, die Umhüllungsfläche F mit der Reciprocalfläche zusammen.

Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn man von der Fläche F ausgeht.

Sei

$$Y = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4$$

ein Punkt auf ihr, und wieder

$$R' = \varrho_1 e_1 + \varrho_2 e_2 + \varrho_3 e_3 + \varrho_4 e_4$$

ein Punkt des Raumes, ein Punkt Z′ auf der Geraden Y R

$$Z' = \mu Y + (1 - \mu) R'.$$

Bildet man dann, wie oben, den Ausdruck für Z′, und setzt in Gleichung (75) Z′ für Y, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\lambda \Phi_0 + \lambda^2 \Phi_1 + \lambda^3 \Phi_2 + \lambda^4 \Phi_3 = 0,$$

worin namentlich

$$\Phi_2 = \gamma_1 \frac{dF}{d\varrho_1} + \gamma_2 \frac{dF}{d\varrho_2} + \gamma_3 \frac{dF}{d\varrho_3} + \gamma_4 \frac{dF}{d\varrho_4}$$

ist. Wieder erhalten wir die beiden Systeme:

$$\lambda = 0\ ;\ \Phi_0 + \lambda \Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2 + \lambda^3 \Phi_3 = 0,$$

und als Gleichung der Polarebene von Y:

$$\Phi_2 = 0;$$

worin wir die Gleichung der Fusspunktebene von Y, oder der Tangentialebene von X erkennen.

Hiermit aber ist die Reciprocität der beiden Flächen vollständig nachgewiesen.

Victor Schlegel.