

Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

Posiedzenie

z dnia 21 Lutego 1918 r.

Rok XI. № 2.

Obecni:

Przewodniczący Wydziału p. St. J. Thugutt.
Sekretarz p. J. Tur.

Członkowie Towarzystwa pp.: A. Czartkowski, Wł. Górczyński, M. Jakowski, L. Kryński, St. Mazurkiewicz, St. Orłowski, W. Smosarski, J. Sosnowski, K. Stołyhwo.

Komunikaty.

1. Al. Rajchman:

O Riemann'owskiej „zasadzie umiejscowienia”.

(Twierdzenie o mnożeniu szeregów trygonometrycznych).

Komunikat zgłoszony dn. 9 Lutego 1918 r.

Przedstawił St. Mazurkiewicz.

I. „Zasadą umiejscowienia“ nazywają następujące twierdzenie Riemann'a¹⁾:

¹⁾ „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“. — Bernhard Riemann's gesammelte math. Werke, Lipsk, wy-

„zbieżność dla danej wartości $x = x_0$ szeregu trygonometrycznego o współczynnikach dążących do zera zależy wyłącznie od zachowania się w otoczeniu owej wartości x_0 „funkcji przez dany szereg przedstawionej“.

Oczywiście twierdzenie sprowadzałyby się do tautologii, gdyby pod „funkcją przedstawioną przez dany szereg“ rozumieć poprostu sumę szeregu zbieżnego. Należy tu mieć na względzie sumowania uogólnione: bądź sumowanie Riemanna¹⁾, bądź ogólniejsze²⁾ od niego sumowania podług średnich arytmetycznych Cesaro'ego i Hölder'a.

dawca Teubner (1 wyd. 1876). Por. także Henri Lebesgue: „Leçons sur les séries trigonometriques“. Paryż, 1906, wyd. Gauthier-Villars str. 120.

¹⁾ Riemann udowodnił (loc. cit.), że granica

$$(g) \quad \lim_{\alpha=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2 \alpha^2}$$

jest sumą uogólnioną szeregu

$$(s) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n.$$

To znaczy: granica (g) istnieje i równa się sumie szeregu (s), ilekroć ten ostatni jest zbieżny.

Riemannowski sposób sumowania stanowi uogólnienie istotne, gdyż istnieją szeregi rozbieżne (o wyrazach dążących do zera), dające się zsumować przy pomocy granicy (g).

²⁾ Jeżeli granica (g) istnieje, a nadto

$$(z) \quad \lim_{n=\infty} A_n = 0,$$

to szereg (s) jest sumowalnym podług trzeciej średniej arytmetycznej i ma sumę równą wartości granicy (g); (oznaczenia te same co w odnośniku poprzednim).

D o w ó d. Kładziemy

$$(k) \quad a_n = (2n-1) \sum_{m=n}^{m=\infty} \frac{A_m}{m^2},$$

„Zasadę umiejscowienia“ można by więc tak wyrazić:

„jeżeli z dwóch szeregów trygonometrycznych o współczynnikach dążących do zera sumowalnych metodą

przekształcenie A b e l'a daje:

$$(t) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2 \alpha^2} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \frac{\sin (2n-1)\alpha}{(2n-1)\alpha}.$$

Jeżeli położymy:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{2n-1} \sin (2n-1)x,$$

to będziemy mogli nadać tożsamości (t) postać następującą:

$$(u) \quad \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha} = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2 \alpha^2}.$$

Dzięki (u) widać, że z istnienia granicy (g) wynika istnienie pochodnej

$$f'(x) \text{ dla } x = 0,$$

skąd, w myśl twierdzenia, które udowodniłem w notatce p. t. „O różniczkowalności szeregów Fouriera“ (Prace matem.-fiz., t. XXVIII, 1917), można wprowadzić sumowalność podług drugiej średniej arytmetycznej szeregu

$$(r) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n.$$

Łatwo sprawdzić tożsamości:

$$A_n = n^2 \left[\frac{a_n}{2n-1} - \frac{a_{n+1}}{2n+1} \right];$$

$$\sum_{n=1}^{n=p} A_n = \sum_{n=1}^{n=p} a_n - \frac{p^2}{2p+1} a_{p+1}; \quad \frac{p^2}{2p+1} = \frac{1}{2} p - \frac{p}{4p+2}$$

$$\sum_{p=1}^{p=r} p a_p = r \sum_{p=1}^{p=r} a_p - \sum_{p=1}^{p=r-1} \sum_{n=1}^{n=p} a_n;$$

średnich arytmetycznych dla wszystkich ¹⁾ punktów przedziału

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

i mających dla wszystkich ¹⁾ punktów tego przedziału tą samą sumę (uogólnioną), jeden jest zbieżnym dla $x = x_0$, to drugi jest również zbieżnym dla $x = x_0$.

Założenie, że współczynniki dążą do zera, jest niezbędne: wskazują na to przykłady szeregów

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos nx; \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} n \sin nx;$$

szeregi te są rozbieżne i sumowalne metodą średnich arytmetycznych (drugi wszędzie, pierwszy dla $x \neq 2k\pi$), mają sumę równą zero. Dodanie jednego z tych szeregów do jakiegokolwiek szeregu zbieżnego zniweczyłoby zbieżność, nie zmieniając wartości sumy szeregu.

Riemann wyprowadził „zasadę umiejscowienia“ jako zastosowanie twierdzenia następującego:

„Niechaj będzie

$$b < x < c$$

i niechaj $\rho(t)$ będzie taką funkcją, że $\rho(t)$ i $\rho'(t)$ przybierają wartość zero dla $t = b$ i $t = c$ i zmieniają się w sposób ciągły między temi granicami, zaś $\rho''(t)$ nie posiada nieskończonej ilości maximów i minimów,

skąd

$$(v) \quad \sum_{p=1}^{p=r} \sum_{n=1}^{n=p} A_n = \frac{r}{2} \sum_{p=1}^{p=r} a_p + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=r} \sum_{n=1}^{n=p} a_n + r \varepsilon_r;$$

ε_r oznacza pewne wyrażenie dążące do zera wraz z $\frac{1}{r}$ (dąży ono do zera z uwagi na (z) i (k)). Tożsamość (v) pozwala z sumowalności podług drugiej średniej szeregu (r) wyprowadzić sumowalność podług 3-ej średniej szeregu (s).

c. b. d. d.

¹⁾ lub „niemal wszystkich“. „Niemal wszystkimi“ punktami przedziału nazywamy punkty tworzące taką mnogość, że jej dopełniające nie zawiera żadnej podmnożności doskonałej.

niechaj dalej dla $t = x$ będzie

$$\rho(t) = 1, \quad \rho'(t) = 0, \quad \rho''(t) = 0,$$

przyczem $\rho^{III}(t)$ i $\rho^{IV}(t)$ mają być skończone i ciągłe, wówczas różnica pomiędzy szeregiem ¹⁾

$$A_0 + A_1 + \dots + A_n,$$

(gdzie

$$A_0 = \frac{a_0}{2}; \quad A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

i całką

$$\frac{1}{2\pi} \int_b^c F(t) \frac{d^2 \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}}}{dt} \rho(t) dt,$$

(gdzie

$$F(x) = \frac{A_0 x^2}{2} + C + C'x - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{2^2} - \dots - \frac{A_n}{n^2} - \dots)$$

gdy n rośnie ²⁾, staje się w końcu nieskończenie małą*.

W notatce niniejszej udowadniam twierdzenie następujące (w istocie równoważne z powyższym tw. Riemann'a, ale niewątpliwie mniej od niego skomplikowane):

„Niechaj będzie

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \beta_n = 0;$$

niechaj szereg

$$(4) \quad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

¹⁾ Powiedzielibyśmy dziś: „sumą pierwszych $n+1$ wyrazów szeregu*.

²⁾ Powiedzielibyśmy dziś: „rośnie bez granic*.

ma dla $x = x_0$ sumą równą zeru, wówczas „formalny iloczyn“ szeregu (4) i szeregu

$$(3) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

jest zbieżnym dla $x = x_0$ i ma sumę równą zeru“.

„Formalnym iloczynem“ szeregów (3) i (4) nazywamy szereg trygonometryczny

$$(5) \quad \frac{k_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} k_n \cos nx + l_n \sin nx,$$

którego współczynniki określone są przez wzory:

$$(6) \quad k_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \alpha_{n-p} + b_p \beta_{n-p}$$

$$l_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \beta_{n-p} + b_p \alpha_{n-p},$$

przyczem kładziemy

$$(7) \quad a_{-n} = a_n; \quad b_{-n} = -b_n; \quad b_0 = 0$$

$$\alpha_{-n} = \alpha_n; \quad \beta_{-n} = -\beta_n; \quad \beta_0 = 0.$$

Oczywiście wartość współczynników „formalnego iloczynu“ nie zależy od porządku „czynników“. Jeżeli we wzorach (6) dokonamy podstawienia $p = n - q$, otrzymamy:

$$(8) \quad k_n = \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \alpha_q a_{n-q} + \beta_q b_{n-q}$$

$$l_n = \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \alpha_q b_{n-q} + \beta_q a_{n-q}.$$

Biorąc więc szeregi (4) i (3) w odwrotnym porządku, niż poprzednio, otrzymamy znowu (5) jako „formalny iloczyn“.

Oczywistą jest rzeczą, że z uwagi na (7) i (6) mamy

$$(9) \quad \begin{aligned} k_{-n} &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \alpha_{n+p} - b_p \beta_{n+p} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \alpha_{n-p} + b_p \beta_{n-p} = k_n, \end{aligned}$$

podobnie można udowodnić, że

$$(10) \quad l_{-n} = -l_n.$$

Prócz bardzo prostego rachunku, mającego na celu usprawiedliwienie nazwy „iloczyn formalny“ (§ II) oraz dowodu naszego twierdzenia (§§ III i IV) i jednego z jego wniosków (§ V), podaję tu jako zastosowania:

1) Dowód (wyżej wypowiedzianej) „zasady umiejscowienia“ (§ VI).

2) Dowód twierdzenia p. Fatou¹⁾, głoszącego, iż szereg potęgowy o współczynnikach dążących do zera jest zbieżnym dla wszelkiego regularnego (t. j. nie osobliwego) punktu płaszczyzny zmiennej zespolonej, położonego na kole o promieniu równym jedności (§ VII).

3) Przykład szeregu trygonometrycznego, który jest zbieżnym we wszystkich punktach dowolnie obranej na odcinku $(0, 2\pi)$ mnogości doskonałej, zaś rozbieżnym we wszystkich innych punktach przedziału $(0, 2\pi)$. Budujemy nasz przykład opierając się na fakcie istnienia szeregu trygonometrycznego o współczynnikach dążących do zera wszędzie rozbieżnego.

Przykład takiego szeregu został podany przez p. Steinhauusa w pracy p. t. „O pewnym szeregu trygonometrycznym rozbieżnym“. (Spraw. Tow. Nauk. Warsz., Rok V, zeszyt 3, posiedzenie z dn. 7 marca, 1912 r.).

¹⁾ Acta mathematica, tom 30, str. 389.

P. Steinhaus podał również przykład analogiczny do naszego, budując szereg trygonometryczny zbieżny dla

$$0 < x < \pi - \varepsilon,$$

który jest rozbieżnym dla

$$\pi + \varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon.$$

(„Sur un problème de M. M. Lusin et Sierpiński“, Bull. de l'Ac. des Sc. de Cracovie, lipiec, 1913 r.).

Ale dla punktów przedziału

$$(\pi - \varepsilon, \quad \pi + \varepsilon)$$

nie ma w pracy p. S., ani dowodu zbieżności, ani dowodu rozbieżności. W naszym przykładzie takich punktów wątpliwych nie ma.

II. Na usprawiedliwienie wzorów (6) i nazwy „iloczyn formalny“, możemy przytoczyć następujące bardzo proste twierdzenie:

„jeżeli współczynniki dwóch danych szeregów trygonometrycznych tworzą szereg bezwzględnie zbieżny, to iloczyn formalny tych szeregów trygonometrycznych jest zbieżny i ma za sumę iloczyn ich sum“.

Dowód. Zakładamy, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |a_n|; \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} |b_n|; \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} |a_n|; \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} |\beta_n|.$$

są zbieżne.

Wynika stąd zbieżność szeregów (3) i (4) dla wszelkiego x (rzeczywistego). Oznaczając ich sumy odpowiednio przez $f(x)$ i $\varphi(x)$ i korzystając ze wzorów Euler'a

$$\cos nx = \frac{e^{-inx} + e^{inx}}{2}; \quad \sin nx = \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2} i,$$

możemy napisać (trzymamy się oznaczeń (7) dla wskaźników ujemnych):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} a_p \cos px + b_p \sin px =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} (a_p - i b_p) e^{ipx},$$

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (\alpha_n - i \beta_n) e^{inx}.$$

Mamy oczywiście

$$(11) \quad f(x) \varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} (a_p - i b_p) e^{ipx} \varphi(x).$$

Jakąkolwiek byłaby liczba całkowita p możemy napisać

$$(12) \quad \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (\alpha_{n-p} - i \beta_{n-p}) e^{i(n-p)x} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (\alpha_n - i \beta_n) e^{inx} = \varphi(x),$$

mamy więc

$$(13) \quad (a_p - i b_p) e^{ipx} \varphi(x) =$$

$$= \frac{1}{2} (a_p - i b_p) e^{ipx} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (\alpha_{n-p} - i \beta_{n-p}) e^{i(n-p)x}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (a_p - i b_p) (\alpha_{n-p} - i \beta_{n-p}) e^{inx}.$$

Wzorowi (11) możemy więc nadać postać

$$(14) \quad f(x) \varphi(x) = \frac{1}{4} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (a_p - i b_p) (\alpha_{n-p} - i \beta_{n-p}) e^{inx},$$

Szereg, występujący po prawej stronie równości powyższej, jest, jak to bezpośrednio wynika z naszego założenia szeregiem podwójnym bezwzględnie zbieżnym, możemy więc zmienić porządek sumowań.

Wzór (14) przybierze wówczas postać

$$(15) \quad f(x) \varphi(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{inx} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} (a_p - i b_p) (\alpha_{n-p} - i \beta_{n-p}).$$

Kładąc

$$(16) \quad k_n - i l_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} (a_p - i b_p) (\alpha_{n-p} - i \beta_{n-p}),$$

mamy

$$(6) \quad k_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \alpha_{n-p} + b_p \beta_{n-p}$$

$$l_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \beta_{n-p} + b_p \alpha_{n-p},$$

odnajdujemy więc wzory (6).

Mając na uwadze oznaczenia (7) łatwo się można przekonać, że

$$(17) \quad k_{-n} = k_n; \quad l_{-n} = -l_n; \quad l_0 = 0.$$

Wzór (15) przy podstawieniu (16) daje

$$(17) \quad f(x) \varphi(x) = \frac{k_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (k_n - i l_n) e^{inx},$$

skąd, uwzględniając (17) otrzymujemy wreszcie

$$(18) \quad f(x) \varphi(x) = \frac{k_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} k_n \cos nx + l_n \sin nx.$$

c. b. d. d.

III. Łatwo daje się udowodnić twierdzenie następujące:

„jeżeli współczynniki jednego z dwóch danych szeregów trygonometrycznych dążą do zera, zaś współczynniki drugiego tworzą nadto szereg bezwzględnie zbieżny, to współczynniki formalnego iloczynu tych szeregów trygonometrycznych dążą do zera“.

Dogodniej nam będzie nadać temu twierdzeniu takie wyśłowienie:

„daną jest liczba t_0 , funkcja $\varphi(t)$ oraz ciąg wielkości

$$(19) \quad \dots a_{-n} \dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \dots a_n \dots$$

jeżeli:

1) szeregi

$$(20) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} |\varphi(t_0 + n)| \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} |\varphi(t_0 - n)|$$

są zbieżne i

2) wielkości a_n dążą do zera dla $n = \pm\infty$

$$(21) \quad \lim_{n=\pm\infty} a_n = 0,$$

to mamy:

$$\lim_{n=\pm\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n - p) = 0,$$

$$\lim_{n=\pm\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n + p) = 0''.$$

Dowód. Mamy ¹⁾ oczywiście (podstawiając $q = n - p$)

$$(22) \quad \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n - p) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} a_{n-q} \varphi(t_0 + q)$$

¹⁾ Zbieżność szeregów występujących w tezie twierdzenia i w tożsamościach (22) i (23) wynika bezpośrednio z założenia (21) i założenia zbieżności szeregów (20).

i podobnie (podstawiając $q = n + p$)

$$(23) \quad \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n + p) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} a_{q-n} \varphi(t_0 + q).$$

Oznaczmy przez ε_m większą z pośród reszt

$$\sum_{q=m}^{q=+\infty} |\varphi(t_0 + q)| \quad \text{i} \quad \sum_{q=-m}^{q=-\infty} |\varphi(t_0 + q)|,$$

mamy oczywiście

$$(24) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0,$$

$$(25) \quad \sum_{q=m}^{q=+\infty} |\varphi(t_0 + q)| \leq \varepsilon_m, \quad \sum_{q=-m}^{q=-\infty} |\varphi(t_0 + q)| \leq \varepsilon_m.$$

Oznaczmy przez η_m największą ¹⁾ z pośród wielkości ($m \geq 0$)

$$(26) \quad |a_m|, |a_{m+1}|, \dots, |a_{m+p}|, \dots \\ |a_{-m}|, |a_{-m-1}|, \dots, |a_{-m-p}|, \dots$$

określamy η_m i dla $m < 0$ przez umowę

$$(27) \quad \eta_{-m} = \eta_m;$$

mamy oczywiście

$$(28) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m = 0,$$

$$(29) \quad |a_m| \leq \eta_m,$$

(zarówno dla $m \geq 0$, jak i dla $m \leq 0$), a nadto dla

$$m_2 \geq m_1 \geq 0,$$

$$(30) \quad |a_{m_2}| \leq \eta_{m_1}; \quad |a_{-m_2}| \leq \eta_{m_1}; \quad \eta_{m_2} \leq \eta_{m_1}.$$

¹⁾ Z uwagi na założenie (21) istnieje conajwyżej skończona ilość wielkości (26) większych od $|a_m|$.

Możemy teraz napisać z uwagi na (22) i (29)

$$(31) \quad \left| \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n - p) \right| \leq \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \eta_{n-q} |\varphi(t_0 + q)|;$$

podobnie, mając na względzie (23) oraz (29) i pamiętając, że w myśl (27) mamy

$$\eta_{q-n} = \eta_{n-q},$$

możemy napisać

$$(32) \quad \left| \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n + p) \right| \leq \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \eta_{n-q} |\varphi(t_0 + q)|.$$

Oznaczmy przez r największą liczbę całkowitą, nieprzekraczającą $\frac{n}{2}$

$$(33) \quad r = \left[\frac{n}{2} \right]$$

i rozłóżmy sumę, występującą w prawej stronie nierówności (31) i (32), na dwie: sumę wyrazów, dla których $q \leq r$ i sumę składników pozostałych (dla których $q > r$)

$$(34) \quad \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \eta_{n-q} |\varphi(t_0 + q)| = \sum_{q=-\infty}^{q=r} + \sum_{q=r+1}^{q=+\infty}.$$

Jeśli $q \leq r$,

to $n - q \geq n - r > 0$,

więc, w tym przypadku, w myśl ostatniej nierówności (30) mamy

$$\eta_{n-q} \leq \eta_{n-r},$$

skąd

$$(35) \quad \sum_{q=-\infty}^{q=r} \eta_{n-q} |\varphi(t_0 + q)| \leq \eta_{n-r} \sum_{q=-\infty}^{q=r} |\varphi(t_0 + q)| \\ \leq \eta_{n-r} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} |\varphi(t_0 + q)| \leq 2 \varepsilon_0 \eta_{n-r}.$$

Mamy oczywiście dla wszelkiego n i q

$$\eta_{n-q} \leq \eta_0,$$

więc

$$(36) \quad \sum_{q=r+1}^{q=+\infty} \eta_{n-q} |\varphi(t_0 + q)| \leq \eta_0 \sum_{q=r+1}^{q=+\infty} |\varphi(t_0 + q)| \leq \eta_0 \varepsilon_r.$$

Zestawiając nierówności (31) i (32) z tożsamością (34) oraz nierównościami (35) i (36) otrzymujemy

$$(37) \quad \left| \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n - p) \right| \leq 2 \varepsilon_0 \eta_{n-r} + \eta_0 \varepsilon_r$$

$$\left| \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n + p) \right| \leq 2 \varepsilon_0 \eta_{n-r} + \eta_0 \varepsilon_r.$$

Ponieważ z uwagi na określenie (33) r i $n-r$ rosną bez granic równocześnie z n , możemy na zasadzie (24) i (28) napisać

$$(38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{n-r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_r = 0.$$

Z (37) i (38) wynika bezpośrednio

$$(40) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n - p) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \varphi(t_0 + n + p) = 0,$$

c. b. d. d.

IV. Możemy teraz udowodnić nasze twierdzenie:

„jeżeli zachodzi

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \beta_n = 0,$$

$$(41) \quad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cos n x_0 + \beta_n \sin n x_0 = 0$$

i jeżeli przyjmiemy oznaczenia

$$(6) \quad k_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \alpha_{n-p} + b_p \beta_{n-p}$$

$$l_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \beta_{n-p} + b_p \alpha_{n-p}.$$

(wyrazy o wskaźnikach ujemnych są określone przez umowę

$$(7) \quad \begin{aligned} a_{-n} &= a_n; & b_{-n} &= -b_n; & b_0 &= 0 \\ \alpha_{-n} &= \alpha_n; & \beta_{-n} &= -\beta_n; & \beta_0 &= 0, \end{aligned}$$

to szereg

$$(42) \quad \frac{k_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} k_n \cos n x_0 + l_n \sin n x_0,$$

jest zbieżnym i ma sumę równą zero“.

Dowód. Nie uszczuplając ogólności rozumowania możemy przyjąć $x_0 = 0$ (proste podstawienie $x = x_0 + t$ pozwala nam do tego przypadku sprowadzić przypadek ogólny).

Dla $x_0 = 0$ założenie przybierze postać

$$(43) \quad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n = 0;$$

też do udowodnienia będzie okoliczność, że szereg

$$(44) \quad \frac{k_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} k_n,$$

jest zbieżny i ma sumę równą zero.

Kładziemy

$$(45) \quad s_n = \frac{k_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=n} k_m,$$

z uwagi na (9) możemy napisać

$$(46) \quad 2 s_n = \sum_{m=-n}^{m=+n} k_m.$$

Zestawiając (46) i (6) otrzymujemy

$$(47) \quad 4 s_n = \sum_{m=-n}^{m=+n} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \alpha_{m-p} + b_p \beta_{m-p}$$

Pierwsze z dwóch sumowań występujących w powyższym wzorze (47)

$$\left(\sum_{m=-n}^{m=+n} \right)$$

odnosi się do skończonej ilości składników, — można więc zmienić porządek sumowań.

Otrzymujemy:

$$(48) \quad 4 s_n = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} [a_p \sum_{m=-n}^{m=+n} \alpha_{m-p} + b_p \sum_{m=-n}^{m=+n} \beta_{m-n}];$$

zastępując zmienną sumacyjną m przez $q = m - p$, możemy wzorowi (48) nadać postać

$$(49) \quad 4 s_n = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} [a_p \sum_{q=-n-p}^{q=+n-p} \alpha_q + b_p \sum_{q=n-p}^{q=+n-p} \beta_q].$$

Oznaczmy (jak to jest w zwyczaju) przez $[t]$ największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą t .

Kładziemy dla $t > 0$

$$(50) \quad A(t) = \sum_{p=[t+1]}^{p=-\infty} \alpha_p,$$

$$(51) \quad B(t) = \sum_{p=[t+1]}^{p=\infty} \beta_p;$$

funkcję $A(t)$ określamy dla $t < 0$ przez warunek nieparzystości

$$(52) \quad A(-t) = -A(t),$$

funkcję zaś $B(t)$ przez warunek parzystości

$$(53) \quad B(-t) = B(t).$$

Łatwo się przekonać, że jakimikolwiek byłyby liczby całkowite u i v

$$(u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad u < v)$$

mamy

$$(54) \quad \sum_{p=u}^{p=v} \alpha_p = A\left(u - \frac{1}{2}\right) - A\left(v + \frac{1}{2}\right),$$

(w rzeczy samej:

a) wzór (54) jest bezpośrednio oczywistym dla

$$v > u > 0,$$

b) wypadek $v > 0, u = 0$:

w myśl określeń (50) i (52) mamy

$$A\left(-\frac{1}{2}\right) = -A\left(\frac{1}{2}\right) = -\sum_{p=1}^{p=\infty} \alpha_p.$$

ale z założenia (43) wynika

$$-\sum_{p=1}^{p=+\infty} \alpha_p = \frac{\alpha_0}{2},$$

więc

$$(55) \quad A\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha_0}{2};$$

podobnie z określeń (50) i założenia (43) można wyprowadzić

$$(56) \quad A \left(v + \frac{1}{2} \right) = -\frac{\alpha_0}{2} - \sum_{p=1}^{p=v} \alpha_p,$$

odjęcie wzorów (55) i (56) stronami daje nam (54) dla
 $v > u, \quad u = 0;$

c) wypadek $u < v \leq 0$:

tożsamość

$$5(7) \quad \sum_{p=u}^{p=v} \alpha_p = \sum_{p=-v}^{p=-u} \alpha_p,$$

przy uwzględnieniu określenia (52) sprowadza ten wypadek do wypadku a) lub b).

d) wypadek $u < 0 < v$: mamy

$$(58) \quad \sum_{p=u}^{p=v} \alpha_p = \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=v} \alpha_p \right) + \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=-u} \alpha_p \right),$$

skąd z uwagi na (56)

$$\sum_{p=u}^{p=v} \alpha_p = -A \left(v + \frac{1}{2} \right) - A \left(-u + \frac{1}{2} \right),$$

co daje nam wzór (54), jeżeli uprzytomnimy sobie, że w myśl określenia (52)

$$A \left(u - \frac{1}{2} \right) = -A \left(-u + \frac{1}{2} \right).$$

Łatwiej jeszcze niż wzór (54) udowadnia się analogiczny wzór (dla wszelkich liczb całkowitych u i v , byle tylko $u < v$)

$$(59) \quad \sum_{p=u}^{p=v} \beta_p = B \left(u - \frac{1}{2} \right) - B \left(v + \frac{1}{2} \right);$$

(w rzeczy samej:

a) wzór (59) jest oczywistym dla $v > u \geq 0$, (trzeba pamiętać, że $\beta_0 = 0$);

b) wypadek $u < v \leq 0$:

tożsamość

$$(60) \quad \sum_{p=u}^{p=v} \beta_p = - \sum_{p=-v}^{p=-u} \beta_p,$$

przy uwzględnieniu określenia (53) sprowadza ten wypadek do wypadku a);

c) wypadek $u < 0 < v$:

mamy z uwagi na (7)

$$(61) \quad \sum_{p=u}^{p=v} \beta_p = \sum_{p=1}^{p=v} \beta_p - \sum_{p=1}^{p=-u} \beta_p,$$

ale w myśl wzoru (59) jako prawdziwego w przypadku a) możemy napisać

$$(62) \quad \sum_{p=1}^{p=v} \beta_p = B\left(\frac{1}{2}\right) - B\left(v + \frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{p=1}^{p=-u} \beta_p = B\left(\frac{1}{2}\right) - B\left(-u + \frac{1}{2}\right);$$

zestawiając wzory (61) i (62), pamiętając przytem, że w myśl (53) mamy

$$B\left(-u + \frac{1}{2}\right) = B\left(u - \frac{1}{2}\right),$$

otrzymujemy i w obecnym wypadku wzór (59).

Zakładając $n > 0$ i uwzględniając warunki (52) i (53), możemy otrzymać przez podstawienie we wzorach (54) i (59)

$$u = -n - p; \quad v = n - p;$$

tożsamości następujące

$$(63) \quad \sum_{q=-n-p}^{q=n+p} \alpha_q = -A\left(n + p + \frac{1}{2}\right) - A\left(n - p + \frac{1}{2}\right),$$

$$(64) \quad \sum_{q=-n-p}^{q=n+p} \beta_q = B \left(n+p + \frac{1}{2} \right) - B \left(n-p + \frac{1}{2} \right).$$

Zestawiając wzory (49), (63) i (64) możemy napisać:

$$(65) \quad 4 s_n = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} b_p \left[B \left(\frac{1}{2} + n + p \right) - B \left(\frac{1}{2} + n - p \right) \right] \\ - a_p \left[A \left(\frac{1}{2} + n + p \right) + A \left(\frac{1}{2} + n - p \right) \right].$$

Z uwagi na założenie (2) i określenia (50) — (53) mamy

$$(66) \quad \lim_{q=\pm\infty} q^2 A \left(\frac{1}{2} + q \right) = \lim_{q=\pm\infty} q^2 B \left(\frac{1}{2} + q \right) = 0;$$

wynika stąd zbieżność szeregów

$$(67) \quad \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \left| A \left(\frac{1}{2} + q \right) \right| \quad \text{i} \quad \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \left| B \left(\frac{1}{2} + q \right) \right|.$$

Możemy więc stosować twierdzenie § III dla

$$t_0 = \frac{1}{2}; \quad \varphi = A \quad \text{i} \quad \psi = B;$$

w myśl tego twierdzenia otrzymujemy

$$\lim_{n=\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} b_p B \left(\frac{1}{2} + n \pm p \right) = \\ = \lim_{n=\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p A \left(\frac{1}{2} + n \pm p \right) = 0,$$

skąd, z uwagi na (65), bezpośrednio wynika

$$\lim_{n=\infty} s_n = 0,$$

c. b. d. d.

V. Z twierdzenia § poprzedniego łatwo wyprowadzić następujący wniosek:

„Niechaj będzie

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 b_n = 0,$$

i niechaj suma szeregu (4), (którą nazwiemy $s(x)$) będzie odmienną od zera dla $x = x_0$

$$(4 \text{ bis}) \quad s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$(68) \quad s(x_0) \neq 0,$$

wówczas koniecznym i wystarczającym warunkiem zbieżności szeregu

$$(69) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0,$$

jest zbieżność szeregu

$$(42) \quad \frac{k_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} k_n \cos nx_0 + l_n \sin nx_0,$$

(spółczynniki k_n i l_n są dane przez wzory (6) i (7)).

Ogólniej: przy założeniach (1), (2) i (68) koniecznym i wystarczającym warunkiem sumowalności szeregu (69) metodą p -tej średniej arytmetycznej ¹⁾, lub metodą Riemann'a (por. § I; wprawdzie w odnośniku do § I udowodniliśmy, że Riemannowska metoda sumowania, stosowana do szeregów

¹⁾ Można powiedzieć ogólniej: przy założeniach (1), (2) i (68) koniecznym i wystarczającym warunkiem sumowalności szeregu (69) jakakolwiek przepisana z góry metodą, spełniająca postulaty, wypowiedziane przez p. Steinhausa w pracy p. t. „Kilka słów o uogólnieniu pojęcia granicy“ (Prace matem.-fiz., t. XXII, 1911, str. 121—134, postulaty A i C), jest sumowalność daną metodą szeregu (42).

o wyrazach dążących do zera, jest szczególnym wypadkiem metody średnich arytmetycznych, jednak tu nie mamy potrzeby korzystania z tego spostrzeżenia), jest sumowalność tąż metodą szeregu (42). W wypadku zbieżności (ewent. sumowalności uogólnionej), suma (ewent. suma uogólniona) szeregu (42) równa się iloczynowi sumy (ewent. sumy uogólnionej) szeregu (69) przez $s(x_0)$.

D o w ó d. Szereg zbieżny

$$(70) \quad -s(x_0) + \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

którego współczynniki czynią zadość warunkowi (2), ma oczywiście dla $x = x_0$ sumę równą zeru; więc w myśl twierdzenia § IV formalny iloczyn tego szeregu przez szereg trygonometryczny

$$(3) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

(którego współczynniki dążą do zera), jest szeregiem zbieżnym do zera dla $x = x_0$.

Łatwo się przekonać, że iloczynem formalnym szeregów trygonometrycznych (70) i (3) jest szereg

$$(71) \quad \left[\frac{k_0}{2} - \frac{s(x_0) \cdot a_0}{2} \right] + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[k_n - s(x_0) \cdot a_n \right] \cos nx + \\ + \left[l_n - s(x_0) b_n \right] \sin nx,$$

(wielkości k_n i l_n są określone przez wzory (6) i (7)) mamy więc:

$$(72) \quad \left[\frac{k_0}{2} - \frac{s(x_0) \cdot a_0}{2} \right] + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[k_n - s(x_0) \cdot a_n \right] \cos nx_0 + \\ + \left[l_n - s(x_0) b_n \right] \sin nx_0 = 0.$$

Jeżeli założymy, że szereg (69) jest zbieżnym (ewent. sumowalnym), będziemy go mogli pomnożyć przez liczbę $s(x_0)$ i następnie dodać do szeregu lewej strony (72); otrzymamy szereg (42), który jako suma dwóch szeregów zbieżnych (ewent. zbieżnego i sumowalnego), jest zbieżny (ewent. sumowalny) ¹⁾.

Odwrotnie, jeżeli założymy zbieżność (ew. sumowalność) szeregu (42), będziemy mogli go odjąć od szeregu lewej strony (72), podzieliwszy wynik tego odejmowania przez liczbę $-s(x_0)$, (która z założenia jest odmienną od zera) otrzymamy szereg (69) — skąd jego zbieżność (ew. sumowalność).

Jeżeli szeregi (42) i (69) są zbieżne (ew. sumowalne), można równaniu (72) nadać postać następującą:

$$(73) \quad \frac{k_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} k_n \cos n x_0 + l_n \sin n x_0 = \\ = s(x_0) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0 \right],$$

twierdzenie nasze zostało więc w zupełności udowodnione.

VI. Udowodnimy teraz „zasadę umiejscowienia“:

„Zakładamy

$$(74) \quad \lim_{n=\infty} c_n = \lim_{n=\infty} d_n = \lim_{n=\infty} \gamma_n = \lim_{n=\infty} \delta_n = 0,$$

zakładamy dalej, że szeregi

$$(75) \quad \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \cos n x + d_n \sin n x$$

oraz

$$(76) \quad \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \gamma_n \cos n x + \delta_n \sin n x,$$

¹⁾ Postulat C p. H. Steinhaus (loc. cit.).

są dla wszystkich ¹⁾ punktów przedziału

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

sumowalne metodą Riemann'a, lub metodą p-tej (p — jakiegokolwiek) średniej arytmetycznej i mają tą samą sumę uogólnioną;

jeżeli, przy tych założeniach, jeden z szeregów rozważanych ((75) i (76)) jest zbieżnym dla $x = x_0$, to drugi jest również zbieżnym dla $x = x_0$; ogólniej: z sumowalności podług r-tej średniej arytmetycznej ($r < p$) jednego z szeregów danych dla $x = x_0$ wynika sumowalność podług tejże średniej drugiego dla tejże wartości $x = x_0$.

Dowód. Oczywiście „zasada umiejscowienia“ będzie udowodnioną z chwilą, gdy wykażemy, że szereg

$$(77) \quad \frac{c_0 - \gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (c_n - \gamma_n) \cos nx + (d_n - \delta_n) \sin nx,$$

jest dla $x = x_0$ zbieżnym (do zera — zresztą suma szeregu tu nieistotna).

Łatwo zbudować funkcję $\lambda(x)$ posiadającą własności następujące:

1°. $\lambda(x)$ jest funkcją ciągłą i perjodyczną z okresem 2π

$$(78) \quad \lambda(x + 2\pi) = \lambda(x);$$

2°. $\lambda(x)$ posiada trzy kolejne pochodne całkowne, t. zn. funkcje

$$\lambda'(x), \lambda''(x) \text{ i } \lambda'''(x),$$

są całkowne i określone dla wszelkiego x ;

¹⁾ lub „niemal wszystkich“ (określenie „niemal wszystkich“ patrz § I, odnośnik).

Nie wiadomo, czy wyrazy „niemal wszystkich“ dadzą się zastąpić przez „prawie wszystkich“. („Prawie wszystkimi“ punktami przedziału nazywają się punkty, tworzące mnogość, której dopełniająca ma miarę równą zeru (według Lebesgue'a)).

3°. Dla

$$x_0 - 2\pi + \varepsilon \leq x \leq x_0 - \varepsilon,$$

(a więc i dla

$$x_0 + \varepsilon \leq x \leq x_0 + 2\pi - \varepsilon)$$

mamy

$$(79) \quad \lambda(x) = 0;$$

4°. Dla $x = x_0$ funkcja $\lambda(x)$ przybiera wartość jeden

$$(80) \quad \lambda(x_0) = 1.$$

Kładziemy

$$(81) \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx; \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Z uwagi na warunki 1° i 2° mamy

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \beta_n = 0$$

oraz dla wszelkiego x

$$(82) \quad \lambda(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Formalny iloczyn szeregów trygonometrycznych (77) i (82) jest szeregiem trygonometrycznym, którego współczynniki, w myśl § III, dążą do zera;

w myśl twierdzenia § IV ów formalny iloczyn jest szeregiem zbieżnym do zera dla

$$x_0 - 2\pi + \varepsilon \leq x \leq x_0 - \varepsilon,$$

wreszcie w myśl twierdzenia § V jest on sumowalnym podług metody Riemann'a, lub podług p -tej średniej arytmetycznej dla wszystkich (ewent. „niemal wszystkich“) wartości x , spełniających nierówność

$$x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$$

i ma dla tych wartości x sumę uogólnioną równą zeru.

Możemy więc powiedzieć: formalny iloczyn szeregów trygonometrycznych (77) i (82) jest szeregiem trygonometrycznym o współczynnikach dążących do zera sumowalnym do zera¹⁾ podług p-tej średniej arytmetycznej, lub podług Riemann'a wszędzie (ew. niemal wszędzie)

Taki szereg, jakem to wykazał w pracy p. t. „Eine Erweiterung des de la Vallée Poussinschen Eindeutigkeitssatzes“ (Monatshefte für Mathematik u. Physik, tom XXVI, str. 264—288. Wiedeń, 1915), ma wszystkie współczynniki równe zeru; można go więc uważać za szereg zbieżny wszędzie więc i dla $x = x_0$.

Stąd, w myśl twierdzenia § V i z uwagi na (80) wynika zbieżność szeregu (77) dla $x = x_0$,

c. b. d. d.

VII. Twierdzenie p. Fatou (dowód podaję w postaci szczegółowej, jako zastosowanie zasady umiejscowienia).

Założenia: ²⁾

1°. Szereg potęgowy

$$(83) \quad \varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

określający funkcję analityczną $\varphi(z)$ jest zbieżnym dla wszystkich wartości z , spełniających nierówność

$$|z| < 1,$$

2°. Współczynniki szeregu (83) dążą do zera równocześnie z $\frac{1}{n}$

$$(84) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0;$$

3°. Punkt

$$z = z_0 = e^{ix_0}$$

— x_0 oznacza tu liczbę rzeczywistą — jest punktem regularnym t. zn. nie jest punktem osobliwym) funkcji $\varphi(z)$.

¹⁾ Szeregiem „sumowalnym do zera“ nazywamy szereg sumowalny, mający sumę uogólnioną równą zeru.

²⁾ Założenie 1° jest zbyt ogólne, gdyż wynika z 2°.

T e z a do udowodnienia: szereg (83) jest zbieżnym dla $z = z_0$.

D o w ó d. Kładziemy:

$$(85) \quad \psi(z) = \varphi(z) - c_0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n z^n,$$

$$(86) \quad \Phi(z) = \int_0^z \frac{du}{u} \int_0^u \frac{\psi(t)}{t} dt;$$

wykonywujemy podstawienie

$$(87) \quad z = e^{ix}$$

i oznaczamy

$$(88) \quad F(x) = \Phi(e^{ix}); \quad f(x) = \psi(e^{ix}).$$

Oczywistą jest rzeczą, że $\Phi''(z)$ (druga pochodna funkcji $\Phi(z)$), istnieje dla wszelkiego regularnego punktu funkcji analitycznej $\psi(z)$ lub $\varphi(z)$.

Wynika stąd istnienie $F''(x)$ i co zatem idzie ¹⁾ granicy

$$(89) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2},$$

dla wszelkiego regularnego punktu funkcji $\varphi(z)$ (między z i x zachodzi związek (87); przyjmujemy tu x, h — rzeczywiste).

¹⁾ Łatwo udowodnić twierdzenie następujące: „Jeżeli dla pewnej wartości $x = a$ $F''(x)$ istnieje i równa się A , to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) + F(a-h) - 2F(a)}{h^2}$$

istnieje i równa się A'' .

D o w ó d. Kładziemy:

$$G(x) = F(x) - \frac{A}{2} x^2;$$

mamy oczywiście

$$(k) \quad G''(a) = 0;$$

Z określenia (86) wynika

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n z^n}{n^2},$$

skąd przez podstawienie (87) otrzymujemy

$$(90) \quad F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n \cos nx + i c_n \sin nx}{n^2}.$$

Z uwagi na założenie (84) szereg (90) jest zbieżnym dla wszystkich rzeczywistych wartości x , możemy więc napisać

$$(91) \quad \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n e^{inx} \left[\frac{\sin n \frac{h}{2}}{n \frac{h}{2}} \right]^2.$$

$$(n) \quad \frac{G(a+h) + G(a-h) - 2G(a)}{h^2} = \frac{F(a+h) + F(a-h) - 2F(a)}{h^2} = A.$$

Stosując do funkcji $G(x)$ (posiadającej oczywiście pierwszą pochodną w pobliżu $x = a$), twierdzenie o przyrostach skończonych i oznaczając przez θ_1 i θ_2 pewne wielkości dodatnie mniejsze od jedności, możemy napisać:

$$(m) \quad \begin{aligned} & \frac{G(a+h) + G(a-h) - 2G(a)}{h^2} = \\ & = \frac{G(a+h) - G(a)}{h^2} - \frac{G(a) - G(a-h)}{h^2} = \frac{G'(a + \theta_1 h)}{h} + \\ & \quad \frac{G'(a - \theta_2 h)}{h} = \theta_1 \frac{G'(a + \theta_1 h) - G'(a)}{\theta_1 h} + \\ & \quad + \frac{G'(a) - G'(a - \theta_2 h)}{\theta_2 h} \cdot \theta_2. \end{aligned}$$

Z uwagi na (k), (m) daje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(a+h) + G(a-h) - 2G(a)}{h^2} = 0,$$

skąd ze względu na (n) wynika istnienie granicy (89) tekstu dla $x = a$.

Z uwagi na (n) granica ta równa się A .

Ze względu na (91) oraz istnienie granicy (89) dla wszelkiego regularnego z , możemy powiedzieć:

istnieje liczba dodatnia ε taka, że szereg (85), któremu można nadać również postać trygonometryczną

$$(85 \text{ bis}) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n e^{i n x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \cos n x + i c_n \sin n x,$$

jest sumowalnym podług Riemann'a w przedziale

$$(x_0 - \varepsilon, \quad x_0 + \varepsilon),$$

(każdy punkt regularny jest punktem wewnętrznym pewnego przedziału regularności).

Suma uogólniona (podług Riemann'a) szeregu (85 bis), równa się wartości granicy (89) ze znakiem przeciwnym, a więc

$$- F''(x).$$

Lecz z uwagi na (87) i (88) mamy

$$\frac{dz}{dx} = i z; \quad F'(x) = i \Phi'(z) z = i \int_0^z \frac{\psi(t)}{t} dt;$$

skąd

$$F''(x) = - f(x).$$

Suma uogólniona szeregu (85 bis) równa się więc $f(x)$.

Jeżeli rozwiemy na szereg Fouriera funkcję równą dla

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

funkcji analitycznej $f(x)$ regularnej dla $x = x_0$, otrzymamy oczywiście szereg trygonometryczny zbieżny również przedstawiający w przedziale $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $f(x)$.

W myśl twierdzenia § VI, wynika stąd zbieżność dla $x = x_0$ szeregu (85 bis), skąd znowu bezpośrednio wynika zbieżność szeregu (83) dla $z = z_0$,

c. b. d. d.

VIII. Przystępujemy teraz do budowy przykładu omawianego w § I, sub. 3.

Niechaj E będzie dowolnym zbiorem doskonałym, położonym w przedziale $(0, 2\pi)$.

Mnogość dopełniająca E, t. j. zbiór wszystkich punktów odcinka $(0, 2\pi)$, nie należących do E, składa się ¹⁾ z punktów wewnętrznych pewnych przedziałów (niezachodzących na siebie). Przedziały te tworzą ciąg przeliczalny.

Nazwijmy je:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_i, y_i) \dots$$

$$(x_i < y_i).$$

Oznaczmy przez $\varphi_i(x)$ funkcję określoną w przedziale $(0, 2\pi)$ w sposób następujący:

$$\varphi_i(x) = 0 \quad \text{dla } x < x_i \quad \text{i dla } x > y_i,$$

$$\varphi_i(x) = (x - x_i)^4 (y_i - x)^4 \quad \text{dla } x_i \leq x \leq y_i.$$

Oczywistą jest rzeczą, że funkcje

$$\varphi_i(x), \quad \varphi_i'(x), \quad \varphi_i''(x) \quad \text{i} \quad \varphi_i'''(x),$$

są ciągłe w przedziale $(0, 2\pi)$ funkcja zaś $\varphi_i^{IV}(x)$ jest ograniczoną.

Nazwijmy A_i kres górny $|\varphi_i^{IV}(x)|$. Łatwo wykazać, że n-te współczynniki Fouriera funkcji $\varphi_i(x)$ są, co do wartości bezwzględnej, mniejsze od

$$\frac{A_i}{\pi} \cdot \frac{y_i - x_i}{n^4}.$$

Kładę

$$(93) \quad f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi_i(x)}{A_i}.$$

Dla każdej wartości x conajwyżej jeden wyraz szeregu (93) jest odmiennym od zera.

Mamy

$$(94) \quad f(x) = \frac{\varphi_i(x)}{A_i} \quad \text{dla } x_i \leq x \leq y_i,$$

zaś $f(x) = 0$ dla wartości x nie należących do żadnego z przedziałów (x_i, y_i) , t. j. we wszystkich punktach zbioru E.

¹⁾ Por. np. W. Sierpiński: „Zarys teorii mnogości”. (Warszawa, skład gł. Wende, 1912), str. 114.

Możemy więc napisać

$$(95) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left\langle \begin{array}{c} \cos nx \\ \sin nx \end{array} \right\rangle dx = \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{A_i} \int_{x_i}^{y_i} \varphi_i(x) \left\langle \begin{array}{c} \cos nx \\ \sin nx \end{array} \right\rangle dx.$$

Każda z całek prawej strony równania (95) jest, jakśmy to przed chwilą nadmienili, mniejszą od

$$\frac{A_i (y_i - x_i)}{n^4};$$

mamy więc z uwagi na (95)

$$(96) \quad \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left\langle \begin{array}{c} \cos nx \\ \sin nx \end{array} \right\rangle dx \right| \leq \\ \leq \frac{1}{\pi n^4} \sum_{i=1}^{i=\infty} (y_i - x_i) \leq \frac{2}{n^4}.$$

Niechaj wzór

$$(97) \quad f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

daje rozwinięcie funkcji $f(x)$ na szereg Fouriera; nierówność (96) przybiera postać

$$|\alpha_n| \leq \frac{2}{n^4}; \quad |\beta_n| \leq \frac{2}{n^4},$$

skąd

$$(2) \quad \lim_{n=\infty} n^3 \alpha_n = \lim_{n=\infty} n^3 \beta_n = 0.$$

Niechaj szereg

$$(98) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

będzie szeregiem trygonometrycznym o współczynnikach dążących do zera wszędzie rozbieżnym (szereg p. H. Steinhausa — podany w pracy, cytowanej w § I, sub. 3).

Niechaj wreszcie szereg

$$(99) \quad \frac{k_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} k_n \cos nx + l_n \sin nx,$$

będzie formalnym iloczynem szeregów tryg. (97) i (98).

W myśl twierdzenia § III, z uwagi na (2), współczynniki szeregu (99) dążą do zera równocześnie z $\frac{1}{n}$;

w myśl twierdzenia § IV, z uwagi na to, iż z określenia $f(x) = 0$ dla wszystkich punktów zbioru E, szereg (99) jest zbieżnym dla wszystkich punktów zbioru E;

w myśl twierdzenia § V, z uwagi na to, iż podług (94) $f(x) \neq 0$ dla wszystkich punktów przedziału $(0, 2\pi)$ nie należących do zbioru E, szereg (99) jest poza punktami zbioru E, wszędzie rozbieżnym na odcinku $(0, 2\pi)$.

Szereg (99) jest więc szeregiem, którego istnienie zostało zapowiedziane w § I, sub. 3.

IX. Post scriptum 1.

Zasadzie umiejscowienia nadają niekiedy wystowienie odmienne od podanego w § I i VI.

Mówią: „zbieżność szeregu trygonometrycznego

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

o współczynnikach dążących do zera (równocześnie z $\frac{1}{n}$) dla danej wartości $x = x_0$, zależy wyłącznie od zachowania się w otoczeniu owej wartości $x = x_0$ funkcji

$$F(x) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

będącej sumą szeregu, otrzymanego przez formalne dwukrotne przecałkowanie (wyraz za wyrazem) szeregu trygonometrycznego danego“.

Albo, wyrażając się ściślej:

„Zakładamy, że współczynniki szeregów trygonometrycznych

$$(100) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \cos nx + d_n \sin nx$$

i

$$(101) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \gamma_n \cos nx + \delta_n \sin nx,$$

dążą do zera równocześnie z $\frac{1}{n}$;

zakładamy pozatem, że funkcje ciągłe

$$(102) \quad F(x) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n \cos nx + d_n \sin nx}{n^2}$$

i

$$(103) \quad \Phi(x) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\gamma_n \cos nx + \delta_n \sin nx}{n^2},$$

mają tą samą wartość dla wszystkich punktów przedziału

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$$(104) \quad F(x) = \Phi(x) \quad \text{dla} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,$$

jeżeli (przy tych założeniach) jeden z szeregów danych ((100) i (101)) jest zbieżnym dla $x = x_0$, to drugi jest również zbieżnym dla $x = x_0$; ogólniej: z sumowalności podług r -tej średniej arytmetycznej jednego z szeregów danych ((100 i 101)) dla $x = x_0$ wynika sumowalność podług r -tej średniej arytm. dla $x = x_0$ drugiego z nich“.

D o w ó d. Oczywiście twierdzenie będzie udowodnionym, gdy wykazemy zbieżność szeregu

$$(105) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} (c_n - \gamma_n) \cos n x + (d_n - \delta_n) \sin n x,$$

dla $x = x_0$.

Z uwagi na założenie (104) suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n - \gamma_n}{n^2} \cos n x + \frac{d_n - \delta_n}{n^2} \sin n x,$$

równa się zeru dla wszystkich punktów przedziału

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Wynika stąd bezpośrednio sumowalność metodą Riemanna szeregu (105) dla

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,$$

z sumą uogólnioną równą zeru.

Prócz szeregu (105) istnieje jednak inny szereg trygonometryczny o współczynnikach dążących do zera, mający sumę równą zeru w przedziale

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Jest to „zero identyczne“, szereg trygonometr. o wszystkich współczynnikach równych zeru. Możemy więc stosować twierdzenie § VI i orzec zbieżność szeregu (105) dla $x = x_0$.

c. b. d. d.

X. Post scriptum 2.

W założeniach twierdzenia § IV, możnaby, nie zmieniając istoty rozumowań, zastąpić warunek (2) przez założenie ogólniejsze:

„szeregi

$$\sum |\alpha_n|, \quad \sum |\beta_n|,$$

oraz szereg

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\sum_{m=n}^{m=\infty} |\alpha_m| + \sum_{m=n}^{m=\infty} |\beta_m| \right),$$

są zbieżne“.

RÉSUMÉ.

Al. Rajchman:

Sur le principe de localisation de Riemann.

Communication annoncée le 9.II. 1918.

Présentée par St. Mazurkiewicz.

J'ai essayé en ce qui précède de mettre sous une forme aussi simple et maniable qu'il m'était possible, un théorème sur les séries trigonométriques découvert par Riemann et formulé dans son célèbre mémoire („Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique“. Oeuvres de Riemann, trad. par L. Laugel, Paris, 1898), sous une forme un peu obscure.

Ce théorème équivaut, au fond, à la proposition suivante:

„Soient

$$(A) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

et

$$(B) \quad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x,$$

deux séries trigonométriques.

Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} a_n &= \lim_{n=\infty} b_n = 0, \\ \lim_{n=\infty} n^s \alpha_n &= \lim_{n=\infty} n^s \beta_n = 0. \end{aligned}$$

La série (B) est alors nécessairement convergente quel que soit x .

Supposons que la somme de la série (B) soit nulle pour une valeur donnée de x $x = x_0$.

Soient k_n et l_n des quantités déterminées par les formules de multiplication des séries trigonométriques

$$k_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \alpha_{n-p} + b_p \beta_{n-p},$$

$$l_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a_p \beta_{n-p} + b_p \alpha_{n-p};$$

(on pose

$$a_{-n} = a_n; \quad b_{-n} = -b_n$$

$$\alpha_{-n} = \alpha_n; \quad \beta_{-n} = -\beta_n).$$

Dans ces conditions on peut affirmer que la série

$$\frac{k_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} k_n \cos n x_0 + l_n \sin n x_0$$

est convergente et que sa somme est égale à zéro“.

En appliquant cette proposition à une série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro partout divergente (construite par M. H. Steinh aus: „Sur une série trigonométrique

divergente". Comptes Rendus de la Société Scientifique de Varsovie, 1912. V Année. Fasc. 3), (série (A)); et une série de Fourier convenablement choisie (série (B)), je prouve l'existence d'une série trigonométrique convergente en tous les points d'un ensemble parfait arbitrairement donné sur le segment $(0, 2\pi)$, qui est divergente pour toutes les autres valeurs comprises entre 0 et 2π .

Après avoir remarqué que le procédé de sommation de Riemann¹⁾ n'est, au moins pour les séries dont le terme général tend vers zéro quand son rang augmente, qu'un cas particulier du procédé des moyennes arithmétiques je donne à ce qu'on appelle „le principe de localisation de Riemann“ la forme généralisée suivante:

„Étant données deux séries trigonométriques à coefficients tendant vers zéro, sommables toutes les deux par le procédé de moyennes arithmétiques dans un intervalle

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon),$$

(ou bien pour tous les points de cet intervalle sauf ceux d'un ensemble E, pourvu que E ne contienne aucun sous-ensemble parfait) vers la même valeur limite,

¹⁾ En suivant la terminologie adoptée par M. H. Lebesgue dans ses „Leçons sur les séries trigonométriques“ j'appelle „le procédé de Riemann“ le procédé de sommation, qu'il consiste d'attacher à une série

(a)
$$\sum A_n$$

la limite

(b)
$$\lim_{\alpha=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2 \alpha^2}$$

en guise de somme.

Je prouve que, pourvu que A_n tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'existence de la limite (b) entraîne la sommabilité de la série (a) par le procédé de troisième moyenne arithmétique. Ce résultat se déduit très facilement d'une proposition „sur la possibilité de différencier une série de Fourier terme à terme“ que j'ai publiée dans „Prace matematyczno-fizyczne“, vol. XXVIII, Varsovie, 1917.

si l'une des séries données est convergente (eventuellement: sommable par le procédé de la moyenne arithmétique d'un ordre donné k) pour $x = x_0$, l'autre l'est également“.

Pour établir ce théorème, il fallait prouver préalablement que la série à termes tous nuls est la seule série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, qui soit sommable par le procédé des moyennes arithmétiques et ait la somme égale à zéro pour toutes les valeurs de l'intervalle $(0, 2\pi)$ (plus généralement: pour toutes les valeurs sauf celles d'un ensemble E , pourvu que E ne contienne pas de sous-ensemble parfait).

J'ai démontré ce résultat dans une note publiée dans le journal viennois „Monatshefte für Mathematik und Physik“ (1915, vol. XXVI, pages 264—288).

On obtient le principe de localisation classique en remplaçant dans notre énoncé le procédé des moyennes arithmétiques par celui de Riemann.

Sous cette forme le principe peut être établi sans recours au notre théorème sur l'unicité du développement trigonométrique sommable par le procédé des moyennes arithmétiques.

2. F. J. Wiśniewski:

Własności magnetyczne wodoru i budowa cząsteczki tlenu dwuatomowego.

Komunikat zgłoszony dn. 6 Lutego 1918 r.

Przedstawił J. Wierusz-Kowalski.

Wstęp.

W pracy poniższej celem moim jest znalezienie związku między stałą diamagnetyczną wodoru μ_{H_2} a stałymi powszechnymi. Podstawą mych obliczeń są następujące założenia:

1. Gęstość energii magnetycznej w próżni równa się sumie algebraicznej: a) z gęstości energii magnetycznej tegoż pola w środowisku materialnym o stałej magnetycznej μ , oraz b) albo z pracy wykonanej przez to pole na cząsteczkach środowiska i potrzebnej do nadania cząsteczkom orientacji wymaganej przez zewnętrzne pole o ile na to pozwala ruch drobinowy, albo też z energii utraconej przez cząsteczki pod wpływem pola na rzecz tegoż pola.

2. Budowa cząsteczek jest analogiczna do budowy Bohr'a.

Opierając się na tych hipotezach, otrzymamy szukane wzory oraz podamy zupełnie nowy dowód wzorów na indukcje para- i diamagnetyczne podanych na innej drodze przez Langevin'a.

Moment magnetyczny cząsteczki wodoru.

Według Bohr'a cząsteczka wodoru składa się z dwu jąder dodatnich i dwu elektronów. Elektrony krążą po wspólnej orbicie kołistej, znajdując się na krańcach jednej średnicy tego koła. Wspólna orbita tych elektronów jest płaska i przecina prostą, łączącą obydwa jądra, w punkcie równoodległym od nich pod kątem prostym.

Ażeby obliczyć moment magnetyczny cząsteczki wodoru, będziemy szukać wyrażenia jego pola magnetycznego w odległości d od środka orbity na prostej przechodzącej przez obydwa jądra.

$$\bar{H}_x = \frac{2}{c} \cdot \frac{e \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}}{[V d^2 + r^2]^3},$$

skaąd dla bardzo małych r względem d :

$$\bar{H}_x = 2 \cdot \left(\frac{e}{c}\right) \cdot \frac{r^2 \cdot \dot{\theta}}{d^3}.$$

Porównyując to wyrażenie natężenia pola cząsteczki wodoru, z wyrażeniem natężenia pola magnesu o momencie M w odległości d od środka magnesu na osi magnetycznej, a które pisze się:

$$H_x = 2 \cdot \frac{M}{d^3},$$

otrzymamy dla M t. j. momentu magnetycznego cząsteczki wodoru:

$$M = \left(\frac{e}{c}\right) \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}.$$

Wyrażenie to dla momentu magnetycznego cząsteczki postaramy się otrzymać na innej drodze, która nam wykaże mechanizm, na którego podstawie cząsteczka w polu magnetycznym zachowuje się jak magnes.

Wyobraźmy sobie, że cząsteczka wodoru zbudowana jak powyżej objaśniono, znajduje się w polu magnetycznym zewnętrznym H . Niech oś z układu, którego początek jest w środku orbity elektronów cząsteczki) będzie równoległa do siły H , a płaszczyzna orbity niech przechodzi przez oś y , będąc nachyloną względem osi x pod kątem θ .

Siła mechaniczna pola H jest F , przyczem:

$$F = \frac{e}{c} [v \cdot H] \quad (v \text{ — szybkość elektronu})$$

Jej składowe F_x i F_y są:

$$F_x = \frac{e}{c} v_y \cdot H; \quad F_y = - \frac{e}{c} v_x \cdot H \quad (F_z = 0)$$

Jeżeli przez α oznaczymy kąt, jaki tworzy promień wodzący r elektronu z osią y , to dla v_x , v_y otrzymamy:

$$v_x = -v \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta; \quad v_y = v \cdot \sin \alpha,$$

skąd dla F_x i F_y :

$$F_x = \frac{e}{c} \cdot v \cdot H \cdot \sin \alpha; \quad F_y = \frac{e}{c} \cdot v \cdot H \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Składowa F_x będzie się starać obrócić płaszczyznę orbity elektronów naokoło osi y .

Rzut siły F na prostą prostopadłą do płaszczyzny orbity i przechodzącą przez punkt przyłożenia tej siły, a więc przez dany elektron będzie, gdy oznaczymy go (rzut) przez F_n :

$$F_n = F_x \cdot \sin \theta = \frac{e}{c} \cdot v \cdot H \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta.$$

Identyczna siła F_n przyłożona jest do drugiego elektronu, symetrycznie położonego względem pierwszego, ale o kierunku wprost przeciwnym, tak że obydwie siły F_n tworzą parę sił, obracających płaszczyznę orbity naokoło osi y .

Jeżeli nadać płaszczyźnie orbity obrót o kąt θ , to siły F_n wykonają pracę:

$$2F_n \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot d\theta = 2 \cdot r \cdot \left(\frac{e}{c}\right) \cdot v \cdot H \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin \theta \cdot d\theta.$$

Praca potrzebna ażeby obrócić płaszczyznę orbity od kąta 0 do kąta θ , jest:

$$2 \cdot r \cdot \left(\frac{e}{c}\right) \cdot v \cdot H \cdot \sin^2 \alpha \cdot \int_0^\theta \sin \theta \, d\theta.$$

Wykonawszy działania, otrzymamy dla powyższej pracy:

$$4 \cdot \left(\frac{e}{c}\right) \cdot r \cdot v \cdot H \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Jest to praca potrzebna do skrócenia płaszczyzny orbity elektronów z pozycji naturalnej w polu zewnętrznym magnetycznym H , t. j. dla kąta $\theta = 0$ na pozycję przymusową pod kątem θ .

Jest to więc jednocześnie energia potencjalna cząsteczki wodoru względem pola magnetycznego H .

Przyrównywując tę energję potencjalną do energji potencjalnej magnesu o momencie M , którego oś nachylona jest względem pola H pod kątem θ i która (energja) pisze się:

$$2M \cdot H \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

otrzymamy dla momentu cząsteczki wodoru M :

$$M = 2 \cdot \left(\frac{e}{c} \right) \cdot r \cdot v \sin^2 \alpha .$$

Że jednak średnia wartość $\sin^2 \alpha$ jest równa $1/2$, oraz ze względu że $v = r \cdot \dot{\theta}$, otrzymamy:

$$M = \left(\frac{e}{c} \right) \cdot r^2 \dot{\theta} ,$$

a więc tak jak i poprzednią metodą. Różnica polega na tem, że dowód ostatni posługuje się wyobrażeniem o mechanizmie działania pola H na cząsteczkę jako magnes.

Według Bohra mamy:

$$m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} = \frac{h}{2\pi} ,$$

gdzie h — stała Planck'a, a m — masa elektronu, skąd dla momentu magnetycznego cząsteczki wodoru:

$$M = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{e}{m} \right) \left(\frac{h}{c} \right) .$$

Podstawiając wartości liczebne:

$$\frac{e}{m} = 5,31 \cdot 10^{17} ; \quad h = 6,548 \cdot 10^{-27} ; \quad c = 3 \cdot 10^{10} ,$$

otrzymamy dla liczebnej wartości momentu magnetycznego cząsteczki wodoru dwuatomowej

$$M = 1,84 \cdot 10^{-20} .$$

Powyższe wyrażenie momentu daje się uogólnić na dowolne cząsteczki o ν wolnych elektronach.

Uprytomniając sobie poprzedni rachunek wykonany w celu obliczenia momentu cząsteczki wodoru, zauważymy, że war-

tość tego momentu zależy wyłącznie od liczby elektronów i od powierzchni $r^2\dot{\theta}$, jaką promień wodzący każdego z elektronów zakreśli w jednostce czasu.

A że według założenia Bohra $r^2\dot{\theta}$ jest wielkością stałą dla wszystkich elektronów i równa się $\frac{h}{2\pi\mu}$, więc moment magnetyczny cząsteczki zależy wyłącznie od liczby elektronów, jakie zawiera.

W ten sposób otrzymujemy dla momentu magnetycznego cząsteczki o ν elektronach:

$$M = \frac{\nu}{4\pi} \left(\frac{e}{m} \right) \cdot \left(\frac{h}{c} \right).$$

Powyższe wyrażenie wskazuje nam, że: Moment magnetyczny cząsteczek jest całkowitą wielokrotnością liczby

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{e}{m} \right) \cdot \left(\frac{h}{c} \right),$$

której wartość jest: $0,92 \cdot 10^{-20}$.

Porównyując powyższą liczbę z momentem magnetycznym magnetonu Weissa, którego wartość liczebna równa się:

$$0,165 \cdot 10^{-20},$$

zauważymy, że są wielkościami tego samego rzędu.

Mechanizm działania zewnętrznego pola magnetycznego na cząsteczki, który był podstawą naszego obliczenia momentu magnetycznego, wskazuje na dwa możliwe rezultaty tego wpływu zewnętrznego pola, a mianowicie:

1. Cząsteczka jako całość nie ulegnie żadnemu obrotowi pod wpływem pary sił przyłożonej do jej elektronów, a jedynie orbita elektronów ulegnie pod wpływem tych sił deformacji, polegającej między innymi na obróceniu się płaszczyzny orbity elektronów w kierunku wskazanym przez pole, czyli, inaczej mówiąc, pole zewnętrzne wpłynie jedynie na wewnętrzną strukturę cząsteczki.

2. Pole zewnętrzne nie będzie miało wpływu na wewnętrzną strukturę cząsteczki, czyli że ta ostatnia zachowuje się jak ciało sztywne, a więc przyłożone siły do elektronów będą mogły jedynie wywołać obrót całej cząsteczki, nie mogąc być zużyte na deformacje orbit elektronów, gdyż te zachowują się jak utwory sztywne i nie dające się przesunąć wewnątrz cząsteczki.

Poniżej rozpatrzmy bliżej obydwa przypadki, przede wszystkim jednak ostatni i obliczymy energję, jaką traci pole zewnętrzne na uskutechnienie obrotów cząsteczek wywołanych wewnętrznym polem magnetycznym.

Następnie przejdę do przypadku, w którym wewnątrz cząsteczki ulega zmianom pod wpływem pola, oraz do zbadania wpływu tych zmian na stan energetyczny wewnętrzny cząsteczek.

Energja pola magnetycznego w środowisku wodoru.

Cząsteczki o momencie magnetycznym M starają się, jak widzieliśmy, przyjąć takie położenie, ażeby ich bieguny były zwrócone do biegunów przeciwnych znaków magnesu wzbudzającego pole H . Energję potrzebną na wykonanie tej pracy dostarcza energja magnetyczna pola zewnętrznego H i jej to wartość poniżej postaram się oznaczyć. Osi magnesów mają najrozmaitsze kierunki, gdyż działaniu pola H przeciwstawia się ruch drobinowy i wzajemne zdarzenia cząsteczek, tak, że o całkowitem zwróceniu wszystkich osi równoległe i w kierunku pola nie może być mowy, jedynie tylko to zwrócenie się cząsteczek może być częściowe i to tem znaczniejsze, im silniejsze jest pole. Energja potencjalna cząsteczki będącej magnesem o momencie M względem pola H , z którym oś cząsteczki tworzy kąt α , jest:

$$2M \cdot H \sin^2 \alpha/2.$$

Obliczmy teraz energję potencjalną N_0 cząsteczek, znajdujących się w polu magnetycznym w jednostce objętości i których osi mają wymuszone kierunki takie, ażeby były jednakowo rozmieszczone we wszystkich kierunkach. Jest to stan, który ma miejsce zawsze w każdym gazie w chwili utworzenia pola H

i jest stanem w polu H nienaturalnym, lecz wymuszonym a — więc nietrwałym.

Prawdopodobieństwo, ażeby oś danego magnesu tworzyła z kierunkiem linii sił kąt α , jest:

$$\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Liczb cząsteczek, których osi magnetyczne tworzą z kierunkiem linii sił kąt α , jest:

$$\frac{1}{2} N_0 \sin \alpha \cdot d\alpha = 2 \cdot N_0 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot d\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

a ich energia potencjalna względem zewnętrznego pola H jest:

$$4 \cdot N_0 \cdot M \cdot H \cdot \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot d\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Energja potencjalna wszystkich N_0 cząsteczek, rozmieszczonych równomiernie we wszystkich kierunkach, będzie:

$$4 \cdot N_0 \cdot M \cdot H \cdot \int_0^\pi \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot d\frac{\alpha}{2}.$$

Wykonywując wskazane działania i oznaczając tę energję przez U , otrzymamy:

$$U = N_0 \cdot M \cdot H.$$

Przejdę teraz do obliczenia energii potencjalnej cząsteczek o takim rozmieszczeniu osi magnetycznych, ażeby stan gazu jaki one tworzą, był w równowadze stałej w polu magnetycznym zewnętrznym.

Zgodnie z zasadami mechaniki statystycznej liczba cząsteczek, których oś w tym stanie będzie tworzyć z polem H kąt α , jest:

$$2 \cdot M_0 \cdot A \cdot e^{-\frac{2M \cdot H \sin^2 \alpha/2}{r \cdot T}} \cdot \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right) d\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

gdzie r — stała gazów; T — temperatura;
a A stała jest wyznaczona z warunku:

$$2 \cdot N_0 \cdot A \int_0^\pi e^{-\frac{2 \cdot M \cdot H \sin^2 \alpha/2}{r \cdot T}} \cdot \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) d \left(\frac{\alpha}{2} \right) = N_0.$$

który daje dla A:

$$A = \frac{2 \cdot M \cdot H}{r \cdot T} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{2 \cdot M \cdot H}{r \cdot T}}}$$

Energja potencjalna powyższych cząsteczek jest:

$$4 \cdot M \cdot N_0 \cdot H \cdot A \cdot e^{-\frac{2 \cdot M \cdot H \cdot \sin^2 \alpha/2}{r \cdot T}} \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot d \frac{\alpha}{2},$$

zaś energja potencjalna wszystkich N_0 w stanie równowagi w polu zewnętrznem H jest:

$$4 \cdot M \cdot N_0 \cdot H \cdot A \cdot \int_0^\pi e^{-\frac{2 \cdot M \cdot H \sin^2 \alpha/2}{r \cdot T}} \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot d \frac{\alpha}{2}.$$

Wykonawszy działanie i oznaczywszy poprzednie energie przez U' , otrzymamy:

$$U' = \frac{N_0 \cdot A \cdot r^2 T^2}{M \cdot H} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2 \frac{M \cdot H}{r \cdot T}} \right) - \frac{M \cdot H}{r \cdot T} \cdot e^{-2 \frac{M \cdot H}{r \cdot T}} \right\}$$

Podstawiając wartość A otrzymamy:

$$U' = N_0 \cdot r \cdot T - 2 \cdot N_0 \cdot M \cdot H \frac{1}{e^{\frac{2 \cdot M \cdot H}{r \cdot T}} - 1}.$$

Praca potrzebna, ażeby stan wymuszony o energii potencjalnej U przeprowadzić na stan w równowadze z polem H o energii potencjalnej U' równa się $U - U' = \bar{v}$, gdzie \bar{v} jest praca wykonana przez pole o natężeniu H na N_0 cząsteczkach środowiska gazowego:

$$\bar{z} = 2 \cdot N_0 \cdot M \cdot H \cdot \left\{ \frac{1}{e^{2 \cdot \frac{M \cdot H}{r \cdot T}} - 1} + \frac{1}{2} \right\} - N_0 \cdot r \cdot T.$$

Rozwijając wyrażenie w nawiasach na szereg Cauchy'ego według wzoru:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{720}x^3 + \dots$$

otrzymamy pracę \bar{z} w postaci szeregu:

$$\bar{z} = \frac{1}{3} \frac{N_0 \cdot M^2}{r \cdot T} \cdot H^2 - \frac{1}{45} \frac{N_0 \cdot M^4}{r^3 \cdot T^3} \cdot H^4 + \dots$$

zbieżnego dla:

$$\frac{M \cdot H}{r \cdot T} < \pi.$$

Podstawiając uogólnione wyrażenie na M , otrzymamy dla \bar{z} :

$$\begin{aligned} \bar{z} = & \frac{\nu^2}{24\pi^2} \cdot \frac{N_0}{r \cdot T} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \cdot \left(\frac{h}{c} \right)^2 \cdot H^2 - \frac{\nu^4}{1140\pi^4} \cdot \\ & \cdot \frac{N_0}{r^3 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{e}{m} \right)^4 \left(\frac{h}{c} \right)^4 \cdot H^4 + \dots \end{aligned}$$

Jest to praca wykonana przez pole magnetyczne H , wzbudzone na N_0 cząsteczkach o wewnętrznej strukturze sztywnej, przyczem pole zewnętrzne stara się nadać każdej cząsteczce pewną zupełnie wyraźną pozycję, w czem mu przeszkadza ruch drobinowy cząsteczek. \bar{z} jest to zatem praca pola H , użyta na zaprowadzenie stanu równowagi powstającemu ze współdziałania obu czynników pola magnetycznego i ruchu drobinowego.

Wpływ pola magnetycznego na energję wewnętrzną cząsteczki.

Niech będzie układ osi $xy.z$, tak żeby siła magnetyczna H była równoległa do osi z . Zamiast osi x i y wprowadzę osi ρ i θ związane z poprzednimi wzorami:

$$x = \rho \cdot \cos\theta; \quad y = \rho \sin\theta.$$

Energja kinetyczna obu elektronów cząsteczki będzie:

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \right) + \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}'^2 + \rho'^2 \cdot \dot{\theta}'^2 + \dot{z}'^2 \right),$$

gdzie znak ' służy do odróżnienia wielkości, odnoszących się do dwu różnych elektronów.

Dla przyrostu wirtualnego funkcji sił U mamy:

$$\begin{aligned} \delta U = \delta f(\rho, \rho', \theta, \theta', z, z') + \frac{eH}{c} \cdot \rho \cdot \dot{\theta} \delta \rho - \frac{eH}{c} \rho \dot{\rho} \delta \theta + \\ + \frac{eH}{c} \cdot \rho' \dot{\theta}' \delta \rho' - \frac{eH}{c} \rho' \dot{\rho}' \delta \theta'; \end{aligned}$$

f — jest to funkcja sił wewnętrznych cząsteczki, która pod nieobecność pola zewnętrznego H jest równa:

$$f = \frac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} \quad (\alpha \text{ — stała})$$

Równanie ruchu elektronu otrzymamy z równań Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq} \right) - \frac{dT}{dq} = Q, \quad (q \text{ — parametr})$$

gdzie

$$\delta U = \Sigma Q dq,$$

Równanie ruchu dla każdego elektronu będzie:

$$m \ddot{\rho} - m \cdot \rho \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{df}{d\rho} + \frac{eH}{c} \rho^2 \dot{\theta}$$

$$m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\theta}^2) = \frac{df}{d\theta} - \frac{eH}{c} \rho \dot{\rho}$$

$$m \cdot \ddot{z} = \frac{df}{dz}.$$

Równania te z całkujemy metodą przybliżeń kolejnych. Za kładam zatem, że funkcja f dana jest równaniem, jakie ma miejsce wewnątrz cząsteczki pod nieobecność pola H .

Równania ruchu redukują się zatem do następujących:

$$m \cdot \ddot{\rho} - m \cdot \rho \cdot \dot{\theta}^2 = - \frac{\alpha \cdot \rho}{[\sqrt{\rho^2 + z^2}]^3} + \frac{eH}{c} \cdot \rho^2 \cdot \dot{\theta}$$

$$m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\theta}) = - \frac{eH}{c} \rho \cdot \dot{\rho}$$

$$m \ddot{z} = - \frac{\alpha z}{[\sqrt{\rho^2 + z^2}]^3}$$

Z pierwszego i trzeciego równania otrzymujemy:

$$(\alpha) \quad m \ddot{\rho} - m \cdot \rho \dot{\theta}^2 = - m \frac{\rho}{z} \cdot \ddot{z} + \frac{eH}{c} \cdot \rho^2 \cdot \dot{\theta},$$

zaś z drugiego równania:

$$(\beta) \quad m \cdot \rho^2 \left(\dot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{eH}{c \cdot m} \right) = A \quad (A - \text{stała pól})$$

Zakładając, że ustanowione zewnętrzne pole nie zmienia udowy cząsteczki, a więc że rzut stałej pól na płaszczyznę (xy) będzie miał tę samą wartość liczebną, dalej że rzut ρ promienia wodzącego elektronu dla każdego kąta nachylenia θ będzie miał tę samą wartość, co i pod nieobecność pola, otrzymamy że

$$A = m \rho^2 \bar{\omega},$$

gdzie $\bar{\omega}$ — jest szybkością kątową elektronu po płaszczyźnie (xy) pod nieobecność pola H .

Skąd:

$$\dot{\theta} = \bar{\omega} - \frac{1}{2} \frac{eH}{c \cdot m}.$$

Podstawiając teraz zamiast prawdziwej szybkości kątowej $\dot{\theta}$ jej wartość średnią $\bar{\dot{\theta}}$, otrzymamy średnią wartość dla szybkości kątowej $\bar{\theta}$:

$$\bar{\dot{\theta}} = \bar{\omega} - \frac{1}{2} \frac{eH}{m \cdot c}.$$

Z równania (β) otrzymamy dalej, że średnio:

$$\bar{\rho} = \text{Const}.$$

Podstawiając w równanie (α) zamiast rzeczywistych wartości średnie, otrzymamy:

$$\ddot{z} = \left(\bar{\omega}^2 - \frac{1}{4} \frac{e^2 \cdot H^2}{m^2 \cdot c^2} \right) \cdot z.$$

skąd dla z i \dot{z} :

$$z = D \sin \left[\sqrt{\bar{\omega}^2 - \frac{1}{4} \frac{e^2 H^2}{m^2 c^2}} \right] \cdot t$$

$$\dot{z} = D \cdot \sqrt{\bar{\omega}^2 - \frac{1}{4} \frac{e^2 H^2}{m^2 c^2}} \cdot \cos \left[\sqrt{\bar{\omega}^2 - \frac{1}{4} \frac{e^2 H^2}{m^2 c^2}} \right] \cdot t.$$

Dla energii kinetycznej każdego z elektronów otrzymamy średnio:

$$T' = \frac{1}{2} \rho^2 \cdot \bar{\omega}^2 + \frac{r^2}{6} \cdot m \bar{\omega}^2 - \frac{1}{2} \rho^3 \bar{\omega} \cdot \frac{eH}{c \cdot m} - \frac{1}{24} \cdot \frac{e^2 H^2}{c^2 \cdot m} \cdot r^2,$$

gdź $\frac{D^2}{2} = \frac{r^3}{3}$ oraz $\bar{\rho} = 0$.

Ze względu jednak, że energia kinetyczna elektronu w nieobecności pola H jest:

$$T = \frac{1}{2} \rho^2 \bar{\omega}^2 + m \frac{r^2}{6} \cdot \bar{\omega}^2$$

otrzymujemy dla różnicy ($T' - T$):

$$T' - T = - \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot \bar{\omega} \cdot \frac{eH}{m \cdot c} - \frac{1}{24} \cdot \frac{e^2 \cdot H^2}{m \cdot c^2} \cdot r^2.$$

Z założenia o niezmienności kształtu orbity elektronowej wnosimy również o niezmienności wartości liczebnej funkcji sił wewnątrz cząsteczki, tak że zmiana energii cząsteczek redukuje się do zmiany energii kinetycznej ich elektronów, a więc ze względu, że cząsteczka wodoru ma dwa elektrony, zmiana energii wewnętrznej cząsteczki wodoru jest:

$$T'_1 - T_1 = - \rho^2 \cdot \bar{\omega} \cdot \frac{eH}{m \cdot c} - \frac{1}{12} \frac{e^2 H^2}{m c^2} \cdot r^2.$$

Dalej, ze względu że szybkość kątowna $\bar{\omega}$ może mieć znak

tak dodatni jak ujemny, więc średnio zmiana energii cząsteczki będzie:

$$T'_1 - T_1 = - \frac{1}{12} \frac{e^2 r^2}{m \cdot c^2} \cdot H^2.$$

Wnosimy stąd, że pole magnetyczne zewnętrzne pobudza cząsteczkę do wydzielenia części swej wewnętrznej energii, wskutek czego energia wewnętrzna cząsteczki w polu magnetycznym jest mniejsza, niż pod nieobecność tego pola.

Wartość energii straconej przez N_0 cząsteczek wodoru znajdujących się w jednostce objętości jest:

$$- \frac{1}{12} \cdot \frac{N_0 \cdot e^2 \cdot r^2 \cdot H^2}{m \cdot c^2}.$$

Powyższe wyrażenie straconej energii wewnętrznej daje się uogólnić na cząsteczki dowolne, zbudowane analogicznie do cząsteczki wodoru, a więc mające dla swych elektronów jedną wspólną orbitę o promieniu r .

Jeżeli taka cząsteczka posiada na wspólnej orbicie ν elektronów, to stracona energia wewnętrzna N_0 cząsteczek tego ciała wskutek utworzenia zewnętrznego pola magnetycznego o natężeniu H jest:

$$- \frac{\nu}{24} \cdot \frac{N_0 \cdot e^2 \cdot r^2 \cdot H^2}{m \cdot c^2}.$$

Zakładam, że energję straconą przez cząsteczki zyskuje pole magnetyczne, które pobudziło te cząsteczki do jej wydzielenia. Oznaczając przyrost gęstości energii pola magnetycznego, wywołany wydzieleniem energii wewnętrznej przez N_0 cząsteczek przez U_0 , otrzymamy:

$$U_0 = \frac{\nu}{24} \cdot \frac{N_0 \cdot e^2 \cdot r^2 \cdot H^2}{m \cdot c^2}.$$

Stała magnetyczna wodoru.

Dla obliczenia stałej magnetycznej μ jakiegokolwiek środowiska będę postępował identycznie do tego, jak to uczyniłem

przy obliczaniu stałej dielektrycznej. Niech H oznacza natężenie pola magnetycznego w próżni. Dla gęstości energii magnetycznej w próżni mieć będziemy:

$$\frac{H^2}{8\pi}$$

Dla gęstości zaś energii tego pola w środowisku materialnym o stałej magnetycznej μ mamy:

$$\frac{H^2}{8\pi \cdot \mu}$$

Różnica w gęstości energii magnetycznej w próżni i środowisku o stałej magnetycznej μ , równa się zyskanej albo utraconej energii przez pole w próżni.

Rozpatrzę tu oddzielnie obydwa przypadki:

1) dotyczące cząsteczek o strukturze wewnętrznej, nie ulegającej deformacjom w polu magnetycznym;

2) dotyczące cząsteczek o strukturze wewnętrznej, ulegającej deformacji w polu magnetycznym.

W pierwszym przypadku mamy:

$$\frac{H^2}{8\pi \mu} = \frac{H^2}{8\pi} - \delta$$

skąd:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{8\pi \cdot \delta}{H^2}}$$

W drugim zaś przypadku:

$$\frac{H^2}{8\pi \mu} = \frac{H^2}{8\pi} + U_0$$

skąd:

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{8\pi \cdot U_0}{H^2}}$$

Podstawiając teraz wartości δ i U_0 , otrzymamy:

1) w przypadku pierwszym:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{16\pi \cdot N_0 \cdot M}{H} \left\{ \frac{1}{e^{\frac{2MH}{r_0 T}} - 1} + \frac{1}{2} \right\} + \frac{8\pi \cdot N_0 \cdot r_0 T}{H^2}}$$

lub też jeżeli $\frac{MH}{r \cdot T} < \pi$.

$$(A) \quad \mu = \frac{1}{1 - \frac{8\pi \cdot N_0 \cdot M^2}{3 \cdot r \cdot T} + \frac{8\pi \cdot N_0 \cdot M^4 \cdot H^4}{45 \cdot r_0^8 \cdot T^3} - \dots}$$

2) w przypadku drugim:

$$(B) \quad \mu = \frac{1}{1 + \frac{\nu}{3} \pi \cdot \frac{e^2 \cdot N_0 \cdot r^2}{m \cdot c^2}}$$

Jeżeli $\frac{8\pi \cdot N_0 \cdot M^2}{3 \cdot r \cdot T}$ i $\frac{\nu}{3} \pi \cdot \frac{e^2 \cdot N_0 \cdot r^2}{m \cdot c^2}$ są małe względem jedności, to otrzymamy dla μ w obu przypadkach:

$$1. (A') \quad \mu = 1 + \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{N_0 \cdot M^2}{r_0 T}$$

$$2. (B') \quad \mu = 1 - \frac{\nu}{3} \pi \cdot \frac{N_0 \cdot e^2 \cdot r^2}{m \cdot c^2}$$

skąd ze wzoru:

$$\mu = 1 + 4\pi k$$

dla indukcji magnetycznej k wynika:

1) dla ciał o cząsteczkach nie ulegających wewnętrznej deformacji:

$$(A'') \quad k_p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N_0 \cdot M^2}{r_0 T}$$

2) dla ciał o cząsteczkach ulegających pod wpływem pola wewnętrznej deformacji:

$$(B'') \quad k_d = - \frac{\nu}{12} \cdot \frac{N_0 \cdot e^2 \cdot r^2}{m \cdot c^2}$$

Ze znaków dla k_p i k_d wnosimy, że pierwsze są to ciała paramagnetyczne, drugie diamagnetyczne. Ze względu, że wodor jest ciałem diamagnetycznym, więc powinny jego własności magnetyczne być wyrażone wzorami (B).

Podstawiając $\nu = 2$ oraz:

$$r = \frac{h^2}{(3\sqrt{3} - 1) \cdot \pi^2 \cdot m \cdot c^2}$$

w równanie (B) otrzymamy dla stałej diamagnetycznej wodoru dwuatomowego:

$$\mu_{H_2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{(3\sqrt{3} - 1)^2} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^3 \cdot \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{N_0}{e^5} \cdot \frac{1}{c^2}}$$

Ze względu że dla wodoru μ_{H_2} nie wiele się różni od jedności, możemy dla μ_{H_2} otrzymać w przybliżeniu:

$$(\beta) \quad \mu_{H_2} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{(3\sqrt{3} - 1)^2} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^3 \cdot \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{N_0}{e^5} \cdot \frac{1}{c^2}$$

skąd dla k_{H_2} t. j. dla stałej indukcji diamagnetycznej wodoru:

$$(\gamma) \quad k_{H_2} = - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{[3\sqrt{3} - 1]^2} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^3 \cdot \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{N_0}{e^5} \cdot \frac{1}{c^2}$$

Podstawiając teraz wartości liczebne:

$$\left(\frac{e}{m}\right) = 5,31 \cdot 10^{17}; \quad e = 4,78 \cdot 10^{-10}; \quad h = 6,548 \cdot 10^{-27}; \quad N_0 = 4,33 \cdot 10^{19}$$

otrzymamy dla liczebnych wartości ($\mu_{H_2} - 1 = 4\pi k_{H_2}$)

$$(\mu_{H_2} - 1) = 6,8 \cdot 10^{-10}$$

$$k_{H_2} = - 5,49 \cdot 10^{-11}.$$

Ostatnia wartość liczebna na k_{H_2} doskonale się zgadza z doświadczalnie oznaczoną przez Efimowa, i która to wartość liczebna jest:

$$k_{H_2} = - 5,16 \cdot 10^{-11}.$$

Powyższa zgodność między k_{H_2} obliczonym teoretycznie a k_{H_2} oznaczonym doświadczalnie wskazuje na słuszność związków (α), (β), (γ) między stałymi magnetycznymi μ_{H_2} i k_{H_2} dla wodoru, a stałymi uniwersalnymi $\left(\frac{e}{m}\right) \cdot h$, e , N_0 i c , a więc i pośrednio na słuszność założenia, dotyczącego zdolności ulegania deformacjom wnętrza cząsteczki.

T l e n.

Poniżej zastosuję powyżej wyłożoną teorię własności magnetycznych, oraz poprzednio ogłoszone teorie stałej dielektrycznej do zbadania budowy cząsteczki tlenu dwuatomowego. Przedewszystkiem interesuje nas liczba elektronów, krążących po wspólnej orbicie i wywołujących własności ciał magnetyczne i elektryczne. Ze względu, że tlen jest ciałem paramagnetycznym, więc jego własności magnetyczne powinny się wyrazić wzorami (A) i (A').

Z powodu, że oznaczenia doświadczalne zostały wykonane dla k_p , więc zastosujemy wzór (A') w celu oznaczenia liczby elektronów, biorących udział w wywoływaniu własności paramagnetycznych tlenu.

Wzór (A') będzie się pisał w naszym przypadku:

$$k_{O_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{N_0 \cdot \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{e}{m} \right) \left(\frac{h}{c} \right) \right]^2}{r \cdot T} \cdot \nu^2,$$

gdzie ν — liczba elektronów.

Podstawiając wartości liczebne:

$$\left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{e}{m} \right) \cdot \left(\frac{h}{c} \right) \right] = 0,92 \cdot 10^{-20}; \quad r = 1,346 \cdot 10^{-16}$$

oraz dla temperatury $T = 291^\circ$ (Celsjusza 18) otrzymujemy dla k_{O_2} ze względu, że:

$$2,76 \cdot 10^{19} \leq N_0 \leq 4,5 \cdot 10^{19}$$

$$3,976 \cdot 10^{-8} \cdot \nu^2 \leq k_{O_2} \leq 0,48 \cdot 10^{-8} \cdot \nu^2,$$

dla $\nu = 1$ mieć będziemy:

$$10^{-8} \cdot 3,976 \leq k_{O_2} \leq 6,48 \cdot 10^{-8}$$

dla $\nu = 2$:

$$1,59 \cdot 10^{-7} \leq k_{O_2} \leq 2,59 \cdot 10^{-7}$$

dla $\nu = 3$:

$$3,28 \cdot 10^{-7} \leq k_{O_2} \leq 5,83 \cdot 10^{-7}$$

dla k_{O_2} daje nam doświadczenie wartość liczebną:

$$k_{O_2} = 1,6 \cdot 10^{-7},$$

a według Efimowa:

$$k_{O_2} = 1,25 \cdot 10^{-7}.$$

Liczba ν dająca dla k_{O_2} wartość liczebną najbardziej zbliżoną do wartości oznaczonej doświadczalnie jest $\nu = 2$. Dla $\nu = 1$ otrzymujemy wartości zbyt małe, dla $\nu = 3$ zbyt duże.

Wnosimy zatem, że w cząsteczce dwuatomewej tlenu magnetycznie czynne są dwa elektrony:

Opierając się na tym rezultacie, obliczymy promień r orbity wspólnej tym elektronom z wyrażenia na stałą dielektryczną tlenu, którą tu piszemy w postaci:

$$k_{O_2} - 1 = \frac{32 \cdot \pi^3 \cdot e^3 \cdot N_0 \cdot \nu}{h^2 \cdot \left(\frac{e}{\mu}\right)} \cdot r^4.$$

Podstawiając liczebne wartości wchodzących wielkości, oraz:

$$k_{O_2} - 1 = 0,0005394$$

otrzymujemy dla promienia orbity r :

$$0,59 \cdot 10^{-8} \leq r \leq 0,67 \cdot 10^{-8}.$$

Wielkość promienia r jest tego samego rzędu, jaką dają metody teorii kinetycznej gazów.

Mamy jednak inny sposób sprawdzenia wielkości liczebnej promienia r .

Na zasadzie teorii kinetycznej gazów obliczył Perrin promienie tak zwanych kul ochronnych cząsteczek, które, jak to

można sprawdzić w przypadku wodoru i helu, są dwa razy tak duże jak promienie orbit ich elektronów.

W samej rzeczy:

	Promień według Perrin'a	Promień orbity
wodór	$1,04 \cdot 10^{-8}$	$0,524 \cdot 10^{-8}$
hel	$0,84 \cdot 10^{-8}$	$0,335 \cdot 10^{-8}$

Uogólniając powyższy rezultat na inne pierwiastki, powinniśmy się spodziewać, że promień kuli ochronnej cząsteczki tlenu powinien być dwa razy większy w przybliżeniu, niż obliczony powyżej promień orbity elektronów cząsteczki tlenu.

Średnio dla promienia orbity dwu elektronów w cząsteczce tlenu mamy na zasadzie poprzednich rachunków:

$$r = 0,63 \cdot 10^{-8}.$$

Według obliczeń Perrin'a mamy dla promienia kuli ochronnej cząsteczki tlenu:

$$1,35 \cdot 10^{-8},$$

a więc wartość liczebna dwa razy większą, niż przypadająca na wartość promienia orbity elektronów.

Spełnienie się tego wniosku, otrzymanego przez uogólnienie związków liczebnych zachodzących u wodoru i helu, jest poniekąd jednym z pośrednich dowodów, że cząsteczka dwuatomowego tlenu zawiera dwa elektrony, nadające cząsteczce jej własności magnetyczne i dielektryczne.

Wnosimy z poprzedniego, że cząsteczka dwuatomowego tlenu jest identycznie zbudowana, jak cząsteczka dwuatomowego wodoru, a więc że zawiera dwa jądra dodatnie i dwa elektrony, krążące po wspólnej orbicie kołistej prostopadłej do prostej, łączącej obydwaj jądra i przechodzącej przez punkt na niej leżący równoległy do jąder. Środek orbity leży w punkcie przecięcia się płaszczyzny orbity z prostą łączącą oba jądra. Budowa jąder dodatnich w cząsteczce tlenu nie może być tak elementarna, jak budowa jąder w cząsteczce wodoru, gdyż natężenie pól elektrycznych tych jąder wyrażałoby się prawem Coulomb'a, co by prowadziło do liczebnej wartości stałej dielektrycznej dla tlenu równej wartości liczebnej stałej dielektrycznej

wodoru, oraz do promienia orbity elektronów równej $0,52 \cdot 10^8$ cm., co niema miejsca.

Ażeby więc zdać sprawę z większej wartości liczebnej stałej dielektrycznej i promienia r orbity elektronów tlenu, trzeba jądom dodatnim tlenu przypisać pewną strukturę mniej lub więcej skomplikowaną. Zbadanie powyższej struktury byłoby możliwe, gdybyśmy znali zachowanie się atomów tlenu pod względem dielektrycznym. Ostatecznie widzimy, że o ile budowa modeli wodoru i helu zadawalniała się jądrami o budowie elementarnej, o tyle model tlenu wymaga jąder, mających budowę złożoną, a więc wymaga wniknięcia do ich wnętrza i utworzenia modeli jąder.

Niezależnie od tego jednak, że nie znamy budowy jąder tlenu, można podać wzory wiążące stałe μ_{o_2} , k_{o_2} , k_{o_2} ze stałymi:

\hbar , $\left(\frac{e}{m}\right)$, e , N_0 , r_0 .

Mamy więc:

1° dla stałej paramagnetycznej tlenu:

$$a) \quad \mu_{o_2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3\pi} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{c}\right)^3 \cdot \frac{N_0}{r \cdot T}}$$

2° dla indukcji paramagnetycznej:

$$b) \quad k_{o_2} = \frac{1}{6\pi^2} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^2 \cdot \left(\frac{\hbar}{c}\right)^2 \cdot \frac{N_0}{r \cdot T}$$

3° dla stałej dielektrycznej tlenu:

$$c) \quad k_{o_2} = \frac{1}{1 - \frac{64 \cdot \pi}{(3,5)^4} \cdot \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^6 \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^3 \cdot \frac{N_0}{e^9}} \cdot$$

Félix Joachim de Wiśniewski:

**Les propriétés magnétiques de l'hydrogène
et la constitution de la molécule biatomique
de l'oxygène.**

Communication annoncée le 6.II 1918.

Présentée par J. Wierusz-Kowalski.

Ce travail est la continuation des articles déjà parus sur la théorie des constantes diélectriques de l'hydrogène et du hélium. Le but de ce travail est de donner une démonstration énergétique de la théorie du dia- et paramagnétisme proposé par M. Langevin, ainsi que la démonstration des liens qui ont lieu entre les constantes magnétiques et les constantes universelles. Les points de départ de la théorie sont, ainsi que dans la théorie des constantes diélectriques, les deux hypothèses suivantes:

1. La densité de l'énergie magnétique dans le vide est la somme algébrique: *a*) de la densité de l'énergie du même champ magnétique dans un milieu de constante magnétique μ , et *b*) ou bien du travail produit par ce champ magnétique sur les molécules la matière nécessaire pour leur donner une orientation convenable aux exigences du champ extérieur, autant que le permet le mouvement moléculaire du milieu; ou bien de l'énergie perdue par les molécules sous l'influence du champ et qui est transmise au champ même.

2. La structure de la molécule et analogue à celle de Bohr:

Ces deux hypothèses me permettent de donner la démonstration énergétique cherchée, ainsi que les relations pour l'hydrogène entre la constante magnétique μ_{H_2} , la constante de

l'induction diamagnétique k_{H_2} et les constantes universelles: h , $\left(\frac{e}{m}\right)$, e , N_0 , r^0 . Ces relations sont données par les équations α , β , γ — du texte polonais.

La théorie conduit en même temps à la conclusion que le moment magnétique d'une molécule quelconque est toujours un multiple entier de:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{e}{m}\right) \cdot \left(\frac{h}{c}\right).$$

La même théorie appliquée à une molécule biatomique de l'oxygène conduit à la conclusion que le nombre d'électrons produisant les effets magnétiques et égal à deux d'où on conclue que le modèle d'une molécule biatomique de l'oxygène doit être identique à celui de l'hydrogène biatomique, donc composé de deux noyaux positifs et deux électrons négatifs.

La seule différence consiste dans ce que la constitution du noyau de l'oxygène doit être bien plus compliquée que les noyaux élémentaires de l'hydrogène, afin de ne pas admettre pour la loi de l'intensité du champ électrique de ce noyau la loi simple de Coulomb, car celle-ci conduirait à donner au modèle les propriétés de l'hydrogène.

Les constantes magnétiques et diélectriques de l'oxygène sont données par les relations (a), (b), (c) du texte polonais.

3. Jan Sztolcman i Janusz Domaniewski:

**Przyczynek do znajomości form rodzaju
Pyriglena Cab.**

(Komunikat zgłoszony dn. 25 Stycznia 1918 r.

Przedstawił Jan Sosnowski.

Do lat ostatnich systematyka rodzaju *Pyriglena* była zupełnie nie ustalona, a wzajemny stosunek opisanych form przedstawiał się bardzo niejasno. Tak więc w XV tomie „Catalogue of the Birds in the British Museum“ (1890) Sclater rozróżnia cztery gatunki:

Pyriglena leucoptera Vieill.—„S. E. Brazil“

Pyriglena atra Sw.—„Lower Amazonia and S. E. Brazil“

Pyriglena picea Cab.—„Peru and Ecuador“

Pyriglena serva Scl.—„Ecuador and Peru“.

Do tych czterech gatunków Sharpe w „A Hand-List of the Genera and Species of Birds“ Vol III, 1901 dodał jeszcze jeden, mianowicie opisany przez Hartert'a z północno-zachodniego Ekwadoru: *Pyriglena berlepschi* Hart.

Dopiero w roku 1906 Hellmayr w swej pracy: Revision der Spix'schen Typen brasilianischer Vögel“ (Abhandlung. d. Math.-phys. kl. d. Kön. Bayr. Akad. d. Wiss., XXII Bd. III Abt.) przedsięwziął dokładny przegląd form tego rodzaju i odrzuciwszy gatunki *serva* Scl. i *berlepschi* Hart. do rodzaju *Cercomacra*, ustalił w rodzaju *Pyriglena* następujące gatunki i podgatunki.

Pyriglena leucoptera (Vieill.) z rozmieszczeniem: „S. O. Brasil von Bahia südwärts bis Rio, S. Paulo und Santa Catharina.“

Pyriglena atra (Sw.) z rozmieszczeniem: „Bisher nur aus „Bahia-Kollektionen bekannt.“

Pyriglena leuconota leuconota (Spix) z rozmieszczeniem: „Pará (Spix, Layard, Wallace, Natterer, Steere); Cayenne (Beco-ur in Mus. Vindab.); Pernambuco (Forbes).“

Pyriglena leuconota maura (Ménétr.) z rozmieszczeniem: „Zentral-Brasilien: Minas Geraës (Langsdorff); Mattogrosso:

Rio das Flechas, Engenho do Gama (Natterer); *Urucúm* (Borelli).

Pyriglena leuconota picea Cab. ¹⁾ z rozmieszczeniem: „*Bolivia: Chiquitos und Yungas* (D'Orbigny), *Songo, S. Antonio, Omeja* (G. und O. Garlepp), *Chulumani* (Kalinowski); *Peru: Waldregion des mittleren Peru* (Tschudi); *La Gloria und Garity del Sol* (Kalinowski); *Paltaypampa und Ropaybamba* (Jel-ski); *Loreto: N. Peru* (Baer); *W. Ecuador: Chimbo* (Siemiradzki); *Cayandeled* (Stolzmann). ¹⁾

Jednak porównyując ze sobą ptaki z Paltaypampa i La Gloria z ptakami z Chulumani doszliśmy do przekonania, że mamy do czynienia z dwoma zupełnie odrębnymi gatunkami, które Hellmayer złączył na zasadzie literatury (w literaturze cytowano je pod jedną nazwą *Pyriglena picea* (Cab.), nie mając w ręku samic ze środkowego Peru, w jedną formę *Pyriglena leuconota picea* Cab. Z chwilą rozróżnienia tych dwu form powstaje kwestya nomenklatury; otóż ponieważ *Pyriglena picea* Cab. została opisana ze środkowego Peru, pozostawiamy więc dla ptaków z Paltaypampa i La Gloria tę nazwę, zaś ptakom z Boliwji nadajemy nazwę *Pyriglena leuconota hellmayeri*. Wzajemny stosunek tych dwu gatunków jasnym się stanie z poniżej podanych opisów.

***Pyriglena picea* Cab.**

Formicivora atra Tschudi, Arch. Naturg. 10. I. (1844), p. 278.

Formicivora atra Tschudi, Unt. über die Faun. peruan. Aves. 1845—46 p. 175.

Pyriglena picea Cabanis, Arch. Naturg. 13. I. (1847), p. 212.

Pyriglena picea Taczanowski P. Z. S. 1874, p. 530. (C. Peru).

¹⁾ W cytowanej pracy nazwa brzmi *Pyriglena maura aterrima* (Lafr. & D'Orb.), jednak w liście do Domaniewskiego, datowanym z dn. 25. IX. 1917 Hellmayer pisze, iż forma ta „die *Pyriglena leuconota* [maura ist ein Schreibfehler] *picea* Cab. heisszen muss. Eine erneute sorgfältige Prüfung der Typen von *Tamnophilus aterrimus* Lafr. & D'Orb. hat nähmlich ergeben, dass diese Art auf ein Pärchen der *P. maura* begründet wurde, der Name mithin Synonym wird. Die Form aus C. Peru & N. W. Bolivia bekommt daher wieder die Bezeichnung *P. leuconota picea* Cab.“

Pyriglena maura picea Berlepsch & Stolzman, P. Z. S. 1896, p. 383 (C. Peru).

Pyriglena picea Taczanowski, Orn. d. Pérou. II, 1884, p. 56.

Pyriglena maura aterrima Hallmayr, [partim] München, Abh. Ak. Wiss. XXII, 1906, p. 623.

Dokładny opis tego gatunku podał T a c z a n o w s k i w swej „Ornithologie du Pérou“, opis ten tutaj przytaczamy:

„♂ Ad.—D'un noir intense en entier, à plumes du milieu du devant du dos blanches à la base; bord interne des rémiges grisâtre. Bec et pattes noirs; iris rouge carminé.

♀ La femelle est d'un brun rougeâtre foncé en dessus d'une nuance moins foncée en dessous, à plumes du dos antérieur d'un blanc légèrement roussâtre, la tête et le devant de la gorge schistacé foncé, à front et lores paraissant être noirs. Ailes concolores au dos, à barbe interne des rémiges noirâtre plus pâle au bord. Queue noire. Bec et pattes noirâtres; iris rouge.“

Wymiary (w milimetrach)

		Skrzydło	Ogon	Skok	Dziób od nozdrzy
♂. 12. III. 1872.	Paltaypampa coll. K. Jelski	83.0	86.5	32.0	—
♀. 2. IV. 1872.	Paltaypampa coll. K. Jelski	78.0	78.0	31.0	10.0
♀. 18. I. 1891.	La Gloria coll. J. Kalinowski	76.5	82.0	33.0	9.9

T a c z a n o w s k i cytuje jeszcze (P. Z. S. 1874, p. 530) jedną parę ptaków z Ropaybamba; ptaków tych obecnie w Warszawie niema. Okaz z Chimbo znajduje się w zbiorach hr. Berlepsch'a i jest w tej chwili dla nas niedostępny. Co się tyczy jednego samca z Cayanded, to przynależności jego do *Pyriglena picea* C a b. nie jesteśmy pewni, dla tego też podajemy go tutaj osobno.

Pyriglena spec?

Pyriglena picea Taczanowski, P. Z. S. 1884, p. 302.

Pyriglena maura aterrima Hellmayr, [partim] München, Abh. Ak. Wiss. XXII, 1906 p. 623.

Ptak z Cayanded, (Aequatoria occ., Cayanded, ♂. 22. I. 1883, coll. J. Sztolcman) pod względem ubarwienia jest iden-

tyczny z ptakiem z Paltaypampa, różni się jednak od tego ostatniego formą dzioba.

Mianowicie ptak z Paltaypampa ma dziób na końcu wyraźnie haczykowato zagięty z wyraźnie zaznaczonym zębem, odwrotnie ptak z Cayanded ma dziób bardzo słabo na końcu zakrzywiony z prawie niewyraźnym zębem. Różnice te są małe, wyraźne jednak na pierwszy rzut oka, ze względu na to jednak, że mogą być one indywidualne, nie decydujemy się ptaka tego wyłączać pod osobną nazwę, tembardziej, że właściwe różnice mogą być opierane w tym rodzaju głównie na samicach.

Wymiary.

Skrzydło 80.0 mm. Ogon 76.5. mm. Skok 31 mm. Dziób od nozdrzy 11 mm.

***Pyriglena leuconota hellmayri* subsp. nov.**

Pyriglena maura aterrima Hellmayr, München, Abl. Ak. Wiss. XXII, 1906, p. 623.

Za typową krainę tej formy uważamy północną Boliwię. Pochodzące z tamtąd ptaki Hellmayr opisuje w sposób następujący:

„♂ Von *P. l. maura* ♂ nur unterschieden durch etwas stärkere und dunklere, schwarzbraune oder schwarze (statt hornbraune) Tarsen und Füße, tiefschwarzen Schnabel, der nur an der Spitze der unteren Mandibel in ein helleres Hornbraun übergeht, und durchschnittlich grössere Dimensionen.

♀ In der Hauptsache ganz wie *P. l. maura* gefärbt (ohne schwärzlichen Subapicalfleck auf den weissen Rückenfedern, mit ebenso deutlichem weisslichen Brauenstreifen und weisslichem Fleck unterhalb des Auges etc.) aber unterschieden durch dunklere, tiefschwarzen Oberschnabel, schwarzbraune (statt hornbraune) Füße und Tarsen, entschieden weniger rötlichen, mehr olivenbraunen Rücken, Flügeldecken und Schwingensäume. Das Ocker-gelb des Vorderhalses zieht sich auch über die Kehle herauf, während bei *P. l. maura* diese entschieden heller und blasser ist als die Gurgel. Die Dimensionen sind etwas grösser.“

Opis ten najzupełniej zgadza się z naszymi ptakami, które

zresztą pochodzą z tej samej miejscowości co i ptaki, które posłużyły Hellmayr'owi do powyższego opisu.

Typy *Pyriglena leuconota hellmayri* Sztolcm. & Doman. znajdują się w Muzeum Branickich.

№ 3844 a ♂. 6. X. 1896. Bolivia, Chulumani coll. J. Kalinowski.

№ 3844 b ♀. 6. X. 1896. Bolivia, Chulumani coll. J. Kalinowski.

Wymiary.

	Skrzydło	Ogon	Skok	Dziób od nozdrzy
♂:	81.0 mm.,	78.0 mm.,	30.0 mm.,	11.0 mm.
♀:	77.0 „	74.0 „	28.0 „	10.0 „

***Pyriglena leuconota marcapatensis* subsp. nov.**

Samica z doliny Marcapata (dopływ Rio de Madre de Dios) tak wyraźnie różni się od *Pyriglena leuconota hellmayri*, że pomimo, iż rozporządzamy jednym tylko okazem, nie wahamy się wyodrębnić jej w osobny podgatunek, który proponujemy nazwać *Pyriglena leuconota marcapatensis*. Samica *Pyriglena leuconota marcapatensis* różni się od samicy *Pyriglena leuconota hellmayri* ciemniejszym, bardziej intensywnie brązowym ubarwieniem pleców, pokryw skrzydłowych, lotek, karku i wierzchu głowy, oraz nie tak wyraźnie zaznaczoną białą strychą ponad okiem. Prócz tego brzuch i okolice analne są daleko ciemniejsze oraz piersi intensywniejszym kolorem ochrowym powleczone. Samiec nieznan.

Wymiary.

♀ Skrzydło 77 mm., ogon 75 mm., skok 31.5 mm. Dziób od nozdrzy 11 mm.

Typ w Muzeum Branickich: ♀. 27. VII. 1897, Huaynapata (Dolina Marcapata) coll. J. Kalinowski.

Jak więc z powyższego wynika, należy uważać, że *Pyriglena picea* Cab. znana jest dotychczas jedynie ze środkowego Peru. W północnej Boliwii występuje *Pyriglena leuconota hellmayri* Sztolcm. & Doman., zaś w południowo-wschodnim Peru *Py-*

ryglena leuconota marcapatensis Sztolcm. & Doman. Co się tyczy północnego Peru i zachodniego Ekwadoru, to ze względu na to, iż podobnie jak Hellmayr, nie mieliśmy do rozporządzenia samic z tych krajów, nic nie możemy powiedzieć, jakie formy tam występują.

RÉSUMÉ.

Jan Stolzman et Janusz Domaniewski:

Notes sur les formes du genre *Pyriglena* Cab.

Communication annoncée le 25. I. 1918.

Présentée par J. Sosnowski.

La systématique du genre *Pyriglena* était loin d'être fixée jusqu'à ces dernières années et les rapports réciproques des formes déjà décrites n'étaient point assez clairement indiqués. Ainsi dans le tome XV du „Catalogue of the Birds of the British Museum“ (1890) Sclater distingue les quatre espèces suivantes:

Pyriglena leucoptera Vieill.—„S. E. Brazil.“

Pyriglena atra Sw.—„Lower Amazonia and S. E. Brazil.“

Pyriglena picea Cab.—„Peru and Ecuador.“

Pyriglena serva Scl.—„Ecuador and Peru.“

A ces quatre espèces Sharpe joint encore une dans son „A Hand-List of the Genera of Birds“ Vol. III 1901, notamment celle qui fut décrite par Hartert comme provenant de l'Ecuador nord-ouest: *Pyriglena berlepschi*.

Ce n'est qu'en 1906 que Hellmayr entreprit dans son ouvrage „Revision der Spix'schen Typen brasilianischer Vögel“ [Abhandlung. d. Math.-Phys. kl. d. Königl. Bayr. Akad. d. Wiss., XXII Bd, III Abt.] une revue détaillée des formes de ce genre et après avoir relégué les espèces *serva* Scl. et *berlepschi* Hart. parmi les espèces du genre *Cercomacra*, il fixa dans le genre *Pyriglena* les espèces et sous-espèces suivantes:

Pyriglena leucoptera (Vieill.) — „S. O. Brasil von Bahia südwärts bis Rio, S. Paulo und Santa Catharina.“

Pyriglena atra (Sw.) — „Bisher nur aus Bahia-Kollektionen bekannt.“

Pyriglena leuconota leuconota (Spix)—„Para (Spix, Layard, Wallace, Natterer, Steere); Cayenne (Becoer in Mus. Vindab.) Pernambuco (Forbes).

Pyriglena leuconota maura (Ménétr.)—„Zentral-Brasilien: Minas Geraës (Langsdorff); Mattogrosso: Rio das Flechas, Engenho do Gama (Natterer); Ucrucúm (Borelli).

Pyriglena leuconota picea Cab. ¹⁾ — „Bolivia: Chiquitos und Yungas (Orbigny), Songo, S. Antonio, Omeja (G. und O. Garlepp), Chulumani (Kalinowski); Peru: Waldregion des mittleren Peru (Tschudi); La Gloria und Garita del Sol (Kalinowski); Paltaypampa und Ropaybamba (Jelski); Loreto: N. Peru (Baer); W. Ecuador: Chimbo (Siemiradzki); Cayandeded (Stolzmann).

Cependant, en comparant les oiseaux de Paltaypampa et de La Gloria avec ceux de Chulumani nous arrivâmes à la conviction que nous avions affaire à deux espèces tout à fait différentes que Hellmayr avait confondu en s'appuyant sur les données de la littérature (où on les désignait sous le nom commun de *Pyriglenä picea* Cab.) et n'ayant point sous la main des femelles du Pérou central, en une seule forme de *Pyriglena leuconota picea* Cab. Du moment où la distinction entre ces deux formes fut établie, il se présente la question de nomenclature. Or, comme la *Pyriglena picea* Cab. fut décrite comme provenant du Pérou central, nous laissons cette dénomination aux oiseaux de Paltaypampa et de la Gloria, tandis que nous donnons aux oiseaux de la Bolivie celle de *Pyriglena leuconota hellmayri*. Le rapport réciproque entre ces deux formes ressortira clairement des descriptions qui suivent.

***Pyriglena picea* Cab.**

Formicivora atra Tschudi, Arch. Naturg. 10. I. (1844) p. 278.

¹⁾ Dans l'ouvrage cité le nom est *Pyriglena maura aterrima* (Lafr. & D'Orb.), cependant dans une lettre datée du 25. X. 1917 Hellmayr écrit à Domaniewski que cette forme „die *Pyriglena leuconota* [maura ist ein Schreibfehler] *picea* Cab. heissen muss. Eine erneute sorgfältige Prüfung der Typen von *Tamnophilus aterrimus* Lafr. & D'Orb. hat nämlich ergeben, dass diese Art auf ein Pärchen der *P. maura* begründet wurde, der Name mithin Synonym wird. Die Form aus C. Peru & N. W. Bolivia bekommt daher wieder die Bezeichnung *P. leuconota picea* Cab.“

Formicivora atra Tschudi, Unt. über die Faun. peruan. Aves 1845—46 p. 175.

Pyriglena picea Cabanis, Arch. Naturg. 13. I. (1847) p. 212.

Pyriglena picea Taczanowski P. Z. S. 1874, p. 530.

Pyriglena maura picea Berlepsch & Stolzman, P. Z. S. 1896. p. 383.

Pyriglena picea Taczanowski, Orn. d. Pérou II, 1884, p. 56.

Pyriglena maura aterrima Hellmayr (partim), Münnchen, Abh. Ak. Wiss. XXII, 1906, p. 653.

Taczanowski a donné une description détaillée de cette espèce dans son „Ornithologie du Pérou“, nous la citons ici :

„♂ Ad.—D'un noir intense en entier, à plumes du milieu du devant du dos blanches à la base; bord interne des rémiges grisâtre. Bec et pattes noirs; iris rouge carminé.

♀ La femelle est d'un brun rougeâtre foncé en dessus, d'une nuance moins foncée en dessous, à plumes du dos antérieur d'un blanc légèrement roussâtre, la tête et le devant de la gorge schistacé foncé, à front et lores paraissant être noirs. Ailes concolores au dos, à barbe interne des rémiges noirâtre plus pâle au bord. Queue noire. Bec et pattes noirâtres; iris rouge.“

Dimensions (en milim.)

	Aile	Queue	Tarse	Bec des narines
♂. 12. III. 1872 Paltaypampa coll. K. Jelski	83.0	86.5	32.0	—
♀. 2. IV. 1872 Paltaypampa coll. K. Jelski	78.0	78.0	31.0	10.0
♀. 18. I. 1891 La Gloria coll. J. Kalinowski	76.5	82.0	33.0	9.9

Taczanowski cite encore (P. Z. S. 1874, p. 530) une paire d'oiseaux de Ropaybamba; ces oiseaux ne se trouvent pas pour le moment à Varsovie. L'exemplaire de Chimbo se trouve dans la collection du comte Berlepsch et, par conséquent, est actuellement inaccessible pour nous. Pour ce qui en est d'un mâle de Cayanded, nous ne sommes pas sûrs qu'il appartient à l'espèce *P. picea*, et c'est pourquoi nous le plaçons à part.

Pyriglena spec.?

Pyriglena picea Taczanowski, P. Z. S. 1884, p. 302.

Pyriglena maura aterrima Hellmayr [partim] München, Abh. Ak. Wiss. XXII; 1906 p. 623.

L'oiseau de Cayandeded (*Aequatoria* occ., Cayandeded, ♂ 22. 1883, coll. J. Stolzman) est identique quant à la coloration à l'oiseau de Paltaypampa, mais il en diffère par la forme du bec. Notamment, l'oiseau de Paltaypampa a le bec visiblement crochu vers le bas avec la dent visiblement marquée, tandis que l'oiseau de Cayandeded a le bec très faiblement recourbé vers le bout et la dent n'y est qu'à peine marquée. Ces différences ne sont pas grandes, mais elles se laissent apercevoir à coup d'oeil, comme, toutefois, elles peuvent être individuelles—nous ne nous décidons pas à désigner cet oiseau sous un nom particulier et cela d'autant plus que les indices caractéristiques de ce genre ne sont basées que sur les femelles seules.

Dimensions :

Aile 80.0 mm. Queue 76.5 mm. Tarse 31 mm. Bec des narines 11 mm.

***Pyriglena leuconota hellmayri* subsp. nov.**

Pyriglena maura aterrima Hellmayr [partim] München, Abh. Ak. Wiss. XXII, 1906, p. 623.

Nous établissons comme région typique pour cette forme la Bolivie septentrionale. Les oiseaux provenant de ce pays sont décrits par Hellmayr comme il suit :

„♂ Von *P. l. maura* ♂ nur unterschieden durch etwas stärkere und dunklere, schwarzbraune oder schwarze (statt hornbraune) Tarsen und Füße, tiefschwarzen Schnabel, der nur an der Spitze der unteren Mandibel in ein helleres Hornbraun übergeht, und durchschnittlich grössere Dimensionen.

♀ In der Hauptsache ganz wie *P. l. maura* gefärbt (ohne schwärzlichen Subapicalfleck auf den weissen Rückenfedern, mit ebenso deutlichem weisslichen Brauenstreifen und weisslichen Fleck unterhalb des Auges etc.) aber unterschieden durch dunkleren, tiefschwarzen Oberschnabel, schwarzbraune (statt hornbraune) Füße und Tarsen, entschieden weniger rötlichen, mehr oliven

braunen Rücken, Flügeldecken und Schwingsäume. Das Ocker-gelb des Vorderhalses zieht sich auch über die Kehle herauf, während bei *P. l. maura* diese entschieden heller und blasser ist als die Gurgel. Die Dimensionen sind etwas grösser.“

Cette description concorde parfaitement avec nos oiseaux, qui proviennent, d'ailleurs, de la même contrée que les oiseaux dont se servit Hellmayr pour sa description.

Types de Pyriglena leuconota hellmayri Stolz m. & D o m a n. se trouvent dans le Musée Branicki..

№ 3844 a ♂. 6. X. 1896. Bolivia, Chulumani coll. J. Ka-linowski.

№ 3844 b ♀. 6. X. 1896. Bolivia, Chulumani coll. J. Ka-linowski.

Dimensions:

	Aile	Queue	Tarse	Bec du narines
♂	81.0 mm.,	78.0 mm.,	30.0 mm.,	11.0 mm.
♀	77.0 „	74.0 „	28.0 „	10.0 „

***Pyriglena leuconota marcapatensis* subsp. nov.**

La femelle du val de Marcapata (affluent du Rio de Madre de Dios) diffère si essentiellement de la *Pyriglena leuconota hellmayri* que malgré que nous ne disposions que d'un seul exemplaire nous n'hésitons pas à l'éliminer en une sous-espèce nouvelle que nous proposons de nommer *Pyriglena leuconota marcapatensis*.

La femelle de la *P. l. marcapatensis* diffère de la femelle de *P. l. hellmayri* par sa coloration plus foncée, plus intensive-ment brune du dos, des tectrices, de la nuque, et de sommet de la tête, ainsi que par le trait blanc au-dessus de l'oeil, qui n'est pas si visiblement marqué. De plus, le dessous du corps et les parties anales sont beaucoup plus sombres, et la poitrine est enduite d'une nuance ocrée bien plus intense. Le mâle est inconnu.

Dimensions:

♀ Aile 77.0 mm., queue 75.0 mm., tarse 31.5 mm. Bec des narines 11.0 mm.

Type dans le Musée Branicki: ♂. 27. VII. 1897, Huaynapata (Val de Marcapata) coll. J. Kalinowski.

Comme il ressort de ce que nous venons de dire, on doit admettre que *Pyriglena picea* Cab. n'est connue jusque là que pour le Pérou central. En Bolivie septentrionale apparaît la *P. l. hellmayri* Stolz m. & Doman. et en Pérou sud-est la *P. l. marcapatensis* Stolz m. & Doman.

En ce qui concerne le Pérou septentrional et l'Equateur occidental, de même que Hellmayr nous ne disposions pas de femelles provenant de ce pays-là, nous ne pouvons donc nous prononcer sur les formes qui y habitent.

4. S. Dziubałtowski:

Rozwój roślinności na porębach lössowych w Sandomierskiem w oświetleniu florystyczno-statystycznym.

Komunikat zgłoszony dn. 24 Grudnia 1917 r.

Przedstawił Z. Wóycicki.

Badania roślinności na porębach posiadają duże znaczenie dla ekologii roślin. Wykazują one nie tylko wpływ warunków zewnętrznych na roślinność, ale i indywidualne właściwości poszczególnych gatunków, tkwiące w ich protoplazmie, którym dzięki gatunki te szybko przystosowują się do zmieniających się warunków bytowania, szybciej rozpowszechniają się od innych, tem samem odgrywają wydatniejszą rolę w życiu danego zrzeszenia roślinnego. Pozatem badania poręb zaznajamiają nas z pierwotnem ogniwem długiego łańcucha nieustannych zmian, jakim ulega w walce o byt dane zrzeszenie roślinne, zanim osiągnie stan względnej równowagi; wreszcie tego rodzaju badania pozwalają poznać bliżej warunki biologiczne roślinności poręb, od których w wysokim stopniu są zależne pomyślnie wyniki usiłowań człowieka, zmierzających do odnowienia lasu. Im znajomość nasza pod tym względem będzie gruntowniejsza, wszechstronniejsza, tem stworzy solidniejsze podstawy naukowe dla prawidłowego leśnictwa. Tak więc znajomość pierwszych stadjów rozwoju roślinności na porębach daje nam klucz do zrozumienia powstawania zrzeszeń leśnych i rozstrzygnięcia wielu problemów geografji roślin, mających nie tylko znaczenie teoretyczne, lecz i praktyczne.

Dane, dotyczące poruszanego tu przeze mnie zagadnienia, są porzrzucone w literaturze leśnej i ogólnej botaniczno-geograficznej, rzadko tylko stanowiąc przedmiot specjalnych dociekań. U nas tego rodzaju badaniom jest poświęcona wspólna praca Malinowskiego i Dziubałtowskiego¹⁾, w Rosji —

¹⁾ E. Malinowski i S. Dziubałtowski: Zrzeszenia roślin na porębach Łysicy.

Sprawozdania z Posiedzeń T. N. W., rok 7, zeszyt 4, 1914.

Chitrowo¹⁾, Sukaczewa²⁾). To małe zainteresowanie się dotąd zagadnieniem sprawia, że jeszcze nie posiadamy wypróbowanej ściślej metody badania w tym zakresie.

Przedmiotem badań moich były poręby leśne w Międzygórzu w Sandomierskiem, położone po prawej stronie Opatówki, w dobrach p. R. Cichowskiego.

Poręby te ciągną się z południa na północ, w kierunku prostopadłym do szosy, idącej z Opatowa do Sandomierza. Od zachodu przylega do nich las liściasty mieszany z przewagą grabu i dębu. Z pozostałych stron poręby graniczą z polami uprawnymi. Teren jest zlekka pochylony z południa na północ. Gleba lössowa z domieszką próchnicy. Las jest wycinany działami corocznie, wskutek czego mamy kolejny szereg poręb, zaczynając od najmłodszej (tegorocznej) do 9-cioletniej. Czas obserwacji: koniec lipca — pierwsza połowa sierpnia r. 1917.

Metoda.

Zanim przedstawię metodę badań, muszę omówić pojęcie „zrzeszenia roślinnego“. Jest to tembardziej konieczne, że w polskiej literaturze botaniczno-geograficznej niema ustalonej terminologii, co pociąga za sobą dowolność w używaniu terminów, często posiadających odmienne znaczenie. Otóż dla uniknięcia nieporozumień zaznaczę, że zasadniczą jednostką ekologiczno-florystyczną, odpowiadającą pojęciu gatunku w systematyce, w myśl wskazań międzynarodowego kongresu botaników w Brukseli w r. 1910 będę nazywał „zrzeszeniem“ (franc. association, niem. Assoziation). Ażeby dać charakterystykę zrzeszenia roślinnego, należy wskazać występujące w niem gatunki, ich pospolitość, oraz wymienić, o ile to jest możliwe, gatunki charakterystyczne. Byłoby rzeczą uciążliwą wyszczególniać wszystkie gatunki, występujące na danej porębie, i oznaczać stopień ich pospolitości.

¹⁾ Chitrowo: Trawianoj pokrow spłosnych lesosiek w Tulskich zasiekach i jego istorija razwitija.

Trudy po lesnomu opytnomu diełu w Rossii. Wypusk 1, 1906.

²⁾ B. Sukaczew: Lesnyja formacii i ich wzaimo-otnoszenija w Brjanskich lesach.

Trudy po lesnomu opytnomu diełu w Rossii. Wypusk 9, 1908.

Aby uniknąć tego, a jednocześnie wprowadzić, zamiast subiektywnego określenia pospolitości gatunków, czynnik obiektywny, brałem z każdego stadjum określoną przestrzeń, mianowicie po 20 m². Następnie każdy taki metr kw. podlegał ścisłej analizie florystycznej. Jak już z poprzedniej naszej wspólnej pracy z dr. E. Malinowskim wynika, gatunki, zajmujące większe obszary, występują na większej ilości kwadratów. Stąd dla określenia częstości występowania (stopnia pospolitości) danego gatunku wystarczy obliczyć, na ilu kwadratach on występuje.

Samo jednak zaznaczenie występowania danego gatunku na tym lub innym kwadracie nic nam nie mówi jeszcze o stronie ilościowej zjawiska. A jest to rzecz ważna, szczególnie przy zaznaczaniu gatunków, występujących obficie, gromadnie. W takich przypadkach bez oznaczenia, jak dany gatunek występuje pod względem ilościowym, nie jesteśmy w stanie orzec, czy mamy do czynienia z rozwojem progresywnym, czy też regresywnym tego gatunku w danym stadjum. Najlepiej byłoby oznaczać częstość indywidualną gatunków na każdym kwadracie. Jest to jednak w praktyce b. trudne do przeprowadzenia, szczególnie wtedy, kiedy mamy do czynienia z gatunkami, tworzącymi darnie, jak większość traw. Otóż ja postępowalem nieco inaczej: zamiast liczyć ilość indywidualów każdego gatunku na poszczególnych kwadratach, ograniczyłem się do zaznaczenia gatunków, odznaczających się szczególnie obfitem lub szczególnie nikłym występowaniem, przyczem znak minus, postawiony z lewej strony krzyżyka — ×, oznacza, że dany gatunek chyli się ku zanikowi; przeciwnie, krzyżyk podkreślony × oznacza obfite występowanie danego gatunku conajmniej na 1/2 kwadratu (gatunek panujący). W ten sposób chociaż ogólnie zaznacza się gatunki o rozwoju krańcowym w jednym lub w drugim kierunku.

Naturalnie, przeciętne dane, otrzymane drogą analizy florystycznej kwadratów, będą ogólnie charakteryzowały każde poszczególne stadjum poręby o tyle, o ile wzięte do analizy kwadraty będą obejmowały możliwie wszystkie kombinacje florystyczne, wywołane przez drobne różnice środowiska. Mając tę zasadę na względzie, brałem kwadraty odosobnione, lecz tak wybrane, ażeby reprezentowały w równej mierze różnorodne ugrupowania florystyczne, występujące w obrębie poręby określonego wieku.

Ponieważ poręby przylegają jedna do drugiej i znajdują się naogół w jednakowych warunkach klimatu i gleby, różniąc się tylko wiekiem, przechodzą przez jednakowe stadja rozwoju, przeto jest rzeczą wysoce ciekawą, jakie stosunki fyto-socjalne panują w każdym z poszczególnych stadjów.

Charakter starego lasu.

Za punkt wyjścia przy badaniu roślinności poręb musi nam służyć las, podlegający cięciu. Dlatego też rozpatrywanie stosunków florystycznych poręb musi poprzedzić omówienie stosunków ekologicznych lasu, aby w ten sposób wyraźniej uwydatnić zmiany, zachodzące w warunkach bytowania, a tem samem w szacie roślinnej, która jest wyrazem tych zmian.

Jednym z najważniejszych czynników biologicznych lasu jest jego zwarcie, wywierające duży wpływ na glebę, atmosferę, światło, a więc na środowisko, w którym bytuje roślinność. Zwarcie więc warunkuje zarówno charakter podszycia, jak i runa leśnego. Pod poszyciem listowia drzew gatunki heliofitowe nie mogą się rozwijać; gatunki zaś, znoszące znaczne zacienienie, są zazwyczaj porzrucane po lesie, szczególnie liściastym o dużym zwarciu, i zarówno podziemnymi, jak i nadziemnymi częściami nie mogą stanowić groźnych współzawodników dla młodych drzewek. W poszyciu lasu *Morozow*¹⁾ upatruje obronny element lasu, wyrażający się w usuwaniu groźnych dla siebie, a głównie dla swego potomstwa współzawodników. Las, o którym mowa, jest to las liściasty mieszany; składają go następujące gatunki:

<i>Carpinus betulus</i>	} Panujące gatunki; miejscami jeden lub drugi z nich tworzy nawet czyste skupienia.
<i>Quercus pedunculata</i>	
<i>Betula verrucosa</i>	} Gatunki podrzędne.
<i>Populus tremula</i>	

Pozatem sporadycznie występują *Sorbus Aucuparia*, *Crataegus monogyna*, *Tilia ulmifolia*, a z krzewów: *Rhamnus Frangula*, *Corylus Avellana*, *Lonicera Xylosteum*. Dodam nawiasem, że dwa pierwsze gatunki wewnątrz lasu, w cienistych miejscach, nie przekraczają wysokości krzewów, natomiast po brzegach lasu ich wysokość dorównywa wysokości sąsiednich drzew.

¹⁾ *Morozow*: Uczenie o lesie. Wypusk 1, str. 33.

Na runo lasu składają się następujące gatunki:

Galium vernum

„ *Schultesii*

Agrostis alba

Poa nemoralis

Milium effusum

Majanthemum bifolium

Dactylis glomerata (rzadko)

Vicia sepium

Campanula patula

„ *persicifolia*

Hieracium vulgatum

Oxalis acetosa

Lactuca muralis

Trientalis europaea

Aspidium Filix femina

„ „ *mas*

Polypodium vulgare

Lysimachia nummularia } w wilgotnych miejscach

Ranunculus polyanthemus } nad strumykiem

Lilium Martagon

Melittis Melissophyllum

Convallaria majalis

Luzula pilosa

Lathyrus niger (rzadko)

Vaccinium Vitis idaea i wiele in.

W miejscach bardziej cienistych spotykamy:

Asarum europaeum

Orobus vernus

Anemone nemorosa

Hepatica triloba

Pulmonaria officinalis

Melica nutans

Polygonatum officinale i in.

Przy brzegach lasu i wogóle w miejscach słonecznych rosną:

Hypericum quadrangulum

Melampyrum pratense

Origanum vulgare.

Roślinność pierwszego roku istnienia poręby.

Po usunięciu lasu, a więc zniszczeniu ustalonego zrzeszenia roślinnego, poręba staje się terenem, na którym wskutek warunków ekologicznych powstaną nowe zrzeszenia. Zmiany warunków ekologicznych polegają na zniknięciu całego kompleksu czynników, jakie wytwarza las, jako zrzeszenie, a więc ulegające zmianom stosunki insolacji, wilgotności atmosfery i gleby wywołują zasadnicze zmiany w szacie roślinnej. Skład florystyczny takiej poręby wraz ze wskazaniem kwadratów, na których występują poszczególne gatunki, wskaże nam lista I na str. 205—206.

Z listy tej wynika, że zmiana warunków ekologicznych znajduje swój wyraz w zanikaniu form lubiących zacienienie, i silnym rozwoju gatunków lubiących światło, które przedtem występowały na skraju lasu. To też w tem stadium poręby brak całego szeregu form, występujących dość często tuż obok w lesie, jak *Milium effusum*, *Pulmonaria officinalis*, *Asarum europaeum* i t. p. Inne gatunki leśne, jak *Majanthemum bifolium*, *Lathyrus vernus*, *Polygonatum vulgare* występują b. rzadko, wykazując wyraźną tendencję do zaniku. Najwspanialej rozwija się z traw *Agrostis alba* (13 m.), *Poa nemoralis* (6 m.), *Dactylis glomerata* (3 m.), z drzew zaś *Betula verrucosa*. Oprócz tego cieszą się dużem rozpowszechnieniem: *Viola canina*, *Galium vernum*¹⁾, *Luzula pilosa*, *Veronica Chamaedrys*, *Gnaphalium silvaticum*, *Erythraea Centaurium*.

Ponieważ zrzeszenie jest otwarte (szczególnie miejsca po wykopanych drzewach są b. słabo pokryte roślinnością lub zupełnie wolne), i walka o byt bardzo słaba, przeto poręba w tem stadium przedstawia podatny grunt do osiedlania się nowych gatunków. Rezultatem tego jest zjawienie się na porębie całego szeregu roślin obcych lasom, przedewszystkiem zaś elementów synantropijnych, jak *Achillea Millefolium*, *Plantago lanceolata*, *Anthemis arvensis*, *Cirsium arvense*, *Erigeron canadensis*, *Artemisia vulgaris* i in. Roślinność synantropijna znajduje tutaj doskonale warunki dla swego rozwoju: próchnicową glebę po wy-

¹⁾ Gatunek ten występuje na porębie zwykle w cieniu młodych drzew i krzewów.

rąbanym lesie i brak walki o byt. Rzecz charakterystyczna, że kiedy na porębach Łysicy, w Brianskich lasach i in. w pierwszym roku istnienia poręby rozrasta się bujnie roślinność leśna wyrąbanego lasu, a dopiero w drugim roku zaczyna przeważać roślinność obca lasom, w naszym terenie proces ten odbywa się już znacznie wcześniej, co oczywiście należy przypisać sąsiedztwu zrzeseń roślinnych sztucznych. W każdym bądź razie w pierwszym roku fizjognomję roślinności nadają wyżej wzmiankowane trawy i brzoza.

Roślinność drugiego roku poręby.

Roślinność drugiego roku posiada już nieco odmienny charakter od roślinności pierwszego roku. W drugim roku wczesną wiosną porębę przecinają całym szeregiem równoległe idących bród, w których sadzą sosny lub inne gatunki drzew. Wskutek orki częściowo niszczy się, rozrywa kobierzec traw i sporo młodych brzózek ginie. Tym sposobem ułatwia się osiedlanie się na porębie nowych gatunków, których liczba znakomicie wzrasta. Bliżej przedstawi nam te stosunki lista II gatunków na str. 207—208.

Jak z listy i obserwacji w terenie wynika, heliofoby powoli zanikają, lub też conajmniej skracają zasięg swojego występowania. W każdym bądź razie tendencja w tym kierunku zaznacza się coraz dobitniej. Jako przykład tego mogą służyć *Galium vernum*, *Poa nemoralis*, *Carex silvatica*, *Potentilla Tormentilla*. Procesowi temu, czysto regresywnemu, towarzyszy proces progresywny, polegający na szybkim rozszerzaniu terenu dzięki sprzyjającym warunkom przez heliofity i na przenikaniu nowych gatunków, przedewszystkiem zaś elementów synantropijnych. Te ostatnie chętnie osiedlają się wszędzie tam, gdzie zostanie zniszczone naturalne zrzeseenie roślinne. Najwymowniejszym przykładem tego są następujące gatunki: *Achillea Millefolium*, *Cirsium arvense*, *Hieracium pilosella*, *Leontodon autumnalis*, *hispidus*, *Plantago major*, *media*, *Rumex Acetosella*, *Trifolium pratense* i in. *Agrostis alba*, jakkolwiek występuje na 19 m., to tylko na jednym stanowi gatunek panujący; jej kobierzec ulega częściowo

wemu porozrywaniu podczas orki, a następnie inne gatunki wyrastają wśród niego, jak *Achillea Millefolium*, *Cirsium arvense*, *Rumex Acetosella*, *Deschampsia caespitosa* i t. p. Mimo to gatunek ten utrzymuje się nawet w późniejszych stadjach.

Ogólnie da się scharakteryzować roślinność drugiego roku, jako przedstawiającą zrzeszenie otwarte, nieokreślone, w którym spotykamy mieszaninę rozmaitych elementów florystycznych.

Roślinność trzeciego roku poręby.

Na badanym terenie brak nam poręby 3-go roku, wskutek czego nie jestem w stanie przedstawić panujących w tym stadium stosunków ekologicznych. Można jednak przypuszczać, że w 3-cim roku istnienia poręby masowy napływ nowych gatunków ustaje, a nawet zaczyna się już wyeliminowanie niektórych gatunków. Przypuszczenie to opieram na fakcie, że w IV-ym roku mamy już do czynienia z zrzeszeniem zamkniętym, w którym, jak się nieco niżej przekonamy, ilość gatunków o wyższych stopniach pospolitości znacznie wzrasta, ilość gatunków ☹—☺, występujących w dużych ilościach w zrzeszeniach otwartych, spada do 9,6%.

Roślinność IV-go, V-go i VI-go roku poręb.

Z chaosu najrozmaitszych elementów ekologicznych wylania się w IV, a być może nawet już w III-cim roku, zrzeszenie zamknięte o bardziej określonej fizjognomji. Charakter florystyczny tych zrzeszeń przedstawiają nam listy IV, V i VI na str. 209—212.

Z porównania danych, w listach wzmiankowanych zawartych, wynika, że dominującą rolę wśród roślinności odgrywają gatunki trwałe, przyczem najobficiej rozwijają się formy, nie znoszące zbyt-niego zacienienia. Ogólne tło roślinności stanowią gatunki zielne, przede wszystkim trawy. Na tem tle zaś występują drzewa, które się rozwinęły bądź to drogą samosiewu (*Betula verrucosa*, *Salix Caprea*), bądź też zostały posadzone sztucznie przez człowieka (sosna, jodła, dąb, olsza, modrzew). Korony drzew nie są jeszcze tak rozrośnięte, ażeby znacznie mogły zacieniać teren, jakkolwiek

tendencja w tym kierunku, szczególnie w VI roku, zaznacza się dość wyraźnie.

Równoległe z tą tendencją idzie zmniejszanie się częstości występowania niektórych gatunków zarówno pod względem ilościowym, jak i jakościowym. Tak np. *Agrostis alba*, należąca w rozpatrywanym przez nas obecnie stadium do pospolitych, występuje: w IV roku na 15 m. (na 7 m. panująca = 46,7%), w V roku na 12 m² (na 6 panująca = 50%), w VI roku na 6 m. (na 2 panująca = 33,3%). To samo możnaby powiedzieć i o innych gatunkach.

Maximum swego rozwoju, w szczególności w V roku, osiąga następujące gatunki: *Deschampsia caespitosa*, *Erythraea Centaurium*, *Gnaphalium silvaticum*, *Hypericum perforatum*, *Juncus conglomeratus*, *Luzula campestris*, *pilosa*, *Pimpinella magna*, *Poa pratensis*, *Veronica Chamaedrys*, *Viola canina*. W tem też stadium wzmagą się rozwój *Calamagrostis epigeios*, pojawiającej się już w 1—2 roku istnienia poręby. Gatunek ten rozpowszechnia się promienisto, tworząc z czasem dość znaczne skupienia. Stale rozszerzając się dzięki płożącym się kłęczom, skupienia te wypierają inne gatunki.

Roślinność VII-go i VIII-go roku poręby.

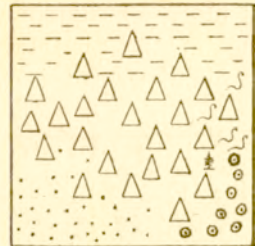
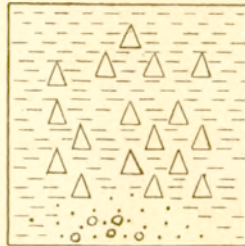
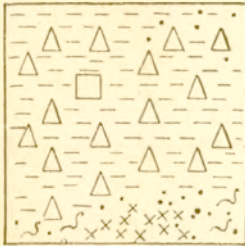
Roślinność VII i VIII roku przedstawia bardzo ciekawe stadium rozwoju, a to ze względu na zmiany, jakie zachodzą w ugrupowaniach roślinnych. Skład florystyczny tych poręb określają nam listy VII-a i VIII-a na str. 213—214.

Drzewa w tem stadium już osiągnęły znaczny przyrost i zaczynają nie tylko wzajemnie oddziaływać na siebie, lecz na glebę i atmosferę, słowem na środowisko. Oddziaływanie to ujawnia się w fakcie zmniejszania się stopnia pospolitości wielu gatunków, które szczególnie w II-iejm stadium dobrze się rozwinęły, jak *Erythraea Centaurium*, *Gnaphalium silvaticum*, *Epilobium angustifolium*, *Hypericum perforatum*, *Juncus conglomeratus*, *Luzula campestris*, *pilosa*, *Pimpinella magna*, *Poa pratensis*, *Veronica Chamaedrys*, *officinalis*, *Viola canina*. Równocześnie

z tym procesem idzie w parze zwiększanie się już występujących lub zjawienie się nowych gatunków, znoszących zacienienie, jak *Vicia Cracca*, *Majanthemum bifolium*, *Lathyrus silvester*, *Corylus Avellana*, *Poa nemoralis*, *Hypericum montanum*, *Galium vernum* i in. *Calamagrostis epigeios* w VII-ym roku osiąga maximum rozwoju, wyrastając niekiedy do wysokości $\frac{3}{4}$ drzew i tworząc czyste skupienia—*Calamagrostetum*. W następnym jednak już roku ujawnia się coraz widoczniej wypieranie *Calamagrostetum* przede wszystkim przez drzewa, zacinające coraz bardziej teren, a następnie przez krzewy, półkrzewy, a nawet i gatunki zielne. Do gatunków wypierających należy zaliczyć *Cytisus nigricans*, *Genista tinctoria*, *germanica*, *Astragalus glycyphyllos*, *Solidago Virga aurea*. Wprawdzie gatunki te występują i w młodszych porębach i oczywiście wypierają *Calamagrostis* i inne rodzaje, lecz wobec istnienia dużych przestrzeni niezacienionych *Calamagrostetum* nie znajduje przeszkód w rozszerzaniu się na peryferji skupień. W starszych jednak stadjach drzewa, w szczególności zaś sosna, które przedtem były głuszone przez *Calamagrostis*, z chwilą wyniesienia swych koron na powierzchnię, zaczynają głuścić *Calamagrostetum*, rozsadać je, rozdzierać na poszczególne fragmenty, porozrzucane pomiędzy drzewami. Ponieważ boczne korzenie sosny rozgałęziają się poziomo tuż pod powierzchnią i zajmują znaczną przestrzeń, więc przedostając się do *Calamagrostetum*, rozwijającego swe rozłogi również poziomo i mniej więcej na tym samym poziomie co i sosna, wypierają je. Na tem nie kończą się losy *Calamagrostis epigeios* i innych gatunków zielnych, nie tworzących jednak tak znacznych zwartych skupień. Wyżej już wzmiankowane gatunki, przede wszystkim zaś *Cytisus nigricans*, występując pomiędzy drzewami, w dalszym ciągu wypierają *Calamagrostis*, *Agrostis*, *Deschampsia* i inne elementy łąkowe. Wypieranie to może się odbywać dzięki temu, że gatunki wypierające posiadają silnie rozwinięty korzeń palowy, jak wykazały pomiary, średnio równający się 50 cm. długości. Korzenie te przebijają się przez powłokę korzeni i zeschniętych łodyg traw i zagłębiają się w glebie.

Tak więc gatunki wypierające, rozwijając swe korzenie pod warstwą korzeni gatunków wypieranych, przygniatają te ostatnie swemi pędami i stwarzają dla nich wysoce niekorzystne warunki egzystencji.

Dla przykładu wypierania jednych gatunków przez drugie przytoczymy 18, 19, 20 m² z VIII-go roku poręby.



□ *Pinus silvestris*
 † *Carpinus Betulus*
 — *Calamagrostis epuycios*

△ *Cytisus nigricans*
 S *Geranium officinalis*
 ○ *Poa pratensis*

× *Genista germanica*
 ⊙ *Calamagrostis Acinos*
 • *Agrostis alba*

Jak się układają stosunki ekologiczne w późniejszych stadiach, nie jesteśmy w stanie orzec w braku odpowiednich poręb, a raczej młodników. W każdym bądź razie proces ustalania się zrzeszenia leśnego, który tak wyraźnie zarysowuje się już w VII

VIII-ym roku istnienia poręby, trwa nadal i polega prawdopodobnie na wypieraniu przez drzewa (przynajmniej częściowo) *Cytisus nigricans*, *Genista tinctoria*, *germanica* i in. Gatunki te w starszych lasach występują rzadziej i to w dodatku w miejscach bardziej oświetlonych. Musimy zaznaczyć, że, mówiąc o wypieraniu jednych gatunków przez drugie, chcemy wskazać tylko zasadnicze linie rozwoju tych lub innych elementów florystycznych. Z tego jednak nie należy bynajmniej wyciągać wniosku, że gatunek wypierany zawsze zostaje całkowicie wyparty. W przyrodzie istnieje wielka różnorodność warunków, których nie da się objąć jakimś ogólnym schematem; schemat więc nie może posiadać wartości absolutnej, wskazuje nam tylko kierunek rozwoju danego procesu i ułatwia orientację w kompleksie zjawisk tej lub innej kategorii.

Z tego, cośmy wyżej powiedzieli, wynika, że w ciągu 8-mioletniego istnienia poręby roślinność przechodzi szereg powolnych zmian, które mimo charakteru przejściowego dadzą się wyodrębnić w następujące fazy rozwoju: 1) zrzeszenia otwartego, 2) łąki, 3) ustalania się lasu. Każda z tych faz posiada właściwe sobie cechy i pozwala się ogólnie scharakteryzować.

I. Zrzeszenie otwarte, nieokreślone występuje w ciągu pierwszych 3-ech lat istnienia poręby i przedstawia mie-

szaninę elementów leśnych, łąkowych i synantropijnych. W pierwszym roku mają przewagę składniki leśne, synantropijne odgrywają rolę podrzędną, w drugim roku równowaga przechyla się w kierunku składników synantropijnych, których napływ osiąga maximum. Stadjum to znamionuje w porównaniu z następnymi stadjami względnie wysoki % gatunków ☉—☺. W 3-cim roku z chaosu tego zaczyna się wyłaniać zrzeszenie łąkowe.

II. Stadjum łąki trwa w ciągu 4—6-go roku istnienia poręby i przedstawia zrzeszenie zamknięte (zwarte), w którym wybitną rolę odgrywają gatunki trwałe: trawy w suchszych miejscach, sity zaś w wilgotniejszych; ilość gatunków rocznych i dwuletnich zmniejsza się znakomicie. Naogół stadjum to, zawierające elementy florystyczne łąkowe i leśne, znamionują składniki miejsc słonecznych, rozwijające się na polankach pomiędzy drzewami; formy leśne skupiają się w miejscach zacienionych, głównie pod drzewami. Oddziaływanie drzew i krzewów na zrzeszenie roślinne ujawnia się w małym stopniu.

III. Ustalanie się lasu. Najważniejszym momentem tego stadjum jest intensywniejsze oddziaływanie drzew na środowisko, ujawniające się w wypieraniu roślinności zielnej, lubiącej światło, której miejsce zajmują formy leśne, znoszące zacienienie. Ilość gatunków rocznych i dwuletnich zostaje zredukowana do minimum. Wszystko to prowadzi coraz wyraźniej do wytworzenia takich stosunków synekologicznych, jakie panują w ustalonych zrzeszeniach leśnych.

Jak już wyżej zaznaczyliśmy, poszczególne ogniwa rozwoju roślinności na porębach rozwijają się naogół pod wpływem jednokowych warunków klimatycznych i edaficznych, lecz przedstawiają różny stopień rozwoju pod względem socjalnym. Stopień zaś socjalny danego stadjum jest rezultatem tych zmian, jakie wywołuje w warunkach ekologicznych zbiorowe życie roślin i ich wzajemne oddziaływanie na siebie i na środowisko. Zmiany te można sprowadzić do zmian lokalnych (wtórnych) gleby i klimatu, do indywidualnych właściwości poszczególnych gatunków, a więc zdolności przy stosowywania się do zmieniających się warunków, i wreszcie do współzawodnictwa o byt. Czynniki te decydują o rozpowszechnieniu się i odpowiedniemu ugrupowaniu gatunków na danym terenie.

Według P. Jaccard'a ¹⁾ charakter danego ugrupowania czyli zrzeszenia roślinnego (association) ściśle określają następujące czynniki: 1) bogactwo florystyczne, t. j. ilość składających zrzeszenie gatunków, wyrażona liczbowo, abstrakcyjnie, bez uwzględnienia nazwy gatunków; 2) skład florystyczny, t. j. lista systematyczna gatunków; 3) spólczynnik rodzajowy, to znaczy stosunek ilości gatunków do ilości rodzajów. Porównanie składu florystycznego dwu zrzeszeń, ewentualnie dwu stadjów rozwojowych tego samego zrzeszenia, pozwoli nam określić spólczynnik wspólności florystycznej porównywanych jednostek. Spólczynnik wspólności florystycznej oblicza się według Jaccard'a w następujący sposób: 1) ustala się ilość wspólnych form dwóch zrzeszeń (ewentualnie 2 stadjów rozwojowych tego samego zrzeszenia), 2) dodaje się ilość gatunków obydwu zrzeszeń, 3) od otrzymanej sumy odejmuje się ilość gatunków wspólnych i 4) oblicza się w % stosunek ilości gatunków wspólnych do ilości ogólnej gatunków. Przykład: mamy 2 zrzeszenia A i B. Pierwsze posiada 100 gat., drugie 70 gat.; 30 gatunków jest wspólnych. W takim razie $100 + 70 - 30 = 140$; Spólczynnik wspólności $= \frac{30}{140} = 21.4\%$.

Opierając się na tych kryterjach, postaramy się zanalizować roślinność każdego roku poręby i wyprowadzić stąd ogólne wnioski. O składzie florystycznym mówią nam listy gatunków poszczególnych poręb, inne czynniki należy określić.

Bogactwo florystyczne. Z list gatunków wynika, że na 20 m² poręby każdego wieku występuje określona ilość gatunków, lecz częstość ich występowania, inaczej mówiąc stopień ich pospolitości, jest różny. Ponieważ rozpatrujemy roślinność 20-tu m² każdego wieku poręby, więc możnaby ustanowić 20 stopni pospolitości, oznaczając przez 1 najniższy stopień pospolitości, przez 20 najwyższy, bez względu na to, na którym z 20 kwadratów dany gatunek występuje. Poszliśmy jednak za większością geografów roślin, którzy stosują tylko 10 stopni pospolitości. Dlatego przez 1 oznaczamy gatunki, występujące na 1—2 m², przez 2—na 3—4 m², przez 10—na 19—20 m². Ażeby uzyskać

¹⁾ Dr. P. Jaccard. Lois de distribution florale dans la zone alpine. Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, t. 30, 1902.

możność porównywania stosunków liczbowych, występujących wśród roślinności różnego wieku, zestawimy cyfry każdego roku poręby w następujące tabliczki:

(Tablice: I, II, IV, V, VI, VII, VIII znajdują się na stronach 215—221).

Z tablicy np. I-ej wynika, że w obrębie pierwszego m² występują: 1 gatunek, którego stopień pospolitości = 1, 1 gatunek, którego stopień pospolitości jest 2, ... 2 gatunki o stopniu pospolitości 10 i t. d. Szereg poziomy, oznaczony literą S, przedstawia sumy liczb, odpowiadające każdemu z osobna stopniowi pospolitości na różnych metrach. Szereg zaś $M = \frac{S}{20}$, t. j. składa się z cyfr, otrzymanych z podziału każdej z liczb poprzedniego szeregu przez ilość metrów kwadratowych. Dane powyższe możemy przedstawić za pomocą krzywej Jaccard'a. Jeżeli mianowicie odłożymy na linii poziomej 10 jednakowych odcinków, odpowiadających 10 stopniom pospolitości, a na linii pionowej wielkości, odpowiadające ilości gatunków różnych stopni pospolitości, to otrzymamy dla każdego metra krzywą, którą Jaccard nazwał „courbe de fréquence florale élémentaire”. Krzywa, odpowiadająca cyfrom w rubryce poziomej M, przedstawia wartości średnie poszczególnych „courbes de fréquences élémentaires”. Przez nią wyrażamy przeciętną pospolitość miejscową („fréquence locale moyenne”), wskazującą średni rozkład gatunków na porębie określonego wieku. Ponieważ nam chodzi o wartości przeciętne, któreby ogólnie charakteryzowały roślinność poręb, przeto wykreślimy dla każdego roku poręby krzywe przeciętne (courbes de fréquence locale de Jaccard).

Krzywe te wskazują, że poręby I-go i II-go roku posiadają jednakową, dosyć dużą ilość gatunków najwyższego stopnia pospolitości czyli najpospolitszych, lecz panującymi są gatunki najrzadsze, t. j. występujące na 1—2 m². W II-im roku poręby ilość najrzadszych gatunków osiąga maximum. W następnych latach widzimy spadek gatunków 1-go stopnia pospolitości; ilość gatunków najwyższego stopnia pospolitości również spada lub wcale nie występuje. Zawarte pomiędzy temi dwoma krańcami krzywe odznaczają się dla młodszych poręb wielką nieregularnością, w starszych zaś stadjach wyrażają skłon-

ność do wyrównania. Wreszcie krzywa VIII-go roku poręby zbliża się najbardziej do linii prostej poziomej, przedstawiającej stan równowagi idealnej zrzeszenia roślinnego, t. j. takiego ugrupowania roślin, w którym na każdym kwadracie występowałyby jednakowa ilość gatunków jednakowego stopnia pospolitości, co w rzeczywistości nigdy nie istnieje.

Wnioski, stąd wypływające, rozpatrzmy nieco później, a teraz przechodzimy do przedstawienia spólczyznika rodzajowego roślinności poszczególnych poręb.

Spólczyznik rodzajowy (Coefficient générique) przedstawia się w następujący sposób:

Wiek poręby	I	II	IV	V	VI	VII	VIII
Spólczyznik rodzajowy	79,2	75,2	82,7	80	86,5	86,5	85,3

Z zestawienia tego widać, że w II-im roku poręby spólczyznik rodzajowy jest najniższy i stopniowo wzrasta w porębach starszego wieku, wykazując niewielkie różnice, zależne od lokalnych warunków ekologicznych. Jaccard¹⁾ twierdzi, że spólczyznik rodzajowy jest odwrotnie proporcjonalny do różnorodności warunków ekologicznych. Z tego wynikałoby, że w naszym terenie najbardziej różnorodne warunki ekologiczne posiadają I i II-gi rok poręby. A że poręby tego wieku, jak już wykazałem, tworzą zrzeszenia otwarte, nieokreślone, z których później powstają zrzeszenia bardziej określone, więc możnaby również słusznie twierdzić, że spólczyznik rodzajowy jest proporcjonalny do stopnia rozwoju danego zrzeszenia²⁾. Zbyt mało danych posiadam, ażeby twierdzenie to wypowiedzieć w sposób definitywny i ogólny. W każdym bądź razie wydaje mi się ono słusznem przynajmniej dla zrzeszeń roślinnych na porębach, a to z tego względu, że w pierwszej fazie rozwoju zrzeszenia, w chwili jego powstawania, mamy do czynienia z napływem dużej

¹⁾ Jaccard, l. c.

²⁾ Odchylenie IV-go roku poręby od tej ogólnej zasady wynika prawdopodobnie z lepszych własności gleby, ponieważ drzewa posiadają tam większy przyrost w porównaniu z porębą V-go roku; wogóle cały teren posiada bujniejszą roślinność.

Najmniej zaś form wspólnych w porównaniu z innymi porębami posiada poręba II-go roku. Fakt, że współczynnik wspólności florystycznej roślinności poręby I-go roku, a następnymi wykazuje prawidłowy szereg zstępujący, świadczy, że w parze z wiekiem poręby odbywa się pomiędzy gatunkami roślinnymi dobór naturalny, którego rezultatem jest zanik wielu gatunków.

Określenie czynników, charakteryzujących poszczególne stadia roślinności na porębach, pozwala nam głębiej wniknąć w istotę stosunków florystyczno-statystycznych i objaśnić ich przyczyny. Bogactwo florystyczne wykazało, że w każdym roku mamy inny układ dynamiczno-florystyczny, że układ ten mimo różnic, wynikających wskutek drobnych różnic środowiska, idzie w określonym kierunku. Wyrazem tego są krzywe częstości lokalnej gatunków *Jaccard'a* (*courbes de fréquence moyenne*). Ze składu zaś florystycznego poszczególnych poręb wynika, że zaczynając od momentu wyłaniania się bardziej określonych zrzeseń roślinnych, zarówno ogólna ilość gatunków na porębie, jak i przeciętna ilość gatunków na kwadracie jest odwrotnie proporcjonalna do wieku poręby. A że jednocześnie, jak wykazują krzywe nasze, zwiększa się ilość gatunków częstszych, to z zestawienia tych dwu faktów wynika, że zaczynając głównie od 2-go stadjum, wśród roślinności poręb odbywają się równocześnie 2 procesy, pozostające ze sobą w ścisłym związku: wypieranie jednych gatunków przez drugie i silniejsze rozpowszechnianie się gatunków zwyczajskich. Procesy te warunkują stan równowagi zrzeseń w dany moment. Na ich przebieg mają wpływ z jednej strony czynniki wewnętrzne (zdolność przystosowania się i skala wymagań życiowych gatunków), z drugiej strony zaś czynniki zewnętrzne (klimatyczno-edaficzne). Jako wyraz widomy skombinowanego działania tych czynników jest powstanie określonych zespołów roślinnych. W ten więc sposób widzimy, że obok środowiska i wewnętrznych właściwości gatunków walka o byt jest jednym z najważniejszych czynników socjologicznych w powstawaniu i życiu zrzeseń roślinnego; ona jest przyczyną doboru naturalnego, który prowadzi do wytwarzania określonych stosunków florystyczno-statystycznych.

Reasumując wszystko to, co wyżej powiedziałem o porębach zbadanych, przechodzę do następującego wniosku:

Roślinność na porębach rozwija się według określonych praw. Jej cykl rozwojowy stanowią 3 kolejno następujące po sobie sta-

dja: zrzeszenia otwartego, łąki i lasu. Pierwsze z tych stadijów przedstawia przypadkową mieszaninę form, zależną od b. wielu czynników. Z tego stadjum powstają stopniowo uorganizowane kompleksy gatunków, mniej lub więcej stałe, o pewnych cechach charakterystycznych — powstają zrzeszenia roślinne. Jak każdy żywy organizm, zrzeszenie roślinne powstaje, rozwija się i zanika, ustępując miejsca innemu zrzeszeniu. Stąd zrzeszenie roślinne nie przedstawia czegoś zamkniętego, stałego; jest ono tylko jednym z ogniw ciągłego procesu, odbywającego się w przyrodzie i mającego swe źródło w zmianach warunków ekologicznych, jakie zachodzą pod wpływem wzajemnego oddziaływania na siebie zbiorowo żyjących gatunków. W każdym z tych stadijów panują określone stosunki florystyczno-statystyczne, które można przedstawić za pomocą krzywych Jaccard'a. Krzywe te są wyrazem walki o byt pomiędzy gatunkami.

Na zakończenie czuję się w miłym obowiązku serdecznie podziękować prof. dr. Z. Wóycickiemu, kierownikowi Zakładu Botanicznego Uniwersytetu Warszawskiego, za ułatwienia w pracy, jak również panu R. Cichowskiemu, właścicielowi Słaboszowic i Międzygórza, za udzielenie mi gościny i wszelkie udogodnienia podczas pracy w terenie.

Zakład Botaniczny
Uniwersytetu Warszawskiego.

Lista I Liste

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																				Ilość met., na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espèce se rencontre.
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	<i>Agrostis alba</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	-	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	19	
2	<i>Dactylis glomerata</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	7	
3	<i>Poa nemoralis</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	20	
4	<i>Brunella vulgaris</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10	
5	<i>Viola canina</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	12	
6	<i>Hieracium Pilosella</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	
7	<i>Erythraea Centaurium</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	7	
8	<i>Galium vernum</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	12	
9	<i>Achillea Millefolium</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	6	
10	<i>Cerastium arvense</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	2	
11	<i>Betula verrucosa</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13	
12	<i>Veronica Chamaedrys</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10	
13	<i>Gnaphalium silvaticum</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	8	
14	<i>Plantago media</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	
15	<i>Euphrasia stricta</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	
16	<i>Luzula pilosa</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	11	
17	<i>Cuscuta europaea</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	
18	<i>Selinum carvifolia</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
19	<i>Astragalus glycyphyllos</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	2	
20	<i>Pimpinella magna</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
21	<i>Deschampsia caespitosa</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	6	
22	<i>Hypericum perforatum</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	4	
23	<i>Cirsium lanceolatum</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	6	
24	<i>Plantago lanceolata</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	
25	<i>Veronica officinalis</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	5	
26	<i>Populus tremula</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	2	
27	<i>Carpinus betulus</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	
28	<i>Artemisia vulgaris</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
29	<i>Lathyrus vernus</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
30	<i>Epilobium angustifolium</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
31	<i>Fragaria vesca!</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	2	
32	<i>Hypericum montanum</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	2	
33	<i>Cirsium arvense</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
34	<i>Erigeron canadensis</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	3	
35	<i>Helichrysum arenarium</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
36	<i>Scrophularia nodosa</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
37	<i>Poa compressa</i> var. polyn.	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
38	<i>Poa pratensis</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
39	<i>Koeleria cristata</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
40	<i>Rumex Acetosella</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
41	<i>Calamagrostis epigeios</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
42	<i>Luzula campestris</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	5	
43	<i>Crataegus monogyna</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	4	
44	<i>Anthoxanthum odoratum</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	2	
45	<i>Carex canescens</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	
46	<i>Anthemis arvensis</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1	

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																				Ilość met., na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espèce se rencontre
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
47	Linum catharticum . . .										X											1
48	Stellaria graminea . . .									X											X	2
49	Holcus lanatus									X												1
50	Ranunculus acer									X												1
51	Festuca ovina										X										X	2
52	Juncus compressus									X	X											2
53	Quercus pedunculata									X	X					X			X			3
53	Pimpinella Saxifraga									X	X			X	X	X	X	X	X			8
55	Carex leporina									X	X										X	3
56	Majanthemum bifolium										X	X										1
57	Carex panicea												X						X			2
58	Betonica officinalis												X							X		1
59	Vicia sepium												X	X								1
60	Carex silvatica												X	X								2
61	Potentilla Tormentilla														X				X	X	X	4
62	Genista germanica															X						1
63	Leontodon autumnalis																X		X			2
64	Trifolium alpestre																	X				1
65	Genista tinctoria																	X	X			1
66	Hieracium umbellatum																	X	X			2
67	Hypericum quadrangulum																	X	X			1
68	Lotus corniculatus																	X	X			1
69	Ranunculus polyanthemos																	X	X			1
70	Helianthemum vulgare																		X	X		1
71	Salix Caprea																		X	X		1
72	Campanula patula																		X	X		1
	Ilość gatunków na każ- dym m ²																					
	Nombre des espèces sur chaque m ²	12	17	17	18	10	4	18	13	7	8	16	14	10	10	11	9	12	15	23	16	

Przeciętnie przypada na m² gatunków 13.
Espèces en moyenne par m²

Lista II Liste

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																				Ilość met., na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espèce se rencontre
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	Achillea Millefolium . . .	×	×	×	×	—	×	—	—	×	—	—	—	—	×	×	×	×	×	×	—	12
2	Thymus Chamaedrys Fr. . .	×	×	—	×	—	—	—	—	×	—	—	—	—	×	×	×	×	×	×	—	3
3	Lotus corniculatus . . .	×	—	—	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
4	Brunella vulgaris . . .	×	×	×	—	×	×	×	—	×	×	×	—	—	×	×	×	—	×	×	—	15
5	Agrostis salba . . .	×	×	×	×	×	×	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×	—	×	×	—	19
6	Plantago media . . .	×	×	×	×	×	×	—	×	—	—	—	—	—	×	×	—	—	—	—	×	9
7	Hypericum perforatum . . .	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	5
8	Plantago lanceolata . . .	×	×	—	—	×	×	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
9	(Pinus silvestris) ¹⁾ . . .	×	×	×	×	×	×	×	×	×	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	19
10	Hieracium pilosella . . .	×	×	—	×	—	—	—	—	—	×	—	×	×	×	×	—	—	—	—	×	8
11	Lolium perenne . . .	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
12	Trifolium alpestre. . .	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	4
13	Scabiosa ochroleuca. . .	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	×	—	—	×	—	—	—	—	1
14	Cerastium glomeratum . . .	—	×	×	—	×	—	—	×	—	×	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	6
15	Gnaphalium silvaticum. . .	×	×	—	×	—	—	—	×	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	8
16	Rumex Acetosella . . .	×	×	—	—	—	×	—	—	×	—	—	×	—	—	—	—	×	—	—	×	5
17	Anthoxanthum odoratum . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
18	Campanula patula . . .	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
19	Trifolium arvense. . .	×	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
20	Erythraea Centurium . . .	×	—	—	×	—	×	—	—	—	—	×	—	×	—	×	—	×	—	—	—	7
21	Galium verum. . .	—	—	—	×	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
22	boreale . . .	—	×	—	—	—	—	—	—	—	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
23	Centaurea Jacea . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	3
24	Pimpinella Saxifraga . . .	×	×	×	—	—	×	—	—	×	—	—	—	—	×	—	—	—	—	×	—	7
25	Luzula campestris . . .	×	×	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
26	Leontodon hispidus . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
27	Vicia sepium . . .	×	×	—	—	—	—	—	×	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	3
28	Medicago lupulina . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
29	Polygonum aviculare . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
30	Veronica Chamaedrys . . .	×	×	×	×	—	×	—	—	—	—	×	×	—	×	×	×	×	×	×	—	12
31	Poa nemoralis . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	×	×	—	—	—	—	—	—	—	5
32	Euphrasia officinalis. . .	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
33	Chenopodium hybridum . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
34	Chenopodium album . . .	×	—	—	×	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
35	Polygonum dumetorum. . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
36	Leontodon autumnalis . . .	×	×	—	×	—	×	×	×	—	—	—	—	—	×	—	—	×	×	—	—	8
37	Trifolium pratense . . .	×	—	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
38	Galium Schultesii . . .	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
39	Crataegus monogyna . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
40	Stellaria graminea . . .	×	—	—	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
41	Sorbus Aucuparia . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
42	Aira caespitosa . . .	×	×	—	×	×	—	—	—	—	—	×	×	×	—	×	—	—	—	—	—	7
43	Viola canina var. . .	×	×	—	×	—	—	—	—	×	—	—	×	×	—	×	—	—	—	—	—	11
44	Authemis arvensis . . .	×	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
45	Betula verrucosa . . .	×	×	—	—	—	×	—	—	×	—	—	—	—	×	—	×	—	×	×	—	7
46	Fragaria vesca . . .	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
47	Lathyrus pratensis . . .	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
48	Cirsium arvense . . .	—	×	×	×	×	×	×	×	—	—	×	×	×	—	—	—	×	—	—	×	11
49	Luzula pilosa . . .	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
50	Taraxacum officinale . . .	—	×	—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2

¹⁾ W nawias zostały wzięte gatunki hodowane.
Les espèces cultivées sont enfermées dans la parenthèse.

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																				Ilość met., na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espèce se rencontre
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
51	<i>Hypericum montanum</i>					X										X						2
52	<i>Bellis perennis</i>					X		X														2
53	<i>Sonchus oleraceus</i>					X						X										2
54	<i>Dactylis glomerata</i>					X		X	X													3
55	<i>Gypsophila muralis</i>					X																1
56	<i>Juncus compressus</i>					X	X	X	X	X	X								X			7
57	<i>Lysimachia nummularia</i>					X	X	X	X									X		X		5
58	<i>Ranunculus repens</i>					X	X	X	X													3
59	<i>Salix Caprea</i>					X	X	X	X													2
60	<i>Majanthemum bifolium</i>					X	X	X	X													1
61	<i>Solidago Virga aurea</i>					X	X	X	X													2
62	<i>Carpinus betulus</i>					X	X	X	X													1
63	<i>Galium vernum</i>					X				X		X	X	X					X			6
64	<i>Plantago major</i>						X	X	X		X		X	X					X			4
65	<i>Carex canescens</i>						X	X	X									X		X		3
66	<i>Aegopodium Podagraria</i>						X	X	X													1
67	<i>Cirsium lanceolatum</i>						X	X	X													2
68	<i>Erigeron canadensis</i>						X	X	X		X	X				X						4
69	<i>Cerastium caespitosum</i>						X	X	X													1
70	<i>Veronica officinalis</i>						X	X	X	X	X	X				X						5
71	<i>Genista tinctoria</i>						X	X	X						X							2
72	<i>Calamagrostis epigeios</i>						X	X	X				X	X					X	X		6
73	<i>Artemisia vulgaris</i>						X	X	X						X					X	X	1
74	<i>Carex leporina</i>							X	X	X		X										3
75	<i>Hieracium umbellatum</i>								X													1
76	<i>Urtica dioica</i>										X											1
77	<i>Arrhenatherum elatius</i>										X											1
78	<i>Filago arvensis</i>										X											1
79	<i>Rosa canina</i>										X											1
80	<i>Scrophularia nodosa</i>										X						X					2
81	<i>Epilobium angustifolium</i>										X						X					2
82	<i>Viola mirabilis</i>										X											1
83	<i>Lathyrus vernus</i>														X							1
84	<i>Astragalus glycyphyllos</i>																		X	X		2
85	<i>Trifolium aureum</i>														X							2
86	<i>Clinopodium vulgare</i>															X						1
87	<i>Tanacetum vulgare</i>															X						1
88	<i>Festuca ovina</i>															X						1
89	<i>Pastinaca sativa</i>															X						1
90	<i>Poa pratensis</i>																				X	1
91	" <i>compressa. polynoda.</i>																		X			1
92	<i>Linaria vulgaris</i>																			X		1
93	<i>Genista germanica</i>														X							1
94	<i>Potentilla Tormentilla</i>														X							1
Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur cha- que m ²		13	15	24	16	18	15	24	22	16	22	9	20	19	13	21	15	16	13	15	10	

Przeciętnie przypada na m² gatunków 16,8.
Espèces en moyenne par m²

Liste I V Liste

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																			Ilość met., na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espèce se rencontre	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		20
1	<i>Fragaria vesca</i>	x	-	x	-	x	-	-	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	4
2	<i>Solidago canadensis</i>	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
3	<i>Gnaphalium silvaticum</i>	x	-	-	-	x	-	-	-	x	-	-	-	-	-	x	x	-	-	x	-	6
4	<i>Achillea Millefolium</i>	x	x	-	-	x	-	-	-	x	-	-	x	-	-	-	x	-	-	-	-	6
5	<i>Galium Schultesii</i>	x	x	-	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4
6	<i>Clinopodium vulgare</i>	x	x	-	x	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4
7	<i>Veronica Chamaedrys</i>	x	x	-	-	x	x	-	-	x	x	x	x	-	-	x	-	x	x	x	-	12
8	<i>Brunella vulgaris</i>	x	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
9	<i>Galium vernum</i>	x	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	4
10	<i>Betula verrucosa</i>	x	-	x	-	x	x	x	-	x	-	x	x	x	-	x	x	x	-	-	-	12
11	(<i>Pinus silvestris</i>)	x	-	x	-	-	x	-	x	-	x	x	x	x	-	x	x	x	x	-	-	12
12	<i>Poa pratensis</i>	x	x	-	x	x	x	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	x	x	8
13	„ <i>compressa</i> var. <i>polynoda</i>	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
14	<i>Polygonum aviculare</i>	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
15	<i>Anthemis arvensis</i>	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
16	<i>Agrostis alba</i>	-	-	x	x	x	x	x	-	-	x	x	x	x	x	-	x	x	x	x	x	15
17	<i>Betonica officinalis</i>	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
18	<i>Epilobium angustifolium</i>	-	x	-	-	-	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
19	<i>Poa nemoralis</i>	-	x	-	-	-	x	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3
20	<i>Cirsium arvense</i>	-	x	x	x	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	x	x	-	-	-	-	6
21	<i>Lotus corniculatus</i>	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
22	<i>Luzula pilosa</i>	-	x	-	-	-	-	-	-	-	x	x	x	-	-	x	x	-	-	x	-	7
23	„ <i>campestris</i>	-	x	-	x	x	x	-	-	x	x	x	-	-	-	-	x	-	-	-	-	8
24	<i>Carex leporina</i>	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	-	-	-	x	-	-	x	-	4
25	<i>Calamagrostis epigeios</i>	-	-	-	x	-	-	-	x	-	-	-	-	-	x	-	x	-	-	x	-	5
26	<i>Cytisus nigricans</i>	-	-	-	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
27	<i>Juncus compressus</i>	-	-	-	x	-	x	-	-	x	-	x	x	-	x	x	-	-	-	-	-	7
28	<i>Aira caespitosa</i>	-	-	-	x	x	-	-	x	x	-	x	x	-	x	x	-	-	-	-	-	8
29	<i>Plantago lanceolata</i>	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
30	(<i>Picea excelsa</i>)	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	2
31	<i>Rumex Acetosella</i>	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																			Ilość met., na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espèce se rencontre
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
32	<i>Viola canina</i>						×	—	—	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	13
33	<i>Carex panicea</i>							×	—	—	—	—	×	—	—	—	—	—	—	—	2
34	<i>Centaurea Jacea</i>								×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
35	<i>Veronica officinalis</i>									×	—	—	×	—	—	—	—	—	—	×	3
36	<i>Genista germanica</i>									×	—	—	—	—	—	—	×	—	—	×	3
37	„ <i>tinctoria</i>										×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
38	<i>Pteridium aquilinum</i>										×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
39	<i>Salix Caprea</i>										—	—	—	—	×	×	—	—	—	—	2
40	<i>Hypericum perforatum</i>										—	—	—	—	—	—	×	×	—	×	3
41	<i>Erythraea Centaurium</i>										×	×	—	—	—	—	—	×	—	×	4
42	<i>Carex canescens</i>										—	×	—	—	—	—	—	—	—	—	1
43	<i>Stellaria graminea</i>										—	—	—	—	—	—	—	—	×	—	1
44	<i>Vicia sepium</i>										×	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
45	<i>Stachys silvatica</i>										—	—	—	×	×	—	—	—	—	—	2
46	<i>Scrophularia nodosa</i>										—	—	×	×	—	—	—	—	×	×	4
47	<i>Populus tremula</i>										—	—	—	×	—	—	—	—	—	×	2
48	<i>Cerastium glomeratum</i>										—	—	—	—	—	—	×	—	—	—	1
49	<i>Campanula patula</i>										—	—	—	—	—	×	—	—	—	—	1
50	<i>Oxalis Acetosa</i>										—	—	—	—	—	—	—	×	—	—	1
51	<i>Solidago Virga-aurea</i>										—	—	—	—	—	—	—	—	×	—	1
52	<i>Hypericum quandranqulum</i>										—	—	—	—	—	—	—	—	×	—	1
Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur cha- que m ²		13	7	12	8	11	11	7	3	7	10	13	16	12	8	5	14	13	8	8	14

Przeciętnie przypada na m² gatunków 9,4.
Espèces en moyenne par m²

Lista ∇ Liste

№	Nazwa gatunku Nom d'espece	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																				Ilość met., na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espece se rencontre
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	Aira caespitosa	+		X	X	X	X	X										X				7
2	Veronica Chamaedrys	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	20
3	Hypericum quadrangulum	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	4
4	Viola canina	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X				X	X	X	X	16
5	Brunella vulgaris	X	X	X						X				X	X			X	X	X	X	8
6	Gnaphalium silvaticum	X	X		X	X	X	X		X								X	X	X	X	8
7	Veronica officinalis	X	X		X	X			X			X				X		X	X	X	X	8
8	(Picea excelsa)	X	X																			2
9	(Quercus pedunculata)	X	X		X				X	X				X	X			X	X	X	X	7
10	Luzula pilosa	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X	X		X	X	X	X	17
11	Calamagrostis epigeios		X	X		X	X		X	X	X					X						7
12	Erythraea Centaurium		X	X				X	X	X	X							X	X	X	X	10
13	Betula verrucosa		X	X		X			X	X	X						X	X	X	X	X	7
14	Cirsium arvense		X	X	X			X				X	X				X	X	X	X	X	8
15	Achillea Millefolium		X						X	X		X	X	X	X			X	X	X	X	10
16	Agrostis alba		X	X					X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	12
17	Galium vernum		X	X		X										X		X	X	X	X	2
18	Poa pratensis		X	X		X	X	X	X	X		X	X	X	X						X	11
19	Hypericum perforatum		X	X	X	X	X	X				X	X	X	X			X	X	X	X	8
20	Poa nemoralis		X	X	X	X	X	X														1
21	(Pinus silvestris)		X	X		X	X		X			X	X				X		X	X	X	8
22	Solidago canadensis		X																			1
23	Juncus compressus		X	X	X	X	X	X		X		X	X	X	X					X	X	11
24	Astragalus glycyphyllos		X	X	X	X	X													X	X	3
25	Stellaria graminea		X	X	X	X	X					X	X	X								3
26	Carex panicea		X	X		X						X	X									4
27	Genista germanica		X	X		X													X	X	X	3
28	Luzula campestris		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	11
29	Carex leporina		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	3
30	Genista tinctoria		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	3
31	Calamintha acinos		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	2
32	Scrophularia nodosa		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	1
33	Carex hirta		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	2
34	Lathyrus vernus		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	1
35	(Alnus glutinosa)		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	2
36	Pimpinella axifraga		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	1
37	" magna		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	2
38	Potentilla Tormentilla		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	1
39	Betonica officinalis		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	1
40	Campanula patula		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	1
Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur cha- que m ²		10	12	13	14	14	11	10	13	16	8	3	15	13	13	12	6	15	13	14	12	

Przeciętnie przypada na m² gatunków 11,8.
Espèces en moyenne par m²

Lista **VI** Liste

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																				Ilość met. na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espèce se recontre
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	Calamagrostis epigeios . . .	x	x	y	x																x	5
2	Veronica Chamaedrys . . .	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	18
3	Scrophularia nodosa . . .	x	x	x																		4
4	Cirsium arvense . . .	-X		-X																		6
5	(Pinus silvestris) . . .	x	x	x	x	x	x	x	x													14
6	Betula verrucosa . . .		x	x	x	x																4
7	Viola canina . . .		x																			12
8	Stellaria graminea . . .		x	x	x																	3
9	Hypericum perforatum . . .		x	x		x																6
10	Achillea Millefolium . . .		x	x	x		x	-X	x	-X		-X										11
11	Veronica officinalis . . .		x	x	x	x																6
12	Solidago Virga aurea . . .		x	x	x	x																9
13	Galium Schultesii . . .			x																		1
14	Poa pratensis . . .				x	x	x	x			x											10
15	Agrostis alba . . .				x	x	x	x														6
16	Pimpinella magna . . .				x	x	x															6
17	Poa nemoralis . . .					x																1
18	Luzula pilosa . . .																					2
19	" campestris . . .					x	x															7
20	Hieracium umbellatum . . .				x	x																2
21	Astragalus glycyphyllos . . .						x															1
22	Cerastium glomeratum . . .						x															1
23	Aira caespitosa . . .							x	x			x	x	x	x							6
24	Gnaphalium silvaticum . . .							x	x				x	x	x							8
25	Genista tinctoria . . .																					5
26	Carpinus betulus . . .																					1
27	Calamintha acinos . . .																					1
28	Carex leporina . . .																					1
29	" canescens . . .																					1
30	Juncus compressus . . .																					4
31	(Quercus pedunculata) . . .																					4
32	Epilobium angustifolium . . .																					3
33	Linaria vulgaris . . .																					1
34	Rumex Acetosella . . .																					2
35	Erythraea Centaurium . . .																					3
36	Brunella vulgaris . . .																					1
37	Galium vernum . . .																					3
Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur cha- que m ²	5	5	11	10	11	10	7	7	6	8	11	9	11	10	11	9	9	12	10	7		

Przeciętnie przypada na m² gatunków 9,4.
Espèces en moyenne par m²

Lista **VII** Liste

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																				Ilość met., na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espèce se rencontre
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	Calamagrostis epigeios . . .	x	x	x	x	X	x								x	x					x	9
3	Agrostis alba	x	x	x				x	x				x	x				x	x			12
3	Aira caespitosa	x	x	x				x		x			x	x								6
4	Luzula pilosa	x	x	x	x	x				x												9
5	campestris	x	x	x	x												x	x				7
6	Achillea Millefolium . . .	x	x	x	x					x				x	x	x			x	x		12
7	Cirsium arvense	x	x	x	x		x			x							x	x				8
8	Hypericum perforatum . . .	x	x	x	x					x							x	x				7
9	Viola canina	x	x	x	x					x					x	x				x		10
10	Brunella vulgaris	x	x	x	x					x									x			5
11	Rubus tomentosus	x	x	x	x																	1
12	Veronica Chamaedrys . . .	x	x	x	x					x						x	x				x	8
13	Carex panicea	x	x	x	x					x												3
14	Carpinus betulus	x	x	x	x					x							x					5
15	Salix Caprea	x	x	x	x					x												4
16	(Pinus silvestris)				x							x		x					x	x	x	10
17	Gnaphalium silvaticum . . .			x	x					x			x									6
18	Galium vernum			x	x					x												7
19	Astragalus glycyphyllos . .			x	x					x										x		3
20	Solidago canadensis					x																1
21	(Fraxinus excelsior)						x				x											3
22	Solidago Virga aurea							x	x													2
23	Veronica officinalis							x	x													2
24	Poa pratensis							x	x												x	2
25	Erythraea Centaurium									x	x							x	x			4
26	Populus tremula									x												2
27	Epilobium angustifolium . .									x	x											1
28	Betula verrucosa									x	x			x	x					x		6
29	Ajuga genevensis									x	x											1
30	Pimpinella magna											x	x								x	2
31	Hieracium umbellatum											x	x									1
32	Juncus compressus																	x				2
33	Genista tinctoria										x									x		2
34	Hypericum montanum												x	x								1
35	Carex leporina												x									1
36	(Alnus glutinosa)														x	x						2
37	Trifolium alpestre																			x		1
Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur cha- que m ²	14	9	11	6	4	3	13	10	12	15	7	9	10	8	9	6	8	8	5	1		

Przeciętnie przypada na m² gatunków 8,4.
Espèces en moyenne par m²

Lista **VIII** Liste

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	№ metrów kwadratowych zbadanych des mètres carrés explorés																				Ilość met., na których spotyka się każdy gat. Nombre des m ² sur les- quels chaque espèce se rencontre	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
1	Aira caespitosa	X							X						X			X					4
2	Veronica Chamaedrys	X	X	X		X	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X					15
3	Hypericum perforatum	X											X	X									2
4	" montanum																X	X					3
5	Fragaria vesca	X				X																	3
6	(Pinus silvestris)	X	X	X	X	X				X	X					X		X	X				10
7	Salix Caprea	X							X	X					X	X							5
8	Viola canina		X	X			X	X	X			X			X	X		X	X				10
9	Vicia Cracca		X	X				X	X						X	X							3
10	Agrostis alba		X						X	X				X				X	X	X	X		8
11	Betula verrucosa					X			X	X					X				X	X			6
12	Calamagrostis epigeios			X	X	X	X		X			X			X		X	X		X	X		13
13	Luzula pilosa												X	X				X					2
14	" campestris												X	X									1
15	Scrofularia nodosa			X																			1
16	Genista tinctoria			X									X	X	X								4
17	Galium vernum				X			X	X	X			X	X		X	X						7
18	Poa pratensis							X														X	2
19	Achillea Millefolium							X						X	X								5
20	Erythraea Centaurium						X	X							X								2
21	Majanthemum bifolium							X															1
22	Poa nemoralis								X										X				3
23	Gnaphalium silvaticum									X	X			X	X								3
24	Solidago Virga aurea												X										1
25	Genista germanica													X						X			2
26	Lathyrus silvester														X								1
27	Calamintha acinos													X									2
28	Corylus Avellana																			X	X		1
29	Cytisus nigricans																	X	X	X	X	X	5
30	Potentilla Tormentilla																	X	X	X	X	X	1
31	Juncus compressus																X	X					1
32	Populus tremula																	X					1
33	Veronica officinalis																	X					1
34	Carpinus betulus																				X		1
Ilość gatunków na każdym m ²																							
Nombre des espèces sur cha- que m ²	6	5	4	4	5	4	5	5	9	8	6	8	9	8	7	9	11	6	4	6			

Przeciętnie przypada na m² gatunków 6,4.
Espèces en moyenne par m²

Tablica I Tableau

№ kwadratów des carrés	Poręba I-go roku Abatis de la I année										Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur chaque m ²
	Stoپیeń pospolitosci Degré de fréquence										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	
1	1	1	1	2	2	2	1	—	—	2	12
2	3	3	—	3	2	3	1	—	—	2	17
3	—	4	4	3	1	3	—	—	—	2	17
4	1	3	4	3	1	3	1	—	—	2	18
5	2	—	1	3	1	1	—	—	—	2	10
6	—	—	1	—	—	1	—	—	—	2	4
7	8	2	2	3	—	—	1	—	—	2	18
8	4	2	3	2	—	—	—	—	—	2	13
9	4	—	1	—	—	—	—	—	—	2	7
10	4	1	—	—	1	—	1	—	—	1	8
11	2	4	2	1	1	3	1	—	—	2	16
12	1	3	2	1	1	3	1	—	—	2	14
13	2	1	1	—	—	3	1	—	—	2	10
14	3	—	—	1	1	3	—	—	—	2	10
15	—	1	2	1	2	2	1	—	—	2	11
16	1	1	—	1	1	2	1	—	—	2	9
17	2	2	1	1	2	2	—	—	—	2	12
18	3	3	1	2	2	1	1	—	—	2	15
19	8	5	2	2	2	1	1	—	—	2	23
20	8	2	—	1	—	2	1	—	—	2	16
S	57	38	28	30	20	35	13	0	0	39	
M	2,8	1,9	1,4	1,5	1	1,7	0,6	0	0	1,9	

Tablica II Tableau

N ^o des carrés	Poręba II-go roku Abatis de la II année										Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur chaque m ²
	Stopień pospolitości Degré de fréquence										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	
1	3	3	1	1	1	1	—	1	—	2	13
2	3	1	3	3	1	1	—	1	—	2	15
3	9	4	3	2	1	2	—	1	—	2	24
4	5	2	—	3	1	3	—	—	—	2	16
5	6	—	1	5	1	2	—	1	—	2	18
6	2	4	—	1	1	4	—	1	—	2	15
7	7	2	4	7	—	1	—	1	—	2	24
8	8	5	2	2	1	2	—	1	—	1	22
9	3	2	3	3	—	3	—	—	—	2	16
10	5	6	3	3	—	2	—	1	—	2	22
11	2	2	1	2	—	—	—	1	—	1	9
12	5	4	2	3	—	3	—	1	—	2	20
13	4	3	4	3	1	2	—	—	—	2	19
14	—	—	3	3	1	3	—	1	—	2	13
15	6	1	3	5	—	3	—	1	—	2	21
16	4	3	1	2	—	2	—	1	—	2	15
17	2	1	4	3	—	4	—	—	—	2	16
18	1	2	1	3	—	3	—	1	—	2	13
19	2	1	2	4	—	3	—	1	—	2	15
20	3	—	2	1	—	2	—	—	—	2	10
S	80	46	43	59	9	46	0	15	0	38	
M	4	2,3	2,1	2,9	0,4	2,3	0	0,7	0	1,9	

Tablica IV Tableau

№ kwadratów des carrés	Poręba IV-go roku Abatis de la IV année										Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur chaque m ²
	Stopień pospolitości Degré de fréquence										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	
1	3	4	2	1	—	3	—	—	—	—	13
2	2	2	1	1	—	1	—	—	—	—	7
3	3	3	1	2	—	2	—	1	—	—	12
4	1	2	2	2	—	—	—	1	—	—	8
5	3	2	1	3	—	1	—	1	—	—	11
6	1	—	2	4	—	2	1	1	—	—	11
7	1	1	—	1	—	3	—	1	—	—	7
8	1	—	2	—	—	—	—	—	—	—	3
9	—	3	—	1	—	2	1	—	—	—	7
10	1	1	2	3	—	1	1	1	—	—	10
11	4	2	—	3	—	2	1	1	—	—	13
12	1	6	—	4	—	3	1	1	—	—	16
13	2	1	1	3	—	3	1	1	—	—	12
14	2	1	1	—	—	2	1	1	—	—	8
15	2	—	—	2	—	—	1	—	—	—	5
16	3	—	3	3	—	3	1	1	—	—	14
17	—	4	3	2	—	2	1	1	—	—	13
18	1	1	1	—	—	3	1	1	—	—	8
19	1	2	—	1	—	2	1	1	—	—	8
20	2	6	1	2	—	1	1	1	—	—	14
S	34	41	23	38	0	36	13	15	0	0	
M	1,7	2,0	1,1	1,9	0	1,8	0,6	0,7	0	0	

Tablica V Tableau

№ kwadratów des carrés	Poręba V-go roku Abatis de la V année										Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur chaque m ²
	Stopień pospolitości Degré de fréquence										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	
1	1	1	—	5	—	—	—	2	—	1	10
2	2	—	—	3	2	2	—	2	—	1	12
3	2	—	—	8	—	—	—	2	—	1	13
4	—	3	—	6	1	1	—	2	—	1	14
5	2	2	—	6	—	1	—	2	—	1	14
6	—	1	—	6	—	1	—	2	—	1	11
7	1	—	—	3	1	2	—	2	—	1	10
8	2	1	—	3	2	2	—	2	—	1	13
9	—	1	—	7	3	2	—	2	—	1	16
10	—	—	—	2	1	3	—	1	—	1	8
11	—	—	—	7	—	1	—	—	—	1	3
12	—	2	—	4	3	3	—	2	—	1	15
13	1	1	—	2	3	3	—	2	—	1	13
14	1	1	—	2	3	3	—	2	—	1	13
15	1	—	—	4	2	3	—	1	—	1	12
16	2	—	—	3	—	—	—	—	—	1	6
17	1	1	—	6	3	1	—	2	—	1	15
18	3	—	—	4	2	1	—	2	—	1	13
19	2	2	—	2	2	3	—	2	—	1	14
20	3	3	—	—	1	3	—	—	1	1	12
S	24	17	0	83	29	35	0	32	1	20	
M	1,2	0,8	0	4,1	1,4	1,7	0	1,6	0,05	1	

Tablica VI Tableau

N ^o kwadratów des carrés	Poręba VI-go roku Abatis de la VI année										Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur chaque m ²
	Stopień pospolitości Degré de fréquence										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	
1	—	1	2	—	—	—	1	—	1	—	5
2	—	2	1	—	—	1	1	—	—	—	5
3	1	2	4	—	1	1	1	—	1	—	11
4	—	1	4	—	2	1	1	—	1	—	10
5	2	1	3	1	2	1	1	—	—	—	11
6	1	—	4	—	2	1	1	—	1	—	10
7	2	—	1	—	—	2	1	—	1	—	7
8	—	—	1	2	—	2	1	—	1	—	7
9	1	—	3	—	—	1	—	—	1	—	6
10	1	—	3	1	1	1	—	—	1	—	8
11	2	2	3	1	—	2	—	—	1	—	11
12	—	1	3	1	—	2	1	—	1	—	9
13	1	3	3	1	1	1	—	—	1	—	11
14	2	1	3	1	1	—	1	—	1	—	10
15	—	5	2	1	1	1	—	—	1	—	11
16	1	3	—	1	2	—	1	—	1	—	9
17	—	—	1	2	2	2	1	—	1	—	9
18	1	2	3	1	1	2	1	—	1	—	12
19	—	1	1	2	2	2	1	—	1	—	10
20	—	3	1	—	1	1	—	—	1	—	7
S	15	28	46	15	19	24	14	0	18	0	
M	0,7	1,4	2,3	0,7	0,9	1,2	0,7	0	0,9	0	

Tablica VII Tableau

№ kwadratów des carrés	Poręba VII-go roku Abatis de la VII année										Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur chaque m ²
	Stopień pospolitości Degré de fréquence										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	
1	1	1	3	4	3	2	—	—	—	—	14
2	—	1	1	3	3	1	—	—	—	—	9
3	—	2	1	4	2	2	—	—	—	—	11
4	—	—	—	2	4	—	—	—	—	—	6
5	1	—	—	—	3	—	—	—	—	—	4
6	—	1	—	—	2	—	—	—	—	—	3
7	3	—	2	4	2	2	—	—	—	—	13
8	1	1	2	3	1	2	—	—	—	—	10
9	1	3	3	2	2	1	—	—	—	—	12
10	2	4	4	2	1	2	—	—	—	—	15
11	1	1	3	—	1	1	—	—	—	—	7
12	4	—	2	—	2	1	—	—	—	—	9
13	3	—	2	—	3	2	—	—	—	—	10
14	1	—	1	2	3	1	—	—	—	—	8
15	1	—	2	3	2	1	—	—	—	—	9
16	1	1	—	3	—	1	—	—	—	—	6
17	1	2	1	1	1	2	—	—	—	—	8
18	1	—	1	2	2	2	—	—	—	—	8
19	2	—	—	1	1	1	—	—	—	—	5
20	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
S	24	17	28	36	39	24	0	0	0	0	
M	1,2	0,8	1,4	1,8	1,9	1,2	0	0	0	0	

Tablica VIII Tableau

№ kwadratów des carrés	Poręba VIII-go roku Abatis de la VIII année										Ilość gatunków na każdym m ² Nombre des espèces sur chaque m ²
	Stopień pospolitości Degré de fréquence										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	
1	2	1	1	—	1	—	—	1	—	—	6
2	—	1	—	1	2	—	—	1	—	—	5
3	1	—	—	—	1	—	1	1	—	—	4
4	—	1	—	—	2	—	1	—	—	—	4
5	1	—	1	—	1	—	1	1	—	—	5
6	—	—	—	1	1	—	1	1	—	—	4
7	2	—	1	—	1	—	—	1	—	—	5
8	1	—	—	1	1	—	1	1	—	—	5
9	1	1	3	2	1	—	—	1	—	—	9
10	—	2	2	1	1	—	1	1	—	—	8
11	—	2	2	1	—	—	1	—	—	—	6
12	3	2	1	1	—	—	—	1	—	—	8
13	2	2	1	1	1	—	1	1	—	—	9
14	1	3	2	—	1	—	—	1	—	—	8
15	1	—	1	1	2	—	1	1	—	—	7
16	3	1	1	1	1	—	1	1	—	—	9
17	2	3	2	1	2	—	—	1	—	—	11
18	2	—	1	1	1	—	1	—	—	—	6
19	1	—	1	1	—	—	1	—	—	—	4
20	3	—	1	1	—	—	1	—	—	—	6
S	25	19	19	15	20	0	13	15	0	0	
M	1,2	0,9	0,9	0,7	1	0	0,6	0,7	0	0	

OGÓLNE ZESTAWIENIE
danych, dotyczących roślinności zbadanych kwadratów
na poszczególnych porębach.

TABLEAU GÉNÉRAL
de données concernant la végétation des m² explorés dans les abatis
de différents âges.

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	Ilość metrów kw., na których dany gatunek występuje w poszczególnych porębach							Ogólna ilość metrów kw. wy- stępowania danego gatunku. Nombre total des m ² sur les- quels l'espèce apparaît.
		Nombre des m ² sur lesquels chaque espèce apparaît dans les différents abatis							
		Wiek poręb Age des abatis							
		I	II	IV	V	VI	VII	VIII	
1	☞ Achillea Millefolium . . .	6	12	6	10	11	12	5	61
2	☞ Aegopodium Podagraria . . .		1						1
3	☞ Agrostis alba . . .	19	19	15	12	6	12	8	91
4	☞ Ajuga genevensis . . .						1		1
5	☞ (Alnus glutinosa) . . .			2	2				4
6	⊙ Anthemis arvensis . . .	1	1	1					3
7	☞ Anthoxanthum odoratum . . .	2	2						4
8	☞ Arrhenatherum elatius . . .		1						1
9	☞ Artemisia vulgaris . . .	1	1						2
10	☞ Astragalus glycyphyllos . . .	2	2		3	1	3		11
11	☞ Bellis perennis . . .		2						2
12	☞ Betonica officinalis . . .	1		1	1				3
13	☞ Betula verrucosa . . .	13	7	12	7	4	6	6	55
14	☞ Brunella vulgaris . . .	10	15	2	8	1	5		41
15	☞ Calamagrostis epigeios . . .	1	6	5	7	5	9	13	46
16	⊙ Calamintha acinos . . .				2	1	1	2	6
17	⊙ Campanula patula . . .	1	2	1	1				5
18	☞ Carex hirta . . .				2				2
19	☞ „ leporina . . .		3	4	3	1	1		15
20	☞ „ panicea . . .	2		2	4		3		11
21	☞ „ silvatica . . .	2							2
22	☞ „ canescens . . .	1	3	1		1			6
23	☞ Carpinus betulus . . .	3	1			1	5	1	11
24	☞ Centaurea Jacea . . .		3	1					4
25	☞ Cerastium arvense . . .	2							2
26	⊙ „ caespitosum . . .		1						1

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	Ilość metrów kw., na których dany gatunek występuje w poszczególnych porębach							Ogólna ilość metrów kw. występowania danego gatunku. Nombre total des m ² sur lesquels l'espèce apparaît.
		Nombre des m ² sur lesquels chaque espèce apparaît dans les différents abatis							
		Wiek poręb Age des abatis							
I	II	IV	V	VI	VII	VIII			
27	⊙ Cerastium glomeratum . . .		6	1		1		8	
28	⊙ Chenopodium album . . .		3					3	
29	⊙ " hybridum . . .		1					1	
30	⊙ Cirsium arvense . . .	1	11	6	8	6	8	40	
31	⊙ " lanceolatum . . .	6	2					8	
32	⊙ Clinopodium vulgare . . .		1	4				5	
33	⊙ Corylus Avellana . . .						1	1	
34	⊙ Crataegus monogyna . . .	4	1					5	
35	⊙ Cuscuta europaea . . .	3						3	
36	⊙ Cytisus nigricans . . .			2			5	7	
37	⊙ Dactylis glomerata . . .	7	3					10	
38	⊙ Deschampsia caespitosa . . .	6	7	8	7	6	6	44	
39	⊙ Epilobium angustifolium . . .	1	2	2		3	1	9	
40	⊙ Erigeron canadensis . . .	3	4					7	
41	⊙ Erythraea Centaurium . . .	7	7	4	10	3	4	37	
42	⊙ Euphrasia stricta . . .	3	2					5	
43	⊙ Festuca ovina . . .	2	1					3	
44	⊙ Filago arvensis . . .		1					1	
45	⊙ Fragaria vesca . . .	2	1	4			2	9	
46	⊙ (Fraxinus excelsior) . . .						3	3	
47	⊙ Galium boreale . . .		3					3	
48	⊙ " Schultesii . . .		1	4		1		6	
49	⊙ " vernum . . .	12	6	4	2	3	7	41	
50	⊙ " verum . . .		2					2	
51	⊙ Genista germanica . . .	1	1	3	3		2	10	
52	⊙ " tinctoria . . .	1	2	1	3	5	2	18	
53	⊙ Gnaphalium silvaticum . . .	8	8	6	8	8	6	47	
54	⊙ Helianthemum vulgare . . .	1						1	
55	⊙ Helichrysum arenarium . . .	1						1	
56	⊙ Hieracium Bauchini . . .		1					1	
57	⊙ " Pilosella . . .	3	8					11	
58	⊙ " umbellatum . . .	2				2	1	5	
59	⊙ Holcus lanatus . . .	1						1	
60	⊙ Hypericum montanum . . .	2	2				1	3	
61	⊙ " perforatum . . .	4	5	3	8	6	7	35	
62	⊙ " quadrangulum . . .	1		1	4			6	
63	⊙ Juncus conglomeratus . . .	2	7	7	11	4	2	34	
64	⊙ Koeleria cristata . . .	1						1	
65	⊙ Lathyrus pratensis . . .		1					1	
66	⊙ " silvester . . .						1	1	
67	⊙ " vernus . . .	1	1		1			3	
68	⊙ Leontodon autumnalis . . .	2	8					10	
69	⊙ " hispidus . . .		2					2	
70	⊙ Linaria vulgaris . . .		1			1		2	

№	Nazwa gatunku Nom d'espece	Ilość metrów kw., na których dany gatunek występuje w poszczególnych porębach.							Ogólna ilość metrów kw. występowania danego gatunku. Nombre total des m ² sur lesquels l'espece apparait.
		Nombre des m ² sur lesquels chaque espece apparait dans les différents abatis.							
		Wiek poręb Age des abatis.							
		I	II	IV	V	VI	VII	VIII	
71	☞ <i>Linum catharticum</i> . . .	1							1
72	☞ <i>Lolium perenne</i> . . .		2						2
73	☞ <i>Lotus corniculatus</i> . . .	1	2	1					4
74	☞ <i>Luzula campestris</i> . . .	5	2	8	11	7	7	1	42
75	☞ " <i>pilosa</i> . . .	11	1	7	17	2	9	2	49
76	☞ <i>Lysimachia nummularia</i> . . .		5						5
77	☞ <i>Majanthemum bifolium</i> . . .	1	1					1	3
78	⊙ <i>Medicago lupulina</i> . . .		2						2
79	☞ <i>Oxalis acetosa</i> . . .			1					1
80	⊙ <i>Pastinaca sativa</i> . . .		1						1
81	⊗ (<i>Picea excelsa</i>) . . .			2	2				4
82	☞ <i>Pimpinella magna</i> . . .	1			2	6	2		11
83	☞ " <i>saxifraga</i> . . .	8	7		1				16
84	⊗ (<i>Pinus silvestris</i>) . . .		19	12	8	14	10	10	73
85	☞ <i>Plantago major</i> . . .		4						4
86	☞ " <i>media</i> . . .	3	9						12
87	☞ " <i>lanceolata</i> . . .	3	3	1					7
88	☞ <i>Poa compressa</i> v. <i>polynoda</i>	1	1	1					3
89	☞ " <i>nemoralis</i> . . .	20	5	3	1	1		3	33
90	☞ " <i>pratensis</i> . . .	1	1	8	11	10	2	2	35
91	⊙ <i>Polygonum aviculare</i> . . .		2	1					3
92	⊙ " <i>Convolvulus</i> . . .		1						1
93	⊗ <i>Populus tremula</i> . . .	2		2			2	1	7
94	☞ <i>Potentilla Tormentilla</i> . . .	4	1		1		2	1	7
95	☞ <i>Pteridium aquilinum</i> . . .			1				1	1
96	⊗ <i>Quercus pedunculata</i> . . .				(7)	(4)			14
97	☞ <i>Ranunculus acer</i> . . .	1							1
98	☞ " <i>polyanthemos</i> . . .	1							1
99	☞ " <i>repens</i> . . .		3						3
100	⊗ <i>Rosa canina</i> . . .		1						1
101	☞ <i>Rubus tomentosus</i> . . .						1		1
102	☞ <i>Rumex Acetosella</i> . . .	1	5	1		2			9
103	⊗ <i>Salix Caprea</i> . . .	1	2	2			4	5	14
104	☞ <i>Scabiosa ochroleuca</i> . . .		1						1
105	☞ <i>Scrophularia nodosa</i> . . .	1	2	4	1	4		1	13
106	☞ <i>Selinum carvifolia</i> . . .	1							1
107	☞ <i>Solidago canadensis</i> . . .			1	1		1		3
108	☞ " <i>Virga aurea</i> . . .		2	1		9	2	1	15
109	⊙ <i>Sonchus oleraceus</i> . . .		2						2
110	⊗ <i>Sorbus Aucuparia</i> . . .		1						1
111	☞ <i>Stachys silvatica</i> . . .			2					2
112	☞ <i>Stellaria graminea</i> . . .	2	3	1	3	3			12
113	☞ <i>Tanacetum vulgare</i> . . .		1						1
114	☞ <i>Taraxacum officinale</i> . . .		2						2

№	Nazwa gatunku Nom d'espèce	Ilość metrów kw., na których dany gatunek występuje w poszczególnych porębach							Ogólna ilość metrów kw. występowania danego gatunku Nombre total des m ² sur lesquels l'espèce apparaît
		Nombre des m ² sur lesquels chaque espèce apparaît dans les différents abatis							
		Wiek poręby Age des abatis							
		I	II	IV	V	VI	VII	VIII	
115	☿ Thymus Chamaedrys . . .		3						3
116	☿ Trifolium alpestre . . .	1	4				1		6
117	⊙ " arvense . . .		2						2
118	⊙ " aureum . . .		2						2
119	☿ " pratense . . .		2						2
120	⊙ Triticum vulgare . . .		1						1
121	☿ Veronica Chamaedrys . . .	10	12	12	20	18	8	15	95
122	☿ " officinalis . . .	5	5	3	8	6	2	1	30
123	☿ Vicia Cracca . . .							3	3
124	☿ " sepium . . .	1	3	1					5
125	☿ Viola canina . . .	12	11	13	16	12	10	10	84
126	☿ " mirabilis . . .		1						1
Ilość gatunków w poszczególnych porębach		72	93	53	40	37	37	34	
Nombre des espèces dans les différents abatis									
Ilość rodzajów w poszczególnych porębach		57	70	43	32	32	32	29	
Nombre des genres dans les différents abatis									
Spółczynnik rodzajowy dla poszczególnych poręb		79,2	75,2	82,7	80	86,5	86,5	85,3	
Coefficient générique des différents abatis									
Przeciętna ilość gatunków na m ² w poszczególnych porębach . . .		13	16,8	9,4	11,8	9,4	8,4	6,4	
Espèces en moyenne par m ² dans les différents abatis									
Ilość gatunków poszczególnych poręb, wyrażona procentowo . . .		57,1	73	42,1	31,7	29,4	29,4	27	
Nombre des espèces de différents abatis exprimé dans les pour cents									
Gatunki każdej poręby : { ⊙		4	11	3	1	1	1	1	
Espèces de chaque abatis : { ⊙		3	7	2	2	1	1	1	
☿ — ☿		65	75	48	37	35	35	32	

S. Dziubałtowski:

Développement des associations végétales des abatis sur le loess du district de Sandomierz dans la lumière d'analyse floristique et statistique.

Communication annoncée le 24.XII 1917.

Présentée par Z. Wóycicki.

Les études de la végétation des abatis possèdent une grande valeur pour l'écologie des plantes. Elles nous démontrent non seulement l'influence des conditions extérieures sur la végétation, mais aussi les propriétés individuelles de différentes espèces, grâce auxquelles ces espèces s'adaptent aux conditions variables d'existence. Ces espèces se répartissent plus vite que les autres et, par conséquent, elles jouent un rôle plus considérable dans la vie d'association. En outre les études des abatis font connaître les anneaux primitifs de la longue chaîne des changements que subit une certaine association végétale avant d'atteindre l'état d'équilibre relatif. Enfin, ces études nous permettent de connaître des conditions biologiques de la végétation des abatis, ce qui est très important pour la silviculture normale. Si nos connaissances à cet égard sont plus profondes, plus universelles, nous créeront de plus solides bases pour la silviculture scientifique. De telle sorte, la connaissance de premiers stades du développement de la végétation des abatis nous donne la clef qui nous permet d'expliquer l'origine d'associations silvatiques et de résoudre les différents problèmes de phytogéographie, ce qui présente une valeur non seulement théorique mais aussi pratique.

Les données dont il est question, se trouvent parsemées dans la littérature sylvicole et phytogéographique générale, et ce n'est que rarement qu'elles font l'objet des travaux spe-

ciaux. En Pologne E. Malinowski et S. Dziubałtowski s'occupaient de cette question, en Russie — Chitrowo, Sukatchew.

Du fait que jusqu'ici on s'intéressait très peu de la question de végétation des abatis — il résulte que nous n'avons pas une méthode précise pour les études dans ce domaine.

Ce sont les abatis situés à droite de fleuve d'Opatówka (dans la propriété de Monsieur R. de Cichowski à Międzygórz, district de Sandomierz), qui ont fait l'objet de mes recherches.

Les abatis en question s'étendent du sud au nord, dans la direction perpendiculaire à la chaussée de Sandomierz à Opatów. A l'ouest ils touchent la forêt de feuillus mélangée, avec prépondérance de chêne et de charme. Des autres côtés les abatis sont entourés de champs cultivés. Le terrain est doucement incliné du sud au nord. Le sol se compose du loess avec l'humus. La forêt est abattue partiellement chaque année, de telle sorte que nous avons les abatis de différents âges, d'une année à neuf. Les recherches ont été faites à la fin de juillet et au commencement d'août 1917.

La méthode.

Conformément au congrès international des botanistes à Bruxelles en 1910, je donne le nom de l'association aux unités fondamentales écologiques et floristiques, comparables aux espèces de la systématique. Pour caractériser l'association végétale, il faut énumérer la totalité de ses éléments floristiques, la fréquence des espèces et, enfin, s'il est possible, indiquer les espèces qui la caractérisent. Il serait difficile de décrire toutes les espèces apparaissant sur un certain abatis et désigner leur fréquence. Pour éviter cette difficulté et en même temps pour introduire, au lieu d'une détermination subjective de la fréquence des espèces, l'élément plus objectif, j'ai pris de chaque stade

un certain espace déterminé de 20 m². Ensuite chaque m² a été analysé au point de vue floristique.

Comme il résulte de notre travail antérieur, les espèces occupant de plus grands espaces apparaissent sur un nombre plus considérable de carrés. Donc, pour définir le degré de fréquence des espèces il suffit de connaître le nombre des carrés, où elles apparaissent. Mais, la seule indication de l'apparition d'une certaine espèce sur un m² quelconque ne nous dit rien de la quantité d'individus de cette espèce, ce qui est très important surtout quand il s'agit des espèces apparaissant en abondance. Dans ces conditions, sans désignation de la fréquence de quantité d'espèce, nous ne sommes pas en possibilité de conclure si nous avons à faire à un développement progressif ou regressif de cette espèce dans un certain stade. Le meilleur moyen est de déterminer la fréquence individuelle des espèces sur chaque m². Mais en pratique cette méthode est presque inapplicable. Il s'agit surtout des cas où nous avons à faire avec les espèces qui composent des gazons, comme la plupart des graminées.

Voici de quelle façon j'ai résolu cette difficulté. Au lieu de compter le nombre d'individus d'une certaine espèce, j'ai marqué sur les mètres carrés les espèces qui se distinguent par leur fréquence particulière, c'est-à-dire les espèces soit très fréquentes, soit très rares. Le signe — (moins) mis à gauche de la croix, nous montre que l'espèce se trouve en voie de disparition; au contraire, la croix soulignée × indique que l'espèce donnée apparaît en abondance, au moins sur la moitié du m² (espèce dominante). On peut indiquer de telle sorte les espèces à développement extrême dans l'un ou l'autre sens.

Naturellement, les données moyennes que nous donne l'analyse floristique des carrés, caractériseront chaque stade d'abatis, si elles contiennent, autant que possible, des carrés de différentes combinaisons floristiques. J'ai pris dans ce but des carrés isolés mais choisis de telle sorte qu'ils puissent représenter

en mesure égale de différents groupements floristiques, apparaissant dans la sphère d'un abatis d'un certain âge. Comme les abatis sont contigus et se trouvent en général dans les conditions identiques à l'égard du climat et du sol, ils passent les mêmes stades de développement, il est donc très intéressant de savoir quels rapports phytosociologiques règnent dans chaque stade d'abatis de différent âge.

Caractère d'une vieille forêt.

Comme point de départ pour l'étude de la végétation d'abatis en question, nous sert la forêt qui est soumise aux coupes à l'abattage chaque année. Voilà pourquoi avant de parler des relations floristique des abatis, il faut passer en revue les rapports écologiques de la forêt âgée. De telle façon nous obtiendrons la base pour la comparaison des changements qui se produisent dans les conditions vitales des plantes, et qui, par conséquent, provoquent un changement de végétation.

Un de plus importants facteurs biologiques de la forêt c'est le couvert. Il influe fortement sur le sol, l'atmosphère et la lumière, en un mot, sur le milieu ambiant des plantes. Sous la couverture des feuilles d'arbres les espèces héliophytes ne peuvent pas se développer, tandis que les héliophobes sont ordinairement parsemées dans la forêt, surtout dans la forêt de feuillus, où les couronnes se touchent et s'entrecroisent. Ces espèces ne sont pas très dangereuses pour les jeunes plantules des arbres. De cette façon, Morozow¹⁾ voit dans la couverture feuillue de la forêt un élément de défense. Celui-ci s'exprime par le fait que la forêt chasse les concurrents nuisibles pour ses descendants. La forêt en question est composée d'arbres à feuillus.

¹⁾ Morozow. Uczenie o lesie.

Voici la liste des arbres :

<i>Carpinus Betulus</i>	}	Espèces dominantes; par place une ou l'autre compose même des groupements purs.
<i>Quercus pedunculata</i>		
<i>Betula verrucosa</i>	}	Espèces secondaires.
<i>Populus tremula</i>		

Sauf cela on rencontre sporadiquement: *Sorbus Aucuparia*, *Crataegus monogyna*, *Tilia ulmifolia* et des arbrisseaux *Rhamnus Frangula*, *Corylus Avellana*, *Lonicera Xylosteum*. Il faut ajouter que les deux premiers arbres à l'intérieur de la forêt, dans les lieux sombres, ne dépassent pas la hauteur des arbrisseaux, tandis qu'à la lisière de la forêt leur hauteur est égale à la hauteur des arbres voisins.

Le premier étage de sous-bois est composé des espèces herbacées suivantes :

<i>Galium vernum</i>	<i>Trientalis europaea</i>	
„ <i>Schultesii</i>	<i>Aspidium Filix femina</i>	
<i>Agrostis alba</i>	„ „ <i>mas</i>	
<i>Poa nemoralis</i>	<i>Polypodium vulgare</i>	
<i>Milium effusum</i>	<i>Lysimachia nummularia</i>	} Dans les lieux humides le long des ruisseaux.
<i>Majanthemum bifolium</i>	<i>Ranunculus polyanthemus</i>	
<i>Dactylis glomerata</i> (rarement)		
<i>Vicia sepium</i>	<i>Lilium Martagon</i>	
<i>Campanula patula</i>	<i>Melittis Melissophyllum</i>	
„ <i>persicifolia</i>	<i>Convallaria majalis</i>	
<i>Hieracium vulgatum</i>	<i>Luzula pilosa</i>	
<i>Oxalis acetosa</i>	<i>Lathyrus niger</i> (rarement)	
<i>Lactuca muralis</i>	<i>Vaccinium Vitis idaea</i> et beaucoup d'autres.	

Dans les lieux plus sombres nous rencontrons:

<i>Asarum europaeum</i>	<i>Pulmonaria officinalis</i>
<i>Orobus vernus</i>	<i>Melica nutans</i>
<i>Anemone nemorosa</i>	<i>Polygonatum officinale</i> et autres.
<i>Hepatica triloba</i>	

A la lisière de la forêt, et en général dans les lieux ensoleillés, poussent:

Hypericum quadrangulum
Melampyrum pratense
Origanum vulgre.

Végétation de la première année.

Après la destruction de l'association végétale, le jeune abatis présente un terrain sur lequel, grâce au changement des conditions écologiques, se formeront de nouvelles associations. Ces changements s'expriment par le fait de la disparition de la complexité des éléments que compose la forêt comme l'association. Par conséquent, les conditions d'insolation, d'humidité d'atmosphère, et du sol, se transforment complètement et provoquent aussi les modifications dans la végétation. La composition florale d'un tel abatis avec indication des carrés, sur lesquels apparaissent différentes espèces, nous est montrée sur la liste I.

(La liste I se trouve à la page 205—206).

Il résulte de cette liste que le changement des conditions écologiques se traduit par la disparition des espèces héliophobes et par un fort développement des espèces héliophiles qui apparaissaient auparavant sur la lisière de la forêt âgée.

C'est pourquoi dans ce stade d'abatis il manque beaucoup de formes qui apparaissent tout près dans la forêt avoisinante, comme par exemple *Milium effusum*, *Pulmonaria officinalis*, *Asarum europaeum* etc. Les autres espèces silvatiques, comme *Ma-*

Janthemum bifolium, *Lathyrus vernus*, *Polygonatum vulgare* n'apparaissent que très rarement, en indiquant une tendance à disparaître. Parmi les graminées se développent magnifiquement *Agrostis alba* (sur 13 m²), *Poa nemoralis* (sur 6 m²), *Dactylis glomerata* (3 m²) et des arbres *Betula verrucosa*. En outre se développent aussi bien *Viola canina*, *Galium vernum*¹⁾, *Luzula pilosa*, *Veronica Chamaedrys*, *Gnaphalium silvaticum*, *Erythraea Centaurium*.

Comme l'association est ouverte (les places où les arbres ont été déracinés sont en majeure partie dépourvues des plantes ou sont couvertes de peu de végétation) et par conséquent la lutte pour l'existence est très faiblement prononcée, l'abatis dans ce stade présente un terrain favorable où viennent s'établir de nouvelles espèces. Le résultat de ce fait est l'apparition dans l'abatis d'un grand nombre de plantes, étrangères aux forêts, et surtout d'éléments synanthropiques, comme *Achillea Millefolium*, *Plantago lanceolata*, *Anthemis arvensis*, *Cirsium arvense*, *Erigeron canadensis*, *Artemisia vulgaris* et autres. La végétation synanthropique trouve ici les conditions favorables pour son développement: l'humus de la forêt et l'absence de lutte pour l'existence. Ce qui est très caractéristique c'est qu'à Łysagóra et dans les forêts de Briansk et d'autres, pendant la première année d'abatis la végétation silvatique se développe en abondance.

Ce n'est que l'année suivante que sur ces espaces commence à prédominer la végétation étrangère aux forêts à feuillus. Ces processus se produisent dans notre terrain plus tôt, c'est qu'on attribue au voisinage des associations végétales artificielles. D'une manière générale, on peut caractériser la végétation de la deuxième année comme l'association ouverte, indéfinie, dans laquelle nous rencontrons le mélange de différents éléments floristiques.

¹⁾ Cette espèce n'apparaît sur l'abatis que dans les lieux ombrés, sous les petits arbres et arbustes.

Végétation de la troisième année.

Le manque d'abatis de la troisième année ne nous permet pas d'y démontrer les relations écologiques. Mais on peut supposer que dans ce stade l'affluence de nouvelles espèces cesse de se produire, et même l'élimination de quelques espèces a lieu. Cette supposition est fondée sur le fait que la végétation de la quatrième année présente l'association fermée, dans laquelle le nombre des espèces à fréquence plus haute augmente considérablement, et le nombre des espèces annuelles et bisannuelles, si caractéristiques pour les associations ouvertes, tombe jusqu'à 9,4%.

Végétation de la quatrième, cinquième et sixième années.

Du chaos de différents éléments écologiques dans la quatrième, ou peut-être même dans la troisième année, se dégagent des associations fermées, à une physionomie plus distincte. Le caractère floristique de ces associations nous sera démontré par les listes IV, V, VI à la page 209—212.

Il ressort de la comparaison de ces listes que les espèces vivaces jouent un rôle dominant parmi les végétaux. Les formes qui ne supportent pas trôp d'ombre se développent le mieux. Les espèces herbacées, surtout les graminées, composent le fond de la végétation. Sur ce fond apparaissent les arbres qui se sont semé eux mêmes (*Betula verrucosa*, *Salix Caprea*) ou qui ont été plantés artificiellement par l'homme (pin, sapin, chêne, aulne, mélèse). Les couronnes des arbres n'ont pas encore grandi jusqu'à tel point pour qu'elles puissent ombrer considérablement le terrain. En tout cas la tendance dans cette direction s'accroît assez sensiblement, surtout dans la sixième année. Parallèlement avec cette tendance se produit la diminution de la fréquence de quelques espèces, en quantité et en qualité. Ainsi, *Agrostis alba*, appartenant dans le stade en question aux espèces communes, apparaît: dans la 4-e année sur 15 m.² (sur

5 m.² domine = 46,7%), dans le 5-e année sur 12 m.² (domine sur 6 = 50%) et dans la 6-e année sur 6 m.² (domine sur 2 m.² = 33,3%). On pourrait dire de même des autres espèces.

Le maximum de développement, en particulier dans la V-e année, atteignent les espèces suivantes: *Deschampsia caespitosa*, *Erythraea Centaurium*, *Gnaphalium silvaticum*, *Hypericum perforatum*, *Juncus conglomeratus*, *Luzula campestris*, *pilosa*, *Pimpinella magna*, *Poa pratensis*, *Veronica Chamaedrys*, *Viola canina*.

Dans ce stade s'accroît aussi le développement de *Calamagrostis epigeios*, qui apparaît déjà dans la 1—2 année d'abatis. Cette espèce se propage radialement, en composant avec le temps d'assez grands groupements. En s'élargissant, grâce aux tiges rampantes souterraines, ceux-ci chassent les autres espèces végétales.

La végétation de la VII-e et VIII-e années présente un stade de développement très curieux à cause des modifications qui se produisent dans les groupements végétaux.

Les listes VII et VIII à la page 213—214 nous définissent a composition floristique.

Les arbres ont atteint dans ce stade un accroissement considérable et commencent à influencer réciproquement l'un sur l'autre et sur le milieu ambiant. Cette influence trouve l'expression dans la diminution de la fréquence de plusieurs espèces qui se développaient bien dans le stade II-e, comme *Erythraea Centaurium*, *Gnaphalium silvaticum*, *Epilobium angustifolium*, *Hypericum perforatum*, *Juncus conglomeratus*, *Luzula campestris*, *pilosa*, *Pimpinella magna*, *Poa pratensis*, *Veronica Chamaedrys*, *officinalis*, *Viola canina*.

En même temps que d'un côté le nombre des espèces d'ombre qui poussaient auparavant augmente, d'un autre côté apparaissent de nouvelles espèces héliophobes. Voici quelques unes de ces espèces: *Vicia Cracca*, *Majanthemum bifolium*, *La-*

thyrus silvester, *Corylus Avellana*, *Poa nemoralis*, *Hypericum montanum*, *Galium vernum* et autres. *Calamagrostis epigelos* atteint dans ce stade le maximum de son développement en poussant quelquefois jusqu'au $\frac{3}{4}$ de la hauteur des arbres et composant des groupements purs. Mais l'année suivante il se révèle plus nettement que les arbres, qui donnent plus d'ombre, les arbrisseaux et même les espèces herbacées, chassent le *Calamagrostetum*. A de telles espèces appartiennent les suivantes: *Cytisus nigricans*, *Gcnista tinctoria*, *germanica*, *Astragalus glycyphyllos*, *Solidago Virga aurea*. Il est vrai que ces espèces apparaissent dans les stades plus jeunes des abatis et, par conséquent, elles chassent les genres *Calamagrostis* et autres. Mais comme parmi les arbres se trouvent assez grands espaces ensoleillés, le *Calamagrostetum* ne trouve pas d'obstacles à sa propagation.

Cependant dans les stades plus âgés les arbres, en particulier le pin, ombrés jusque-là par le *Calamagrostetum*, élèvent ses couronnes sur la surface du *Calamagrostetum* et commencent à l'ombrer à leur tour. Par conséquent, le *Calamagrostetum* se rompt en fragments, parsemés parmi les arbres. La lutte de pin contre le *Calamagrostis* est efficace. Les racines latérales de pin se développent horizontalement sur le même niveau que les tiges rampantes souterraines de *Calamagrostis* de telle sorte qu'elles le chassent. La destinée du *Calamagrostis* et d'autres espèces, qui cependant ne composent pas de tels groupements, n'est pas encore finie. Les espèces mentionnées, surtout *Cytisus nigricans*, apparaissant parmi les arbres, continuent à chasser *Calamagrostis*, *Agrostis*, *Deschampsia* et autres éléments de prairie. Ce déplacement peut se produire grâce à de telle circonstance que les espèces chassantes possèdent les racines principales bien développées, dont la longueur égale en moyenne 50 cm. Ces racines percent la couche formée des racines et des tiges sèches des graminées, et s'enfoncent dans le sol. Ainsi

les espèces chassantes développent leurs racines sous les racines des espèces chassées, les dépriment avec leurs tiges, et leurs créent des conditions d'existence très défavorables. Comme exemple de déplacement d'espèces par les autres nous montrerons les mètres carrés 18, 19 et 20 d'abatis de huitième année à la page 221.

Quels rapports écologiques dominent dans les stades encore plus âgés—nous ne sommes pas en état de le dire, à cause du manque d'un pareil abatis. En tout cas le processus d'établissement de la forêt, si nettement prononcé déjà dans la VII^e et VIII^e année d'abatis, continue de se produire. Il consiste probablement dans le déplacement par les arbres (au moins partiellement) *Cytisus nigricans*, *Genista tinctoria*, *germanica* et autres.

Ces espèces apparaissent plus rarement dans les forêts plus âgées et dans les lieux mieux ensolleillés. Il faut remarquer qu'en parlant de déplacement des espèces par les autres, nous voulons indiquer seulement les lignes générales de développement. Toutefois on ne peut pas en conclure que l'espèce chassée l'est toujours totalement.

La diversité des conditions, qui existe dans la nature, ne nous permet pas de les exprimer par le schéma; celui-ci ne possède pas de valeur absolue; il nous montre seulement la direction de développement de certains processus et facilite l'orientation dans la complexité des phénomènes d'une ou de l'autre catégorie.

Il suit de tout ce que nous avons dit précédemment, que pendant 8 années d'existence d'abatis, la végétation passe par une série de changements lents. Malgré son caractère transitoire on peut distinguer parmi eux 3 phases de développement, qui sont les suivantes: 1) l'association ouverte, 2) la prairie et 3) l'établissement de la forêt.

Chacun de ces stades possède certains traits qui permettent de les caractériser d'une manière générale.

I. L'association ouverte, indéfinie, apparaît pendant les premières années d'existence d'abatis; elle présente un mélange d'éléments silvatiques, de prairies et synanthropiques. Dans la première année ce sont les éléments silvatiques qui prédominent; dans la deuxième année l'équilibre s'incline dans la direction des éléments synanthropiques dont le nombre atteint son maximum. Ce stade est caractérisé par un pourcent considérable des espèces \odot — \odot . Dans la troisième année de ce mélange des formes se dégage l'association fermée — la prairie.

II. Le stade de prairie dure pendant 4-e—6-e année d'existence d'abatis et présente une association fermée, dans laquelle les graminées jouent un rôle important dans les lieux plus secs, et les joncs dans les lieux plus humides. Le nombre des espèces annuelles et bisannuelles se réduit sensiblement. D'une façon générale ce stade, renfermant des éléments floristiques de prairie et silvatiques, se caractérise par des formes de soleil qui occupent des espaces parmi les arbres. Les formes silvatiques se groupent dans les lieux ombrés, à l'abri des arbres. L'influence des arbres et arbrisseaux sur la végétation se prononce à un petit degré.

III. L'établissement de la forêt.

Le moment le plus important de ce stade c'est l'influence intense des arbres sur le milieu ambiant. Le résultat de cette influence est le déplacement graduel de la végétation herbacée, qui a formée dans le II-e stade le tapis continu, par la végétation d'ombre, silvatique. Le nombre des espèces annuelles et bisannuelles se réduit au minimum. Tout cela conduit de plus en plus nettement à l'établissement de tels rapports écologiques qui dominent dans les associations silvatiques.

Comme nous l'avons dit plus haut, les anneaux particuliers de développement de la végétation d'abatis passent en général sous l'influence des conditions climatiques et édaphiques identiques, mais présentent un différent degré de développement au point de vue sociologique. Le degré sociologique d'un certain stade est le résultat de ces changements que produit dans les conditions écologiques la vie sociale des espèces, et l'influence réciproque des espèces associées sur elles et sur le milieu ambiant. On peut réduire ces modifications aux changements locaux (secondaires), aux particularités individuelles de différentes espèces, qui leur permettent de s'adapter suivant les changements de conditions de la vie et, enfin, à la concurrence entre les espèces associées. Ces facteurs décident de la distribution florale et de différents groupements de végétaux sur certain espace.

Pour déterminer exactement le caractère d'une association, d'après P. Jaccard ¹⁾ il faut tenir compte: 1^o de sa richesse florale, c'est à dire du nombre des espèces de l'association, sans indiquer leurs noms; 2^o de sa composition florale, c'est à dire de la liste systématique des espèces; 3^o du coefficient générique, c'est à dire du rapport du nombre des espèces au nombre des genres. La comparaison de la composition florale de deux associations végétales ou deux stades de développement de la même association nous permet de déterminer le coefficient de communauté florale, soit le degré d'analogie d'unités comparées. On obtient le degré de communauté florale de la façon suivante: 1^o on établit le nombre des espèces communes aux deux associations comparées (ou deux stades de développement de la même association); 2^o on additionne le nombre des espèces de deux associations; 3^o on soustrait de la somme obtenue le nombre des espèces communes et 4^o on évalue en % le rapport des espèces communes au nombre total des espèces. Exemple: Deux associations A et B pos-

sèdent: la première 100 espèces, la seconde 70 espèces; 30 espèces leur sont communes. Dans ce cas nous avons: $100 + 70 - 30 = 140$; coefficient de communauté $= \frac{30}{140} = 21.4\%$.

En s'appuyant sur ces criteriums nous tâcherons d'analyser la végétation de chaque année d'abatis et d'en tirer des conclusions générales.

Richesse florale. Les listes placées ci-dessus montrent que sur 20 m^2 d'abatis de chaque âge apparaît un certain nombre d'espèces à un degré différent de fréquence. Comme nous examinons la végétation de 20 m^2 de chaque année d'abatis, alors on pourrait établir 20 degrés de fréquence, en indiquant par 1 le degré le plus bas et par 20 le plus haut, sans tenir compte sur quel mètre carré l'espèce donnée apparaît-elle. Mais nous avons appliqué seulement 10 degrés de fréquence, comme le font la plus grande partie des phytogéographes. Ainsi nous indiquons: par 1 les espèces apparaissant sur 1—2 mètres carrés; par 2 — sur 3—4 m^2 , par 10 — sur 19—20 m^2 . Pour obtenir la possibilité de la comparaison des rapports numériques, caractéristiques pour la végétations de chaque année, nous groupons les chiffres des abatiss de différentes années dans les tableaux suivants:

(Tableaux: I, II, IV, V, VI, VII, VIII, texte polonais).

On voit par exemple, du tableau I, que dans la sphère du 1 m^2 apparaissent: 1 espèce à la fréquence 1, 1 espèce à la fréquence 2, 2 espèces à la fréquence 10 etc. La colonne horizontale indiquée par S, présente le total des nombres correspondant à chaque degré de fréquence dans les divers m^2 . La colonne $M = \frac{S}{20}$, c'est à dire elle se compose des chiffres que nous avons obtenus en divisant chaque somme de la colonne précédente par le nombre des m^2 . Les données, groupées dans les tableaux ci-dessus, nous pouvons exprimer par la *courbe de*

fréquence moyenne de Jaccard. Si nous mettons sur la ligne horizontale 10 segments égaux, correspondant aux 10 degrés de fréquence, et sur la ligne verticale des valeurs des nombres des espèces, correspondant aux divers degrés de fréquence locale, alors nous obtenons pour chaque mètre la courbe de fréquence florale élémentaire. Le tracé M, correspondant aux valeurs moyennes de diverses fréquences élémentaires, Jaccard appelle la *fréquence locale moyenne*. Elle nous exprime la répartition moyenne des espèces d'un certain stade d'abatis. Comme nous prenons en considération les valeurs moyennes, qui caractérisaient d'une manière générale la végétation d'abatis, alors nous traçons pour chaque année d'abatis des tracés moyens, soit des *courbes de fréquence locale* de Jaccard.

(Courbes de fréquence locale pour d'abatis de différents âges se trouvent sur la planche ci-jointe).

L'examen de ces courbes nous montre que les abatis de la première et de la deuxième années possèdent le même nombre d'espèces à la fréquence la plus haute, c'est-à-dire très communes, mais les espèces très rares (apparaissant sur 1—2 m² m²) sont dominantes. Dans la deuxième année le nombre des espèces très rares atteint son maximum. Dans les années suivantes nous voyons un décroissement des espèces à la fréquence 1; le nombre des espèces à la fréquence 10 décroît également ou n'apparaît point. Les courbes enfermées entre ces deux extrémités sont caractérisées pour les abatis plus jeunes par une grande irrégularité, et, pour les abatis plus âgés, par une tendance à l'égalisation. Enfin, la courbe d'abatis de la huitième année s'approche le plus de la ligne droite horizontale, qui présente l'état d'équilibre idéal, c'est à dire de tel groupement dans lequel sur chaque mètre carré apparaissait le même nombre des espèces à la même fréquence, ce qui ne se réalise jamais.

Nous examinerons un peu plus tard les conclusions qui peuvent être tirées de nos données, maintenant nous nous borne-

rons à envisager le coefficient générique de la végétation de différents abatis.

Coefficient générique se présente de la manière suivante:

Age d'abatis	I	II	IV	V	V	VII	VIII
Coefficient générique	79,2	75,2	82,7	80	86,5	86,5	85,3

Comme il suit de cette combinaison, le coefficient générique est le plus bas dans la deuxième année; il s'élève lentement dans les abatis plus âgés. Les petites différences qui s'observent, dépendent des conditions écologiques locales. Jaccard¹⁾ a démontré que le coefficient générique est inversement proportionnel à la variété des conditions écologiques. Il en résulterait que dans notre territoire ce sont les abatis de la I^e et II^e années qui possèdent les conditions écologiques les plus hétérogènes. Mais comme ces abatis composent les associations ouvertes, indéfinies, desquelles se dégagent les associations plus définies, alors on peut aussi dire que le coefficient générique est proportionnel au degré de développement d'une certaine association. Nous avons trop peu de données pour que nous puissions l'affirmer d'une manière définitive et générale. En tout cas cette thèse nous semble vraisemblable au moins pour les associations végétales des abatis: dans la première phase de développement d'association, au moment de sa naissance, on y rencontre beaucoup d'espèces dont l'affluence et la répartition sur un nouveau terrain facilite le manque de la lutte pour l'existence ou, au moins, la lutte faiblement prononcée. Dans ce stade le coefficient générique est le plus petit. Au fur et à mesure que la végétation compose une association plus définie, ce qui est lié avec une lutte plus intense, la force éliminatoire s'exprime dans un degré proportionnellement (relativement) plus fort

¹⁾ Jaccard, l. c. 259.)

pour l'espèce que pour le genre. Voilà la cause d'accroissement du coefficient générique.

Les données suivantes nous présenteront le *coefficient de communauté*, montrant le caractère commun de deux associations végétales ou de deux stades de la même association.

Entre l'abatis de la I-e	et II-e	année	le coeffic. de comm.	=	48,6%
"	"	I et IV	"	"	= 43,7%
"	"	I et V	"	"	= 43,6%
"	"	I et VI	"	"	= 39,7%
"	"	I et VII	"	"	= 36,2%
"	"	I et VIII	"	"	= 34,2%
"	"	I et IV	"	"	= 40,4%
"	"	II et V	"	"	= 29,1%
"	"	II et VI	"	"	= 34%
"	"	II et VII	"	"	= 27,5%
"	"	II et VIII	"	"	= 28,3%
"	"	IV et V	"	"	= 52,4%
"	"	IV et VI	"	"	= 50%
"	"	IV et VII	"	"	= 42,8%
"	"	IV et VIII	"	"	= 42,6%
"	"	V et VI	"	"	= 57,1%
"	"	V et VII	"	"	= 51%
"	"	V et VIII	"	"	= 46%
"	"	VI et VII	"	"	= 60,6%
"	"	VI et VIII	"	"	= 47,9%
"	"	VII et VIII	"	"	= 51%

Le coefficient moyen de communauté entre les abatis de la I-e, II-e, IV-e, V-e, VI-e, VII-e et les abatis des années suivantes dans la suite successive = 41%; 31,8%; 49,4%; 51,4%; 54,4 et 51%. Il ressort de tableau ci-joint, que les stades immédiatement suivants l'un après l'autre renferment le plus des formes communes. L'abatis de la deuxième année, en comparaison avec

les autres, possède le moins de formes communes. Le fait que le coefficient de communauté entre la végétation d'abatis de la première année et les années suivantes montre le rang décroissant, témoigne qu'il se produit entre les espèces avec l'âge d'abatis la sélection naturelle conduisant à la disparition de plusieurs espèces.

La détermination des facteurs qui caractérisent de différents stades de la végétation des abatis, nous permet de pénétrer plus profondément dans les relations floristiques et statistiques et d'expliquer leurs causes. Comme la richesse florale l'a démontré, nous avons dans chaque année un autre système dynamique et floristique; ce système va, malgré les différences résultant de la variabilité du milieu, dans une direction déterminée. L'expression de ce système nous est fournie par les courbes de fréquence moyenne.

Il résulte de la composition floristique des abatis de différents âges que, du moment de dégagement des associations végétales plus nettement définies, le nombre total des espèces, apparaissant dans les abatis, ainsi que le nombre moyen des espèces par mètre carré est inversement proportionnel à l'âge d'abatis. Mais, en même temps, comme le montrent les courbes, le nombre des espèces plus fréquentes augmente. Il ressort donc de ces deux phénomènes que surtout à partir du deuxième stade il se produisent parmi les végétaux d'abatis en même temps 2 processus qui se trouvent entre eux dans un lien étroit: le déplacement des espèces par les autres, et la répartition plus forte des espèces vainqueurs. Ces processus conditionnent l'état d'équilibre d'association dans le moment donné. Sur leur marche exercent l'influence d'un côté les facteurs intérieurs (capacité d'adaptation et l'échelle d'exigences vitales des espèces) et de l'autre côté — les facteurs extérieurs (climatériques et édaphiques). On peut considérer comme l'expression

visible de la fonction combinée d'agissement de ces deux facteurs, l'origine de certaines associations végétales. De telle manière nous voyons qu'à part de milieu et de la particularité des espèces, la lutte pour l'existence est un de plus importants facteurs sociologiques dans la naissance et dans la vie de l'association; elle produit la sélection naturelle qui conduit à la création de certains rapports floristiques et statistiques.

En résumant tout ce que nous avons dit plus haut, nous arrivons à la conclusion suivante:

La végétation d'abatis se développe d'après certaines lois. Son cycle de développement est composé de 3 stades successifs: l'association ouverte, la prairie et la forêt. Le premier de ces stades présente un mélange accidentel des formes, dépendant de plusieurs facteurs. De ce stade se dégagent graduellement des complexités organisées des espèces, plus ou moins stables, à certains traits caractéristiques, ils s'en dégagent des associations. Comme chaque l'organisme vivant, l'association végétale prend sa naissance, elle se développe et disparaît, en cédant place à une autre association. De telle sorte, l'association végétale n'est pas tout-à-fait fermée, stable; ce n'est qu'un anneau d'un processus continu qui se produit dans la nature, et qui a sa source dans les variations des conditions écologiques; celles-ci sont provoquées par l'influence des espèces associées. Dans chacun de ces stades dominant certaines relations floristiques et statistiques que l'on peut exprimer par des courbes de Jaccard. Ces courbes sont l'expression de la concurrence entre diverses espèces.

Laboratoire de Botanique
de l'Université de Varsovie.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Chitrowo: „Trawianoj pokrow splosznych liesosiek w Tulskich zasiekach“. Truddy po liesowomu opytnomu dziełu w Rossii. Wypusk 1, 1906 (en russe).

2. Flahaault und Schröter: „Phytogeographische Nomenklatur“ Berichte und Vorschläge. III-e Congrès international de Botanique. Bruxelles, 1910.

3. Jaccard: „Lois de distribution florale dans la zone alpine“ Bull. Soc. Vaud. sc. nat., 1902.

4. Jaccard: „Nouvelles recherches sur la distribution florale“ Bull. Soc. Vaud. sc. nat., 1908.

5. Malinowski: „La courbe de Jaccard et les prairies des environs de Cracovie“ Kosmos; Léopol, 1911.

6. Morozow: „Uczenie o liesie“. Wypusk 1, str. 33 (en russe).

7. Sukaatschew: „Lesnyja formacji i ich wzaimootnoszenia w Briańskich liesach“. Trudy po liesnomu opytnomu dziełu w Rossii, 1898 (en russe).

5. Stanisław Sierakowski:

O współaglutynacji w cholerye.

Przyczynek do diagnozy cholery. Z Zakładu Wyrobu Surowic Lecznicych prof. Odo Bujwida w Krakowie i z Pracowni Bakterjologicznej Miejskiej w Warszawie.

Komunikat zgłoszony dn. 2 Czerwca 1917 r.

Przedstawił S. S e r k o w s k i.

Badanie i identyfikowanie wibr. cholery od czasu wykrycia jej przez Koch'a natrafiało na liczne trudności. Cały szereg cech, które zrazu uważano za charakterystyczne dla cholery (morfologia bakterji, wygląd kolonij na żelatynie i na agarze, wytwarzanie indolu, własności hemolityczne) musiały być uznane za swoiste nie tylko dla cholery, ale i dla całego szeregu wibrjonów, tak zwanych rzekomocholerycznych. Po wykryciu odczynu Pfeiffer'a i aglutynacji identyfikowanie cholery otrzymało bardziej pewną podstawę.

Aglutynacja stała się jednym z najważniejszych środków, za których pomocą utożsamia się choleryę.

Już Gruber i Durham w roku 1895 (11), oraz Pfeiffer i Kolle (19), badając choleryę za pomocą tej reakcji, przyszli do przekonania, że jest ona absolutnie specyficzną. Pewien wyjątek stanowił tylko *Vibrio Berolinensis* wyosobniony przez Neisser'a z wody, do której umyślnie dodano cholery dla sprawdzenia pewnego środka dezynfekcyjnego. Ten *Vibrio* dawał aglutynację z surowicą przeciwcholeryczną, pomimo że nie posiadał wszystkich cech cholery. Kolle i Gotschlich (13), których klasyczne prace ugruntowały w nauce pogląd o specyficzności aglutynacji przy cholerye, uważają *Vibrio Berolinensis* za prawdziwą choleryę.

Pogląd o specyficzności aglutynacji potwierdzają badania Prausnitz'a (20), który zbadał około 125 szczepów wibrjonów rzekomocholerycznych i zaden z nich nie aglutynował z wysokowartościową surowicą przeciwcholeryczną.

W roku 1906 Gotschlich (10) wyosobnił *Vibrio El-Tor*, który dawał wszystkie bez wyjątku reakcje surowicze cholery, a jednak różnił się od niej pod względem wytwarzania rozpusz-

czalnych jądów w świeżych hodowlach i hemolizyn. Reakcje surowicze były wystawione na próbę, jednakowoż uznano, że różnice pomiędzy *El-Tor*, a cholera są tylko ilościowe, nie jakościowe.

W tym samym roku Karwacki (12) ogłosił pracę, w której opisuje kilka wibrjonów rzekomocholerycznych, które dawały dość wysoką aglutynację z surowicą przeciwcholeryczną, natomiast nie dawały odczynu Pfeiffera. Autor ten wygłosił zdanie, że wyłącznie na aglutynacji opierać się nie można przy utożsamianiu cholery.

Pogląd ten jednak nie znalazł oddźwięku w pracach późniejszych autorów: Sparmberg (22), Kolle i Schürmann (14) w najnowszym wydaniu *Handbuch für Pathogenen Mikroorganismen*, Paneth (118) 1915, Neufeld (17) 1914, uważają aglutynację w choleryze z za najzupełniej swoistą.

Wśród licznych wibrjonów wyosobnionych przezemnie podczas epidemii cholery w 1914/15 roku, znalazło się kilka dających aglutynację z wysokowartościową surowicą przeciwcholeryczną prawie do miana, których jednak po bliższym zbadaniu nie można było utożsamiać z cholera.

Do wykrycia tych aglutynujących wibrjonów rzekomocholerycznych przyczyniła się niewątpliwie metoda, którą posługiwałem się przy badaniu. Polega ona na tem, że kolonie wyrosnięte na płytce badawczej za pomocą aglutynacji orientacyjnej na szkiełku podstawowym w kropki odpowiedniej surowicy (metoda używana powszechnie). Przy rozcieńczeniu wysoko aglutynującej surowicy przeciwcholerycznej 1/100—1/1000 aglutynacja z koloną cholery występuje momentalnie.

W tym sposobie badania aglutynacja jest pierwszym sposobem rozpoznawczym, pierwszym niejako filtrem, przez który przepuszcza się badane bakterie. Okazało się, że filtr ten przepuszcza niekiedy obce bakterie.

Pierwszym szczepem tego rodzaju był wibrjon 977 wyosobniony z wody rzeki Wisły pod Krakowem. Dawał on aglutynację z surowicą przeciwcholeryczną, której miano wynosiło 1/12800, w rozcieńczeniu 1/6400. Z normalną surowicą aglutynował najwyżej w rozcieńczeniu 1/2200.

Kształt tego wibrjona pod mikroskopem był identyczny z cholera, kolonie na agarze były również ładująco podobne do cholerycznych, nieco tylko mniejsze; reakcja indolowa była dodatnia. Badając dalej posiałem szczep ten na żelatynę i przekonałem się, że nie rozrzedza on jej zupełnie nawet po dwóch miesiącach. Dla sprawdzenia zaszczerpiłem do tej samej epruwetki z żelatyną, której szczep ten nie rozpuścił, prawdziwą cholera; żelatyna rozpuszczona została w typowy sposób. Brak rozrzedzania żelatyny nasuwał pewne wątpliwości, czy badany szczep jest cholera; nie był jednakowoż dowodem przeciw temu, gdyż były już opisane szczepy cholery, które nie rozrzedzały żelatyny (Kolle i Schürmann (14)). Złatogoroff w 1911 (24) wyosobnił wprost z kału kilka szczepów cholery, nie rozrzedzających żelatyny. Jeszcze jedną różnicę w stosunku do typowych wibrjonów cholerycznych można było stwierdzić: zapach świeżej hodowli agarowej, tak charakterystyczny dla cholery, miał u tego wibrjona domieszkę zapachu gnilnego.

Wibrjon 1004, wyosobniony w niedługim czasie później z wody Wisły powyżej Krakowa, dawał również wybitną aglutynację tylko z surowicą przeciwcholeryczną. Morfologicznie nie różnił się od cholery, kolonie, jakie wytwarzał on na agarze, były podobne do cholerycznych, nieco tylko mniej przezroczyste. To również nie mogło być dowodem, że nie mam do czynienia z cholera, ponieważ cholera daje niekiedy na agarze ciemne kolonie. Podczas epidemii 1914/15 r. miałem jeden szczep cholery, który na płytkach z agarem alkalicznym dawał kolonie nieprzezroczyste, podobne do bakterji okrężnicy. Rzeczy te opisali już Kolle (15) i Bertlein (2).

Wibrjon 1004 dawał wybitną reakcję indolową, żelatynę rozrzedzał bardzo szybko i tem się różnił od 977-go.

Wibrjon 1012 wyosobniony również z wody rzeki Wisły. Morfologicznie nie różnił się od wibrjonów cholerycznych. Na agarze wytwarzał kolonie duże, gładkie, nieco mniej przezroczyste, niż cholera. Aglutynację z surowicą przeciwcholeryczną dawał niższą, niż poprzednie szczepy. Reakcji indolowej nie dawał (tem się różnił od 977), żelatyny nie rozpuszczał.

Wibrjon 1103 został wyosobniony nie z wody Wisły, lecz ze stolca zdrowieńca po cholera. Kał od niego badałem trzy razy; wspomniane bakterje zostały wyosobnione za drugim razem.

Szczep ten zbadałem dokładnie dopiero w kilka miesięcy po wyosobnieniu go. Wówczas morfologicznie przedstawiał się podobnie jak stary muzealny szczep cholery: wibrjony wydłużone, słabo pozakrzywiane, w stosunku do swej długości dość cienkie. Kolonie na agarze dawał drobne o brzegu równym, powierzchni gładkiej, nieco mniej przezroczyste, niż kolonie cholery. Reakcji indolowej nie dawał, żelatyny nie rozrzedzał.

Szczep ten hodowałem z dwu oddzielnych kolonij oznaczonych 1103a i L1103b, które różniły się tylko wysokością aglutynacji z surowicą przeciwocholeryczną.

Wibrjon 1131, wyosobniony z Wisły, dawał aglutynację z surowicą przeciwocholeryczną w rozcieńczeniu 1/6400 (miano surowicy 1/12800). Zbadany został dokładnie w kilka miesięcy po wyosobnieniu. Wówczas własności miał takie same jak poprzedni.

Wibrjon 1252 wyosobniony z Wisły pod Krakowem poniżej ujścia do niej głównego kolektora ściekowego. Szczep ten aglutynował z surowicą przeciwocholeryczną w rozcieńczeniu 1/6400 (miano surowicy wynosiło 1/24000). Żelatyny nie rozrzedzał, reakcji indolowej dawał tylko ślady.

Wibrjon 945 wyosobniony został nie w Krakowie, lecz w Warszawie, ze studni na Pelcowiznie. Pod względem morfologicznym, jako też co do zachowania się w żelatynie i na agarze, szczep ten miał własności takie jak i wibrjon 1131.

Z innych własności tych bakterij badałem ich własności hemolityczne, używając do tego celu słabo alkalicznego agaru z 10% świeżo odwłóknionej krwi barana. Żaden z wyosobnionych wibrjonów nie powodował hemolizy nawet po 48 godz. w temperaturze 36 stopni.

Wszystkie one również nie rozkładają cukru gronowego, mlecznego i mannytu. Błaganie rzęsek metodą Gil' Cesares'a (9) wibrjonów 977, 1004 i 1012 wykazało u wszystkich po jednej tylko rzęsce. Pod temi względami więc nie różnią się one od cholery.

Wibrjony te przeszczepiałem następnie blisko przez 2 lata na podłożach sztucznych. Przez ten czas zmieniły one niektóre swoje własności: szczep 977 przestał dawać reakcję indolową, szczep 1004 nie rozrzedza żelatyny, reakcja indolowa, bardzo wybitna

z początku, również znikła. Natomiast aglutynację z surowicą przeciwcholeryczną badane wibrjony zachowały w całej pełni.

Nie zawsze aglutynacja jest taka stała. Udało mi się wyosobnić dwa szczepy wibrjonów rzekomocholerycznych, których własności morfologiczne i zachowanie się w hodowlach były identyczne z odpowiednimi cechami cholery. Dawały one dość wysoką aglutynację z surowicą przeciwcholeryczną z zakładu prof. Odo Bujwida oraz Warszawskiego T-wa Naukowego. Już po kilku przeszczepieniach aglutynacja spadła prawie do zera, natomiast zawiesina bakteryj zabita formaliną, przyrządzona z drugiego pokolenia tych bakteryj i przechowywana w ciągu jednego roku, nie straciła aglutynacji zupełnie.

Aglutynację z surowicą przeciwcholeryczną dają niekiedy bakterje, nie mające nic wspólnego z cholera, n. p. bakterje okrężnicy. Jeden taki szczep wyosobniłem ze stolca zdrowieńca po cholery; po kilku przeszczepieniach stracił on zupełnie aglutynację. Messerschmidt (16) i Quadfling (21) opisali również szczepy bakteryj okrężnicowych, które dawały aglutynację z surowicą przeciwcholeryczną.

Wracając do wibrjonów, które zatrzymały swe aglutynacje, widzimy, że na podstawie przytoczonych własności morfologicznych, zachowania się na odżywkach oraz jadowitości dla zwierząt doświadczalnych, nie można orzec, że nie mamy do czynienia z cholera, przynajmniej co do niektórych szczepów.

Tablica I daje przegląd tych własności.

Wobec takich wyników wykonałem znane reakcje surowicze. Przedewszystkiem nasuwało się przypuszczenie czy te wibrjony nie aglutynują wyłącznie z surowicą przeciwcholeryczną prof. Odo Bujwida. Dla sprawdzenia wziąłem dostępne mi surowice przeciwcholeryczne Instytutu Wiedeńskiego, oraz Pracowni serologicznej Warszawskiego T-wa Naukowego.

Jak widać z przytoczonej tablicy badane wibrjony aglutynują nie tylko z surowicą przeciwcholeryczną prof. Odo Bujwida, ale także i z takimiż surowicami innych Instytutów.

Następnie wykonałem aglutynację opisywanych wibrjonów z surowicą przeciwcholeryczną, otrzymaną przez uodpornienie królika pewnym szczepem cholery. Surowica ta aglutynowała cholera najwyżej w rozcieńczeniu 1/6400, szczep 977 oraz 1131 w rozcieńczeniu 1/1600, pozostałych szczepów nie aglutynowała zu-

Tablica I.

Szczep	Data wyosobnienia	Miejsce wyosobnienia	Morfologia	Rzęski	Wygląd kolonii na agarze	Rozpuszczalność żelatyny	Własności hemolityczne	Zachowanie się wobec cukrów (gironowego, mlecznego i mannytu)	Reakcja indolowa	Jadowitość	
										dla świnek morskich	dla gołębi
977	8.VIII.15	Wisła pod Krakowem	jak cholery	po jednej	podobny do cholery	nie rozpuszcza	brak	nie zmienia	dodatnia	bardzo mała	nie jadowity
1004	20.VIII.15	"	"	"	mniej przezroczyste	rozpuszczają	"	"	"	"	"
1012	28.VIII.15	"	"	"	"	nie rozpuszcza	"	"	ujemna	—	—
1103	7.VIII.15	kał rekonescenta po cholery	"	"	"	"	"	"	"	bardzo mała	nie jadowity
1131	8.VIII.15	Wisła pod Krakowem	"	—	"	"	"	"	"	—	—
1252	3.IX.15	"	"	—	"	"	"	"	słabo dodatnia	—	—
349		studnia na Pelcowiznie	"	—	"	"	"	"	—	—	—

Tablica II.

Szczep	Aggl. z sur. przeciwcholeryczną			Agglutyn. z surowicą normalną
	Prof. Odo Bujwida	Wiedeńską	Tow. Nauk. Warsz.	
977	1:25600 +	1:1600 +	1:6400 +	1:100 +
1004	1:25600 +	1:800 +	1:6400 +	1:200 +
1012	1:3200 +	1:400 +	1:3200 +	1:100 —
1103	1:6400 +	—	1:1600 +	1:200 +
1131	1:51000 +	1:1600 +	1:3200 +	1:100 +
1252	1:1600 +	—	1:3200 +	1:200 +
349	1:12800 +	—	1:3200 +	1:200 —
cholera	1:51000 +	1:3200 +	1:12800 +	1:100 —

pełnie. Widzimy więc, że surowice przeciwcholeryczne końskie różnego pochodzenia aglutynują wszystkie badane wibrjony, natomiast surowica przeciwcholeryczna królicza tylko 2 z nich i to stosunkowo nisko.

W dalszym ciągu wykonałem z badanymi wibrjonami reakcję odchylenia dopełniacza. Reakcję tę dla odróżnienia cholery od innych wibrjonów zastosowali pierwsi Bordet i Gengou (5), następnie de Besche i Kohn (3) oraz Bocchia (4).

Jako antygeny w tej reakcji użyłem zawiesiny danych wibrjonów, zawierającej 10 mgr. w 1 cm³ (zmianowanej podług metody Bujwida) (6), do której dodałem antiforminy w ilości 2% i ogrzałem do 100° C. Pod wpływem antiforminy bakterje uległy rozpuszczeniu; nadmiar alkali zobojętniłem 5% kwasem siarkowym; chlor, o ile jeszcze pozostał, siarczynem sodu (metoda

Altman'a i Schultz'a (1)). Jako przeciwciała użyłem surowicy przeciwcholerycznej prof. Odo Bujwida (6), jako dopełniacza surowicy morskiej świnki w rozcieńczeniu 1/10; dwuchwytnik hemolizujący ciała barama w dawce 3-krotnej i wreszcie 5% dokładnie przemyte ciała barana.

W tem doświadczeniu była wzięta stała ilość surowicy przeciwcholerycznej w rozcieńczeniu 1/10 oraz zmienna ilość antygeny w rozcieńczeniach 1/1, 1/2, 1/4 i t. d. Zbadałem w ten sposób wibrjony 977, 1004, 101:2 i 1131, oraz, dla kontroli, cholere. Wynik otrzymałem następujący: antygeny z poszczególnych wibrjonów bez surowicy, jak również po dodaniu surowicy normalnej, nie powodują odchylenia dopełniacza (kontrola), natomiast z surowicą przeciwcholeryczną ma miejsce odchylenie dopełniacza: z cholere w rozcieńczeniu antygeny 1/128, ze szczepem 977 w rozcieńczeniu 1/16, oraz z 1131 w rozcieńczeniu 1/4; pozostałe wibrjony nie odchylają dopełniacza zupełnie.

Wobec tego trzeba przyjąć, że reakcję tą daje oprócz cholery wibrjon 977 i zaledwie ślady 1131.

Reakcję tę powtórzyłem po raz drugi w zupełnie innych warunkach. Antygen był przyrządzony z 18-to godzinnej hodowli poszczególnych wibrjonów. Zawiesinę z nich przyrządziłem tak, żeby zawierała 10 mgr. w 1 cm³ bakterij, następnie zabiłem przez ogrzewanie do 55^oC. przez jedną godz., roztrząsałem na maszynie przez 36 godz., poczem silnie odcentryfugowałem. Jako antygen służył mi lekko opalizujący płyn z nad osadu (metoda de Besche'a i Kohn'a (3)).

W przeciwieństwie do pierwszego doświadczenia wziąłem stałą ilość antygeny, natomiast zmienną ilość surowicy przeciwcholerycznej.

Pomimo tak odmiennych warunków, w jakich drugie doświadczenie zostało wykonane, otrzymałem wyniki bardzo podobne. Oprócz cholery odchylenie dopełniacza dawał jedynie szczep 977, przychem w tem doświadczeniu różnica pomiędzy cholere, a tym szczepem była znacznie mniejsza, albowiem cholera hamowała najwyżej w rozcieńczeniu surowicy 1/500, 977 zaś w rozcieńczeniu 1/400. Szczep 1131, który dawał ślad zahamowania w poprzedniej metodzie, tym razem, podobnie jak i pozostałe wibrjony, nie dał tej reakcji.

Na podstawie przytoczonych doświadczeń można powiedzieć, że z badanych wibrjonów jeden tylko 977 daje reakcję odchylenia dopełniacza, pozostałe zaś nie. A więc szczep 977 wyróżnia się z pośród innych wibrjonów tem, że 1^o aglutynuje z surowicą przeciwcholeryczną króliczą, 2^o daje odchylenie dopełniacza z surowicą przeciwcholeryczną.

Badając dalej wibrjony wykonałem z nimi doświadczenie Pfeiffer'a (bakterjoliżę w jamie otrzewnej świnki morskiej). Najpierw otrzymałem surowicę przeciwcholeryczną, specjalnie do tego celu przyrządzoną przez szczepienie królikowi wzrastających ilości cholery do jamy otrzewnej. Po kilku takich szczepieniach miano bakterjolityczne surowicy wynosiło 5000. Doświadczenie Pfeiffer'a wykonałem z 2 wibrjonami, które najbardziej zbliżone są do cholery. W wykonaniu tego doświadczenia nasuwały się pewne trudności, albowiem wibrjony te są bardzo mało jadowite dla świnek morskich. Trudności te starałem się pokonać 1^o przez powiększenie dawki wibrjonów, zasirzykiwanych świnkom do otrzewnej; jednak do pewnej tylko granicy, albowiem po dużych dawkach zwierzęta padają pomimo bakterjolizy, wskutek zatrucia endotoksynami; 2^o przez użycie do doświadczeń, o ile możności, bardzo młodych świnek, które są bardziej wrażliwe na te wibrjony.

Wynik tego doświadczenia był następujący: surowica bakterjolityczna przeciwcholeryczna otrzymana z królika nie rozpuszcza w jamie otrzewnej świnki morskiej wibrjonów 977 i 1004, nawet w dawce 10 razy większej niż ta, która wystarcza w zupełności do rozpuszczenia cholery.

Identyczne doświadczenie wykonałem z surowicą przeciwcholeryczną końską, z którą wibrjony te dawały wysoką aglutynację. I w tym przypadku nie zaobserwowałem bakterjolizy.

A zatem wibrjony 977 i 1004, najbardziej zbliżone do cholery, nie dają odczynu Pfeiffer'a. To jest pierwszy dowód, że wibrjon 977 nie jest cholera, 1004 prócz tego nie odchyła dopełniacza, nie aglutynuje z surowicą przeciwcholeryczną króliczą.

W dalszym ciągu, chcąc określić bliżej badane wibrjony, uodporniłem jednego królika szczepem 977, a drugiego 1004. Surowica otrzymana za pomocą wibrjona 977, którą w krótkości nazywać będę surowicą 977, aglutynowała szczep 977 najwyżej

w rozcieńczeniu 1/12800. Surowica ta nie aglutynuje zupełnie cholery, ani też pozostałych wibrjonów.

Analogicznie otrzymana surowica 1004 aglutynuje szczep 1004 w rozcieńczeniu 1/1600, cholery nie aglutynuje, podobnie jak 977, natomiast daje tą reakcję z 3-ma szczepami z pośród badanych wibrjonów prawie do miana. Ze szczepem 1103, 1131 i 349, które należą zatem do jednej grupy. Wibrjony 1004 i 1131 wyosobnione zostały z wody rzeki Wisły pod Krakowem, wibrjon 1103 z kału rekonwalescenta po cholera, 349 ze studni na Pelcowiznie pod Warszawą. Ta różnorodność pochodzenia świadczy, że ten gatunek wibrjonów jest dość rozpowszechniony w przyrodzie.

Z liczby 7-miu opisywanych bakterij pozostały tylko 2 1012 i 1252, które nie aglutynują ani z surowicą 977, ani z 1004. Dla rozstrzygnięcia, czy należą one do jednej grupy, czy do różnych, uodporniłem szczepem 1012 królika. Surowica 1012 aglutynuje swój szczep 1252 w rozcieńczeniu 1/25000, natomiast cholera i pozostałe wibrjony nie dają aglutynacji z tą surowicą. A zatem wibrjony 1012 i 1252 należą do jednej grupy. Oba zostały wyosobnione z wody rzeki Wisły pod Krakowem.

Na podstawie aglutynacji da się więc podzielić 7 wibrjonów na 3 grupy: do pierwszej należą 1 — 977, do drugiej 4 — 1004, 1131, 1103 i 349; do trzeciej dwa — 1012 i 1252.

Podział ten na 3 grupy zarysował się już wcześniej: wibrjon 977 różnił się od pozostałych tem, że dawał reakcję odchylenia dopełniacza; 4 wibrjony, należące do drugiej grupy, dawały wysoką aglutynację z surowicą przeciwocholeryczną, a dwa pozostałe aglutynowały znacznie niżej.

Z doświadczeń tych wynika również, że surowice otrzymane przez uodpornienie królików badanymi szczepami nie aglutynują cholery. Dowodzi to, że badane wibrjony nie są cholera. Sta m m (23), badając zmiany jakim może ulegać cholera hodowana przez dłuższy czas w wodzie, przychodzi do wniosku, że najbardziej stałą jej cechą, której nie traci ona nigdy, jest zdolność wytwarzania aglutynin dla typowego szczepu cholery.

Zestawiając wyniki otrzymane za pomocą reakcyj surowiczych dostaniemy:

1° Aglutynacje z surowicami przeciwcholerycznymi końskimi dają wszystkie opisywane wibrjony.

2° Aglutynację z surowicą przeciwcholeryczną króliczą dają 2 wibrjony 977 i 1131.

3° Odchylenie dopełniacza z surowicą przeciwcholeryczną końską daje jeden tylko wibrjom 977.

4° Odczynu Pfeiffer'a (bakterjolyzy *in vivo*) nie daje żaden szczep.

5° Surowice otrzymane za pomocą badanych wibrjonów nie aglutynują cholery.

Na podstawie tych doświadczeń wnioskujemy, że żaden z badanych wibrjonów nie jest cholera. Fakt ten potwierdza również wynik prób absorbcyjnych.

PRÓBY ABSORBCYJNE.

Próby absorbcyjne wykonałem w ten sposób, że do pewnej ilości surowicy przeciwcholerycznej w odpowiednim rozcieńczeniu dodawałem znaną ilość odpowiednich bakteryj. Po zmieszaniu stawiałem na 2—3 godz. dło cieplarki, a następnie trzymałem w lodowni do drugiego dnia. Po mocnem odcentryfugowaniu badałem płyn z nad osadu na aglutynację. Za każdym razem wykonywałem następujące kontrole: 1° z surowicą przeciwcholeryczną (bez dodawania bakteryj), która w takim samym rozcieńczeniu, jak surowica podlegająca absorbcji, była trzymana w cieplarce, a następnie w lodowni, dla sprawdzenia, czy te manipulacje nie wpływają na aglutynację; 2° kontrolę z surowicą normalną dla stwierdzenia, co ile aglutynacja z surowicą przeciwcholeryczną jest swoista i 3° z rozczyntem fizjologicznym soli kuchennej.

W tego rodzaju badaniach bardzo ważną jest rzeczą stopień rozcieńczenia surowicy, w jakim jest ona wzięta do badania, albowiem, jak wykazały badania (Eisenberg i Volk 8), jeżeli wziąć do absorbcji surowicę w dużem stężeniu, to pomimo znacznego nadmiaru bakteryj nie są one w stanie wyabsorbować wszystkich aglutynin; dopiero poczynając od pewnego rozcieńczenia surowicy taka kompletna absorbcja jest możliwa.

Postępując w myśl tych zasad, do surowicy przeciwcholerycznej końskiej w rozcieńczeniu 1/4150 dodałem bakteryj cholery

(hodowli 18-to godz. agarowej) w takiej ilości, ażeby 1 cm³ tak rozcieńczonej surowicy zawierał 15 mgr. bakteryj. W tych warunkach bakterje cholery pochłaniają z surowicy wszystkie aglutyniny i płyn pozostały po absorbcji nie aglutynuje zupełnie cholery ani też badanych wibrjonów, pomimo że kontrola aglutynacji z surowicą bez absorbcji wypada dodatnio. Cholera więc pochłania wszystkie aglutyniny zawarte w surowicy przeciwcholerycznej. Dla porównania wziętem również szczep *Vibrio El-Tor*: zachowuje się on w tem doświadczeniu jak i inne wibrjony — cholera nie zostawia dla niego żadnych aglutynin.

Jeżeli cholera pochłania z surowicy przeciwcholerycznej aglutyniny „swoje“ i wszystkich wibrjonów, to nasuwało się pytanie, które z nich pochłaniaa pierwej, do których posiada większe powinowactwo. Ażeby się co tem przekonać, absorbowałem surowicę przeciwcholeryczną w ten sposób, że do poszczególnych porcyj tej surowicy w rozcieńczeniu, jak zawsze, 1/450, dodawałem malejące ilości cholery i po absorbcji badałem na aglutynację.

Tabela III.

Ilość mgr. chol. użytych do absor. 1 cm ³ sur. przeciwchol. w rozcieńczeniu 1/450	Aglutynacja surowicy przeciwchol. po absorbcji		
	z cholera	z 977	z 1004
5 mgr.	1/1000 +	1/500 —	1/500 —
2 mgr.	1/1000 +	1/500 —	1/500 —
1 mgr.	1/2000 +	1/500 —	1/500 —
0,5 mgr.	1/2000 +	1/500 +	1/500 —
0,2 mgr.	1/4000 +	1/4000 +	1/2000 +
0,1 mgr.	1/8000 +	1/8000 +	1/4000 +
Kontrola sur. przeciwchol. bez absorbcji	1/16000 +	1/16000 +	1/80000 +

Po dodaniu do surowicy przeciwcholerycznej 0,1 i 0,2 mgr. cholery, absorbcja aglutynin dla cholery i dla wibrjonów występuje równomiernie, jednak już 0,5 mgr. cholery absorbuje prawie wszystkie aglutyniny przeznaczone dla wibrjonów, natomiast nawet 5 mgr. cholery nie jest w stanie wyabsorbować wszystkich aglutynin dla cholery. To zjawisko można wytłumaczyć tylko w ten sposób, że cholera jednakowo chciwie pochłania aglutyniny „swoje“ i „badanych wibrjonów“, jednak pierwszych jest znacznie więcej. Inne doświadczenia wykazały, że aglutynin dla cholery jest od 20 do 40 razy więcej, niż aglutynin przeznaczonych dla poszczególnych wibrjonów, a przytem nie dla wszystkich szczepów jest ich jednakowa ilość, n. p. dla 977 jest ich znacznie więcej, niż dla 1004 lub 1012.

Zachodzi teraz pytanie, jak będzie aglutynować surowica przeciwcholeryczna, wyabsorbowana badanymi wibrjonami. W tym celu dodawałem do różnych porcyj surowicy przeciwcholerycznej hodowlę poszczególnych wibrjonów, tak żeby 1 cm. surowicy, rozcieńczonej jak poprzednio, zawierał 15 mgr. odpowiednich bakteryj. Po absorbcji wykonywałem aglutynację z cholera i dla kontroli z wibrjonem użytym do absorbcji.

Z doświadczeń tych wynika, że surowica przeciwcholeryczna wyabsorbowana przez poszczególne wibrjony aglutynuje cholere bez żadnej zmiany.

Przekonałem się dalej, że nawet w rozcieńczeniu surowicy przeciwcholerycznej 10 razy większem, a więc 1/4500 i po 2-krotnem zwiększeniu ilości miligramów hodowli agarowej wibrjonów użytych do absorbcji, cholera aglutynowała jak z surowicą bez absorbcji.

Vibrio El-Tor wzięty dla porównania zachowuje się podobnie jak cholera: po absorbcji surowicy przeciwcholerycznej przez *Vibrio El-Tor* szczep ten nie aglutynuje z nią zupełnie, natomiast cholera aglutynuje z tą surowicą tylko w rozcieńczeniu 1/1000 (aglutynacja cholery z surowicą przeciwcholeryczną bez absorbcji wynosi 1/16000) absorbcja zatem jest prawie kompletna.

Z doświadczeń tych wynika, że badane wibrjony nie pochłaniają zupełnie z surowicy przeciwcholerycznej aglutynin przeznaczonych dla cholery, natomiast cholera pochłania wszystkie bez wyjątku aglutyniny.

Na podstawie tych prób absorcyjnych możemy z całą stanowczością stwierdzić, że wibrjony opisywane nie są cholera, że mamy do czynienia z przypadkiem współaglutynacji, którą po raz pierwszy opisał Castellani (7).

Metoda ta stanowi zatem bardzo ważny czynnik diagnostyczny, bardzo prosty przytem i łatwo dostępny.

Nasuwa się pytanie, czy aglutyniny w surowicy przeciwcholerycznej, przeznaczone dla wibrjonów, są jednakowe dla wszystkich szczepów. Pewne dane wskazywałyby, że tak nie jest, n. p. to, że aglutynin dla szczepu 977 jest znacznie więcej, niż dla innych.

Tablica IV.

Szczep	Aglutynacja ze sur. przeciwchol. po absorbcji przez			bez absorbcji (kontrola)
	1004	977	1012	
977	○	●	○	○
1004	●	○	○	○
1012	○	○	●	○
1103	●	○	○	○
1131	●	○	○	○
349	●	○	○	○
1252	○	○	●	○
Cholera	○	○	○	○
El-Tor	○	○	○	○

○ oznacza obecność aglut. po absorbcji

● „ „ brak aglut. po absorbcji.

Ażeby się o tem przekonać wykonałem następujące doświadczenie: surowicę przeciwcholeryczną w rozcieńczeniu 1/450 absorbowałem pewnym wibrjonem w ilości 16 mgr. na 1 cm³ surowicy i następnie badałem, w jaki sposób aglutynują z taką surowicą opisywane wibrjony.

Okazało się, że surowica wyabsorbowana przez wibrjon 1004 aglutynuje szczepy 977, 1012 i 1252 w taki sposób, jak gdyby w niej nic się nie zmieniło, natomiast nie aglutynuje zupełnie 1103, 1131 i 349, oprócz użytego do absorbcji wibrjonu 1004. A zatem wibrjon 1004 zabrał z surowicy przeciwcholerycznej aglutyniny, przeznaczone nie tylko dla siebie, ale i dla szczepów 1103, 1131 i 349, a pozostawił nietknięte dla 977, 1012, 1252 i cholery. Aglutyniny zatem dla szczepów 1004, 1103, 1131 i 349 należą do jednej grupy. *Vibrio El-Tor* wzięte dla porównania zachowuje się jak cholera.

Analogiczne doświadczenie wykonane z wibrjonem 977 wykazało, że po absorbcji surowicy przeciwcholerycznej przez tego wibrjona aglutynują wszystkie szczepy, za wyjątkiem szczepu 977 użytego do absorbcji, pochłania on zatem tylko swoje aglutyniny.

Wreszcie po absorbcji surowicy przeciwcholerycznej przez 1012, aglutynowały wszystkie wibrjony z wyjątkiem 1012 i 1252.

Widzimy więc, że aglutyniny w surowicy przeciwcholerycznej „przeznaczone“ dla badanych wibrjonów nie są jednolite, lecz można je podzielić na 3 grupy.

Założenie to potwierdza jeszcze następujące doświadczenie: wybrawszy po jednym przedstawicielu z każdej grupy absorbowałem jedną i tą samą porcję surowicy przeciwcholerycznej najpierw jednym szczepem, potem drugim, pozostałość po poprzednich — trzecim, i wreszcie w końcu cholera. Otóż po absorbcji tej surowicy za pomocą wibrjonu 1012 nie dawała ona już aglutynacji z tym szczepem, natomiast aglutynacja z 1004, 977 i cholera wypadła jak w kontroli. Po drugiej absorbcji przez 977 aglutynacja ze szczepem 977 znikła, z 1012 była oczywiście również ujemna, z 1004 spadła tylko nieznacznie, a z cholera pozostała bez zmiany. Po 3-ej absorbcji za pomocą 1004 aglutynacja i z tym wibrjonem spadła do zera — pozostała tylko z cholera. Wreszcie po wyabsorbowaniu reszty po 3-ch poprzednich absorbcjach przez cholera

surowica przeciwcholeryczna nie posiadała już aglutynin, względem badanych bakterij. Wyniki tego doświadczenia uwidocznią

Tablica V.

Szczep	Aglut. z surowicą przeciwcholeryczną po absorbcji				
	bez absorbcji (kontrola)	przez 1012	przez 1012 i 977	przez 1012, 977 i 1004	przez 1012, 977 1004 i cholereę
1012	○	●	●	●	●
977	○	○	●	●	●
1004	○	○	○	●	●
Cholera	○	○	○	○	●

Jasny krążek oznacza obecność aglutynacji.
Ciemny krążek oznacza brak aglutynacji.

Aglutyniny w badanej surowicy przeciwcholerycznej udało się rozłożyć na 4 rodzaje: 1° dla 977, 2° dla 1004, 1103, 1131 i 349, 3° dla 1012, 1252, 4° dla cholery i *Vibrio El-Tor*.

Te grupy odpowiadają w zupełności tym, na które podzielone zostały badane wibrjony za pomocą surowic, otrzymanych przez uodpornienie królików pojedynczemi szczepami.

Jaki jest teraz stosunek aglutynin, zawartych w surowicy przeciwcholerycznej i przeznaczonych dla poszczególnych grup wibrjonów, do aglutynin, otrzymanych we krwi królików przez uodpornienie ich pojedynczemi szczepami? Jedne i drugie aglutynują tylko wibrjony ze swej grupy; aglutyniny dla poszczególnych grup wibrjonów w surowicy przeciwcholerycznej pochłania cholera; pozostaje do rozstrzygnięcia pytanie, czy cholera pochłania je również z surowic królików uodpornionych badanemi wibrjonami.

W tym celu absorbowałem jedną porcję surowicy króliczej 1012 w odpowiednim rozcieńczeniu szczepem 1012, drugą identyczną porcję cholera. Doświadczenia te wykazywały, że już 1 mgr. hodowli agarowej vibrio 1012 wystarcza, ażeby pochłonać wszystkie aglutyniny zawarte w surowicy 1012, natomiast nawet 64 mgr. cholery nie absorbują ich ani w części. Przekonałem się również, że i 64 mgr. vibrio 1004 nie pochłaniają zupełnie aglutynin z surowicy 1012.

Wynika więc, że aglutyniny dla szczepu 1012, zawarte w surowicy przeciwcholerycznej końskiej różnią się od aglutynin zawartych w surowicy 1012, albowiem pierwsze cholera absorbuje, drugich zaś nie.

Streszczając wyniki prób absorbcyjnych można wyciągnąć następujące wnioski: 1° aglutyniny zawarte w surowicy przeciwcholerycznej i przeznaczone dla badanych wibrjonów, pochłania cholera, natomiast wibrjony te nie absorbują aglutynin cholery; mamy więc do czynienia ze współaglutynacją; 2° aglutyniny w surowicy przeciwcholerycznej nie są jednolite, lecz udało się je rozłożyć na 4 grupy, ściśle odpowiadające tym, na które podzieliłem badane wibrjony, za pomocą uodpornienia królików pojedynczemi szczepami, 3° aglutyniny dla poszczególnych grup wibrjonów zawarte w surowicach królików uodpornionych niemi różnią się od ich aglutynin w surowicy przeciwcholerycznej, ponieważ cholera ich z surowicy króliczej nie pochłania.

Z przytoczonej pracy mojej nasuwają się następujące uwagi:

Stawiając diagnozę cholery na podstawie aglutynacji musimy liczyć się ze zjawiskiem współaglutynacji.

W surowicy aglutynacyjnej przeciwcholerycznej obok aglutynin głównych, jest także cały szereg współaglutynin (w danym przypadku wyosobniłem 3 rodzaje), które zlepiają bakterje nieswoiste (w moim przypadku wibrjony rzekomo choleryczne).

Ażeby rozstrzygnąć, czy mamy do czynienia ze współaglutynacją, najprościej jest uciec się do próby absorbcyjnej Castellani'ego: bakterje nieswoiste mogą pochłaniać z surowicy tylko współaglutyniny, natomiast aglutyniny główne pozostają bez zmiany; bakterje zaś swoiste pochłaniają wszystkie bez wyjątku aglutyniny. Wobec tych faktów próby absorbcyjne są bardzo ważnym czynnikiem w odróżnianiu cholery od innych bakteryj

i powinny być zawsze wykonywane, szczególnie jeżeli chodzi o pierwsze wypadki.

Surowica aglutynacyjna przeciwcholeryczna końska zlepia obok cholery także i pewne wibrjony rzekomo-choleryczne. Zjawisko to dotyczy nietylko jednej jakiejś serji surowicy przeciwcholerycznej pochodzenia końskiego, lecz występowało we wszystkich badanych surowicach przeciwcholerycznych końskich, pochodzących przytem z różnych instytutów.

Widzimy więc, że szczepiąc konie jednym zarazkiem np. cholera, zauważyć można, że krew tych zwierząt zlepia nietylko bakterje zastrzykiwane, lecz również i inne drobnoustroje np. pewne wibrjony rzekomocholeryczne.

Zjawisko to mogłoby do pewnego stopnia wytlómaczyć fakt, że u osób chorych np. na tyfus plamisty, spostrzegamy we krwi aglutyniny przeciwko różnym rodzajom bakteryj, które nie zawsze postawić można w bezpośrednim etiologicznym związku z tą chorobą.

Na zakończenie składam podziękowanie prof. Odo Bujwidowi za umożliwienie mi tej pracy.

RÉSUMÉ.

Stanisław Sierakowski:

Sur la coagglutination du choléra.

Communication annoncée le 2. VI. 1917.

Présentée par St. Serkowski.

L'identification du choléra depuis qu'il fut découvert rencontra de nombreuses difficultés. Avec le temps on a reconnu que les qualités morfologiques, la manière de se comporter dans les aliments, les qualités hémolytiques, les réactions, sont caractéristiques non seulement pour le choléra mais aussi pour toute une série de vibrions pseudocholériques.

On distingue le choléra de ces vibrions au moyen des réactions du sérum, par les agglutinations et le réactif de Pfeiffer, qu'on a considérés comme tout à fait spécifiques.

Les exceptions peu nombreuses trouvées dans la littérature (*vibrio Berolinensis*, *vibrio El-Tor*) on a reconnu comme choléra dont certains traits caractéristiques sont plus fortement accentués que dans la plupart des espèces.

En 1906 Karwacki découvrit quelques vibrions qui donnaient l'agglutination avec le sérum anticholérique, et qu'on n'a pas pu reconnaître comme ceux du choléra. Cependant l'opinion que l'agglutination dans le choléra est une réaction absolument spécifique dominait dans la science jusqu'au derniers jours et c'est sur cette réaction qu'on appuyait généralement les diagnoses du choléra.

Parmi les nombreux vibrions découverts par moi pendant l'épidémie des années 1914/15 il y avait 7 qui agglutinaient avec le sérum anticholérique. J'en ai trouvé 5 dans l'eau de la Vistule aux environs de Cracovie, 1 dans les excréments d'un réconvalescent de choléra, 1 dans un puits à Pelcovizna près de Varsovie. Ils ont agglutiné macroscopiquement avec le sérum anticholérique très haut; les uns comme du choléra jusqu'au titre, les autres un degré de moins, les deux parmi eux beaucoup mieux que le choléra, mais tout de même ils ont agglutiné avec le sérum anticholérique considérablement plus haut qu'avec le sérum normal.

La quantité de cils et les qualités morphologiques de ces vibrions sont les mêmes que celles du choléra. Les uns fondent la gélatine, les autres non; presque tous donnent la réaction indolique; ils ne possèdent pas les qualités hémolytiques, ne fermentent pas les sucres, sont presque tout à fait inoffensives pour les pigeons.

Toutes ces qualités sont telles qu'on ne peut pas déterminer en se basant sur elles, si les vibrions examinés sont le choléra ou non. Ces vibrions inoculés pendant deux ans ont conservé entièrement son agglutination.

En examinant plus longtemps leurs qualités distinctives, j'ai trouvé qu'ils agglutinaient non seulement avec le sérum anticho-

lérique du professeur Odo Bujwid, mais aussi avec le sérum de Vienne, et celui de la Société des Sciences de Varsovie, (tous les trois sérums étaient d'origine chevaline).

Avec le sérum anticholérique du lapin obtenu par moi agglutinent deux vibrions seulement, et c'est à un degré relativement assez bas. Une seulement de ces espèces, 977, donne l'écartement du complément et aucune ne donne la réaction de Pfeiffer.

Les sérums obtenus en inoculant des lapins, pas un seul genre des vibrions n'agglutine pas le choléra.

En se basant sur ces réactions du sérum on peut affirmer définitivement que parmi les vibrions examinés aucun n'est pas le choléra.

Au moyen des sérums obtenus par l'inoculation des différents vibrions aux lapins j'ai partagé les espèces examinées en trois groupes.

Ensuite j'ai fait avec les vibrions examinés une d'épreuves absorbatives du Castellani. Ces épreuves ont démontré que:

1° Les vibrions examinés n'absorbent pas les agglutins pour le choléra de sérum anticholérique, mais au contraire c'est le choléra qui absorbe les agglutins destinés pour les vibrions.

2° Les agglutins dans le sérum anticholérique ne sont pas homogènes, j'ai parvenu à les classer en quatre groupes différentes des vibrions. Ces groupes répondent exactement aux ceux en quels j'ai partagé les vibrions éprouvés par l'inoculation aux lapins des vibrions individuels.

3° En tenant compte des agglutins pour les groupes individuels des vibrions contenus dans le sérum anticholérique et dans les sérums des lapins inoculés par les vibrions, nous voyons que le choléra les absorbe du sérum anticholérique du cheval, et qu'il ne les absorbe point de sérums du lapin.

En basant la diagnose du choléra sur l'agglutination, nous devons tenir compte du phénomène de coagglutination.

Dans le sérum agglutinant anticholérique à côté des agglutins principaux, il existe toute une série de coagglutins (dans le cas donné j'ai découvert 3 genres) qui agglutinent les bactéries non spécifiques (dans ce cas les vibrions pseudocholériques).

Pour décider si nous avons à faire avec coagglutination, le plus simple sera recourir à l'épreuve absorbative du Castellani; les bactéries non spécifiques peuvent absorber du sérum seulement les coagglutins: les agglutins principaux restent sans changement; au contraire les bactéries spécifiques absorbent tous les agglutins sans exception.

Tous ces faits nous prouvent combien les épreuves absorbatives sont nécessaires dans l'action de distinguer le choléra des autres bactéries, et elles doivent toujours être pratiquées, particulièrement s'il s'agit du premier cas.

Le sérum agglutinant anticholérique du cheval agglutine à côté du choléra quelques vibrions pseudocholériques. Ce phénomène touche non seulement à une série de sérums anticholériques d'origine chevaline, mais il apparaît dans tous les sérums anticholériques chevalins qui venaient des différents instituts.

Nous voyons donc qu'en inoculant des chevaux, avec la même espèce p. ex. celle du choléra, le sang de ces animaux agglutine non seulement les bactéries inoculées, mais aussi les autres vibrions p. ex. quelques vibrions pseudocholériques.

Ce phénomène pourrait nous expliquer jusqu'à un certain degré le fait que dans le sang des malades, p. ex. de typhus, nous remarquons les agglutins contre les différents genres des bactéries, qui ne sont pas toujours en simple liaison étiologique avec cette maladie.

SPIS WYDAWNICTW

Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

I. Sprawozdania z posiedzeń Tow. Nauk. Warsz. za lata:

- r. I (1908), r. II (1909), r. III (1910), r. IV (1911), r. V (1912), r. VI (1913),
r. VII (1914), r. VIII (1915), r. IX (1916).

II. Prace Wydziału I-go:

- Nr. 1. Kazimierz Nitsch: Z historii polskich rymów. 1912.
Nr. 2. Kazimierz Wóycicki: Wiersz „Barbary Radziwiłłówny“ A. Fe-
lińskiego. 1912.
Nr. 3. Tytus Benni: Samogłoski polskie. 1912 r.
Nr. 4. Kazimierz Wóycicki: Historia literatury i poetyka. 1914.
Nr. 5. Kazimierz Wóycicki: Ośmiozgłoskowiec trocheiczny polski.
1916.
Nr. 6. Kazimierz Wóycicki: Wypiański i Szujski. 1917.
Nr. 7. Tytus Benni: Metoda palatograficzna w zastosowaniu do spółgło-
sek polskich. 1917.

III. Prace Wydziału II-go:

- Nr. 1. Henryk Konic: Materiały do dziejów Komisji Rządzącej. 1910.
Nr. 2. Ig. Tad. Baranowski: Materiały do dziejów wsi polskiej. 1910.
Nr. 3. Ig. Tad. Baranowski: Księgi referendarskie. 1910.
Nr. 4. Witold Schreiber: Badania nad antropologią dzieci chrześcijań-
skich, żydowskich i karaïmskich w Galicyi. 1910.
Nr. 5. Bronisław Bouffałł: Teorya odpowiedzialności organów władzy
administracyjnej we współczesnem prawie politycznem. 1911.
Nr. 6. Stanisław Poniatowski: O wpływie błędów obserwacyjnych na
wskaźniki antropologiczne. 1912.
Nr. 7. Jan Jakubowski: Studya nad stosunkami narodowościowemi na
Litwie przed Unią Lubelską. 1912.
Nr. 8. Aleksander Kraushar: W sprawie fundacyi naukowej T-wa im.
Józefa Aleksandra Jabłonowskiego, wojewody nowogrodzkiego
w Lipsku. 1912.
Nr. 9. Edward Bogusławski: Dowody autochtonizmu Słowian na
przeźrzeni, zajmowanej przez nich w wiekach średnich. 1912.
Nr. 10. Ludomir Sawicki: Studya nad Abisynią. 1913.
Nr. 11. Kazimierz Wachowski: Jomsborg. 1914.

- Nr. 12. Kazimierz Konarski: Polska przed odsieczą wiedeńską r. 1683 1914.
- Nr. 13. Edward Trojanowski: Rodowód godła herbowego Warszawy. 1917.
- Nr. 14. Leon Kozłowski: Badania archeologiczne na górze Klin w Iwanowicach, pow. Miechowskiego. 1917.
- Nr. 15. Studya nad dziejami prawa polskiego prywatnego. 1917.
- I. Leon Babiński: O sposobach utwierdzania działów spadkowych na podstawie praktyki ksiąg sądowych wielkopolskich z końca XIV i początku XV wieku.
- II. Roman Kuratów-Kuratowski: O zdolności cywilnej kobiet zamężnych w Małopolsce w w. XIV.

IV. Prace Wydziału III-go:

- Nr. 1. Z. Weyberg: Syntezy pirogenetycznych glinokrzemianów zasadowych. 1908.
- Nr. 2. Władysław Janowski: Współczesne metody badania serca. 1910.
- Nr. 3. Maryan Eiger: Topografia zwojów nerwowych wewnątrzsercowych u świnki morskiej, myszy białej i człowieka. 1911.
- Nr. 4. Edward Loth: Badania antropologiczne nad mięśniami murzynów. 1913.
- Nr. 5. Jan Czekanowski: Zarys metod statystycznych w zastosowaniu do antropologii. 1913.
- Nr. 6. Stanisław Poniałowski: Badania antropologiczne nad kością skokową. 1913.
- Nr. 7. Jan Lewiński: Utwory dyluwialne i ukształtowanie powierzchni przedlodowcowej dorzecza Przemszy. 1914.
- Nr. 8. Bronisław Rydzewski: Próba charakterystyki paleobotanicznej Dąbrowskiego Zagłębia węglowego. 1915.
- Nr. 9. Wacław Roszkowski i Anzelma Żebrowska. O budowie pochewek prącia u błotniarek (*Limnaea Lam.*). 1915.
- Nr. 10. Stanisław Pawłowski: Ze studyów nad złodowaceniem Czarnohory. 1915.
- Nr. 11. Jan Tur: Nowe badania nad rozwojem układu nerwowego potworów platyneurycznych. 1915.
- Nr. 12. Jan Krassowski: O ruchu planetoid typu $\frac{3}{4}$ (Thule). 1916.
- Nr. 13. January Kołodziejczyk: Stosunki florystyczne jeziora Świtezi. 1916.
- Nr. 14. Jadwiga Loth-Niemirycz: Badania anatomiczne i antropologiczne nad kanałem wyrostków poprzecznych (*canalis transversarius*) kręgów szyjowych człowieka i małp. 1916.
- Nr. 15. W. Pogorzelski: Badania teoretyczne ilości ciepła, otrzymywanych na kuli ziemskiej, z uwzględnieniem strat promieniowania w atmosferze. 1916.
- Nr. 16. Jan Lewiński: Z morfologii i geologii stepów czarnomorskich 1916.

- Nr. 17. Jan Tur: Badania nad rozwojem *Chalcides lineatus* Leuck. 1916.
 Nr. 18. Janusz Domaniewski: Fauna Passeriformes okolic Saratowa. 1916.
 Nr. 19. Henryk Raabe: Pokolenia jesienne *Amoebidium parasiticum*. 1916.
 Nr. 20. Jan Samsonowicz: Utwory dewońskie wschodniej części gór Świętokrzyskich. 1917.
 Nr. 21. Gustaw Potworowski: Studya teratogenetyczne. 1917.
 Nr. 22. Stanisław Sumiński: O budowie i rozwoju narządów kopulacyjnych samczych u *Anax imperator* Leach. (Odonata, Aeschninae). 1917.
 Nr. 23. Stanisław Małkowski: O wydmach piaszczystych okolic Warszawy. 1917.
 Nr. 24. Edward Loth: Odmiany tętnicy szyjnej głębokiej (a. cervicalis profunda) i tętnicy szyjnej wstępującej (a. cervicalis ascendens). 1917.
 Nr. 25. Jan Tur: „Nić osiowa“ i „czop metastomalny“ w rozwoju owodniowców (Amniota). Studium embryologiczno-porównawcze. 1917.

V. Wydawnictwa Wydziału I-go:

- Nr. 1. Aleksander Brückner: Jana hr. Potockiego prace i zasługi naukowe. 1911.
 Nr. 2. Prace Komisji do badań nad historią literatury i oświaty. Tom I-szy 1914.
 Nr. 3. Kazimierz Wóycicki: Forma dźwiękowa prozy polskiej i wiersza polskiego. 1912.
 Nr. 4. Manfred Kridl: Listy Juliusza Słowackiego. 1915.
 Nr. 5. Maurycy Mann: „Poganka“ Narcyzy Żmichowskiej. 1916.
 Nr. 6. Stanisław Słoński: Psalterz Puławski. 1916.

VI. Wydawnictwa Wydziału II-go:

- Nr. 1. Władysław Konopczyński: Dyaryusze sejmowe z w. XVIII-go i Dyaryusz sejmu z roku 1748. Tom I—II. T. I—1911. T. II—1912.
 Nr. 2. Marcelli Handelsman: Dyaryusze Sejmów Księstwa Warszawskiego. Zeszyt I. Dziennik posiedzeń izby poselskiej sejmu roku 1809. 1913.
 Nr. 3. Teodor Wierzbowski: Przywileje królewskiego miasta stołecznego Starej Warszawy, 1376—1772. 1913.

VII. Wydawnictwa wydziału III-go:

- Nr. 1. Władysław Gorczyński: Materiały do poznania opadów w Królestwie Polskiem. 1912.
 Nr. 2. Edward Flatau: Migrena. 1912.
 Nr. 3. Paleontologia Ziemi Polskich. № 1. Józef Siemiradzki: Gąbczaki jurajskie ziem polskich. 1913.
 Nr. 4. Władysław Gorczyński: Materiały, zebrane w r. 1911 na stacjach Sieci Meteorologicznej Warszawskiej. 1913.

- Nr. 5. Zygmunt Wóycicki: Obrazy roślinności Królestwa Polskiego. — 1912 — 17 r.
- Nr. 6. Henryk Dziedzicki: Atlas organów rozrodczych u Mycetophilidae. 1915 r.
- Nr. 7. Edward Flatau: Prace z pracowni neurobiologicznej. T. I. 1916.
- Nr. 8. Kazimierz Stołyhwo: Prace z Pracowni antropologicznej. T. I. 1916.
- Nr. 9. Bolesław Rychłowski: Materiały do Hydrologii Król. Polsk. i ziem przyległych. 1917.

VIII. Roczniki Tow. Nauk. Warsz.

Rok VI (1913), rok VII (1914), rok VIII (1915), rok IX (1916).