

**SPRAWOZDANIA T.N.W. WYDZ III.**  
**11**  
**1-6**  
**1918**









# Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

---

## Posiedzenie

z dnia 17 Stycznia 1918 r.

Rok XI. № 1.

Obecni:

Przewodniczący Wydziału p. St. J. Thugutt.  
Sekretarz p. J. Tur.

Członkowie Towarzystwa pp.: K. Białaszewicz, A. Czartkowski, B. Dębiński, Wł. Gorczyński, M. Jakowski, L. Kryński, St. Mazurkiewicz, St. Orłowski, K. Rzętkowski, St. Serkowski, W. Smosarski, A. Sokołowski, K. Stołyhwo, J. Trzebiński, Z. Wóycicki.

Przemówienie inauguracyjne doroczne:

Stefan Mazurkiewicz:

### **O podstawach teorii prawdopodobieństwa.**

Tak zwana klasyczna teoria prawdopodobieństwa, która najdoskonalszy swój wyraz znalazła w wielkim dziele P. S. Laplace'a „Théorie analytique des probabilités“ (1 wydanie w roku 1812) stała się w drugiej połowie ubiegłego wieku przedmiotem krytyki. Bertrand, von Kries i Poincaré podali w wątpliwość nie tylko szereg wyników specjalnych i zastosowań teorii prawdopodobieństwa, ale nawet podstawowe zasady, na których

klasycy oparli tę teorię. Entuzjazm, który teoria prawdopodobieństwa wzbudzała w matematykach XVIII wieku i który np. znajduje swój wyraz w słowach Laplace'a: „il n'est point de science plus digne de nos méditations et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique”—ustąpił miejsca sceptycyzmowi, nieraz zbyt krańcowemu.

W ostatnich latach pojawił się szereg prac, poruszających sprawę podstaw teorii prawdopodobieństwa z bardzo różnorodnych punktów widzenia. Przebija w tych pracach reakcja przeciw nadmiernemu sceptycyzmowi krytyków teorii klasycznej, — i usiłowanie rekonstrukcji tej ostatniej na odmiennych podstawach. Niewątpliwie skierowanie się w tę stronę zainteresowania naukowego wywołane zostało przez rozpowszechnienie się opartych o teorię prawdopodobieństwa metod statystycznych, które są dziś niezbędne zarówno w fizyce, jak i w naukach przyrodniczych opisowych.

Trudności, nasuwające się przy badaniu podstaw teorii prawdopodobieństwa są może większe, niż w jakimkolwiek innym dziale matematyki, głównie, jak sądzę, z powodu wieloznaczności i niewyraźnej treści pojęć podstawowych takich, jak samo prawdopodobieństwo, zdarzenie i t. p. — oraz z powodu tego, że granice między światem realnym a sferą pojęć matematycznych są w teorii naszej bardzo zatarte. Zamierzam poruszyć tu dwa tylko najłatwiejsze i najlepiej zbadane zagadnienia, mianowicie zagadnienie aksjomatyki, oraz sprawę kryterjów stosowalności teorii prawdopodobieństwa.

Ustalenie aksjomatyki pewnej teorii matematycznej stanowi w mojem przekonaniu — pierwsze stadjum, od którego zaczynać się winno badanie podstaw tej teorii. Tu kończy się matematyka — zaczyna logika lub filozofja. W gruncie rzeczy chodzi tu o analizę logiczną danej teorii, dokładniej o wyliczenie jej pojęć pierwotnych (t. zn. takich, które w jej obrębie nie podlegają definicji) i jej postulatów (t. zn. zdań, które znowu w jej obrębie są przesłankami, ale nie wnioskami). Powtarzam — jest to tylko pierwsze stadjum: można i trzeba iść głębiej, a więc badać idealną treść pojęć pierwotnych, ich stosunek do świata realnego, naturę postulatów i t. p. — ale są to już rzeczy dalsze, w każdym razie leżące poza obrębem matematyki.

W chwili, w której przystępujemy do takiej analizy, musi

przedmiot tej analizy, t. zn. dana teoria już istnieje, jako pewne indywidualum pojęciowe, choć może fragmentaryczne i nie gotowe. W naszym przypadku przedmiotem analizy będzie pewna część teorii klasycznej, mianowicie ta, którą nazwaćby można czystą i ogólną. Musimy bliżej przyrzeć się jej strukturze.

Odrzucmy zadania specjalne, w które tak obfituje nasza teoria, odrzucmy zastosowania, więc teorię błędów, statystykę matematyczną i biometrię, a wreszcie cały dział, traktujący o prawdopodobieństwie przyczyn, który stanowi rodzaj ogniwa pośredniego, z pomocą którego klasycy nawiązywali zastosowania, o których mowa, do teorii ogólnej. Cóż pozostanie?

Nasamprzód, określenie prawdopodobieństwa, powtóre dwa twierdzenia, które (wzorem Laplace'a) nazywać będę zasadami, mianowicie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitem i złożonym, — potrzebie teoria zmiennych ewentualnych i t. zw. prawa wielkich liczb. Określenie prawdopodobieństwa, o którym mowa, nosi nazwę klasycznego i brzmi, jak następuje:

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  — jest ułamkiem, którego licznikiem jest liczba przypadków, sprzyjających zdarzeniu, — mianownikiem — liczba wszystkich przypadków możliwych, — pod warunkiem, że te przypadki możliwe są zarazem jednakowo możliwymi.

W okresie sceptycyzmu powyższa definicja podlegała krytyce z najrozmaitszych punktów widzenia. Nasamprzód zarzucano jej, że zawiera błędne koło, gdyż określa prawdopodobieństwo przez jednakową możliwość, tymczasem jednakowa możliwość znaczyć musi to samo, co jednakowe prawdopodobieństwo. Zarzut w gruncie rzeczy bezpodstawny, gdyż klasycy określają osobno pojęcie jednakowej możliwości: przypadki możliwe są jednakowo możliwymi, „jeżeli nic nas nie skłania do przypuszczenia, że pojawi się raczej jeden z nich, niż pozostałe”.<sup>1)</sup> Określenie to prowadzi do nowego, już lepiej ugruntowanego zarzutu, zawiera ono pierwiastek subiektywny, który udziela się również pojęciu prawdopodobieństwa; tymczasem teoria prawdopodobieństwa ma prowadzić do wyników obiektywnie słusznych. Dalej stawiano zarzut, że w pewnych przypadkach określenie powyższe nie jest jednoznaczne, ale zawiera pierwiastek dowolności. Widzimy to w tak zwanym paradoksie Ber-

<sup>1)</sup> Laplace. Oeuvres. VII, str. 181 (1886).

trand'a <sup>1)</sup>, który na tm polega, że na prawdopodobieństwo, aby cięciwa danego koła była większa, niż bok trójkąta umiarowego wpisanego otrzymujemy (zależnie od wyboru spórzędnych cięciwy) wartości  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  lub  $\frac{1}{4}$ , przyczym definicja klasyczna nie daje nam żadnego kryterjum, pozwalającego wybrać między temi warlościami. Wszystkie zarzuty powyższe, prócz jednego, o którym później będzie mowa, nie obchodzą nas na razie, gdyż nie chodzi nam o poprawność, ani stosowalność klasycznego określenia, lecz jedynie o rolę jego przy budowie teorii prawdopodobieństwa. Otóż jest ono potrzebne przy dowodzie tych dwu twierdzeń, które nazwalimy zasadami; na tem jednak kończy się jego rola. Reszta teorii jest już konsekwencją zasad, — odwoływanie się bezpośrednio do definicji prawdopodobieństwa staje się zbędne.

Co do sposobu dowodzenia zasad, nastroczają się następujące uwagi.

Wiadomo, że definicja klasyczna, jak zresztą cała teoria prawdopodobieństwa, powstała na tle badania gier losowych. Najbardziej plastyczną jej ilustracją jest losowanie z urny, zawierającej gałki różnych kolorów, w zgóry wiadomej liczbie. Jest to nawet coś więcej, niż ilustracja.

Teoria klasyczna wprowadza do zagadnień zupełnie abstrakcyjnych urnę lub układ urn o wiadomym składzie, nie tylko w charakterze przykładu, mającego ułatwiać zrozumienie danego zagadnienia, lecz w roli niejako reprezentatywnej; rozumowania nie przeprowadza się ogólnie, ale dla danego schematu urn, który staje się niejako przedstawicielem pewnej klasy zdarzeń, i na tę klasę rozciąga się to, co się w przypadku uważanego schematu udowodniło. W taki sposób dowodzą słuszności dwu zasad Laplace i Poisson. Rzecz prosta, nie trudno odrzucić te konkretne obrazy, zaciemniające potrosze logiczną strukturę rozumowania i przejść do ogólnych i abstrakcyjnych dowodów. Zaznaczyć jeszcze należy, że klasycy w dowodzie wspomnianych zasad posługują się nieświadomie pewną przesłanką aksjomatyczną, którą sformułował dopiero Markow <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Bertrand. Calcul des probabilités.

<sup>2)</sup> Iščislenje wierojatnostiej str. 10.



Idźmy dalej; definicja klasyczna już w dziełach klasyków podlega rozszerzaniu i modyfikacjom, które upodobnić by można do kolejnego rozszerzania się, pojęcia liczby. Rozszerzenie to jest w znacznej mierze nieświadome i dokonywa się w różny sposób, nasamprzód: mamy zdarzenia, dla których mnogość przypadków możliwych jest nieskończona (przeliczalna) tak jest np. w zagadnieniu Waldegrave'a, lub w zagadnieniu o ruinie graczy. Prawdopodobieństwa, które tam występują nie podpadają, ściśle biorąc, pod definicję klasyczną, mamy tu rozszerzenie tej ostatniej za pośrednictwem przejścia do granicy.

To samo, w formie jaskrawszej i wyraźniejszej występuje przy tak zwanem prawdopodobieństwie geometrycznem, które jest już nie stosunkiem liczb, ale stosunkiem dwóch całek Stjertjes'a; jest to drugie rozszerzenie. Trzeciem jest wprowadzenie obok tych prawdopodobieństw apriorycznych, prawdopodobieństwa a posteriori, które określa się przez obserwacje częstości względnej danego zjawiska; niema tutaj żadnego schematu przypadków możliwych i sprzyjających, można go tylko hypotetycznie dokonponować. Do tej kategorii należą wszystkie prawdopodobieństwa, występujące w statystyce.

Widzimy więc, że określenie klasyczne jest zbyt ciasne i wskutek tego nieadekwatne do treści, którą się wtłoczyć w nie usiłuje. Na tem jednak nie koniec. Bertrand podał niezmiernie prosty przykład, w którym mimo skończonej liczby przypadków możliwych i możności apriorycznego określenia prawdopodobieństwa, definicja klasyczna stosowana być nie może, gdyż przypadki możliwe nie są jednakowo możliwe; oto przykład powyższy: dane są dwie urny, na zewnątrz nie różniące się od siebie, w jednej z nich, ale nie wiadomo w której, znajduje się dwie gałki, biała i czarna. W drugiej gałka biała i dwie gałki czarne. Ciagniemy gałkę, wybierając przytem urnę na chybił trafił, jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy gałkę białą? Przypadków możliwych jest pięć, sprzyjających dwa. Oczywiście, prawdopodobieństwo szukane nie równa się  $\frac{2}{5}$  (gdyż przypadki możliwe nie są jednakowo możliwe), ale  $\frac{5}{12}$  jak to wynika z reguł o prawdopodobieństwie całkowitem i złożonem.

Podciągnąć tego prawdopodobieństwa pod definicję klasyczną nie można, chyba, że dane zjawisko zastąpi się przez inne. Zastosowanie wymienionych zasad do jego obliczenia

stanowi w gruncie rzeczy *petitio principii*; bo przecież zasady te ustaliliśmy tylko w przypadku, gdy ma miejsce definicja klasyczna. Mamy tu nowe rozszerzenie pojęcia prawdopodobieństwa, niejako przez *extrapolację* twierdzeń o prawdopodobieństwie całkowitem i złożonem, i to jest ważne, gdyż twierdzenia te stają przed nami w nowem świetle. To co im podpada, przez to samo wchodzi w dziedzinę teorii prawdopodobieństwa. Stąd krok już tylko do nowego ujęcia całego przedmiotu. Weźmy przykład z innej dziedziny: nie mamy dotąd określenia liczby, mamy jednak pojęcie o tem, jak powinien się twór matematyczny zachowywać na to, aby mógł być uważany za liczbę. Podobnie i tu zamiast szukać określenia prawdopodobieństwa, możemy uznać za prawdopodobieństwo to, co posiada pewne charakterystyczne własności. Od definicji istotnej przechodzimy w ten sposób do definicji opisowej, przez postulaty. Pierwszą, niezupełnie jeszcze konsekwentną próbę takiego postawienia rzeczy znajdujemy w pracy logika angielskiego Boole'a: „An investigation of the laws of thought“ (1854). Wymienić tu należy również Gosiewskiego, którego punkt wyjścia zupełnie jest inny, gdyż polega na zastąpieniu określenia klasycznego przez dość ciemną definicję Bernoulli'ego („prawdopodobieństwo jest częścią prawdy“), który jednak swoim niezmiernie oryginalnym sposobem traktowania zasad teorii prawdopodobieństwa nasuwa wyraźnie myśl o aksjomatyce. Ostateczne zbudowanie aksjomatyki naszej teorii zawdzięczamy Bohlmann'owi <sup>1)</sup>.

Przechodzę obecnie do podania tej aksjomatyki. Zauważę jednak, że to zdanie, które Bohlmann nazywa definicją, należy zaliczyć do rzędu postulatów, gdyż nieda się ono skonwertować. W ten sposób otrzymamy 4 postulaty zamiast określenia i 3 postulatów. Dla uproszczenia ich wysłowienia wprowadzę oznaczenia następujące: niech A, B — symbolizują zdarzenia; przez  $A \times B$  oznaczać będziemy zdarzenie, polegające na pojawieniu się obu zdarzeń A, B; — przez  $A + B$  — zdarzenie, polegające na pojawieniu się conajmniej jednego ze zdarzeń A, B.

---

<sup>1)</sup> Atti del IV congresso internazionale dei matematici in Roma. t. 3 str. 278 (1909).

### Aksjomaty teorii prawdopodobieństwa.

Postulat I: Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  —  $p(A)$  jest liczbą nieujemną, jednoznacznie odpowiadającą zdarzeniu.

Postulat II: Jeżeli zdarzenia  $A$  i  $B$  wyłączają się wzajemnie, wówczas:  $p(A + B) = p(A) + p(B)$ .

Postulat III: Jeżeli pojawienie się zdarzenia  $A$  jest pewne, wówczas:  $p(A) = 1$ .

Postulat IV: Ułamek:  $\frac{p(A \times B)}{p(A)}$ , który jest mniejszy od jedności oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia  $B$ , pod warunkiem, że pojawiło się  $A$ .

Postulaty II i IV odpowiadają twierdzeniom o prawdopodobieństwie całkowitem i złożonym.

Aksjomaty powyższe nasuwają następujące uwagi. Nasamprzód układ ich jest niedoskonały z formalnego punktu widzenia, gdyż postulat I jest zdaniem złożonym. Ich niezależność, jak dotąd, nie jest udowodniona. Czy, jak twierdzi Bohlmann, wystarczają one do rekonstrukcji teorii klasycznej jest rzeczą wątpliwą. W przypadku prawdopodobieństwa geometrycznego trzeba będzie, jak się zdaje, uzupełnić postulat IV. Podobnie w pewnych zagadnieniach statystyki matematycznej np. przy badaniu zachowania się grupy ludzkiej, podlegającej równocześnie śmiertelności i utracie zdolności do pracy, trafiamy na trudności, które, być może, wyprowadzą nas poza dziedzinę, określoną przez postulaty Bohlmanna. Mamy tam do czynienia z takim wiązaniem się prawdopodobieństw, którego niepodobna zilustrować przez żaden schemat urn i które zdaje się przedstawiać raczej analogję ze składaniem sił w mechanice. Spotykamy nawet u niektórych autorów porównania dynamiczne przy rozważaniu danego przedmiotu <sup>1)</sup>. Wreszcie pozostaje kwestya niesprzeczności naszych postulatów. Bohlmann jej nie porusza. Zdaje mi się, że można ich niesprzeczność sprowadzić do niesprzeczności zasad logiki i arytmetyki, przy pomocy tego uzasadnienia teorii prawdopodobieństwa, które w roku 1913 podał J. Łukasiewicz <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Küttner Rundschau der Versicherungen 26, 27, 28.

<sup>2)</sup> Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1913).

Zauważymy, że terminy: prawdopodobieństwo, zdarzenie, pewność, wyłączanie się zdarzeń, stanowią obok pojęć arytmetycznych — jedyne pojęcia pierwotne naszego układu. Dla udowodnienia niesprzeczności tego ostatniego (w sensie powyżej określonym) wystarczy znaleźć taką interpretację wymienionych pojęć pierwotnych, przy której postulaty I—IV stałyby się zdaniami prawdziwymi na mocy zasad logiki i arytmetyki. Interpretacji takiej dostarcza nam praca J. Łukasiewicza. W samej rzeczy zastąpmy w postulatach naszych:

1) termin: zdarzenie  $A$  — przez termin: funkcja zdaniowa  $a$  (to znaczy zdanie, zawierające zmienną);

2) terminy: zdarzenia  $A + B$ ,  $A \times B$  — odpowiednio przez sumę i iloczyn logiczny funkcji zdaniowych  $a$  i  $b$ .

3) termin: pewność zdarzenia  $A$ , — przez termin. prawdziwość zdania  $a$ ;

4) termin: prawdopodobieństwo  $p(A)$  przez: stosunek liczby tych wartości zmiennej, dla których funkcja  $a$  staje się sądem prawdziwym do liczby wszystkich wartości zmiennej (zakładamy, że dla wszystkich wchodzących pod rozwagę funkcji zdaniowych zakres zmiennej jest skończony);

5) termin: „wyłączanie się zdarzeń“ przez termin „wyłączanie się funkcji zdaniowych“;

6) zdanie: „pod warunkiem, że pojawiło się  $A'$  w postulacie IV — przez zdanie: „pod warunkiem, że rozważamy wartości zmiennej, dla których  $a$  staje się sądem prawdziwym.

Przy takim podstawieniu postulaty I—IV — staną się zdaniami prawdziwymi w myśl zasad logiki i arytmetyki. Tym sposobem niesprzeczność postulatów jest udowodniona.

Jasną jest rzeczą, że z wyjątkiem zdarzeń pewnych i niemożliwych żadne inne zdarzenia nie uzyskają z racji postulatów niniejszych, określonego prawdopodobieństwa.

Przechodzimy z kolei do drugiego zagadnienia, to jest do kryterjów stosowalności teorii prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo ma prócz tego znaczenia, które mu nadajemy w matematyce, jeszcze zgoła inne, które w budowie teorii czystej nie gra żadnej roli, natomiast występuje wyraźnie z chwilą, gdy się zwrócimy do rzeczywistości; możemy to znaczenie scharakteryzować, mówiąc, że prawdopodobieństwo musi być podobne do prawdy. To znaczy: jeśli chcemy zdarzeniom real-

nym przypisywać prawdopodobieństwo w taki sposób, aby z tego jakakolwiek korzyść wyciągnąć, wówczas musimy się starać o to, aby prawdopodobieństwa były mniej więcej proporcjonalne do zaobserwowanej przez nas względnej częstości pojawiania się danego zdarzenia; w szczególności zdarzenia, których teoretyczne prawdopodobieństwo jest bardzo bliskie jedności, powinny być, praktycznie biorąc, pewne. W stosunku do niektórych zjawisk da się to skutecznie i właśnie tam, gdzie zjawiska te zależą od przyczyn, których działanie w indywidualnych przypadkach nie da się bynajmniej przewidzieć. W grach losowych możemy nawet te prawdopodobieństwa określać *à priori*, posługując się definicją klasyczną i klasycznym pojęciem jednakowej możliwości. Zdawałoby się więc, że w pewnych przypadkach zasada brakującej racji posiada walor obiektywny.

W jaki sposób coś podobnego dzieć się może w świecie, którego historia jest jednoznacznie określona przez układy równań różniczkowych, oto pytanie, na które trudno byłoby dać odpowiedź zupełną. Próbował to wyjaśnić Poincaré w szeregu pięknych i głębokich rozważań, zamieszczonych w „Science et méthode“.

W większości zastosowań postępujemy inaczej: dopiero doświadczenie poucza nas, czy danym zdarzeniom możemy przypisać prawdopodobieństwa i jaką wartość liczbową nadawać mamy tym prawdopodobieństwom.

Zacniemy od statystyki matematycznej. Prawo wielkich liczb poucza nas o faktach następujących: jeżeli nad pewnym zdarzeniem o stałym prawdopodobieństwie  $p$  wykonamy  $n$  seryj po  $m$  prób każda, wówczas częstości względne z którymi pojawia się dane zjawisko w każdej z tych seryj będą się zachowywały w pewien bardzo charakterystyczny sposób, jeżeli liczby  $n$  i  $m$  są dostatecznie duże. Takie charakterystyczne zachowanie się nie jest wprawdzie pewne, ale występuje z prawdopodobieństwem tak bliskim jedności, że praktycznie biorąc, możemy się go spodziewać zawsze. Najprostszy z przewidywanych przez teorię faktów polega na tem, że wymienione częstości względne będą przy dostatecznie dużym  $m$ , mniej więcej równe  $p$ . Chcąc dokładniej scharakteryzować teoretyczne zachowanie się częstości względnych, należy wprowadzić pewne parametry, jak np. wprowadzony przez Dormoy'a i Lexis'a

spółczynnik dyspersji, którego teoretyczna wartość równa jest jedności, obserwowana zaś powinna być bliską jedności; znaczy to, że większe odchylenia od jedności są mało prawdopodobne. Jeżeli zwrócimy się teraz do dziedziny gier losowych, wówczas obserwowane częstości względne będą się istotnie zachowywały w przewidziany przez teorię sposób. Wróćmy się teraz do dziedziny statystyki, uderzy nas odrazu, że niezwiązane ze sobą zjawiska masowe występują w większych gromadach ludzkich ze stałą mniej więcej częstością względną, tem bardziej stałą, im więcej indywiduów zawiera dana grupa.

Przykładem może być stosunek nowonarodzonych dzieci płci żeńskiej do liczby nowonarodzonych wogóle. Otóż, gdyby dane zjawisko posiadało określone prawdopodobieństwo, wówczas stałości tej należałoby się z dużym prawdopodobieństwem spodziewać i obserwowane częstości względne dawałyby nam w przybliżeniu wartość tego prawdopodobieństwa. Odwrotnie z przybliżonej stałości częstości względnych wnosi się zazwyczaj o istnieniu stałego prawdopodobieństwa danego zdarzenia. Tak postępowano w okresie klasycznym, opierając się w dodatku na tak zwanej regule Bayes'a, o której pomówimy później. Jednakowoż stałość, o której mowa, to tylko jedna, najbardziej się rzucająca w oczy cecha zachowania się zdarzeń, posiadających prawdopodobieństwo matematyczne. Stanowi ona niejako najgrubsze kryterjum istnienia prawdopodobieństwa. Od czasów Lexis'a wymagamy, by były spełnione inne jeszcze kryteria, z których najbardziej używanym jest t. zw. kryterjum dyspersyjne, polegające na tem, że współczynnik dyspersyjny winien być bliski jedności. W ten sposób mamy pewną, na kryterjach opartą zasadę podziału zjawisk masowych na takie, którym można przypisać stałe prawdopodobieństwo matematyczne i takie, dla których byłoby to bezpodstawnem. Podobnie jeżeli  $x$  jest (w terminologii Gosiewskiego) zmienną ewentualną,  $x_0$  — jej wartością prawdopodobną, i jeżeli wykonamy szereg obserwacyj nad tą zmienną wówczas zaobserwowane wartości zmiennej  $x$ , powinny znowu w pewien charakterystyczny (zresztą zależny od dyspersji danej zmiennej) sposób oscylować dokoła wartości  $x_0$ . Znowu więc podać możemy kryteria, które pozwalają rozstrzygnąć, czy pewne zmienne (np. błędy obserwacyjne) można z korzyścią uważać za zmienne ewentualne i przy-

pisywać im określoną dyspersję. Z tego więc punktu widzenia, który tu przedstawiamy, niezbędnym jest doświadczalne sprawdzenie każdej hipotezy wciągającej daną dziedzinę świata realnego, w zakres teorii prawdopodobieństwa; mamy tu jakgdyby postulat sprawdzalności przez doświadczenie, któremu trzeba zadedykować uczyńić. Stojąc na tym gruncie, musimy uznać za bezpodstawną całą teorię prawdopodobieństwa a posteriori wyrowadzoną na podstawie reguły Bayes'a i stanowiącą dla klasyków pomost, umożliwiający przejście do rzeczywistości statystycznej, a to dlatego, że wyniki tej teorii nie dadzą się sprawdzić w sposób wyżej opisany. Niepodobna bowiem z natury rzeczy wytworzyć dla teorii tej odpowiedniego schematu zdarzeń masowych i porównać obserwacji, nad częstością względną tych zjawisk z przewidywaniami teorii. Aby to wykazać, zaczniemy od sformułowania zasadniczego twierdzenia wspomnianej teorii mianowicie tak zwanego prawa wielkich liczb a posteriori: oznaczmy przez  $x$  niewiadome prawdopodobieństwo zdarzenia  $a$ , które obserwowano  $m$  razy w  $s$  próbach; prawdopodobieństwo że  $x$  zawarte jest w granicach:

$$\frac{m}{s} - \lambda \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}}, \quad \frac{m}{s} + \lambda \sqrt{\frac{2m(s-m)}{s^3}}$$

wyraża się asymptotycznie przez całkę:  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda e^{-t^2} dt$

Twierdzenie to nietylko opiera się na założeniu zupełnie bezpodstawnym, że  $x$  jest zmienną ewentualną, na co zwrócili już uwagę Bertrand i Bruhns, ale co gorsza, nie da się ani sprawdzić, ani obalić doświadczalnie. Istotnie, twierdzimy, że zdarzenie, polegające na zachodzeniu nierówności:  $\lambda_1 < x < \lambda_2$  posiada prawdopodobieństwo wyrażające się przez pewną całkę określoną przy stałym  $\frac{m}{s}$ ; chcąc sprawdzić to doświadczalnie, należałoby wykonać szereg obserwacji nad zdarzeniami  $a_1, a_2, \dots, a_n$  w taki sposób, aby częstość względna każdego z tych zdarzeń miała jedną i tą wartość  $\frac{m}{s}$ ; oznaczmy przez  $x_i$  prawdopodobieństwo zdarzenia  $a_i$ ; liczby  $x_i$  muszą wówczas w prze-

widziany przez teorię sposób oscylować dookoła  $\frac{m}{s}$  o ile nasze założenie jest słuszne. Otóż takie doświadczenie wykonać się nie da, gdyż równość częstości względnych przy obserwacjach nad różnymi zjawiskami może być tylko dziełem szczęśliwego przypadku, bardzo mało prawdopodobnego. Wywołać jej planowo nie jesteśmy w stanie. Tym sposobem wobec niemożności wykonania doświadczenia sprawdzającego, pytanie o słuszności prawa wielkich liczb a posteriori musi pozostać bez odpowiedzi. Wszelkie obliczania prawdopodobieństw, oparte na tem prawie, z któremi gdzieś jeszcze spotkać się można, są na niczem nie oparte. To samo daoby się zastosować do pewnych pod względem matematycznym bardzo interesujących działów teorii błędów, tych mianowicie, w których mowa o prawdopodobnem rozmieszczeniu prawdziwej wartości niewiadomej, względem wartości obserwowanej, przyczem ta ostatnia uważana jest za aktualną, zaś wartość prawdziwa za ewentualną. Uwagi powyższe na pierwszy rzut oka mogą się wydać dziwne, na szczęście, cała teoria prawdopodobieństwa przyczyn, łącznie z prawem wielkich liczb a posteriori i z pierwszym uzasadnieniem teorii błędów coraz bardziej wychodzą z użycia; ich porzucenie nie pociąga za sobą żadnych konsekwencji dla praktyki.

---



## Komunikaty.

1. Witold Pogorzelski:

### Zagadnienie równowagi promieniowania i inwersja temperatury.

Komunikat zgłoszony d. 27 Grudnia 1917 r.

Przedstawił W. Gorczyński.

#### I. Rozważenie ogólne zagadnienia.

Niech będzie ośrodek stały lub płynny, w którym istnieje promieniowanie polichromatyczne we wszystkich możliwych kierunkach. Przypuszczamy, iż znane są prawa emisji i absorpcji ośrodka we wszystkich jego punktach i dla dowolnych przedziałów widmowych ( $\lambda, \lambda + d\lambda$ ). Zagadnienie polegać będzie na odszukaniu takiego stanu promieniowania, w którym temperatura, jak również natężenie promieniowania dla różnych  $\lambda$ , byłyby niezależne od czasu; innymi słowy, mamy zbadać stan równowagi promieniowania.

W przypadku promieniowania w ośrodku płynnym, na którego cząstki działają znane siły zewnętrzne, wypadnie jeszcze rozważyć możliwy rozkład gęstości ośrodka, aby obok równowagi promieniowania zachowana była również równowaga mechaniczna.

Znaczne trudności w rozwiązaniu zagadnienia powyższego napotykamy nie tylko w badaniu pewnych złożonych układów matematycznych, lecz również z powodu niewyznaczonych jeszcze doświadczalnie, z dostateczną ścisłością, praw, rządzących zjawiskami emisji i absorpcji poszczególnych ośrodków w różnych dziedzinach widma.

W komunikacie niniejszym zbadamy narazie przypadek szczególny równowagi promieniowania; zakładamy mianowicie, iż stan ośrodka, jak również promieniowania, nie zmienia się wzdłuż każdej z układu płaszczyzn równoległych, lecz ulega zmianie w razie przejścia z jednej płaszczyzny do drugiej; zakładamy następnie słuszność prawa Kirchhoffa w za-

stosowaniu do warstwy gazu, a zatem będziemy mieli do czynienia tylko z jedną zmienną niezależną, jeśli stan stateczny został osiągnięty.

Zbadanie tego przypadku promieniowania jest niezmiernie ważne, jeśli chodzi o wytłumaczenie pewnych zjawisk w atmosferze, mianowicie istnienia tak zwanej stratosfery i inwersji górnej temperatury, zaobserwowanej po raz pierwszy przez L. Teisserenc de Bort'a<sup>1)</sup> w r. 1902.

## II. Równania zasadnicze.

Weźmy pod uwagę płaszczyznę w danym ośrodku, wyznaczoną przez odległość  $x$  od pewnej płaszczyzny zasadniczej. Oznaczmy przez  $A(\lambda, x) \cdot d\lambda$  ilość energii, jaką w ciągu sekundy odbiera  $\text{cm}^2$  płaszczyzny od części ośrodka, leżącej po stronie dodatniej osi  $ox$ , dzięki promieniowaniu  $\lambda$ . Podobnie oznaczmy przez  $B(\lambda, x) d\lambda$ , energję przenoszoną przez promienie, idące od drugiej części ośrodka.

Oznaczmy przez  $\rho$  gęstość ośrodka; wtedy stratę energii w ciągu czasu  $dt$  w warstwie  $(x, x + dx)$  napiszemy w postaci:

$$k\rho dx \cdot A \cdot d\lambda dt,$$

względnie:

$$k\rho dx B d\lambda dt.$$

Wielkość  $k$  jest funkcją długości fali i odciętej  $x$ .

Według naszego założenia, warstwa  $(x, x + dx)$  emituje się przez  $\text{cm}^2$  w obu kierunkach drgania  $\lambda$ , przenoszące w ciągu czasu  $dt$  energję:

$$k\rho dx \cdot E_\lambda \cdot d\lambda dt,$$

gdzie  $E_\lambda$  jest natężeniem promieniowania  $\lambda$ , wysyłanego przez ciało doskonale czarne w temperaturze  $T$  danej warstwy. Według Planck'a napiszemy dla  $E_\lambda$  wyrażenie:

$$E_\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{c_2 \cdot \lambda T \cdot e^{\frac{c_3}{\lambda T}} - 1}.$$

<sup>1)</sup> „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences”. Paris, 1902.

Na zasadzie powyższego otrzymamy równanie podstawowe:

$$(1) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial x} = k\rho (A - E) \\ \frac{\partial B}{\partial x} = k\rho (E - B) \end{array} \right.$$

które stosował Schwarzschild<sup>1)</sup>, w przypadku szczególnym promieniowania jednobarwnego, do badania atmosfery słońca.

Jeśli założymy:

$$m = \int_0^x \rho dz,$$

to równania (1) możemy napisać w kształcie:

$$(1') \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial m} = k (A - E) \\ \frac{\partial B}{\partial m} = k (E - B) \end{array} \right.$$

$A$ ,  $B$ ,  $k$  są funkcjami długości fali i zmiennej  $m$ ,  $E$  zaś zależy od długości fali i od temperatury w danym punkcie ośrodka.

Aby odnaleźć warunek równowagi<sup>2)</sup>, zauważmy, iż przyrost ilości energii, pozostającej w elemencie objętości, jest proporcjonalny do:

$$k(A + B - 2E) d\lambda;$$

a zatem, rozciągając sumowanie na całą dziedzinę widma, mamy szukany warunek równowagi<sup>3)</sup>:

$$(2) \dots \dots \dots \int_0^{\infty} k(A + B - 2E) d\lambda = 0,$$

który winien być spełniany w każdym punkcie ośrodka.

<sup>1)</sup> „Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre“ (Nachr. von der Königl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, 1906).

<sup>2)</sup> Ponieważ rozumowanie nasze stosować będziemy do ośrodków gazowych, więc nie uwzględniamy wpływu przewodnictwa cieplnego.

<sup>3)</sup> R. E m d e n. „Strahlungsgleichgewicht etc.“ (Stzbr. d. Akademie zu München, 1913).

Warunek (2) można też wyrazić w odmienny sposób; z równań (1') wypływa bowiem:

$$(3) \dots k(A + B - 2E) = \frac{\partial A}{\partial m} - \frac{\partial B}{\partial m}$$

a zatem:

$$(4) \dots \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial A}{\partial m} - \frac{\partial B}{\partial m} \right) d\lambda = 0$$

lub

$$(4') \dots \int_0^{\infty} A d\lambda - \int_0^{\infty} B d\lambda = \text{const.}$$

Ponieważ  $\int_0^{\infty} A d\lambda$  jest to całkowita energia, dochodząca do

jednostki powierzchni, podobnie jak  $\int_0^{\infty} B d\lambda$ , więc równość (4')

zawiera następujący ciekawy wniosek<sup>1)</sup>: w razie osiągnięcia stanu statecznego promieniowania, różnica pomiędzy całkowitymi energiami strumieni, przechodzącymi przez ośrodek, pozostaje niezmienna we wszystkich punktach ośrodka.

W przypadku szczególnym, gdy istnieje promieniowanie fikcyjne, dla którego współczynnik  $k$  nie zależy od długości fali, znaczy:

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda} = 0$$

rozwiązanie zagadnienia (dla pewnych warunków granicznych) sprowadza się do zbadania prostego układu równań:

<sup>1)</sup> R. E m d e n. „Strahlungsgleichgewicht“ etc. (Stzbr. Akademie München, 1913).

$$(5) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_c}{dm} = k(A_c - \sigma T^4) \\ \frac{dB_c}{dm} = k(\sigma T^4 - B_c) \\ A_c + B_c - 2\sigma T^4 = 0. \end{array} \right.$$

gdyż  $\sigma T^4 = \int_0^\infty E d\lambda$  jest całkowitą emisją ciała doskonale czarnego w temperaturze  $T$ .

Układ (5) pozwoli więc odnaleźć niewiadome energie całkowite  $A_c$  i  $B_c$ , jak również i odpowiedni rozkład temperatury  $T(m)$ .

Przystąpimy teraz do przypadku ogólnego; zagadnienie polega na zbadaniu układu równań całkowo-różniczkowych (1') i (2), w którym niewiadome są funkcje dwu zmiennych  $A(\lambda, m)$  i  $B(\lambda, m)$ , charakteryzujące natężenia promieniowania i funkcja jednej zmiennej  $T(m)$ , t. j. odpowiedni rozkład temperatury, w razie osiągnięcia stanu statecznego.

Rozkład temperatury w stanie statecznym, jak również funkcje  $A$  i  $B$  mogą być określone w pewnej dziedzinie (w razie spełnienia odpowiednich warunków), jeśli znane są natężenia promieniowania:

$$A_0 = A(\lambda, 0) \quad \text{i} \quad B_0 = B(\lambda, 0)$$

w punktach płaszczyzny np.  $m = 0$ . Współczynnik  $k(\lambda, m)$  jest zgóry daną funkcją długości fali, zależną od własności fizycznych ośrodka.

Zauważmy, iż w razie znajomości funkcji  $A_0$  i  $B_0$  wyznaczyć możemy temperaturę w punktach odpowiedniej płaszczyzny  $m = 0$ . Otrzymujemy mianowicie z warunku równowagi:

$$(6) \quad \dots \quad \int_0^\infty k(\lambda, 0) \left[ A_0 + B_0 - \frac{2c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_0}} - 1} \right] d\lambda = 0,$$

stąd wyznaczyć można niewiadomą stałą  $T_0$ ; w bliższą dysku-

sję równania (6) wdawać się niepodobna, z powodu nieznanego kształtu  $k(\lambda, m)$ .

Postaramy się teraz wyrugować niewiadome  $A$  i  $B$ , by otrzymać równanie całkowe dla wyznaczenia funkcji  $T(m)$ .

Z równań (1'), uważając  $E$  jako znane, otrzymujemy po scałkowaniu (pamiętając, iż  $A(\lambda, 0) = A_0$  i  $B(\lambda, 0) = B_0$ )

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = e^{\int_0^m k \, dm} \left( A_0 - \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm \right) \\ B = e^{-\int_0^m k \, dm} \left( B_0 + \int_0^m k E e^{\int_0^m k \, dm} \, dm \right) \end{array} \right.$$

Wstawivszy te wartości do związku:

$$\int_0^\infty k (A + B - 2E) \, d\lambda = 0,$$

otrzymujemy szukane równanie całkowe:

$$(8) \quad \int_0^\infty 2k E \, d\lambda = \int_0^\infty \left[ e^{-\int_0^m k \, dm} \int_0^m k E e^{\int_0^m k \, dm} \, dm - e^{\int_0^m k \, dm} \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm + A_0 e^{-\int_0^m k \, dm} + B_0 e^{\int_0^m k \, dm} \right] k \, d\lambda;$$

przypominamy, iż:

$$E = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{c_2 \frac{\lambda T(m)}{e^{\lambda T(m)} - 1}}$$

Równanie całkowe (8) zawiera więc jedną funkcję nie-  
wiadomą  $T(m)$ .

Ponieważ  $k$  jest znaną funkcją zmiennych  $\lambda$  i  $m$ , zaś  $E$  —  
zmiennych  $\lambda$  i  $T$ , więc całka:

$$\int_0^{\infty} 2k E d\lambda$$

jest znaną funkcją zmiennych  $m$  i  $T(m)$ .

Całka po drugiej stronie równości (8) jest zaś znaną funk-  
cją zmiennej  $m$  i całki, postaci:

$$\int_0^m F [m, \mu, T(\mu)] d\mu,$$

gdzie  $F$  jest funkcją znaną; rzeczywiście, prawą stronę związ-  
ku (8) możemy napisać w ten sposób:

$$\int_0^m \int_0^{\infty} \frac{c_1 k(\lambda, m) k(\lambda, \mu) \lambda^{-5}}{c_2 \frac{\lambda T(\mu)}{e^{\lambda T(\mu)} - 1}} \left[ e^{-\int_0^m k dm} \cdot e^{-\int_0^{\mu} k dm} - e^{-\int_0^{\mu} k dm} \cdot e^{-\int_0^m k dm} \right] d\lambda \cdot d\mu + \int_0^{\infty} \left( A_0 e^{-\int_0^m k dm} + B_0 e^{-\int_0^m k dm} \right) d\lambda,$$

skąd widoczny jest kształt funkcji  $F[m, \mu, T(\mu)]$ .

Równanie całkowe (8) możemy zatem wyrazić w następu-  
jący sposób:

$$(9) \quad \varphi [m, T(m)] = \int_0^m F [m, \mu, T(\mu)] d\mu;$$

$\varphi$  i  $F$  są to funkcje znane odpowiednich argumentów.

Rozważymy przypadek, w którym  $T$  da się wyrazić z równania (9), jako funkcja wyraźna odpowiednich zmiennych <sup>1)</sup>, która dla  $m=0$  staje się równa  $T_0$ ; ostatecznie wyznaczenie rozkładu temperatury, dla danych zgóry natężeń promieniowania  $A_0(\lambda)$  i  $B_0(\lambda)$ , sprowadza się do odnalezienia funkcji niewiadomej  $T(m)$  z równania całkowego nieliniowego:

$$(10) \quad T(m) = \Phi \left\{ m, \int_0^m F[m, \mu, T(\mu)] d\mu \right\}$$

$\Phi$  — funkcja znana.

Aby dowieść istnienia funkcji, spełniającej w pewnych wypadkach równanie (10), zastosujemy metodę przybliżeń kolejnych; wypadnie więc założyć, iż funkcje  $\Phi$  i  $F$  są całkwalne i spełniają warunek Lipschitz'a w dziedzinie:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} |m| < r; \quad \left| \int_0^m F \cdot d\mu \right| < R \\ |T - T_0| < s, \end{array} \right.$$

gdzie mamy:

$$\text{kres } |\Phi| = M_1; \quad \text{kres } |F| = M_2.$$

Utwórzmy teraz zbiór funkcji:

$$(12) \quad T_0, T_1(m), T_2(m), \dots, T_v(m)$$

przy pomocy równości zwrotnej:

$$(13) \quad T_v(m) = \Phi \left\{ m, \int_0^m F[m, \mu, T_{v-1}(\mu)] d\mu \right\}$$

Przez indukcję wnioskujemy, że jeśli spełniony będzie warunek:

$$(14) \quad M_1 < s + T_0; \quad |m| < \frac{R}{M_2},$$

<sup>1)</sup> Rozwiązanie zagadnienia w przypadku ogólnym równania (9) przedstawię w jednym z następnych komunikatów.



to wszystkie elementy ciągu (12) nie przekroczą obszaru:

$$|T_\nu - T_0| < s.$$

Na zasadzie tego, stosując nierówność Lipschitz'a, możemy, dla dowolnie wielkiego  $\nu$ , napisać:

$$\left| T_\nu(m) - T_{\nu-1}(m) \right| < l_1 \left| \int_0^m F[m, \mu, T_{\nu-1}(\mu)] d\mu + \right. \\ \left. - \int_0^m F[m, \mu, T_{\nu-2}(\mu)] d\mu \right| ;$$

ponieważ zaś funkcja  $F$  spełnia warunek Lipschitz'a co do zmiennej  $T$ , więc:

$$(15) \quad |T_\nu - T_{\nu-1}| < l_1 l_2 \int_0^m |T_{\nu-1} - T_{\nu-2}| d\mu.$$

$l_1$  i  $l_2$  są to pewne stałe dodatnie, mające wartości oznaczone na obszarze (11).

Z (15) wypada nierówność zasadnicza:

$$(16) \quad |T_\nu - T_{\nu-1}| < (l_1 l_2)^{\nu-1} \underbrace{\int_0^m \int_0^m \dots \int_0^m}_{\nu-1} |T_1 - T_0| d\mu^{\nu-1}$$

to jest:

$$(16') \quad |T_\nu - T_{\nu-1}| < \frac{s |l_1 l_2 m|^{\nu-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\nu-1)}$$

a więc różnice pomiędzy kolejnymi przybliżeniami dążą do zera. Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę szereg:

$$(17) \quad T_0 + (T_1 - T_0) + (T_2 - T_1) + \dots + (T_\nu - T_{\nu-1}) + \dots$$

to na zasadzie (16') możemy powiedzieć, iż będzie on zbieżny w obszarze (14). W ten sposób dowiedliśmy, iż funkcje ciągu (12) zdążają do pewnej granicy:

$$\lim T_\nu(m),$$

gdyż suma  $\nu + 1$  wyrazów szeregu (17) jest równa  $T$ . Nie-trudno teraz wykazać, iż owa funkcja graniczna spełnia właśnie dane równanie całkowe (13).

Mamy więc możność wyznaczenia rozkładu temperatury  $T(m)$  z dowolną dokładnością, przyczem błąd popełniony określić należy, opierając się na nierówności (16').

W wyznaczaniu funkcji  $T(m)$  można również posługiwać się rozwinięciem według potęg zmiennej  $m$ .

Co do funkcji  $k(\lambda, m)$ , wypadnie nadmienić, iż ujęcie jej w pewną formę matematyczną nastęrczy znaczne trudności. Jak się jednak przekonamy potem, można tego uniknąć; jeśli bowiem wyznaczamy rozwinięcie  $T(m)$ , to zachodzi potrzeba obliczenia wartości pewnych całek oznaczonych, — wystarczy zatem znajomość znacznej liczby wartości  $k(\lambda, m)$  dla różnych  $\lambda$ , które winny dać obserwacje promieniowania danego ośrodka.

Inny sposób postępowania polegać będzie na podziale widma na szereg drobnych dziedzin, w których już łatwiej byłoby wyznaczyć wyrażenia interpolacyjne szeregu funkcji  $k_i(\lambda, m)$ , dla odpowiednich dziedzin  $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ . Podział na owe dziedziny w widmie należy dokonać, mając na uwadze pasy absorbcyjne odpowiednich gazów w ośrodku.

Warunek równowagi napisać trzeba wtedy w postaci:

$$(18) \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} k_i(\lambda, m) (A + B - 2E) d\lambda + \\ + \int_{\lambda_n}^{\infty} k_n(\lambda, m) (A + B - 2E) d\lambda = 0 .$$

Jeśli ośrodek jest stały, wtedy gęstość  $\rho$  może być zgóry daną funkcją odciętej  $x$ .

Kwestja zmieni się zasadniczo w razie badania równowagi promieniowania w ośrodku płynnym, na którego cząstki działa siła  $X$  (na jednostkę masy). Jeśli bowiem, dla danych  $A_0$  i  $B_0$ , odnajdziemy odpowiedni rozkład temperatury  $T$  w zależności od  $m$ , to dla istnienia równowagi mechanicznej trzeba będzie,

aby wytworzony gradient ciśnienia znosiła siła  $X$ ;  $\rho$  nie może więc być jakiegokolwiek, mianowicie, jeśli równanie charakterystyczne płynu jest:

$$\rho = f(p, T),$$

to trzeba, aby, dla otrzymanego z warunku równowagi rozkładu  $T(m)$ , była spełniona równość:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

to jest:

$$(19) \quad X - \frac{1}{\rho f'_p} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{f'_T}{\rho f'_p} \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Naturalnie owa równowaga mechaniczna nie we wszystkich dziedzinach będzie stała; aby wyznaczyć obszary równowagi stałej płynu, wypadłoby, opierając się na własnościach fizycznych płynu, wyznaczyć elementarną ilość ciepła:

$$dQ = \alpha dT + \beta dp$$

i porównać spadek „adiabatyyczny“ temperatury z danym; w przypadku ogólnym trudno oczywiście bliżej tę kwestję zbadać.

### III. Dane doświadczalne dotyczące promieniowania i absorpcji gazów w atmosferze.

Ponieważ mamy zamiar zastosować poprzednie rozumowanie do promieniowania w atmosferze, wypadnie więc rozpatrzyć rezultaty badań doświadczalnych nad absorpcją gazów, wchodzących w skład atmosfery.

Najbardziej zasa dniczy w atmosferze jest wpływ pary wodnej, gdyż jej najwyraźniejsze pasy absorbcyjne przypadają właśnie w tej części widma, w której przypada największa energia drgań, wysyłanych przez ciało doskonale czarne w temperaturze gruntu i warstw atmosfery, to jest, mniej więcej, w dziedzinie:

$$5\mu. < \lambda < 25\mu.$$

Odpowiednie pomiary, wykazujące szczególnie znaczną absorbcję promieniowania w okolicy  $6,5 \mu$  przez parę wodną, wy-

konął między innymi Paschen, posługując się, jako źródłem energii płytką żelazną poczernioną w 400° C.; w następującej tabliczce podane są jego rezultaty dla absorbcji energii promienistej w warstwie pary wodnej, nasyconej w temperaturze 100° C. o grubości 7 cm.:

$\lambda$ ( $\mu$ ) . . . . .	8,1	8,0	7,8	7,6	7,4	7,2	7,0	6,8	6,6
absorbcja w %	6	6	10	10	20	35	43	49	75
$\lambda$ . . . . .	6,5	6,4	6,2	6,0	5,9	5,8	5,6	5,4	5,2
absorbcja w %	82	78	31	61	68	166	54	31	12

Rubens i Aschkinass badali absorbcję promieni w dziedzinie:

$$8\mu < \lambda < 20\mu.$$

dla nas ważnej, gdyż tam przypadają drgania wysyłane przez ciało czarne w temperaturze przeciętnej gruntu. Rezultaty ich, dotyczące absorbcji warstwy pary wodnej nasyconej (temperatura 100° C.) grubości 75 cm., są następujące:

$\lambda$	absorbcja w %	$\lambda$	absorbcja w %
8 — 12	5	15 — 16	50
12 — 13	15	16 — 17	75
13 — 14	20	17 — 19	85
14 — 15	40	19 — 20	98

widoczny jest tu zasadniczy pas absorbcyjny w okolicy 20  $\mu$ .

Pasy absorbcyjne w dziedzinie  $\lambda < 5 \mu$  zbadał Langley<sup>1)</sup>. One to właśnie powodują zasadniczą stratę promieniowania słońca, którego największe natężenie drgań przypada w dziedzinie fal krótszych; strata energii drgań krótkofalowych w atmosferze jest już drogą obserwacji może nieco lepiej zbadana<sup>2)</sup>.

Absorbcja innych gazów, jak np. CO<sub>2</sub>, jest mniej znacząca dla promieniowań, istniejących w atmosferze. Dla dwutlenku węgla powyżsi badacze wykazali istnienie pasów absorbcyjnych w dziedzinach; 2,4  $\mu$ —3,0  $\mu$ ; 4,2  $\mu$ —4,5  $\mu$ ; 12,5  $\mu$ —16  $\mu$ .

<sup>1)</sup> Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution (1900).

<sup>2)</sup> Angström. Méthode nouvelle pour l'étude de la radiation solaire. Upsala.

Badanie promieniowania w atmosferze wymagać będzie znajomości funkcji  $k(\lambda, m)$ . Wartości tej funkcji należy wyznaczać metodą obserwacyjną, nie zaś metodami laboratoryjnymi, gdyż w tych ostatnich zjawisko absorpcji przedstawia się odmiennie.

Ponieważ absorpcję promieni długofalowych przypisujemy głównie parze wodnej, założymy więc, iż  $k$  jest proporcjonalne do wilgotności powietrza; pozwoli to wyznaczyć zależność funkcji  $k$  od  $m$ .

Idąc za przykładem E m d e n'a, zauważmy, iż gęstość powietrza maleje przeciętnie według wzoru:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h(m)}{8000}}$$

zaś ciśnienie pary wodnej:

$$f = f_0 e^{-\frac{h}{2606}}$$

a więc ciśnienie pary wodnej zmienia się proporcjonalnie w przybliżeniu do 3-ej potęgi wielkości  $e^{-\frac{h}{8000}}$ ; jeśli jednak obierzmy wartości tak, aby dla  $h = \infty$  było  $m = 1$ , to wtedy wypada:

$$m = 1 - e^{-\frac{h}{8000}}$$

znaczy:

$$f = f_0 (1 - m)^3.$$

Wobec tego mamy wzór przybliżony:

$$(20) \dots \dots k(\lambda, m) = v(\lambda) (1 - m)^3.$$

Aby wyznaczyć zależność współczynnika  $k$  od długości fali, wypadłoby wykonać pomiary natężeń promieniowania w różnych dziedzinach widma wysyłanego przez atmosferę.

Obierzmy mianowicie za płaszczyznę początkową  $m = 0$  granicę atmosfery (na powierzchni ziemi będzie wtedy  $m = 1$ ). Niech  $l$  oznacza energję, jaką w ciągu sekundy przenosi przez  $cm^2$  płaszczyzny  $m$  promieniowanie  $\lambda$ , wysyłane przez warstwy atmosfery, leżące powyżej płaszczyzny  $m$ ; wtedy:

$$(21) \quad I_{\lambda} = e^{-\int_0^m k \, dm} \left( I_0 + \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm \right),$$

a zatem, według (20):

$$I_{\lambda} = e^{-\nu(\lambda) \frac{m^4}{4}} \left[ I_0 + \int_0^m \nu(\lambda) m^3 E e^{-\nu(\lambda) \frac{m^4}{4}} \, dm \right].$$

Jeśli więc znany jest rozkład ciśnienia i temperatury, a więc i funkcja  $T(m)$ , to obserwacje natężenia promieniowania atmosfery pozwolą odnaleźć wartości  $\nu(\lambda)$  w różnych dziedzinach widma.

Wzór (21) należy stosować do fal  $\lambda > 5 \mu$ , gdyż, jak wykazują badania spektrolometryczne i wyrażenie Planck'a, natężenie promieniowania drgań mniejszych (mniej więcej) od  $5 \mu$ , wysyłanych przez ciało w niskich temperaturach, jest znikomo małe. Gdy więc rozumowanie odnosi się do promieniowań krótkofalowych słońca, których energia już dla  $\lambda = 2 \mu$  jest drobna w porównaniu z  $Max e_{\nu}$ , to będzie wprost:

$$I = e^{-\int_0^m k \, dm} \cdot I_0,$$

gdzie  $I_0$  — rozkład energii widma słonecznego na granicy atmosfery.

Zaznaczmy, że gdy badania odnoszą się do promieni  $\lambda > 6 \mu$ , to energia pochodzi tu jedynie od emisji atmosfery, gdyż, jak już wspomiano, natężenia drgań widma słonecznego będą w tej części znikome; wobec tego w dziedzinie  $\lambda > 6 \mu$  na granicy atmosfery będzie  $I_0 = 0$ , zatem:

$$I_{\lambda} = e^{-\int_0^m k \, dm} \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm.$$

Stosownie do poczynionej hipotezy co do zmiany  $k$  z wysokością, można zatem, badając natężenie promieniowania atmosfery I na powierzchni ziemi ( $m = 1$ ), wyznaczyć szereg wartości funkcji  $\nu(\lambda)$ . Badania takie, dla oddzielnych części widma atmosfery, nie zostały jednakże jeszcze przeprowadzone. Dość liczne natomiast były dokonywane pomiary całkowitego promieniowania atmosfery dla różnych wysokości i w różnych porach roku.

Szczegółowe dane, odnoszące się do strony eksperymentalnej tego przedmiotu, podaje Angström w pracy: „A study of the radiation of the atmosphere”<sup>1)</sup>. Z obserwacji wynika, iż całkowita energia promieniowania, jaką w ciągu jednostki czasu odbiera  $cm^2$  powierzchni ziemi od atmosfery wyraża się w zależności od wilgotności powietrza  $f_0^{mm}$  Hg następującym wzorem przybliżonym:

$$I_{atm} = \left( 0,453 - 0,134 \cdot e^{-0,10 f_0} \right) \frac{\text{kal. gr.}}{\text{cm.}^2 \text{ min.}}$$

Wobec tego, iż nie możemy wyznaczyć dla poszczególnych  $\lambda$ , postaramy się odnaleźć przeciętną wartość  $\bar{\nu}_a$  dla fal wysyłanych przez atmosferę, znaczy w dziedzinie:

$$6 \mu < \lambda < 25 \mu;$$

należy tu oprzeć się więc na obserwacjach całkowitego promieniowania atmosfery. Ów średni współczynnik  $\bar{\nu}_a$ , na zasadzie (22) wyznacza równanie całkowe:

$$I_{atm} = e^{-\frac{\bar{\nu}_a}{4}} \int_0^1 m^3 \sigma T^4 e^{\frac{\bar{\nu}_a m^4}{4}} dm,$$

skąd drogą przybliżeń otrzymujemy dla strefy umiarkowanej wartości krańcowe:

<sup>1)</sup> Smithsonian Miscellaneous Collections (vol. 65, n. 3). Washington, 1915.

$$(23) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_a = 9 \\ \bar{\nu}_a = 5 \end{array} \right.$$

$\bar{\nu}_a$  wzrasta z wilgotnością.

Przejdźmy teraz do absorpcji promieni słonecznych. Aby wyznaczyć przeciętną wartość funkcji  $\nu(\lambda)$  dla promieni słonecznych, t. j. w dziedzinie  $\lambda < 5 \mu$ , zastosujemy związek:

$$I_s = I_0 e^{-\int_0^1 \nu_s m^3 dm} = I_0 e^{-\frac{1}{4} \bar{\nu}_s}$$

zaznaczamy, iż jest mowa tylko o absorpcji selekcyjnej. Według licznych obserwacji K. A n g s t r ö m a, stratę energii, powodowaną istnieniem pary wodnej, można ująć wzorem:

$$0,09 \cdot f^{0,275};$$

skąd otrzymujemy wartości krańcowe:

$$(24) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_s = 0,7 \\ \bar{\nu}_s = 0,4 \end{array} \right.$$

Średni współczynnik absorpcji  $\bar{\nu}_a$  promieni, wysyłanych przez atmosferę lub przez ziemię, jest więc znacznie większy od współczynnika absorpcji  $\bar{\nu}_s$  dla promieni słonecznych — fakt ten jest zasadniczej wagi.

#### IV. Uwagi dotyczące teorii R. Emden'a.

Badanie promieniowania w atmosferze w pewnych szczególnych założeniach podjął R. E m d e n <sup>1)</sup>, co doprowadziło go do schematu dość zgodnego z rzeczywistością. W swojej pracy E m d e n wprowadza średnie współczynniki absorpcji przez parę wodną  $k_1$  i  $k_2$  dla promieni krótko- i długofalowych; otrzymuje zatem równania:

<sup>1)</sup> R. E m d e n. Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. (Sitzbr. d. mat.-phys. Klasse d. K. B. Akademie der Wissensch. zu München, 1913).



$$(25) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dm} = k_1 A_1; & \frac{dA_2}{dm} = k_2 (A_2 - E), \\ \frac{dB}{dm} = k_2 (B - E), \\ k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_2 B - 2 k_2 E = 0. \end{cases}$$

$A_1$  oznacza energję widma słonecznego,  $A_2$  — promieni atmosfery.

Z równań (25) można otrzymać następującą wartość pochodnej emisji  $E = \sigma T^4$ :

$$2 \frac{dE}{dm} = -k_2 \left( 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) A_1 < 0.$$

Lecz  $\frac{k_1}{k_2} < 1$ , zatem w założeniu Emden'a temperatura będzie zawsze malała z wysokością. Sam fakt silniejszej absorpcji promieni długofalowych dowodu inwersji nie daje.

By wytłumaczyć zjawisko inwersji, Emden przypuszcza zmienność stosunku  $\frac{k_1}{k_2}$ , mianowicie jego wzrost z wysokością i wykazuje możliwość istnienia inwersji, opierając się na wartościach asymptotycznych temperatury.

Postaramy się ująć ściśle to rozumowanie.

Przyjmując  $k_1$  i  $k_2$  jako funkcje zmiennej  $m$ , mamy z (25):

$$(26) \quad \dots \dots \dots A_1 = A_1^{(0)} e^{\int_0^m k_1 dm}$$

Wstawiając tę wartość w równanie równowagi i posługując się drugim z równań (25), otrzymujemy:

$$(27) \quad \dots \dots B = \frac{1}{2} B^{(0)} + \frac{1}{2} A_1^{(0)} \int_0^m (k_1 - k_2) e^{\int_0^m k_1 dm} dm$$

a ponieważ

$$E = \frac{1}{k_2} \frac{dB}{dm} + B,$$

więc

$$(28) \quad \dots \quad 2E = B^{(0)} + A_1^{(0)} \int_0^m (k_1 - k_2) e^{\int_0^m k_1 dm} dm + \\ - \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) A_1^{(0)} e^{\int_0^m k_1 dm}.$$

Biorąc pochodną, dojdziemy do szukanego wyrażenia, które wskazuje na spadek temperatury z wysokością:

$$(29) \quad \dots \quad \frac{2}{A_2^{(0)}} \frac{dE}{dm} = - \left[ (k_1 + k_2) \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{d}{dm} \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \right] e^{\int_0^m k dm}.$$

Z równania tego widzimy, że jeśli

$$\frac{d}{dm} \left(\frac{k_1}{k_2}\right) > 0,$$

to w pewnych warunkach możliwym jest przypadek

$$\frac{dE}{dm} = 0,$$

t. j. inwersja temperatury.

A więc Emden słusznie twierdził, że gdyby do jego założeń zasadniczych dołączyć hipotezę wzrostu stosunku  $\frac{k_1}{k_2}$  z wysokością, wtedy możnaby wytłumaczyć istnienie inwersji.

Że stosunek  $\frac{k_1}{k_2}$  ulega zmianie z wysokością — jest rzeczą niewątpliwą, gdyż zmieniają się warunki absorbcji, lecz czy możemy z pewnością twierdzić, iż on wzrasta koniecznie, tak jak tego wymaga rozumowanie E m d e n'a — obserwacje odpowiednie nie były w tym kierunku robione. Wiemy jedynie, iż z powodu malenia wilgotności, współczynniki  $k_1$  i  $k_2$  dążą do pewnych bardzo drobnych wartości.

Tam, gdzie rzeczywiście obserwujemy inwersję zasadniczą, warunki odpowiednie ulegają nieznacznym zmianom, prawdopodobnie więc drobna jest wartość pochodnej

$$\frac{d}{dm} \left( \frac{k_1}{k_2} \right).$$

Zresztą w górnych warstwach, gdzie zachodzi potrzeba uwzględnienia absorbcji i innych gazów, wprowadzenie średnich współczynników nie może doprowadzić do rezultatów wiarogodnych; należałoby tutaj prowadzić rachunki ściślejsze przy pomocy odpowiedniego równania całkowego.

Ponieważ jednak absorbcja w górnych warstwach jest niezbadana ściśle, więc trudno coś a priori powiedzieć o wzroście temperatury na podstawie absorbcji (tembardziej, że gra tu rolę pochodna współczynnika) — nie uwzględnienie drobnej nawet linji może mieć znaczny wpływ.

Co do dyfuzji to zaniebdywanie jej uważamy za niewłaściwe, gdyż wpływ jej w niższych warstwach jest równorzędny z absorbcją selekcyjną, zaś w wyższych warstwach znacznie absorbcję tę przeważa, albowiem współczynnik rozproszenia  $\delta$  (odpowiedni we wzorze na stratę  $\partial \rho dx$ ) pozostaje skończony. Nie można następnie łączyć razem, w jedno wyrażenie na stratę, absorbcję i dyfuzję, a to między innymi i z tego powodu, że dyfuzja występuje tylko w równaniach różniczkowych, nie zaś w równaniu całkowem równowagi. Należy więc zawsze izolować wpływ dyfuzji i absorbcji selekcyjnej.

## V. Inwersja górna temperatury w atmosferze. Stratosfera.

Przystąpimy teraz do badań promieniowania w atmosferze.

W rozważaniach poprzednich nad równowagą promieniowania pominęliśmy wpływ dyfuzji promieni; w obecnych jednak rozważaniach, dotyczących dziedzin rozległych ośrodka mętnego, jakim jest powietrze, zachodzi potrzeba uwzględnienia tego czynnika.

Obierzmy za płaszczyznę zasadniczą ( $m = 0$ ) — płaszczyznę przy powierzchni ziemi. Według tego co było mówione w rozdziale II-im, jeśli znane są z obserwacji natężenia przeciętne promieniowań na powierzchni ziemi  $A_0(\lambda)$  i  $B_0(\lambda)$ , t. j. promieniowanie atmosfery łącznie z promieniowaniem słońca i rozkład energii promieniowania gruntu, to mamy możliwość wyznaczenia rozkładu temperatury  $T(m)$  i natężeń  $A(\lambda, m)$ ,  $B(\lambda, m)$  odpowiednich dla stanu równowagi promieniowania.

Przyjmujemy, iż intensywność dyfuzji świetlnej jest proporcjonalna do gęstości powietrza, wtedy, oznaczając przez  $\delta$  odpowiedni współczynnik dyfuzji i pamiętając, iż światło rozproszone promieniuje w obu kierunkach od rozważanej płaszczyzny  $m$ , otrzymamy zasadnicze równania dla promieniowania:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_\lambda}{\partial m} = (k + \delta) A_\lambda - \delta \cdot B_\lambda - kE_\lambda \\ \frac{\partial B_\lambda}{\partial m} = kE_\lambda - (k + \delta) B_\lambda + \delta \cdot A_\lambda \end{array} \right.$$

Badania teoretyczne Rayleigh'a wskazują, iż  $\delta$  winno maleć szybko w razie wzrostu długości fali. Potwierdzają to obserwacje Abbot'a i Fowle'a<sup>1)</sup> nad stratami promieniowania

<sup>1)</sup> Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution. (Washington, 1907, 1908).

słońca w powietrzu suchem, które doprowadziły do następujących wartości współczynników transmisji  $p_\lambda$ :

$\lambda$	. 0 <sup>u</sup> ,50	0 <sup>u</sup> ,35	0 <sup>u</sup> ,40	0 <sup>u</sup> ,45	0 <sup>u</sup> ,50	0 <sup>u</sup> ,60	0 <sup>u</sup> ,80	1 <sup>u</sup> ,00	1 <sup>u</sup> ,60
$p_\lambda$	. 0,4	0,3	0,54	0,64	0,7	0,76	0,86	0,9	0,97

współczynnik  $\delta$  dla  $\lambda > 2\mu$ . jest więc bardzo drobny; w dziedzinie fal długich, wysyłanych przez atmosferę, których największa energia przypada w okolicy  $10\mu$ , wpływ dyfuzji może być zupełnie pominięty.

Jako przeciętną wartość współczynnika rozproszenia  $\bar{\delta}$  dla promieni słonecznych, przyjmijemy, opierając się na obserwacjach, liczbę

$$\bar{\delta} = 0,2,$$

zależy to zresztą od stanu atmosfery.

Współczynnik  $\delta$  nie zależy od  $m$ , podczas gdy  $k$ , jako dotycząca absorbcji selekcyjnej, dąży do bardzo drobnej wielkości ze wzrostem wysokości. Uwaga ta jest zasadniczej wagi.

Aby napisać warunek równowagi promieniowania, zauważmy, iż gra tu rolę tylko współczynnik  $k(\lambda, m)$  właściwy absorbcji selekcyjnej; dyfuzji świetlnej w równaniu równowagi uwzględniać nie należy, gdyż nie wchodzi ona w rozważaniu energii wewnętrznej warstwy; będziemy mieli więc:

$$(31) \dots \int_0^\infty k(\lambda, m) (A_\lambda + B_\lambda - 2E_\lambda) d\lambda = 0.$$

Łatwo się przekonać, że i teraz również będzie słuszny wniosek (4') rodz. II-go.

Zagadnienie sprowadza się zatem do wyznaczenia funkcji niewiadomych

$$A(\lambda, m); \quad B(\lambda, m); \quad T(m),$$

odpowiednio do warunków brzegowych

$$A(\lambda, 0) = A_0(\lambda); \quad B(\lambda, 0) = B_0(\lambda),$$

z układu równań całkowo różniczkowych (30) i (31).

Rugując  $A_\lambda$  i  $B_\lambda$ , otrzymamy dla wyznaczenia  $T(m)$  równanie całkowe nieliniowe.

Najpraktyczniej będzie wyrazić  $T(m)$  w postaci szeregu

$$(32) \quad \dots \quad T(m) = T_0 + T_0' m + \frac{1}{2} T_0'' m^2 + \dots$$

i odszukać wartości współczynników  $T_0$ ,  $T_0'$ ,  $T_0''$  przy pomocy układu danego i wartości brzegowych  $A_0(\lambda)$  i  $B_0(\lambda)$ . Wartość  $T_0$  otrzymamy mianowicie z równania

$$(33) \quad \dots \quad \int_0^\infty k(\lambda, 0) \left( A_0 + B_0 - \frac{2 c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_0}} - 1} \right) d\lambda = 0,$$

następny współczynnik  $T_0'$  ze związku

$$(34) \quad \dots \quad \frac{T_0'}{T_0^2} \int_0^\infty \frac{2 c_1 c_2 \lambda^{-6} d\lambda}{\left( e^{\frac{c_2}{\lambda T_0}} - 1 \right)^2} =$$

$$= \int_0^\infty k(\lambda, 0) [k(\lambda, 0) + 2 \delta_\lambda] (A_0 - B_0) d\lambda +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\partial k(\lambda, 0)}{\partial m} (A_0 + B_0 - 2 E_0) d\lambda$$

i t. d.

Dla atmosfery ziemskiej wygodniej będzie równania ułożyć nieco odmiennie. Rozpatrzmy mianowicie oddzielnie promienie słoneczne i promienie atmosfery <sup>1)</sup>; będzie więc

$$A = A_s + A_a,$$

$$B = B_s + B_a.$$

<sup>1)</sup> Różnica pomiędzy niemi jest zasadnicza, gdyż promienie słoneczne są równoległe, natomiast promienie atmosfery biegną we wszystkich kierunkach.

$A_s$  i  $B_s$  odpowiadają promieniom słonecznym bezpośrednim, odbitym lub rozproszonym, zaś  $A_a$  i  $B_a$  — promieniom wysyłanym przez atmosferę i przez grunt ( $B_s$  odpowiada zatem promieniom odbitym od powierzchni ziemi i rozproszonym ku górze, czego nie uwzględnia E m d n).

Ponieważ funkcja  $\delta(\lambda)$ , dotycząca dyfuzji, przybiera wartości niezmiernie drobne dla promieni atmosfery t. j. w dziedzinie

$$5\mu < \lambda < 25\mu,$$

rozważmy więc układ równań

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_s}{\partial m} = (k + \delta) A_s - \delta \cdot B_s \\ \frac{\partial B_s}{\partial m} = - (k + \delta) B_s + \delta \cdot A_s \end{array} \right.$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_a}{\partial m} = k A_a - k E \\ \frac{\partial B_a}{\partial m} = k E - k B_a, \\ \int_0^{\infty} k (A_s + B_s) d\lambda + \int_0^{\infty} k (A_a + B_a - 2 E) d\lambda = 0. \end{array} \right.$$

Jeśli więc znane są prawa emisji, absorpcji i dyfuzji energii promienistej w atmosferze, t. j. funkcje

$$k(\lambda, m) \quad \text{i} \quad \delta(\lambda)$$

i jeśli znane są z obserwacji na powierzchni ziemi przeciętne rozkłady energii

$$A_s^{(0)}, \quad A_a^{(0)}, \quad B_a^{(0)}, \quad B_s^{(0)},$$

znaczy rozkład energii w obserwowanym widmie słonecznym, w widmie atmosfery i widmie promieni wysyłanych przez ziemię, to można, przy pomocy równań (36) metodą rozwinięć poprzednio opisaną, wyznaczyć rozkład temperatury w atmosferze, jak również i natężeń promieniowania.

Zaznaczmy, iż na powierzchni ziemi natężenie  $B_a = B_a^{(0)}$  możnaby otrzymać, posługując się wzorem Planck'a, dla rozkładu energii w widmie, wysyłałym przez ciało doskonale czarne w temperaturze gruntu.

Jest godnym uwagi, iż rozwiązanie zagadnienia nie wymaga znajomości kształtu matematycznego funkcji

$$A_s^{(0)}, \quad A_a^{(0)}, \quad B_a^{(0)},$$

wystarczy mieć szereg wartości dla różnych  $\lambda$ , gdyż wyznaczenie współczynników

$$T_0, \quad T_0', \quad T_0'' \dots$$

sprowadza się do obliczenia wartości pewnych całek oznaczonych.

Nie wdając się w traktowanie przykładów liczbowych, co jest zresztą narazie niemożliwe z powodu braku dokładnych danych eksperymentalnych, wskażemy na istnienie tak zasadniczo ważnego zjawiska w atmosferze jakie przedstawia inwersja górna temperatury.

Zróżniczkujmy w tym celu równanie (31) względem zmiennej  $m$  i wstawmy odpowiednie wartości pochodnych  $\frac{\partial A}{\partial m}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial m}$  z równań (30); wtedy otrzymamy następujący związek między gradientem temperatury  $\frac{dT}{dm}$  i natężeniami promieniowania  $A_\lambda$  i  $B_\lambda$ , słuszny dla dowolnej wysokości nad powierzchnią gruntu:

$$(37) \quad \dots \dots \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dm} \int_0^\infty \frac{2 c_1 c_2 \lambda^{-6} d\lambda}{\left( e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^2} =$$

$$= \int_0^\infty k(\lambda, m) [k(\lambda, m) + 2 \delta_\lambda] (A_\lambda - B_\lambda) d\lambda +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\partial k}{\partial m} (A_\lambda + B_\lambda - 2 E_\lambda) d\lambda.$$



Związek ten pozwoli wyjaśnić obserwowany rozkład temperatury z wysokością; okaże się przytem, iż zasadniczym czynnikiem jest tu para wodna.

Widzimy z (37), iż rozkład temperatury zależy od różnicy całek

$$(38) \dots \int_0^{\infty} k (k + 2 \delta) A d\lambda - \int_0^{\infty} k (k + 2 \delta) B d\lambda;$$

całka pozostała

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial k}{\partial m} (A + B - 2 E) d\lambda,$$

równa jest zeru, gdyż według poprzedniego mamy wogóle

$$k = f(m) \cdot \varphi(\lambda).$$

Na powierzchni gruntu, jak przekonaliśmy się z rezultatów obserwacji,  $k$  w dziedzinie, gdzie przeważa energia widma atmosfery jest znacznie większe od współczynnika  $k$  w dziedzinie promieni krótkofalowych słońca; lecz zasadnicze  $B_\lambda$  na powierzchni gruntu przypadają w dziedzinie wielkich  $k$ , co wskazuje na przewagę składnika ujemnego

$$\int_0^{\infty} k (k + 2\delta) B_\lambda d\lambda,$$

Wpływ pary wodnej występuje tembardziej wyraźnie, iż funkcje podcałkowe są mnożone przez iloczynny

$$k_\lambda (k_\lambda + 2 \delta_\lambda).$$

W miarę tego, jak wysokość wzrasta, część krótkofalowa  $A_s$  wzrasta (lecz całkowita energia w razie równowagi nie zmienia się), zmniejsza się ilość pary wodnej i, jakśmy widzieli, funkcja  $k$  dąży do bardzo drobnej wartości, zarówno w dziedzinie promieni atmosfery, jak i promieni słonecznych; róż-

nica więc (38) maleje i, co zatem idzie, temperatura spada coraz powolniej.

Mówione było, iż funkcja  $\delta(\lambda)$  jest największa w dziedzinie fal krótkich i nie zależy od  $m$ , zatem nastąpi taka chwila, gdy iloczyn

$$k_\lambda (k_\lambda + 2 \delta_\lambda)$$

zaczną przeważać w całości, dotyczącej składnika dodatniego i odpowiedni gradient temperatury stanie się dodatni.

Warstwę graniczną, od której począwszy ten fakt będzie miał miejsce, cechuje gradient równy zeru; tutaj więc zajdzie inwersja temperatury.

Ponieważ współczynnik  $k$  dla całego widma dąży do bardzo małej wartości z wysokością, zaś współczynnik dyfuzji  $\delta$  pozostaje skończony, zatem można znaleźć zawsze dostatecznie wielkie  $m$ , by wskutek drobnej wartości  $k$ , czynniki

$$k (k + 2 \delta),$$

przeważały w składnikach dodatnich.

Ostatecznie widzimy, iż nasz wynik oparty jest na dwóch faktach:

- 1) intensywniejsza absorpcja przez parę wodną promieni długofalowych,
- 2) intensywniejsza dyfuzja promieni krótkofalowych.

Opierając się na średnich wartościach współczynników absorpcji, można otrzymać przeciętną wysokość, na jakiej nastąpi inwersja temperatury.

Zaznaczymy najpierw, że ponieważ chodzi nam o wysokość przeciętną, trzeba więc przyjąć, mając na względzie równowagę cieplną, równość energii wysyłanej przez ziemię na zewnątrz i od-

bieranej od słońca <sup>1)</sup>. W razie więc równowagi promieniowania dla każdego poziomu winno być:

$$\int_0^{\infty} A \, d\lambda = \int_0^{\infty} B \, d\lambda.$$

Przyjmując owe średnie współczynniki absorpcji, wogóle kształtu

$$(39) \dots \dots \dots \begin{cases} k_s = \bar{\nu}_s (1 - m)^\alpha \\ k_a = \bar{\nu}_a (1 - m)^\beta, \end{cases}$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  w przybliżeniu równe 3, otrzymamy z warunku równowagi

$$(40) \dots \dots \dots 2 \bar{\nu}_a (1 - m)^\beta \sigma T^4 = \\ = \bar{\nu}_a (1 - m)^\beta \int (A_a + B_a) \, d\lambda + \\ + \bar{\nu}_a (1 - m)^\alpha \int (A_s + B_s) \, d\lambda \\ \left( \sigma = 7,68 \cdot 10^{-11} \frac{\text{kal. gr.}}{\text{cm}^2 \text{ min.}} \right),$$

skąd, po zróżniczkowaniu i zastosowaniu równań zasadniczych, wypada:

$$(41) \dots \dots \dots 8 \bar{\nu}_a \sigma T^3 \frac{dT}{dm} = \\ = \bar{\nu}_s (1 - m)^\alpha [\bar{\nu}_s (1 - m)^\alpha + 2 \bar{\delta}] \int (A_s - B_s) \, d\lambda + \\ + \bar{\nu}_a^2 (1 - m)^{2\beta} \int (A_a - B_a) \, d\lambda;$$

---

<sup>1)</sup>  $\text{cm}^2$  powierzchni poziomej na granicy atmosfery odbiera oczywiście przeciętnie w ciągu minuty ilość ciepła równą 4-ej części stałej słonecznej t. j.  $0,5 \frac{\text{kal. gr.}}{\text{cm}^2 \text{ min.}}$

ale w stanie równowagi mamy

$$\int_0^{\infty} (A_s + A_a) d\lambda = \int_0^{\infty} (B_s + B_a) d\lambda,$$

skąd

$$\int_0^{\infty} (A_s - B_s) d\lambda = - \int_0^{\infty} (A_a - B_a) d\lambda,$$

a więc gradient dany jest przez równość

$$(42) \dots \dots \dots 8 \bar{v}_a \sigma T^3 \frac{dT}{dm} =$$

$$\left\{ \bar{v}_s (1 - m)^\alpha [\bar{v}_s (1 - m)^\alpha + 2 \bar{\delta}] + \right. \\ \left. - \bar{v}_a^2 (1 - m)^{2\beta} \right\} \int (A_s - B_s) d\lambda.$$

Wnioskujemy stąd natychmiast, iż inwersja temperatury będzie miała miejsce przeciętnie na wysokości, spełniającej równość:

$$(43) \dots \dots \bar{v}_s (1 - m_i)^\alpha [\bar{v}_s (1 - m_i)^\alpha + 2 \bar{\delta}] = \\ = \bar{v}_a^2 (1 - m_i)^{2\beta},$$

wypada stąd

$$1 - m_i = \sqrt[2\beta - \alpha]{\frac{2 \bar{\delta} \bar{v}_s}{\bar{v}_a^2 - \bar{v}_s^2 (1 - m_i)^{2\alpha - 2\beta}}}.$$

Można teraz otrzymać wysokość poziomu inwersji  $h_i$ ; mamy mianowicie

$$1 - m_i = e^{-\frac{h_i}{8000}},$$

zatem

$$h_i = \frac{8000}{2\beta - \alpha} \log_e \frac{\bar{v}_a^2 - \bar{v}_s^2 (1 - m_i)^{2\alpha - 2\beta}}{2 \bar{\delta} \bar{v}_s};$$

lecz, jak wiemy  $\bar{v}_s^2$  jest bardzo drobne wobec  $\bar{v}_a^2$ , więc ostatecznie wysokość poziomu inwersji (w metrach) wyrazi się tak:

$$(44) \dots \dots h_i = \frac{8000}{2\beta - \alpha} \log_e \frac{\bar{v}_a^2}{2\bar{\delta} \bar{v}_s}$$

Wysokość przeciętna poziomu inwersji jest proporcjonalna do logarytmu stosunku kwadratu przeciętnego współczynnika absorpcji przez parę wodną promieni atmosfery do podwójnego iloczynu współczynnika dyfuzji świetlnej przez przeciętny współczynnik absorpcji promieni słonecznych <sup>1)</sup>.

Z uwagi, iż w przybliżeniu

$$\alpha = \beta = \frac{8000}{2606},$$

mamy

$$(45) \dots \dots h_i = 2606 \log_e \frac{\bar{v}_a^2}{2\bar{\delta} \bar{v}_s}$$

Zastosujmy teraz dane liczbowe; w przypadku znacznej wilgotności powietrza, otrzymaliśmy dla strefy umiarkowanej

$$\bar{v}_a = 9; \quad \bar{v}_s = 0,7; \quad \bar{\delta} = 0,2$$

podstawiając te wartości do (44) mamy następującą przeciętną wysokość inwersji

$$h_i = 14,5 \text{ km.}$$

W przypadku małej wilgotności, mamy

$$\bar{v}_a = 5; \quad \bar{v}_s = 0,4; \quad \bar{\delta} = 0,2,$$

zatem wysokość inwersji

$$h_i = 12,5 \text{ km.}$$

---

<sup>1)</sup> Mówimy o współczynnikach przy powierzchni gruntu i w nieco odmiennym znaczeniu, niż zwykle, mianowicie w myśl wzoru na stratę  $v_a A_a dm$ .

Wartości te zgadzają się z przeciętnymi rezultatami obserwacji.

Widzimy więc, iż wzrost wilgotności podwyższa przeciętny poziom inwersji; wpływ ów pary wodnej na wysokość poziomu inwersji jest szczególnie widoczny we wzorze (38), gdzie współczynnik absorpcji pary wodnej  $\bar{\nu}_a$  figuruje w 2-jej potędze. Jest to też widoczne i bezpośrednio ze wzoru ogólnego (37) na gradient temperatury — tkwi tam bowiem w wyrazie podcałkowym iloczyn

$$k(k + 2\delta).$$

Rozumowanie powyższe wykazuje więc, dlaczego przeciętny poziom inwersji w lecie jest nieco wyższy, niż w zimie.

Posługując się średnimi wartościami współczynników absorpcji, możemy z układu (35) wyznaczyć przybliżony rozkład natężeń promieniowania

$$A_s, \quad A_a, \quad B_s, \quad B_a.$$

Zaznaczamy, iż teraz wartości te będą oznaczały całkowite energie odpowiednich widm, będą to więc funkcje jedynie wysokości.

Dla wyznaczenia energii widm, mamy zatem następujący układ równań różniczkowych z 5-ma niewiadomymi funkcjami:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_s}{\partial m} = [\bar{\nu}_s(1-m)^\alpha + \bar{\delta}] A_s - \bar{\delta} \cdot B_s \\ \frac{\partial B_s}{\partial m} = -[\bar{\nu}_s(1-m)^\alpha + \bar{\delta}] B_s + \bar{\delta} \cdot A_s \\ \frac{\partial A_a}{\partial m} = \bar{\nu}_s(1-m)^\beta A_a - \bar{\nu}_a(1-m)^\beta \sigma T^4 \\ \frac{\partial B_a}{\partial m} = \bar{\nu}_a(1-m)^\beta \sigma T^4 - \bar{\nu}_a(1-m)^\beta B_a; \\ 2\bar{\nu}_a(1-m)^\beta \sigma T^4 = \bar{\nu}_a(1-m)^\beta (A_a + B_a) + \\ \quad + \bar{\nu}_s(1-m)^\alpha (A_s + B_s). \end{array} \right.$$

Widzimy, iż uwzględnienie dyfuzji utrudnia zagadnienie o tyle, że prowadzi do równań różniczkowych rzędu drugiego.

Mamy oczywiście wogóle

$$A_a + A_s = B_a + B_s.$$

Dane są następnie energie widm na powierzchni ziemi <sup>1)</sup>

$$A_a^{(0)}, \quad A_s^{(0)}, \quad B_a^{(0)}, \quad B_s^{(0)},$$

winno być:

$$A_a^{(0)} + A_s^{(0)} = B_s^{(0)} + B_s^{(0)}.$$

Z dwóch pierwszych równań (39) otrzymujemy odrazu po scałkowaniu energie  $A_s$  i  $B_s$ :

$$(47) \cdot \left\{ \begin{array}{l} A_s = \frac{1}{2} \left( A_s^{(0)} + \frac{(\bar{\nu}_s + \bar{\delta}) A_s^{(0)} - \bar{\delta} B_s^{(0)}}{\sqrt{\bar{\nu}_s^2 + 2\bar{\nu}_s \bar{\delta}}} \right) e^{\int_0^m \bar{\psi}(m) dm} + \\ \quad + \frac{1}{2} \left( A_s^{(0)} - \frac{(\bar{\nu}_s + \bar{\delta}) A_s^{(0)} - \bar{\delta} B_s^{(0)}}{\sqrt{\bar{\nu}_s^2 + 2\bar{\nu}_s \bar{\delta}}} \right) e^{-\int_0^m \bar{\psi}(m) dm} \\ B_s = \frac{1}{2} \left( B_s^{(0)} - \frac{(\bar{\nu}_s + \bar{\delta}) B_s^{(0)} - \bar{\delta} A_s^{(0)}}{\sqrt{\bar{\nu}_s^2 + 2\bar{\nu}_s \bar{\delta}}} \right) e^{\int_0^m \bar{\psi}(m) dm} + \\ \quad + \frac{1}{2} \left( B_s^{(0)} + \frac{(\bar{\nu}_s + \bar{\delta}) B_s^{(0)} - \bar{\delta} A_s^{(0)}}{\sqrt{\bar{\nu}_s^2 + 2\bar{\nu}_s \bar{\delta}}} \right) e^{-\int_0^m \bar{\psi}(m) dm} \end{array} \right.$$

Dodając następnie 3-e i 4-e z równań (46) będziemy mogli wyznaczyć  $A_a + B_a$ , a stąd, ponieważ różnica

$$A_a - B_a = B_s - A_s,$$

<sup>1)</sup>  $B_s^{(0)}$  — energia widma promieni odbitych od ziemi.

jest znana, energii promieniowań długofalowych w atmosferze:

$$\begin{aligned}
 (48) \dots \dots \dots \left. \begin{array}{l} A_a \\ B_a \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} (A_a^{(0)} + B_a^{(0)}) + \\
 &\pm \frac{1}{2} \left[ B_s^{(0)} - A_s^{(0)} - \frac{\bar{\delta} (A_s^{(0)} + B_s^{(0)})}{\sqrt{\nu_s^2 + 2 \nu_s \bar{\delta}}} \right] e^{\int_0^m \psi(m) dm} + \\
 &\pm \frac{1}{2} \left[ B_s^{(0)} - A_s^{(0)} + \frac{\bar{\delta} (A_s^{(0)} + B_s^{(0)})}{\sqrt{\nu_s^2 + 2 \nu_s \bar{\delta}}} \right] e^{-\int_0^m \psi(m) dm} + \\
 &+ \frac{1}{4} \int_0^m \nu_a (1-m)^{\beta} \left[ \left( B_s^{(0)} - A_s^{(0)} - \frac{\bar{\delta} (A_s^{(0)} + B_s^{(0)})}{\sqrt{\nu_s^2 + 2 \nu_s \bar{\delta}}} \right) e^{\int_0^m \psi(m) dm} + \right. \\
 &\left. + \left( B_s^{(0)} - A_s^{(0)} + \frac{\bar{\delta} (A_s^{(0)} + B_s^{(0)})}{\sqrt{\nu_s^2 + 2 \nu_s \bar{\delta}}} \right) e^{-\int_0^m \psi(m) dm} \right] dm;
 \end{aligned}$$

oznaczono wszędzie

$$\psi(m) = \sqrt{\nu_s^2 (1-m)^{2\alpha} + 2 \nu_s \bar{\delta} (1-m)^\alpha}.$$

Drobną wartość gradientu temperatury w stratosferze wytłumaczyć można przy pomocy wzoru (31).

Mówiliśmy mianowicie, iż przeciętnie zachodzić winna równość

$$\int_0^\infty A d\lambda = \int_0^\infty B d\lambda,$$

wobec zaś tego, że w stratosferze iloczyn

$$k(k + 2\delta)$$



w różnych dziedzinach widma są znacznie mniejsze niż w troposferze, a więc różnica całek

$$\int_0^{\infty} k(k+2\delta) A d\lambda - \int_0^{\infty} k(k+2\delta) B d\lambda,$$

zatem i  $\frac{dT}{dm}$  będą bardzo drobne w stosunku do wartości w troposferze; tembardziej drobny będzie więc gradient temperatury  $\frac{dT}{dh}$ , którego wartość jest następująca:

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1 - \ln}{8000} \frac{dT}{dm}.$$

Brak silnych prądów wstępujących lub zstępujących w stratosferze tłumaczy się znaczną odległością czynnika perturbacyjnego, jakim jest powierzchnia ziemi i następnie spełnieniem warunku równowagi stałej.

Rzeczywiście, równowaga stała w stratosferze jako przybliżonej izotermji jest zapewniona, skoro wogóle wystarcza, by gradient temperatury (dla odpowiedniego spadku ciśnienia), był większy od adyabatycznego:

$$\frac{dT}{dh} > -\frac{1}{Jc_p} = -0^{\circ},00977.$$

Cechy właściwe stratosferze będą zresztą istniały również i nieco niżej poziomu inwersji, gdyż i tam gradient jest bliski zera.

Wypadnie zaznaczyć, iż zmiany okresowe insolacji w ciągu doby winny wzbudzać drobne prądy w stratosferze, jak również oscylacje poziomu inwersji dokoła położenia średniego.

Ze wzoru (37) wynika bowiem, że zbyt silna insolacja w dzień, zwiększa wartość gradientu, zatem obniża poziom inwersji; w nocy zaś, z powodu braku części krótkofalowej ( $A_s = 0$ ) poziom inwersji winien być podwyższony.

Co do przeciętnej temperatury, jaka powinna panować w dolnych warstwach stratosfery, można ją otrzymać w przybliżeniu ze związku (46), mianowicie otrzymamy, kładąc  $\alpha = \beta^1$ ,

$$2 \bar{v}_a \sigma T^4 = \bar{v}_a (A_a + B_a) + \bar{v}_s (A_s + B_s);$$

$A_a$  dla stratosfery jest niezmiernie małe, mamy następnie średnio

$$A_s = 0,47,$$

ze względu zaś na przybliżoną wartość albedo ziemi równą 0,3, otrzymujemy

$$B_s = 0,15; \quad B_a = 0,32$$

więc

$$\sigma T^4 = 0,17,$$

okazuje się stąd, iż temperatura dolnych warstw stratosfery wynosi około

$$T = 220^\circ = -53^\circ \text{C}.$$

Nadmienimy jeszcze, iż w dolnych warstwach troposfery równowaga promieniowania byłaby niestałą równowagą mechaniczną, gdyż przy powierzchni ziemi spadek temperatury okazałby się wtedy

$$\left| \frac{dT}{dh} \right|_0 = - \frac{5 \bar{v}_a A_s^{(0)}}{32 \sigma T_0^3} = - 0^{\circ}023,$$

t. j. znacznie większy od adiabaticznego.

W niższych warstwach atmosfery występuje zresztą wpływ bardziej zasadniczy powierzchni gruntu, wskutek czego powstają silne prądy konwekcyjne, niesprzyjające utwaleniu się równowagi promieniowania. Do dolnych warstw nasze badania nie stosują się więc. Uważamy zatem za rzecz niewłaściwą tłumaczenie cech troposfery przy pomocy teorii równowagi promieniowania.

<sup>1)</sup> Metodę tę stosował E m d e n, jednakże w odmienny sposób, bo odzyskując 36% energii słonecznej — co nie jest uzasadnione. Wogóle zaznaczamy, iż metoda ta nie może doprowadzić do rezultatów wiarygodnych, bo absorbcja w stratosferze nie jest zbadana i zresztą wprowadzenie średnich współczynników jest tam niewłaściwe.

Jaka panuje temperatura na wielkich wysokościach — nie możemy nic a priori powiedzieć. W każdym razie nie dąży do  $-19^{\circ}$  C, jak wynika ze schematu Emden'a, opartego na przypuszczeniu, iż ze wzrostem wysokości, (gdy zachodzi potrzeba uwzględnienia absorbcji innych gazów), stosunek przeciwnych współczynników  $\frac{k_1}{k_2}$  dąży do 1.

Gdy badania dotyczą wyższych warstw atmosfery, wtedy zachodzi potrzeba uwzględnienia absorbcji innych gazów, zaniebtywanej w troposferze z powodu wpływu przemożnego pary wodnej. Lecz w żadnym razie nie mamy prawa twierdzić, iż „barwność“ promieniowania przestaje grać rolę, czyli że temperatura dąży do  $-19^{\circ}$  C.

W stratosferze wprowadzenie dwóch średnich współczynników jest stanowczo niedopuszczalne; uwzględnienie różnic co do absorbcji w różnych dziedzinach widma winno być dokonane ze znacznie jeszcze większą precyzją, niż w troposferze.

Z warunku

$$\int_0^{\infty} k (A + B - 2 E) d\lambda = 0,$$

jest rzeczą widoczną, iż temperatura zależy wybitnie od rozkładu poszczególnych linii (również od stosunku pomiędzy bardzo drobnymi współczynnikami absorbcji), chociażby więc nawet współczynniki  $k$  były tego samego rzędu, to stąd bynajmniej nie wypływa dążność do temperatury efektywnej  $-19^{\circ}$  C.

Co do gradientu, to możemy zawsze a priori twierdzić, iż będzie on w stratosferze bardzo drobny, gdyż nie zależy on od stosunku, lecz od bezwzględnych wartości współczynników absorbcji.

Witold Pogorzelski:

## Problème d'équilibre de rayonnement et l'inversion de la température.

Communication annoncée le 27.XII. 1917.

Présentée par W. Gorczyński.

### I. Considérations générales.

Soit un milieu solide ou fluide, dans lequel existe un rayonnement polichromatique dans toutes les directions possibles. Nous supposons connus les lois concernant l'émission et l'absorption du milieu en tout point et pour les divers domaines du spectre

$$(\lambda, \lambda + d\lambda).$$

Notre problème consiste dans la recherche d'un état du rayonnement dans lequel la température, ainsi que l'intensité du rayonnement pour les divers  $\lambda$ , soient des fonctions indépendantes du temps; autrement dit il s'agit d'étudier un état d'équilibre de rayonnement.

Dans le cas du milieu fluide dont les particules sont soumises aux actions des forces extérieures, il faudra, sauf la condition d'équilibre de rayonnement, garder la condition d'équilibre mécanique.

Nous rencontrons des difficultés considérables non seulement dans la résolution du système compliqué d'équations intégral-différentielles, mais aussi à cause d'ignorance des lois rigoureuses de l'absorption et de l'émission des milieux particuliers pour les différentes longueurs d'onde.

Dans cette communication nous n'étudierons que le cas particulier du rayonnement; nous considérons notamment un milieu

dont l'état, ainsi que l'état du rayonnement, ne varie pas le long de chacune d'une famille des plans parallèles et nous supposons vraie la loi de Kirchhoff pour une couche d'air—nous n'avons donc, dans l'état stationnaire, qu'une variable indépendante.

L'étude de ce cas est très importante parce qu'elle nous donnera une preuve d'existence de certain phénomène atmosphérique, notamment l'existence de l'inversion supérieure de la température, observée pour la première fois par L. Teisserenc de Bort <sup>1)</sup> en 1902.

## II. Equations fondamentales.

Considérons dans le milieu un plan, déterminé par sa distance  $x$  d'un plan fondamental.

Désignons par

$$A(\lambda, x) \cdot d\lambda$$

la quantité de l'énergie reçue dans unité de temps par  $\text{cm}^2$  du plan de la partie du milieu située du côté des  $x$  positifs, grâce au rayonnement  $\lambda$ . De même nous désignons par

$$B(\lambda, x) \cdot d\lambda$$

la quantité de l'énergie correspondant à l'autre partie du milieu.

Soit  $\rho(x)$  la densité du milieu; la perte de rayonnement dans le temps  $dt$  dans la couche infiniment mince

$$(x, x + dx)$$

aura la forme

$$A \cdot k \rho \, dz \cdot dt \cdot d\lambda$$

respectivement

$$B \cdot k \rho \, dz \cdot dt \cdot d\lambda.$$

<sup>1)</sup> „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences“. Paris, 1902.

La grandeur  $k$  est une fonction de la longueur d'onde et de l'abscisse  $x$ .

Loi de Kirchhoff étant vraie, d'après notre supposition, la couche

$$(x, x + dx)$$

émet par le  $\text{cm}^2$  de surface dans le temps  $dt$  les vibrations  $\lambda$  dans les deux directions qui portent une quantité de l'énergie <sup>1)</sup>

$$k\rho dz \cdot E_\lambda \cdot d\lambda dt,$$

où  $E_\lambda$  désigne l'intensité du rayonnement  $\lambda$  émis par le corps parfaitement noir dans la température  $T$  de la couche considérée.

D'après Planck, nous écrivons

$$E_\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{c_2 \cdot e^{\frac{\lambda T}{\lambda T}} - 1}.$$

Les expressions précédentes nous vont conduire aux équations fondamentales suivantes

$$(1) \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial x} = k\rho (A - E) \\ \frac{\partial B}{\partial x} = k\rho (E - B) \end{array} \right.$$

qui étaient appliquées par Schwarzschild <sup>2)</sup>, dans le cas particulier du rayonnement monochromatique, pour l'étude de l'atmosphère solaire.

<sup>1)</sup> Un tel traitement de la question n'est pas suffisant au point de vue de la rigueur, mais il est très commode dans les problèmes météorologiques proposés. Dans les communications ultérieures nous essayerons de traiter la question plus généralement.

<sup>2)</sup> Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre\*... (Nachr. von der K. Ges. der Wis. zu Göttingen, 1906).

En posant

$$m = \int_0^x \rho \, dz,$$

on aura le système (1) sous la forme

$$(1') \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial m} = k(A - E) \\ \frac{\partial B}{\partial m} = k(E - B) \end{array} \right.$$

$A, B, k$  sont des fonctions de la longueur d'onde et de la variable  $m$ ,  $E_\lambda$  est une fonction explicite de la longueur d'onde et de la température  $T$ .

Pour trouver la condition d'équilibre, remarquons que l'accroissement de l'énergie d'un élément de la couche

$$(x, x + dx)$$

est proportionnel à

$$k(A + B - 2E) \, d\lambda;$$

donc, en étendant la somme sur tout le spectre, on aura la condition cherchée d'équilibre <sup>1)</sup>

$$(2) \quad \dots \quad \int_0^\infty k(A + B - 2E) \, d\lambda = 0,$$

---

<sup>1)</sup> Puisque nous allons appliquer nos raisonnements aux gaz, nous négligeons l'influence de la conductibilité.

La condition (2) peut se mettre sous une autre forme; d'après (1), on a

$$(3) \dots k(A + B - 2E) = \frac{\partial A}{\partial m} - \frac{\partial B}{\partial m}$$

donc:

$$(4) \dots \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial A}{\partial m} - \frac{\partial B}{\partial m} \right) d\lambda = 0$$

ou <sup>1)</sup>

$$(4') \dots \int_0^{\infty} A d\lambda - \int_0^{\infty} B d\lambda = \text{const.}$$

Puisque  $\int_0^{\infty} A d\lambda$  exprime la quantité totale de l'énergie que reçoit l'unité de surface, de même que  $\int_0^{\infty} B d\lambda$ , donc relation (4') nous conduit à la conclusion: dans l'état stationnaire du rayonnement, la différence des énergies totales des flux qui traversent le milieu reste constante pour tout le point <sup>1)</sup>.

Dans le cas singulier d'existence du rayonnement fictif pour lequel le coefficient  $k$  ne dépend pas de la longueur d'onde, c. à d.

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda} = 0$$

<sup>1)</sup> R. E m d e n. Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. (Stzbr. d. Ak. zu München, 1913).



la résolution de la question (pour les certaines conditions limites) consiste dans l'étude du système d'équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_t}{dm} = k(A_t - \sigma T^4) \\ \frac{dB_t}{dm} = k(\sigma T^4 - B_t) \\ A_t + B_t - 2\sigma T^4 = 0. \end{array} \right.$$

puisque

$$\sigma T^4 = \int_0^{\infty} E \, d\lambda$$

c'est l'énergie totale émise par le corps parfaitement noir à la température  $T$ .

Le système (5) nous permet de trouver les énergies totales  $A_t$  et  $B_t$ , ainsi que la distribution de la température  $T(m)$ .

Passons maintenant au cas général; le problème consiste dans la solution du système d'équations intégral-différentielles (1) et (2), dans lequel sont inconnues les fonctions de deux variables

$$A(\lambda, m); \quad B(\lambda, m)$$

qui caractérisent l'intensité du rayonnement, et la fonction d'une variable  $T(m)$ .

Nous voulons démontrer que la distribution de la température  $T(m)$  dans l'état stationnaire, ainsi que les fonctions  $A$  et  $B$ , seront déterminées dans un domaine sous certaines conditions, si l'on connaît les intensités du rayonnement

$$A_0 = A(\lambda, 0) \quad \text{et} \quad B_0 = B(\lambda, 0),$$

aux points d'un plan, par exemple  $m = 0$ .

Le coefficient  $k(\lambda, m)$  est une fonction de la longueur d'onde et de l'abscisse, donnée a priori.

Les fonctions  $A_0(\lambda)$  et  $B_0(\lambda)$  étant connues, nous pouvons déterminer la température  $T_0$  aux points du plan  $m = 0$ .

On aura notamment

$$(6) \quad \int_0^{\infty} k(\lambda, 0) \left[ A_0 + B_0 - \frac{2c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_0}} - 1} \right] d\lambda = 0,$$

cette équation nous fera connaître la constante  $T_0$ .

Pour avoir une équation intégrale qui détermine la fonction inconnue  $T(m)$ , nous allons éliminer les fonctions  $A$  et  $B$ .

Des équations (1'), remarque faite aux conditions initiales, on tire

$$(7) \quad \begin{cases} A = e^{-\int_0^m k \, dm} \left( A_0 - \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm \right) \\ B = e^{-\int_0^m k \, dm} \left( B_0 + \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm \right) \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans la relation

$$\int_0^{\infty} k(A + B - 2E) d\lambda = 0,$$

nous aurons l'équation intégrale cherchée

$$(8) \quad \int_0^{\infty} 2k E d\lambda = \int_0^{\infty} \left[ e^{-\int_0^m k \, dm} \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm - e^{-\int_0^m k \, dm} \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm + A_0 e^{-\int_0^m k \, dm} + B_0 e^{-\int_0^m k \, dm} \right] k \, d\lambda;$$

nous rappellons que

$$E = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{c_2 \frac{\lambda T(m)}{e} - 1}$$

L'équation intégrale (8) ne contient donc qu'une fonction inconnue  $T(m)$ .

Puisque  $k$  est une fonction connue des variables  $\lambda$  et  $m$ , et  $E$  — des variables  $\lambda$  et  $T$ , donc l'intégrale

$$\int_0^{\infty} 2k E d\lambda$$

est une fonction connue des variables  $m$  et  $T(m)$ .

L'intégrale qui figure de l'autre côté de l'équation (8), peut se mettre sous la forme

$$\int_0^m \int_0^{\infty} \frac{c_1 k(\lambda, m) k(\lambda, \mu) \lambda^{-5}}{c_2 \frac{\lambda T(\mu)}{e} - 1} \left[ e^{-\int_0^m k dm} \cdot e^{-\int_0^{\mu} k dm} - e^{-\int_0^m k dm} \right. \\ \left. \cdot e^{-\int_0^{\mu} k dm} \right] d\lambda \cdot d\mu + \int_0^{\infty} \left( A_0 e^{-\int_0^m k dm} + B_0 e^{-\int_0^m k dm} \right) d\lambda,$$

on voit donc qu'elle est de la forme

$$\int_0^m F[m, \mu, T(\mu)] d\mu,$$

$F$  étant une fonction connue des arguments.

L'équation intégrale (8) aura par conséquent la forme suivante:

$$(9) \quad \varphi [m, T(m)] = \int_0^m F [m, \mu, T(\mu)] d\mu ;$$

$\varphi, F$  — fonction connues,  $T$  — fonction inconnue.

Nous étudierons le cas où la fonction  $T(m)$  s'exprime explicitement <sup>1)</sup>; finalement la détermination de la distribution de la température, pour les intensités du rayonnement  $A_0(\lambda)$  et  $B_0(\lambda)$  données à priori, consiste dans la recherche de fonction inconnue  $T(m)$ , définie par une équation intégrale non linéaire

$$(10) \quad T(m) = \Phi \left\{ m, \int_0^m F [m, \mu, T(\mu)] d\mu \right\}$$

$\Phi$  — fonction connue.

Pour donner sous certaines conditions la preuve d'existence de la fonction, satisfaisant à l'équation (10), nous faisons l'usage de la méthode d'approximations successives; il faut donc supposer que les fonctions  $\Phi$  et  $F$  sont intégrables et remplissent la condition de Lipschitz dans le domaine

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} |m| < r ; \quad \left| \int_0^m F \cdot d\mu \right| < R \\ |T - T_0| < s , \end{array} \right.$$

où

$$\text{Max } |\Phi| = M_1 ; \quad \text{Max } |F| = M_2 .$$

Considérons maintenant la suite des fonctions

$$(12) \quad T_0, T_1(m), T_2(m), \dots, T_n(m)$$

<sup>1)</sup> L'étude directe de l'équation (9) sera présentée dans la communication suivante.

obtenues à l'aide de la relation de récurrence

$$(13) \quad T_\nu(m) = \Phi \left\{ m, \int_0^m F[m, \mu, T_{\nu-1}(\mu)] d\mu \right\}$$

Nous en concluons par induction que tous les éléments (12) resteront dans le domaine

$$|T_\nu - T_0| < s.$$

s'ils seront remplies les conditions

$$(14) \quad M_1 < s + T_0; \quad |m| < \frac{R}{M_2},$$

Nous avons donc droit d'appliquer l'inégalité de Lipschitz à la différence de deux éléments voisins de la suite (12) pour  $\nu$  quelconque:

$$\left| T_\nu(m) - T_{\nu-1}(m) \right| < l_1 \left| \int_0^m F[m, \mu, T_{\nu-1}(\mu)] d\mu + \int_0^m F[m, \mu, T_{\nu-2}(\mu)] d\mu \right|;$$

mais la fonction  $F$  remplit la condition de Lipschitz pour la variable  $T$ , donc

$$(15) \quad |T_\nu - T_{\nu-1}| < l_1 l_2 \int_0^m |T_{\nu-1} - T_{\nu-2}| d\mu$$

$l_1$  et  $l_2$  sont des constantes positives, définies dans le domaine (11).

L'inégalité (15) nous conduit à l'inégalité fondamentale

$$(16) \quad |T_\nu - T_{\nu-1}| < (l_1 l_2)^{\nu-1} \underbrace{\int_0^m \int_0^m \dots \int_0^m}_{\nu-1} |T_1 - T_0| d\mu^{\nu-1}$$

c. à d.

$$(16') \dots |T_v - T_{v-1}| < \frac{s |l_1 l_2 m|^{v-1}}{1.2.3\dots(v-1)}$$

donc les différences entre les approximations voisines tendent vers le zéro.

Soit maintenant la série

$$(17) T_0 + (T_1 - T_0) + (T_2 - T_1) + \dots + (T_v - T_{v-1}) + \dots$$

l'application de l'inégalité (16') nous fait apprendre que la série (17) est convergente dans le domaine (14).

Nous avons donc démontré l'existence de la fonction limite

$$\lim T_v(m),$$

puisque la somme de  $(v + 1)$  termes de la série (17) est égale à  $T_v$ .

Il est facile de montrer que cette fonction  $\lim T_v(m)$  satisfait à l'équation intégrale (13).

Nous pouvons donc déterminer la distribution de la température avec l'approximation voulue; l'erreur commise fera connaître la somme des valeurs (16').

Etant données les intensités du rayonnement  $A_0(\lambda)$  et  $B_0(\lambda)$  dans un plan, il existe, si les conditions exigées sont remplies, une distribution de la température dans le domaine, dont l'étendu dépend de la nature du milieu et de l'intensité  $A_0, B_0$ , pour laquelle l'état du rayonnement serait stationnaire.

Pour la détermination de la fonction  $T(m)$  on pourra aussi faire l'usage de la méthode de développement suivant les puissances de  $m$ .

Nous signalons que la recherche de l'expression mathématique pour la fonction  $k(\lambda, m)$  offre des difficultés pratiques. Mais nous verrons qu'il est possible d'éviter cette difficulté, puisque dans la recherche du développement de  $T(m)$

on n'a qu'à calculer des valeurs d'intégrales définies — il suffit donc la connaissance d'une série de valeurs pour  $k(\lambda, m)$ , données par l'expérience.

Dans l'autre méthode on divise le spectre en un certain nombre d'intervalles  $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ , dans lesquels la recherche des expressions d'interpolation pour la série de fonctions  $k_i(\lambda, m)$  serait plus facile; on fera cette subdivision du spectre relativement aux bandes d'absorption de divers gaz dans le milieu.

Dans ce cas la condition d'équilibre devient

$$(18) \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} k_i(\lambda, m) (A + B - 2E) d\lambda + \int_{\lambda_n}^{\infty} k_n(\lambda, m) (A + B - 2E) d\lambda = 0.$$

Si le milieu est solide, alors la densité  $\rho$  peut être une fonction de l'abscisse  $x$ , donnée a priori.

La question change considérablement dans le cas du milieu fluide. En outre de condition d'équilibre de rayonnement, doit être satisfaite la condition d'équilibre mécanique, il faut donc que le gradient de la pression soit équilibré par les forces extérieures  $X$  (par l'unité de masse) c. à d.

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Par conséquent, si l'équation caractéristique du fluide est

$$\rho = f(p, T),$$

alors la température et la densité doivent remplir la relation

$$(19) \quad \dots \quad X - \frac{1}{\rho f'_p} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{f'_T}{\rho f'_p} \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Naturellement cet équilibre mécanique ne sera partout stable; pour résoudre la question de la stabilité d'équilibre, il faudrait considérer la quantité élémentaire de chaleur

$$dQ = \alpha dT + \beta dp$$

pour le fluide donné, et comparer la chute „adiabatique“ de la température avec la chute donnée.

### III. Données expérimentales concernant l'émission et l'absorption des gaz dans l'atmosphère.

Puisque dans la suite nous appliquerons nos résultats au rayonnement dans l'atmosphère, il faut donc considérer les résultats de recherches expérimentales de l'absorption des gaz contenus dans l'atmosphère.

Le plus important c'est l'influence de la vapeur d'eau dans l'atmosphère, puisque ses bandes d'absorption considérables sont situées dans la partie du spectre où se trouvent les vibrations le plus intenses, émises par le corps parfaitement noir à la température du sol, c. à d. a peu près dans l'intervalle

$$5\mu < \lambda < 25\mu.$$

Dans la table ci-dessous se trouvent les valeurs d'absorption en % obtenues par Paschen, elles concernent l'absorption par la couche de 7 cm. de la vapeur saturée à 100° C:

$\lambda$ ( $\mu$ ) . . . . .	8,1	8,0	7,8	7,6	7,4	7,2	7,0	6,8	6,6
absorption en %	6	6	10	10	20	35	43	49	75
$\lambda$ . . . . .	6,5	6,4	6,2	6,0	5,9	5,8	5,6	5,4	5,2
absorption en %	82	78	31	61	68	66	54	31	12



Rubens et Aschkinass faisaient les recherches dans le domaine

$$8\mu < \lambda < 20\mu$$

Leurs résultats, concernant l'absorption dans la couche de 75 cm de la vapeur d'eau saturée à 100° C, sont les suivants:

$\lambda$	absorption en %	$\lambda$	absorption en %
8 — 12	5	15 — 16	50
12 — 13	15	16 — 17	75
13 — 14	20	17 — 19	85
14 — 15	40	19 — 20	98

Les bandes d'absorption dans le domaine

$$\lambda < 5\mu$$

étaient étudiées par Langley<sup>1)</sup>. Ce sont les bandes qui diminuent considérablement l'intensité du rayonnement solaire; la perte de l'énergie des vibrations à la courte longueur d'onde, c. à d. dans le domaine

$$\lambda < 5\mu,$$

dans l'atmosphère est déjà mieux étudiée par les observations<sup>2)</sup>.

L'absorption des autres gaz comme CO<sup>2</sup> est moins importante pour le rayonnement atmosphérique. Pour CO<sup>2</sup> on a indiqué les bandes d'absorption dans les domaines

$$2,4\mu - 3,0\mu; \quad 4,2\mu - 4,5\mu; \quad 12,5\mu - 16\mu.$$

<sup>1)</sup> Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution (1900),

<sup>2)</sup> Angström. Méthode nouvelle pour l'étude de la radiation solaire. Upsala.

L'étude du rayonnement atmosphérique exige la connaissance de la fonction  $k(\lambda, m)$ .

Les valeurs de cette fonction doivent être déterminées par l'observation, puisque dans les méthodes des laboratoires les phénomènes du rayonnement se présentent autrement.

Puisque l'absorption de l'énergie des rayons à grande longueurs d'onde est due principalement à la vapeur d'eau, nous supposons que  $k$  pour  $\lambda$  déterminé est proportionnel à l'humidité de l'air — ceci nous permet de trouver la dépendance rapprochée entre  $k$  et  $m$ .

Remarquons qu'on a en moyen

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h(m)}{8000}}$$

et la pression de la vapeur d'eau

$$f = f_0 e^{-\frac{h}{2606}}$$

La pression de la vapeur d'eau est donc proportionnelle à peu près au 3-me puissance de la grandeur

$$e^{-\frac{h}{8000}}$$

On pourra choisir les grandeurs de façon que pour  $h = \infty$  la masse  $m = 1$ , alors

$$m = 1 - e^{-\frac{h}{8000}}$$

et <sup>1)</sup>

$$f = f_0 (1 - m)^3.$$

on a donc approximativement

$$(20) \dots \dots k(\lambda, m) = \nu(\lambda) (1 - m)^\alpha.$$

où  $\alpha$  est voisin de 3.

---

<sup>1)</sup> Cette remarque est due à R. E m d e n.

Pour déterminer la dépendance de  $k$  de la longueur d'onde  $\lambda$ , il s'agit de faire une série d'observations sur l'intensité du rayonnement dans les différentes parties du spectre de l'atmosphère.

Prenons comme l'origine ( $m = 0$ ) un plan à la limite de l'atmosphère (à la surface de la terre il serait  $m = 1$ ).

Soit  $I_\lambda$  l'énergie transmise dans l'unité de temps par  $\text{cm}^2$  du plan  $m$  par le rayonnement  $\lambda$ , émis par les couches de l'atmosphère supérieures à  $m$ ; on a

$$(21) \quad I_\lambda = e^{-\int_0^m k \, dm} \left( I_0 + \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm \right),$$

donc, d'après (20)

$$I_\lambda = e^{-\nu(\lambda) \frac{m^4}{4}} \left[ I_0 + \int_0^m \nu(\lambda) m^3 E e^{-\nu(\lambda) \frac{m^4}{4}} \, dm \right].$$

Par conséquent si l'on connaît d'après l'observation la distribution de la pression et de la température avec l'hauteur, la connaissance de l'intensité  $I_\lambda$  pour différentes  $\lambda$  nous fera connaître la fonction  $\nu(\lambda)$  pour tout le spectre.

Il ne faut appliquer la formule (21), que pour les ondes

$$\lambda > 5 \mu,$$

puisque, d'après les recherches spectrobolométriques et la théorie de Planck, l'intensité  $E$  des vibrations de longueur d'onde plus petite que  $5 \mu$ , émises par le corps aux basses températures, est extrêmement petit; donc si le raisonnement concerne les rayons du soleil, dont l'énergie déjà pour

$$\lambda = 2 \mu$$

est petite par rapport au  $\max e_\lambda$ , on aura simplement

$$I = e^{-\int_0^m k \, dm} \cdot I_0,$$

$I_0$  — la distribution de l'énergie du spectre solaire à la limite de l'atmosphère.

Nous signalons que dans le domaine

$$\lambda > 6 \mu,$$

l'énergie est due seulement au rayonnement atmosphérique, puisque, comme nous avons mentionné, les intensités des vibrations dans ce domaine du spectre solaire seront tout à fait négligeables; donc pour

$$\lambda > 6 \mu,$$

on a à la limite de l'atmosphère  $I_0 = 0$ , par conséquent

$$I_\lambda = e^{-\int_0^m k \, dm} \int_0^m k E e^{-\int_0^m k \, dm} \, dm.$$

Conformément à l'hypothèse concernant la dépendance de  $k$  de variable  $m$ , on substitue

$$k = \nu (1 - m)^\alpha;$$

les observations des intensités  $I_\lambda$  pour différentes parties du spectre de l'atmosphère feront donc connaître, d'après la formule (22), les valeurs de la fonction  $\nu(\lambda)$  pour les divers  $\lambda$ .

Les observations qu'on a fait jusqu'aujourd'hui ne concernent que l'énergie du rayonnement total de l'atmosphère; on trouve les données se rattachant à cet objet dans le travail d'Angström: „A study of the radiation of the atmosphere“<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Smithsonian Miscellaneous Collections (Vol. 65, n. 3). Washington, 1915.

On rencontre dans ce travail une formule empirique qui exprime la relation entre le rayonnement total de l'atmosphère à la surface de la terre et l'humidité de l'air  $f_0$  mm Hg:

$$I_{\text{atm}} = \left( 0,453 - 0,134 \cdot e^{-0,10 f_0} \right) \frac{\text{cal. gr.}}{\text{cm.}^2 \text{ min.}}$$

Puisque la détermination des valeurs numériques de la fonction  $\nu(\lambda)$ , c.—à—d. de coefficient d'absorption  $k(\lambda, o)$  à la surface de la terre, est actuellement impossible, nous allons chercher de la valeur moyenne  $\bar{\nu}_a$  de la fonction  $\nu(\lambda)$  pour les rayons émis par l'atmosphère, donc dans le domaine

$$6 \mu < \lambda < 25 \mu;$$

dans ce calcul nous nous basons sur les observations du rayonnement total de l'atmosphère.

Ce coefficient moyen  $\bar{\nu}_a$  est déterminé par la relation

$$I_{\text{atm}} = e^{-\frac{\bar{\nu}_a}{4}} \int_0^1 m^3 \sigma T^4 e^{\frac{\bar{\nu}_a m^4}{4}} dm,$$

d'où, par la méthode d'approximation, nous aurons pour la zone tempérée les valeurs extrêmes

$$(23) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_a = 9 \\ \bar{\nu}_a = 5 \end{array} \right.$$

$\bar{\nu}_a$  est donc une fonction croissante de l'humidité.

Considérons maintenant l'absorption des rayons solaires, c. à d. des vibrations dans le domaine

$$\lambda < 5 \mu;$$

on a

$$I_s = I_0 e^{-\int_0^1 \frac{1}{v_s} m^3 dm} = I_0 e^{-\frac{1}{4} \bar{v}_s}$$

• nous signalons que cette formule ne concerne que l'absorption selective.

D'après les nombreuses observations de K. Angström la perte de l'énergie du rayonnement solaire due à la vapeur d'eau peut être exprimée par la formule

$$0,09 \cdot f^{0,275} ;$$

d'où nous concluons les valeurs extrêmes:

$$(24) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_s = 0,7 \\ \bar{v}_s = 0,4. \end{array} \right.$$

Le coefficient moyen de l'absorption  $\bar{v}_a$  des rayons émis par atmosphère est donc beaucoup plus grand que le coefficient moyen de l'absorption des rayons solaires. Cette remarque est d'une importance considérable.

#### IV. Remarques concernant la théorie de R. Emden.

Les études fort intéressantes du rayonnement atmosphérique de R. Emden <sup>1)</sup> ont conduit à un résultat assez concordant avec l'observation.

Dans son travail Emden considère les coefficients moyens de l'absorption  $k_1$  et  $k_2$  (due à la vapeur d'eau) pour les ondes courtes et longues; il en résulte le système

---

<sup>1)</sup> R. Emden. Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. (Sitzbr. d. mat.-phys. Klasse d. K. B. Akademie der Wissensch. zu München, 1913).

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dm} = k_1 A_1; & \frac{dA_2}{dm} = k_2 (A_2 - E), \\ \frac{dB}{dm} = k_2 (B - E), \\ k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_2 B - 2 k_2 E = 0. \end{cases}$$

$A_1$  désigne l'énergie du spectre solaire,  $A_2$  — des rayons atmosphériques.

D'après (25) nous écrivons la valeur suivante pour la dérivée de l'émission  $E = \sigma T^4$ :

$$2 \frac{dE}{dm} = -k_2 \left( 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) A_1 < 0.$$

Mais  $\frac{k_1}{k_2} < 1$ , donc la température diminuera avec la hauteur. Le fait seul de l'absorption plus intense des rayons à grandes longueurs d'onde ne fournit pas la preuve d'existence de l'inversion.

Pour expliquer le phénomène de l'inversion, Emden suppose la variation du rapport  $\frac{k_1}{k_2}$ , notamment son augmentation avec la hauteur et indique l'existence de l'inversion, en se basant sur les valeurs asymptotiques de la température.

Nous voulons indiquer ceci d'une façon précise.

Les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  étant des fonctions de la variable  $m$ , on a, d'après (25):

$$(26) \quad \dots \dots A_1 = A_1^{(0)} e^{\int_0^m k_1 dm}$$

Mettons cette valeur dans l'équation d'équilibre; remarque faite de la seconde des équations (25), nous aurons

$$(27) \quad B = \frac{1}{2} B^{(0)} + \frac{1}{2} A_1^{(0)} \int_0^m (k_1 - k_2) e^{\int_0^m k_1 dm}$$

mais

$$E = \frac{1}{k_2} \frac{dB}{dm} + B,$$

donc

$$(28) \quad 2E = B^{(0)} + A_1^{(0)} \int_0^m (k_1 - k_2) e^{\int_0^m k_1 dm} + \\ - \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) A_1^{(0)} e^{\int_0^m k_1 dm}.$$

La dérivation de (28) conduit à l'expression qui caractérise la chute de la température avec la hauteur:

$$(29) \quad \frac{2}{A_2^{(0)}} \frac{dE}{dm} = - \left[ (k_1 + k_2) \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) + \right. \\ \left. - \frac{d}{dm} \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \right] e^{\int_0^m k_1 dm}$$

Cette expression nous apprend que si l'on a

$$\frac{d}{dm} \left(\frac{k_1}{k_2}\right) > 0,$$

il peut y avoir dans certains cas

$$\frac{dE}{dm} = 0,$$

c. à d. l'inversion de la température.



Donc E m d e n avait raison en disant que l'adjonction de l'hypothèse de l'augmentation du rapport  $\frac{k_1}{k_2}$  avec la hauteur pouvait expliquer l'existence de l'inversion.

Il est bien naturel que le rapport  $\frac{k_1}{k_2}$  subisse des variations avec la hauteur. Il est probable de même qu'à la limite de la troposphère le rapport  $\frac{k_1}{k_2}$  croît, mais son tendance vers 1 ne paraît être vraie pour la stratosphère tout entière — le rayonnement dans l'oxygène et l'azote ne peut être considéré comme gris.

Il nous semble que la valeur positive de  $\frac{d}{dm} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)$  n'est une preuve du gradient positif qu'à la limite de troposphère.

Dans le chapitre suivant nous montrons que la valeur positive du gradient de la température doit être une propriété caractéristique générale de la stratosphère.

Enfin pour les couches de la stratosphère où il faut tenir compte d'autres gaz, l'introduction des coefficients moyens est exclue; les calculs nécessaires doivent être effectués d'une façon précise à l'aide de l'équation intégrale correspondante.

Quant à la diffusion, nous signalons que son influence sur les intensités du rayonnement pour les couches inférieures est du même ordre que l'absorption selective, et pour les couches supérieures est prépondérante.

En outre nous signalons qu'il faut isoler l'influence de la diffusion et de l'absorption selective, puisque la diffusion n'intervient que dans les équations différentielles.

## V. Inversion supérieure de la température dans l'atmosphère. Stratosphère.

Nous allons faire les études du rayonnement atmosphérique en tenant compte de la diffusion et des rayons réfléchis.

L'influence de la diffusion, qu'on a négligée dans les calculs antérieurs, est considérable dans le cas actuel, puisque les raisonnements concernent le milieu de la grande étendue.

Considérons pour un plan origine ( $m = 0$ ) le plan de l'altitude zéro. On sait, d'après le chapitre II, que si l'on connaît, d'après l'observation, les valeurs moyennes des intensités du rayonnement  $A_0(\lambda)$  et  $B(\lambda)$ , c. à d. le rayonnement à la surface de la terre qui vient de l'atmosphère et du soleil, et le rayonnement qui vient du sol (émis et réfléchi), on peut trouver la distribution de la température en état stationnaire. Le même résultat s'applique dans le cas où l'on tient compte de la diffusion.

Supposons que l'intensité de la diffusion de l'énergie rayonnante est proportionnelle à la densité de l'air; en désignant par  $\delta(\lambda)$ , certain coefficient de la diffusion et en remarquant que l'énergie est diffusée dans les deux directions, nous arrivons donc au système fondamental

$$(30) \quad \dots \quad \begin{cases} \frac{\partial A_\lambda}{\partial m} = (k + \delta) A_\lambda - \delta \cdot B_\lambda - kE_\lambda \\ \frac{\partial B_\lambda}{\partial m} = kE_\lambda - (k + \delta) B_\lambda + \delta \cdot A_\lambda \end{cases}$$

$\delta$  ne dépend que de  $\lambda$ .

Les recherches théoriques de Rayleigh nous apprennent que la fonction  $\delta$  diminue rapidement si la longueur d'onde croît.

Ce résultat est confirmé par les observations d'Abbot et Fowler<sup>1)</sup> sur les pertes du rayonnement solaire dans l'air sec, qui ont conduit aux valeurs suivantes des coefficients de transmission  $p_\lambda$ :

$\lambda$	. 0 <sup>μ</sup> ,30	0 <sup>μ</sup> ,35	0 <sup>μ</sup> ,40	0 <sup>μ</sup> ,45	0 <sup>μ</sup> ,50	0 <sup>μ</sup> ,60	0 <sup>μ</sup> ,80	1 <sup>μ</sup> ,00	1 <sup>μ</sup> ,60
$p_\lambda$	. 0,4	0,4	0,54	0,64	0,7	0,76	0,86	0,9	0,97

donc le coefficient  $\delta$  déjà pour  $\lambda > \mu$  est petit; dans le domaine des ondes longues, émises par l'atmosphère, dont le maximum de l'énergie est situé au voisinage de  $10 \mu$ , l'influence de la diffusion peut être tout à fait négligée.

Pour une valeur moyenne de  $\delta$  relativement aux rayons solaires, qui dépend d'ailleurs d'état de l'atmosphère, nous prenons d'après les observations, un nombre

$$\bar{\delta} = 0,2,$$

Le coefficient  $\delta$  reste toujours fini,  $k$  diminue considérablement et tend vers une quantité petite par rapport à  $\delta$ , si  $m$  augmente.

Cette remarque sera très importante dans la suite.

Pour écrire la condition d'équilibre on ne considère évidemment que le coefficient de l'absorption sélective  $k(\lambda, m)$ , puisque la diffusion n'intervient pas dans l'énergie interne de la couche,

$$(31) \quad \dots \int_0^\infty k(\lambda, m) (A_\lambda + B_\lambda - 2E_\lambda) d\lambda = 0.$$

Il est facile de voir que la relation

$$\int_0^\infty A d\lambda - \int_0^\infty B d\lambda = \text{const.}$$

est vraie de même dans le cas actuel.

<sup>1)</sup> Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution (Washington, 1907, 1908).

Le problème d'équilibre de rayonnement dans l'atmosphère consiste donc dans la détermination des fonctions inconnues

$$A(\lambda, m); \quad B(\lambda, m); \quad T(m),$$

d'après le système d'équations intégral-différentielles (25) et (26), conformément aux valeurs

$$A(\lambda, 0) = A_0(\lambda); \quad B(\lambda, 0) = B_0(\lambda),$$

à la surface de la terre.

De même que précédemment on peut éliminer  $A_\lambda$  et  $B_\lambda$  et obtenir une équation intégrale non linéaire qui définit la fonction  $T(m)$ .

Il sera plus convenable d'exprimer  $T(m)$  au moyen de la série

$$(32) \quad T(m) = T_0 + T_0' m + \frac{1}{2} T_0'' m^2 + \dots$$

et calculer successivement les coefficients numériques

$$T_0, \quad T_0', \quad T_0'' \dots$$

à l'aide du système donné et les valeurs

$$A_0(\lambda) \quad \text{et} \quad B_0(\lambda).$$

On tire la valeur  $T_0$  de l'équation:

$$(33) \quad \int_0^\infty k(\lambda, 0) \left( A_0 + B_0 - \frac{2 c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_0}} - 1} \right) d\lambda = 0,$$

le coefficient suivant  $T_0'$ , de la relation, qu'on obtient en différentiant (26):

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \frac{T_0'}{T_0^2} \int_0^\infty \frac{2 c_1 c_2 \lambda^{-6} d\lambda}{\left( e^{\frac{c_2}{\lambda T_0}} - 1 \right)^2} = \\
 & = \int_0^\infty k(\lambda, 0) [k(\lambda, 0) + 2 \delta_\lambda] (A_0 - B_0) d\lambda + \\
 & + \int_0^\infty \frac{\partial k(\lambda, 0)}{\partial m} (A_0 + B_0 - 2 E_0) d\lambda
 \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Pour l'atmosphère il serait plus commode de distinguer le spectre solaire et de l'atmosphère, nous aurons donc

$$A = A_s + A_a,$$

$$B = B_s + B_a.$$

$A_s$  et  $B_s$  correspondent aux rayons solaires directes, réfléchis ou diffusés,  $A_a$  et  $B_a$  — aux rayons émis par l'atmosphère et par le sol ( $B_s$  correspond donc aux rayons solaires réfléchis par la terre et aux rayons solaires diffusés vers le haut).

Puisque la fonction  $\delta(\lambda)$  est très petite pour les rayons atmosphériques, c. à d. dans le domaine

$$5\mu < \lambda < 25\mu,$$

nous allons former le système suivant

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial A_s}{\partial m} &= (k + \delta) A_s - \delta \cdot B_s \\ \frac{\partial B_s}{\partial m} &= -(k + \delta) B_s + \delta \cdot A_s, \end{aligned} \right.$$

$$(36) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_a}{\partial m} = k A_a - k E \\ \frac{\partial B_a}{\partial m} = k E - k B_a, \\ \int_0^\infty k (A_s + B_s) d\lambda + \int_0^\infty k (A_a + B_a - 2E) d\lambda = 0. \end{array} \right.$$

Donc si l'on connaît les lois de l'émission, de l'absorption et de la diffusion de l'énergie rayonnante dans l'atmosphère, c. à d. les fonctions

$$k(\lambda, m) \text{ et } \partial(\lambda)$$

et si l'on connaît, d'après les observations à la surface de la terre, les distributions moyennes des énergies

$$A_s^{(0)}, \quad A_a^{(0)}, \quad B_a^{(0)}, \quad B_s^{(0)},$$

c. à d. la distribution de l'énergie dans le spectre observé du soleil, dans le spectre des rayons atmosphériques et dans le spectre des rayons émis par la terre, alors on peut, à l'aide des équations (35) et par la méthode de développement décrit plus haut, déterminer la distribution de la température dans l'atmosphère ainsi que des intensités du rayonnement.

Nous signalons que l'intensité à la surface de la terre  $B_a^{(0)}$  peut être donnée par la formule connue de Planck concernant l'émission du corps noir.

Il faut remarquer que la solution de la question n'exige pas la connaissance d'une forme mathématique pour

$$A_s^{(0)}, \quad A_a^{(0)}, \quad B_a^{(0)},$$

il suffit une série de valeurs de ces fonctions pour différentes  $\lambda$ , puisque dans le calcul des coefficients

$$T_0, \quad T_0', \quad T_0'' \dots$$

on n'a besoin que des valeurs des certaines intégrales définies.

Il est impossible actuellement de traiter les exemples numériques, puisque les observations de l'énergie de différentes parties du spectre de l'atmosphère n'ont pas été faites.

Nous voulons maintenant indiquer l'existence d'un phénomène important dans l'atmosphère dit l'inversion supérieure de la température.

Décrivons pour cela l'équation (26) par rapport à  $m$  et substituons les valeurs de  $\frac{\partial A}{\partial m}$  et  $\frac{\partial B}{\partial m}$ , tirées des équations (25); nous arrivons à la relation suivante entre le gradient de la température  $\frac{dT}{dm}$  et les intensités du rayonnement  $A_\lambda$  et  $B_\lambda$ , vraie pour l'altitude arbitraire:

$$(37) \quad \dots \dots \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dm} \int_0^\infty \frac{2 c_1 c_2 \lambda^{-6} d\lambda}{\left( e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^2} =$$

$$= \int_0^\infty k(\lambda, m) [k(\lambda, m) + 2 \delta_\lambda] (A_\lambda - B_\lambda) d\lambda +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\partial k}{\partial m} (A_\lambda + B_\lambda - 2 E_\lambda) d\lambda.$$

Cette relation permet d'expliquer la distribution de la température observée; de même il se présentera nettement l'influence capitale de la vapeur d'eau sur l'altitude du niveau d'inversion.

Nous voyons que le gradient de la température dépend de la différence des intégrales

$$(38) \dots \int_0^{\infty} k (k + 2 \delta) A d\lambda - \int_0^{\infty} k (k + 2 \delta) B d\lambda;$$

l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial k}{\partial m} (A + B - 2 E) d\lambda,$$

est égale à zéro, puisque, d'après notre l'hypothèse, on a en général

$$k = f(m) \cdot \varphi(\lambda).$$

Nous avons conclu, d'après les observations, qu'à la surface du sol le coefficient  $k(\lambda, m)$  prend des valeurs beaucoup plus grandes pour la partie du spectre

$$5 \mu < \lambda < 25 \mu.$$

que pour le domaine

$$\lambda < 5 \mu;$$

mais les valeurs majorantes de  $B_\lambda$  sont situées dans le domaine de grands  $k$  ce qui indique la prépondérance du composant négatif

$$\int_0^{\infty} k (k + 2\delta) B_\lambda d\lambda,$$

par conséquent le gradient  $\frac{dT}{dm}$  pour les couches inférieures de l'atmosphère, aura des valeurs négatives.

Nous signalons que le fait de multiplication des fonctions sous-intégrales par les expressions du second degré

$$k_\lambda (k_\lambda + 2 \delta_\lambda).$$

indique bien l'influence considérable de la vapeur d'eau.



Si l'altitude croît, l'énergie du spectre solaire  $A_s$  augmente (l'énergie totale en vertu d'équilibre restant invariable), la quantité de la vapeur d'eau diminue et les valeurs de la fonction  $k$  tendent vers les quantités très petites dans le domaine des rayons solaires; la différence (38) diminue donc et, ce qui suit, la température décroît de plus en plus lentement.

Nous avons déjà mentionné que la fonction  $\delta(\lambda)$ , qui ne dépend de  $m$ , prend des valeurs les plus grandes dans le domaine des ondes courtes et pour les rayons atmosphériques devient extrêmement petite, donc si l'altitude croît il arrive le moment où aura lieu la prépondérance des produits

$$k_\lambda (k_\lambda + 2 \delta_\lambda)$$

dans l'intégrale concernant le composant positif; ceci montre l'existence du gradient positif de la température.

La couche limite est caractérisée par le gradient nul, c'est donc le niveau de l'inversion de la température.

Puisque le coefficient  $k$  pour tout le spectre tend vers les valeurs plus petites que le coefficient de la diffusion  $\delta$ , nous pouvons donc toujours trouver  $m$  telle que les facteurs

$$k (k + 2 \delta),$$

étaient plus grands pour les composants positifs.

En outre il semble que dans la stratosphère l'absorption selective des ondes courtes est plus intense, ceci montre visiblement la prépondérance des facteurs des termes positifs

$$k (k + 2 \delta)$$

et la valeur positive du gradient dans la stratosphère.

Les valeurs moyennes des coefficients de l'absorption  $\bar{\nu}_a$  et  $\bar{\nu}_s$  que nous ont fourni les observations, nous permet-

tent de trouver une valeur intéressante de l'altitude moyenne du niveau d'inversion.

Puisque il s'agit de la valeur moyenne, il faut donc, à cause d'équilibre calorifique, supposer l'égalité des énergies reçue par la terre et émise en dehors <sup>1)</sup>.

Dans le cas d'équilibre de rayonnement pour tous les niveaux il sera satisfaite l'égalité

$$\int_0^{\infty} A \, d\lambda = \int_0^{\infty} B \, d\lambda.$$

En admettant pour les coefficients moyens les expressions

$$(39) \dots \dots \dots \begin{cases} k_s = \bar{v}_s(1-m)^\alpha \\ k_a = \bar{v}_a(1-m)^\beta, \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  — voisins de 3, nous aurons, d'après la condition d'équilibre

$$(40) \dots \dots \dots 2 \bar{v}_a(1-m)^\beta \sigma T^4 =$$

$$= \bar{v}_a(1-m)^\beta \int (A_a + B_a) \, d\lambda +$$

$$+ \bar{v}_s(1-m)^\alpha \int (A_s + B_s) \, d\lambda$$

$$\left( \sigma = 7,68 \cdot 10^{-11} \frac{\text{kal. gr.}}{\text{cm}^2 \text{ min.}} \right),$$

La dérivation et la substitution des valeurs pour les dérivées conduit à la relation suivante:

---

<sup>1)</sup> cm<sup>2</sup> de la surface horizontale à la limite de l'atmosphère reçoit en moyen du soleil dans une minute une quantité de l'énergie égale évidemment à la 4-ème partie de la constante solaire c. à d. 0,5 kal. gr.

$$(41) \dots \dots \dots 8 \bar{v}_a \sigma T^3 \frac{dT}{dm} =$$

$$= \bar{v}_s (1 - m)^\alpha [\bar{v}_s (1 - m)^\alpha + 2 \bar{\delta}] \int (A_s - B_s) d\lambda +$$

$$+ \bar{v}_a^2 (1 - m)^{2\beta} \int (A_a - B_a) d\lambda;$$

Mais dans l'état d'équilibre il est

$$\int_0^\infty (A_s + A_a) d\lambda = \int_0^\infty (B_s + B_a) d\lambda,$$

d'où

$$\int_0^\infty (A_s - B_s) d\lambda = - \int_0^\infty (A_a - B_a) d\lambda,$$

donc le gradient est donné par la relation

$$(42) \dots \dots \dots 8 \bar{v}_a \sigma T^3 \frac{dT}{dm} =$$

$$\left\{ \bar{v}_s (1 - m)^\alpha [\bar{v}_s (1 - m)^\alpha + 2 \bar{\delta}] + \right.$$

$$\left. - \bar{v}_a^2 (1 - m)^{2\beta} \right\} \int (A_s - B_s) d\lambda.$$

Nous en concluons que l'inversion de la température aura lieu en moyen à l'altitude qui remplit la condition

$$(43) \dots \dots \bar{v}_s (1 - m_i)^\alpha [\bar{v}_s (1 - m_i)^\alpha + 2 \bar{\delta}] =$$

$$= \bar{v}_a^2 (1 - m_i)^{2\beta},$$

il résulte

$$1 - m_i = \sqrt[2\beta - \alpha]{\frac{2 \bar{\delta} \bar{v}_s}{\bar{v}_a^2 - \bar{v}_s^2 (1 - m_i)^{2\alpha - 2\beta}}}$$

Pour avoir l'altitude du niveau d'inversion  $h_i$  appliquons la relation

$$1 - m_i = e^{-\frac{h_i}{8000}},$$

on obtient

$$h_i = \frac{8000}{2\beta - \alpha} \log_e \frac{\bar{v}_a^2 - \bar{v}_s^2 (1 - m_i)^{2\alpha - 2\beta}}{2 \bar{\delta} \bar{v}_s};$$

mais on sait que  $\bar{v}_s^2$  est très petit par rapport à  $\bar{v}_a^2$ , donc finalement l'altitude du niveau d'inversion vient s'exprimer (en mètres) comme il suit

$$(44) \dots \dots h_i = \frac{8000}{2\beta - \alpha} \log_e \frac{\bar{v}_a^2}{2 \bar{\delta} \bar{v}_s}.$$

Nous signalons que cette valeur n'est qu'une borne supérieure de  $h_i$ , en vérité l'inversion doit avoir lieu inférieurement, puisque dans les couches supérieures commence à intervenir l'absorption d'autres gaz.

La borne supérieure du niveau d'inversion est donc proportionnelle au logarithme du rapport du carré du coefficient moyen d'absorption par la vapeur d'eau des rayons atmosphériques au double produit du coefficient moyen de la diffusion de l'énergie rayonnante par le coefficient moyen de l'absorption des rayons solaires <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Il s'agit des coefficients à la surface du sol et dans l'autre sens qu'on emploie habituellement, notamment relativement à l'expression de la perte  $\bar{v}_a A_a dm$ .

D'après la remarque qu'on a approximativement

$$\alpha = \beta = \frac{8000}{2606},$$

nous pouvons écrire

$$(45) \dots \dots \dots h_i = 2606 \log_e \frac{\bar{v}_a^2}{2 \bar{\delta} v_s}.$$

Nous allons appliquer les données numériques.

Dans le cas de la grande humidité nous avons obtenu en moyen

$$\bar{v}_a = 9; \quad \bar{v}_s = 0,7; \quad \bar{\delta} = 0,2$$

en substituant ces valeurs dans (44), nous aurons la borne supérieure de l'altitude moyenne d'un niveau d'inversion pour la zone tempérée

$$h_i = 14,5 \text{ km.}$$

Dans le cas de l'humidité moins considérable, donc en hiver, on a en moyenne

$$\bar{v}_a = 5; \quad \bar{v}_s = 0,4; \quad \bar{\delta} = 0,2,$$

par conséquent la borne supérieure (zone tempérée) est, en moyenne,

$$h_i = 12,5 \text{ km.}$$

Ces valeurs sont en accord avec les valeurs des observations.

Nous voyons donc que la diminution de l'humidité de l'air abaisse le niveau d'inversion; cette influence de la vapeur d'eau sur la hauteur d'origine de la stratosphère s'exprime d'une façon très nette dans la formule (38), où le coefficient d'absorption de la vapeur d'eau  $\bar{v}_a$  figure à la deuxième puissance.

Ceci se fait voir aussi directement dans la formule générale (37) pour le gradient de la température, puisqu'il figure là sous l'intégrale le produit

$$k (k + 2 \delta).$$

En nous servant des valeurs moyennes des coefficients d'absorption, nous pouvons, d'après le système (30), déterminer la distribution approximative des énergies

$$A_s, \quad A_a, \quad B_s, \quad B_a.$$

Nous signalons que ces valeurs désignent maintenant les énergies totales des spectres, ce seront donc des fonctions d'une variable  $m$ .

Le système qui définit les 5 fonctions inconnues est le suivant:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_s}{\partial m} = [\bar{\nu}_s (1-m)^\alpha + \bar{\delta}] A_s - \bar{\delta} \cdot B_s \\ \frac{\partial B_s}{\partial m} = -[\bar{\nu}_s (1-m)^\alpha + \bar{\delta}] B_s + \bar{\delta} \cdot A_s \\ \frac{\partial A_a}{\partial m} = \bar{\nu}_s (1-m)^\beta A_a - \bar{\nu}_a (1-m)^\beta \sigma T^4 \\ \frac{\partial B_a}{\partial m} = \bar{\nu}_a (1-m)^\beta \sigma T^4 - \bar{\nu}_a (1-m)^\beta B_a; \\ 2 \bar{\nu}_a (1-m)^\beta \sigma T^4 = \bar{\nu}_a (1-m)^\beta (A_a + B_a) + \\ \quad + \bar{\nu}_s (1-m)^\alpha (A_s + B_s). \end{array} \right.$$

On voit que la diffusion complique la question en conduisant aux équations du second ordre.

On a évidemment

$$A_a + A_s = B_a + B_s.$$

On connaît les énergies des spectre à la surface de la terre

$$A_a^{(0)}, \quad A_s^{(0)}, \quad B_a^{(0)}, \quad B_s^{(0)},$$

qui remplissent la condition

$$A_a^{(0)} + A_s^{(0)} = B_s^{(0)} + B_a^{(0)}.$$

L'intégration de deux premières des équations (39) nous fournit les fonctions  $A_s$  et  $B_s$ :

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} A_s = \frac{1}{2} \left( A_s^{(0)} + \frac{(\bar{\nu}_s + \bar{\delta}) A_s^{(0)} - \bar{\delta} B_s^{(0)}}{\sqrt{\bar{\nu}_s^2 + 2\bar{\nu}_s \bar{\delta}}} \right) e^{\int_0^m \bar{\psi}(m) dm} + \\ \quad + \frac{1}{2} \left( A_s^{(0)} - \frac{(\bar{\nu}_s + \bar{\delta}) A_s^{(0)} - \bar{\delta} B_s^{(0)}}{\sqrt{\bar{\nu}_s^2 + 2\bar{\nu}_s \bar{\delta}}} \right) e^{-\int_0^m \bar{\psi}(m) dm} \\ B_s = \frac{1}{2} \left( B_s^{(0)} - \frac{(\bar{\nu}_s + \bar{\delta}) B_s^{(0)} - \bar{\delta} A_s^{(0)}}{\sqrt{\bar{\nu}_s^2 + 2\bar{\nu}_s \bar{\delta}}} \right) e^{\int_0^m \bar{\psi}(m) dm} + \\ \quad + \frac{1}{2} \left( B_s^{(0)} + \frac{(\bar{\nu}_s + \bar{\delta}) B_s^{(0)} - \bar{\delta} A_s^{(0)}}{\sqrt{\bar{\nu}_s^2 + 2\bar{\nu}_s \bar{\delta}}} \right) e^{-\int_0^m \bar{\psi}(m) dm} \end{array} \right.$$

En ajoutant le 3-ème et 4-ème des équations (46), nous pourrons déterminer la somme

$$A_a + B_a$$

et, puisque la différence

$$A_a - B_a = B_s - A_s,$$

est connue, les énergies des rayonnements atmosphériques

$$\begin{aligned}
 (48) \dots \dots \dots \left. \begin{matrix} A_a \\ B_a \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} (A_a^{(0)} + B_a^{(0)}) + \\
 &\pm \frac{1}{2} \left[ B_s^{(0)} - A_s^{(0)} - \frac{\bar{\delta} (A_s^{(0)} + B_s^{(0)})}{\sqrt{\nu_s^2 + 2 \nu_s \bar{\delta}}} \right] e^{\int_0^m \psi(m) dm} + \\
 &\pm \frac{1}{2} \left[ B_s^{(0)} - A_s^{(0)} + \frac{\bar{\delta} (A_s^{(0)} + B_s^{(0)})}{\sqrt{\nu_s^2 + 2 \nu_s \bar{\delta}}} \right] e^{-\int_0^m \psi(m) dm} + \\
 &+ \frac{1}{4} \int_0^m \frac{1}{\nu_a} (1-m)^{\beta} \left[ \left( B_s^{(0)} - A_s^{(0)} - \frac{\bar{\delta} (A_s^{(0)} + B_s^{(0)})}{\sqrt{\nu_s^2 + 2 \nu_s \bar{\delta}}} \right) e^{\int_0^m \psi(m) dm} + \right. \\
 &\left. + \left( B_s^{(0)} - A_s^{(0)} + \frac{\bar{\delta} (A_s^{(0)} + B_s^{(0)})}{\sqrt{\nu_s^2 + 2 \nu_s \bar{\delta}}} \right) e^{-\int_0^m \psi(m) dm} \right] dm;
 \end{aligned}$$

On a désigné partout

$$\psi(m) = \sqrt{\nu_s^2 (1-m)^{2\alpha} + 2 \nu_s \bar{\delta} (1-m)^2}.$$

La dernière des équations (39) fait ensuite connaître la distribution des températures  $T(m)$ .

Reprenons la formule (34) pour le gradient de la température. Elle se compose de deux termes intégrales dont le second était égal à zéro, sous l'hypothèse

$$k = f(m) \cdot \varphi(\lambda).$$

Le premier terme, d'abord négatif, croît avec la hauteur et atteint des valeurs positives — ceci est bien sûr.

Quant à la valeur du second terme

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial k}{\partial m} (A + B - 2E) d\lambda,$$



dans la troposphère elle était prise comme zéro, sous l'hypothèse

$$k = f(m) \cdot \varphi(\lambda),$$

Pour la stratosphère nous avons de même accepté la valeur zéro sous l'hypothèse  $\frac{\partial k}{\partial m} = 0$ . Ce n'est qu'à la limite de tropo- et stratosphère que sa valeur doit être prise comme différente de zéro et d'ailleurs positive. Ce sur cette valeur positive qu'est basée la preuve d'existence d'inversion d'Emden.

L'absence des courants forts dans la stratosphère s'explique par l'éloignement de la surface du sol et par ce fait que le gradient de la température remplit la condition de la stabilité d'équilibre, puisqu'on a

$$\frac{dT}{dh} > -\frac{1}{Jc_p} = -0^{\circ},00977.$$

Nous signalons encore que les variations périodiques d'insolation, dues à la rotation de la terre, doivent produire les faibles courants dans la stratosphère, ainsi que les oscillations du niveau d'inversion autour de la position moyenne.

En effet, la formule (31) nous fait apprendre que l'insolation pendant la journée tend à augmenter le gradient  $\frac{dT}{dh}$  donc abaisser le niveau d'inversion; pendant la nuit l'absence d'insolation produit l'effet contraire.

Quant à la valeur approximative de la température qui doit régner dans les couches inférieures de la stratosphère on l'obtient à l'aide de la relation ( $\alpha = \beta$ )

$$2\bar{v}_a \sigma T^4 = \bar{v}_a (A_a + B_a) + \bar{v}_s (A_s + B_s);$$

$A_a$  dans la stratosphère est très faible, ensuite nous prenons

$$A_s = 0,47,$$

et, puisque l'albedo de la terre est approximativement 0,3, nous prenons

$$B_s = 0,15; \quad B_a = 0,32$$

donc

$$\sigma T^4 = 0,17,$$

Il résulte la température approchée des couches inférieures de la stratosphère <sup>1)</sup>

$$T = 220^\circ = -53^\circ \text{ C.}$$

Il reste à ajouter que dans les couches inférieures de la troposphère l'équilibre de rayonnement était instable, puisque alors pour la surface du sol le gradient aurait la valeur

$$\left| \frac{dT}{dh} \right|_0 = - \frac{5 \bar{\nu}_a A_s^{(0)}}{32 \sigma T_0^3} = - 0,023,$$

Mais dans les couches inférieures de la troposphère il existe une influence prépondérante du sol, par conséquent notre raisonnement d'équilibre du rayonnement ne s'applique pas là.

Il était donc injuste d'expliquer les propriétés des couches inférieures de la troposphère par la théorie d'équilibre du rayonnement.

Quelle température doit régner aux grandes hauteurs — il est impossible de dire quelque chose a priori. Mais elle ne tend pas nécessairement vers la température effective  $-19^\circ \text{ C}$ , ce qui résulte de la supposition que le rapport  $\frac{k_1}{k_2}$  tend vers 1.

Si les recherches concernent les couches supérieures de l'atmosphère, il est nécessaire de tenir compte d'absorption des autres gaz, dont l'influence a été négligée dans la troposphère à cause de la prépondérance de la vapeur d'eau. Mais nous

---

<sup>1)</sup> Nous signalons que cette méthode est très incorrecte et ne peut pas conduire aux résultats positifs.

n'avons pas le droit d'admettre que le rayonnement est gris et en conclure sur la température voisine de  $-19^{\circ}$  C.

Dans la stratosphère l'introduction des coefficients moyens d'absorption est inadmissible; ici la distinction des pouvoirs absorbants pour les divers parties du spectre doit être faite avec beaucoup plus de précision que dans la troposphère; la condition

$$\int_0^{\infty} k (A + B - 2 E) d\lambda = 0,$$

nous apprend que la température dépend de la distribution des lignes d'absorption particulières (la petitesse des coefficients n'intervient pas, mais leurs rapports); même si les coefficients  $k$  étaient du même ordre, il n'en résulterait pas la tendance vers la température effective.

Quant au gradient de la température, nous pouvons dire a priori que dans la stratosphère il sera toujours très petit, puisqu'il ne s'exprime pas par les rapports, mais par des valeurs absolues des coefficients d'absorption.

---

2. Stefan Kopeć:

## Z doświadczeń nad rozwojem ubarwienia godowego u ryb.

Komunikat zgłoszony dn. 20 Czerwca 1917 r.

Przedstawił J. T u r.

Sprawa związku pomiędzy wykształcaniem się drugorzędnych bądź trzeciorzędnych cech płciowych, a obecnością i stanem czynnościowym gruczołów rozrodczych stanowiła oddawna przedmiot usilnych dociekań. Wprawdzie liczne badania ostatnich paru dziesiątków lat zdołały rozjaśnić wiele zjawisk odnoszących się do tego zagadnienia, jednak z drugiej strony w miarę nagromadzenia się olbrzymiego materiału kazuistycznego wytworzyły się nowe trudności. Jedną z takich trudności spowodowały znane dziś ogólnie doświadczenia nad usuwaniem bądź przeszczepianiem gruczołów rozrodczych u owadów; okazało się mianowicie, że podczas gdy operacje takie pociągają u wyższych kręgowców mniej lub więcej ściśle określone, a zawsze wyraźne skutki w wykształcaniu się wtórnych cech płciowych, to u owadów powstają one bez najmniejszego wpływu na rozwój dimorficznych cech płciowych wtórnych. Powstać musiało zatem pytanie, dlaczego owady zachowują się pod tym względem tak odmiennie od ssawców, ptaków a poczęści i płazów; wyłoniła się konieczność wykonania odpowiednich doświadczeń kastracyjnych nad najniższymi kręgowcami, jakimi są ryby, a to w tym celu, ażeby się przekonać, czy wszystkie kręgowce zachowują się pod względem zależności rozwoju wtórnych cech płciowych od gruczołów rozrodczych jednakowo, czy też istnieją w obrębie tej całej grupy zwierzęcej pewne stopniowania, a więc i zjawiska przejściowe do stosunków stwierdzonych u owadów.

Chociaż badania moje nad kastracją ryb nie mogą dać wyczerpującej i ostatecznej odpowiedzi na postawione powyżej pytanie, niemniej chcę już teraz ogłosić ich wyniki, jako pierwszy przyczynek do tej kwestji. Mój materiał doświadczalny nie jest wprawdzie ani zbyt duży, ani jednolity, odnosi się bowiem do ryb chwypanych w różnym czasie wiosny, jednak z drugiej strony nie sądzę, by na drodze operacyjnej można było uzyskać w tym

zakresie w ciągu jednego roku dużo większy i bardziej jednolity materiał: sam bowiem zabieg kastracji jest u ryb zabiegiem bardzo trudnym, zabierającym eksperymentatorowi stosunkowo dużo czasu, będąc jednocześnie dla zwierząt operacją niezmiernie ciężką, powodującą rychłą śmierć kastrowanych osobników. Wobec tych okoliczności ilość ryb zoperowanych w jednym mniej więcej czasie, pochodzących przytem z jednego i tego samego połowu, nie może być nigdy duża. Z drugiej zaś strony czas połowu tych zwierząt jest rzeczą bardzo ważną, powodującą niejednorodność wyników: wiadomo jest bowiem powszechnie, jak szybko ryby nie posiadające w zimie barw godowych wybarwiają się z wiosną nieraz w ciągu paru cieplejszych dni; fizjologiczny stan ryb ulega zatem na wiosnę niezmiernie gwałtownym zmianom.

Badania nad kastracją ryb tylko wówczas będą w stanie oprzeć się na dużym materiale, gdy materiał ten będzie gromadzony stopniowo przez szereg lat. Nie wiedząc czy i kiedy będę miał sposobność powrócić do tych moich doświadczeń, podaję już dzisiaj wyniki, otrzymane w ciągu roku 1915, sądząc, że w każdym razie będą one posiadały dla dalszych badań w tym kierunku zarówno faktyczną, jak też i metodyczną wartość.

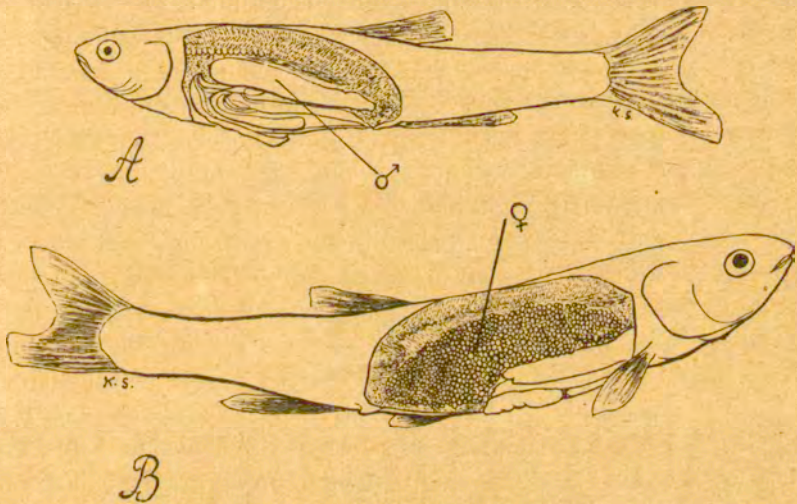
### Materiał i metoda pracy.

Chcąc wykonać kastrację ryb, ograniczyć się musiałem do jednej tylko formy pospolitych strzebli (*Phoxinus laevis* Agass.), ten bowiem tylko gatunek udało mi się zdobyć w większej ilości. Nieduże te rybki otrzymują na wiosnę wybitną barwę godową, nadają się więc do tego rodzaju doświadczeń, mimo iż nie posiadają w swem ubarwieniu cech wybitnie dimorficznych. Z wyjątkiem białego brzucha i pletw całe ich ciało posiada przez cały rok mniej lub więcej żywe ubarwienie, na które składają się czarne, zielone, żółte, częściowo i złote barwy różnych odcieni. W miarę zbliżania się pory godowej, a więc mniej więcej w połowie kwietnia strzeble poczynają w pewnych okolicach ciała zabarwiać się na czerwono; wśród mojego materiału czerwień ta występowała w następujących miejscach: na obu wargach, tuż za oczami w postaci drobnej, mniej lub więcej okrągłej plamki, dalej po bokach obu par parzystych pletw, jak również na obu tych pletwach, zwłaszcza w ich nasadowej części, wreszcie na całej po-

wierzchni brzucha, aż do pletwy ogonowej, rozpościerając się często i na znacznej części pletwy odbytowej (porównaj opisy czerwieni godowej strzebli u Heckel'a i Kner'a [1858], v. Siebold'a [1863] Knauth'ego [1891], oraz u Grof'ego, Vogt'a i Hofer'a [1909]). Szata godowa wykazuje przytem nawet bardzo duże indywidualne różnice; zwłaszcza umiejscowienie czerwieni na brzuchu bywa u poszczególnych osobników bardzo rozmaite. Zjawia się ona zarówno u samców, jak i u samic, jakkolwiek u tych ostatnich jest z reguły słabiej rozwinięta. Czerwienienie polega na tem, że w skórze rybek znajdują się w odnośnych miejscach bardzo liczne czerwone komórki barwikowe czyli t. zw. chromatofory, które w stanie skurczu (kontrakcji) są drobnymi, czerwonymi kuleczkami, w razie zaś rozkurczu (ekspansji) wskutek tworzenia się licznych, drobnych wypustek otrzymują gwiazdzistą postać; w takim stanie rozkurczu chromatofory zajmują znacznie większą powierzchnię; wywołuje to pojawianie się na ciele ryb krwistych godowych plam. W stadium skurczu komórki barwikowe są ledwie dostrzegalne, jako drobnouchne czerwone punkciki, a brzuch zwierzęcia jest całkiem biały lub też, przy częściowej ekspansji leciuchno zaróżowiony.

W takim utajonym niejako stanie istnieje barwa godowa przez całą zimę (porównaj książkę v. Siebold'a [1863], prace Kammerer'a [1907] i v. Frisch'a [1912]); wiosenne barwy godowe ukazują się jednocześnie z dojrzewaniem gruczołów rozrodczych i zbliżaniem się okresu tarła, a trwają często do późnej jesieni. Trwałość ta polega przedewszystkiem, jeśli nie wyłącznie, na długotrwałem rozkurczu odnośnych komórek barwikowych, które już w zimie istniały, nie były jednak widoczne. Czerwień godowa u strzebli występowała przytem u okazów bardzo różnej wielkości, od 3 do 9 cm. długich zarówno u samców jak i u samic; mikroskopowe badania moje wykazały ponadto, że jądra drobnych samców były histologicznie zupełnie rozwinięte (od jąder wielkich okazów różniły się tylko niewielką zawartością plemników). Zjawisko to zgadzałoby się z obserwacjami Kammerer'a (1907), który u samic okonia zauważył występowanie dojrzałości płciowej na długo przed osiągnięciem przez zwierzę ostatecznej wielkości. O zjawisku tem wspominam dlatego, że jak słusznie podnosi Kammerer obserwacje takie, dobrze znane zawodowym rybakom, są dotąd w literaturze naukowej bardzo rzadkie.

Zarówno jądro (fig. A), jak też jajniki (fig. B) strzebli są dużemi, parzystymi organami, ciągnącemi się po obu stronach pęcherza pławnego od pierwszych płetw parzystych aż do płetwy odbytowej; pojedyncze ich ujście otwiera się na zewnątrz nieco poza otworem odbytowym, tuż przed płetwą odbytową. W celu usunięcia gonad wrzucałem najpierw wybraną rybę do naczynia z świeżą wodą w objętości 150 — 250 cm<sup>3</sup>, zaprawioną paru kroplami eteru. Po paru minutach ryba ulegała całkowicie działaniu narkotyku, przestając się zupełnie poruszać. Po wyjęciu ryby



z wody przecinałem brzuszną ścianę ciała zwierzęcia za pomocą ostrego skalpela, przyczem robiłem cięcie na całej przestrzeni od 1 aż do 2 pary płetw, zawsze nieco bocznie od środkowej linii brzucha, przeważnie z prawej strony ciała (kierunek cięcia zaznaczony jest na fig. D, E i G, str. 9). Przy pewnej wprawie udawało mi się z czasem zapomocą nieco zgiętej, a tępej pincety, wprowadzonej pod trzewia przez szeroko rozwartą ranę, uchwycić i niejako wyłuszczyć nazewnątrz nie tylko cały gruczoł płciowy operowanej strony ciała, ale nawet i gruczoł leżący po przeciwnej stronie. (Pęcherz pławny bywał zwykle niemal cały wychylany nazewnątrz z ciała, a dopiero po skończonej operacji umieszczany w ciele w dawnym położeniu). Należało oczywiście baczyć na to, by podczas operacji nie uszkodzić nerek, jelita lub większych naczyń

krwionośnych, w takich razach bowiem ryby zawsze po paru godzinach ginęły. Ze względu na cel operacji było przytem rzeczą bardzo ważną, by nie zranić usuwanego gruczołu płciowego; w razie zranienia bowiem tego bardzo delikatnego organu zawartość jego z łatwością wydobywała się nazewnątrz, przedostając się do jamy ciała; wskutek tego ewentualny ujemny wynik kastracji musiałby być bezwarunkowo zakwestjonowany. Operację wykonywałem przeważnie pod lupą dwuoczną; o tem, czy kastracja przeprowadzona była całkowicie, przekonywałem się przy pomocy starannej sekcji wszystkich ryb, które operowałem.

Podczas operacji trzeba było wielokrotnie zwilżać skrzela operowanej ryby chłodną i świeżą wodą. Po usunięciu jednego lub obu gruczołów płciowych zszywałem ranę 4 — 6 szwami za pomocą zwykłego jedwabiu i ocznych chirurgicznych igieł. Z początku przedsiębrałem liczne środki ostrożności przeciwko zakażeniu drobnoustrojami; wygotowywanie jedwabiu, igieł i innych narzędzi zabierało przytem bardzo wiele czasu. Z czasem przekonałem się, że ostrożność taka nie była potrzebna: mianowicie z 281 ryb, którym w różnych celach otwierałem później jamę brzuszną bez stosowania specjalnej aseptyki (poza elementarną czystością rąk, narzędzi i t. d.) zaledwie dwie uległy zakażeniu. Po operacji wrzucałem ryby do obszernych akwarjów, zaopatrzonych w urządzenie do stałego wietrzenia wody; woda była w akwarjach odnawiana dniem i nocą mechanicznie. Akwarja stały przeważnie na otwartem powietrzu, w razie możności na słońcu; przed zbyt silną operacją słońca zabezpieczałem je odpowiedniami białymi zasłonami; dno pokryte było piaskiem i kamkami, wśród których rosły różne wodne rośliny.

Ryby ginęły nieraz już podczas operacji; w innych przypadkach po ukończonej kastracji nie wykazywały wprawdzie ani śladu ruchów oddechowych, jednakże często udawało mi się przywrócić je jeszcze do życia pewnemi środkami; mianowicie ująwszy zwierzę za tylną połowę ciała poruszałem taką nieoddychającą rybą dość szybko pod wodą w ten sposób, że przy wahadłowych ruchach opór stawiony przez wodę podnosił nieco pokrywę skrzelową i powodował ruch skrzel; po pewnej ilości takich sztucznych ruchów powstawały wreszcie często samodzielne ruchy oddechowe i ryba powracała do życia. Dla przywrócenia ruchów oddechowych było również bardzo skutecznym zabiegiem trzymanie zwie-



rzęcia nad prądem drobnych pęcherzyków powietrza, jakie wydobywają się ze zwykłych przyrządów do przewietrzania wody w akwarjach; należało przytem starać się oto, by prąd powietrza unosił nieco pokrywkę skrzelową i trafiał bezpośrednio na rozwarłe skrzela. Za pożywienie służyło wszystkim rydom serce wolowe starannie rozdrobnione.

Ani jednej z operowanych ryb nie zdołałem utrzymać przy życiu dłużej ponad 3 tygodnie; najdalej w końcu trzeciego tygodnia zwierzęta ginęły, całkiem nagle i niespodziewanie. Jak się okazywało, przyczyną śmierci nie było ani zakażenie, ani uszkodzenie jakiegokolwiek bądź wewnętrznego organu, lecz inna okoliczność: wskutek normalnie szybkich, częstokroć więc dość gwałtownych ruchów operowanych zwierząt szwy, ściągające brzegi olbrzymiej stosunkowo rany, przedzierały po pewnym czasie ciało ryby; wskutek wiotkości mięśni brzucha tworzyły się w miejscach, w których tkwił jedwab, najpierw drobne, a potem coraz większe otwory, przez które woda wdzierała się do jamy ciała; to prowadziło szybko do śmierci zwierzęcia. W paru przypadkach cała rana zrosła się doskonale, przyczem wszystkie nitki zostały samodzielnie z niej wydalone bez nagłego przedarcia ściany brzucha; jednakże i w tych nielicznych przypadkach następowała najdalej po 20 — 23 dniach od chwili operacji śmierć, gdyż zagojona rana wskutek gwałtownych ruchów strzebli ulegała zawsze prędzej czy później ponownemu a niespodziewanemu rozwarciu, powodującemu szybką śmierć zwierzęcia, zanim można mu było przyjść z jakąkolwiek bądź pomocą.

### Przebieg doświadczeń z kastracją ryb.

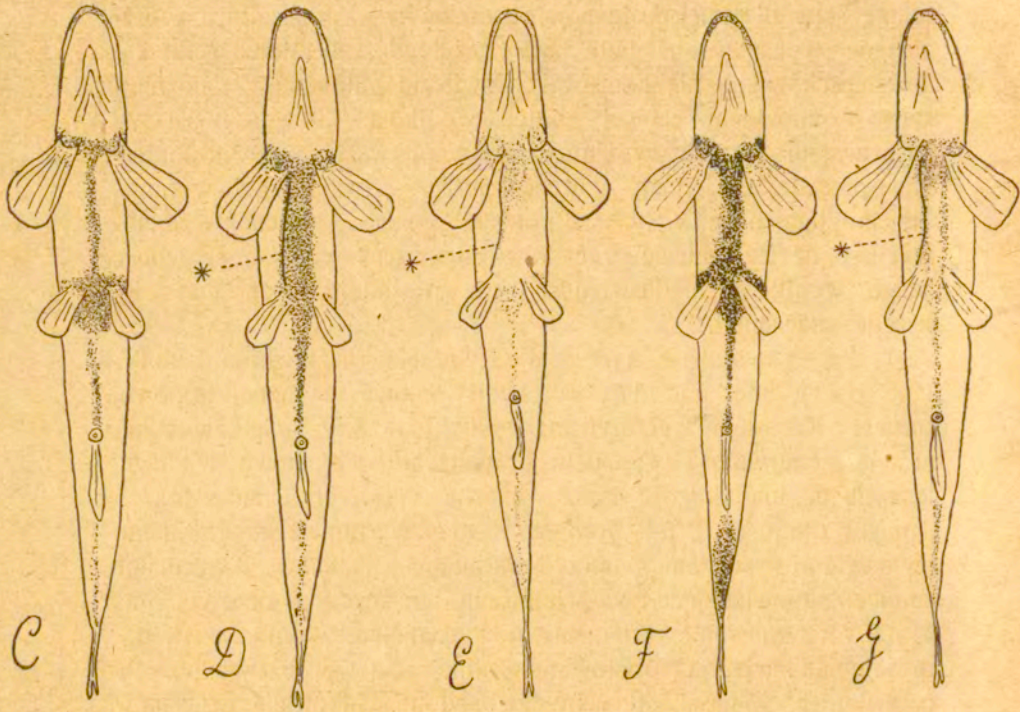
Zależnie od czasu, w którym wykonywałem kastrację strzebli mogę cały mój materiał rozdzielić na 3 serje doświadczeń, których przebieg był następujący:

I Serja doświadczeń. Ryby schwytane dnia 26.III. Kastrowane d. 27 — 28.III. W chwili połowu i operacji zwierzęta te nie posiadały czerwieni godowej, chociaż pod lupą widać było na odnośnych miejscach czerwone, skurczone, kuliste komórki barwikowe. Jak widać z poniżej załączonej tabelki ani jedna z kastrowanych ryb tej seryi nie rozwinęła barwy godowej. Ale i wśród 20 normalnych okazów zczerwienienie takie wystąpiło

Serja doświad.	Kategoria zwierząt	Ilość i płeć zwierząt	Data połowu	Data operacji	Stan barwy godowej w dzień połowu	Ilość okazów, u których barwa godowa z czasem się rozwinęła	Czas trwania obserwacji
I.	Całkowicie kastrowane okazy	13 ♂	26.III	27-28 III	Zupełny brak barwy godowej	0	do 16.IV
		11 ♀	"	"	"	0	"
	Częściowo kastrowane okazy	3 ♂	"	"	"	0	"
		4 ♀	"	"	"	0	"
	Normalne okazy	8 ♂	"	—	"	1	"
		12 ♀	"	—	"	1	"
II.	Całkowicie kastrowane okazy	5 ♂	26.IV	27-28 IV	Zupełny brak barwy godowej	0	do 17.V
		11 ♀	"	"	"	2	"
	Częściowo kastrowane okazy	6 ♂	"	"	"	4	"
		4 ♀	"	"	"	4	"
	Normalne okazy	6 ♂	"	—	"	5	"
		3 ♀	"	—	"	3	"
III.	Całkowicie kastrowane okazy	8 ♂	5.V	6-7.V	Lekkie zaróżwienie	3	do 27.V
		6 ♀	"	"	"	2	"
	Częściowo kastrowane okazy	4 ♂	"	"	"	4	"
		4 ♀	"	"	"	4	"
	Normalne okazy	6 ♂	"	—	"	5	"
		3 ♀	"	—	"	3	"

zaledwie w dwu przypadkach. W pięciu innych przypadkach normalne ryby niezmiernie słabo się zaróżowiły. w pozostałych wreszcie nie wykazały ani śladu barwy godowej. Wytlomaczenie takiego zachowania się kontrolnych zwierząt odkładam do późniejszego omówienia całości moich wyników. (Pewną ilość ryb kastrowałem jeszcze wcześniej, bo w pierwszej połowie marca. Nie posiadając jednak wówczas jeszcze dostatecznej wprawy, nie mogłem okazów tych całkowicie pozbawić gruczołów płciowych, bądź też usuwać gruczoły w nienaruszonym stanie, wobec czego wyniki tych doświadczeń nie posiadają tu dla nas większego znaczenia).

II Serja doświadczeń. Ryby tej serji złowiono d. 26.IV. I te okazy nie posiadały w chwili połowu wyraźnej godowej barwy. Kastracja wykonywana była 27—28.IV. Całkowitą kastrację przetrwało 11 samic w przybliżeniu jednakowo wielkich, których ogólna długość ciała wynosiła 7, 5—8, 5 cm., oraz 5 samców długości 6, 5—7, 5 cm. Do akwarjum z kastrowanemi zwierzętami wrzuciłem ponadto 6 normalnych samców i 3 normalne samice, odpowiadające swą wielkością operowanym okazom. Już 1—2.V te kontrolne zwierzęta, nie posiadające w dniu 28.IV, podobnie jak zwierzęta operowane, żadnej godowej barwy, poczęły czerwienieć, podczas gdy ryby pozbawione całkowicie gruczołów rozrodczych z reguły nawet 13—17.V nie wykazywały ani śladu zaczerwienienia. Niemal wszystkie czerwone chromatofory normalnych okazów były silnie rozciągnięte, podczas gdy odnośne komórki kastrowanych zwierząt z reguły w przeważającej ilości pozostawały w stanie skurczu. Zewnętrzny wynik takiego zachowania się zwierząt kastrowanych był taki, że zaledwie dwa okazy samic otrzymały barwę godową rozwiniętą w równej mierze, co zwierzęta normalne. Z pozostałych 14 okazów w 4 przypadkach nie zauważyłem ani śladu barwy godowej, zaś u 10 zwierząt spostrzedz się dało lekkie zaróżowienie odnośnych miejsc brzucha, przyczem jednakże, co z naciskiem podnieść należy, zaróżowienie to było w porównaniu z barwą godową okazów normalnych tej serji doświadczeń objawem nader słabym i za godową barwę uważanem być nie może (porównaj ryc. C, przedstawiającą schematycznie zczzerwieniałego samca normalnego z ryc. E takiego zaróżowionego samca całkowicie kastrowanego).



Schematyczne ryciny, dające wyobrażenie o stanie barwy godowej u różnych samców strzebli. Miejsca zabarwione oznaczone są kropeczkami. Kropki nie odpowiadają ściśle liczbie i wielkości czerwonych barwikowych komórek, oddając tylko ogólne wrażenie, jakie dawała barwa u poszczególnych okazów. Wszystkie samce należą do II seryi doświadczeń. Zostały one złowione wszystkie d. 26.IV, ewentualnie kastrowane d. 27.IV. W tym czasie żadne ze zwierząt barwy godowej nie posiadało. *C* Samiec normalny, odrysowany d. 5.V. Barwa godowa dobrze rozwinięta. *D* Samiec niecałkowicie kastrowany (usunięto po pół jądra z każdej strony ciała), odrysowany d. 5.V; barwa godowa bardzo dobrze rozwinięta, nawet lepiej niż u okazu normalnego. *E* Samiec całkowicie kastrowany; odrysowany d. 13.V; zamiast barwy godowej zaledwie ślad zaróżowienia. *F* Samiec normalny (odrysowany powyżej pod *C*) po całkowitem oślepieniu w d. 15.V. Barwa godowa uległa niezwyktemu wzmożeniu nasilenia. *G* Samiec całkowicie kastrowany (odrysowany powyżej pod *E*) po całkowitem oślepieniu w d. 15.V. Zaróżowienie wyraźnie się wzmożniło. (Linia oznaczona gwiazdką odpowiada cięciu wykonanemu podczas operacji).

Taki rezultat omawianej tu serii doświadczeń przemawiałby bezwzględnie za zależnością godowej ekspansji czerwonych chromatoforów strzebli od obecności gruczołów rozrodczych, gdyby nie ta okoliczność, że zwierzęta nie żyły po operacji nigdy dłużej ponad 3 tygodnie; wobec zaś tak krótkiego ich życia nasuwaćby się mogło przypuszczenie, że ów brak barwy godowej był tylko chwilowym, a więc przejściowym objawem uzależnionym jedynie od samej operacji jako takiej, a więc od osłabienia organizmu i t. p., nie zaś od istotnej kastracji. Mniemanie takie nie jest jednakże słusznem, jak to wynika z zachowania się takich ryb, którym 27-28.IV usuwałem jedną tylko gonadę lub tylko części gruczołów płciowych. Okazy te były znowu tej samej wielkości co zwierzęta kastrowane całkowicie, pochodziły też z tego samego połowu; umieszczone były również w tenże akwarjum, co zwierzęta normalne i całkowicie kastrowane, wszystkie więc ryby żyły w jednych i tych samych zewnętrznych warunkach; zwrócić należy ponadto uwagę na to, że niecałkowicie kastrowane ryby posiadały ranę tak samo opatrzoną i takiej samej wielkości, co okazy pozbawione całkowicie swych gruczołów płciowych. A jednak już 1-3.V wybarwiały się one z reguły bardzo wyraźnie na czerwono, najczęściej o wiele nawet silniej niż okazy normalne; ostatnie zjawisko występowało mianowicie niemal zawsze wówczas, gdy operowanym rybom wycinałem tylko część gruczołu płciowego z każdej strony ciała, co było, rzecz naturalna, związane z wydostaniem się części zawartości gruczołu wprost do jamy ciała. Wystarczało zostawić podczas kastracji niewielki kawałek gruczołu (np.  $\frac{1}{5}$  —  $\frac{1}{10}$  część) z jednej strony ciała, by zoperowana w ten sposób ryba po pewnym czasie rozwinęła wyraźnie swą barwę godową, (por. tu rycinę *D* samca, któremu usuwałem z obu stron ciała mniej więcej po pół jądra, z poprzednio omianemi rycinami *C* i *E*).

III Serja doświadczeń. Ostatni raz wreszcie otrzymałem materiał d. 5.V. Większość ryb posiadało wyraźną, choć słabą barwę godową w postaci zaróżowienia odnośnych okolic ciała. Do kastracji wybrałem osobniki o 2 — 3 cm. krótsze, niż w poprzedniej serii doświadczeń. Kastrację wykonałem 6-7.V. Podczas gdy z 17 okazów normalnych bądź niecałkowicie kastrowanych aż 16 otrzymało niebawem barwę godową, to z 14 ryb całkowicie pozbawionych gruczołów płciowych zaledwie 5 ryb za-

czerwienio się godowo. Jest to procent w każdym bądź razie bardzo duży i zachowanie się takie tych okazów, stojące poniekąd w sprzeczności z wynikami otrzymanymi w poprzedniej serji znajdzie poniżej dokładniejsze omówienie.

### Omówienie wyników kastracji oraz pewnych innych doświadczeń.

Pomimo, iż wyniki wszystkich tych seryj doświadczeń nie są ze sobą całkiem zgodne, to jednak — jak sądzę — prowadzą one do wniosku że długotrwały godowy rozkurcz czerwonych komórek barwikowych *jest u strzebli zależny od obecności gruczołów rodowych*. Z drugiej seryi tych doświadczeń wniosek taki narzuca się sam przez się. Inaczej jednak rzecz się ma w doświadczeniach seryi I i III-ej: tutaj w pierwszym przypadku zachowanie się okazów normalnych, a w drugim — wielu z ryb kastrowanych zdaje się przemawiać przeciw takiemu twierdzeniu. By tę pozorną sprzeczność wyjaśnić, należy jednakże wziąć pod uwagę okoliczność, że każda serja doświadczeń wykonywana była *w innym czasie*, a więc materyał nie był we wszystkich razach jednaki, nie mówiąc już o pewnych odmiennych warunkach naturalnego światła i ciepła, które w różnych okresach wiosny były nieco różne. Znane jest ogólnie, jak trudną bywa nieraz rzeczą doprowadzić pewne ryby w niewoli do dojrzałości płciowej, a następnie do tarła. U normalnych okazów I-ej serji, złowionych jeszcze 26.III, należy przyjąć pewien ilościowy, a może i fizjologiczny niedorozwój gruczołów płciowych; gruczoły te nie były tutaj mianowicie normalnie duże, a ilość zawartych plemników była stosunkowo niewielka. Organy te nie mogły się w niewoli ostatecznie rozwinąć, co stało może w związku z zimnem, jakie w roku 1915 panowało w kwietniu i z brakiem słońca; ten niedorozwój gonad w niewoli mógł mieć decydujący i wybitnie ujemny wpływ na rozwój barwy godowej kontrolnych okazów tej serji doświadczeń. Całkiem natomiast przeciwnie rzecz się miała z rybami III-ej seryi, złowionymi 5.V. Okazy te posiadały mianowicie w chwili połowu gruczoły rozrodcze przeważnie już bardzo duże, ogromnie nabrzmiąle i całkowicie rozwinięte; wobec

tego należało z góry przypuścić, że hormony, wydzielane przez gruczoły płciowe, zostały tutaj w dużej ilości przypadków wydzielone do jamy ciała jeszcze zanim zwierzęta zostały złowione, bądź zanim uległy całkowitej kastracji; te wydzielone przed operacją hormony spowodowały rozwój szaty godowej u wielkiej stosunkowo ilości całkowitych kastratów tej serji doświadczzeń<sup>1)</sup>. W podobny sposób należy objaśnić sobie owe niewielkie odstępstwa od zachowania się większości zwierząt każdej kategorii w każdej poszczególniej serji doświadczzeń, jak naprz. brak czerwieni godowej u dwu jednostronnie kastrowanych zwierząt II-ej serji lub rozwój barwy godowej u dwu kontrolnych ryb I-ej serji. W pierwszym przypadku były to zwierzęta nieco mniej zaawansowane w fizjologicznym swym rozwoju, niż większość ryb tego połowu, w drugim — mieliśmy do czynienia z okazami bardziej od innych płciowo rozwiniętymi. Złączywszy kategorie zwierząt normalnych i niecałkowicie kastrowanych, jako analogicznych pod względem zachowania się, w jedno, znaleźlibyśmy, iż w drugiej serji doświadczzeń barwa godowa rozwinęła się u okazów, posiadających całość lub część gonad w 84% przypadków, u kastrowanych zaś całkowicie zaledwie w 12% przypadków. Podobnie w III-ej serji barwa godowa wystąpiłaby u zwierząt z gonadami w 94%, u całkowitych kastratów w 36% przypadków i tak więc nawet tutaj wpływ kastracji dałby się wyraźnie zauważyć.

Wykluczwszy I-ą serję doświadczzeń, jako wykonaną bezwzględnie wcześniej (p. wyżej str. 11), połączywszy cały materiał pozostałych dwu seryj w jedną całość i przeprowadziwszy odnośne obliczenia, otrzymamy liczby pośrednie, a mianowicie: rozwój czerwieni u 89% ryb z gonadami, zaś u 23% ryb bez gonad; liczby te dowodzą mojem zdaniem z jednej strony niezaprzeczonego wpływu kastracji, z drugiej zaś strony wskazują na to, iż w procesie godowego rozkurczu chromatoforów muszą jednocześnie brać udział i inne jeszcze czynniki odmiennej natury.

---

<sup>1)</sup> W związku z tem nadmienić wypada, że histologiczne badania większej ilości jąder ryb różnej wielkości, złowionych 5.V, wykazały, że z tych nielicznych okazów, które wśród ryb tego połowu nie posiadały wybitnej czerwieni godowej, jądra zawierały z reguły bardzo niewiele plemników; przeciwnie okazy tegoż połowu zczerwieniałe godowo przy badaniu histologicznem okazywały jądra, zawierające olbrzymie ilości dojrzałych plemników.

Tą drogą udałooby się zatem wysnuć z rezultatów wszystkich moich doświadczeń jednolity wniosek, będący potwierdzeniem, a raczej pewnem udowodnieniem spotykanego zdania, że *szata godowa ryb zależna jest przynajmniej po części od obecności i dojrzałości gruczołów rozrodczych*. Mniemanie takie, dotychczas niepoparte doświadczeniem, a wysnute wyłącznie z obserwacji pewnej, niezaprzeczonej, czasowej zgodności w rozwoju szaty godowej ryb z dojrzewaniem ich gonad, spotykamy mianowicie już u v. Siebold'a (1863), Pouchet'a (1876), z nowych autorów u Groth'ego, Vogt'a i Hofer'a (1909), Kammerer'a (1907), v. Frisch'a (1912) i in. [porównaj tu doskonałe referaty v. Rynberk'a (1906), Šečerov'a (1913) i Fuchs'a (1914)]. Von Frisch (1912) wskazuje ponadto na znaczenie jakości gonad w procesie rozkurczu godowych chromatoforów strzebli. Okazuje się mianowicie, że trzymane na czerwonym podłożu ryby czerwienieją niejednakowo zależnie od płci, samce bowiem naogół częściej i silniej otrzymują czerwone plamy, niż samice, hodowane na analogicznym podłożu<sup>1)</sup>.

Wpływ, wywierany przez gruczoły płciowe na rozkurczanie się chromatoforów godowych, jest jednakże tylko jedną składową częścią długiego szeregu tak zewnętrznych jak i wewnętrznych czynników, które wywołują mniej lub więcej długotrwałe rozkurcz godowych chromatoforów ryb. W literaturze istnieją bardzo liczne

---

<sup>1)</sup> W przeciwieństwie do innych równie znakomitych autorów, jak naprz. Grote, Vogt, Hofer (1909) lub Heckel i Kner (1858) jest v. Siebold (1863) specjalnie co do *Phoxinus laevis* Agass. tego zdania, iż ubarwienie godowe tego gatunku ryb „ist... nicht von der Laichzeit abhängig, die in dem Monat Mai fällt, sondern kommt auch ausser Laichzeit sowohl bei männlichen wie weiblichen Individuen zum Vorschein, wovon ich mich mitten im Winter, im Januar überzeugt habe“ (l. c. str. 222). Przytoczony ustęp nie wyklucza jednakże, że podczas wiosennego, ostatecznego rozwoju gruczołów rozrodczych ta zimowa czerwień ulegała może pewnemu wzmocnieniu; zimowa czerwień, obserwowana przez v. Siebold'a, mogła mianowicie zależeć od pozostających w ciele ryb tych hormonów, które były wyprodukowane jeszcze ubiegłej wiosny, a których ilość w miarę ponownego rozwoju jąder i jajników podczas nowego okresu godowego ulegałyby zwiększeniu, prowadzącemu do wiosennego spotęgowania się owej zimowej czerwieni. Jak z dalszych rozważań wyniknie, mniemanie v. Siebold'a i z tego zresztą względu nie sprzeciwia się naszym wywiodom, że i my bynajmniej nie chcemy upatrywać w gruczole rozrodczym jedynej przyczyny, warunkującej normalny czy anormalny rozwój godowej czerwieni.



stosunkowo dane, dotyczące się różnych ryb a w tem i strzebli, które dowodzą niezaprzeczenie wpływu takich różnych innych czynników na rozkurcz czerwonych lub też, mówiąc ogólniej, godowych komórek barwikowych<sup>1)</sup>. Zwłaszcza oddawna podnoszono wpływ podrażnień na ubarwienie ryb: podczas jednakże gdy Stark (1830)<sup>2)</sup> uzależnia świetność barwy samczyków *Gasterosteus aculeatus*, które zwycięzko wyszły z zażartych walk z współzawodnikami, od podrażnień psychicznych, to Agassiz (1833)<sup>3)</sup> mówi w tym przypadku o mechanicznych podrażnieniach wywołanych walką. Pocierając skórę innych ryb nożem lub igłą otrzymali v. Siebold (1863), Knauth (1891) i v. Frisch (1911) miejscowe rozszerzenia komór barwikowych. Wobec tego że v. Frisch sprowadza to zjawisko do anormalnych zmian w rozmieszczeniu barwika, spowodowanych rozdarciem lub innymi uszkodzeniami chromatoforów przy użyciu tak ostrych narzędzi, jak nóż lub igła, muszę podnieść, że w moich doświadczeniach następował rozkurcz komórek barwikowych po zadrażnieniu skóry tępego zupełnie narzędziem, np. zapomocą kulistej główki od szpilki, co niemal wykluczało uszkodzenie tych komórek (porów. tu też krytyczne uwagi Fuchs'a (1914) na temat poglądów v. Frisch'a). Obserwacje te rzucają, mojem zdaniem, światło na rolę fal, jako jednego z czynników, wpływających na rozwój ubarwienia godowego. Wydaje mi się mianowicie rzeczą bardzo prawdopodobną że fale rzeczne dają się odczuwać rybom, zwłaszcza takim, które żyją niezbyt głęboko pod powierzchnią wody, jako stałe mniej lub więcej silne mechaniczne podniety, prowadzące bezpośrednio czy też pośrednio do rozszerzenia godowych komórek barwikowych. W ten sposób objaśniałbym też dodatni wpływ, jaki na rozkurcz tych chromatoforów miał w moich doświadczeniach słaby a stały prąd wody.

---

<sup>1)</sup> Niema tutaj potrzeby wchodzić w szczegółowe omawianie ogromnie obszernej, a często bardzo sprzecznej literatury, dotyczącej się wpływu różnych czynników na zachowanie względnie wytwarzanie się niegodowych chromatoforów. Wyczerpujące dane znajdzie czytelnik we wspomnianych powyżej referatach v. Rynberk'a, Šećerov'a i Fuchs'a.

<sup>2)</sup> Cytowane według v. Rynberk'a (1906); porównaj też referat Fuchs'a (1914).

<sup>3)</sup> Cytowane według v. Siebold'a (1863).

Na zachowanie się chromatoforów ryb ma bezwątpienia wpływ zarówno nasilenie, jak i jakość światła (porównaj powyżej cytowane referaty i najnowsze prace v. Frisch'a [1911 b i 1912]), chociaż odnośne stosunki nie są dotąd dostatecznie wyświetlone. Doświadczalnie stosowane zmiany temperatury, częstokroć bardzo gwałtowne, dają wyraźne, jakkolwiek często wprost sprzeczne ze sobą rezultaty (Knauthe [1891], v. Frisch [1911 a] porównaj też referat Fuchs'a [1914]). Opierając się na własnych spostrzeżeniach uważać muszę zarówno umiarkowane ciepło, jak światło, za czynniki dodatnie w procesie godowego rozkurczu chromatoforów. Zbyt silne działanie promieni słonecznych powodowało blednięcie zczerwieniałych ryb; z drugiej znów strony ryby, pochodzące z połowu z dn. 26.IV, o ile trzymane były w chłodzie i skąpem świetle, tylko całkiem wyjątkowo wykazywały godowe zczerwienie.

Zasadniczą trudność w obserwowaniu wpływu warunków zewnętrznych na ubarwienie ryb stanowi ta okoliczność, iż jest rzeczą niemal niemożliwą w każdym poszczególnym doświadczeniu urzeczywistnić jeden tylko wybrany warunek i zbadać wpływ tego tylko czynnika. Niezmiernie ściśle i umiejętnie prowadzone badania v. Frisch'a (1911 — 1913) są dopiero pierwszym krokiem w kierunku ściśle naukowego rozgraniczenia wpływów poszczególnych czynników za zachowanie się chromatoforów. Że wpływy otoczenia na ubarwienie ryb są niemałe, tego dowodzi zresztą już ta znana oddawna okoliczność, że samo hodowanie ryb w niewoli, związane z jednoczesnym działaniem różnych, choć często bardzo drobnych zmian w warunkach ich życia, wywiera bardzo wybitny wpływ na zachowanie się komórek barwikowych: ubarwienie i gra barw są u ryb w niewoli na ogół o wiele mniej żywe, niż zaraz po połowie lub też na swobodzie (v. Siebold [1863], de Vescovi [1885 — 1886]<sup>1)</sup>). Z naciskiem podnieść muszę, że i u moich strzebli, hodowanych w niewoli, tam gdzie czerwień godowa występowała, nie była ona nigdy tak silnie rozwinięta, jak u okazów widzianych w przyrodzie na swobodzie.

v. Frisch (1912 i 1913) zauważył (w przeciwieństwie do ujemnych wyników Hessego [1912 i 1913]), że okazy strzebli, trzymane na czerwonym lub na żółtym podłożu, rozkurczały

<sup>1)</sup> Cytowane według Fuchs'a (1914).

swe czerwone komórki barwikowe, przyczem jednakże czerwienie nie to ulegało wyraźnemu zblednięciu w miarę zbliżania się i podczas nocy. Podobnie zachowywały się ryby w moich doświadczeniach: koło godziny 5 — 6 po poł. czerwień była mianowicie stosunkowo najsilniejsza, w miarę zaś zbliżania się wieczornego mroku wyraźnie słabła, by wkrótce po wschodzie słońca uleść ponownemu wzmocnieniu<sup>1)</sup>. Wobec tych wahań w zachowaniu się chromatoforów w okresie godowym *należałoby właściwie nasze dotychczasowe określenie czerwieni godowej, jako długotrwałego rozkurczu odnośnych komórek barwikowych, zmienić i mówić tylko o godowej długotrwałej skłonności tych komórek do rozkurczania się.* Z powyższej pracy v. Frisch'a wynika ponadto, że strzeble, hodowane na takim sztucznym podłożu, otrzymują swą barwę godową nawet w zimie; dowodziłoby, to znowu, że rozkurcz godowych chromatoforów, stojący w normalnych warunkach w wyraźnym choć nie wyłącznym związku z obecnością gruczołu płciowego, może być wywołany zapomocą pewnych sztucznych czynników nawet w okresie zastoju czynności płciowych.

Wobec wszystkich tych rozważań zdaje mi się być rzeczą pewną, że *jakkolwiek na rozwój godowej barwy strzebli wpływa obecność gruczołów płciowych, to jednak do rozwoju tej barwy potrzebne jest również spełnienie całego szeregu warunków zewnętrznych.* Dla potwierdzenia tego wniosku przytaczam jeszcze następujące doświadczenia, w których współdziałanie różnych czynników występuje bardzo wyraźnie: obustronnie oślepienie okazy normalnych, bądź niecałkowicie kastrowanych strzebli, pochodzących z połowu d. 26.IV (p. opis drugiej serji doświadczeń z kastracją, str. 8) wykazywały bezpośrednio po oślepieniu bardzo wybitne zwiększenie nasilenia zarówno całego ubarwienia, jak też, i to zwłaszcza, barwy godowej. Oślepienie okazy pomimo przebywania w niewoli przewyższały znacznie światłością swych barw, zwłaszcza swej krwistej czerwieni godowej, wszystko to, co da się widzieć w przyrodzie. Taka wzmozona ekspansja komórek barwikowych, którą widział już był wśród normalnych oślepionych strzebli v. Frisch (1912) i którą uzależniał

---

<sup>1)</sup> Czy taką perjodyczność przypisać należy bezpośredniemu wpływowi warunków zewnętrznych, czy też pewnym wahaniom w fizjologicznej funkcji gruczołów płciowych, trudno rozstrzygnąć.

od podniet, wywołanych zaniepokojeniem operowanych przezeń ryb, trwała czasem dnie całe, poczem nasilenie barw powracało do poprzedniego swego stanu. Otóż przekonałem się, że całkowicie kastrowane okazy należące do II serji moich doświadczeń nad kastracją i nie posiadające barwy godowej, wykazywały wprawdzie w razie ich zupełnego oślepienia pewien rozkurcz godowych chromatoforów, jednakże reakcja ta była tutaj *bezpórowania słabsza*, niż po oślepieniu normalnych okazów, bądź niecałkowicie kastrowanych zwierząt, (por. ryc. *F* normalnej oślepionej ryby z ryc. *G* przedstawiającą oślepioną kastrowaną rybę; porównaj tu jednocześnie ryc. *C* i *E* tych samych ryb przed ich oślepieniem). Wynika stąd z jednej strony, że większy lub mniejszy rozkurcz godowych chromatoforów może być zależny od odbierania przez ryby wrażeń świetlnych, z drugiej zaś strony staje nam się stąd jasnym współdziałanie w tym procesie rozkurczu wpływów, które spowodowane są obecnością gruczołów płciowych.

Czy wpływ gruczołów rozrodczych na rozwój godowej barwy odbywa się na drodze nerwowej, czy też jest on chemicznej natury, trudno jest dzisiaj powiedzieć. Przyszłe badania nad kastracją ryb i nad wstrzykiwaniem gonadowej miazgi zagadnienie to może rozwiązać. Zaznaczam tu tylko, że rozkurcz barwikowych komórek nie jest ich stanem czynnym, lecz stanem *biernym*, spoczynkowym; należy zatem przypuszczać, że *występowanie godowej barwy stoi tutaj zapewne w związku z pewnym procesem, hamującym odnośne ośrodki nerwowe.*

---

W ostatnich czasach zaznaczyła się wyraźnie dążność do rozdzielenia cech płciowych wtórnych na filogenetycznie starsze cechy, mniej lub więcej niezależne od gruczołów rozrodczych i cechy rodowo młodsze, które się w razie braku gruczołów płciowych rozwijać nie mogą (Kennel [1896]<sup>1)</sup> Oudemans [1898] Tandler [1910] Kammerer [1912] Tandler i Grosz [1913] Meisenheimer [1913], Harms [1914]). Na jednym biegunie stałyby tu wtórne płciowe cechy kręgowych zwierząt, które

<sup>1)</sup> Cytowane według Kammerer'a (1912).

u bydła naprz. wykazują według badań Tandler'a i Keller'a (1910) po kastracji zwierząt pewien pośredni typ mniej lub więcej pozbawiony dimorficznego charakteru. Skrajnie przeciwne stanowisko zajęłyby owady, z cechami płciowymi wtórnymi, całkiem niezależnymi od gruczołów płciowych. Wyniki moich rozważań i doświadczeń nad strzeblami przemawiałyby za tem, że taka przynajmniej cykliczna cecha, jak godowa czerwień, jest u strzebli dopiero na drodze do utrwalenia się, czy uniezależnienia od gruczołów rozrodczych<sup>1)</sup>. Z jednej bowiem strony cecha ta może się w pewnych anormalnych warunkach rozwinąć nawet w zimie (v. Frisch [1912]), a więc w okresie zastoju czynności płciowych, z drugiej strony, jak wynika z moich doświadczeń nad kastracją, na rozwój godowej czerwieni w normalnych warunkach wywiera gruczoł płciowy wyraźny wpływ.

W tym więc znaczeniu wykazywałyby strzeble pewne przejściowe stosunki, w porównaniu z zachowaniem się ssaków i owadów. Zachodziłoby tu dalej pewne podobieństwo do traszek, u których, jak wykazał Bresca (1910), dimorficzne ubarwienie jest całkiem niezależne od gruczołów płciowych, inne natomiast cechy, jak rozwój grzbietnego i ogonowego grzebienia u samców stoją jednocześnie w wyraźnej zależności od gruczołów rozrodczych. Liczne prace dotyczące się kastracji i transplantacji ryb, że wspomnę tylko nazwiska Nussbaum'a, Meisenheimer'a, Harms'a, Smith'a, dadzą się zdaniem Harms'a (1914) pogodzić z mniemaniem, że i inne drugorzędne cechy płciowe płazów, jak histologiczny i makroskopowy rozwój modzeli na palcach oraz odruch spółkowania u samców żab, zmierzają już ku podobnemu uniezależnieniu: Harms zwraca mianowicie uwagę na pewien rozwój tych cyklicznych godowych cech u żab kastrowanych, chociaż rozwój ten jest bezporównania słabszy, niż u zwierząt normalnych. Tą drogą dałoby się zatem odnaleźć pewne stany przejściowe pomiędzy zupełną zależnością rozwoju wtórnych cech płciowych od gruczołów rozrodczych, jaką spotykamy u ssa-

---

<sup>1)</sup> Z powodu, że kastrowane ryby żyły stosunkowo bardzo krótko, nie mogłem zbadać zachowania się innej cechy godowej, jaką są u strzebli rogowe wyrostki na grzbietnej powierzchni czaszki; z tejże przyczyny nie mogłem zbadać stosunku gruczołu płciowego do kształtu i wielkości pletw, typowo dimorficznych u tego gatunku ryb.

ków, a zupełną ich niezależnością u owadów. Dalsze badania nad rybami są w tym kierunku bardzo pożądane, gdyż wyników otrzymanych przezemnie na strzeblach nie można uogólniać ani na całą szatę godową tej formy, ani na barwę względnie godową szatę ryb innych.

Z zakładu Zoologicznego, Czeskiego uniwersytetu  
w Pradze (Dyr. Prof. Dr. Fr. Vejdovsky).

---

## PIŚMIENNICTWO.

---

- Agassiz L. 1833. Recherches sur les poissons fossiles T. 1.
- Bresca G. 1910. Experimentelle Untersuchungen über die sekundären Sexualcharaktere bei Tritonen. Arch. f. Entw.-Mech. Tom 29.
- v. Frisch K. 1911a. Über den Einfluss der Temperatur auf die schwarzen Pigmentzellen der Fischhaut. Biol. Centrbl. Bd. 31.
- 1911b. Beiträge zur Physiologie der Pigmentzellen in der Fischhaut. Pflüger's Archiv Bd. 138.
- 1912. Über farbige Anpassung bei Fischen. Zoolog. Jahrb. Abt. f. allgem. Zool. u. Phys. Bd. 32.
- 1913. Weitere Untersuchungen über den Farbensinn der Fische. Ibidem. Bd. 34.
- Fuchs R. F. 1914. Der Farbenwechsel und die chromatische Hautfunktion der Tiere. Winterstein's Handbuch d. vergl. Phys. Bd. III.
- Grote W., Vogt C. i Hofer B. 1909. Die Süßwasserfische von Mitteleuropa. Lipsk, Engelmann.
- Harms W 1914. Experimentelle Untersuchungen über die innere Sekretion der Keimdrüsen und deren Beziehung zum Gesamtorganismus. Jena, Fischer.
- Heckel J. i Kner R. 1858. Die Süßwasserfische der Oesterreichischen Monarchie. Lipsk Engelmann.
- Hess C. 1912. Untersuchungen zur Frage nach dem Vorkommen von Farbensinn bei Fischen. Zoolog. Jahrb. Abt. f. allgem. Zoolog. und Physiol. Tom 31.
- 1913. Neue Untersuchungen zur vergleichenden Physiologie des Gesichtssinnes. Tamže T. 33.
- Kammerer P. 1907. Bastardierung von Flussbarsch (*Perca fluviatilis* L.) und Kaulbarsch (*Acerina cernua* L.) Arch. f. Entw. Mech. -Bd. 23.

- Kammerer P. 1912. Ursprung der Geschlechtsunterschiede. Fortschr. d. Naturwiss. Forschung. Urban u. Schwarzenberg. Berlin. Wiedeń.
- Kennel J. 1896. Studien über sexuellen Dimorphismus, Variation und verwandte Erscheinungen. Schrift. d. Naturforschges. d. Univ. Dorpat.
- Knauth K. 1891. Meine Erfahrungen über das Verhalten von Amphibien und Fischen gegenüber Kälte. Zoolog. Anzeiger T. 14.
- Meisenheimer J. 1913. Äuszere Geschlechtsmerkmale und Gesamtorganismus in ihren gegenseitigen Beziehungen. Verh. d. deutsch. Zoolog. Gesellsch. 1913.
- Oudemans J. Th. 1898. Falter aus kastrierten Raupen wie sie aussehen und wie sie sich benehmen. Zool. Jahrb. Abt. f. Syst. Bd. 12.
- Pouchet G. 1876. Des changements des colorations sous influence des nerfs. Journ. de l'Anat. et de la Physiol. norm. et pathol. de l'homme et des animaux T. 8.
- van Rynberk G. 1906. Über den durch Chromatophoren bedingten Farbenwechsel der Tiere (sog. chromatische Hautfunktion) Ergebn. d. Phys. Asher-Spiro. Bd. 5.
- Šećerov S. 1913. Licht, Farbe und die Pigmente. Beiträge zu einer Pigmenttheorie. Vortr. u. Aufsätze ü. Entw.-Mech. Zeszyt 18. Lipsk, Engelmann.
- v. Siebold C. Th. E. 1863. Die Süßwasserfische von Mitteleuropa. Lipsk, Engelmann.
- Stark J. 1830. On changes observed in the colour of fishes. Edinburgh new Philosoph. Journ. (Jameson) T. 23 (9).
- Tandler J. 1910. Über den Einfluss der innersekretorischen Anteile der Geschlechtsdrüsen auf die äussere Erscheinung des Menschen. Wien. Klin. Monatschrift XXIII.
- Tandler J. u. Keller K. 1910. Über den Einfluss der Kastration auf den Organismus. IV. Die Körperform der weiblichen Frühkastraten des Rindes. Arch. f. Entw. Mech. Bd. 31.
- Tandler J. und Gross S. 1913. Die biologischen Grundlagen der sekundären Geschlechtscharaktere. Berlin. Julius Springer.
- de Vescovi P. 1885/1886. Nota preliminare sulle funzioni cromatiche dei pesci. Atti del Reale Istituto Veneto di Sc., Lettre ed arti. Tomo 4. Ser. 6. Venezia.

Stefan Kopec:

**Contribution to the study of the development  
of the nuptial colour of fishes.**

Announced 20. VI. 1917.

Presented by J. Tur.

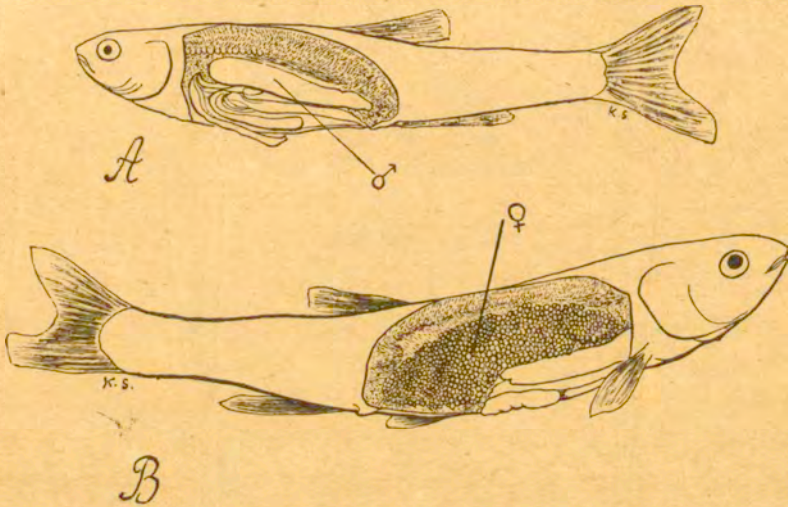
The relation between the sexual glands and the secondary sexual characters has been pretty extensively studied in the case of the higher vertebrates, on the contrary the castration of fishes has, as far as I know, not yet been accomplished.

In such experiments on this lowest class of vertebrates, I was obliged to restrict myself to the common form *Phoxinus laevis* Agass. In spring these common fishes assume the typical nuptial hue, which consists in the reddening of many parts of the body, especially of the abdomen. The nuptial colour varies very much from individual to individual and appears in both sexes, though in females it is generally less distinct. The reddening consists in the expansion of the red chromatophors, which are contracted during winter. It appears not only in full grown, but also in young male individuals of sometimes scarcely 3 cm. in length and in regard to this colouring of the skin histological researches have shown a complete development of microscopical sexual elements.

During operation I have opened the abdomen only from one side. Both testicles, respectively ovaries, were taken out by means of somewhat curved dissecting-forceps, whereby the gonads were not injured and could be removed as a whole. (The diagrams *A* and *B* demonstrate the size of the female and of the male gonads. After at most three weeks from the moment of operation the animals died suddenly — death being caused by a sudden rupture of the wound stitched with silk.

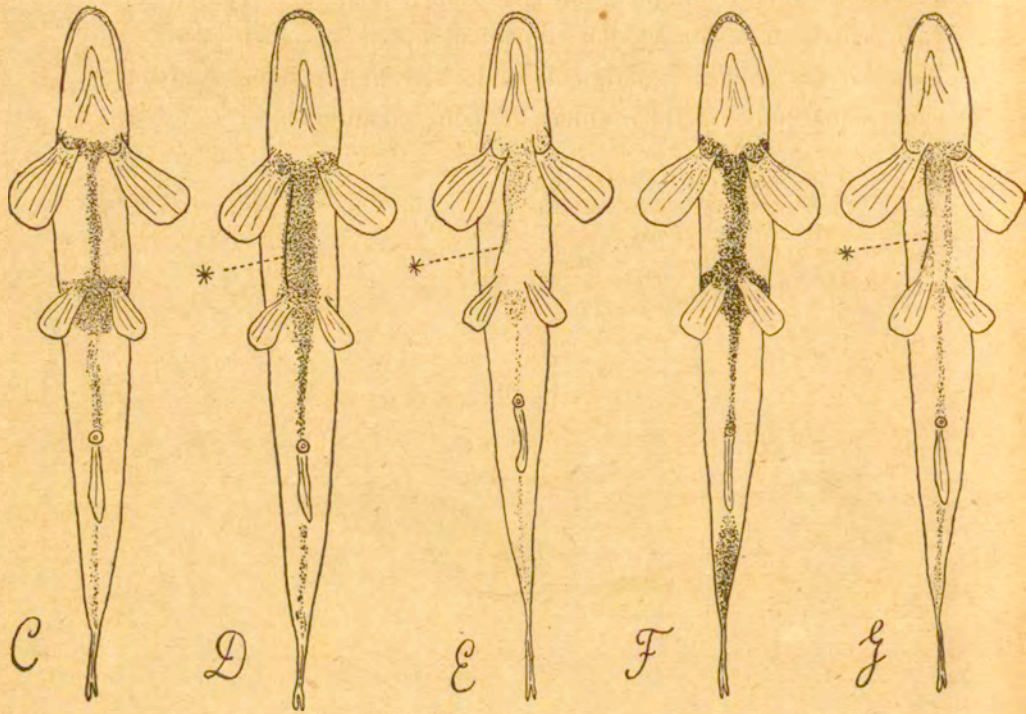


The animals were operated upon in several series at different periods. Animals of the same size and colour were chosen for each series. The individuals operated upon, as well as those used for the control experiments had been living together in the same aquarium and thus under the same conditions.



*Series I.* Fishes caught on March 26-th, operated upon on March 27-th — 28-th. At the time of catching a complete absence of nuptial dress. From 24 totally castrated fishes none became reddish; from 27 control individuals (normal or not completely castrated) scarcely 2 developed the nuptial hue with lapse of time (vide table).

*Series II.* Animals caught on April 27-th — 28-th. At the time of catching a complete absence of nuptial red. Among the castrated fishes the nuptial red developed scarcely in 12% of the cases (compare table) Many of the completely castrated animals exhibited, it is true, a very slight reddening of the abdomen (fig. *E*) but in comparison with that of the control fishes this reddening was so pale, that it cannot possibly be considered as nuptial colour (compare fig. *C* which shows a normal male, and



Diagrams illustrating the stages of nuptial colouring in operated and normal male fishes (*Phoxinus*) Coloured parts are indicated by dots; these do not strictly represent the number and size of the red pigment-cells, they give us only the general impression, which the colour offered in single specimens. Lines along which the section was made are indicated by an asterisk. All the males belong to the II series of experiments; all the specimens were caught on the April 26-th, relatively castrated ones on the April 27-th. At this time no animal had its nuptial hue. *C* Normal male; drawing made on May 5-th; nuptial colour well developed. *D* Incompletely castrated male (Half a testicle on each side having been removed); drawing made on May 5-th; nuptial colour very well developed, even better than in a normal specimen. *E* Completely castrated male; drawing made on May 13-th; instead of the nuptial colour scarcely a trace of reddening. *F* Normal male (represented above in fig. *C*) after complete removal of the eyes on May 15-th. The fish underwent an exceedingly large reddening. *G* Completely castrated male (represented above in fig. *E*) after total removal of the eyes on May 15-th. The reddening became obviously more intense.

Series of experim.	Category of animals	Number and sex of the fishes.	Date of catch	Date of operation	State of the nuptial colour on the day of catch	Number of specimens which developed the nuptial colour in course of time.	Period of observation
I.	Totally castrated individuals	13 ♂	26.III	27-28 III	Compl. absence of nuptial red	0	till 16.IV
		11 ♀	"	"	"	0	"
	Partially castrated individuals	3 ♂	"	"	"	0	"
		4 ♀	"	"	"	0	"
	Normal individuals	8 ♂	"	"	"	1	"
		12 ♀	"	"	"	1	"
II.	Totally castrated individuals	5 ♂	26.IV	27-28 IV	Compl. absence of nuptial red	0	till 17.V
		11 ♀	"	"	"	2	"
	Partially castrated individuals	6 ♂	"	"	"	4	"
		4 ♀	"	"	"	4	"
	Normal individuals	6 ♂	"	"	"	5	"
		3 ♀	"	"	"	3	"
III.	Totally castrated individuals	8 ♂	5.V	6-7.V	Pale reddening	3	till 27.V
		6 ♀	"	"	"	2	"
	Partially castrated individuals	4 ♂	"	"	"	4	"
		4 ♀	"	"	"	4	"
	Normal individuals	6 ♂	"	"	"	5	"
		3 ♀	"	"	"	3	"

fig. *D* an incomplete castrate) Among control animals (normal or not completely castrated) the red colour appeared in 84% of the cases, and was as a rule much more intense in partly castrated fishes than in normal ones. By partial castration only parts of the sexual gonads on both sides of the body were removed, whereby particles of the contents of the gonad reached the cavity of the body.

*Series III.* Fishes caught on May 5-th; operated upon on May 6-th 7-th. At the time of catching they were already somewhat reddish. Among the control animals the red colour developed in 94% of the cases, among totally castrated fishes in scarcely 36% (compare table).

---

The slight disagreement between the results of all these series of experiments is only apparent. If we consider some of the conditions, we can draw the general conclusion from the whole of the experiments, that the evolution of the nuptial red depends upon the sexual glands. From the second series such a conclusion follows as a matter of course, as here castrated specimens have almost without exception not become red, the normal ones usually developed the red colouring. It is a matter of question, why in the I series of experiments normal fishes did not develop the nuptial red, whereas in the III series such a relatively large percentage of castrated fishes assumed the nuptial reddening.

It must be taken into consideration that all these three series of experiments were carried out at different periods. On the other hand, it is a known fact how difficult it is to bring some fishes to sexual maturity under artificial conditions. Relative to the others, the fishes of the I series were caught very early, and as they had not fullgrown gonads at the time of

catching, they could not afterwards attain their physiological maturity in confinement. Hence all non-castrated individuals of this series failed to develop their nuptial colour.

On the contrary, the individuals caught on May 5-th, and castrated on May 6-th — 7-th already exhibited a pale reddening of the body — the beginning of the developing nuptial hue. At the time of catching the gonads of these fishes were already so far developed physiologically, that in many individuals hormones from the gonads had already reached the interior of the body and remaining there, they caused the nuptial colour notwithstanding the following castration.

It is necessary to lay stress on the fact, that the influence effected by the gonad on the nuptial red is only one element of a large series of conditions not only of an internal but also of an obvious external nature. Observations of former authors have taught us the influence of psychical and mechanical stimulus upon the intensity of the nuptial dress of fishes. In his very exact researches v. Frisch<sup>1)</sup> was able to determine the influence of various single conditions upon different chromatophors of this class of animals and also in some degree upon the chromatophors of *Phoxinus laevis*. From my own observations follows that a continuous flow of water and also heat and light — though of not too great intensity — are helpful factors in respect to such studies.

The red colour never attains such a degree of intensity for fishes in confinement contrasted with those living under natural conditions. This fact can be considered a proof of the dependence of the nuptial red on external conditions. As a consequence my specimens were never as red as in nature. The cooperation of different factors in this respect is evident from the following experiment, which I will discuss here separately, as it again proves our general conclusion. Viz. normal or not

<sup>1)</sup> Vide p. 19 of polish text.

totally castrated individuals which came from the catch of April 26-th underwent an exceedingly intense reddening after removal of their eyes (Fig. *F*). This reddening surpasses all which I have observed even in nature. The real cause of this reddening is difficult to ascertain; it would appear that psychical stimulus does not in all cases play an exclusive „rôle“ here, the presence of the gonad also being of great importance: totally castrated and completely blinded members of the same series exhibited a somewhat intense reddening (Fig. *G*); the expansion of their red chromatophors, however, was incomparably less than in the case of the blinded normal fishes (cf. fig. *F* which shows a normal, blinded male, and fig. *E* a not blinded castrate).

Further experiments on this subject, based on a larger amount of experimental material, will certainly throw more light on the problem discussed.

Zoological Laboratory of the Bohemian University, Prague (Director Prof. Fr. Vejdovsky).

## SPIS WYDAWNICTW Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

### I. Sprawozdania z posiedzeń Tow. Nauk. Warsz. za lata:

- r. I (1908), r. II (1909), r. III (1910), r. IV (1911), r. V (1912), r. VI (1913),  
r. VII (1914), r. VIII (1915), r. IX (1916).

### II. Prace Wydziału I-go:

- Nr. 1. Kazimierz Nitsch: Z historii polskich rymów. 1912.  
Nr. 2. Kazimierz Wóycicki: Wiersz „Barbary Radziwiłłówny“ A. Fe-  
lińskiego. 1912.  
Nr. 3. Tytus Benni: Samogłoski polskie. 1912 r.  
Nr. 4. Kazimierz Wóycicki: Historia literatury i poetyka. 1914.  
Nr. 5. Kazimierz Wóycicki: Ośmioletkowiec trocheiczny polski.  
1916.  
Nr. 6. Kazimierz Wóycicki: Wypiański i Szujski. 1917.  
Nr. 7. Tytus Benni: Metoda palatograficzna w zastosowaniu do spółgło-  
sek polskich. 1917.

### III. Prace Wydziału II-go:

- Nr. 1. Henryk Konic: Materiały do dziejów Komisji Rządzącej. 1910.  
Nr. 2. Ig. Tad. Baranowski: Materiały do dziejów wsi polskiej. 1910.  
Nr. 3. Ig. Tad. Baranowski: Księgi referendarskie. 1910.  
Nr. 4. Witold Schreiber: Badania nad antropologią dzieci chrześcijań-  
skich, żydowskich i karaïmskich w Galicyi. 1910.  
Nr. 5. Bronisław Bouffał: Teoria odpowiedzialności organów władzy  
administracyjnej we współczesnem prawie politycznem. 1911.  
Nr. 6. Stanisław Poniąkowski: O wpływie błędów obserwacyjnych na  
wskaźniki antropologiczne. 1912.  
Nr. 7. Jan Jakubowski: Studya nad stosunkami narodowościowemi na  
Litwie przed Unią Lubelską. 1912.  
Nr. 8. Aleksander Kraushar: W sprawie fundacyi naukowej T-wa im.  
Józefa Aleksandra Jabłonowskiego, wojewody nowogrodzkiego  
w Lipsku. 1912.  
Nr. 9. Edward Bogusławski: Dowody autochtonizmu Słowian na  
przeźstrzeni, zajmowanej przez nich w wiekach średnich. 1912.  
Nr. 10. Ludomir Sawicki: Studya nad Abisynią. 1913.  
Nr. 11. Kazimierz Wachowski: Jomsborg. 1914.

- Nr. 12. Kazimierz Konarski: Polska przed odsieczą wiedeńską r. 1683 1914.
- Nr. 13. Edward Trojanowski: Rodowód godła herbowego Warszawy. 1917.
- Nr. 14. Leon Kozłowski: Badania archeologiczne na górze Klin w Iwanowicach, pow. Miechowskiego. 1917.
- Nr. 15. Studya nad dziejami prawa polskiego prywatnego. 1917.
- I. Leon Babiński: O sposobach utwierdzenia działów spadkowych na podstawie praktyki ksiąg sądowych wielkopolskich z końca XIV i początku XV wieku.
- II. Roman Kuratów-Kuratowski: O zdolności cywilnej kobiet zamężnych w Małopolsce w w. XIV.

#### IV. Prace Wydziału III-go:

- Nr. 1. Z. Weyberg: Syntezy pirogenetycznych glinokrzemianów zasadowych. 1908.
- Nr. 2. Władysław Janowski: Współczesne metody badania serca. 1910.
- Nr. 3. Maryan Eiger: Topografia zwojów nerwowych wewnątrzsercowych u świnki morskiej, myszy białej i człowieka. 1911.
- Nr. 4. Edward Loth: Badania antropologiczne nad mięśniami murzynów. 1913.
- Nr. 5. Jan Czekanowski: Zarys metod statystycznych w zastosowaniu do antropologii. 1913.
- Nr. 6. Stanisław Poniatowski: Badania antropologiczne nad kością skokową. 1913.
- Nr. 7. Jan Lewiński: Utwory dyluwalne i ukształtowanie powierzchni przedlodowcowej dorzecza Przemszy. 1914.
- Nr. 8. Bronisław Rydzewski: Próba charakterystyki paleobotanicznej Dąbrowskiego Zagłębia węglowego. 1915.
- Nr. 9. Wacław Roszkowski i Anzelma Żebrowska. O budowie pochwek prącia u błotniarek (*Limnaea Lam.*). 1915.
- Nr. 10. Stanisław Pawłowski: Ze studyów nad zlodowacieniem Czarnohory. 1915.
- Nr. 11. Jan Tur: Nowe badania nad rozwojem układu nerwowego potworów płatyneurycznych. 1915.
- Nr. 12. Jan Krassowski: O ruchu planetoid typu  $\frac{3}{4}$  (Thule). 1916.
- Nr. 13. January Kołodziejczyk: Stosunki florystyczne jeziora Świtezi. 1916.
- Nr. 14. Jadwiga Loth-Niemirycz: Badania anatomiczne i antropologiczne nad kanałem wyrostków poprzecznych (*canalis transversarius*) kręgów szyjowych człowieka i małp. 1916.
- Nr. 15. W. Pogorzelski: Badania teoretyczne ilości ciepła, otrzymywanych na kuli ziemskiej, z uwzględnieniem strat promieniowania w atmosferze. 1916.
- Nr. 16. Jan Lewiński: Z morfologii i geologii stepów czarnomorskich 1916.



- Nr. 17. Jan Tur: Badania nad rozwojem *Chalcides lineatus* Leuck. 1916.  
 Nr. 18. Janusz Domaniewski: Fauna Passeriformes okolic Saratowa. 1916.  
 Nr. 19. Henryk Raabe: Pokolenia jesienne *Amoebidium parasiticum*. 1916.  
 Nr. 20. Jan Samsonowicz: Utwory dewońskie wschodniej części gór Świętokrzyskich. 1917.  
 Nr. 21. Gustaw Potworowski: Studya teratogenetyczne. 1917.  
 Nr. 22. Stanisław Sumiński: O budowie i rozwoju narządów kopulacyjnych samczych u *Anax imperator* Leach. (Odonata, Aeschninae). 1917.  
 Nr. 23. Stanisław Małkowski: O wydmach piaszczystych okolic Warszawy. 1917.  
 Nr. 24. Edward Loth: Odmiany tętnicy szyjnej głębokiej (a. cervicalis profunda) i tętnicy szyjnej wstępującej (a. cervicalis ascendens). 1917.  
 Nr. 25. Jan Tur: „Nić osiowa” i „czop metastomalny” w rozwoju owodniowców (Amniota). Studium embryologiczno-porównawcze. 1917.

#### V. Wydawnictwa Wydziału I-go:

- Nr. 1. Aleksander Brückner: Jana hr. Potockiego prace i zasługi naukowe. 1911.  
 Nr. 2. Prace Komisji do badań nad historią literatury i oświaty. Tom I-szy 1914.  
 Nr. 3. Kazimierz Wóycicki: Forma dźwiękowa prozy polskiej i wiersza polskiego. 1912.  
 Nr. 4. Manfred Kridl: Listy Juliusza Słowackiego. 1915.  
 Nr. 5. Maurycy Mann: „Poganka” Narcyzy Żmichowskiej. 1916.  
 Nr. 6. Stanisław Słoński: Psalterz Puławski. 1916.

#### VI. Wydawnictwa Wydziału II-go:

- Nr. 1. Władysław Konopczyński: Dyaryusze sejmowe z w. XVIII-go i Dyaryusz sejmu z roku 1748. Tom I—II. T. I—1911. T. II—1912.  
 Nr. 2. Marcei Handelsman: Dyaryusze Sejmów Księstwa Warszawskiego. Zeszyt I. Dziennik posiedzeń izby poselskiej sejmu roku 1809. 1913.  
 Nr. 3. Teodor Wierzbowski: Przywileje królewskiego miasta stołecznego Starej Warszawy, 1376 — 1772. 1913.

#### VII. Wydawnictwa wydziału III-go:

- Nr. 1. Władysław Gorczyński: Materiały do poznania opadów w Królestwie Polskiem. 1912.  
 Nr. 2. Edward Flatau: Migrena. 1912.  
 Nr. 3. Paleontologia Ziemi Polskich. № 1. Józef Siemiradzki: Gąbczaki jurajskie ziem polskich. 1913.  
 Nr. 4. Władysław Gorczyński: Materiały, zebrane w r. 1911 na stacjach Sieci Meteorologicznej Warszawskiej. 1913.

- Nr. 5. Zygmunt Wóycicki: Obrazy roślinności Królestwa Polskiego. — 1912 — 17 r.
- Nr. 6. Henryk Dziedzicki: Atlas organów rozrodczych u Mycetophilidae. 1915 r.
- Nr. 7. Edward Flatau: Prace z pracowni neurobiologicznej. T. I. 1916.
- Nr. 8. Kazimierz Stołyhwo: Prace z Pracowni antropologicznej. T. I. 1916.
- Nr. 9. Bolesław Rychłowski: Materiały do Hydrologii Król. Polsk. i ziem przyległych. 1917.

VIII. Roczniki Tow. Nauk. Warsz.

Rok VI (1913), rok VII (1914), rok VIII (1915), rok IX (1916).

---

## OD REDAKCYI.

1. „Sprawozdania” wychodzą w postaci zeszytów miesięcznych i zawierają protokoły posiedzeń naukowych Wydziałów T-wa, drukowane z zachowaniem oddzielnej paginacji dla każdego Wydziału. W miesiącach: lipcu, sierpniu i wrześniu „Sprawozdania” nie wychodzą.

2. Obok działu naukowego, obejmującego nadewszystko: komunikaty, jako też pokazy naukowe oraz dyskusję, w „Sprawozdaniach” podaje się nadto listę obecności oraz, w miarę potrzeby, streszczenie protokołu załatwianych na posiedzeniach spraw bieżących.

Obok komunikatów wygłaszanych na posiedzeniach wedle porządku dziennego, mogą być drukowane również i prace nadsyłane, o ile pochodzą one od członków T-wa w odpowiednich Wydziałach i o ile otrzymane rękopisy gotowe są do druku.

3. Poszczególne artykuły nie powinny w „Sprawozdaniach” przekraczać zakresu 2 arkuszy druku. W przeciwnym razie winny być drukowane w charakterze rozpraw naukowych w seryi „Prac” odpowiedniego Wydziału w „Sprawozdaniach” zaś podaje się wzmiankę protokółarną.

4. Komplet wydanych w ciągu roku zeszytów „Sprawozdań” stanowi rocznik, uzupełniony dodaniem zeszytu Sprawozdania rocznego z działalności T-wa oraz karty okładkowej i spisu rzeczy.

5. Komunikaty jako też objaśnienia pokazów drukuje się, stosownie do życzenia autorów, wraz ze streszczeniami w jednym z czterech języków obcych: francuskim, angielskim, włoskim lub niemieckim.

6. Na koszt redakcyi mogą być umieszczane w „Sprawozdaniach”, tylko rysunki tekstowe, o ile nadają się do reprodukcji cynkograficznej.

7. Do czasu ustalenia się pisowni polskiej przestrzega się zasad pisowni Akademii Umiejętności w Krakowie. Wyjątki w tym względzie czyni się jedynie dla autorów prac z zakresu językoznawstwa, o ile nietykalność pisowni została przez nich osobiście zastrzeżona.

8. Przemówienia w dyskusyi składa się sekretarzom Wydziałów, na posiedzeniu. Teksty przemówień w dyskusyi, nadsyłane po posiedzeniu, drukowane nie będą. Rękopisy komunikatów oraz objaśnienia, dotyczące pokazów, należy składać najpóźniej po upływie tygodnia po odbytem posiedzeniu; w przeciwnym razie w „Sprawozdaniach” podaje się tylko tytuł. W tym terminie autorowie winni dostarczyć gotowych klisz cynkograficznych.

9. Autorowie drukowanych w „Sprawozdaniach“ prac otrzymują bezpłatnie 100 zwykłych odbitek łącznie z protokołem ewentualnej dyskusji i streszczeniem w języku obcym. Na żądanie większej liczby odbitek, wyrażone na rękopisie oraz na ostatniej korekcie, mogą otrzymać większą ich ilość, ponosząc koszty broszuowania.

10. Materiał, przeznaczony do druku, winien być pisany na jednej stronie, z pozostawieniem marginesu i wolnego miejsca przed tytułem do notat redakcyjnych.

11. Podkreślenia: Nazwiska, wyrazy lub zdania, które autor chce mieć wydrukowane czcionkami rozstawionymi, należy podkreślać linią punktową. Nazwy techniczne, gatunkowe i t. d. wyróżnia się w druku kursywą, w rękopisie zaś podkreśla się linią pojedynczą. Wyrazy lub znaki wyjątkowego znaczenia, mające być wydrukowane czcionkami grubymi należy podkreślać linią podwójną.

12. Autorowie winni zwracać drukarni przysyłane im korekty w możliwie krótkim czasie; mają też prawo, w przypadkach wyjątkowych, żądać od drukarni przysłania powtórnej korekty. Autorowie zamiejscowi otrzymują tylko jedną korektę. Na ostatniej korekcie autor winien położyć swój podpis oraz wyrazić życzenie co do ilości oddzielnych odbitek.

Cena rocznika w prenumeracie wynosi **rb. 4**; cena każdego pojedynczego zeszytu **kop. 50**.