ZUBELEWICZ — O POSTĘPACH I LOGARYTACH

WYKŁAD PRAKTYCZNY NAUKI

O PODNOSZENIU DO POTĘG I WYCIĄGANIU PIERWIASTKÓW,

O POSTĘPACH I LOGARYTMACH.

Opis nr 45675

WYKŁAD PRAKTYCZNY NAUKI

O PODNOSZENIU DO POTĘG I WYCIĄGANIU PIERWIASTKÓW,

O POSTĘPACH I LOGARYTMACH

Z ZAŁĄCZENIEM

TABLICY LOGARYTMOWÉJ LICZB

PRZEZ

Floryana Alexandra Zubelewicza.

WARSZAWA.

w Drukarni Józefa Tomaszewskiego,

przy ulicy Bielańskiéj Nr. 600.

1848.

WOLNO DRUKOWAĆ,

z warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby egzemplarzy.

w Warszawie dnia 5 Sierpnia (24 Lipca) 1847 r.

Cenzor,

Tripplin.

WYKŁAD PRAKTYCZNY

podnoszenia do potęg, wyciągania pierwiastków, postępów i logarytmów.

ROZDZIAŁ I.

O podnoszeniu do potęg i wyciąganiu pierwiastków w ogólności.

1. *Potęgą* jakiéj liczby zowie się iloczyn powstały z wielokrotnego jej przez siebie rozmnożenia, czyli z wielokrotnego za czynnik jej wzięcia. Potęga ta, tem jest wyższą, im większą ilość razy liczba dana jako czynnik ma być braną: *np.* druga potęga z 7, czyli $7^2 = 7.7 = 49$; trzecia potęga z 7, czyli $7^3 = 7.7.7 = 343$; czwarta potęga z 7, czyli $7^4 = 7.7.7.7 = 2401$; i t. d.

Sama liczba będąca czynnikiem, z któréj właśnie kilkakrotnego mnożenia przez siebie powstała dana potęga, stanowi *pierwiastek* potęgi. Wielkość pierwiastku również podług tego się oznaczy, jak wielką ilość razy daną liczbę bierzemy za czynnik, aby otrzymać potęgę podaną; *np.* 7 jest pierwiastkiem drugiéj potęgi z 49, gdyż $7.7=49$; podobnież 7 jest pierwiastkiem trzeciéj potęgi z 343; jest pierwiastkiem 4téj potęgi z 2401 i t. d. Zamiast wypisywania, że 7 jest pierwiastkiem 2giéj, 3ciéj, 4téj potęgi z liczb odpowiednich powyżéj podanych, zwykle tylko zamieszczamy,

$$7=\sqrt[2]{49}\,;\ 7=\sqrt[3]{343}\,;\ 7=\sqrt[4]{2401}.$$

Liczba dająca poznać, ile razy inną liczbę za czynnik bierzemy, aby trzecia liczba jako iloczyn, czyli potęga była otrzymaną, zowie się *wykładnikiem*. Podług tego w wyrażeniu $7^3=343$, które wskazuje, że 7 podniesione do potęgi trzeciéj równa się 343, liczba 343 jest *potęgą* 3cią z 7; liczba 7 jest *pierwiastkiem*; 3 zaś *wykładnikiem*. Przy wyrażeniu $7=\sqrt[3]{343}$ oznaczającem, że 7 jest pierwiastkiem trzeciéj potęgi z 343, podobnież liczba 343 jest potęgą, 7 pierwiastkiem a 3 *wykładnikiem pierwiastku*, dla różnicy od wykładnika w poprzednim razie użytego, a który był właściwie *wykładnikiem potęgi*.

2. Drugą potęgę w praktyczném użyciu, zwykle zowią *kwadratem*, trzecią zaś potęgę *sześcianém*: stąd i pierwiastek drugiéj potęgi nazywa się *pierwiastkiem kwadratowym*; pierwiastek trzeciéj potęgi *pierwiastkiem sześciennym*. I tak 100 jest kwadratem z 10; 64 jest sześcianem z 4; 9 jest pierwiastkiem kwadratowym z 81; 8 jest pierwiastkiem sześciennym z 512.

Przy pierwiastku kwadratowym, wykładnik nigdy się nie pisze, jako odpowiadający najniższemu z pierwiastków, który przez rachunek dochodzić potrzeba; pierwiastkiem bowiem pierwszéj potęgi z jakiéj liczby, jest taż sama dana liczba. Stąd zamiast pisania $\sqrt[2]{100}=10$, piszemy tylko $\sqrt{100}=10$.

3. Sześć pierwszych potęg z dziesięciu pierwszych liczb, obejmuje następna tablica; potęgi tylko z 1 są opuszczone, jako wszystkie równe jedności.

Tablica potęg.

1-sza potęga	2-ga	3-cia	4-ta	5-ta	6-ta
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000

Z téj tablicy już się okazuje, że *każda potęga z* 10 *składa się z* 1 *i tylu zer, ile wykładnik ma jedności; np* $10^3 = 1000$; $10^5 = 100000$ i t. d.

4. Gdyby wszystkie wykładniki były całkowite, *podnoszenie do potęg* oznaczałoby powtarzane mnożenie liczby saméj przez się tak, iżby ta liczba tyle razy wziętą była za czynnik, ile wykładnik wskazuje. Lecz gdy wykładniki mogą być jeszcze ułomkowe i odjemne, poprzednie przeto określenie ogólniejszém być musi, aby właśnie obejmowało razem wszystkie te przypadki.

Chcąc liczbę a podnieść do potęgi m, potrzeba z liczby a przez mnożenie lub dzielenie tak wypadek utworzyć, jak powstało m z jedności przez dodawanie lub odciąganie. Że zaś mnożenie jest działaniem bezpośrednio wyższem od dodawania, a dzielenie bezpośrednio wyższem od odciągania, *aby zatem liczbę* a *podnieść do potęgi* m; *potrzeba z* a *przez bezpośrednio wyższe działanie wypadek tak utworzyć, jak* m *z jedności utworzono.*

a. Gdy wykładnik jest ilością całkowitą dodatnią.

Dajmy że chcemy podnieść 5 do potęgi trzeciéj, czyli do sześcianu. W tym celu potrzeba z 5 przez bezpośrednio wyższe działanie, wypadek tak utworzyć, jak 3 powstało z jedności. Że zaś 3 powstaje z jedności przez trzykrotne tejże jedności ze znakiem więcéj zamieszczenie, to jest $3 = 1+1+1$, zatem 5^3 utworzy się z 5, trzykrotnie tę liczbę jako mnożnik, czyli jako czynnik umieszczając, to jest $5^3 = 5.5.5 = 125$.

Jeżeli więc wykładnik jest liczbą całkowitą dodatnią, wówczas podnoszenie do potęg zależy tylko na wzięciu pierwiastku za czynnik tyle razy, ile wykładnik jedności obejmuje.

b. Gdy wykładnik jest ułomkiem dodatnim, np w wyrażeniu $64^{2/3}$, gdzie 64 do potęgi $^2/_3$ podnieść potrzeba; wówczas z 64 przez bezpośrednio wyższe działanie, wypadek tak się tworzy, jak $^2/_3$ z jedności utworzonem było. Że zaś $^2/_3$ z jedności powstaje, dzieląc jedność na trzy równe ilości dodać się mające i jedną z nich dwukrotnie jako liczbę do dodania zamieszczając: aby więc 64 podnieść do potęgi $^2/_3$, potrzeba 64 rozłożyć na 3 równe czynniki, i jeden z nich dwukrotnie jako czynnik zamieścić. Rozkładając 64 na trzy równe czynniki, czyli wyciągając pierwiastek trzeciéj potęgi z 64, wypada 4, gdyż $64 = 4.4.4$, albo

$$64 = \sqrt[3]{64}\,.\,\sqrt[3]{64}\,.\,\sqrt[3]{64}.$$

Umieszczając zaś jeden z nich dwukrotnie jako czynnik, będzie

$$4.4 = 16, \text{albo } \sqrt[3]{64}\,.\,\sqrt[3]{64} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 16; \text{stąd } 64^{2/3} = 16.$$

Aby więc 64 podnieść do potęgi $^2/_3$, potrzeba z 64 wyciągnąć pierwiastek sześcienny, to jest pierwiastek potęgi wskazanéj przez mianownik, i podnieść ten pierwiastek do kwadratu, czyli do potęgi wskazanéj przez licznik.

Podobnież chcąc 625 podnieść do potęgi $^3/_4$, potrzeba z 625 wyciągnąć pierwiastek czwartéj potęgi, który równa się 5, i ten pierwiastek podnieść do sześcianu; będzie zatém

$$625^{3/4} = \sqrt[4]{625}\,.\,\sqrt[4]{625}\,.\,\sqrt[4]{625} = \left(\sqrt[4]{625}\right)^3 = 5^3 = 125.$$

Stąd zarazem wypada, że aby liczbę jaką podnieść do potęgi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$téj i t. d. potrzeba wyciągnąć pierwiastek potęgi 2giej, 3ciej, 4 tej i t. d. *np.*

$$529^{1/2} = \sqrt{529} = 23.$$

$$29791^{1/3} = \sqrt[3]{29791} = 31.$$

$$2401^{1/4} = \sqrt[4]{2401} = 7.$$

W ogóle podnosząc a do potęgi $1/m$, powinniśmy a rozłożyć na m równych czynników i wziąć jeden z tych czynników; musimy zatem taką liczbę wynaleść, którąby m razy wzięta za czynnik, wydała na iloczyn a; taką liczbą jest $\sqrt[m]{a}$: stąd $a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$.

c. Gdy wykładnik jest zerem, gdy *np.* a do potęgi 0 podnieść żądamy, wówczas z a przez bezpośrednio wyższe działanie, tak wypadek tworzymy, jak 0 z jedności utworzono. Że zaś 0 tworzy się z jedności, biorąc raz tę jedność jako liczbę do dodania, drugi raz jako liczbę do odjęcia, to jest $1-1=0$: aby więc a podnieść do potęgi 0, potrzeba zamieścić raz a jako czynnik, drugi raz jako dzielnik; będzie więc $a^0 = \frac{a}{a} = 1$. Stąd *każda liczba* wzięta jako wartość dla a, *podniesiona do potęgi zero równa się jedności*; *np* $2^0 = \frac{2}{2} = 1$; $3^0 = 1$; $27^0 = \frac{27}{27} = 1$ i t. d.

d. Gdy wykładnik jest liczbą całkowitą odjemną np. gdy mamy 7^{-3}, czyli gdy 7 do potęgi — 3 podnieść żądamy; wówczas z 7 przez bezpośrednio wyższe działanie tak tworzymy wypadek jak — 3 z jedności utworzono. Że zaś — 3 z jedności powstaje, biorąc tę jedność po 3 razy jako liczbę do odjęcia, albo gdy ją umieścimy raz jako liczbę do dodania, a 4 razy jako liczbę do odjęcia, do utworzenia zatem 7^{-3} potrzeba 7 umieścić raz jako czynnik, a 4 razy jako dzielnik: stąd

$$7^{-3} = \frac{7}{7.7.7.7} = \frac{1}{7.7.7} = \frac{1}{7^3}$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}; \text{ w ogóle } \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

e. Gdy wykładnik jest ułomkiem odjemnym, np. w wyrażeniu $81^{-3/4}$, wówczas z 81 przez bezpośrednio wyższe działanie wypadek podobnie tworzymy, jak — ³/₄ z jedności utworzono. Że zaś — ³/₄ powstaje z jedności, rozkładając jedność na 4 równe liczby do dodania, i jedną z nich po trzy razy biorąc jako liczbę do odjęcia: albo raz jako liczbę do dodania, a 4 razy jako liczbę do odjęcia; dla utworzenia więc $81^{-3/4}$ potrzeba 81 na 4 równe czynniki rozłożyć, to jest $81 = 3.3.3.3$ i jeden z nich raz jako czynnik a 4 razy jako dzielnik zamieścić: będzie więc:

$$81^{-3/4} = \frac{3}{3.3.3.3} = \frac{1}{3.3.3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{81^{3/4}}$$

$$\text{w ogóle } a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Z dwóch ostatnich uwag *d*) i *e*) wynika: *Że każda potęga z wykładnikiem odjemnym, równa się jedności podzielonéj przez tęż samą potęgę z wykładnikiem dodatnim.* I tak

$$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} \quad ; \quad 8^{-1/3} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{2}$$

$$128^{-5/7} = \frac{1}{128^{5/7}} = \frac{1}{32} \; ; \; 243^{-2/5} = \frac{1}{243^{2/5}} = \frac{1}{9}$$

5. Jakkolwiek przez poprzednie uwagi różnica potęg co do ich wykładników wyjaśnioną została, przy dalszem jednak arytmetycznêm tylko roztrząsaniu działań, jakim te potęgi poddane być mogą, ograniczemy się jedynie na potęgach o wykładnikach całkowitych dodatnich.

6. *Dodawanie i odciąganie potęg* wykonanem tylko być może, gdy potęgi dane, chociaż z różnemi są społczynnikami, lecz są jednakowe, i odnoszą się do jednego pierwiastku. Różne bowiem potęgi co do wykładników jednego nawet pierwiastku, są tak różnego między sobą gatunku, jak potęgi rozmaitych pierwiastków.

I tak chcąc *np.* do $5 . 3^4$ dodać $7 . 3^2$ lub odjąć, gdy właściwe wypadki tych potęg wyszukane nie będą, dodawanie i odciąganie na prostem tylko oznaczeniu ograniczyć się musi, gdyż 3^4 i 3^2 są wyrażenia zupełnie od siebie różne; będzie zatem:

$$5 . 3^4 + 7 . 3^2$$

$$5 . 3^4 - 7 . 3^2$$

Przeciwnie gdy potęgi są jednakowe, dodawanie i odciąganie natychmiast uskutecznia się na spółczynnikach, jako wskazujących, ile razy potęgi dane są wzięte jako ilości do dodania, lub jako ilości do odjęcia.

$$7 . 3^4 + 5 . 3^4 - 2 . 3^4 = 10 . 3^4$$

$$8 . 3^2 - 9 . 3^2 + 5 . 3^2 = 4 . 3^2$$

$$8 . 5^2 - 7 . 5^2 + 3 . 5^2 - 4 . 5^2 = 0$$

Toż samo prawidło zastosowywa się do dodawania i odciągania ilości pierwiastkowych.

7. *Mnożenie potęg o jednym pierwiastku uskutecznia się, podnosząc ten wspólny pierwiastek do potęgi wskazanéj przez summę wykładników.*

Mając *np* 3^4 rozmnożyć przez 3^5, gdy w pierwszym czynniku 3 jest 4 razy, w drugim 5 razy, jako czynnik powtórzone, w iloczynie zatem toż samo 3 będzie 9 razy czynnikiem: stąd $3^4.3^5=3^9$.

Podobnież $5^3.5^2.5^4=5^9$; w ogóle $a^m.a^n=a^{m+n}$

Potęgi z tym samym wykładnikiem mnożą się przez siebie, podnosząc iloczyn ich pierwiastków do potęgi wskazanéj przez wykładnik; *np.*

$$4^3.25^3=\left(4.25\right)^3=100^3=1000000$$

$$a^m.b^m=\left(ab\right)^m.$$

Stąd zarazem wypada, że *chcąc podnieść iloczyn do jakiéj potęgi, potrzeba każdy z jego czynników podnieść do tejże potęgi i wypadki przez siebie rozmnożyć.*

W każdym z tych razów społczynniki oznaczające liczbę potęg do siebie dodanych, mnożą się przez siebie. np.

$$7.3^5\times 4.2^3=28.3^5.2^3.$$

8. *Ilości pierwiastkowe o jednakowym wykładniku co do pierwiastku mnożą się przez siebie, gdy pierwiastek wykładnikiem oznaczony wyciąga się z iloczynu ilości objętych znakami pierwiastkowemi. np.*

$$\sqrt{7}.\sqrt{5}=\sqrt{35}$$

Daleko mniej jest pracy wyciągnąć pierwiastek z 35, niż osóbno z 7 i z 5, i wypadki stąd powstałe przez siebie rozmnożyć.

Stąd nadto wynika, że *z iloczynu wyciąga się pierwiastek, wyciągając go osobno z każdego w nim czynnika.* Zasada ta korzystnie się zastosowywa w razie, gdy ilość pod znakiem pierwiastkowym będąca, na dwa czynniki rozkłada się, z których łatwo pierwiastek wyciągnięty być może. *np.*

$$\sqrt{5184} = \sqrt{64.81} = \sqrt{64}.\sqrt{81} = 8.9 = 72$$

$$\sqrt[3]{343.729} = \sqrt[3]{343}.\sqrt[3]{729} = 7.9 = 63$$

9. *Dzielenie potęg o jednakowym pierwiastku uskutecznia się, podnosząc wspólny ten pierwiastek do potęgi, któréj wykładnik równa się wykładnikowi dzielnéj, mniej wykładnikiem dzielnika. np.*

$$3^8 : 3^2 = \frac{3^8}{3^2} = 3^6$$

$$7^9 : 7^5 = \frac{7^9}{7^5} = 7^4$$

$$\text{w ogóle } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Jeżeli bowiem iloraz rozmnożony przez dzielnik, wydaje dzielną, i jeżeli przy tymże samym pierwiastku wykładnik dzielnéj równa się wykładnikowi dzielnika więcéj wykładnikiem ilorazu, przeto wykładnik ilorazu równać się będzie wykładnikowi dzielnéj, mniej wykładnikiem dzielnika.

Społczynniki poprzedzające potęgi do dzielenia podane dzielą się przez siebie; *np.*

$$35.\,6^5 : 5.\,6^2 = 7.\,6^3.$$

10. *Dzielenie ilości pierwiastkowych mających jednakowe wykładniki pierwiastkowe, odbywa się wyciągając tak wskazany pierwiastek z ilorazu ilości będących pod znakami pierwiastkowemi.*

I tak $\frac{\sqrt{59}}{\sqrt{32}}$ oznacza właściwie, że pierwiastek kwadratowy wyciągnięty z 59, podzielić potrzeba przez pierwiastek również wyciągnięty z 32: łatwiéj jest jednak wyciągnąć go tylko z $1{,}84375 = \frac{59}{32}$, tem bardziéj, że w obu razach jeden jest wypadek.

11. *Ułomek podnosi się do potęgi, podnosząc tak licznik jak mianownik do tejże potęgi.* np.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$$

w ogóle $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Stąd zarazem wynika, że *potęgi o jednym wykładniku dzielą się przez siebie, gdy iloraz z ich pierwiastków podnosi się do potęgi przez wykładnik wskazanej.*

Użycie którejkolwiek z tych dwóch zasad zależy jedynie od dogodności rachunku.

I tak *np.* mając $\left(\frac{125}{25}\right)^3$, łatwiéj jest otrzymać wypadek podług drugiéj zasady,

$$\left(\frac{125}{25}\right)^3 = 5^3 = 125.$$

nie zaś podług pierwszéj;

$$\left(\frac{125}{25}\right)^3 = \frac{125^3}{25^3} = \frac{1953125}{15625} = 125.$$

12. *Z ułomku wyciąga się pierwiastek, wyciągając go osobno z licznika i mianownika, i dzieląc pierwszy przez drugi.*

Zasada ta jednak zastosowywa się wtedy tylko, gdy licznik i mianownik są takiemi wielkościami, z których łatwo pierwiastek wyciągnięty być może. *np.*

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$$

podobnież $\sqrt[3]{\frac{5^6}{5^6}} = \frac{5^2}{5^2}$

W innym razie, lepiéj jest wyciągnąć pierwiastek z ilorazu ilości objętych znakiem pierwiastkowym. *np.*

$$\sqrt[3]{\frac{72}{8}}=\sqrt[3]{9}\ ;\quad \sqrt{\frac{59}{32}}=\sqrt{1,84375}.$$

13. *Dana potęga podnosi się do innej potęgi, podnosząc pierwiastek do potęgi wskazanéj przez iloczyn wykładników.* np.

$$\left(3^4\right)^5=3^{20}\ ;\ \text{w ogóle}\ \left(a^m\right)^n=a^{mn}.$$

Z danej potęgi wyciąga się pierwiastek, dzieląc wykładnik potęgi przez wykładnik pierwiastku.

Mając *np.* z 5^{12} wyciągnąć pierwiastek sześcienny, potrzeba 5^{12} na trzy równe czynniki rozłożyć, i wziąć z nich jeden. Że zaś 5^{12} składa się z 12 czynników, z których każdy równa się 5, trzy więc żądane równe czynniki wypadną, biorąc 5^4 za każdy z nich; będzie przeto:

$$5^{12}=5^4\,.\,5^4\,.\,5^4\ ;\ \text{stąd}\ \sqrt[3]{5^{12}}=5^4.$$

$$\text{podobnież}\ \sqrt[4]{7^{28}}=7^7\ ;\quad \sqrt[5]{2^{30}}=2^6.$$

$$\text{w ogóle}\qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

14. *Ilość pierwiastkowa podnosi się do potęgi, podnosząc samą ilość znakiem pierwiastkowym objętą do tejże potęgi, i z wypadku wyciągając pierwiastek podany. np.*

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^4=\sqrt[3]{5}\,.\sqrt[3]{5}\,.\sqrt[3]{5}\,.\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5.5.5.5.}=\sqrt[3]{5^4}$$

$$\text{w ogóle}\ \left(\sqrt[m]{a}\right)^r=\sqrt[m]{a^r}$$

Z ilości pierwiastkowej wyciąga się pierwiastek, wyciągając z ilości będącéj pod znakiem pierwiastkowym pierwiastek potęgi, wskazanéj przez iloczyn wykładników. np.

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}$$

$$\text{w ogóle}\ \sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

15. *Im wyższą jest potęga jakiéj liczby, która jest mniejszą od jedności, tem niższą jest jéj wartość.*

I tak *np.* $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ jest mniejsze od $\frac{3}{4}$, gdyż

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Podobnież $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ jest mniejsze od $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, gdyż

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}. \text{ i t. d.}$$

Odwrotnie: *im wyższą jest potęga jakiéj liczby, która jest większą od jedności, tem wyższą jest jéj wartość np.*

$$5^2 = 25;\ 5^3 = 125. \text{ i t. d.}$$

16. *Gdy wykładnik potęgi, do któréj mamy podnieść jaką liczbę, daje się rozłożyć na dwa następne czynniki, 2 i 3, wówczas żądana potęga otrzymuje się, podnosząc następnie daną liczbę do kwadratu i do sześcianu, potem mnożąc przez siebie wypadki. I tak*:

$$2^4 = 2^2 \times 2^2 = (2^2)^2 = 4^2 = 16.$$
$$2^6 = 2^3 \times 2^3 = (2^3)^2 = 8^2 = 64.$$
$$2^8 = 2^3 \times 2^3 \times 2^2 = (2^3)^2 \times 2^2 = 8^2 \times 2^2 = 64 \times 4 = 256.$$
$$2^9 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = (2^3)^3 = 8^3 = 512.$$
$$3^{11} = 3^4 \times 3^4 \times 3^3 = (3^2)^2 \times (3^2)^2 \times 3^3 = 9^2 \times 9^2 \times 3^3 =$$
$$= 81 \times 81 \times 27 = 177147 \text{ i t. d.}$$

17. *Jeżeli wykładnik pierwiastku mającego się wyciągnąć zawiera tylko czynniki 2 i 3, wówczas jakikolwiek jest ten pierwiastek otrzymać go można przez samo wyciąganie pierwiastku kwadratowego i sześciennego.*

I tak gdy podług (14),

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}, \text{ albo } np. \sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}},$$

chcąc zatem z 64 wyciągnąć pierwiastek 6téj potęgi, wezmiemy naprzód pierwiastek kwadratowy, którym będzie $8 = 2^3$, i potem z tego wypadku wyciągniemy pierwiastek sześcienny; stąd pierwiastek żądany będzie 2.

Podobnież $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$.

Pierwiastek przeto 4téj potęgi otrzymuje się przez dwa następne wyciągania pierwiastku kwadratowego.

Pierwiastek 6téj potęgi przez dwa następne wyciągania, jedno pierwiastku kwadratowego, drugie sześciennego.

Pierwiastek 8ej potęgi przez trzy następne wyciągania pierwiastku kwadratowego.

Pierwiastek 9téj potęgi przez dwa następne wyciągania pierwiastku sześciennego.

Pierwiastek 11 potęgi przez trzy następne wyciągania, z których dwa pierwiastku kwadratowego, a jedno pierwiastku sześciennego i t. d.

18. W ogóle, znajomość podnoszenia do kwadratu i sześcianu, na któréj tu ograniczemy się, równie jak znajomość wyciągania pierwiastków im odpowiednich, posłużyć może do otrzymania wypadku, przy wielu innych potęgach i pierwiastkach wyższych. Osobne w tym celu sposoby nie są praktyczne, tem więcéj że same działania, do których się stosują, jak późniéj zobaczymy, przez logarytmy znacznie się ułatwiają.

ROZDZIAŁ II.

O podnoszeniu do kwadratu.

---

19. *Kwadratem* czyli *drugą potęgą* jakiej liczby, jest iloczyn tej liczby przez nią samą. Stąd kwadraty dziewięciu liczb pierwszych obejmuje tabliczka Pytagoresa. I tak

liczby	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9	mają
kwadraty	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81	

względem których, za *pierwiastki kwadratowe* uważają się.

Kwadraty liczb wielocyfrowych podobnież przez mnożenie tych liczb przez się otrzymać można. Aby jednak z tych kwadratów powrócić do ich pierwiastków, czyli poznać sposób wyciągania pierwiastku kwadratowego, potrzeba zastanowić się nad składem kwadratu, czyli nad częściami, które wchodzą w jego wyrażenie.

20. *Kwadrat z liczby dwucyfrowéj, czyli złożonéj z dziesiątków i jedności. składa się z trzech oddzielnych części; to jest:* 1^0 *z kwadratu dziesiątków*; 2^0 *z podwójnego iloczynu dziesiątków przez jedności*; 3^0 *z kwadratu jedności.*

Mamy bowiem

$$15^2 = (10 + 5)^2 = (10 + 5)(10 + 5) =$$
$$= 10 \cdot 10 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 5 =$$
$$= 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 + 5^2 = 225.$$

Podobnież w ogóle

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) =$$
$$= aa + ab + ab + bb =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Ostatnie dwie części całkowitego kwadratu $2ab + b^2$, czyli $2ab + bb$, można wyrazić przez $(2a + b)b$, biorąc wspólny czynnik b za nawias; będzie zatem

$$(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)\,b.$$

Podobnież $(10 + 5)^2 = 10^2 + 2.10.5 + 5^2 =$
$$= 10^2 + (2.10 + 5)5$$

Stąd zamiast poprzedniego składu kwadratu z trzech oddzielnych części, można wziąć dwie tylko następne: 1° *Kwadrat z dziesiątków.* 2° *Iloczyn z dziesiątków podwojonych i z jedności, przez jedności.*

21. Gdy liczba wielocyfrowa, zawsze jako złożona z dziesiątków i jedności uważaną być może, skoro oprócz ostatniéj jéj cyfry z prawéj strony, wszystkie inne jako składające dziesiątki się wezmą, stąd skład kwadratu liczby wielocyfrowéj jest podobny jak liczby dwucyfrowéj. I tak:

$$153^2 = (150 + 3)^2 = 150^2 + (2.150 + 3)3$$

Kwadrat przeto z 153 obejmować będzie: 1° kwadrat z 150 jedności, czyli z 15 dziesiątków, a który tem się różni od kwadratu z 15 jedności, znalezionego w poprzednim przykładzie, iż w tymże samym wypadku 225, już nie jedności lecz sta przedstawia. Kwadrat bowiem z dziesiątków, czyli iloczyn z dziesiątków przez dziesiątki, sta zawierać musi. 2° Iloczyn z dziesiątków podwojonych i z jedności przez jedności, a który wydaje jedności: to jest 303 . 3 = 909 jednościom. Jedności te dodane do 225 set, czyli do 22500 jedności, dają na kwadrat żądany 23409.

Gdyby wartość 150^2 z poprzedniego przykładu nie była wiadomą, utworzylibyśmy ją następnie:

$$150^2 = (100+50)^2 = 100^2 + (2.100 + 50)50$$

Wstawiając tę wartość w skład kwadratu z 153, będzie

$$153^2 = 100^2 + (2.100 + 50)\,50 + \\ + (2.150 + 3)\,3$$

Podobnież znaleźlibyśmy że

$$1534^2 = 1000^2 + (2.1000 + 500)500 + \\ + (2.1500 + 30)\,30 + \\ + (2.1530 + 4)\,4. \text{ i t. d.}$$

W ogóle przeto *skład kwadratu z liczby wielocyfrowéj jest następujący.* 1° *Kwadrat z części pierwszéj.* 2° *Iloczyn z części pierwszéj podwojonéj i z części drugiéj, przez część drugą.* 3° *Iloczyn z części pierwszéj i drugiej podwojonych i z części trzeciéj, przez część trzecią.* 4° *Iloczyn z części pierwszéj, drugiéj i trzeciéj podwojonych i z części czwartéj, przez część czwartą i t. d.*

Przy rozwijaniu tylko podobnego kwadratu, gdy zwykle zera uzupełniające osobne jego części są opuszczane, potrzeba dobrze uważać na porządek cyfer już przez siebie już przez inne mnożonych, aby przy podpisywaniu iloczynów cząstkowych stąd wypadłych, jednych pod drugiemi, nie omylić się względem miejsca, jakie zajmować winny.

22. PRZYKŁADY.

1. *Podnieść do kwadratu liczbę* 45.

$$\underline{45^2}$$

$$\begin{array}{r} 4\,.4 = 16\,.\,. \\ 85.5 = 425 \\ \hline 2025 = 45^2, \end{array}$$

Kwadrat z 4 dziesiątków, czyli iloczyn z dziesiątków przez dziesiątki wydaje sta; stąd $4^2 = 16..$ stom. Dwie kropki po 16 zamiast zer zamieszczone, wskazują miejsce do zapełnienia przez inne cyfry. Iloczyn z dziesiątków podwojonych i z samych jedności przez jedności wydaje jedności, stąd $85.5 = 425$ jednościom; dla tego też dwie ostatnie cyfry tej liczby zajęły miejsce pod kropkami, przy pierwszym iloczynie położonemi. Summa dwóch iloczynów 2025 jest kwadratem z liczby 45.

2. *Znaleźć kwadrat z* 546.

$$
\begin{array}{l}
5 \;\;\;\; .\, 5 = 25\,.\,. \\
104\,.\, 4 = 416\,.\,. \\
1086\,.\, 6 = 6516 \\
\hline
298116 = 546^2
\end{array}
$$

Każdy następny z iloczynów cząstkowych, kwadrat całkowity składających, jest co do porządku swych cyfer o dwa miejsca niższy niż poprzedni. I tak, pierwszy iloczyn 25 oznacza 25 dziesiątków tysięcy, gdyż kwadrat z set daje na wypadek dziesiątki tysięcy. Drugi iloczyn 416 składają sta, o dwa miejsca niższe co do porządku niż dziesiątki tysięcy: ten iloczyn bowiem wypada z rozmnożenia 104 dziesiątków przez 4 dziesiątki. Trzeci iloczyn zawiera 6516 jedności, jako wypadek z mnożenia 1086 jedności przez 6 jedności.

3. *Znaleźć kwadrat z liczby* 2345.

$$
\begin{array}{l}
2345^2 \\
\hline
2 \;\;\;\;\; .\, 2 = 4\,.\,. \\
43 \;\;\; .\, 3 = 129\,.\,. \\
464 \;\, .\, 4 = 1856\,.\,. \\
4685\,.\, 5 = 23425 \\
\hline
5499025 = 2345^2
\end{array}
$$

4. *Podnieść do kwadratu* 129140163.

1	. 1 =	1	..							
22	. 2 =		44	..						
249	. 9 =		22	41	..					
2581	. 1 =			25	81	..				
25824	. 4 =			10	32	96	..			
258280	. 0 =				..	..	..	..		
2582801	. 1 =				2	58	28	01	..	
25828026	. 6 =				1	54	96	81	56	
258280323	. 3 =					7	74	84	09	69
		1	66	77	18	16	99	66	65	69

W ostatnim przykładzie z przyczyny trudności oznaczania zbyt wysokiego porządku niektórych cyfer, już danych, już z mnożenia wypadłych, lepiej jest podać tylko *wartość porządkową*, każdej cyfry szczególowo wziętej, *w potędze z* 10. *Wartość ta łatwo się znajdzie dla każdej cyfry objętej w danej liczbie, obliczając tylko liczbę cyfer po niej następujących, i podnosząc* 10 *do potęgi przez tę liczbę wskazanéj* (3).

I tak w danéj liczbie 129140163 cyfra najwyższego porządku 1, mająca po sobie 8 innych cyfer, ma wartość porządkową $10^8 = 100000000$, czyli 1 z ośmiu zerami: w kwadracie więc będzie taż wartość 10^{16}, czyli że pierwsza cyfra wypadłego kwadratu 17ste miejsce zajmować winna. Każdy następny iloczyn cząstkowy o 2 miejsca co do porządku cyfer, będzie niższy. Jakoż wartość cyfer drugi iloczyn wydających jest 10^7, sam więc iloczyn 10^{14}. Wartość cyfer 3ci iloczyn przez mnożenie tworzących jest 10^6, sam więc iloczyn będzie 10^{12} i t. d.

Jeżeli jeszcze kwadrat całkowity w przykładzie otrzymany, podzielimy na rzędy dwucyfrowe od ręki prawej do lewej, spostrzeżemy, że tyle w nim rzędów wypadnie, ile jest cyfer w pierwiastku; za każdem bowiem przybraniem nowej cyfry pierwiastku, o dwa miejsca w kwadracie dalej się posuwamy. Pierwszy rzęd tylko obejmuje jedną cyfrę, jako odpowiednią kwadratowi z 1, będącéj pierwszą cyfrą pierwiastku: gdyby tą cyfrą było 3 z następną wyższą od 3, albo 4, 5, i t. d. już by ten rząd dwie cyfry w sobie zawierał.

W dwóch pierwszych rzędach 166, objęty jest kwadrat z dwóch pierwszych cyfer pierwiastku, to jest $12^2 = 144$. Podobnież w trzech pierwszych rzędach 16677, znajduje się kwadrat z 3 pierwszych cyfer pierwiastku, czyli $129^2 = 16641$ i t. d. Różnice zachodzące stąd powstają, że dalsze części całkowitego kwadratu, albo zawierają cyfry podobnego porządku jak części poprzednie, albo zwiększają te części przy swojem dodaniu. Nadto z uwagi w jakich rzędach kwadratu części odpowiednie pierwiastku się mieszczą, wnosimy wprost to, co z poprzedniego uważania porządku cyfer przez siebie mnożonych, już się okazało, że cyfry kończące rzędy kwadratu, co do wartości swej miejscowéj są kwadratami względem podobnejże wartości cyfer kończących odpowiednie im części pierwiastku. I tak poczynając od ręki lewéj, wartość miejscowa cyfer kończących rzędy kwadratu, jest

$$10^{16},\ 10^{14},\ 10^{12}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 10^{2},\ .\ 10^{0}$$

gdy cyfer pierwiastku jest

$$10^{8},\ 10^{7},\ 10^{6},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 10^{1},\ 10^{0}.$$

Jako przykłady podnoszenia do kwadratu mogą jeszcze służyć następne.

$$19459^2=378652681$$
$$59049^2=3486784401$$
$$723456^2=523388583936$$
$$4194304^2=17592186044416$$
$$19531250^2=381469726562500$$
$$129140163^2=16677181699666569.$$
$$387420489^2=150094635296999121$$

23. *Gdy dwie liczby jednością od siebie się różnią, ich kwadraty różnić się będą o liczbę daną mniejszą, podwojoną i zwiększoną jednością.* I tak niech będą liczby dane 4 i 5, czyli 4 i 4 + 1.

$$\text{Kwadrat z } 4 = 4^2$$
$$\text{,, z } 4+1 = 4^2+(2.4+1)1$$
$$\text{Różnica tych kwadratów } = (2.4+1)1 = 2.4+1$$

to jest, liczbie mniejszéj 4, podwojonéj i zwiększonéj jednością. Stąd zarazem wynika, że *różnica dwóch kwadratów następnych tem jest większa, im pierwiastki tych kwadratów są większe.* Różnica ta bowiem zależy co do swej wielkości od liczby mniejszéj; im ta jest wyższą, tem wartość różnicy staje się większą. I tak różnica kwadratów z 5 i 6 jest większa, niż różnica kwadratów z 4 i 5; pierwsza bowiem $=2.5+1=11$, gdy druga równa się $2.4+1=9$.

24. *Podnoszenie do kwadratu liczb dziesiętnych* jest podobne jak liczb całkowitych, skoro tylko wartość porządkowa cyfer, każdy iloczyn cząstkowy przez mnożenie wydających, jest wskazaną. *Kwadrat ułomku dziesiętnego obejmuje zawsze dwa razy tyle cyfer dziesiętnych, ile sam ułomek.*

1. *Podnieść do kwadratu ułomek dziesiętny* 1,9459.

$$\begin{array}{llr}
1, & .\ 1, & = 1,..\\
2,9 & .\ 0,9 & = 2,61..\\
3,84 & .\ 0,04 & = 1536..\\
3,885 & .\ 0,005 & = 19425..\\
3,8909 & .\ 0,0009 & = 350181\\
\hline
 & & 3,78652681 = 1,9459^2
\end{array}$$

Wartość całego ułomku danego jest w dziesięcio-tysięcznych, czyli taka, jak najniższéj w nim cyfry dziesiętnéj, to jest $\frac{1}{10^4}$; wartość przeto kwadratu, podobnież jak i najniższéj jego cyfry, będzie co do porządku $\frac{1}{10^8}$. Stąd całkowity kwadrat, obejmować będzie oprócz liczby całkowitéj, 8 cyfer dziesiętnych.

2. *Podnieść do kwadratu ułomek dziesiętny* 0,12345.

$$\begin{array}{llr}
0, & .\ 0, & = 0,..\\
0,1 & .\ 0,1 & = 01..\\
0,22 & .\ 0,02 & = 44..\\
0,243 & .\ 0,003 & = 729..\\
0,2464 & .\ 0,0004 & = 9856..\\
0,24685 & .\ 0,00005 & = 123425\\
\hline
0,12345^2 & = & 0,0152399025
\end{array}$$

25. Przykłady podane wskazują tylko, że ułomki dziesiętne w podobnym sposobie jak liczby całkowite do kwadratu podnosić można; rzadko jednak używają tego sposobu, zwykle zamiast tych ułomków, biorą liczby całkowite po zniesieniu przecinka z nich wypadłe, i po podniesieniu ich do kwadratu, w wypadku odcinają na dziesiętne, dwa razy tyle cyfer, ile ich ułomki dane obejmowały.

I tak *np.* po znalezieniu że

$$7352^2 = 54051904$$

wniesiemy że

$$\begin{array}{lll}
735,2^2 & = & 540519,04\\
73,52^2 & = & 5405,1904\\
7,352^2 & = & 54,051904\\
0,7352^2 & = & 0,54051904\\
0,07352^2 & = & 0,0054051904 \text{ i t. d.}
\end{array}$$

26. *Kwadrat z ułomku zwyczajnego równa się kwadratowi z licznika, podzielonemu przez kwadrat z mianownika.* Dwa więc wyrazy ułomku oddzielnie do kwadratu podnieść potrzeba. *np.*

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}\ ;\ \left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{5^2}{7^2}=\frac{25}{49}.$$

$$\left(2\tfrac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}=6\tfrac{1}{4}.$$

$$\left(7\tfrac{3}{5}\right)^2=\left(\frac{38}{5}\right)^2=\frac{1444}{25}=57\,\frac{19}{25}.$$

Przy ułomkach, których licznik i mianownik są wielocyfrowe, skraca się działanie, zamieniając je najprzód na ułomki dziesiętne i te dopiero do kwadratu podnosząc.

ROZDZIAŁ III.

O wyciąganiu pierwiastku kwadratowego.

27. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z jakiéj liczby, jest to wynaleźć inną liczbę, któraby rozmnożona przez siebie samą, czyli podniesiona do kwadratu, wydała liczbę daną.

Gdy kwadrat z jakiéj liczby, jako iloczyn jej samej przez się, obejmuje zawsze, albo dwa razy tyle cyfer ile sama liczba, albo o jedną mniej, stąd z widoku danego kwadratu, łatwo jest poznać, ile cyfer zawierać będzie liczba z której powstał, czyli jego pierwiastek. Łatwiéj to jeszcze wyprowadzi się pamiętając, że kwadratami liczb

	1,	10,	100,	1000,	10000,	i t. d.
są	1,	100,	10000.	1000000,	100000000,	i t. d.

Stąd kwadraty złożone:

1° Z 1 lub 2 cyfer, odpowiadają pierwiastkowi jednocyfrowemu.

2° Z 3 lub 4 cyfer mają za pierwiastek liczbę dwucyfrową.

3° Z 5 lub 6 cyfer mają w pierwiastku 3 cyfry i t. d.

Dzieląc przeto liczbę podaną do wyciągnięcia z niej pierwiastku kwadratowego, na rzędy dwu-cyfrowe od strony prawej ku lewej, jakkolwiek rząd ostatni, z lewej strony pozostały, dwie lub jedną cyfrę obejmować może, zawsze liczba rzędów wypadła będzie także sama, jak ilość cyfer w pierwiastku kwadratowym otrzymać się mającym.

28. Nie potrzebujemy podawać sposobu do wyszukania pierwiastku kwadratowego z jednéj cyfry złożonego, jaki wynika przy wyciąganiu go z liczb całkowitych mniejszych od 100, gdyż skoro ten pierwiastek jest liczbą całkowitą, już z tabliczki do mnożenia jest dobrze znajomy; *np.* $\sqrt{49}=7$; $\sqrt{81}=9$. Idzie więc naprzód o poznanie sposobu jakim się otrzymuje pierwiastek kwadratowy z dwóch cyfer złożony.

Niech będzie kwadrat dany 7569. Pierwiastek jemu odpowiedni, jako z liczby mniejszéj od 10000, która jest kwadratem z 100, a większéj od 100, która jest kwadratem 10, będzie mniejszy od 100 a większy od 10: składać się przeto będzie z dwóch cyfer, to jest z dziesiątków i jedności. Oznaczając dziesiątki przez a, a jedności przez b, będzie

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b=7569$$

Zaczynamy od wyszukania cyfry a, czyli dziesiątków, gdyż te dziesiątki i przy utworzeniu kwadratu podanego, naprzód do kwadratu podniesione były.

Wiedząc że kwadrat z dziesiątków wydaje najmniej sta, cyfry zatem ten kwadrat składające muszą się znajdować w stach i tysiącach danéj liczby 7569, czyli w rzędzie pierwszym jej cyfer od lewej strony, jaki właśnie wynika z podziału liczby danej na rzędy dwucyfrowe (22). Oprócz tego kwadratu z dziesiątków, rzęd powyższy 75 set przedstawiający, może także obejmować sta pochodzące i z innych części kwadratu. Uważając teraz jaki jest pierwiastek, który podniesiony do kwadratu najwięcéj się zbliża do 75, znajdujemy że nim jest 8, gdyż $8^2=64$. Cyfra 9 wzięta za ten pierwiastek wydałaby kwadrat 81, większy od 75. Pierwszą przeto cyfrą pierwiastku dziesiątki oznaczającą jest 8. Że zaś wyciąganie pierwiastków jest działaniem zupełnie odwrotném podnoszeniu do potęg, przy wyciąganiu zatem pierwiastku kwadratowego musimy jedno po drugim odciągać to, cośmy dodali przy podnoszeniu do kwadratu. W tym celu odciągamy naprzód od 75 liczbę $64=8^2$, czyli kwadrat z dziesiątków.

Dla wynalezienia jedności pierwiastku, obok reszty 11 kładziemy dwie najbliższe cyfry danego kwadratu, czyli drugi jego rzęd dwucyfrowy, stąd powstanie liczba 1169. W całej tej liczbie złożonéj z 1169 jedności, mieści się druga część kwadratu, jedności także obejmująca $(2a+b)\,b$, czyli iloczyn z dziesiątków podwojonych i z jedności, przez jedności. Że zaś ta część kwadratu na dwie inne rozdzielić się może, to jest na $2ab+b^2$, czyli na iloczyn z podwojonych dziesiątków przez jedności, i na kwadrat z jedności, stąd iloczyn jako najmniéj z dziesiątków składać się mogący w samych dziesiątkach liczby 1169 objętym być musi. Jeżeli przeto 9, ostatnią cyfrę téj liczby, kropką od innych oddzielimy, trzy pierwsze cyfry 119 jako dziesiątki, obejmą $2ab$, czyli iloczyn z podwojonych dziesiątków przez jedności. Dzieląc zatem te 119, to jest $2ab$ przez podwojone dziesiątki $2a$, z dziesiątków już znajomych łatwo wyprowadzić się mogące, czyli przez $2.8=16$, otrzymamy $b=7$ na szukane jedności.

Dla przekonania się, że ostatnia cyfra 7 na jedności pierwiastku wynaleziona, jest dokładną, piszemy ją obok 16, czyli obok podwojonych dziesiątków, zwiększając je tem samem o te jedności; stąd powstaje liczba $167=160+7=2a+b$, czyli summa dziesiątków podwojonych i jedności. Mnożąc tę summę 167 przez 7, czyli $2a+b$ przez b, wypadnie $1169=(2a+b)b$; czyli iloczyn z dziesiątków podwojonych i z jedności przez jedności. Odciągając ten iloczyn od samejże liczby 1169, która właśnie drugą część kwadratu stanowić winna, nic nie pozostaje, co dowodzi, iż 87 jest pierwiastkiem kwadratowym liczby 7569. Gdyby zaś to ostatnie odciągnięcie nie mogło się uskutecznić, cyfra na jedności pierwiastku znaleziona, byłaby za wielką, zmniejszyć ją zatem potrzeba.

Działanie samo wyciągania pierwiastku kwadratowego z liczby 7569 następnie się przedstawi.

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}l}
 & & \sqrt{75.69} & = \;87 \\
8\,.\,8 & = & \underline{64} & 2.8=16 \\
 & & 11\;6.9 & 116:16=7 \\
167\,.\,7 & = & \underline{11\;69} & \\
 & & '' \;'' \;'' \;'' &
\end{array}
$$

Podobnież się postąpi przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z liczby 841.

	$\sqrt{8.41}$	=	29
2 . 2 =	4		2 . 2 = 4.
	44.1		44:4 = 9
49.9 =	44 1		
	''''		

Dzieląc 44 dziesiątków reszty przez 4, czyli przez podwojone dziesiątki pierwiastku, właściwie na iloraz wypada 11; nigdy jednak nad 9 więcej się w nim nie pisze; jeżeli ta cyfra okaże się za małą, to stąd wyniknie, że i poprzednia za mała użytą była.

29. Każda liczba jako kwadrat podaną być może, nie każda jednak jest *kwadratem zupełnym*, czyli takim, któryby miał za pierwiastek inną liczbę całkowitą. Sposób jednak podany do wyciągania pierwiastku służy i w tym przypadku, skoro tylko idzie o oznaczenie *części całkowitej tegoż pierwiastku np.*

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 1287.

	$\sqrt{12.87}$	=	35
3 . 3 =	9		2 . 3 = 6
	3 8.7		38:6 = 5
65 . 5 =	3 2 5		
	6 2		

Po zastosowaniu podobnego jak wyżej sposobu, znajdujemy 35 na pierwiastek a 62 na resztę: to okazuje, że pierwiastek kwadratowy z liczby 1289 przypada pomiędzy 35 i 36; biorąc 36, kwadrat z tej liczby wypadłby większy niż liczba dana, gdyż $36^2 = 1296$. Stąd pierwiastek żądany jest większym od 35, o pewny tylko ułamek: 35 zatem jest *częścią całkowitą tego pierwiastku*, czyli *pierwiastkiém największego kwadratu objętego w danej liczbie.*

30. *Każda reszta*, czy to ostatnia, po wyciągnięciu części całkowitéj pierwiastku pozostała, czy też w ciągu samego działania otrzymywana, *powinna być zawsze mniejsza, niż podwojony pierwiastek już znaleziony, zwiększony jednością.* Taka

bowiem jest wartość różnicy dwóch zupełnych kwadratów, jeden po drugim następujących, czyli co do pierwiastku o jedność się różniących (30). Jeżeli więc powyższa reszta jest równa, albo większa od tejże różnicy, pierwiastek znaleziony o jedność lub więcéj zwiększyć potrzeba.

31. Zastanówmy się teraz nad sposobem wyciągania pierwiastku trzycyfrowego.

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 413449.

	$\sqrt{41.34.49}$ = 643		
6 . 6 =	36	2.6	= 12
	53.4	53:12	= 4
124 . 4 =	496	2.64	= 128
	384.9	384:128	= 3
1283 . 3 =	3849		
	″ ″ ″ ″		

Trzy rzędy dwucyfrowe objęte w danéj liczbie wskazują, iż pierwiastek jej odpowiedni z trzech cyfer się składa.

Jakakolwiek jednak jest liczba tych cyfer, zawsze pierwiastek uważać można jako złożony z dziesiątków i jedności. Że zaś kwadrat z dziesiątków najmniéj sta obejmować winien, dwie więc ostatnie cyfry danéj liczby, jako mniejsze co do porządku od set, do utworzenia dziesiątków pierwiastku wchodzić nie mogą. Szukać ich potrzeba w liczbie 4134, wyciągając z niéj pierwiastek sposobem wyżéj podanym i uważając wypadłe 64 za dziesiątki pierwiastku żądanego.

Obok reszty 38, po oznaczeniu dziesiątków pierwiastku pozostałej, umieszczamy dwie ostatnie cyfry liczby danej; liczba stąd powstała 3849, obejmuje podwójny iloczyn z 64 dziesiątków pierwiastku przez jedności znaleźć się mające i kwadrat z jedności. Gdy jednak iloczyn, jako dziesiątki najmniej zawierający, w dziesiątkach liczby 3849 objęty być musi, stąd oddzielając kropką ostatnią jej cyfrę 9, i dzieląc pozostałą 384 przez podwojone dziesiątki, czyli przez 128, iloraz 3 da nam jedności szukane.

Jakoż umieszczając te 3 jedności obok 128, czyli obok podwojonych dziesiątków i mnożąc liczbę stąd otrzymaną 1283 przez 3 jedności, iloczyn wypadły odciągnięty od 3849 żadnéj reszty nie pozostawi.

32. Jeżeli dany kwadrat jest 7 lub 8 cyfrowy. pierwiastek jego 4 cyfer obejmować będzie. Trzy pierwsze cyfry otrzymają się podobnie jak w poprzednim przykładzie, oddzielając dwie ostatnie cyfry z danéj liczby, i na pozostałych działanie odbywając. Trzy te cyfry tak otrzymane uważają się za dziesiątki pierwiastku: jedności więc tylko szukać potrzeba. W tym celu do reszty dopisują się dwie ostatnie cyfry danéj liczby, naprzód oddzielone. W liczbie stąd powstałéj po odcięciu ostatniéj jej cyfry. mieści się iloczyn z podwojonych dziesiątków przez jedności: dzieląc więc tę liczbę przez podwojone dziesiątki, znajdą się jedności.

Podług tego wnosimy, że jakakolwiek jest liczba cyfer w pierwiastku otrzymać się mającym, zawsze przy jego wyciąganiu jedno i toż samo prawidło się zastosowywa. Zawsze pierwsza cyfra pierwiastku będzie pierwiastkiem największego kwadratu objętego w pierwszym rzędzie danej liczby. Każda zaś następna cyfra wypadnie z podzielenia przez podwojone dziesiątki pierwiastku, już znalezione, reszty z odpowiednim następnym rzędem połączonéj, po odcięciu ostatniéj jej cyfry. Dziesiątki tylko które podwajać potrzeba, obejmować mogą jedną, dwie trzy.... cyfer pierwiastku, podług tego jak się wynajduje druga, trzecia, czwarta.... jego cyfra. Jeśli w końcu tych wszystkich działań nie pozostaje zadna reszta, liczba dana była *kwadratem zupełnym*: w przeciwnym razie nie jest podobnym kwadratem, pierwiastek jednak znaleziony jest *pierwiastkiem z największego kwadratu objętego w téj liczbie, albo* co na jedno wychodzi, *jest częścią całkowitą pierwiastku kwadratowego z tej liczby.*

33. *Przykłady* następne *wyciągania pierwiastków wielocyfrowych*, wskażą nie tylko samo działanie, ale i różne sposoby jego przedstawiania.

1. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby* 58583716

Sposób pierwszy.

$$
\begin{array}{lcl|lcl}
 & \sqrt{58.58.37.16} & = & 7654 & & \\
7^2 & = 49 & & 2.7 & = & 14 \\
 & 95.8 & & 95:14 & = & 6 \\
6.146 & = 876 & & 2.76 & = & 152 \\
 & 823.7 & & 823:152 & = & 5 \\
5.1525 & = 7625 & & 2.765 & = & 1530 \\
 & 6121.6 & & 6121:1530 & = & 4 \\
4.15304 & = 61216 & & & & \\
 & \text{'' '' ''} & & & &
\end{array}
$$

Sposób drugi.

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{58.58.37.16} = 7654 & \\
49 & \\
95.8 & 146 \\
876 & \\
823.7 & 1525 \\
7625 & \\
6121.6 & 15304 \\
61216 & \\
\text{'' '' ''} &
\end{array}
$$

Sposób trzeci.

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{58.58.37.16} = & 7654 \\
95.8 & 146 \\
823.7 & 1525 \\
6121.6 & 15304. \\
\text{'' '' ''} &
\end{array}
$$

Pierwszy sposób przez samo swe przedstawienie, dostatecznie działanie wyjaśnia.

W drugim sposobie, liczby pod 7654, czyli pod wypadkiem z wyciągania pierwiastku zamieszczone, bez ostatnich swych cyfer wzięte, dają następne dzielniki 14, 152 i 1530, służące do wyszukania również następnych po sobie cyfer pierwiastku. Też same zaś liczby całkowicie, czyli z ostatniemi już cyframi wzięte, przedstawiają mnożne, które przez te ostatnie cyfry rozmnożyć potrzeba, aby utworzyć iloczyny cząstkowe, od reszt im odpowiednich odciągnąć się mające.

Trzeci sposób w tem tylko różni się od drugiego, iż nie przedstawia wyżéj wspomnionych iloczynów cząstkowych, ale wprost wypadłe z ich odciągnięcia reszty.

2. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z* 17698849.

	$\sqrt{17.69.88.49}$ =	4207	
4^2 =	16	2 . 4	= 8.
	16.9	16 : 8	= 2.
82 . 2 =	164	2 . 42	= 84.
	58.84.9	58 : 84	= 0.
8407. 7 =	58849.	2 . 420	= 840
	" " "	5884 : 840	= 7

W ciągu działania po dopisaniu trzeciego rzędu obok reszty drugiéj, nie można było podzielić dziesiątków liczby stąd wypadłej, przez podwójny pierwiastek już znaleziony, czyli liczby 58 przez 84; za iloraz więc stanowiący trzecią cyfrę pierwiastku piszemy 0, i zniżając rząd następny, działanie dalej odbywamy.

3. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby* 8418702.

	$\sqrt{8.41.87.02}$ =	2901	
2 . 2 =	4	2 . 2	= 4
	44.1	44 : 4	= 9.
49 . 9 =	441	2 . 29	= 58.
	" " " 8.70.2	8 : 58	= 0
5801 . 1 =	5801	2 . 290	= 580
	2901	870 : 580	= 1.

Liczba dana nie jest kwadratem zupełnym, gdyż pierwiastek jej przypada pomiędzy 2901 i 2902: biorąc więc 2901, różnić się będzie od prawdziwego o mniéj niż jedność Reszta pozostała 2901, chociaż równa samemu pierwiastkowi, nie jest za wielką, dopiero byłaby taką, gdyby przewyższała dwa razy wzięty pierwiastek znaleziony (30).

4. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z* 39505376.

$$\sqrt{3.9\,5.0\,5.5\,3.7\,6} = 19876$$

```
 1                29
 29.5             388
 261              3967
  340.5           39746
  3104
   3015.3
   27769
    23847.6
    238476
     " " "
```

29 : 2 daje 9 na drugą cyfrę pierwiastku.

340 : 38 daje 8 na trzecią cyfrę.

3015 : 396 daje 7 na 4tą cyfrę.

23847 : 3974 daje 6 na 5tą, czyli ostatnią cyfrę pierwiastku.

5. *Wyciągnąć pierwiastek kwadr. z* 22876792454961 *przedstawiając działanie w sposobie najkrótszym.*

$$\sqrt{2\,2\,8\,7.6\,7.9\,2.\,4\,5.4\,9.61} = 4\,7\,8\,2\,9\,6\,9$$

```
 68.7                    87.
  786.7                  948
   2839.2                9562
    92684.5              95649
     660044.9            956586
      8609336.1          9565929
       "  "  "  "
```

34. Z uwagi na kwadraty dziesięciu liczb pierwszych całkowitych, idących od 1 do 10, wnosimy, że pomiędzy liczbami całkowitemi jedno i dwucyfrowemi, znajduje się 9 tylko takich, które są *kwadratami zupełnemi* innych liczb całkowitych (19). Wszystkie pozostałe, jeżeli za kwadraty są wzięte, mają za pierwiastek kwadratowy liczbę całkowitą zwiększoną ułomkiem. Najczęściej z samego nawet widoku, tak tych liczb jak i innych ilekolwiek cyfer obejmujących, łatwo poznać można, *która z nich*

nie jest kwadratem zupełnym: główniejsze w tym względzie znaki są następne.

1°. *Gdy liczba będąc parzystą, nie daje się podzielić przez* 4. Wszelka bowiem liczba parzysta dzieli się przez 2, jej więc kwadrat dzielić się powinien przez $2^2=4$.

2°. *Gdy będąc nieparzystą, zmniejszona o jedność, nie dzieli się przez* 4. Kwadraty bowiem zupełne liczb następnych po sobie, różnią się o podwojoną liczbę mniejszą, zwiększoną o jedność; ta zaś podwojona mniejsza, jako zawsze parzysta dzieli się przez 4.

3°. *Gdy będąc podzielną przez* 3 *lub* 5, *nie jest podzielną przez* 9 *lub przez* 25. I tak liczba 144, czyli kwadrat 12 dzielić się daje przez 3 i $3^2=9$. Podobnież $225=15^2$ dzieli się przez 5 i 25. Liczby zaś 12 i 15, jakkolwiek podzielne przez 3 i przez 5, ale gdy się nie dzielą przez 9 i 25, nie są kwadratami zupełnemi.

4°. *Gdy się kończy liczbą nie parzystą zer lub cyfer dziesiętnych.* Każda bowiem liczba kończąca się zerami, albo cyframi dziesiętnemi, w swym kwadracie ma podwójną ich ilość, czyli obejmuje zawsze liczbę parzystą zer, lub cyfer dziesiętnych. Stąd liczby 14000, i 14,4 nie mogą być kwadratami zupełnemi.

5°. *Gdy się kończy jedną z* 4ch *następnych cyfer*, 2, 3, 7, 8. Wszystkie bowiem kwadraty z jedności, jakie dana liczba obejmować może, kończą się na te same cyfry, co kwadraty 9 liczb pierwszych, to jest na 1, 4, 5, 6, 9, a te na mocy składu kwadratu, przez inne jego części zmienione być nie mogą.

6°. *Jeżeli mając* 5 *za ostatnią cyfrę, nie ma* 2 *za przedostatnią.* Własność ta kwadratów niezupełnych wynika z samego składu kwadratu z liczby dwu lub więcéj cyfrowej. Dwie ostatnie cyfry zupełnego kwadratu przedstawiają tylko kwadrat z jedności, czyli jak tu kwadrat z 5: podwójny bowiem iloczyn z dziesiątków przez jedności, czyli co na jedno wychodzi, iloczyn z dziesiątków przez podwojone jedności, to jest przez $2.5=10$, zawsze tylko z set składać się będzie, nie powiększy zatem liczby dziesiątków z kwadratu jedności powstałych. Stąd liczba 345, nie może być kwadratem zupełnym, gdyż chociaż ma cyfrę 5 za jedności, za dziesiątki nie ma 2.

35. *Liczba całkowita nie będąca kwadratem zupełnym innej liczby całkowitéj, nie może być kwadratem nawet liczby ułomkowej dokładnéj, czyli że jej pierwiastek w ułomku nawet dokładnie oznaczyć się nie daje.*

Gdyby bowiem ułomek dokładny $\frac{a}{b}$ mógł być uważany za pierwiastek kwadratowy jakiej liczby całkowitéj, wówczas kwadrat tego ułomku $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$ byłby równym tej liczbie całkowitéj. Tym czasem to jest niepodobna, gdyż przypuszczając że ułomek $\frac{a}{b}$ jest przyprowadzony do najprostszego swego wyrażenia, w kwadracie z niego wypadłym $\frac{a^2}{b^2}$ wyrazy a^2 i b^2 nie mogą mieć innych wspólnych dzielników, jak te które są dla wyrazów a i b. Że zaś te ostatnie są liczbami pierwszemi pomiędzy sobą, stąd a^2 i b^2 muszą być takiemi. Ułomek przeto $\frac{a^2}{b^2}$ jest podobnie nieprzywiedlnym, jak ułomek $\frac{a}{b}$ z którego powstał, nie może być przeto równym liczbie całkowitéj. Stąd liczba całkowita jako kwadrat ułomku uważaną być nie może.

36. Pierwiastki kwadratów niezupełnych, jako w żadnej liczbie dokładnie oznaczyć się nie dające, zowią się *niewspółmierne*. Można je jednak otrzymać, o tyle zbliżone do prawdziwych, ile potrzeba rachunku wymaga. *Stopień przybliżenia pierwiastku zwykle oznaczają w ułomku dziesiętnym*. Że zaś ułomki dziesiętne

0,1 ; 0.01 ; 0,001 i t. d.

mają kwadraty 0,01, 0,0001, 0,000001. i t. d.

czyli liczby podwójną ilość cyfer dziesiętnych obejmujące, stąd aby pierwiastek z jakiéj liczby był przybliżony do prawdziwego w częściach swych dziesiętnych, setnych, tysiącznych, i t. d. części te zawierać winien. Musi być przeto wyciągany z kwadratu obejmującego w sobie części setne, dziesięcio-tysiączne, milionowe i t. d. jakie własnie z pomnożenia pierwszych przez siebie powstają. To zaś nastąpi, gdy do liczby danéj całkowitej, z któréj pierwiastek kwadratowy wyciągnąć mamy, dopiszemy dwa razy tyle zer, ile cyfer dziesiętnych w pierwiastku jest żądanych. Przez to bowiem dopisanie *np.* 2, 4, 6, i t. d. zer, rozdzielamy liczbę daną na części setne, dziesięcio-tysiączne, milionowe i t. d. Po wyciągnięciu potem pierwiastku zwyczajnym sposobem, z liczby tak uzupełnionéj zerami, oddzielamy przecinkiem w pierwiastku otrzymanym dwa razy mniéj cyfer na dziesiętne, niż zer przypisano do liczby danéj.

Uważając nawet, że przez powyższe dopisanie 2, 4, 6 i t. d. zer do liczby danéj, nie rozdzielamy jej na części niższe, ale zwiększamy sto, dziesięć tysięcy, milion i t. d. razy, i przy tem przypuszczeniu podobnie jak wprzód działać będzie potrzeba, gdyż pierwiastek z liczby tak zwiększonéj wypadły, będzie 10, 100 1000 i t. d. razy większy od szukanego. Dzieląc go przeto przez 10, 100, 1000, i t. d. otrzymamy pierwiastek przybliżony w częściach dziesiętnych, setnych, tysiącznych i t. d. jedności głównéj.

37. *Przykłady wyciągania pierwiastku kwadratowego przybliżonego.*

1. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby* 28, *z przybliżeniem o mniej niż* $\frac{1}{100}$.

W tym celu przypisujemy do liczby 28 zer cztery, przez co ją zamieniamy na 280000 dziesięciotysięcznych, których pierwiastek wyda setne, gdyż $\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{10000}$.

$$\sqrt{28.00.00} = 529$$

5 . 5 =	25	2.5	= 10
	30.0	30:10	= 2
102 . 2 =	204	2.52	= 104
	960.0	960:104	= 9
1049 . 9 =	9441		
	159		

Pierwiastek wypadły jest 529 setnych, czyli 5,29; że zaś z przyczyny pozostałej reszty 159, uważa się jako objęty pomiędzy 5,29 i 5,30, biorąc więc za ten pierwiastek 5,29, uważamy go jako przybliżony na mniej niż $\frac{1}{100}$. Nie oznaczając stopnia przybliżenia, można działanie wyciągania pierwiastku prowadzić bez końca, podobnie jak i w dzieleniu, gdy dzielna przez dzielnik nie jest podzielną.

2. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 7 z przybliżeniem o mniej niż* $\frac{1}{1000}$.

Zamiast dopisywania 6 zer do liczby danéj, w ciągu działania je przydajemy; przy każdej z trzech reszt następnych, jako nowy rzęd po dwa zera zamieszczając.

		$\sqrt{7}$	$=$	2645
2 . 2 =		$\underline{4}$	2.2	= 4
		3 0.0	30:4	= 6
46 . 6 =		$\underline{2\ 7\ 6}$	2.26	= 52
		2 4 0.0	240:52	= 4
524 . 4 =		$\underline{2\ 0\ 9\ 6}$	2.264	= 528
		3 0 4 0.0	3040:528	= 5
5285 . 5 =		$\underline{2\ 6\ 4\ 2\ 5}$		
		3 9 7 5		

Pierwiastek otrzymany jest 2645 tysiącznych, czyli 2,645 z przybliżeniem o $\frac{1}{1000}$ prawie.

3. *Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy przybliżony z 43, którüby w sobie zawierał 6 cyfer dziesiętnych*

$\sqrt{4\ 3}$	$=$	6,557430
7 0.0		125
7 5 0.0		1305
9 7 5 0.0		13107
5 7 5 1 0.0		131144
5 0 5 2 4 0.0		1311483
1 1 1 7 9 5 1 0.0		13114868
6 8 7 6 1 5 6		

70 : 12 daje 5 na 2gą cyfrę pierwiastku.

750 : 130 daje 5 na 3cią cyfrę.

9750 : 1310 daje 7 na 4tą cyfrę.

57510 : 13114 daje 4 na 5tą cyfrę.

505240 : 131148 daje 3 na 6stą cyfrę.

11179510 : 1311486 daje 8 na 7mą, czyli ostatnią cyfrę pierwiastku.

6876156 jest resztą ostatnią działania.

W pierwiastku otrzymanym 6,557438 odcieliśmy 6 cyfer na dziesiętne, gdyż w ciągu jego wyciągania uważaliśmy liczbę daną, jako połączoną z 12 zerami. Części przeto w pierwiastku wypadły milionowe i dla tego ten pierwiastek o mniej niż jedną milionową część różni się od prawdziwego.

38. Wyciąganie pierwiastku kwadratowego przybliżonego właściwie na tem polega, że naprzód liczbę daną mnożymy i dzielimy przez kwadrat z liczby oznaczającéj stopień żądany przybliżenia, czyli przez kwadrat z mianownika ułomku wyrażającego toż przybliżenie. Po tej dopiero zamianie liczby danej na ułomek równy jéj co do wartości, wyciągamy z niego pierwiastek, wyciągając go osobno z licznika i mianownika.

I tak w *przykładzie* 1, gdzie szło o wyciąganie pierwiastku z 28 z przybliżeniem o $\frac{1}{100}$ prawie, gdy

$$28 = \frac{28.100^2}{100^2} = \frac{28.10000}{10000} = \frac{280000}{10000}$$

stąd $$\sqrt{28} = \sqrt{\frac{280000}{10000}} = \frac{\sqrt{280000}}{100} = \frac{529}{100} = 5{,}29$$

Podobnież w *przykładzie* 2gim.

$$\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7.1000^2}{1000^2}} = \frac{\sqrt{700000}}{1000} = \frac{2645}{1000} = 2{,}645 \text{ i t. d.}$$

39. Sposób powyższy działania służy i wtenczas, *gdy stopień przybliżenia pierwiastku otrzymać się mającego w ułomku zwyczajnym jest żądany*. I tak gdy *np*. wyciągnąć chcemy pierwiastek z 29 z przybliżeniem o mniej niż $\frac{1}{15}$.

$$\sqrt{29} = \sqrt{\frac{29.15^2}{15^2}} = \frac{\sqrt{6525}}{15} = \frac{80}{15}$$

z przybliżeniem o $\frac{1}{15}$ prawie. Wartość ta bowiem przypada pomiędzy $\frac{80}{15}$ i $\frac{81}{15}$. Biorąc więc jeden z tych ułomków za $\sqrt{29}$, nie popełniamy błędu na $\frac{1}{15}$ prawie, gdyż pierwiastek z 29 mniej się różni od każdego z tych ułomków, jak te ułomki pomiędzy sobą.

Podobnież gdy wyciągamy *np.* pierwiastek kwadr. z 59 z przybliżeniem o $\frac{1}{7}$ prawie: będzie

$$\sqrt{59} = \sqrt{\frac{591.7^2}{7^2}} = \frac{\sqrt{2891}}{7} = 7\frac{4}{7}.$$

Znajdziemy bowiem, że 59, czyli co na jedno wychodzi $\frac{2891}{49}$ mieści się pomiędzy kwadratami ułomków $\frac{53}{7}$ i $\frac{54}{7}$.

40. Przy *wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z liczb dziesiętnych*, potrzeba naprzód uczynić parzystą, ilość cyfer dziesiętnych w nich objętych, już to przypisując jedno lub więcéj zer, już znosząc z prawej strony jedną lub kilka cyfer dziesiętnych, stosownie do stopnia przybliżenia, jaki nadać chcemy pierwiastkowi, potem wyciągać się mającemu.

I tak, aby otrzymać pierwiastek kwadratowy z 3,456 z przybliżeniem o mniej niż $\frac{1}{1000}$, szukamy pierwiastku z liczby 3,456000, która dwa razy tyle cyfer dziesiętnych obejmuje, ile ich żądamy w pierwiastku. Wyciągamy przeto ten pierwiastek z $\frac{3456000}{1000000}$ a który równa się $\frac{1859}{1000} = 1,859$.

Podobnież chcąc oznaczyć pierwiastek z 0,58284 zbliżony o mniej niż $\frac{1}{100}$, znosiemy ostatnią cyfrę 4, gdyż pozostała dopiero ilość cyfer będzie podwójną względem tej, jaką w pierwiastku otrzymać mamy. Szukamy przeto pierwiastku z liczby 0,5828, czyli z $\frac{5828}{10000}$ a który będzie $\frac{76}{100} = 0,76$.

Podług tego znajdziemy że:
$\sqrt{31,027}$ o 0,001 prawie $= 5,570$.
$\sqrt{0.01001}$ o 0,00001 prawie $= 0.10004$.
$\sqrt{0,068719}$ „ „ „ $= 0,26214$ i t. d.

41. *Gdy więcéj niż połowa cyfer pierwiastku kwadratowego jest już znalezioną, następne cyfry łatwo się wynajdą, z przybliżeniem o jedność prawie, przez proste dzielenie; to jest dzieląc ostatnią cyfrę z przypisanemi cyframi liczby danej, które jeszcze do działania nie były użyte, przez podwojony pierwiastek już wyszukany, biorąc jego cyfry podług właściwéj ich wartości porządkowéj.*

Przypuśćmy, że z liczby całkowitéj N mając wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, z 7 cyfer złożony, 4 pierwsze już znaleźliśmy zwyczajnym sposobem, 3 zaś ostatnie do wyszukania pozostają. Część wiadomą pierwiastku weźmy za jego dziesiątki, i oznaczmy przez a, część zaś niewiadomą znaleźć się mającą, a która jako złożona z jedności się uważa, oznaczmy przez x. Stąd liczba dana N jako kwadrat całego tego pierwiastku mieć będzie następną wartość.

$$N = (a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

$$\text{przeto } N - a^2 = 2ax + x$$

$$\frac{N-a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}$$

$$\text{zatém } x = \frac{N-a^2}{2a} - \frac{x^2}{2a}$$

$$\text{że zaś } N - a^2 = R$$

czyli że różnica pomiędzy liczbą daną N, a kwadratem z części wiadoméj pierwiastku a^2, stanowi *resztę całkowitą* składającą się z ostatniéj reszty i z dopisanych do niej rzędów liczby danéj, jeszcze nie użytych, zatem będzie

$$x = \frac{R}{2a} - \frac{x^2}{2a}$$

czyli że x część niewiadoma pierwiastku, jest mniejszą od ilorazu wypadłego z podzielenia reszty całkowitej przez podwojoną część wiadomą, o wartość $\frac{x^2}{2a}$, która jak zobaczymy, jest mniejszą od jedności. Część bowiem niewiadoma x podług założenia z 3 cyfer się składa, stąd x^2 najwięcéj ich 6 obejmować może. Że zaś część wiadoma a, jako złożona z 4 pierwszych cyfer pierwiastku, przez wzgląd na ich wartość porządkową właściwie 7 cyfer obejmuje, przeto x^2 jest mniejszem od a, a tem bardziej od $2a$. Ułomek zatem $\frac{x^2}{2a}$ jest właściwym, czyli mniejszym od jedności. Biorąc przeto iloraz z reszty całkowitej przez podwojoną część wiadomą pierwiastku, otrzymujemy część niewiadomą, popełniając błąd mniejszy od jedności.

Na zastosowanie tego prawidła dajmy *np.* że chcemy wynaleźć pierwiastek kwadratowy z 8649928056778, z przybliżeniem o jedność prawie.

$\sqrt{8.64.99.28.05.67.78}$	=	2941076
46.4		49
239.9		584
632.8		5881
447056778	:	5882000
35316778		076
24778		

Po wyszukaniu przez zwyczajne wyciąganie 4 pierwszych cyfer pierwiastku 2491, znajdujemy 3 ostatnie cyfry 076, dopisując do reszty ostatniéj 447, trzy rzędy jeszcze nie użyte, złożone z cyfer 056778 i liczbę stąd powstałą 447056778 dzieląc przez 5882000, czyli przez podwójny pierwiastek już otrzymany, uzupełniony 3ma zerami, przez wzgląd na wartość porządkową jego cyfer.

Podobne uproszczenie można także wprowadzić przy wyciąganiu pierwiastku przybliżonego z ułomku dziesiętnego. I tak chcąc otrzymać pierwiastek kwadratowy z 23857,638 z przybliżeniem na 0,00001 prawie, wyciągamy go z liczby 23857638000000; i po wyszukaniu 5 cyfer pierwszych pierwiastku, znajdziemy 3 inne przez proste dzielenie. Pierwiastek całkowity tak wypadły, po odcięciu 5 cyfer na dziesiętne, będzie pierwiastkiem żądanym.

42. *Pierwiastek kwadratowy z ułomku zwyczajnego otrzymuje się dzieląc pierwiastek licznika przez pierwiastek mianownika.* Pierwiastek bowiem tak otrzymany, rozmnożony przez siebie wydaje dany ułomek.

I tak $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, gdyż $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

podobnież $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ i t. d.

Sposób ten jednak zastosowywa się wówczas tylko, gdy licznik i mianownik są kwadratami zupełnemi.

Jeżeli licznik tylko nie jest kwadratem zupełnym, wyciąga się z niego pierwiastek przybliżony, i ten się dzieli przez pierwiastek z mianownika.

I tak $\sqrt{\frac{28}{64}} = \frac{5,29}{8} = 0,66$ z przybliżeniem o mniéj niż $\frac{1}{100}$. Jakoż $0,66 \times 0,66 = 0,4356$, gdy $\frac{28}{64} = 0,4375$. Biorąc 0,67 za pierwiastek, otrzymalibyśmy $0,67 \times 0,67 = 0,4489$.

Jeżeli mianownik nie jest kwadratem zupełnym, jakikolwiek będzie licznik, wówczas zamiast wyciągania pierwiastku przybliżonego z mianownika, dla większego ułatwienia mnożymy oba wyrazy danego ułomku przez jego mianownik. Tym sposobem ułomek zamieni się na inny równy jemu co do wartości, a którego mianownik jest kwadratem zupełnym. Z tym więc ułomkiem co do wyciągania pierwiastku postąpimy tak, jak w przypadku poprzednim *np.*

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{4.7}{7^2}} = \frac{\sqrt{28}}{7} = \frac{5,29}{7} = 0,75.$$

W razie, gdy mianownik chociaż nie jest kwadratem zupełnym, ale rozłożyć się daje na dwa czynniki, z których jeden jest kwadratem zupełnym, wówczas dla skrócenia roboty, mnożą się oba wyrazy ułomku przez ten czynnik, co uczyni mianownik kwadratem zupełnym. *np.*

$$\sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{\frac{5}{4.2}}=\sqrt{\frac{5.2}{4.2^2}}=\sqrt{\frac{10}{2^2.2^2}}=\frac{3,16}{4}=0,79$$

z przybliżeniem o $\frac{1}{100}$ prawie. Podobnież

$$\sqrt{\frac{11}{75}}=\sqrt{\frac{11}{25.3}}=\sqrt{\frac{11.3}{25.3^2}}=\sqrt{\frac{33}{5^2.3^2}}=\frac{5,74}{15}=0,35.$$

Całość złączona z ułomkiem wprzód się zamienia na ułomek, nim wyciąganiu pierwiastku poddaną będzie.

W każdym razie, a szczególniéj gdy wyrazy ułomku nie są kwadratami zupełnemi, można skrócić wyciąganie pierwiastku kwadratowego, zamieniając wprzód ułomek podany na dziesiętny, obejmujący w swojem wyrażeniu dwa razy tyle cyfer dziesiętnych, ile ich mieć chcemy w pierwiastku; i z tak zamienionego ułomku wyciągając pierwiastek sposobem podobnym, jak przy liczbach całych.

I tak gdy *np.* mamy wyciągnąć pierwiastek z $\frac{5}{7}$, przybliżony o 0,001 prawie, zamieniamy naprzód $\frac{5}{7}$ na ułomek dziesiętny, obejmujący 6 cyfer dziesiętnych, i z tego potem wyciągamy pierwiastek kwadratowy. Cały rachunek następnie się przedstawi.

50	7	
10	0,7 1.4 2.8 5	0,845
30	7 4.2	164
20	8 6 8.5	1685
60	2 6 0	
40		
5		

Pierwiastek przeto szukany jest 0,845.

ROZDZIAŁ IV.

O podnoszeniu do sześcianu.

---

43. *Sześcianem* jakiej liczby zowie się iloczyn otrzymany z rozmnożenia tej liczby przez się tak, iżby trzy razy wzięta była za czynnik: że zaś kwadrat iest iloczynem liczby saméj przez się, stąd aby podnieść daną liczbę do sześcianu, dosyć jest rozmnożyć jej kwadrat przez nią samą. Chcąc jednak od tak otrzymanego sześcianu powrócić do jego pierwiastku, potrzeba poznać części tworzące ten sześcian.

44. Gdy liczba jest dwucyfrowa, czyli z dziesiątków i jedności złożona, ogólne jej wyrażenie $a+b$, przy swem podniesieniu do sześcianu następną przyjmie formę.

$$\begin{aligned}(a+b)^3=(a+b)^2\,(a+b)=&(a^2+2ab+b^2)\,(a+b)\\ =&\,a^3+2a^2b+ab^2+\\ &+a^2b+2ab^2+b^3\\ =&\,a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Stosując toż samo do sześcianu *np.* z liczby 25, znajdziemy:

$$\begin{aligned}(25)^3=(20+5)^3=(20+5)^2(20+5)=&(20^2+2.20.5+5^2)(20+5)\\ =&\,20^3+2.20^2.\,5+20.5^2+\\ &+\;20^2.\,5+2.20.5^2+5^3\\ =&\,20^3+3.20^2.\,5+3.20.5^2+5^3.\end{aligned}$$

Stąd się okazuje, że *sześcian liczby dwu-cyfrowej składa się z 4 części następnych*: 1° *Z sześcianu dziesiątków.* 2° *Z potrójne-*

go iloczynu kwadratu z dziesiątków przez jedności. 3° *Z potrójnego iloczynu dziesiątków przez kwadrat z jedności.* 4° *Z sześcianu jedności.*

45. Skład powyższy sześcianu, celem łatwiejszego wykonywania działań z niego wynikających, następne uproszczenie przyjąć jeszcze może:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ &= a^3+(3a^2+3ab+b^2)b\\ &= a^3+\Big(3a^2+(3a+b)\,b\Big)b.\end{aligned}$$

Uproszczenie to na poprzednim szczegółowym przykładzie, również widocznie się okaże.

$$\begin{aligned}(20+5)^3 &= 20^3+3.20^2.5+3.20.5^2+5^3\\ &= 20^3+(3.20^2+3.20.5+5^2)5\\ &= 20^3+\Big(3.20^2+(3.20+5)5\Big)5\end{aligned}$$

Sześcian przeto *liczby dwucyfrowéj składa się* tylko, *z dwóch osobnych części.* Pierwszą *jest sześcian z dziesiątków. Do utworzenia* drugiéj części, *potrzeba wziąć potrójny kwadrat z dziesiątków, dodać do niego iloczyn z dziesiątków potrojonych i z samych jedności przez jedności, i summę ztąd powstałą rozmnożyć przez jedności.*

Działanie dążące do otrzymania w tym sposobie sześcianu, następnie się odbywa.

$$\begin{array}{lll} 3a & \quad 3a^2 & \quad a^3 \\ +b & \quad (3a+b)b & \quad \Big(3a^2+(3a+b)b\Big)b \\ \hline 3a+b & \quad 3a^2+(3a+b)b & \quad (a+b)^3. \end{array}$$

Opis temu działaniu odpowiedni, będzie następny:

Do potrojonych dziesiątków dodawszy jedności, summę stąd powstałą mnożymy przez jedności, i do potrojnego kwadratu z dziesiątków dodajemy. Tę drugą summę mnożąc znowu przez jedności i dodając do sześcianu z dziesiątków otrzymujemy sześcian żądany z liczby dwucyfrowej.

Stosując to działanie do przykładu poprzedniego, w którym idzie o sześcian z liczby 25, gdy $a=20$; $b=5$ będzie;

$$\begin{array}{lll} 3a=60 & 3a^2=1200 & a^3=\ \ 8000 \\ \underline{\ \ +5} & \underline{65.5=\ \ 325} & \underline{1525.5=\ \ 7625} \\ \ \ 65 & \ \ \ \ 1525 & \ \ 15625=25^3 \end{array}$$

Podobnież gdy *np.* sześcian z 79 otrzymać chcemy;

$$79^3=(70+9);\quad a=70\ ;\ b=9\ ;\ a^2=4900$$

$$\begin{array}{lll} 3a=210 & 3a^2=14700 & a^3=343000 \\ \underline{b=\ \ \ \ 9} & \underline{219.9=\ \ 1971} & \underline{16671.9=150039} \\ \ \ 219. & \ \ \ \ 16671 & \ \ 493039=79^3. \end{array}$$

Części te szczegółowe sześcianu są tylko rozwinięciem całej jego wartości obiętéj w wyrażeniu

$$79^3=(70+9)^3=70^3+\Big(3.70^2+(3.70+9)\,9\Big)\,9$$

46. Gdy liczba trzy lub więcéj cyfrowa zawsze jako złożona z dziesiątków i jedności uważaną być może, stąd skład sześcianu jakiejkolwiek liczby jest zawsze jednakowy.

Dajmy *np* że chcemy podnieść do sześcianu liczbę 792. Zastosowywamy zawsze wzór ogólny,

$$(a+b)^3=a^3+\Big(3a^2+(3a+b)b\Big)\,b$$

w tym razie tylko $a=790$, $b=2$; będzie zatem

$$792^3=(790+2)^3=790^3+\Big(3.790^2+(3.790+2)2\Big)2$$

Wartość 790^3 w całkowity sześcian z liczby 792 wchodzącą możemy albo wyprowadzić z poprzedniego przykładu, albo osobno utworzyć. W pierwszym razie, sześcian z 790 jedności, czyli z 79 dziesiątków, różnić się będzie od sześcianu już otrzymanego z 79 jedności, iż w tymże samym wypadku, już nie jedności, lecz jedności tysięcy przedstawi. Sześcian bowiem z dziesiątków, jako iloczyn trzech równych czynników, najmniej jedności tysięcy obejmować musi. W drugim zaś razie, aby utworzyć sześcian z 790, uważamy tę liczbę jako złożoną z 700 i 90, będzie zatem

$$790^3=(700+90)^3=700^3+\Big(3.700^2+(3.700+90)\,90\Big)90$$

Wstawiając tę wartość 790^3, w całkowity skład sześcianu z 792 będzie:

$$792^3 = 700^3 + \left(3.700^2 + (3.700+90)\,90\right)90 +$$
$$+ \left(3.790^2 + (3.790+2)2\right)2$$

albo $\quad 792^3 = 700^3 + B.90 + B'.2$

gdy dla skrócenia, w szczegółowem poniżéj przedstawianiu działań dokonywanych, uczynimy

$$B = 3.700^2 + (3.700+90)90$$
$$B' = 3.790^2 + (3.790+2)2.$$

Podług tego, działania wskazane, dążące do otrzymania sześcianu z liczby 792, następnie się uskutecznią.

$$\begin{array}{rcrcr}
3.700 = 2100 & \quad & 3.\,700^2 = 1470000 & \quad & 700^3 = 343000000 \\
90 & & 2190.90 = 197100 & & B.\,90 = 150039000 \\
\overline{2190} & & B = 1667100 & & \overline{790^3 = 493039000} \\
 & & 90^2 = 8100 & & B'.2 = 3744088 \\
3.790 = 2370 & & 3.\,790^2 = 1872300 & & \overline{792^3 = 496783088} \\
2 & & 2372.2 = 4744 & & \\
\overline{2372} & & B' = 1877044 & &
\end{array}$$

47. Przy rozwijaniu poprzedniego kwadratu, *sposób skrócony* został użyty *do utworzenia* 3.790^2, to jest *potrójnego kwadratu z dziesiątków pierwiastku*. Zwyczajny bowiem w tym celu sposób, gdy dziesiątki pierwiastku z dwóch lub więcéj cyfer się składają, jest za długi i zmudny.

Tworzymy tu 3.790^2, przydając 90^2 do dwóch liczb 197100 i 1667100, w ciągu rachunku już wynalezionych. Wiemy bowiem że

$$\begin{array}{lrl}
 & 197100 = & (3.700+90)90 \\
 & 1667100 = & 3.700^2 + (3.700+90)90 \\
 & 8100 = & 90.\,90 \\
\text{stąd summa} & 1872300 = & 3.700^2 + (6.700+3.90)90
\end{array}$$

Taka właśnie jest wartość 3.790^2, gdyż jak wiadomo

$$3.790^2 = 3(700^2 + 2.700.90 + 90^2)$$
$$= 3.\,700^2 + 6.700.90 + 3.90^2$$
$$= 3.\,700^2 + (6.700 + 3.90)90$$

Dla sprawdzenia wypadku, podnosimy zwyczajnym sposobem do kwadratu 790, i kwadrat otrzymany przez 3 mnożymy.

$$\begin{array}{rcl} 7 \;.\; 7 &=& 49\,.\,. \\ 149 \;.\; 9 &=& 1341\,.\,. \\ 1580 \;.\; 0 &=& \underline{.\,.\,.\,00} \\ && 624100 = 790^2 \end{array}$$

stąd $3.790^2 = 3.624100 = 1872300.$

Sposób powyższy skrócony tworzenia potrójnego kwadratu z dziesiątków pierwiastku, przy pomocy wartości już wiadomych, ogólnie przedstawić można jak następuje:

$$\left.\begin{array}{r} 3a^2 \\ 3ab+b^2 \\ \hline 3a^2+3ab+b^2 \\ b^2 \end{array}\right\} = 3a^2+6ab+3b^2 = 3(a^2+2ab+b^2) = 3(a+b)^2.$$

48. Przykłady następne wskażą różne sposoby przedstawiania działań wykonywanych przy podnoszeniu do sześcianu.

1. *Podnieść do sześcianu liczbę* 46.

$$46^3 = (40+6)^3 = 40^3 + \left(3.40^2 + (3.40+6)6\right)6.$$

$$\begin{array}{r} 3.40 = 120 \\ 6 \\ \hline 126 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.40^2 = 4800 \\ 126.6 = 756 \\ \hline 5556 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40^3 = 64000 \\ 5556.6 = 33336 \\ \hline 46^3 = 97336. \end{array}$$

Sposób krótszy opuszczając zera.

$$\begin{array}{r} 3.4 = 12\,. \\ 6 \\ \hline 126 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.4^2 = 48\,.\,. \\ 126.6 = 756 \\ \hline 5556 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4^3 = 64\,.\,.\,. \\ 5556.6 = 33336 \\ \hline 46^3 = 97336 \end{array}$$

Sześcian z dziesiątków, jako obejmujący tysiące, jest zawsze liczbą kończącą się trzema zerami; kwadrat z dziesiątków, sta obejmujący, kończy się dwoma zerami: jedném zaś zerem iloczyn z dziesiątków przez jedności.

2. *Podnieść do sześcianu liczbę* 345.

$$345^3 = 300^3 + \left(3.300^2 + (3.300+40)\,40\right)40 +$$
$$+ \left(3.340^2 + (3.340+5)\,5\right)5.$$

$$\begin{array}{r}
3.300=900\\
40\\
\hline
940
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.\ \ 300^2=270000\\
940.\ 40=\ \ 37600\\
\hline
B=307600\\
40^2=\ \ \ \ 1600
\end{array}\Bigg\}
\qquad
\begin{array}{r}
300^3=27000000\\
B.40=12304000\\
\hline
340^3=39304000\\
B'.5=\ \ 1759625\\
\hline
345^3=41063625
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
3.340=1020\\
5\\
\hline
1025
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.340^2=346800\\
1025.5=\ \ \ \ 5125\\
\hline
B'=351925.
\end{array}$$

Sposób krótszy.

$$\begin{array}{r}
3.\ 3=\ \ 9\ .\\
4\\
\hline
94
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3\ .\ 3^2=27\ ..\\
94.4=\ 376\\
\hline
B=3076\\
4^2=\ \ \ 16
\end{array}\Bigg\}
\qquad
\begin{array}{r}
3^3=27\ ...\\
B.4=12304\\
\hline
34^3=39304\ ...\\
B'.5=\ 1759625\\
\hline
345^3=41063625
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
3.34=102.\\
5\\
\hline
1025
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.34^2=3468\ ..\\
1025.5=\ \ 5125\\
\hline
B'=351925
\end{array}$$

3. *Podnieść do sześcianu liczbę* 3125.

$$\begin{aligned}(3125)^3=3000^3&+\Big(3.3000^2+(3.3000+100)100\Big)100\\
&+\Big(3.3100^2+(3.3100+20)20\Big)20+\\
&+\Big(3.3120^2+(3.3120+5)5\Big)5\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
3.3000+100=9100\\
3.3100+\ \ 20=9320\\
3.3120+\ \ \ \ 5=9365
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.300^2=27000000\\
\left.\begin{array}{r}
(3.3000+100)100=\ \ \ \ 910000\\
\hline
B=27910000\\
100^2=\ \ \ \ \ \ 10000
\end{array}\right\}\\
\hline
3.3100^2=28830000\\
\left.\begin{array}{r}
(3.3100+20)20=\ \ \ \ 186400\\
\hline
B'=29016400\\
20^2=\ \ \ \ \ \ \ \ \ 400
\end{array}\right\}\\
\hline
3.3120^2=29203200\\
(3.3120+5)5=\ \ \ \ \ \ 46825\\
\hline
B''=29250025.
\end{array}$$

Wypadek działania.

$$\begin{array}{rl}
3000^3 = & 27\,000\,000\,000 \\
100.B = & 2\,791\,000\,000 \\
20.B' = & 580\,328\,000. \\
5.B'' = & 146\,250\,125. \\
\hline
 & 30\,517\,578\,125 = 3125^3.
\end{array}$$

Sposób krótszy.

$$\begin{array}{lr}
91 & 27.. \\
 & 91 \\
 & B = 2791 \\
 & 1 \\
932 & 2883.. \\
 & 1864 \\
 & B' = 290164 \\
 & 4 \\
9365 & 292032.. \\
 & 46825 \\
 & B'' = 29250025
\end{array}$$

Wypadek działania.

$$\begin{array}{rl}
3^3 = & 27... \\
1.B = & 2\,791... \\
31^3 = & 29\,791... \\
2.B' = & 580\,328... \\
312^3 = & 30\,371\,328... \\
5.B'' = & 146\,250\,125... \\
3125^3 = & 30\,517\,578\,125
\end{array}$$

49. Biorąc pod uwagę wypadek działania z ostatniego przykładu, spostrzegamy, że z dodania dwóch pierwszych pozycyj wypada 29791, czyli sześcian z 31; z dodania zaś trzech pierwszych pozycyj powstaje 30371328, czyli sześcian z 312. Dzieląc przeto sześcian całkowity 30517578125 na rzędy trzy-cyfrowe od ręki prawéj do lewej, znajdziemy: 1° Że w pierwszym rzędzie z lewej strony, który mniej jak trzy cyfry zawierać w sobie może, jest objęty sześcian z cyfry piérwszéj pierwiastku, najwyższéj co do porządku, to jest z 3. 2° Że w dwóch pierwszych rzędach 30517, znajduje się sześcian z dwóch pierwszych cyfer, czyli z 31. 3° Że w trzech pierwszych rzędach 30517578 jest sześcian z 3ch pierwszych cyfer, czyli z 312, podobnie, jak we wszystkich rzędach mieści się całkowity sześcian żądany.

Z rachunku nadto okazuje się, że każda ostatnia cyfra rzędu uważanego jest co do wartości miejscowej sześcianem względem tejże wartości, w ostatniéj cyfrze jej odpowiedniej pierwiastku.

I tak cyfra 0, kończąca rzęd pierwszy, ma wartość miejscową 10^9, gdyż 10^9 jest sześcianem z 10^3, która jest wartością pierwszéj cyfry pierwiastku 3. Cyfra 7 kończąca rzęd drugi, ma wartość miejscową 10^6, będącą sześcianem względem 10^2, wartości cyfry drugiéj w pierwiastku. Podobnież cyfry 8 i 5 kończące rzęd 3ci i 4ty, mają wartość miejscową 10^3 i 10^0, gdyż wartości cyfer im odpowiednich w pierwiastku są 10^1, i 10^0.

Jeżeli sześcian z pierwszej cyfry pierwiastku odciągniemy od pierwszégo rzędu, i do różnicy dopiszemy pierwszą cyfrę drugiego rzędu, liczba stąd powstała obejmie iloczyn z potrójnego kwadratu cyfry pierwszéj przez drugą: i tak

$$\begin{array}{r} 30\ 517\ 578\ 125 \\ \underline{27} \\ 3\,5 \end{array}$$

Liczba 35 obejmuje $3.3^2.1=27$, czyli potrójny kwadrat z cyfry pierwszej 3, rozmnożony przez cyfrę drugą 1.

Odejmując od dwóch pierwszych rzędów, sześcian z dwóch pierwszych cyfer pierwiastku i do różnicy dopisując pierwszą cyfrę 3go rzędu:

$$\begin{array}{r} 30\ 517\ 578\ 125 \\ \underline{29\ 791} \\ 726\ 5 \end{array}$$

Liczba stąd powstała 7265, obejmuje $3.31^2.2=5766$, to jest potrójny kwadrat z dwóch pierwszych cyfer pierwiastku, rozmnożony przez cyfrę trzecią.

Podobnież
$$\begin{array}{r} 30\ 517\ 578\ 125 \\ \underline{30\ 371\ 328} \\ 146\ 250\ 1 \end{array}$$

W liczbie 1462501 jest objęty $3.312^2.5 = 1460160$, to jest potrójny kwadrat z trzech pierwszych cyfer pierwiastku, rozmnożony przez cyfrę czwartą.

Uwagi te, jak późniéj zobaczemy, są główną podstawą na któréj opiera się wyciąganie pierwiastku sześciennego, jako działanie zupełnie odwrotne podnoszeniu do sześcianu.

50. Z przykładów poprzednich okazuje się, ze w ogóle, *dla utworzenia sześcianu liczby wielocyfrowéj, potrzeba*: 1⁰ *Wziąć sześcian z części pierwszéj.* 2⁰ *Do potrójnego kwadratu z części pierwszéj, dodać iloczyn z części pierwszéj potrojonéj i z saméj części drugiéj przez część drugą, i summę ztąd wypadłą rozmnożyć przez część drugą.* 3⁰ *Do potrójnego kwadratu z części pierwszéj i drugiéj dodać iloczyn z części pierwszéj i drugiéj potrojonych, i z saméj części trzeciéj, przez część trzecią, i summę stąd wypadłą pomnożyć przez część trzecią i t. d.* np.

Podnieść do sześcianu liczbę 531441.

531441^3

$3.5\ldots\ldots = $	$15.$	$75\ldots\ldots\ldots$
	3	459
	153	$B = 7959$
		9
$3.53\ldots\ldots = $	$159.$	$8427..$
	1	1591
	1591	$B' = 844291$
		1
$3.531\ldots = $	$1593.$	$845883..$
	4	63736
	15934	$B'' = 84652036$
		16
$3.5314.. = $	$15942.$	$84715788..$
	4	637696
	159424	$B''' = 8472216496$
		16
$3.53144. = $	$159432.$	$8472854208..$
	1	1594321
	1594321	$B'''' = 847287015121$

Wypadek działania.

$5^3 =$	125	. . .				
$3.B =$	23	877				
$1.B' =$		844	291			
$4.B'' =$		338	608	144		
$4.B''' =$		33	888	865	984	
$1.B'''' =$			847	287	015	121
$531441^3 =$	150	094	635	296	999	121

W wypadku działania, gdy pierwsza cyfra pierwiastku 5, ma wartość miejscową 10^5, jej sześcian mieć będzie wartość 10^{15}, będzie zatem 125 z dopisanemi 15 zerami. Trzy pierwsze zera, zapełnią właściwe cyfry, wypadłe przy wzięciu 2giéj części całkowitego sześcianu: trzy drugie zera zapełnią się przy wzięciu części trzeciéj sześcianu i t. d.

51. *Sześciany dwóch liczb całkowitych, po sobie następnych, różnią się od siebie o potrójny iloczyn tychże liczb, zwiększony jednością.* Jeżeli bowiem jedną liczbę całkowitą oznaczymy przez a, a drugą po niej następną, czyli o jedność większą, przez $a+1$, wówczas

Sześcian z $a = a^3$

Sześcian z $a+1 = a^3+3a\ +3a+1$

Różnica tych sześcianów $= 3a^2+3a+1 = 3a(a+1)+1$

Stosując to do liczb *np.* 3 i 4, gdy $3^3=27$, a $4^3=64$, stąd różnica tych sześcianów będzie

$$64-27=37=3.\ 3.\ 4+1$$

Podobnież $5^3-4^3=125-64=61=3.\ 4.\ 5+1$

Jeżeli przeto do sześcianu z 4, czyli do 64, dodamy potrójny iloczyn z liczb 4 i 5, zwiększony jednością, czyli $3.4.5+1=61$, otrzymamy sześcian z 5, który się równa 125 i t. d. Stąd zarazem wypada, że różnica dwóch sześcianów następnych tem jest większa, im pierwiastki im odpowiednie są większe.

52. Podnoszenie do sześcianu liczb dziesiętnych jest podobne jak liczb całkowitych. Zawsze *sześcian ułomku dziesiętnego, jako iloczyn trzech równych czynników, obejmować będzie trzy razy tyle cyfer dziesiętnych, ile ich jest w ułomku.* np.

Podnieść do sześcianu 3,125.

$$3{,}125^3 = 3^3 + \left(3\times 3^2 + (3\times 3 + 0{,}1)0{,}1\right)0{,}1 +$$
$$+\left(3\times 3{,}1^2 + (3\times 3{,}1 + 0{,}02)0{,}02\right)0{,}02 +$$
$$+\left(3\times 3{,}12^2 + (3\times 3{,}12 + 0{,}005)0{,}005\right)0{,}005$$

$$\begin{array}{rrcrr}
3\times 3 = & 9\ . & & 3\times 3^2 = & 27,..\\
 & \underline{0{,}1} & & 9{,}1\times 0{,}1 = & \underline{0{,}91}\\
 & 9{,}1 & & B = & 27{,}91\\
 & & & 0{,}1^2 = & \underline{0{,}01}\\
3\times 3{,}1 = & 9.3\ . & & 3\times 3{,}1^2 = & 28{,}83\,..\\
 & \underline{0{,}02} & & 9{,}32\times 0{,}02 = & \underline{1864}\\
 & 9{,}32 & & B' = & 29{,}0164\\
 & & & 0{,}02^2 = & \underline{0{,}0004}\\
3\times 3{,}12 = & 9{,}36. & & 3\times 3{,}12^2 = & 29{,}2032\,..\\
 & \underline{0{,}005} & & 9{,}365\times 0{,}005 = & \underline{46825}\\
 & 9{,}365 & & B'' = & 29{,}249025
\end{array}$$

Wypadek działania.

$$\begin{array}{rl}
3^3 = & 27,\ldots\\
1B = & 2{,}791\ldots\\
2B' = & 0{,}580328\ldots\\
5\,B'' = & \underline{0{,}146250125}\\
3{,}125^3 = & 30{,}517578125
\end{array}$$

Wartość ułomku danego podobna jak ostatniéj jego cyfry dziesiętnéj, jest 3125 tysiącznych: w potędze zatem 10 wyrażona jest $\frac{1}{10^3}$. Sześcian przeto tego ułomku będzie miał wartość porządkową $\frac{1}{10^9}$, czyli całość z 9 cyframi dziesiętnemi.

Po rozwiązaniu tego przykładu spostrzegamy, że sześcian z liczby 3,125, otrzymany ze względem na porządek cyfer dziesiętnych objętych w tej liczbie, niczem się nie różni co do cyfer od sześcianu z liczby całkowitéj 3125, otrzymanego w przykładzie 3cim (48). Stąd wynika, że *chcąc podnieść ułomek dziesiętny do sześcianu,* (podobnież jak i do kwadratu), *lepiej jest uważać ten* *ułomek jako liczbę całkowitą. Po otrzymaniu dopiero wypadku odciąć w nim potrzeba trzy razy tyle cyfer dziesiętnych, ile ich ułomek dany zawierał.*

Ilość cyfer do odcięcia okaże się również widocznie, gdy ułomek dziesiętny dany naprzód na zwyczajny zamieniemy, a potem podniesiemy do sześcianu, podług prawidła ogólnego na podnoszenie ułomków zwyczajnych do potęg służącego (11).

I tak gdy $3{,}125 = \frac{3125}{1000}$ stąd

$$3{,}125^3 = \left(\frac{3125}{1000}\right)^3 = \frac{30517578125}{1000000000} = 30{,}517578125.$$

Przy podnoszeniu do sześcianu ułomków zwyczajnych, których licznik i mianownik są wielocyfrowemi, dla skrócenia roboty, ułomki te na dziesiętne się zamieniają.

ROZDZIAŁ V.

O wyciąganiu pierwiastku sześciennego.

---

53. *Pierwiastkiem sześciennym* jakiej liczby jest inna liczba, która podniesiona do sześcianu, czyli wzięta trzy razy za czynnik, albo rozmnożona przez swój kwadrat, wydaje liczbę daną. I tak gdy dziewięć liczb pierwszych

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9,

podniesione do sześcianu wydają

1 , 8 , 27 , 64, 125 , 216 , 343 , 512 , 729,

pierwsze więc 9 liczb są pierwiastkami sześciennemi 9ciu drugich. Podobnież liczby

1 , 10 , 100 , 1000 i t. d.

są pierwiastkami sześciennemi liczb

1 , 1000, 1000000 , 1000000000 i t. d.

54. Z uwagi na poprzednie sześciany, i odpowiednie im pierwiastki wynika, że sześciany złożone

1° z 1, 2 lub 3 cyfer, mają w swym pierwiastku sześc. jedną cyfrę.
2° z 4, 5 lub 6 cyfer „ „ „ „ dwie cyfry.
3° z 7, 8 lub 9 cyfer „ „ „ trzy cyfry i t. d.

Stąd zarazem wyprowadzamy następną główną zasadę, służącą do oznaczenia liczby cyfer w pierwiastku sześciennym.

Dzieląc liczbę daną na rzędy trzy-cyfrowe od ręki prawej ku lewej, liczba tych rzędów, z których ostatni z lewej strony jedną lub dwie cyfer obejmować może, wskaże zawsze ilość cyfer objętych w pierwiastku sześciennym, z danej liczby wyciągnąć się mającym.

Sposób wyszukania tych cyfer polega, już na samym składzie sześcianu z jakiejkolwiek liczby, już na dwóch zasadach w nauce podnoszenia do sześcianu wskazanych (49).

1[0] Że w pierwszym rzędzie danéj liczby z lewej strony znajduje się sześcian z pierwszéj cyfry pierwiastku, poczynając od najwyższéj co do porządku; że w dwóch pierwszych rzędach jest objęty sześcian z dwóch pierwszych cyfer pierwiastku; że w trzech pierwszych rzędach jest sześcian z trzech pierwszych cyfer i t. d.

2[0] Że po odjęciu sześcianu pierwszéj cyfry pierwiastku od pierwszego rzędu, w reszcie pozostałej, z dopisaną pierwszą cyfrą drugiego rzędu, objęty jest iloczyn z potrójnego kwadratu cyfry pierwszéj przez drugą. Że po odjęciu sześcianu z dwóch pierwszych cyfer pierwiastku, od dwóch pierwszych rzędów, w reszcie pozostałéj, wziętéj z pierwszą cyfrą trzeciego rzędu, znajduje się iloczyn z potrójnego kwadratu dwóch pierwszych cyfer pierwiastku, przez trzecią cyfrę i t. d.

55. *Dajmy np. że mamy wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby* 13824. Wykonajmy naprzód działanie z późniejszem dopiero jego wyjaśnieniem.

$$\begin{array}{rrrr}
3\,.\,2 = 6. & 3\,.\,2^2 = 12.. & \sqrt[3]{1\,3.8\,2\,4} = & 24 \\
\underline{4} & 64\,.\,4 = \underline{256} & \underline{2^3 = 8} & 3\,.\,2^2 = 12 \\
64 & 1456 & 5\,8.2\,4 & 58:12 = 4. \\
 & & \underline{5\,8\,2\,4} = & 1456.4. \\
 & & '' \;\; '' \;\; ' &
\end{array}$$

Z podziału na dwa rzędy danéj liczby okazuje się, że jej pierwiastek jest dwucyfrowy, czyli że obejmuje dziesiątki i jedności; cała przeto liczba jako sześcian uważana z następnych części się składa;

$$13824 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + \left(3a^2 + (3a+b)b\right)b$$

W pierwszym rzędzie tej liczby jest objęty sześcian z dziesiątków, który najmniej tysiące wydać może. Szukamy naprzód tych dziesiątków, czyli takiéj cyfry, którąby podniesiona do sześcianu wydała 13, lub liczbę bezpośrednio mniejszą. Tą cyfrą jest 2, gdyż $2^3=8$: sześcian z 3 byłby 27 i nie dałby się od 13 odciągnąć.

Reszta 5 połączona z drugim rzędem, daje liczbę 5824 obejmującą pozostałe części sześcianu z pierwiastku dwucyfrowego, którego już pierwsza cyfra, czyli dziesiątki są wiadome. Nadto w reszcie tej, wziętéj tylko z pierwszą cyfrą drugiego rzędu, po oddzieleniu kropką dwóch pozostałych, czyli w liczbie 58, jako wstach, mieści się iloczyn z potrójnego kwadratu dziesiątków przez jedności, najmniej sta wydać mogący. Dzieląc przeto te 58, przez potrójny kwadrat z dziesiątków już znalezionych, czyli przez $3.2^2=12$, otrzymują się jedności, to jest 4.

Dla sprawdzenia czy cyfra tak wypadła na jedności pierwiastku jest odpowiednią, i dla ukończenia zarazem działania, tworzymy osobno całą część drugą sześcianu liczby dwucyfrowej 24, pierwiastek składającej. Tworzymy więc to, co oprócz sześcianu części pierwszej pierwiastku, w skład całego sześcianu wchodzi, a co razem wzięte jest zawarte w reszcie 5824. W tym celu potrojone dziesiątki $3.2=6$, zwiększamy 4 jednościami: liczbę 64 stąd powstałą mnożymy przez 4 jedności; iloczyn 359 dodajemy do potrójnego kwadratu z dziesiątków, czyli do 12 set: summę 1456, przez 4 jedności jeszcze rozmnożoną, odciągamy od 5824. Ponieważ żadna reszta nie pozostaje, wnosimy przeto, że 24 jest pierwiastkiem sześciennym z liczby 13824.

56. W podobnym sposobie wszelkie przykłady wyszukania pierwiastku sześciennego dwucyfrowego, rozwiązane być mogą.

1. *Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z* **103823.**

$$\begin{array}{rrr} 3.4=12. & 3.4^2=48.. & \sqrt[3]{103.823}=47 \\ 7 & 127.7=889 & 4^3=\quad 64 \\ \overline{127} & \overline{5689} & \overline{398.23} : 48=7 \\ & & 398.23=5689.7 \end{array}$$

Przy oznaczaniu drugiéj cyfry pierwiastku, zawsze prawie właściwie na iloraz wypadła, jest za wielką: poprzednio zatem przez próbę przekonać się trzeba. I tak w powyższym przykładzie, dzieląc 398 przez 48, na iloraz wypada 8, lecz ta cyfra przy następnem sprawdzeniu okaże się za wielką.

$$\begin{array}{lll} 3.4=12. & 3.4^2=48.. & 5824.\ 8=46592. \\ \quad\ \ \underline{\ 8} & 128.\ 8=\underline{1024} & \\ \quad 128 & \qquad\quad\ \ 5824 & \end{array}$$

Ostateczny bowiem iloczyn 46592, od reszty połączonéj z drugim rzędem, czyli od 39823 odciągnąć nie można. Stąd zamiast 8, za jedności pierwiastku bierze się 7, i tę liczbę podobnemuż jak poprzednia sprawdzeniu się poddaje. Tym sposobem okaże się, że $47=\sqrt[3]{103823}$.

2. *Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby* 47954.

$$\begin{array}{llll} 3.3=9. & 3.3^2=27.. & \sqrt[3]{47.954}=36 & \\ \quad\ \underline{\ 6} & 96.6=\underline{576} & 3^3=\underline{27} & 3.3^2=27 \\ \quad 96 & \qquad\ \ 3276 & \quad\ \ \ 209.54 & 209:27=6 \\ & & \quad\ \ \ \underline{19656}=3276.6 & \\ & & \qquad\ 1298 & \end{array}$$

Jako wypadek tego działania otrzymujemy 36 na pierwiastek, a 1298 na resztę. To okazuje, iż liczba dana nie jest *sześcianem zupełnym*, czyli że jej pierwiastek w samej liczbie całkowitéj dokładnie oznaczonym być nie może. Przez ten jednak sposób otrzymujemy *część całkowitą pierwiastku, czyli pierwiastek największego sześcianu w danej liczbie objętego.*

Co do *reszty ostatniéj* 1298, *ta* podobnież jak wszystkie w ciągu działania wynikłe, *winna być mniejsza, niż zwiększony jednością potrójny iloczyn pierwiastku znalezionego, przez pierwiastek o jedność większy*(51). Stąd liczba 1298 winna być mniejszą, niż $3\times36\times37+1=3997$, a która stanowi różnicę między sześcianami z 36 i 37: jakoż

$$37^3-36^3=50653-46656=3997$$

Skoro przeto pierwiastek znaleziony 36, uważa się za pierwiastek sześcienny liczby 47954, jest on przybliżony do prawdziwego o mniej niż jedność, czyli że się różni od niego tylko o pewny ułomek.

57. Sposób wyjaśniony co do wyciągania pierwiastku dwucyfrowego, również się zastosowywa, gdy pierwiastek sześcienny ma być trzy lub więcéj cyfrowy.

1. *Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z* 191102976.

$3 \,.\, 5^2 = 75$ . .	$\sqrt[3]{191.102.976} = 576$	
$157.7 = 1099$	125	
8599	661.02	$: 75 = 7$
$7^2 = 49$	60193	$= 8599.7$
$3 \,.\, 57^2 = 9747$ . .	59099.76	$: 9747 = 6$
$1716.6 = 10296$	5909976	$= 984996.6$
984996	″ ″ ″	

Z podziału danej liczby na trzy rzędy trzy-cyfrowe wynika, że jej pierwiastek jest trzycyfrowy. Zawsze jednak ten pierwiastek jako tylko złożony z dziesiątków i jedności uważany być może. Do utworzenia dziesiątków najmniej tysiące w sześcianie są potrzebne: trzy więc cyfry ostatnie danéj liczby na wielkość tych dziesiątków nie wpływają. Z dwóch przeto pierwszych rzędów danéj liczby, czyli z liczby 191102, w któréj dziesiątki pierwiastku są objęte, wyciągamy naprzód pierwiastek wskazanym już sposobem, i wypadły 57 za dziesiątki pierwiastku szukanego uważamy. Dla wynalezienia jedności, do reszty 5909 po otrzymaniu dziesiątków pozostałej, dopisujemy pierwszą cyfrę 9 rzędu ostatniego, i liczbę stąd powstałą 59099 dzielimy przez potrójny kwadrat z dziesiątków pierwiastku, czyli przez $9747 = 3.57^2$. Kwadrat ten osobno oznaczamy, podobnież skróconym sposobem, jak przy podnoszeniu do sześcianu (47).

Aby sprawdzić, że cyfra 6 na iloraz wypadła, jedności pierwiastku stanowi, bierzemy $3.57 = 171$, dopisujemy jedności 6 i liczbę stąd powstała 1716 mnożymy przez 6. Iloczyn 10296 dodajemy do 9747, jako potrójnego kwadratu z dziesiątków pierwiastku, i summę stąd wynikłą 984996, rozmnożoną przez 6, odciągamy od 5909976, czyli od reszty z całym rzędem ostatnim połączonéj. Ponieważ żadna reszta nie pozostaje, liczba przeto dana jest *sześcianem zupełnym*, czyli że jej pierwiastek jest liczbą całkowitą 576.

2. *Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z* 14348907.

64	12..	$\sqrt[3]{14.348.907} = 243$
	256	8
	1456	6348
	16	5824
723	1728..	5249.07
	2169	524907
	174969.	" " "

63 : 12 daje 4 na 2gą cyfrę pierwiastku, 5 byłoby za wiele.
5249 : 1728 daje 3, na 3cią cyfrę pierwiastku.

3. *Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z* 91632508641.

$3.4^2 = 48..$		$\sqrt[3]{91.632.508.641} = 4508$
$125.5 = 625$		64
5425	27632	: 48 = 5
$5^2 = 25$	27125	= 5425.5
$3.45^2 = 6075..$	5075.08	: 6075 = 0
$1350.0 = 00$	5075086.41	: 607500 = 8
607500	486864512	= 60858064.8
$0^2 = 0$	20644129	
$3.450^2 = 607500..$		
$13508.8 = 108064$		
60858064		

W trzech pierwszych rzędach danéj liczby jest objęty sześcian z 3 pierwszych cyfer pierwiastku, które podług poprzedniego oznaczamy. Gdy jednak druga reszta z dołączoną pierwszą cyfrą rzędu najbliższego, czyli liczba 5075, nie daje się podzielić przez potrójny kwadrat z dwóch pierwszych cyfer pierwiastku już znalezionych, czyli przez 6075, za iloraz przeto a zatem i za trzecią cyfrę pierwiastku kładziemy zero. Zniżamy potem rzęd ostatni i liczbę stąd uformowaną, po odcięciu dwóch ostatnich jej cyfer, to jest liczbę 5075086, dzielimy przez potrójny kwadrat z trzech cyfer pierwiastku już znalezionych. Cyfra czwarta pierwiastku tak otrzymana, poddaje się sprawdzeniu w podobnym sposobie jak przy innych cyfrach. Tym sposobem znajdziemy 4508 na pierwiastek, i resztę 20644129, która zawsze jest mniejsza niż różnica sześcianów z liczb 4508 i 4509. Pierwiastek przeto 4508 jest przybliżony do prawdziwego o mniej niż jedność.

4. *Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z* 469640998917.

217	147..	$\sqrt[3]{469.640.998.917}=7773.$
	1519	343
	16219	1266.40
	49	113533
2317	17787..	131079.98
	16219	12564433
	1794919	5435659.17
	49	543565917
23313	1811187..	" " " "
	69939	
	181188639	

1266 : 147 daje 7 na 2gą cyfrę pierwiastku, gdyż 8 za wiele.
131079 : 17787 daje 7 na 3cią cyfrę.
5435659 : 1811887 daje 3 na 4tą cyfrę pierwiastku.

Pierwiastek przeto żądany jest 7773.

58. Jakakolwiek jest liczba cyfer w pierwiastku otrzymać się mającym, zawsze pierwsza cyfra będzie pierwiastkiem największego sześcianu objętego w pierwszym rzędzie danéj liczby. Każda następna cyfra pierwiastku otrzyma się, gdy liczbę składającą się z odpowiedniej jej reszty i z pierwszéj cyfry rzędu najbliższego, podzielimy przez potrójny kwadrat z cyfer pierwiastku już znalezionych. *np.*

Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 7625597484987.

$\sqrt[3]{7.625.597.484.987} = 19683$	
6 6.2 5	3 . . dzielnik
	351 = 39.9
5 8 5 9	651.9
	81
7 6 6 5.9 7	1083 . . dzielnik
	3456 = 576.6
6 7 0 5 3 6	111756.6
	36
9 6 0 6 1 4.8 4	115248 . . dzielnik
	47104 = 5888.8
9 2 5 7 5 2 3 2	11571904.8
	64
3 4 8 6 2 5 2 9.8 7	11619072 . . dzielnik
	177129 = 59043.3
3 4 8 6 2 5 2 9 8 7 = 1162084329.3	

59. Można jeszcze wyciągnąć pierwiastek sześcienny, sposobem również łatwym, przy pomocy dwóch następnych wzorów, jednego na sześcian, drugiego na potrójny kwadrat z dziesiątków pierwiastku.

$$(a+b)^3 = a^3+(3a^2+3ab+b^2)b \; . \; . \; . \; . \; (45)$$
$$3(a+b)^2 = 3a^2+6ab+3b^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

Wyprowadzić tylko potrzeba części składające potrójny kwadrat, z wartości objętych w drugiéj części sześcianu, a które wprzód się oznaczają. *np.*

Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 41314084993.

		3468		
		48	357075	
$\sqrt[3]{41.314.084.993}$	3457	72	75	
143.14		4) 27	1020	
20100.84		36	5) 3468	
2504 599.93		16	510	7) 357075
0		3076	25	7245
			351925	49
				35779999

Dzielniki następne są $27=3.3^2$; $3468=3.34^2$ i $357075=3.345^2$, w ogóle $3a^2$, czyli potrójny kwadrat z dziesiątków, różny podług tego, jak za dziesiątki a, bierze się jedna, dwie, lub trzy pierwszych cyfer pierwiastku już znalezionych. Obok tych dzielników zamieszczone są ilorazy odpowiednie 4, 5, i 7 poddawane sprawdzeniu. Przy pierwszem sprawdzeniu, gdy $a=3$ dziesiątkom, $b=4$ jednościom, aby utworzyć część drugą sześcianu odjąć się mającą, do dzielnika $3a^2=27$ stom (jak rachunek u dołu téj liczby wskazuje) dodajemy $3ab=36$ dziesiątkom, i $b^2=16$ jednościom; summę stąd powstałą 3076 mnożymy przez b, czyli przez 4 jedności. Drugi zaś dzielnik 3468, czyli 3.34^2 tworzymy przez rachunek u góry, również z pierwszego dzielnika $3a^2=27$ stom, przydając do niego $6ab=72$ dziesiątkom i $3b^2=48$ jednościom. Zamieszczamy potem ten drugi dzielnik w właściwem dla niego miejscu, i sposobem podobnym, u dołu tegoż dzielnika tworzymy część drugą sześcianu, u góry zaś trzeci dzielnik $3.345^2=357075$, lecz już w przypuszczeniu że $a=34$ dziesiątkom, $b=5$ jednościom. Ostatni ten dzielnik służy tylko do sprawdzenia cyfry 7, przez utworzenie części sześcianu odjąć się mającéj.

60. Za przykłady do wprawy w wyciąganiu pierwiastku sześciennego służyć mogą następne.

$$\sqrt[3]{150094635296999121} = 531441$$

$$\sqrt[3]{59604644775390625} = 390625$$

$$\sqrt[3]{32977340218432} = 32068$$

$$\sqrt[3]{963259373376} = 9876$$

$$\sqrt[3]{673373097125} = 8705$$

$$\sqrt[3]{7450580596923828125} = 1953125$$

61. *Każda liczba całkowita nie jest sześcianem zupełnym innéj liczby całkowitéj, w dwóch następnych razach.*

1° *Gdy będąc podzielną przez jaki czynnik pierwszy, nie jest podzielną przez jego sześcian.* W każdym bowiem sześcianie jest objęty iloczyn z sześcianów czynnikow jego pierwiastku (7). Liczba przeto podzielna *np.* przez 2, lub przez 7, a niedzieląca się przez 8, lub przez 343, nie jest sześcianem zupełnym. Stąd zarazem wynika, *że wszelka liczba parzysta, która się nie dzieli przez* 8, *nie jest sześcianem zupełnym.*

2°. *Gdy ilość zer lub dziesiętnych kończących jaką liczbę nie jest wielokrotną względem* 3. Zawsze bowiem sześcian liczby kończącéj się zerami lub dziesiętnemi, obejmuje ich trzy razy więcéj, jako iloczyn wypadły z trzykrotnego wzięcia tej liczby za czynnik.

62. Pierwiastki sześcienne odpowiednie sześcianom niezupełnym całkowitym, nie tylko w liczbach całkowitych, ale i w ułomkowych dokładnie oznaczyć się nie dają. Nigdy bowiem znaleźć nie można takiej liczby ułomkowej, którąby będąc z natury swojej nieprzywiedlna, rozmnożona po dwa razy przez siebie, czyli podniesiona do sześcianu, wydała na wypadék liczbę całkowitą. Dla tego pierwiastki te, jako przez żadną liczbę dokładnie oznaczyć się niedające, zowią się *niewspółmierne.* Można jednak je otrzymać *przybliżone* i co do stopnia swego przybliżenia zupełnie zależne od naszéj woli. *Przybliżenie* zaś to stosownie do natury najmniejszych cząstek, w jakich następuje, *może być wyrażone w ułomku dziesiętnym, lub zwyczajnym.*

63. *Przybliżenie pierwiastku sześciennego w ułomku dziesiętnym* jest najwięcéj używane. *Aby je otrzymać, potrzeba do liczby danéj całkowitéj, dopisać trzy razy tyle zer, ile cyfer dziesiętnych jest żądanych w pierwiastku: wyciągnąć potem pierwiastek z liczby stąd powstałéj, i w wypadku otrzymanym oddzielić przecinkiem na dziesiętne liczbę żądaną cyfer.*

Jeżeli bowiem w pierwiastku mają być cyfry dziesiętne, w sześcianie jako w iloczynie z trzech czynników równych temuż pierwiastkowi, potrójna ich ilość objętą być musi. I tak

liczby dziesiętne	0,1,	0,01,	0,001	i t. d.
mają sześciany	0,001,	0,000001,	0,000000001	i t. d.

Aby więc pierwiastek sześcienny był wyrażony w częściach dziesiętnych, setnych, tysiącznych i t. d. potrzeba żeby był wyciągany z sześcianu wyrażonego w tysiącznych, milionowych, bilionowych i t. d. co właśnie nastąpi, gdy do liczby danéj, jako do sześcianu, z którego pierwiastek wyciągać mamy, dopiszemy 3, 6, 9 i t. d. zer.

Gdybyśmy nawet przeciwnie uważali, że przez powyższe dopisanie 3, 6, 9 i t. d. zer, liczba dana powiększa się tysiąc, milion, bilion i t. d. razy, pierwiastek sześcienny z niej wypadły będzie większy 10, 100, 1000 i t. d. razy. Po wyciągnieniu zatem tego pierwiastku, potrzeba go podzielić przez 10, 100, 1000 i t. d. czyli odciąć z prawéj strony przecinkiem 1, 2, 3 i t. d., cyfer na dziesiętne.

64. *Przykłady wyciągania pierwiastku sześciennego przybliżonego.*

1. *Wyciągnąć z liczby* 9, *pierwiastek sześcienny przybliżony w pięciu cyfrach dziesiętnych, czyli z przybliżeniem na* 0,00001 *prawie.*

Zamiast dopisywania za jednym razem wszystkich 15 zer do liczby danéj, przydajemy je po 3 do każdej z reszt następnych, czyli w miarę jak postęp działania wymaga zniżenia nowego rzędu.

```
608      12....           ∛9                  = 2,08008.
           4864⎫           8
         124864⎬          10.00000
             64⎭           998912
624008   129792......         1088000000000 0
            4992064           1038375936512 2
         129796992064           49624063488 8
```

10 : 12 czyli przez $3 : 2^2$, daje 0 na 2gą cyfrę pierwiastku.

10000 : 1200 czyli przez $3 . 20^2$, daje 8 na 3cią cyfrę.

10880 : 129792 czyli przez $3 . 208^2$ daje 0 na 4tą cyfrę.

10880000 : 12979200 czyli przez $3 . 2080^2$ daje 0 na 5tą cyfrę.

10880000000 : 1297920000, czyli przez $3 . 20800^2$ daje 8 na 6stą cyfrę pierwiastku

Stąd $\sqrt[3]{9} = 2,08008$ z przybliżeniem o 0,00001 prawie.

2. *Wyciągnąć z liczby 24 pierwiastek sześcienny przybliżony o 5ciu cyfrach dziesiętnych*, wyrażony przeto w stutysięcznych, czyli z przybliżeniem na 0,00001 prawie.

$\sqrt[3]{24}$	$= 2,88449$
8	
160.00	12.. dzielnik
	544 = 68.8
13952	1744.8
	$64 = 8^2$
20480.00	2352.. dzielnik
	6784 = 848.8
1935872	241984.8
	$64 = 8^2$
1121280.00	248832.. dzielnik
	34576=8644.4
99671104	24917776.4
	$16 = 4^2$
124568960.00	24952368.. dzielnik
	346096 = 86524.4
9982331384	2495582896.4
	$16 = 4^2$
2474564416 0.00	2495929008.. dzielnik
	7787961=865329.9
2246406198849	249600688761.9
228157217151	

Stąd $\sqrt[3]{24} = 2,88449$ z przybliżeniem na mniej niż 0,00001.

Najczęściej pierwiastek sześcienny przybliżony w 3 lub 4 tylko cyfrach dziesiętnych otrzymują.

Za przykłady do wprawy służyć jeszcze mogą.

$\sqrt[3]{5} = 1,710$; $\sqrt[3]{19} = 2,6684$; $\sqrt[3]{86} = 4,4140$;

$\sqrt[3]{192} = 5,769$; $\sqrt[3]{235} = 6,171$; $\sqrt[3]{333} = 6,9313$;

$\sqrt[3]{705} = 8,9001$; $\sqrt[3]{882} = 9,5091$; $\sqrt[3]{997} = 9,99$;

$\sqrt[3]{139} = 5,1801$; $\sqrt[3]{417} = 7,471$; $\sqrt[3]{1125} = 10,4004$

65. *Wyciąganie pierwiastku sześciennego przybliżonego, można jeszcze uprościć przy pomocy dzielenia*, podobnie jak wyciąganie pierwiastku kwadratowego. W tym celu po wyszukaniu zwyczajnym sposobem, więcéj niż połowy cyfer mających być objętych w pierwiastku, dla oznaczenia pozostałych dosyć jest podzielić *resztę zupełną*, przez potrójny kwadrat z cyfer pierwiastku już znalezionych.

Oznaczając bowiem liczbę daną przez N, resztę zupełną przez R, część wiadomą pierwiastku składającą dziesiątki przez a, część zaś niewiadomą składać mającą jedności przez x, i pamiętając na skład sześcianu, będziemy mieli:

$$N=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

stąd $N-a^3=3a^2x+3ax^2+x^3$

$$\frac{N-a^3}{3a^2}=x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a}$$

zatem $x=\dfrac{N-a^3}{3a^2}-\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{x^3}{3a^2}$

Że zaś $N-a^3=R$, stąd

$$x=\frac{R}{3a^2}-\frac{x^2}{a}-\frac{x^3}{3a^2}$$

Część przeto niewiadoma pierwiastku równać się będzie ilorazowi wypadłemu z podzielenia reszty zupełnéj przez potrójny kwadrat z części wiadomej, z przybliżeniem o mniej niż jedność, gdy ułomki zmniejszające ten iloraz, razem wzięte są mniejsze od jedności. Ten przypadek właśnie ma miejsce. Jeżeli bowiem liczbę wszystkich cyfer pierwiastku oznaczymy przez 2 n, wówczas na część a, jako więcéj niż połowę ich zawierającą, przypadnie cyfer $n+1$, na część x zaś $n-1$. Gdy nadto a z przyczyny porządku swych cyfer, tyle ich obejmuje ile cały pierwiastek, czyli 2 n, i gdy x^2 najwięcéj dwa razy tyle cyfer obejmować może co x, zatem $2n-2$, stąd x^2 ma 2 cyfry mniej niż a, ułomek przeto $\frac{x^2}{a}$ jako 2 cyfry mniej w liczniku obejmujący, jest zawsze mniejszy niż $\frac{1}{10}$. Że zaś 2gi ułomek $\frac{x^3}{3a^2}$ jako równy $\frac{x^2}{a}\times\frac{x}{3a}$ jest mniejszy od $\frac{x^2}{a}$, stąd summa dwóch ułomków jest mniejsza od jedności.

Stosując wskazane prawidło do przykładu 1go (57), po znalezieniu 4 pierwszych cyfer pierwiastku 2884, i reszty ostatniéj 12456896, uzupełniamy tę resztę 6 zerami, jakie jeszcze nie weszły w działanie. Dzielimy potem tę resztę tak uzupełnioną przez potrójny kwadrat z 2884set, równy 249523680000, czyli przedostatniemu dzielnikowi, przywiedzionemu do właściwéj swéj wartości, przez wzgląd na wartość miejscową cyfer go składających. Stąd będzie

$$\begin{array}{r|l} 1245689600 & 24952368 \\ \cline{2-2} 99807472 & \quad 49 \\ \hline 247614880 & \end{array}$$

Dwie więc ostatnie cyfry pierwiastku są 49, jak w przykładzie dokładnie rozwiązanym.

Podobnież w przykładzie 5tym (45) po znalezieniu 3 pierwszych cyfer pierwiastku 196 i reszty 96061, otrzymamy dwie ostatnie cyfry 83, dzieląc resztę zupełną 9606184987 przez 1152480000, czyli przez 3.19600^2. Jakoż

$$\begin{array}{r|l} 9606184987 & 1152480000 \\ \cline{2-2} 9219840000 & \quad 83 \\ \hline 3863084987 & \end{array}$$

66. *Jeżeli stopień przybliżenia* pierwiastku sześciennego z jakiéj liczby całkowitéj wyciągnąć się mającego, *w ułomku zwyczajnym jest żądany*, aby go otrzymać potrzeba naprzód daną liczbę rozmnożyć i podzielić przez sześcian z mianownika ułomku podającego toż przybliżenie. Wyciągając potem pierwiastek z ułomku stąd powstałego, równego liczbie danéj co do wartości, wypadek znaleziony będzie pierwiastkiem szukanym.

I tak *chcąc np. wyciągnąć pierwiastek sześcienny* z 24, *z przybliżeniem na mniej niż* $\frac{1}{12}$; gdy

$$24 = \frac{24.\,12^3}{12^3} = \frac{24.\,1728}{12^3} = \frac{41672}{12^3}$$

$$\text{stąd}\quad \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{\frac{41672}{12^3}} = \frac{\sqrt[3]{41672}}{12} = \frac{31}{12}$$

Że zaś pierwiastek znaleziony przypada pomiędzy $\frac{31}{12}$ i $\frac{32}{12}$ biorąc więc $\frac{31}{12}$, będzie z przybliżeniem o mniej niż $\frac{1}{12}$. Podobnież się postąpi, gdy *np* pierwiastek sześcienny z 57, z przybliżeniem na mniej niż $\frac{1}{15}$ wyciągać mamy; będzie

$$\sqrt[3]{57}=\sqrt[3]{\frac{57.15^3}{15^3}}=\frac{\sqrt[3]{192375}}{15}=\frac{57}{15}=3\tfrac{4}{5}$$

z przybliżeniem o mniej niż $\frac{1}{15}$.

Ułomek oznaczający stopień przybliżenia zawsze ma jedność za licznik: to bowiem przybliżenie wszelkie inne za sobą prowadzi. Itak chcąc pierwiastek z 57 znaleźć przybliżony na $\frac{4}{15}$, poprzedni wypadek podajemy: skoro bowiem pierwiastek jest przybliżony, na mniej niż $\frac{1}{15}$, tem bardziej jest na mniej niż $\frac{4}{15}$.

Prawidło służące do wyszukania pierwiastku z przybliżeniem w ułomku zwyczajnym, jest ogólnem, z niego bowiem wyprowadzić można sposób, jaki był użyty, do otrzymania pierwiastku z przybliżeniem w ułomku dziesiętnym.

I tak przy wyciąganiu pierwiastku z 24 z przybliżeniem na 0,00001 prawie (64), mamy:

$$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{\frac{24.100000^3}{100000^3}}=\frac{\sqrt[3]{24000000000000000}}{100000}=\frac{288449}{100000}=2,88449$$

67. Ułomek dziesiętny nie jest sześcianem, gdy liczba cyfer dziesiętnych w nim objętych, nie jest wielokrotną względem trzech. *Chcąc przeto wyciągnąć pierwiastek sześcienny z ułomku dziesiętnego, potrzeba w nim* naprzód *uczynić liczbę cyfer dziesiętnych trzy razy większą od tej, jaką pierwiastek ma obejmować, w razie potrzeby już dopisując zera, już znosząc niektóre z cyfer, gdy ich ilość jest za wielką.* Wyciąganie zaś pierwiastku odbywa się potem bez względu na przecinek, jak na liczbach całkowitych; w wypadku tylko odcina się na dziesiętne trzy razy mniej cyfer, niż ich było w ułomku, z którego właściwie pierwiastek wyciągano.

mniejszy od $\frac{x^2}{a}$, stąd summa dwóch ułomków jest mniejsza od jedności.

Stosując wskazane prawidło do przykładu 1go (57), po znalezieniu 4 pierwszych cyfer pierwiastku 2884, i reszty ostatniéj 12456896, uzupełniamy tę resztę 6 zerami, jakie jeszcze nie weszły w działanie. Dzielimy potem tę resztę tak uzupełnioną przez potrójny kwadrat z 2884set, równy 249523680000, czyli przedostatniemu dzielnikowi, przywiedzionemu do właściwéj swéj wartości, przez wzgląd na wartość miejscową cyfer go składających. Stąd będzie

$$\begin{array}{r|l} 1245689600 & 24952368 \\ \cline{2-2} 99807472 & \quad 49 \\ \hline 247614880 & \end{array}$$

Dwie więc ostatnie cyfry pierwiastku są 49, jak w przykładzie dokładnie rozwiązanym.

Podobnież w przykładzie 5tym (45) po znalezieniu 3 pierwszych cyfer pierwiastku 196 i reszty 96061, otrzymamy dwie ostatnie cyfry 83, dzieląc resztę zupełną 96061484987 przez 115248000, czyli przez 3.19600^2. Jakoż

$$\begin{array}{r|l} 96061484987 & 115248000 \\ \cline{2-2} 9219840000 & \quad 83 \\ \hline 3863084987 & \end{array}$$

66. *Jeżeli stopień przybliżenia* pierwiastku sześciennego z jakiéj liczby całkowitéj wyciągnąć się mającego, *w ułomku zwyczajnym jest żądany*, aby go otrzymać potrzeba naprzód daną liczbę rozmnożyć i podzielić przez sześcian z mianownika ułomku podającego toż przybliżenie. Wyciągając potem pierwiastek z ułomku stąd powstałego, równego liczbie danéj co do wartości, wypadek znaleziony będzie pierwiastkiem szukanym.

I tak *chcąc np. wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 24, z przybliżeniem na mniej niż* $\frac{1}{12}$; gdy

$$24 = \frac{24.12^3}{12^3} = \frac{24.1728}{12^3} = \frac{41672}{12^3}$$

$$\text{stąd} \quad \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{\frac{41672}{12^3}} = \frac{\sqrt[3]{41672}}{12} = \frac{31}{12}$$

I tak aby otrzymać pierwiastek sześcienny z 8,1534 przybliżony o 0,001 prawie, po dopisaniu 5 zer, wyciąga się takowy z liczby całkowitej 8153400000 z przybliżeniem o jedność prawie. W wypadku 2012 odcina się 3 cyfer na dziesiętne, stąd 2,012 jest pierwiastkiem żądanym.

Podobnież chcąc otrzymać pierwiastek sześcienny z 0,98765432 z przybliżeniem o 0,01 prawie, znoszą się w danym ułomku dwie ostatnie cyfry i wyciąga się pierwiastek z liczby całkowitej 987654. Wypadek 99 zamieszczony w kształcie 0,99, będzie pierwiastkiem szukanym.

Z tych przykładów zarazem się okazuje, że przecinek oddzielający całość, od części dziesiętnych, nigdy w posród rzędu trzycyfrowego przypadać nie może, ale zawsze w miejscu podziału; dla tego często ułomek dziesiętny od przecinka na rzędy dzielić zaczynają, tworząc liczbę rzędów 3 cyfrowych odpowiednią liczbie żądanych cyfer w pierwiastku.

68. *Pierwiastek sześcienny z ułomku zwyczajnego* wyciąga się, wyciągając go osobno tak z licznika, jak z mianownika, gdy każdy z nich jest sześcianem zupełnym. *np.*

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4};\ \sqrt[3]{\frac{343}{729}}=\frac{7}{9};\ \sqrt[3]{\frac{1}{512}}=\frac{1}{8}.$$

Jeżeli licznik tylko nie jest sześcianem zupełnym, wyciąga się z niego pierwiastek z przybliżeniem co do stopnia oznaczonem, i ten pierwiastek dzieli się przez pierwiastek z mianownika. *np.*

$$\sqrt[3]{\frac{72}{512}}=\frac{4,21}{8}=\frac{421}{800}=0,52$$

z przybliżeniem o mniej niż $\frac{1}{800}$, a tem bardziej o mniej niż $\frac{1}{100}$

Jeżeli żaden z wyrazów ułomku, albo tylko mianownik nie jest sześcianem zupełnym, wówczas ułomek dany zamienia się na inny, równy mu co do wartości, a któregoby mianownik był sześcianem zupełnym. W tym celu mnożą się oba wyrazy ułomku przez kwadrat z mianownika. Wyciąga się potem pierwiastek przybliżony z licznika, i ten się dzieli przez pierwiastek z mianownika. Wypadek będzie pierwiastkiem ułomku, z stopniem przybliżenia łatwo oznaczyć się dającym. *np.*

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5.7^2}{7.7^2}}=\sqrt[3]{\frac{245}{7^3}}=\frac{6,25}{7}=\frac{625}{700}=0,89$$

z przybliżeniem o $\frac{1}{700}$ prawie, a tem samem o mniej niż $\frac{1}{100}$.

Podobnyż wypadek otrzyma się, zamieniając ułomek dany na dziesiętny, zamykający w sobie trzy razy tyle cyfer dziesiętnych, ile ich ma być w pierwiastku i wyciągając z ułomku stąd powstałego pierwiastek, podobnym sposobem jak z liczb całych. I tak

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\sqrt[3]{0,714284}=0,89$$ z przybliżeniem o 0,01 prawie.

Całość z ułomkiem połączona naprzod się zamienia na ułomek zwyczajny lub dziesiętny, poczem dopiero pierwiastek się wyciąga.

Za przykłady do wprawy w wyciąganiu pierwiastku sześciennego, z ułomków już dziesiętnych, już zwyczajnych, posłużyć mogą następne:

1. $\sqrt[3]{42,875}=3,5$
2. $\sqrt[3]{28\frac{3}{4}}=3,06.$
3. $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}=2\frac{1}{2}.$
4. $\sqrt[3]{\frac{250}{686}}=\frac{5}{7}.$
5. $\sqrt[3]{\frac{4}{7}}=0,829.$
6. $\sqrt[3]{31\frac{15}{343}}=3\frac{1}{7}$
7. $\sqrt[3]{12\frac{19}{27}}=2\frac{1}{3}$
8. $\sqrt[3]{9\frac{1}{6}}=2,092$
9. $\sqrt[3]{405\frac{28}{125}}=7\frac{2}{5}$
10. $\sqrt[3]{8\frac{5}{7}}=2,057.$
11. $\sqrt[3]{127,263527}=5,03$
12. $\sqrt[3]{0,8}=0,9283$
13. $\sqrt[3]{0,08}=0,4308$
14. $\sqrt[3]{7\frac{1}{5}}=1,93.$
15. $\sqrt[3]{3,00415}=1,4429.$
16. $\sqrt[3]{\frac{14}{25}}=0,824.$
17. $\sqrt[3]{0,0034567}=0,1512.$
18. $\sqrt[3]{3,00415}=1,4429.$

ROZDZIAŁ VI.

O postępach różnicowych.

69. *Postępy* równie jak stosunki, z których się składają, są albo *różnicowe*, albo *ilorazowe*.

Postęp różnicowy jest szeregiem liczb, z których każda przewyższa poprzednią, lub jest od niej niższą, o jedną stałą liczbę zwaną *wykładnikiem postępu*. I tak dwa szeregi liczb

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20\ldots$$
$$60,\ 55,\ 50,\ 45,\ 40,\ 35,\ 30\ldots.$$

są postępami różnicowemi, gdyż w jednym z nich każda liczba postęp składająca, czyli każdy jego wyraz, przewyższa poprzedni o stałą liczbę, czyli o wykładnik 3; w drugim zaś, każdy wyraz następny jest niższym od poprzedniego o wykładnik 5. Pierwszy z tych postępów zowie się *rosnącym*, gdyż wyrazy jego idą ciągle jednakowo się zwiększając; drugi *malejącym*, wyrazy bowiem jego ciągle jednakowo się zmniejszają.

Dla oznaczenia, iż dwa poprzednie szeregi liczb składają postępy różnicowe, piszą je w następnym sposobie:

$$\div 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20\ldots$$
$$\div 60 \,.\, 55 \,.\, 50 \,.\, 45 \,.\, 40 \,.\, 35 \,.\, 30\ldots.$$

Wyrażenie to jest skróconem względem następnego, właściwy skład postępów wskazującego.

$$2 \,.\, 5 = 5 \,.\, 8 = 8 \,.\, 11 = 11 \,.\, 14 \ldots.$$
$$60. \; 55 = 55 \,.\, 50 = 50 \,.\, 45 = 45 \,.\, 40 \ldots.$$

Postępy bowiem uważają się jako proporcye ciągłe o więcej niż dwóch stosunkach, czyli jako szeregi stosunków równych, tak ułożonych, iżby następnik jednego był razem poprzednikiem następnego stosunku. Dla tego wyrażenie skrócone postępu, jest podobne, jak w proporcyach ciągłych, i przy odczytaniu postępów danych, podobnież się postępuje. I tak pierwszy *np.* postęp odczytuje się następnie: 2 do 5, jak 5 do 8, jak 8 do 11, jak 11 do 14 i t. d., to jest że każdy wyraz postępu oprócz pierwszego i ostatniego, po dwa razy się powtarza. Każdy bowiem z wyrazów pośrednich postępu, jest następnikiem wyrazu poprzedniego, a poprzednikiem względem wyrazu następnego, gdy przeciwnie wyraz pierwszy jest tylko poprzednikiem a ostatni następnikiem. Najczęściej jednak odczytując postęp dany, wprost się mówi: *niech będzie postęp różnicowy* 2, 5, 7 i t. d.

Jeden przykład postępu, może być zarazem wzorem postępu rosnącego i malejącego, jeżeli bowiem jego wyrazy, postępując od pierwszego do ostatniego powiększają się, to odwrotnie idąc od ostatniego do pierwszego zmniejszać się będą. Powiększanie się to i zmniejszanie się, może się ciągnąć nieskończenie: w skutku tylko zmniejszania się przez odejmowanie, po niżej zera, powstaną jako wyrazy postępu, ilości odjemne.

70. Zadanie 1. *Mając pierwszy wyraz i wykładnik postępu różnicowego, znaleźć inny wyraz, oznaczony tylko co do liczby porządkowej w postępie, bez potrzeby wyszukiwania wyrazów pośrednich.*

Dajmy *np.* że w postępie rosnącym, którego pierwszym wyrazem jest 72, a wykładnikiem 3, szukamy 15go wyrazu.

Z określenia postępu różnicowego wynika, że każdy z jego wyrazów równa się temu, który go poprzedza, zwiększonemu lub zmniejszonemu wykładnikiem, podług tego jak postęp jest rosnący lub malejący. Stąd w postępie danym rosnącym,

2gi wyraz $= 72 + 3.$
3ci wyraz $= 2mu + 3 = 72 + 3 + 3 = 72 + 2 \times 3$
4ty wyraz $= 3mu + 3 = 72 + 2 \times 3 + 3 = 72 + 3 \times 3.$ i t. d.

Jeżeli więc postęp różnicowy jest rosnący, każdy jego wyraz równa się pierwszemu zwiększonemu wykładnikiem, tyle razy wziętym, ile wyrazów poprzedza.

Podług tego 15sty wyraz $= 72 + 14 \times 3 = 114$

W ogóle oznaczając pierwszy wyraz postępu przez a, wykładnik przez r, wyraz szukany, przypuszczony jako ostatni w postępie przez l, liczbę całkowitą wyrazów przez n, będzie w postępie rosnącym

$$l = a + r\,(n-1)$$

Jeśliby postęp dany miał być malejącym, wówczas

2gi wyraz $= 72 - 3$

3ci „ $=$ 2mu $- 3 = 72 - 3 - 3 = 72 - 2 \times 3$

4ty „ $=$ 3mu $- 3 = 72 - 2 \times 3 - 3 = 72 - 3 \times 3$ i t. d.

stąd 15sty „ $= 72 - 14 \times 3 = 30.$

W ogóle $l = a - r\,(n-1)$

W postępie przeto różnicowym, każdy wyraz równa się pierwszemu zwiększonemu, lub zmniejszonemu wykładnikiem, tyle razy wziętym, ile wyrazów poprzedza, a to podług tego jak postęp jest rosnący albo malejący: czyli w ogóle

$$l = a \pm r\,(n-1).$$

Wzór ten służyć będzie do oznaczenia jakiegobądź wyrazu w postępie, skoro tylko są wiadome *pierwszy wyraz, wykładnik* i *liczba wyrazów* objętych w postępie, wraz z szukanym jako ostatnim.

W zastosowaniu może posłużyć przykład następny.

Znaleźć wyraz 60ty *w postępie różnicowym, którego pierwszym wyrazem jest* 7 *a wykładnik* 9.

Stosownie do poprzedniego wzoru, gdy zamiast a, r, n, wstawiemy odpowiednie liczbowe wartości, i gdy l jako wyraz szukany uważamy, będzie

$$l = 7 \pm 9\,(60-1) = 7 \pm 9 \times 59 = 7 \pm 531$$

Wartość przeto 60*go* wyrazu w postępie rosnącym jest $7 + 531 = 538$. W postępie zaś malejącym wartość ta jest odjemną, jako wypadająca z odjęcia liczby większéj od mniejszej, gdyż $7 - 531 = -524$.

Uwaga. Jeżeli w postępie rosnącym pierwszy wyraz jest zero, wówczas wyraz jakikolwiek, równa się wykładnikowi wziętemu tyle razy, ile wyrazów poprzedza; w tym razie bowiem wzór

$l = a + r(n-1)$ zamienia się na $l = r(n-1)$.

71. Zadanie 2. *Wprowadzić pomiędzy dwie liczby dane, pewną ilość środków proporcyonalnych, czyli takich liczb, któreby z dwiema danemi tworzyły postęp różnicowy.*

Aby rozwiązać to zadanie potrzeba znaleźć wykładnik; dodając go bowiem do pierwszego wyrazu, lub od niego odejmując, stosownie do gatunku postępu, znajdziemy wyraz drugi: dodając lub odejmując od wyrazu 2*go*, otrzymamy wyraz 3*ci* i t. d. W tym celu pomocną jest wartość znaleziona dla ostatniego wyrazu w postępie. I tak gdy w postępie rosnącym

$$l = a + r(n-1)$$

stąd $$l - a = r(n-1)$$

dzieląc obie strony przez $n-1$, będzie

$$r = \frac{l-a}{n-1}$$

Podobnież w postępie malejącym, gdy

$$l = a - r(n-1)$$

dodając po obu stronach $r(n-1)$, i potem odejmując l, będzie

$$r(n-1) = a - l$$

stąd $$r = \frac{a-l}{n-1}$$

Jeżeli jeszcze liczbę wyrazów wprowadzić się mających, oznaczymy przez m, liczba ta różnić się będzie od liczby całkowitéj wyrazów o dwa wyrazy, jako już dane: stąd $m + 2 = n$; wstawiając to w wartość dla r, będzie

w postępie rosnącym $r = \dfrac{l-a}{n-1} = \dfrac{l-a}{m+2-1} = \dfrac{l-a}{m+1}$

w postępie malejącym $r = \frac{a-l}{n-1} = \frac{a-l}{m+1}$.

Wykładnik przeto postępu otrzymuje się, dzieląc różnicę między wyrazami danemi, albo przez liczbę całkowitą wyrazów zmniejszoną jednością, albo przez liczbę wyrazów wprowadzić się mających zwiększoną jednością.

W zastosowaniu rozwiążmy trzy przykłady następne:

1. *Umieścić* 20 *środków proporcyonalnych pomiędzy liczbami* 4 i 67..

Gdy podług zadania $a = 4$, $l = 67$, $m = 20$,

zatem $r = \frac{l-a}{m+1} = \frac{67-4}{20+1} = \frac{63}{21} = 3$

Stąd postęp żądany będzie następny.

$$\div 4 . 7 . 10 . 13 \ldots . 67$$

2. *Wprowadzić* 8 *średnich wyrazów pomiędzy liczby* 15 *i* 3.

$$r = \frac{a-l}{m+1} = \frac{15-3}{8+1} = \frac{12}{9} = 1\tfrac{1}{3}.$$

Stąd postęp żądany będzie

$$\div 15 . 13\tfrac{2}{3} . 12\tfrac{1}{3} . 11 . 9\tfrac{2}{3} . 8\tfrac{1}{3} . 7 . 5\tfrac{2}{3} . 4\tfrac{1}{3} . 3$$

3. *Umieścic* 9 *środków proporcyonalnych pomiędzy* 0 i 1.

Jakakolwiek liczba środków pomiędzy liczbami 0 a 1 będzie umieszczoną; zawsze wykładnik postępu stąd tworzącego się, równać się będzie ułomkowi mającemu jedność za licznik, a za mianownik liczbę wyrazów umieścić się mających zwiększoną jednością (70). I tak

$$r = \frac{l-a}{m+1} = \frac{1-0}{9+1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

stąd postęp żądany będzie

$$\div 0 . \frac{1}{10} . \frac{2}{10} . \frac{3}{10} . \frac{4}{10} . \frac{5}{10} . \frac{6}{10} . \frac{7}{10} . \frac{8}{10} . \frac{9}{10} . 1$$

albo $\div 0 . 0{,}1 . 0{,}2 . 0{,}3 . 0{,}4 . 0{,}5 . 0{,}6 . 0{,}7 . 0{,}8 . 0{,}9 . 1.$

Gdybyśmy pomiędzy 0 a 1, albo pomiędzy dwie jakiekolwiek liczby różniące się od siebie jednością, wprowadzili 99, 999, 9999 i t. d. średnich proporcyonalnych, wykładnik odpowiedni byłby 0,01, 0,001, 0,0001 i t. d. Stąd zarazem wynika, że wszelki ułomek dziesiętny może być uważany jako środek proporcyonalny wprowadzony pomiędzy liczby całkowite jednością się różniące, w liczbie odpowiedniej gatunkowi ułomku, zmniejszonej jednością.

72. Zadanie 3. *Jeżeli pomiędzy dwa każde następne wyrazy postępu różnicowego, wprowadzimy jednakową liczbę środków proporcyonalnych, wszystkie postępy cząstkowe tak utworzone złożą jeden i tenże sam postęp.*

I tak w postępie $\div 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \ldots$

wprowadzając po 4 środki proporcyonalne pomiędzy 2 i 5, 5 i 8, 8 i 11 i t. d. wykładniki każdemu z postępów cząstkowych odpowiednie, będą następne

$$\frac{5-2}{4+1},\ \frac{8-5}{4+1},\ \frac{11-8}{4+1},\ \frac{14-11}{4+1} \ldots\ldots$$

Wszystkie te wykładniki są sobie równe, każdy bowiem z nich $= 3/5$. Gdy nadto ostatni wyraz pierwszego postępu jest pierwszym wyrazem 2*go*, ostatni wyraz 2*go* jest pierwszym 3*go* i t. d stąd zbiór tych wszystkich postępów cząstkowych utworzy jeden i tenże sam postęp; jakoż

$$\div 2 \,.\, 2^3/_5 \,.\, 3^1/_5 \,.\, 3^4/_5 \,.\, 4^2/_5 \,.\, 5 \,.\, 5^3/_5 \ldots .\, 8 \,.\, 8^3/_5 \ldots .\, 11 \text{ i t. d.}$$

73. Zadanie 4. *W każdym postępie różnicowym summa dwóch wyrazów, zarówno oddalonych od wyrazów skrajnych, równa się summie tychże skrajnych.*

I tak w postępie

$$\div 1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 13 \,.\, 16 \,.\, 19 \,.\, 22 \,.\, 25$$

$$1+25=4+22=7+19=10+16$$

Każde bowiem dwa wyrazy zarówno oddalone od wyrazów skrajnych, z temiż skrajnemi tworzą proporcyą; i tak

$$1 \,.\, 4 = 22 \,.\, 25 \quad \text{stąd} \quad 1+25 = 4+22$$
$$1 \,.\, 7 = 19 \,.\, 25 \quad \text{stąd} \quad 1+25 = 7+19$$
$$1 \,.\, 10 = 16 \,.\, 25 \quad \text{stąd} \quad 1+25 = 10+16$$

Uwaga. *Jeżeli liczba wyrazów w postępie różnicowym jest nieparzystą, wyraz środkowy równa się połowie summy wyrazów skrajnych.*

Wyraz ten bowiem jest średnim w proporcyi ciągłéj jaką formuje z dwoma wyrazami skrajnemi. I tak w danym postępie, jako mającym 9 wyrazów, będzie

$$\div\, 10 \,.\, 13 \,.\, 25, \quad \text{stąd}\ 13 = \frac{1+25}{2}$$

74. Zadanie 5. *Summa wszystkich wyrazów postępu różnicowego, równa się połowie iloczynu wypadłego z rozmnożenia summy wyrazów skrajnych przez liczbę wyrazów.*

Dajmy *np* że szukamy summy wyrazów postępu

$$\div\, 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20 \,.\, 23$$

Drugi postęp $\div\, 23.\ 20.\ 17.\ 14.\ 11\ .\ 8\ .\ 5\ .\ 2$

jako zupełnie odwrotny względem pierwszego, wyda także podobnąż summę wyrazów, czyli że summa tych dwóch postępów będzie podwójną względem summy pierwszego. Oznaczając tę szczegółową summę przez S, i dodając dwa postępy tak, aby wyraz pierwszy był dodany do pierwszego, drugi do drugiego i t. d. będziemy mieli

$$2\,S = (2+23)+(5+20)+(8+17)+\ .\ .\ .\ .\ .\ +(23+2)$$

Że zaś summy cząstkowe nawiasami oddzielone, jako summy wyrazów zarówno oddalonych od wyrazów skrajnych, są sobie równe, czyli że $(2+23) = (5+20) = (8+17)$ i t. d. można więc w miejscu wszystkich tych summ, wziąć jedną z nich $(2+23)$, powtórzoną tyle razy, ile jest wyrazów w postępie: będzie zatem

$$2\,S = (2+23)8$$

$$\text{stąd} \quad S = \frac{(2+23)8}{2} = 100.$$

Ogólny przeto wzór $S=\frac{(a+l)n}{2}$

da poznać summę wszystkich wyrazów w postępie różnicowym, bez potrzeby szczegółowego ich dodawania, gdy *wyraz pierwszy*, *ostatni*, *i liczba wyrazów* w postępie są wiadome.

Zastosowania. 1°. *Znaleźć summę wyrazów w każdym z 4 następnych postępów.*

$\div$ 3 . 10 . 17 . 24 . 31 . 38 . 45 . 52 . 59 . 66;
$\div$ 5 . 10 . 15 . 20 . 25 . 30 . 35 . 40 . 45;
$\div$ 12 . 9 . 6 . 3 . 0.—3.—6.—9;
$\div$100 . 80 . 60 . 40 . 20 . 0.—20.—40.—60.—80.—100;

Stosując wzór poprzedni na summę, znajdziemy

1°. $S=\frac{(3+66)10}{2}=69\times5=345.$

2°. $S=\frac{(5+45)9}{2}=25\times9=225.$

3°. $S=\frac{(12-9)8}{2}=3\times4=12.$

4°. $S=\frac{(100-100)11}{2}=0\times\frac{11}{2}=0.$

2. *Znaleźć summę wyrazów w postępie różnicowym, którego pierwszym wyrazem jest* 7, *ostatnim* 538, *a liczba wyrazów* 60.

$$S=\frac{(a+l)n}{2}=\frac{(7+538)60}{2}=545\times30=16350.$$

75. Wypadki zadań powyższych co do postępów różnicowych, są źródłem wielu zastósowań: szczególniéj zaś w tym względzie są ważne wypadki zadań 1*go* i 5*go*, które w następnych równaniach były wyrażone

$$l=a\pm r\,(n-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(1)$$

$$S=\frac{(a+l)n}{2}\,:\,.\,.\,.\,.\,(2)$$

Przy ich pomocy łatwo będzie rozwiązać to ogólne zadanie: *Z pięciu wielkości wchodzących w postęp różnicowy jako to: z pierwszego wyrazu* a, *ostatniego czyli* ngo *wyrazu* l, *wykładnika* r, *liczby wyrazów* n, *i nakoniec z summy tychże wyrazów* S, *mając trzy którekolwiek wiadome, można zawsze dwie inne wyprowadzić.*

Jako zastosowania mogą służyć przykłady następne:

1. *Znaleźć summę* 100 *pierwszych wyrazów w postępie różnicowym, złożonym z szeregu naturalnego liczb nieparzystych, i wskazać ogólne prawidło co do wartości tej summy, przy jakiejkolwiek bądź liczbie wyrazów.*

W postępie danym $\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots.$

szukamy naprzód podług wzoru 1. wartości ostatniego, czyli 100*go* wyrazu, gdy $a=1$, $r=2$, $n=100$; stąd

$$l=a+r\,(n-1)=1+2\,(100-1)=1+2\times 99=199.$$

Wstawiając tę wartość zamiast l, w wzór 2. na summę

$$S=\frac{(a+l)n}{2}=\frac{(1+199)100}{2}=200\times 50=10000=100^2$$

Podobnież byśmy znaleźli, że summa *np.* 15 pierwszych wyrazów danego postępu równa się 225, czyli 15^2; że summa 20 jego wyrazów równa się 20^2 i t. d.

Aby ogólne stąd wyprowadzić prawidło, uważamy wyraz ostatni n^{ty}, jako szczególowo nieoznaczony, w postępie, którego pierwszym wyrazem jest 1, a wykładnikiem 2, będzie zatem

$$l=1+2\,(n-1)=1+2n-2=2n-1$$

Stąd summa $S=\dfrac{(1+2n-1)\,n}{2}=\dfrac{2n\times n}{2}=n^2$

Summa przeto wyrazów w postępie różnicowym złożonym z szeregu liczb nieparzystych, poczynając od 1, *równa się kwadratowi z liczby wyrazów.*

2. *Składając do Kassy Oszczędności w pierwszym tygodniu* 1 *złoty, w drugim* 3, *w* 3*cim* 5 *i t. d. za każdym tygodniem następnym o* 2 *złt. więcej, ileż w rok się złoży.*

Składki wnoszone tworzą postęp złożony z liczb nieparzystych, poczynając od 1. Liczba wyrazów tego postępu jest 52, stąd summa tych wyrazów, stosownie do poprzedniego prawidła winna być równą $52^2=2704$. Jakoż dochodząc tej summy zwyczajnym sposobem, znajdujemy, że gdy

$$l = 1+2\,(52-1) = 1+2\times 51 = 103.$$

zatem $S = \dfrac{(1+103)52}{2} = \dfrac{104\times 52}{2} = 2704.$

3. *Ile uderzeń czyni zegar wybijając tylko godziny, a ile wybijając kwadranse i godziny.*

W 1*szym* razie postęp $\div\ 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots.\,12$

Stąd $S = \dfrac{(1+12)12}{2} = 13\times 6 = 78$

W 2*gim* razie postęp $\div\ 11\,.\,12\,.\,13\,.\,14\ldots22$

Przy każdej bowiem godzinie zegar oprócz godziny wybija 4 kwadranse; nadto osobno wybijając kwadranse, w ciągu godziny czyni 6 uderzeń. Stąd

$$S = \frac{(11+22)12}{2} = 33\times 6 = 198.$$

4. *Przypuszczając że ciało wolnie spadające przebiega w pierwszéj sekundzie* $15\frac{1}{2}$ *stop, w każdej zaś następnej o* 31 *stop więcéj, jak wielką drogę przebywa w minucie i jaką jest przestrzeń w ostatniej sekundzie przebyta.*

Postęp tworzący się z dróg szczegółowych w każdej następnéj sekundzie przebytych, jest następny.

$$\div\ 15{,}5\,.\,46{,}5\,.\,77{,}5\,\ldots\ldots$$

Liczba jego wyrazów jest 60. Wartość 60*go* wyrazu da poznać drogę w ostatniéj sekundzie przebytą.

$$l = 15{,}5+31\times 59 = 1844{,}5 \text{ stop}$$

Summa zaś wyrazów postępu wskaże całą przestrzeń przebytą w ciągu 60 sekund, czyli jednej minuty.

$$S = \frac{(15{,}5+1844{,}5)60}{2} = 55800 \text{ stóp.}$$

5. *Przypuszczając że kula wyrzucona pionowo, potrzebowała tyleż czasu do swego wzniesienia, ile do spadku, i że czas całkowity jej ruchu trwał* 10 *sekund, żądamy wiedzieć do jakiéj wysokości się wzniosła.*

Czas podany 10 sekund zarówno rozdzielony na wznoszenie się i spadek kuli, daje na każde z nich 5 sekund. Prędkość kuli, i moc jej następnego za każdą sekundą zwiększania się podaje przykład poprzedni. Wysokość zatem żądaną znajdziemy szukając summy 5*ciu* wyrazów następnego postępu

$$\div\ 15{,}5\ .\ 46{,}5\ .\ 77{,}5\ .\ 108{,}5\ .\ 139{,}5$$

Summa ta $S = \dfrac{(15{,}5+139{,}5)5}{2} = 387{,}5$ stóp.

6. *Chcąc ustawić kule w* 20 *rzędów, tak aby w pierwszym było* 5, *w* 20*stym zaś* 81, *i zamierzając zachować jednakową różnicę w tych rzędach, co do liczby kul, jaka ta będzie różnica i ile kul wszystkich razem się użyje.*

Wielkości wiadome są $a = 5$, $l = 81$, $n = 20$; niewiadome zaś r i S. Wzór na wykładnik r, da różnicę rzędów, co do liczby kul.

$$r = \frac{l-a}{n-1} = \frac{81-5}{20-1} = \frac{76}{19} = 4$$

Summa zaś wyrazów postępu wskaże ilość całkowitą kul użytych.

$$S = \frac{(5+81)20}{2} = 860 \text{ kul.}$$

7. *Linią na* 64 *cali długą podzielić na* 8 *części, jedna od drugiéj zarówno większych, tak jednak, aby ostatnia część największa była długa na* 15 *cali. Jakąż powinna być część najmniejsza, i o ile jedna część różni się od drugiéj.*

Wielkości wiadome są: $S = 64$, $l = 15$, $n = 8$; niewiadome zaś a i r. Z równania na summę

$$S = \frac{(a+l)n}{2} \quad \text{wynika że } a = \frac{2S}{n} - l$$

$$\text{czyli że } a = \frac{2\times 64}{8} - 15 = 1$$

Mając tak wynalezioną część najmniejszą linii, stanowiącą wyraz pierwszy postępu, wykładnik tegoż postępu, wskazujący różnicę, co do wielkości części z podziału wynikłych, znajdziemy

$$r = \frac{l-a}{n-1} = \frac{15-1}{8-1} = \frac{14}{7} = 2$$

Postęp przeto utworzony przez następne części linii, będzie

$$\div\ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15$$

8. *Sztab 16 rozmaitej długości, z których każda następująca różni się o tęż samą długość od bezpośrednio ją poprzedzającéj, mają razem długości* 86 *stop*, 8 *cali; najkrótsza zaś z nich jest długa na* 3 *stop*, 4 *cali. Jak wielką jest najdłuższa, i jak wielką jest różnica pomiędzy każdemi dwiema najbliższemi co do długości sztabami.*

Wielkości wiadome są: $S=86', 8''=1040''$; $a=3', 4''=40''$, $n=16$. Niewiadome zaś l i r. Z równania na summę

$$S = \frac{(a+l)n}{2} \text{ wynika że } l = \frac{2S}{n} - a$$

$$\text{czyli że } l = \frac{2\times1040}{16} - 40 = 90 \text{ cali,}$$

Wzór na wykładnik da różnicę między sztabami

$$r = \frac{l-a}{n-1} = \frac{90-40}{16-1} = \frac{50}{15} = 3^1/_3 \text{ cali.}$$

9. *Pewnej liczbie ubogich rozdano jałmużnę w następnym sposobie: pierwszy dostał* 40 *złt. ostatni* 18 *złt. jeden od drugiego o dwa złt. mniej. Ileż było ubogich i ile razem otrzymali.*

Wielkości wiadome są $a=40$; $l=18$, $r=2$. Niewiadome zaś S i n. Z równania na ostatni wyraz $l=a-r(n-1)$

$$\text{wypada } r(n-1) = a-l$$

$$\text{stąd } n-1 = \frac{a-l}{r}, \text{ zatem } n = \frac{a-l}{r} + 1$$

$$\text{czyli } n = \frac{40-18}{2} + 1 = 12$$

$$S = \frac{(a+l)n}{2} = \frac{(40+18)12}{2} = 348 \text{ złt.}$$

10. *Mając zegarek który pospiesza po 14 minut na godzinę, i który już wskazuje $1\frac{1}{2}$ godziny więcéj niż powinien, żądamy wiedzieć po wielu godzinach pospieszy o 12 godzin.*

Zegarek uważany od dokładnie idącego różni się w początkach co do wskazanego czasu o $1\frac{1}{2}$ godziny, czyli o 90 minut: po pierwszéj godzinie różnica ta jest $90+14=104$, po drugiéj $104+14=118$ i t. d. po niewiadomej liczbie godzin różnica jest 12 godzin, czyli 720 minut. Stąd w postępie

$$\div\ 104 \,.\, 118 \,.\,.\,.\,.\,.\ 720$$

Potrzeba znaleźć liczbę wyrazów n, gdy $a=104$, $l=720$, $r=14$.

Z równania $l=a+r\,(n-1)$

wyprowadzamy że $n=\dfrac{l-a}{r}+1$

czyli że $n=\dfrac{720-104}{14}+1=45$ godzin.

Jakoż w tym razie $l=104+14\,(45-1)=720$.

11. *Jaki był dochód każdoroczny osoby, dla któréj 2100 rubli na 10 lat przeznaczono, z warunkiem, aby każdego następnego roku o 20 rubli miała więcéj niż poprzedniego.*

Dochody następne tej osoby tworzą postęp różnicowy, w którym wiadome są $r=20$, $n=10$, $S=2100$; niewiadome zaś a i l, z których łatwo cały postęp się utworzy.

Z równania $S=\dfrac{(a+l)n}{2}$ wynika że $\dfrac{2S}{n}=a+l$

wstawiając za l, jego wartość $l=a+r\,(n-1)$

będzie $\dfrac{2S}{n}=2a+r\,(n-1)$

stąd $2a=\dfrac{2S}{n}-r\,(n-1)$

$$a=\frac{S}{n}-\frac{r(n-1)}{2}=\frac{2100}{10}-\frac{20\times9}{2}=120$$

zatem $l=a+r\,(n-1)=120+20\times9=300$.

Dochody przeto postęp następny utworzą

$$\div\ 120 \,.\, 140 \,.\, 160 \,.\, 180 \,.\,.\,.\,.\ 300.$$

ROZDZIAŁ VII.

O Postępach ilorazowych.

---

76. *Postępem ilorazowym* albo *geometrycznym* zowie się szereg liczb, z których każda podzielona przez tę, która ją poprzedza, daje zawsze na iloraz jedną i tęż samą liczbę. Iloraz ten stały jest *wykładnikiem postępu*, i podług tego jak jest większym lub mniejszym od jedności, postęp nazywa się *rosnącym*, albo *malejącym*. I tak dwa szeregi

$$5\ ,\ 15\ ,\ 45\ ,\ 135\ ,\ 405\ ,\ 1215\ ,\ 3645$$
$$16\ ,\ 8\ ,\ 4\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ \tfrac{1}{2}\ ,\ \tfrac{1}{4}$$

są postępami ilorazowemi: pierwszy jest *rosnący*, gdyż ma za wykładnik 3, liczbę większą od jedności: drugi jest *malejący*, gdyż ma za wykładnik $\frac{1}{2}$, liczbę mniejszą od jedności. Postępy te oznaczają się następnie.

$$\div\div\ 5 : 15 : 45 : 135 : 405 : 1215 : 3645.$$
$$\div\div\ 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4}$$

Odczytują je w podobnym sposobie jak postępy różnicowe. Znak $\div\div$ który te postępy poprzedza, wskazuje, iż są również szeregami proporcyj ciągłych. Każdy przeto ich wyraz jest zarazem poprzednikiem i następnikiem, oprócz pierwszego, który jest tylko poprzednikiem, i ostatniego, który jest tylko następnikiem, w odpowiednich im stosunkach.

W postępie różnicowym, pierwszy wyraz może być zero, nigdy zaś w postępie ilorazowym: wszystkie bowiem wyrazy podobneżby wypadły. Nadto w postępie różnicowym po wyrazie zero, mogą następować ilości odjemne, których nigdy nie ma w postępie ilorazowym.

77. Zadanie 1. *Mając pierwszy wyraz i wykładnik postępu, oznaczyć wartość innego wyrazu, którego tylko liczba porządkowa jest podaną.*

Dajmy że szukamy wyrazu 12go w postępie ilorazowym, którego pierwszym wyrazem jest 3, a wykładnik 2.

Ponieważ wykładnik postępu wynika z podzielenia każdego wyrazu, przez wyraz bezpośrednio go poprzedzający, stąd każdy wyraz następny tworzy się, mnożąc poprzedni przez wykładnik. I tak w danym postępie rosnącym

Wyraz 2gi $= 3\times2$
„ 3ci $=$ 2mu $\times2=3\times2\times2=3\times2^2$
„ 4ty $=$ 3mu $\times2=3\times2^2\times2=3\times2^3$ i t. d.

Każdy przeto wyraz w postępie równa się pierwszemu rozmnożonemu przez wykładnik podniesiony do takiéj potęgi, ile wyrazów poprzedza. Podług tego

Wyraz 12sty $= 3\times2^{11} = 3\times2048 = 6144.$

Prawidło nie zmienia się wcale, przy oznaczaniu jakiegokolwiek wyrazu w postępie malejącym.

I tak 12sty wyraz postępu, którego pierwszy wyraz jest 6144 a wykładnik ½, równać się będzie

$$6144\times(1/2)^{11} = 6144\times\frac{1}{2048} = \frac{6144}{2048} = 3$$

W ogóle oznaczając przez a wyraz pierwszy postępu, przez q wykładnik, przez l wyraz szukany, którego liczba porządkowa jest n, wypadnie wzór następny

$$l = a\,.\,q^{n-1}$$

Za pomocą tego wzoru można znaleźć jakikolwiek wyraz postępu, bez potrzeby wyszukiwania wyrazów, które go poprzedzają.

Zastosowania. 1. *Znaleźć wyraz* 6sty *w postępie rosnącym, którego pierwszym wyrazem jest* 5 *a wykładnik* 4.

$$l = aq^{n-1} = 5 \times 4^5 = 5 \times 1024 = 5120.$$

2. *Znaleźć wyraz* 10ty *w postępie malejącym, którego pierwszy wyraz* 12, *wykładnik* $\frac{1}{2}$.

Wyraz 10ty, czyli $l = 12 \times (\frac{1}{2})^9 = 12 \times \frac{1}{512} = \frac{3}{128}$

Uwaga. Jeżeli wyraz pierwszy postępu jest 1, każdy inny wyraz równa się wykładnikowi podniesionemu do takiéj potęgi, czyli wziętemu tyle razy za czynnik, ile wyrazów poprzedza. *np.* w postępie $\div\!\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729$

wyraz 5ty, czyli $81 = 1 \times 3^4 = 3^4$.

78. Zadanie 2. *Umieścić pomiędzy dwiema liczbami danemi, pewną liczbę średnich geometrycznie proporcyonalnych.*

Dajmy *np.* że mamy umieścić 5 środków pomiędzy liczbami 2 i 1458, czyli że chcemy oznaczyć 5 takich liczb, któreby z dwiema danemi, jako skrajnemi, tworzyły postęp ilorazowy.

Rozwiązanie zadania zależy na wyszukaniu wykładnika; mnożąc bowiem przez ten wykładnik, pierwszy wyraz postępu, otrzymamy wyraz drugi: mnożąc drugi, otrzymamy trzeci i t. d.

Oznaczmy ten wykładnik jako niewiadomy przez x. Ponieważ wyraz ostatni postępu 1458, jako wyraz 7my, ma następną wartość

$$1458 = 2 \times x^6.$$

$$\text{stąd } x^6 = \frac{1458}{2} = 729$$

$$\text{zatem} \quad x = \sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Mając tak znaleziony wykładnik, łatwo jest utworzyć żądany postęp.

$$\div\!\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$$

Podobnież i w postępie malejącym. Chcąc *np.* wprowadzić 3 średnie pomiędzy liczby 16 i 1, wyraz ostatni 1, jako wyraz 5ty w postępie, będzie

$$1 = 16 \times x^4, \quad \text{stąd } x^4 = \frac{1}{16}$$

zatem $x = \sqrt[4]{1/16} = \sqrt{\sqrt{1/16}} = \frac{1}{2}$

Postęp przeto będzie następny

$$\div\!\div\; 16 : 8 : 4 : 2 : 1.$$

W ogóle czy postęp jest rosnący, lub malejący, zawsze z wzoru na ostatni wyraz

$$l = aq^{n-1} \text{ wynika że } q^{n-1} = \frac{l}{a}$$

$$\text{stąd } q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$$

Wiadomo bowiem, że liczba środków umieścić się mających, czyli m, o dwa jest mniejszą od liczby całkowitéj wyrazów postępu, czyli od n; to jest że $n = m + 2$, stąd $n - 1 = m + 1$.

Aby przeto wynaleźć wykładnik potrzebny przy umieszczaniu pewnej liczby średnich geometrycznie proporcyonalnych pomiędzy dwiema liczbami danemi, należy drugą z tych liczb podzielić przez pierwszą i wyciągnąć z ilorazu pierwiastek potęgi wskazanéj przez liczbę średnich umieścić się mających, zwiększoną jednością.

Przykłady jako zastosowanie służyć mogące, dałyby powód do wyciągania pierwiastków wyższéj niż trzeciej potęgi, co zwykle przy pomocy logarytmów najłatwiej się uskutecznia.

79. Zadanie 3. *Jeżeli pomiędzy każde dwa następne wyrazy postępu ilorazowego, wprowadzimy pewną lecz zawsze równą liczbę średnich geometrycznie proporcyonalnych, postępy cząstkowe tak powstałe, razem wzięte, utworzą jeden i tenże sam postęp.*

I tak w postępie ilorazowym

$$\div\!\div\; 2 : 32 : 512 : 8192 \ldots.$$

chcąc wprowadzić *np.* po 3 średnie proporcyonalne pomiędzy liczby 2 i 32, 32 i 512; 512 i 8192 i t. d., wykładniki każdemu z postępów cząstkowych odpowiednie, będą sobie równe.

$$\sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{\frac{512}{32}} = \sqrt[4]{\frac{8192}{512}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Gdy nadto 32, wyraz ostatni pierwszego postępu, jest wyrazem pierwszym drugiego, gdy 512 wyraz ostatni 2go postępu, jest wyrazem 1szym 3go i t. d., stąd wszystkie te cząstkowe postępy razem tworzą jeden i tenże sam postęp: jakoż

$$\div\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : \ldots$$

80. Zadanie 4. *W każdym postępie ilorazowym, iloczyn dwóch wyrazów jakichkolwiek, zarówno oddalonych od wyrazów skrajnych, równa się iloczynowi tychże skrajnych.*

I tak w postępie $\div\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$

$$2\times 1458 = 6\times 486 = 18\times 162$$

Równania te bowiem są wypadkiem proporcyj, jakie z sobą tworzą wyrazy uważane postępu.

$$2 : 6 = 486 : 1458$$
$$2 : 18 = 162 : 1458$$

Uwaga. *Gdy liczba wyrazów postępu jest nieparzystą, wyraz środkowy równa się pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu wyrazów skrajnych.*

I tak w poprzednim postępie wyraz środkowy

$$54 = \sqrt{2\times 1458}$$

gdyż $2 : 54 = 54 : 1458$, czyli $2 : 54 : 1458$.

81. Zadanie 5. *Iloczyn z wszystkich wyrazów postępu ilorazowego, równa się pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu wyrazów skrajnych, podniesionego do potęgi wskazanéj przez liczbę wyrazów.*

I tak w postępie $\div\div\ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243$

oznaczając przez P iloczyn wyrazów, ten zwyczajnym sposobem wprost wzięty, będzie

$$P = 1\times 3\times 9\times 27\times 81\times 243$$

albo $P = 243\times 81\times 27\times 9\times 3\times 1$

stąd znowu na iloczyn tych dwóch wartości wypadnie

$$P^2 = (1\times 243)\ (3\times 81)\ (9\times 27)\ (27\times 9)\ (81\times 3)\ (243\times 1)$$

Że zaś $1\times 243 = 3\times 81 = 9\times 27$ i t. d., stąd zamiast 6 równych czynników, może być wzięty jeden z nich, podniesiony do potęgi szóstéj; będzie zatem

$$P^2 = (1 \times 243)^6$$

$$\text{stąd} \quad P = \sqrt{(1 \times 243)^6}$$

czyli w ogóle wyrażając, $P = \sqrt{(al)^n}$

82. Zadanie 6. *Summa wyrazów postępu ilorazowego otrzymuje się, odciągając wyraz pierwszy od iloczynu z ostatniego wyrazu przez wykładnik, i dzieląc resztę przez wykładnik zmniejszony jednością.*

Niech będzie postęp $\div\div$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458

Zastępując każdy wyraz postępu przez jego wartość (77), będzie

$$\div\div \; 2 : 2\times3 : 2\times3^2 : 2\times3^3 : 2\times3^4 : 2\times3^5 : 2\times3^6$$

Oznaczając summę wyrazów postępu przez S, będzie

$$S = 2 + 2\times3 + 2\times3^2 + 2\times3^3 + 2\times3^4 + 2\times3^5 + 2\times3^6$$

Rozmnóżmy każdy wyraz równania przez wykładnik 3, będzie

$$S\times3 = 2\times3 + 2\times3^2 + 2\times3^3 + 2\times3^4 + 2\times3^5 + 2\times3^6 + 2\times3^7$$

Odciągnijmy pierwszą summę od drugiéj, czyli summę jednokrotną od trzykrotnej, będzie

$$S\times3 - S \text{ albo } S(3-1) = 2\times3^7 - 2 = 2\times3^6\times3 - 2 = 1458\times3 - 2$$

Podzielmy obie strony przez 3—1, będzie

$$S = \frac{1458\times3-2}{3-1} = 2186$$

Wzór zaś ogólny na summę wyrazów, pamiętając na oznaczenia poprzednio użyte, będzie

$$S = \frac{lq-a}{q-1}$$

Zastosowania. 1°. *Znaleźć summę wyrazów postępu ilorazowego rosnącego, którego pierwszym wyrazem jest* 5, *ostatnim* 640 *a wykładnik* 2.

$$S = \frac{lq-a}{q-a} = \frac{640\times2-5}{2-1} = 1275.$$

Dla sprawdzenia rozwijamy sam postęp i bierzemy summę jego wyrazów zwyczajnym sposobem.

$$S = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640$$

2. *Znaleźć summę siedmiu pierwszych wyrazów w postępie ilorazowym* $\div\!\!\div$ 1 : 4 : 16 . . . .

Wyraz 7my $l = aq^{n-1} = 1 \times 4^6 = 4096$

stąd $S = \dfrac{lq-a}{q-a} = \dfrac{4096 \times 4-1}{4-1} = 5461.$

83. Jeżeli pierwszy wyraz postępu, wykładnik i liczba wyrazów są podane, wówczas bez potrzeby oddzielnego wyszukiwania ostatniego wyrazu, można otrzymać *summę wyrazów* w postępie, *odejmując jedność od wykładnika podniesionego do potęgi wskazanéj przez liczbę wyrazów, resztę mnożąc przez pierwszy wyraz, a iloczyn dzieląc przez wykładnik zmniejszony jednością.*

Z wzoru bowiem na ostatni wyraz $l = aq^{n-1}$

mnożąc obie strony przez q, wypada $lq = aq^n$

Wstawiając tę wartość w równanie dla S, będzie

$$S = \frac{lq-a}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

Pierwsza jednak wartość dla summy jest częściej używaną.

Podług tego w poprzednim przykładzie, summa 7 wyrazów w postępie $\div\!\!\div$ 1 : 4 : 16 . . . . będzie

$$S = \frac{1(4^7-1)}{4-1} = \frac{16383}{3} = 5461.$$

Podobnież *chcąc znaléźć summę wyrazów w postępie, którego 1szym wyrazem jest* 2, *wykładnik* 2 *a liczba wyrazów* 8, będzie

$$S = \frac{2(2^8-1)}{2-1} = 2 \times 256 - 2 = 510$$

84. Jeżeli postęp jest malejący, wówczas wzór zwyczajny na wartość summy wyrazów postępu,

$$S = \frac{lq-a}{q-1} \quad \text{zamieniają na} \quad S = \frac{a-lq}{1-q}$$

aby uczynić dodatniemi oba wyrazy ułomku, stanowiącego tę wartość. W tym bowiem razie wykładnik q jest mniejszy od jedności, i wyraz ostatni *l* mniejszy od wyrazu pierwszego *a*. Z resztą ten wypadek wynika z podobnego jak wprzód rozumowania.

I tak niech będzie postęp malejący

$$\div\ 4:1:\frac{1}{4}:\frac{1}{16}:\frac{1}{64}:\frac{1}{256}:\frac{1}{1024}.$$

Rozmnóżmy wszystkie wyrazy tego postępu przez wykładnik $\frac{1}{4}$, czyli weźmy $\frac{1}{4}$ część tegoż postępu, będzie

$$\div 1:\frac{1}{4}:\frac{1}{16}:\frac{1}{64}:\frac{1}{256}:\frac{1}{1024}:\frac{1}{4096}$$

Odciągając summę zwyczajną wyrazów drugiego postępu od summy pierwszego, czyli $\frac{1}{4}$ summy od summy właściwej, po zniesieniu podobnych, lecz z przeciwnemi znakami wyrazów, wypadnie $4-\frac{1}{4096}$ na $\frac{3}{4}$ summy właściwego postępu; to jest

$$\frac{3}{4}S=4-\frac{1}{4096}$$

$$\text{stąd } S=\frac{4-\frac{1}{4096}}{\frac{3}{4}}=\frac{4-\frac{1}{1024}\times\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{a-lq}{1-q}$$

Podług tego wypadek właściwy na summę w zadanym postępie

$$\text{będzie } S=\left(\frac{16384-1}{4096}\right)\frac{4}{3}=\frac{5461}{1024}=5\,\frac{341}{1024}\,.$$

Podobnież gdy chcemy *np* znaleźć summę 7 pierwszych wyrazów postępu malejącego, którego pierwszy wyraz jest 16 a wykładnik $\frac{1}{2}$, będzie

$$\text{Wyraz 7my } l=aq^{n-1}=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=16\times\frac{1}{64}=\frac{1}{4}$$

$$S=\frac{a-lq}{1-q}=\frac{16-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=15\frac{7}{8}\times\frac{2}{1}=31\,\frac{3}{4}$$

85. Gdy *postęp malejący* jest *nieskończony*, czyli o nieskończenie wielkiéj liczbie wyrazów, ostatni jego wyraz będąc nieskończenie małym, czyli mniejszym od wszelkiej ilości nazna-

czyć się dającéj, może być uważany jako równy zero. W tym przeto razie wartość dla summy wyrazów będzie

$$S = \frac{a}{1-q}$$

Jest to granica do któréj summa wyrazów postępu tem więcéj się zbliża, im liczba wyrazów n staje się większą. *Granica ta otrzymuje się przeto, dzieląc pierwszy wyraz postępu, przez przewyżkę jedności nad wykładnik.* I tak *np.* w postępach:

$1^0 \ \div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2^2} : \frac{1}{2^3} : \frac{1}{2^4} \ldots\ldots$ nieskończenie

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$2^0 \ \div 2 : \frac{2}{3} : \frac{2}{3^2} : \frac{2}{3^3} \ldots\ldots$

$$S = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6}{3-1} = \frac{6}{2} = 3.$$

$3^0 \ \div \frac{1}{4} : \frac{1}{4^2} : \frac{1}{4^3} : \frac{1}{4^4} \ldots\ldots$

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

$4^0 \ \div 1 : \frac{1}{1,05} : \frac{1}{(1,05)^2} : \frac{1}{(1,05)^3} \ldots\ldots$

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{1,05}} = \frac{1.05}{0,05} = 21.$$

$5^0 \ \div 1 : \frac{1}{1,001} : \frac{1}{(1,001)^2} : \frac{1}{(1,001)^3} \ldots\ldots$

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{1,001}} = \frac{1,001}{0,001} = 1001.$$

86. *Każdy ułomek dziesiętny peryodyczny uważać można za postęp ilorazowy malejący nieskończony; ułomek więc zwyczajny równy jemu co do wartości będzie granicą summy wyrazów tego postępu. np.*

$$0{,}333.\,.=0{,}3+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\ldots$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots\ldots$$
$$=\frac{{}^3/_{10}}{1-{}^1/_{10}}=\frac{3}{10-1}=\frac{3}{9},\text{ czyli }\frac{1}{3}$$
$$0{,}2727\,.\,.=0{,}27+0{,}0027+0{,}000027+\ldots\ldots$$
$$=\frac{0{,}27}{1-0{,}01}=\frac{0{,}27}{0{,}99}=\frac{27}{99}\text{ czyli }\frac{3}{11}$$
$$0{,}257257\,.\,.=0{,}257+0{,}000257+0{,}000000257+\ldots\ldots$$
$$=\frac{0{,}257}{1-0{,}001}=\frac{0{,}257}{0{,}999}=\frac{257}{999}.$$

Aby więc ułomek peryodyczny prosty zamienić na ułomek zwyczajny, potrzeba wziąć peryód za licznik, za mianownik zaś liczbę złożoną z tylu dziewiątek, ile jest cyfer dziesiętnych w tym peryodzie.

Podobnież z nauki postępów się okazuje, że dla zamiany ułomku peryodycznego mieszanego na ułomek zwyczajny, potrzeba wziąć za licznik różnicę między częścią nieperyodyczną wziętą z peryodem, a częścią samą nieperyodyczną, za mianownik zaś liczbę złożoną z tylu dziewiątek ile jest cyfer w peryodzie, z przypisanemi tylu zerami, ile jest cyfer nieperyodycznych. *np.*

$$0{,}57318318\ldots=57{,}318318\ldots:100$$
$$=(57+0{,}318+0{,}000318+\ldots):100$$
$$=\left(57+\frac{318}{999}\right):100=\frac{57\times999+318}{99900}$$
$$=\frac{57(1000-1)+318}{99900}=\frac{57000-57+318}{99900}$$
$$=\frac{57318-57}{99900}=\frac{57261}{99900}.$$

ROZDZIAŁ VIII.

O Logarytmach.

87. Porównywając wypadki odpowiednie w dwóch rodzajach postępów, znajdujemy że

w postępie różnicowym,	w postępie ilorazowym
$l = a + r(n-1) \ldots\ldots (70)$	$l = aq^{n-1} \ldots\ldots (77)$
$r = \dfrac{l-a}{m+1} \ldots\ldots (71)$	$q = \sqrt[m+1]{\dfrac{l}{a}} \ldots\ldots (78)$
$S = \dfrac{(a+l)n}{2} \ldots\ldots (74)$	$P = \sqrt[2]{(al)^n} \ldots\ldots (81)$

Wypadki te okazują, że co w postępie różnicowym otrzymuje się przez dodawanie, odciąganie, mnożenie i dzielenie, toż samo się oznacza w postępie ilorazowym za użyciem mnożenia, dzielenia, wynoszenia do potęg i wyciągania pierwiastków. Działania więc trudniejsze w postępie ilorazowym, odpowiadają prostszym i łatwiejszym w postępie różnicowym. Uwagą tą zapewne kierowany *Neper*, sławny wynalazca logarytmów, pierwszy podał myśl uproszczenia rachunków arytmetycznych, zastępując działania odbywane na wyrazach postępu ilorazowego, przez działania inne na wyrazach postępu różnicowego.

88. *Logarytmy są to liczby postępu różnicowego, rozpoczynającego się od zera, a które porządkowo wzięte, odpowiadają innym liczbom postępu ilorazowego zaczynającego się od jedności.*

I tak niech będą dwa postępy

$\div\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096
$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12...

Każdy wyraz postępu różnicowego, jest logarytmem odpowiedniego mu co do miejsca wyrazu w postępie ilorazowym. I tak 0 jest logarytmem 1; 1 jest logarytmem 2; 2 logarytmem 4 i t. d. czyli w ogóle, postęp ilorazowy przedstawia *szereg liczb*, różnicowy zaś *szereg logarytmów* im odpowiednich.

Przy pomocy tych logarytmów, rachunek na liczbach postęp ilorazowy składających, znacznie uproszczonym się staje, gdyż 1°. Mnożenie zamienia się na dodawanie. 2°. Dzielenie na odciąganie. 3°. Wynoszenie do potęg na mnożenie. 4°. Wyciąganie pierwiastków na dzielenie.

Cztery te główne własności logarytmów okażemy tu naprzód praktycznie na dwóch poprzednich postępach, a dopiero po bliższem poznaniu nauki logarytmów, objaśniemy szczegółowo każdą z nich, z przydaniem właściwych zastosowań.

89. Dajmy *naprzód* że chcemy rozmnożyć przez siebie dwie liczby postępu ilorazowego, 16 i 64. Szukamy liczb im odpowiednich w postępie różnicowym, czyli ich logarytmów, takiemi są 4 i 6, dodajemy te logarytmy, i uważamy, jakiej liczbie w postępie ilorazowym summa ich 10 odpowiada, znajdujemy 1024; liczba ta jest żądanym iloczynem, jakoż $16\times64=1024$.

Wynajdźmy jeszcze w podobnym sposobie iloczyn trzech liczb 8, 16 i 32. Bierzemy ich logarytmy 3, 4, 5; tych summa 12 odpowiada liczbie 4096, która jest iloczynem żądanym, jakoż $8\times16\times32=4096$.

Iloczyn przeto liczb wziętych z postępu ilorazowego i summa logarytmów im odpowiednich, wziętych z postępu różnicowego, są wyrazami odpowiadającemi sobie w obu postępach, czyli że w ogóle, *logarytmem iloczynu z ilukolwiek czynników, jest summa logarytmów wszystkich tych czynników.*

$$\log.(16\times64)=\log.\ 16+\log.\ 64$$
$$\log.(8\times16\times32)=\log.\ 8+\log.\ 16+\log.\ 32$$

W ogóle zatem, aby rozmnożyć przez siebie jakie liczby, dosyć jest dodać logarytmy im odpowiednie, i wyszukać jakiej liczbie w postępie ilorazowym summa odpowiada. Liczba znaleziona będzie iloczynem szukanym.

2°. Aby podzielić 512 przez 8, szukamy logarytmów im odpowiednich, temi są 9 i 3; bierzemy ich różnicę 6, a liczba 64 w postępie ilorazowym tej różnicy odpowiednia, jest ilorazem szukanym, jakoż $\frac{512}{8} = 64$.

Iloraz przeto wypadły z podzielenia dwóch liczb i różnica logarytmów im odpowiednich, są wyrazami odpowiadającemi sobie w obu postępach, czyli że *logarytmem ilorazu dwóch liczb, jest różnica ich logarytmów*.

$$\log.\frac{512}{8} = \log.512 - \log.8$$

Aby więc podzielić przez siebie dwie liczby, potrzeba wziąć różnicę ich logarytmów i wyszukać w postępie ilorazowym liczby odpowiedniej tej różnicy, a która będzie ilorazem żądanym.

3°. Dla otrzymania kwadratu z liczby 8, mnożymy logarytm jej odpowiedni 3 przez 2, czyli przez wykładnik kwadratu, a iloczyn 6 odpowie w postępie ilorazowym liczbie, będącéj kwadratem szukanym; tą liczbą jest $64 = 8^2$.

Podobnież jeżeli liczbę 8 do sześcianu podnieść zamierzamy, mnożymy logarytm jej odpowiedni przez wykładnik sześcianu, czyli przez 3. Iloczyn 9 odpowiada w postępie ilorazowym liczbie $512 = 8^3$.

W ogóle przeto wypadek z podniesienia do potęgi jakiej liczby i iloczyn z logarytmu odpowiedniego tej liczbie przez wykładnik potęgi, są wyrazami odpowiadającemi sobie w obu postępach, czyli że *logarytmem potęgi z jakiej liczby jest iloczyn z logarytmu tej liczby przez wykładnik potęgi.*

$$\log.\, 8^2 = 2 \log.\, 8$$
$$\log.\, 8^3 = 3 \log.\, 8$$

Aby więc podnieść jaką liczbę do pewnéj potęgi, potrzeba rozmnożyć logarytm tej liczby przez wykładnik potęgi i wyszukać jakiej liczbie w postępie ilorazowym iloczyn odpowiada.

4°. Chcąc z liczby 256 wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, dzielimy jej logarytm 8 przez 2, czyli przez wykładnik pierwiastku, iloraz 4 odpowie w postępie ilorazowym liczbie 16, będącéj pierwiastkiem żądanym; jakoż $\sqrt{256}=16$.

Podobnież aby znaleźć pierwiastek sześcienny z liczby 512, dzielimy jej logarytm 9 przez wykładnik pierwiastku, czyli przez 3; iloraz 3 odpowiada w postępie ilorazowym liczbie 8, będącéj pierwiastkiem szukanym.

W ogóle przeto wypadek z wyciągnięcia pierwiastku jakiejkolwiek potęgi z jakiéj liczby, i iloraz wypadły z podzielenia logarytmu tej liczby przez wykładnik potęgi, są wyrazami odpowiedniemi sobie w obu postępach, czyli że *logarytmem pierwiastku jakiejkolwiek potęgi z jakiej liczby, jest iloraz z logarytmu tej liczby przez wykładnik pierwiastku.*

$$\log \sqrt{256} = \frac{\log. 256}{2}$$

$$\log. \sqrt[3]{512} = \frac{\log. 512}{3}$$

Aby przeto wyciągnąć pierwiastek jakiejkolwiek potęgi z jakiej liczby, potrzeba podzielić logarytm tej liczby przez wykładnik pierwiastku, i wyszukać w postępie ilorazowym liczby ilorazowi odpowiedniej, a która będzie pierwiastkiem żądanym.

Własności te logarytmów do wszystkich liczb zastosowane być mogą. Później bowiem przekonamy się, że wszystkie liczby większe od jedności, uważać można jako składające jeden postęp ilorazowy, zaczynający się od jedności, i że logarytmy im odpowiednie wyszukane, złożą jeden postęp różnicowy zaczynający się od zera.

90. Nie tylko dwa poprzednie postępy, ale wszelkie inne do układu logarytmów a zatem i do korzystnych rachunków logarytmowych posłużyć mogą, z tym jednak zawsze warunkiem, aby postęp ilorazowy rozpoczynał się od jedności i miał tej jedności odpowiedni wyraz zero w postępie różnicowym. I tak *np.* powyż-

sze uproszczenie działań arytmetycznych okazać również można, przy pomocy dwóch postępów

$\div\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : . . .
$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . . . . .

albo $\div\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : . . . .
$\div$ 0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21 . 24 . . . . . .

albo $\div\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 . . . . .
$\div$ 0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21 . 24 . . . .

Liczba nawet układów logarytmowych, równie jak i samych postępów, które im dają początek, może być nieograniczona; stosownie jednak do tego, jakie dwa postępy użyte zostały do każdego układu, jedna i taż sama liczba różne logarytmy mieć może, oprócz jedności, która w każdym układzie ma sobie odpowiedni logarytm zero.

91. Dla utworzenia *logarytmów zwyczajnych*, powszechnie używanych, wzięto dwa następne postępy, z których ilorazowy jest z wykładnikiem 10, różnicowy zaś składa się z szeregu liczb naturalnych.

$\div\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000: . . .
$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . .

W tym przeto układzie logarytmów, liczby postępu różnicowego 0, 1, 2, 3 . . . są logarytmami liczb odpowiednio wziętych w postępie ilorazowym 1, 10, 100, 1000, i t. d.

Liczba postępu ilorazowego mająca sobie odpowiednią jedność w postępie różnicowym, czyli liczba której jedność jest logarytmem, zowie się zasadą logarytmów. Stąd liczba 10 będąca zasadą zwyczajnego liczenia, jest zarazem *zasadą układu logarytmów zwyczajnych*, zwanych często *logarytmami Briggsa*, od nazwiska tego, który pierwszy ich tablice ułożył.

92. Dwa powyższe postępy przedłużyć jeszcze można w lewą stronę, poniżej ich pierwszych wyrazów, czyli poniżej 1 i 0. W tym celu co do postępu ilorazowego, dzielimy przez 10 tak 1, jak ilorazy następnie otrzymane, pamiętając, że gdy każdy wyraz postępu jest równy poprzedniemu rozmnożonemu przez wykładnik, równa się więc tem samem następnemu podzielonemu przez

wykładnik. W postępie zaś różnicowym odciągamy 1, naprzód od 0, następnie zaś od reszt, jedna po drugiéj wynikających. Skoro bowiem każdy wyraz tego postępu, równa się poprzedniemu zwiększonemu wykładnikiem, równa się więc tem samem następnemu zmniejszonemu tymże wykładnikiem. Stąd wypadną dwa nowe postępy, z których pierwszy ilorazowy w trojakim sposobie wyrażonym być może:

$$\div\!\div\ \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 \ldots\ldots$$

albo $\div\!\div\ \frac{1}{10^3} : \frac{1}{10^2} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 10^2 : 10^3 \ldots$

albo wreszcie w kształcie, w jakim zwykle przy logarytmach się przedstawia (4).

$$\div\!\div\ 10^{-3} ; 10^{-2} : 10^{-1} : 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 \ldots\ldots$$

Postęp zaś różnicowy będzie:

$$\div\ -3 . -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots$$

93. Z uwagi na te dwa postępy wynika.

a. Że wykładnik postępu różnicowego jest logarytmem wykładnika postępu ilorazowego, to jest: że $1 = \log. 10$.

b. Ze wyrazy postępu różnicowego, czyli *logarytmy*, są wykładnikami potęg w wyrazach im odpowiednich postępu ilorazowego, a które przedstawiają *liczby*, co do swej wartości w różnych potęgach 10 oznaczone. Stąd zarazem wypływa, że *logarytmem jakiejkolwiek liczby, jest wykładnik potęgi, do któréj liczbę* 10, *czyli liczbę obraną za zasadę podnieść potrzeba*, *aby otrzymać liczbę odpowiadającą temuż logarytmowi.* I tak

$\log. 100 = 2$, gdyż $10^2 = 100$; $\log. 1000 = 3$, gdyż $10^3 = 1000$

$\log. 10000 = 4$, gdyż $10^4 = 10000$ i t. d.

$\log. 10 = 1$, gdyż $10^1 = 10$; $\log. 1 = 0$, gdyż $10^0 = 1$

$\log. 0,1 = -1$, gdyż $10^{-1} = \log. \frac{1}{10}; = 0,1$

$\log. 0,01 = -2$, gdyż $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$

$\log. 0,001 = -3$, gdyż $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$

c. Że wyrazy zarówno oddalone od jedności, w części malejącej i rosnącej postępu ilorazowego, mają też same logarytmy, wzięte tylko w części malejącej ze znakiem przeciwnym; i tak

log. $\frac{1}{10}$, albo log.$10^{-1} = -1$, gdyż log. $10 = 1$.
log. $\frac{1}{100}$, albo log.$10^{-2} = -2$, gdyż log. $100 = 2$ i t. d.

Logarytmy przeto odpowiednie liczbom większym od jedności są *dodatnie*, a odpowiednie liczbom mniejszym od jedności, czyli ułomkom, są *odjemne*. Stąd zarazem wypływa, że *liczby odjemne nie mają logarytmów*. Jeśliby bowiem miały, ten musiałby być albo dodatni, albo odjemny: tym czasem te logarytmy odpowiadają zawsze liczbom dodatnim.

d. Że przypuszczając, iż dwa postępy rozciągają się nieskończenie w częściach ich rosnących, wypadnie że logarytm ilości nieskończenie wielkiej, czyli większéj od wszelkiej ilości naznaczyć się dającéj, jest sam nieskończenie wielkim, to jest że log. $\infty = \infty$.

e. Że przypuszczając, iż dwa postępy rozciągają się nieskończenie w swych częściach malejących, to jest że postęp ilorazowy zbliża się ciągle do zera, różnicowy zaś do ilości odjemnéj nieskończonej, wówczas wypada, że logarytmem zera jest ilość nieskończona odjemna, czyli log. $0 = -\infty$.

94. Gdy w układzie logarytmów zwyczajnych mającym liczbę 10 za zasadę, logarytmy liczb 1, 10, 100, 1000, 10000 i t. d. są odpowiednio wzięte . . . 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. przeto logarytmy liczb objętych pomiędzy

1 a 10	przypadają pomiędzy	0 a 1
10 a 100	„ „	1 a 2
100 a 1000	„ „	2 a 3
1000 a 10000	„ „	3 a 4 i t. d.

Stąd 1°. Liczby tylko złożone z jedności i z zer, mają liczby całkowite za ich logarytmy.

2°. Logarytmy wszystkich innych liczb składają się z części całkowitéj zwanéj *cechą*, i z części ułomkowej, wyrażonej w ułomku dziesiętnym. I tak liczby zawarte pomiędzy 100 a 1000 mają za logarytm 2 więcéj ułomkiem dziesiętnym.

3°. *Cecha logarytmu jakiej liczby ma zawsze tyle jedności mniej jedną, ile jest cyfer w części całkowitej tej liczby.* I tak logarytmy liczb całkowitych jednocyfrowych mają za cechę 0, czyli że są w ułomku dziesiętnym wyrażone; logarytmy liczb dwucyfrowych mają za cechę 1; trzycyfrowych mają za cechę 2 i t. d. Dla tego też liczba *np* 3254,67, jako obejmująca 4 cyfry w części swej całkowitéj, ma logarytm którego cechą jest 3.

Odwrotnie. *Liczba danemu logarytmowi odpowiednia ma zawsze tyle cyfer więcéj jedną, w części swej całkowitej, ile jedności obejmuje cecha jej logarytmu.* I tak logarytm 3,374542 odpowiada liczbie mającej 4 cyfer w części swej całkowitéj, logarytm ten bowiem, jest zawarty pomiędzy 3 i 4. które są logarytmami 1000 i 10000; podobnież logarytm 0,477256 ma liczbę sobie odpowiednią złożoną z jednej cyfry w części swej całkowitej i t. d.

Podług tego także wnieść potrzeba, że cecha zawsze się równa wykładnikowi potęgi z 10, która oznacza wartość miejscową cyfry najwyższego porządku objętéj w danéj liczbie. I tak

log. 2345 ma cechę 3, gdyż wartość miejscowa 2 jest					10^3
log. 234,5	„ 2,	„	„	„	10^2
log. 23,45	„ 1,	„	„	„	10^1
log. 2,345	„ 0,	„	„	„	10^0.

4^0. W układzie nadto logarytmów zwyczajnych, *znając logarytm jakiej liczby, można otrzymać łatwo logarytm liczby* 10 100, 1000 . . . *razy większéj, dodając* 1, 2, 3 . . . . *jedności do jego cechy.*

Jakoż oznaczając w ogóle przez n liczbę daną, będzie

$$\log.\ (n \times 10) = \log.\ n + \log.\ 10 = \log\ n + 1$$

$$\log.\ (n \times 100) = \log.\ n + \log\ 100 = \log.\ n + 2 \text{ i t. d.}$$

Odwrotnie: *Z logarytmu liczby danéj, otrzymuje się logarytm liczby* 10, 100, 1000 . . . *razy mniejszéj, odejmując* 1, 2, 3 . . . *jedności od cechy.* np.

$$\log.\ \frac{n}{10} = \log.\ n - \log.\ 10 = \log.\ n - 1$$

$$\log.\ \frac{n}{100} = \log.\ n - \log.\ 100 = \log.\ n - 2 \text{ i t. d.}$$

Stąd wynika, że logarytmy *np.* liczb 5643, 564,3, 56,43 i 5,643 mają jednakową część dziesiętną i różnią się tylko cechą, która w pierwszym razie jest 3, w drugim 2, w 3cim 1, w 4tym 0.

W ogóle zatem, *logarytm liczby całkowitéj z ułomkiem dziesiętnym połączonéj, jest oprócz cechy, tenże sam co logarytm liczby całkowitéj wziętéj bez względu na przecinek*.

95. Użytek logarytmów byłby bardzo mały, gdyby się tylko ograniczał na logarytmach liczb 1, 10, 100, 1000 i t. d. potrzeba je również znaleźć dla liczb mieszczących się pomiędzy 1 i 10, 10 i 100, 100 i 1000 i t. d. czyli poznać sposoby, jakiemi *tablice logarytmowe*, podające logarytmy wszystkich liczb całkowitych utworzone zostały. Sposoby arytmetyczne mniej wprawdzie praktyczne, ale wskazujące przynajmniej możność obliczenia podobnych logarytmów są następne.

96. Przypuśćmy żeśmy wprowadzili pomiędzy liczby 1 i 10, 10 i 100, 100 i 1000 . . . jednakową liczbę średnich geometrycznie proporcyonalnych, tak jednak wielką, aby liczby całkowite pośrednie 2, 3, 4 . . . 9; 11, 12, 13 . . . 99; 101, 102 . . . 199, były objęte pomiędzy temi średniemi, albo różniły się od niektórych z nich o ilość tak małą, iżby też liczby można było wziąć w miejsce samych średnich, najwięcéj do nich zbliżonych.

Przypuśćmy także, żeśmy zarazem wprowadzili pomiędzy 0 i 1, 1 i 2, 2 i 3 . . . . jednakową jak poprzednia liczbę średnich arytmetycznie proporcyonalnych. Wyrazy nowego postępu różnicowego odpowiadać będą wyrazom nowego postępu ilorazowego, będą zatem ich logarytmami.

Dajmy teraz, że z liczby ogromnej wyrazów tak powstałych w obudwóch postępach, pozostawiamy tylko w postępie ilorazowym liczby całkowite 1, 2, 3, 4, 5 . . . . w różnicowym, zaś liczby im odpowiednie. Te dwa gatunki liczb można będzie złożyć w dwie kolumny, z których w jednéj znajdzie się szereg wszystkich liczb całkowitych następnych, w drugiéj zaś odpowiednio szereg ich logarytmów. Pierwsze razem wzięte nie utworzą wprawdzie postępu ilorazowego, ale zawsze za jego wyrazy uważane być mogą. Drugie, czyli logarytmy podobnież nie złożą całego postępu różnicowego, ale jako jego wyrazy odpowiadać będą porządkowo wzięte, liczbom pierwszéj kolumny.

Na zasadzie podobnego rozumowania, pojmujemy tylko możność istnienia tablic logarytmowych, obrachowanie ich jednak w tym sposobie nie da się uskutecznić. Wprowadzenie bowiem znacznéj liczby średnich geometrycznie proporcyonalnych jest nie podobne, jako zależące na poprzednim wyszukaniu wykładnika podług wzoru $q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$. Przy wprowadzeniu dwóch średnich tylko pomiędzy dwa wyrazy postępu, *np.* pomiędzy 1 i 10, potrzebaby już z wielkim stopniem przybliżenia wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 10, a cóż dopiero gdy idzie o wprowadzenie 1000 i więcéj podobnych średnich, jak to właśnie miejsce mieć musi, gdy liczby znalezione do liczb całkowitych w najmniejszych swych cząstkach zbliżone być mają.

97. Rachunek prosty arytmetyczny wskazany przez samego Nepera, dozwala znaleźć po szczególe każdy logarytm żądany przez następne wyciągania, już nie pierwiastku wyższej potęgi, jak w poprzednim razie, lecz tylko pierwiastku kwadratowego.

Dajmy *np* że chcemy znaleźć logarytm liczby 3.

Ponieważ liczba 3 jest objętą pomiędzy 1 10, czyli pomiędzy dwoma pierwszemi wyrazami postępu ilorazowego, wprowadzamy więc pomiędzy te liczby jedną średnią geometrycznie proporcyonalną oznaczoną przez x, stąd proporcya ciągła

$$1 : x = x : 10$$

zatem $x = \sqrt{1 \times 10} = \sqrt{10} = 3{,}162277.$

Podobnież wprowadzamy jedną średnią arytmetyczną y, pomiędzy dwa pierwsze wyrazy postępu różnicowego 0 i 1, a które są logarytmami 1 i 10. Stąd proporcya ciągła

$$0 \,.\, y = y \,.\, 1$$

zatem $y = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}500000$

Średnia arytmetyczna tak wypadła jest logarytmem średniej geometrycznéj, czyli że log. $3{,}162277 = 0{,}500000$.

Uważając teraz że liczba 3, któréj chcemy znaleźć logarytm, jest objęta pomiędzy 1 i 3,162277, szukamy nowej średniej geometrycznéj x', pomiędzy temi dwiema liczbami, i nowej średniej arytmetycznéj y', pomiędzy 0, i 05: stąd

$$x' = \sqrt{3,162277} \ldots = 1,778279;\ y' = \frac{0,5}{2} = 0,25$$

przeto log. 1,778279 = 0,250000.

Uważając znowu liczbę 3 jako objętą pomiędzy 1,778279 i 3,162277, których już są znane logarytmy, szukamy jak wprzód średniéj geometrycznéj pomiędzy temi liczbami, równie jak logarytmu tej średniéj pomiędzy odpowiedniemi im logarytmami 0,5 i 0,25, będzie przeto

$$\sqrt{(3,162277 \times 1,778279)} = 2,37137 \text{ jako liczba,}$$

$$\frac{0,5 + 0,25}{2} = 0,375 \quad \text{jako jej logarytm.}$$

Łatwo pojmujemy, że ciągnąc tak dalej wprowadzanie średniej geometrycznéj, przyjdziemy wreszcie do liczby zupełnie równej 3, przynajmniej w granicach jakieśmy naprzód zakreślili, różniącéj się *np.* w 6tej cyfrze dziesiętnej. W tym celu 21 średnich wyszukać byśmy musieli, nimbyśmy przyszli do liczby 2,999999 różniącéj się tylko od 3, o 0,000001, a która zatem bez błędu prawie, za 3 wziętą być może. Srednia arytmetyczna wypadła 0,477121 jako jej odpowiednia, będzie logarytmem 3.

W podobnym sposobie, dla oznaczenia logarytmów liczb objętych pomiędzy 1, i 10, dosyć jest znaleźć logarytmy trzech liczb pierwszych 2, 3 i 7, a z tych inne się utworzą, mocą własności logarytmów, dotąd jeszcze więcej praktycznie tylko wykazanych (89)

I tak log. $4 = $ log. $2^2 = 2$ log. 2

log. $5 = $ log. $^{10}/_{2} = $ log. $10 - $ log. 2.

log. $6 = $ log. $(2 \times 3) = $ log. $2 + $ log. 3.

log. $8 = $ log. $(2 \times 4) = $ log. $2 + $ log. 4.

log. $9 = $ log. $3^2 = 2$ log. 3.

Z logarytmów 10 liczb pierwszych już znalezionych, łatwo podobnież się wyprowadzą, logarytmy liczb objętych pomiędzy 10 i 100, 100 i 1000 i t. d. Zawsze jednak osobno szukać potrzeba logarytmów liczb pierwszych 11, 13, 17, 19 i t. d. jak wprzód logarytmów liczb 2, 3 i 7. Robota bardzo długa i pracowita, a jednak przy jej pomocy pierwsze tablice logarytmowe obrachowane zostały. Poźniej dopiero przez wyższy rachunek odkryto sposoby prędsze i dogodniejsze.

98. *Tablice logarytmowe* z przyczyny mnostwa liczb nie mogą obejmować logarytmów im wszystkich odpowiednich. Tablice mniejsze podają zwykle logarytmy liczb całkowitych od 1 do 10000; większe od 1 do 100000 lub nieco wyżéj. Wszystkie nadto rozróżniają się stosownie do liczby cyfer, jaką w częściach dziesiętnych tychże logarytmów podają. W układzie bowiem logarytmów zwyczajnych, liczba 10 za zasadę wzięta, i jej potęgi całkowite, mają tylko logarytmy całkowite: logarytmy zaś wszelkich innych liczb, jako pośrednich pomiędzy temi potęgami z 10, są liczbami niewspółmiernemi, zbliżonemi w ułomku dziesiętnym, i tem bardziéj dokładnemi, im ten ułomek w większej liczbie cyfer jest wyrażony. Stąd tablice mogą ich obejmować 5, 6, 7, 8, a nawet 10; w praktycznem jednak użyciu sześciocyfrowe są dostateczne; dla tego je tu załączamy, ograniczając się na wyjaśnieniu sposobu ich tylko użycia, gdyż ten bardzo łatwo do wszelkich innych tablic zastosowany być może.

99. W tablicach tu załączonych znajdują się logarytmy wszystkich liczb całkowitych od 1 do 10000. Na pierwszéj ich stronie są logarytmy wraz z cechami liczb od 1 do 100; na następnych zaś, w pierwszéj kolumnie oznaczonej przez *N*, liczby od 101 do 999 włącznie; w drugiéj zaś obok stojącej oznaczonéj przez 0, części dziesiętne odpowiednich im logarytmów. Cechy bowiem jako zawsze obejmujące tyle jedności, mniej jedną, ile jest cyfer w całkowitéj części liczby (94), zwykle się opuszczają we wszystkich tablicach; nigdy to nawet nie może być przyczyną błędu, gdyż sam widok liczby, której logarytmu wyszukujemy, daje poznać jego cechę. I tak logarytmy liczb od 1 do 9 włącznie, mają 0 za cechę, logarytmy liczb od 10 do 99, mają 1 za cechę; podobnież liczby od 100 do 999 mają w swym logarytmie za cechę 2; od 1000 do 9999 za cechę 3 i t. d. Mając przeto daną liczbę, poznajemy natychmiast jaką jest cecha jej logarytmu, i szukamy tylko w tablicach części dziesiętnej tegoż logarytmu, która cechę, czyli część jego całkowitą uzupełnia.

Gdy każdy logarytm ma dwie pierwsze cyfry dziesiętne wspólne z wielu innemi, z tej przyczyny raz je tylko zamieszczają przy najpierwszym, od którego ta wspólność się zaczyna. I tak dwie pierwsze cyfry 07, części dziesiętnéj log. 118, niepowtarzają się przy log. 119 i log. 120, dla których są wspólne; podobnież dwie pierwsze cyfry 08, służą nie tylko dla log. 121, ale i dla dwóch następnych i t. d. Skoro więc przy wyszukiwaniu logarytmu jakiej liczby, w kolumnie 0 znajdziemy 4 tylko cyfry na część jego dziesiętną, te cyfry za ostatnie weźmiemy; za dwie pierwsze zaś te, które obok najbliżéj nad miejscem próżnem są położone. I tak log. 284 składać będą nie tylko 4 cyfry 3318, w kolumnie 0 obok powyższéj liczby znajdujące się, ale i dwie pierwsze 45, nad miejscem próżnem stojące, do których jeszcze cechę dołączyć potrzeba. Stąd log. 284=2,453318.

100. Przy pierwszym rzucie oka na tablice tu podane zdawałoby się, iż się kończą na logarytmie liczby 999; za pomocą jednak kolumn oznaczonych przez 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, rozciągają się istotnie do 10000. I tak liczby, które są 10 razy większe od liczb 3cyfrowych objętych w tablicach, mają tęż samą część dziesiętną ich logarytmów. Kolumna przeto oznaczona przez 0, daje oprócz logarytmów liczb trzycyfrowych, logarytmy liczb 10 razy większych, jak 1000, 1010, 1020, 1030, i t. d. aż do liczby 10000, któréj logarytm składa się z samej tylko części całkowitej 4, czyli z cechy.

Aby oznaczyć logarytmy liczb pośrednich czterocyfrowych jak 1001, 1002, 1003 i t. d., 1011, 1012, 1013 i t. d., 1021, 1022, 1023 i t. d., potrzeba użyć pomocy kolumn 1, 2, 3 . . . 9. Kolumna 1 służyć będzie do znalezienia logarytmów liczb 4-cyfrowych kończących się na 1. Kolumna 2 obejmuje logarytmy odpowiednie liczbom kończącym się na 2 i t. d.

Chcąc przeto mieć logarytm jakiej liczby 4-cyfrowej, *np*. 2827 wyszukujemy naprzód w kolumnie *N*, liczby 282, obejmującej 3 pierwsze jej cyfry, czwartej zaś 7 wyżej, w pierwszym rzędzie poziomym. Potem posuwając się zarazem tak w kolumnie pionowéj, gdzie stoi cyfra 7, jak i w rzędzie poziomym, gdzie 3 pierwsze cyfry 282 są zamieszczone, w miejscu gdzie kolumna z rzędem się przecinają, znajdziemy 1326 na cztery ostatnie cyfry części dziesiętnej logarytmu; dwie zaś pierwsze, jako wspólne logarytmowi liczby złożonéj z 3 pierwszych cyfer 282, obok tej liczby w kolumnie 0 są położone; stąd log. 2827=3,451326.

Podobnież gdy idzie o log. 2847, wyszukujemy naprzód liczby 284, posuwamy potem palcem po rzędzie poziomym tę liczbę obejmującym, dopóki nie natrafimy kolumny pionowej oznaczonéj przez 7, gdzie znajdą się 4 ostatnie cyfry odpowiedniego logarytmu, to jest 4387: dwie zaś pierwsze 45 są w kolumnie 0, już nie obok liczby 284, ale nieco wyżéj z lewej strony nad miejscem próżnem: stąd log. 2847=3,454387.

Jeżeli zamiast czterech ostatnich cyfer, znajdziemy trzy lub dwie tylko poprzedzone jedną lub dwiema grubszemi kropkami, wówczas za dwie pierwsze cyfry części dziesiętnej logarytmu, biorą się cyfry, już nie wyżej nad miejscem próżnem stojące, ale niżej, i w miejscu każdej z kropek pisze się 0. I tak znalazłszy, że log. 2691=3,429914, przy log. 2692 spostrzegamy, że 4*ma* ostatniemi jego cyframi są • • 75, co wskazuje, iż za pierwsze dwie cyfry nie 42, ale 43 wziąść potrzeba, za dwie kropki zaś dwa zera; przeto log. 2692 = 3,430075. Dla tejże przyczyny log. 2693= 3,430236, gdyż ostatniemi jego cyframi są • 236. Podobnież co do logarytmów liczb 2694, 2695, 2696 i 2697. Dwa zaś następne po nich logarytmy, chociaż mają 4 ostatnie cyfry zupełnie podane, ale jako w tejże kolumnie poziomej, po poprzednich następujące, co do dwóch pierwszych cyfer ulegną podobnejże zmianie: i tak log. 2698=3,431042; log. 2699=3,431203.

W innych tablicach, zwykle wszystkie cyfry zupełnie podają, gwiazdką tylko poprzedzają te, które się odnoszą do dwóch niższych wspólnych cyfer.

101. Mając tak wskazany sposób użycia tablic logarytmowych, co do wyszukania logarytmu odpowiedniego liczbie objętej w tablicach, potrzeba jeszcze przejść odwrotny przypadek, *gdy idzie o wynalezienie liczby danemu logarytmowi odpowie-*

dniéj, skoro bez względu na jego cechę, część dziesiętna znajduje się w tablicach.

Wiadomo już (94), że część dziesiętna logarytmu wpływa jedynie na różność cyfer objętych w liczbie jemu odpowiedniej, cecha zaś tylko na ich wartość porządkową: stąd przy rozwiązywaniu podobnych zadań, szukamy tylko jakiéj liczbie w tablicach część dziesiętna logarytmu odpowiada, i dopiero po znalezieniu tej liczby, oznaczamy wartość porządkową cyfer ją składających, przez wzgląd na cechę. Trzy następne przykłady najlepiej to wyjaśnią.

1°. Znajdźmy *np.* liczbę odpowiednią logarytmowi 2,195900. Szukamy naprzód w kolumnie 0, dwóch pierwszych cyfer części dziesiętnéj logarytmu, czyli 19, pomiędzy cyframi odosobnionemi, to jest próżne miejsce zajmującemi. Po ich znalezieniu, uważamy, czy w tejże kolumnie nie napotkamy 4 następnych cyfer; gdy ten przypadek tu właśnie zachodzi, liczbę więc obok stojącą 157 w kolumnie liczb, uważamy za liczbę żądaną. Wartość tylko porządkową cyfer składających tę liczbę, z podanéj cechy oznaczyć potrzeba; która będąc 2, wskazuje że 3 cyfry są w części całkowitéj liczby, że zatem liczba 157 jest odpowiednią logarytmowi danemu. Gdyby cecha była 3, liczbę znalezioną 10 razy zwiększyćby należało, byłaby zatem 1570: podobnież wypadłaby 15700, gdyby cecha była 4 i t. d. Dla tejże przyczyny liczba żądana stałaby się 15, 7, lub 1,57, gdyby cecha była 1, lub 0.

2°. Dajmy teraz, że logarytm dany jest 1,757548. Po znalezieniu dwóch pierwszych dziesiętnych cyfer 75, odosobnionych w kolumnie 0, dla wyszukania 4 ostatnich 7548, przebiegamy wszystkie kolumny cyfer logarytmowych, do których poprzednie jako wspólne się odnoszą. Znajdziemy je w kolumnie przez 2 oznaczonéj. Stąd cyfry 572 obok 7548 na linii pozioméj w kolumnie liczb stojące, są trzema pierwszemi cyframi liczby, danemu logarytmowi odpowiedniej, 2 zaś ostatnią jej cyfrą; cała przeto liczbą jest 5722. Że zaś cecha 1 wskazuje, że ta liczba ma 2 tylko cyfry w części swej całkowitéj, stąd liczbą szukaną jest 57,22.

3°. Dajmy wreszcie że mamy wyszukać liczbę odpowiednią logarytmowi 0,521007. Znalazłszy dwie pierwsze cyfry 52, części dziesiętnéj logarytmu, po przebiegnięciu niżej wszystkich kolumn sciągających się do tych cyfer, w żadnej z nich 4 ostatnich cyfer 1007 nieznajdujemy, ale widzimy je w linii bezpośrednio wyżéj stojącéj. Gdy jednak te cyfry, jako następujące po cyfrach z kropkami zamieszczonych, już nie odnoszą się do dwóch wspólnych cyfer 51, wyżéj zamieszczonych, ale do dwóch niższych 52, stąd cyfry na jednéj linii poziomej w kolumnie liczb z niemi stojące 331, z dopisaną ostatnią cyfrą 9 zamieszczoną nad 1007, dają na liczbę szukaną 3319. Trzeba jej tylko porządek oznaczyć przez wzgląd na cechę 0; stąd będzie 0,521007=log. 3,319.

102. Wszelkie tablice logarytmowe nie tylko służą do wyszukania logarytmów liczb w nich objętych, ale i wszystkich innych, tak całkowitych jak ułomkowych. W tym celu jednak potrzeba bliżéj poznać własności logarytmów, dotąd praktycznie tylko na postępach wykazane, a których już ważność przy pomocy tablic na przykładach ocenioną być może.

103. Własność pierwsza. *Logarytm iloczynu z ilukolwiek czynników równa się summie logarytmów wszystkich tych czynników.*

Niech będą dwa postępy

ilorazowy $\div\div$ $1 : a : b : c : d \ldots.$

różnicowy $\div$ $0 \,.\, \log a \,.\, \log b \,.\, \log. c \,.\, \log d.$

Dajmy że w postępie ilorazowym obraliśmy dwie liczby a i b, których chcemy otrzymać iloczyn. W tym celu przybieramy jeszcze trzecią liczbę c, któraby o tyle środków była oddaloną od b, o ile pierwszy wyraz postępu 1, od a. Stąd cztery te wyrazy utworzą proporcyą ilorazową: tyle razy bowiem 1 jest mniejszym od a, ile razy b od c; będzie przeto

$$1 : a = b : c, \quad \text{stąd} \quad c = ab.$$

W postępie różnicowym, podobnież zachodzi proporcya różnicowa, pomiędzy logarytmami odpowiedniemi 4 poprzednim wyrazom postępu ilorazowego, zatem

$$0 . \log a = \log b . \log c.$$

$$\text{stąd}\quad 0+\log.\ c = \log.\ a + \log\ b.$$
$$\text{czyli}\quad \log.\ c = \log.\ a + \log.\ b.$$

Wstawiając za c, wartość wyżej znalezioną, będzie

$$\log.\ ab = \log.\ a + \log.\ b.$$

Jeżeli jest trzy lub więcéj czynników, wówczas

$$\log\ abc = \log.\ (ab \times c) = \log.\ ab + \log.\ c$$
$$= \log.\ a + \log.\ b + \log.\ c.$$

W ogóle $\log.\ abcd.... = \log.\ a + \log.\ b + \log.\ c + \log.\ d + ...$

Przez użycie więc logarytmów, mnożenie zamienia się na dodawanie. Iloczyn z wielu liczb danych otrzymuje się, dodając logarytmy tych liczb i wyszukując w tablicach, jakiej liczbie odpowiada otrzymana summa logarytmów.

Zastosowanie. *Rozmnożyć* 34 *przez* 83 *za pomocą logarytmów.*

$$\log.\ (34 \times 83) = \log.\ 34 + \log.\ 83.$$
$$\log.\ 34 = 1{,}531479$$
$$\log.\ 83 = 1{,}919078$$
$$\log.\ \textit{iloczynu} = 3{,}450557$$

W tablicach znajdujemy, że ten logarytm będący summą logarytmów dwóch danych czynników, jest odpowiedni liczbie 2822, stąd liczba ta jest iloczynem żądanym, jakoż $34 \times 83 = 2822$.

Przykład ten służy tylko do okazania praktycznie pierwszéj własności logarytmów; mnożenie bowiem liczb całkowitych łatwiej zwyczajnym sposobem się dokonywa.

104. Własność poprzednia logarytmów zamieniająca mnożenie na samo dodawanie, ma miejsce tylko przy pierwotnem założeniu, że w postępie ilorazowym pierwszym wyrazem jest jedność, w różnicowym zaś zero (88). Przypuszczając bowiem inne pierwsze wyrazy, wypadek inny się okaże. Dajmy *np.* że w postępie ilorazowym pierwszym wyrazem jest k, w postępie zaś różnicowym log. k: wówczas w pierwszym z tych postępów będzie

$$k : a = b : c,\ \text{stąd}\ kc = ab$$

$$\text{zatem}\ c = \frac{ab}{k}$$

W postępie zaś różnicowym będzie

$$\log k \,.\, \log a = \log b \,.\, \log c$$
$$\text{stąd } \log.\, k + \log.\, c = \log.\, a + \log.\, b$$
$$\log.\, c = \log.\, a + \log.\, b - \log.\, k$$
$$\text{albo } \log.\left(\frac{ab}{k}\right) = \log.\, a + \log.\, b - \log.\, k$$

Podług tego summa logarytmów dwóch liczb wziętych z postępu ilorazowego, zmniejszona pierwszym wyrazem postępu różnicowego, równa się logarytmowi ilorazu wypadłego z podzielenia iloczynu liczb danych, przez pierwszy wyraz postępu ilorazowego. W przypadku więc roztrząsanym, aby mieć iloczyn żądany, potrzeba 1° wziąć summę logarytmów. 2° Odciągnąć od tej summy pierwszy wyraz postępu różnicowego i wyszukać jakiej liczbie w postępie ilorazowym reszta odpowiada 3°. Liczbę znalezioną rozmnożyć przez pierwszy wyraz postępu ilorazowego. Zamiast jednego przeto dodawania logarytmów, zastępującego miejsce mnożenia liczb, mielibyśmy w tym przypadku dodawanie, odciąganie i mnożenie. Założenie zatem, na którem samo określenie logarytmów się opiera, jest konieczne.

105. Własność druga. *Logarytm ilorazu równa się różnicy między logarytmem dzielnéj a logarytmem dzielnika*

Wiedząc bowiem, że dzielna może być uważaną za iloczyn z dzielnika przez iloraz, wypada że

$$\log.\, \textit{dzielnej} = \log.\, \textit{dzielnika} + \log.\, \textit{ilorazu}$$
$$\text{stąd } \log.\, \textit{ilorazu} = \log.\, \textit{dzielnej} - \log.\, \textit{dzielnika}.$$

I tak *np* chcąc znaleźć

$$\log.\, \frac{a}{b}\,,\ \text{uczyńmy } \frac{a}{b} = q, \text{ stąd } a = bq$$

$$\text{zatem } \log.\, a = \log.\, b + \log.\, q$$
$$\text{przeto } \log.\, q = \log.\, a - \log.\, b$$
$$\text{czyli } \log.\, \frac{a}{b} = \log.\, a - \log.\, b.$$

Dzielenie więc przy pomocy logarytmów zamienia się na odciąganie, gdyż aby mieć iloraz, dosyć jest odciągnąc log. dzielnika od log. dzielnéj i wyszukać w tablicach, jakiej liczbie różnic logarytmów odpowiada.

Zastosowanie. *Podzielić 2822 przez 83 za pomocą logarytmów.*

$$\log. \frac{2822}{83} = \log. 2822 - \log. 83.$$

$$\log. 2822 = 3{,}450557$$
$$\log. 83 \;\; = 1{,}919078$$
$$\log. \textit{ilorazu} = 1{,}531479 = \log. 34.$$

106. Daleko ważniejszem jest zastosowanie logarytmów do mnożenia i dzielenia, gdy jest danych wiele czynników i dzielników; ułatwia bowiem znacznie robotę, dozwalając ją uskutecznić za jednym razem.

Znajdźmy *np.* wypadek za pomocą logarytmów

$$\frac{44 \times 28 \times 144 \times 819}{48 \times 84 \times 396} = x$$

log. 44 =1,643453	log. 48 =1,681241
log. 28 =1,447158	log. 84 =1,924279
log. 144=2,158362	log. 396=2,597695
log. 819=2,913284	log. *dzielnika* =6,203215
log. *dzielnej* =8,162257	
log. *dzielnika* =6,203215	
log. *ilorazu* =1,959042 = log. 91.	

107. Zamiast dwóch dodawań i jednego odciągania logarytmów, można otrzymać tenże sam wypadek przez jedno tylko dodawanie, używając *dopełnień arytmetycznych*, w miejsce logarytmów, które odciągać trzeba.

Dopełnieniem arytmetycznem jakiego logarytmu zowie się przewyżka 10 *jedności nad ten logarytm.* Otrzymać tę przewyżkę jest bardzo łatwo, dosyć jest bowiem odciągnąć każdą cyfrę danego logarytmu od 9, oprócz pierwszéj cyfry znaczącéj z prawej strony, którą się odciąga od 10, mniej zważając na zera, jakie kończyć mogą logarytm. Podług tego w poprzednim przykładzie liczby 48, 84, i 396, których logarytmy są

1,681241, 1,924279, 2,597695

mają za dopełnienia arytmetyczne swych logarytmów

8,318759. 8,075721, 7,402305

a które wprost już z widoku samych logarytmów, już nawet przy ich dyktowaniu wypisać można.

Własnością dopełnień jest, iż zamieniają odciągania na dodawania. I tak w poprzednim przykładzie, zamiast wynajdywania osobno, summy logarytmów dodać się i odjąć się mających, i odciągnięcia summy drugiej od pierwszéj, dodajemy do logarytmów dodać się mających, dopełnienia tych logarytmów, które odjąć było potrzeba, jak następuje.

$$\begin{aligned}
\text{log. } 44 &= 1{,}643453\\
\text{log. } 28 &= 1{,}447158\\
\text{log. } 144 &= 2{,}158362\\
\text{log. } 819 &= 2{,}913284\\
\text{dop. log. } 48 &= 8{,}318759\\
\text{dop. log. } 84 &= 8{,}075721\\
\text{dop. log. } 396 &= 7{,}402305\\
\hline
&\ 31{,}959042
\end{aligned}$$

$$31{,}959042-30=1{,}959042=\text{log. } 91.$$

czyli że wypadek zmniejszony o tyle dziesiątków, ile dopełnień się użyło, staje się podobnym jak w pierwszym razie. W miejsce bowiem odciągnięcia summy trzech logarytmów, dodaliśmy ich dopełnienia, summa znaleziona przeto jest większa od reszty szukanéj, nie tylko o te logarytmy, które odjąć było potrzeba, ale o ich dopełnienia, czyli o tyle dziesiątków, ile użyto dopełnień. Toż samo wreszcie naocznie się okaże, przedstawiając działanie dokonane w następnym sposobie.

$$\text{log } x=\text{log. } 44+\text{log.} 28+\text{log. } 144+\text{log. } 819+$$
$$+(10-\text{log. } 48)+(10-\text{log. } 84)+(10-\text{log. } 396)-30$$

albo co na jedno wychodzi

$$\text{log. } x=\text{log. } 44+\text{log. } 28+\text{log. } 144+\text{log. } 819+$$
$$+\text{dop. log. } 48+\text{dop. log. } 84+\text{dop. log. } 396-30.$$

108. Własność trzecia. *Logarytm pewnej potęgi jakiéj liczby równa się logarytmowi téjże liczby, rozmnożonemu przez wykładnik potęgi.*

Jeżeli bowiem potęga jakiej liczby jest iloczynem tylu czynników równych tej liczbie, ile jest jedności w wykładniku potęgi, stąd logarytm potęgi jakiej liczby, równa się logarytmowi tejże liczby, rozmnożonemu przez wykładnik potęgi; czyli że

$$\log. a^m = m \log. a$$

Dajmy bowiem że $m = 5$, stąd

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

$$\log. a^5 = \log. a + \log. a + \log. a + \log. a + \log a$$

czyli $\log. a^5 = 5 \log. a$

Podobnież $\log. a^8 = 8 \log. a$, i t. d.

Podnoszenie przeto do potęg przy pomocy logarytmów zamienia się na mnożenie.

Zastosowanie. *Znaleźć 12stą potęgę z liczby* 2.

$$\log. 2^{12} = 12 \log. 2 = 12 \times 0{,}301030 = 3{,}6123600$$

stąd $2^{12} = 4096$.

Uwaga 1^a. *Logarytmy liczb są wykładnikami potęg, do których podnieść potrzeba zasadę logarytmów, jako ilość niezmienną, aby te liczby otrzymać* (93).

I tak w układzie zwyczajnym logarytmów, którego zasadą jest 10, jeżeli logarytmem liczby a, jest x, wtedy będzie $10^x = a$. Jakoż przypuszczając że tak jest istotnie, dowieść musimy że w tym razie $x = \log. a$.

Mamy bowiem $10^x = a$, stąd $x \log. 10 = \log a$

$$x = \frac{\log. a}{\log. 10} = \frac{\log. a}{1} = \log. a.$$

Uwaga 2^a. *Mając tablice logarytmowe ułożone na pewnéj zasadzie* a, *można z nich otrzymać inne o nowej zasadzie* b.

I tak niech c będzie liczbą, której szukamy logarytmu w układzie tablic, mającym b za zasadę: wówczas podług pierwszéj uwagi $b^x = c$, biorąc z obu stron logarytmy w układzie nam znanym, będzie $x \log. b = \log. c$

$$\text{stąd } x = \frac{\log. c}{\log. b} = \log. c \times \frac{1}{\log. b}$$

Skoro przeto jest znajomy logarytm jakiej liczby w jednym układzie, dzieląc ten logarytm przez logarytm nowej zasady w tymże samym układzie, albo *mnożąc przez czynnik ułomkowy mający jedność za licznik, a za mianownik logarytm nowej zasa-*

dy, otrzymamy logarytm danej liczby w układzie odpowiednim tej nowej zasadzie. Czynnik ten ułomkowy $\frac{1}{\log.\ b}$, zawsze jednakowy, zowie się *zamiennikiem* (le module) jednego układu na drugi.

Podług tego, chcąc logarytmy zwyczajne zamienić na inne, w układzie *np.* któregoby liczba 3 nie zaś 10 była zasadą, potrzebaby każdy z nich rozmnożyć przez $\frac{1}{\log\ 3}=\frac{1}{0{,}477121}$ czyli podzielić przez log. $3=0{,}477121$.

109. Własność czwarta. *Logarytm pierwiastku pewnej potęgi z jakiéj liczby, równa się logarytmowi tejże liczby podzielonemu przez wykładnik pierwiastku.*

Liczba bowiem z któréj pierwiastek wyciągnąć mamy, może być uważaną, za potęgę tegoż pierwiastku, której wielkość, czyli stopień jest wskazany przez wykładnik pierwiastku. Logarytm więc tej liczby równa się logarytmowi pierwiastku rozmnożonemu przez wykładnik: a stąd logarytm pierwiastku równać się będzie logarytmowi liczby podzielonemu przez wykładnik: czyli że

$$\log \sqrt[m]{b}=\frac{\log.\ b}{m}$$

Jakoż czyniąc $\sqrt[m]{b}=x$

i podnosząc obie strony do potęgi m, będzie $b=x^m$

stąd log. $b=m$ log. x

$$\text{zatem } \frac{\log.\ b}{m}=\log.\ x=\log.\ \sqrt[m]{b}$$

Przez użycie przeto logarytmów wyciąganie pierwiastków zamienia się na dzielenie.

Zastosowanie. Znaleźć przy pomocy logarytmów pierwiastek 12*téj* potęgi z liczby 4096.

$$\log.\ \sqrt[12]{4096}=\frac{\log.\ 4096}{12}$$

$$\log.\ 4096=3{,}612360$$

$$\frac{\log.\ 4096}{12}=\frac{3{,}612360}{12}=0{,}301030$$

Że zaś logarytmowi 0,301030 odpowiada liczba 2, stąd ta liczba jest pierwiastkiem $12^{tėj}$ potęgi z 4096.

110. Przy zastosowaniach własności logarytmów do rozwiązywania przykładów, widzieliśmy, iż zawsze to rozwiązanie zacząć potrzeba od wynajdywania logarytmów, odpowiadających liczbom podanym w przykładzie, kończyć zaś na wynalezieniu liczby odpowiedniéj logarytmowi otrzymanemu na ostatni wypadek rachunku. Stąd wypływa konieczność poznania we wszystkich przypadkach, sposobów rozwiązania dwóch zadań następnych.

1°. *Jak mając daną liczbę wynaleźć w tablicach logarytm jej odpowiadający.*

2°. *Jak mając dany logarytm znaleźć liczbę jemu odpowiednią.*

Umiemy już rozwiązywać te zadania, gdy idzie o wyszukanie logarytmu liczby objętéj w naszych tablicach, równie jak o wyszukanie liczby odpowiedniej logarytmowi, którego część dziesiętna znajduje się w tychże tablicach. Potrzeba jeszcze umieć rozwiązać wszystkie inne przypadki, gdy liczba dana, albo logarytm nie znajdują się w tablicach.

111. Zadanie 1. *Mając daną liczbę jakąkolwiek, która nie znajduje się w tablicach, oznaczyć jéj logarytm.*

Zadanie to stosownie do różnicy liczby danéj, rozwiążemy w 5 następnych przypadkach. 1° Gdy liczba dana jest całkowitą, lecz przechodzi granice naszych tablic. 2° Gdy liczba dana z ułomkiem zwyczajnym jest połączoną. 3° Gdy liczba dana z ułomkiem dziesiętnym jest złączoną. 4° Gdy jest ułomkiem zwyczajnym, mniejszym od jedności. 5° Gdy jest podobnym ułomkiem dziesiętnym.

112. *Oznaczyć logarytm liczby całkowitéj, przechodzącéj granice tablic.*

a. Jeżeli liczba dana kończy się zerami, lecz ma tylko 4 pierwsze cyfry znaczące, logarytm jej w tablicach natychmiast się wynajdzie. I tak jeżeli zamiast liczby 7568, mamy liczbę 756800, któréj logarytm wyszukujemy, część dziesiętna tego logarytmu będzie takaż sama, jak i logarytmu odpowiedniego pierwszej liczbie, to jest 878981; cecha tylko 5, gdyż liczba dana 756800 ma 6 cyfer całkowitych. Mamy bowiem

$$\log. 756800 = \log. (7568 \times 100) = \log. 7568 + \log. 100$$
$$= 3,878981 + 2 = 5,878981.$$

b. Jeżeli liczba dana ma więcéj niż 4 cyfer znaczących, tablice nie przedstawią natychmiast jej logarytmu, lecz można go wynaleźć przez następny rachunek. Dajmy że liczbą daną jest 12345. Oddzielamy w niéj przecinkiem 4 pierwsze cyfry z lewej strony, to jest tyle, aby liczba z nich utworzona, była najwyższą co do ilości cyfer z pomiędzy tych, których logarytm znajduje się w tablicach. Przeź to otrzymamy liczbę 1234,5 mniejszą 10 razy od liczby danej 12345. Liczba ta 1234,5 jest pośrednią między liczbami 1234 i 1235, jej więc logarytm jako także pośredni, równać się będzie logarytmowi liczby 1234 zwiększonemu częścią różnicy pomiędzy log. 1234 i log. 1235. Szukajmy więc tych logarytmów w tablicach i weźmy ich różnicę, bez względu na cechę.

log. 1235	091667
log. 1234	091315
Różnica tablicowa	352

Znalazłszy tę różnicę powiadamy, jeżeli na jednostkę różnicy pomiędzy liczbami 1234 i 1235, przypada 352 różnicy pomiędzy logarytmami, ileż na 0,5 różnicy pomiędzy liczbami 1234 i 1234,5 przypadnie różnicy pomiędzy ich logarytmami. Stąd proporcya

$$1 : 352 = 0,5 : x$$
$$\text{przeto } x = 352 \times 0,5 = 176.$$

Część więc różnicy tablicowej przypadająca na różnicę między log. 1234,5 oznaczyć się mającym, a log. 1234 bezposrednio mniejszym, objętym w tablicach, otrzymuje się mnożąc różnicę tablicową 352, przez część oddzieloną z prawej strony liczby danej, czyli przez 0,5. Tak otrzymana 176, dodana do części dziesiętnej log. 1234, czyli do 091315, wyda na część dziesiętną log. 1234,5, a tem samem i log. 12345, liczbę 091491. Stąd

$$\log. 12345 = 4,091491.$$

W praktyce urządzają zwykle cały ten rachunek w następnym sposobie.

$$\log.\ 12345 = \log.\ 1234{,}5 + 1$$

$$\log.\ 1234 = 3{,}091315$$

Różnica tabl. 352.

$$1 : 352 = 0{,}5 : x = 176$$

$$\log.\ 1234{,}5 = 3{,}091491$$

$$\text{stąd } \log.\ 12345 = 4{,}091491.$$

Jeżeliby liczba dana była 123456, wówczas przy szukaniu jej logarytmu, potrzeba różnicę tablicową 352 pomnożyć przez 0,56, czyli przez część oddzieloną z prawej strony liczby danéj, wziętą w kształcie ułomku dziesiętnego. Z iloczynu stąd wypadłego 197,12, biorą się tylko same cyfry całkowite 197, których porządek jest podobny jak ostatniej cyfry w logarytmach, i dodając je do log. 1234, wypada że

$$\log.\ 123456 = 5{,}091512$$

Podobnież postępując przy szukaniu log. 1234567, i log. 12345678 znajdziemy, że różnica logarytmów przydać się mająca jest jedna i taż sama 199, przeto $\log.\ 1234567 = 6{,}091514$

$$\log.\ 12345678 = 7{,}091514.$$

Stąd widzimy, że przy użyciu tablic 6-cyfrowych, cyfra siódma w liczbie danej, mało wpływa na zmianę części dziesiętnej logarytmu, a cyfra 8ma nie wpływa wcale, czyli że tablice logarytmowe 6-cyfrowe do wyszukania tylko najwięcéj logarytmów liczb 7 cyfrowych posłużyć mogą.

113. We wszystkich prawie tablicach logarytmowych, różnice tworzą osobną kolumnę, którą w naszych nie mogliśmy zamieścić bez ich zawikłania: przy małej jednak wprawie można natychmiast wskazać te różnice, nie potrzebując wypisywać logarytmów, pomiędzy któremi logarytm szukany jest objęty.

Nadto w większych tablicach w kolumnie różnic, pod każdą z nich są zamieszczone iloczyny tych różnic przez 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 . . . . 0,9 a które to iloczyny *częściami proporcyonalnemi* zowią. I tak jeśli mamy mnożyć różnicę logarytmów 352, przez 0,56, widzimy w kolumnie różnic, iż $352 \times 05 = 176$, i że $352 \times 0{,}06 = 21,\ 1$, stąd $352 \times 0{,}56 = 176 + 21{,}1 = 197$.

114. Przejdźmy jeszcze 3 przykłady następne wyszukiwania logarytmów.

1. *Wyszukać* log. 77777, log. 777777, i log. 7777777.

Po odcięciu 4 pierwszych cyfer z lewej strony w liczbie 77777, ta zamieni się na 7777,7, a że

$$\begin{array}{l} \log.\ 7777 = 3{,}890812 \\ \log.\ 7778 = 3{,}890868 \end{array}\ 56$$

Stąd aby otrzymać log. 7777,7 potrzeba wziąć 0,7 części z różnicy 0,000056, to jest 0,000039 i przydać do 3,890812, przeto log. 7777,7=3,890851, zatem log. 77777=4,890851.

Podobnież $\log.\ 7777{,}77 = 3{,}890812 + 0{,}77 \times 0{,}000056$
$= 3{,}890812 + 0{,}000043 = 3{,}890855$

stąd log. 777777=5,890855

Nadto $\log.\ 7777{,}777 = 3{,}890812 + 0{,}777 \times 0{,}000056$
$= 3{,}890812 + 0{,}000003 = 3{,}890855$

stąd log. 7777777=6,890855.

Tu cyfra siódma 7 danej liczby, nie ma żadnego wpływu na 6 pierwszych cyfer części dziesiętnej jej logarytmu.

2. *Znaleźć* log. 23456, log. 234567 i log. 2345678.

Część dziesiętna logarytmu liczby z 4 pierwszych cyfer złożonej, czyli log. 2345 jest 370143. Część dziesiętna logarytmu następnego liczby o jedność większéj, ma za 4 ostatnie cyfry, w których tylko różnić się może, 0328. Stąd różnica logarytmów będzie 0328—0143=185. Części logarytmów dodać się mające będą $185 \times 0{,}6 = 254$; $185 \times 0{,}67 = 267$; $185 \times 0{,}678 = 268$

stąd log. 23456=4,370254
log. 234567=5,370267
log. 2345678=6,370268.

3. *Wyszukać* log. 98765, log. 987654, i log. 9876543.

Część dziesiętna log. 9876 jest 994581; cztery zaś ostatnie cyfry następnej części dziesiętnej są 4625. Stąd różnica 4625—4581=44. Części przydać się mające są $44 \times 0{,}5 = 22$; $44 \times 0{,}54 = 24$; $44 \times 0{,}543 = 24$ stąd log. 98765=4,994603; log. 987654=5,994605
log. 9876543=6,994605.

115. Ze wszystkich tych przykładów okazuje się, że całe działanie wyszukania logarytmów liczb całkowitych, przechodzących granice naszych tablic, polega. 1° na uważaniu tych liczb za liczby 4-cyfrowe, połączone z ułomkiem dziesiętnym. W obu bowiem razach, logarytmy mają jednakową część dziesiętną, co do cechy tylko się różnią. 2° Na uważaniu liczb 4 cyfrowych tak wypadłych, za pośrednie pomiędzy liczbami całkowitemi najbliższemi, objętemi w tablicach, i na szukaniu ich logarytmów podług tej ogólnej zasady, że *różnice liczb są proporcyonalne do różnic ich logarytmów*. Zasada ta wprawdzie nie jest zupełnie prawdziwą, podaje jednak znaczne przybliżenie, szczególniej w przypadku, gdy liczby uważane są wielkie, a różnice pomiędzy niemi mało znaczne. Dla tego przy użyciu tablic mniejszych, do oznaczenia logarytmu liczby wielocyfrowej, koniecznie trzeba odciąć 4 pierwsze jéj cyfry, czyli zamienić ją na 4-cyfrową, a błąd przy powyższéj zasadzie popełniony, zaledwie wpłynie na wielkość 6stej cyfry dziesiętnej, jak to na przykładach z samychże tablic wziętych przekonać się można. I tak *np.* gdy

log. 1000=3,000000 a log. 1010 = 3,004321.

Skoro przeto liczba wzrasta o 10, czyli od 1000 do 1010, logarytm 3,000000 wzrasta do 3,005321, czyli o 4321, na $\frac{1}{10}$ przeto część wzrostu liczby, przypada 432 na wzrost logarytmu; podług tego log. 1001 = 3,000432

log. 1002 = 3,000864 i t. d.

Logarytmy te od dokładnych, odpowiednich tymże liczbom, w 6tej tylko cyfrze dziesiętnej się różnią. Różnica ta będzie mniejszą, a nawet żadną, gdy liczby 4-cyfrowe większe, czyli bliższe 5 cyfrowych się wezmą. Przy użyciu tablic większych, gdy z liczb danych wielocyfrowych 5 cyfer pierwszych oddzielić można, błąd dopiero zachodzi w 8 cyfrze dziesiętnéj.

116. *Oznaczyć logarytm liczby całkowitej z ułomkiem zwyczajnym połączonej.*

Liczba dana złączona z ułomkiem zamienia się naprzód na ułomek. Że zaś każdy ułomek uważać można za iloraz licznika przez mianownik, stąd różnica między logarytmem licznika a logarytmem mianownika, będzie logarytmem liczby całkowitéj z ułomkiem połączonéj. *np.*

Wynaleźć logarytm z liczby $37\frac{43}{59}$.

$$\log.\ 37\frac{43}{59} = \log.\ \frac{2226}{59} = \log.\ 2226 - \log.\ 59$$

Że zaś log. 2226=3,347525
log. 59 =1,770852

Stąd log. $37\frac{43}{59}$ =1,576673

Trafić się może, że zamieniając liczbę całą na ułomek, otrzymamy na licznik liczbę większą od tablicowej, wówczas jej logarytm wyszukać potrzeba sposobem już podanym (111); *np.*

$$\log.\ 1234\frac{9}{11} = \log.\frac{13583}{11} = \log\ 13583 - \log.\ 11$$

log. 13583 = log. 1358,3+1
log. 1358=3,132900.

Różnica 319, stąd 319×0,3 = 96
log. 1358,3=3,132996
zatem log. 13583=4,132996
Że zaś log. 11 =1,041393
stąd log. $1234\frac{9}{11}$ =3,091603

117. *Oznaczyć logarytm liczby całkowitej z ułomkiem dziesiętnym połączonej.*

Pamiętając że logarytm liczby całkowitéj z ułomkiem dziesiętnym połączonej, jest oprócz cechy tenże sam, co logarytm liczby całkowitéj z niego powstałej, bez względu na przecinek (94), szukamy więc części dziesiętnéj logarytmu odpowiedniego danej liczbie, uważanej jako całkowitej, i nadajemy cechę o jedność mniejszą od ilości właściwej cyfer całkowitych, objętych w danej liczbie. I tak logarytmy liczb 623,4, i 62,34, i 6,234 co do części dziesiętnej nie różnią się od log. 6234, tylko co do cechy; jakoż log. 6234,=3,794767
log. 623,4=2,794767
log. 62,34=1,794767
log. 6,234=0,794767.

118. *Oznaczyć logarytm ułomku właściwego.*

Logarytm ułomku właściwego, czyli mniejszego od jedności, jest zawsze ilością odjemną. Dla otrzymania go bowiem potrzeba od logarytmu licznika odjąć logarytm mianownika. Że zaś to odciąganie uskutecznić się nie może, gdyż logarytm mianownika jest większy od logarytmu licznika, odwrotnie przeto działanie to dokonywamy, odciągając od logarytmu mianownika logarytm licznika, reszcie jednak dajemy znak odjemny.

Podług tego *np.* ułomek właściwy $\frac{a}{b}$, w którym zatem licznik a jest mniejszy od mianownika b, będzie miał logarytm

$$\log. \frac{a}{b} = -\log. \frac{b}{a}$$

Wypadek ten wyprowadzimy także pamiętając, że

$$\frac{a}{b} = 1 : \frac{b}{a}, \text{stąd } \log. \frac{a}{b} = \log. 1 - \log. \frac{b}{a}$$

$$= 0 - \log. \frac{b}{a} = -\log. \frac{b}{a}$$

Zastosowanie. $\text{Log}. \frac{4}{9} = -\log. \frac{9}{4} = -(\log. 9 - \log. 4)$

$$\log. 9 = 0{,}954245$$
$$\log. 4 = \underline{0{,}602060}$$
$$\log. \frac{4}{9} = -0{,}352185$$

119. Można jeszcze dwoma innemi sposobami wyrazić logarytmy ułomków mniejszych od jedności; raz je przedstawiając jako *logarytmy dodatnie*, lecz z cechą większą o 10 jedności, od tij, jaką mieć powinny; drugi raz jako *logarytmy z cechą tylko odjemną.*

Logarytm dodatni ułomku otrzymuje się, przydając do logarytmu licznika, 10 *jedności, i od tak zwiększonego odciągając logarytm mianownika.* Cecha tylko logarytmu dodatniego tak wypadłego, będzie za wielką o 10 jedności, które dla tego wyraźnie odznaczyć potrzeba. I tak gdy idzie o wyszukanie log. $\frac{4}{9}$ mamy

$$\log. 4 = 0{,}602060 = 10{,}602060 - 10$$
$$\log. 9 = \underline{0{,}954245}$$
$$\text{stąd } \log. \tfrac{4}{9} = 9{,}647815 - 10 = 9.647815$$

Kropka zamiast przecinka za cechą umieszczona oznacza, iż cecha tego logarytmu o 10 jedności jest za wielką.

Podobnyż logarytm dodatni wprost wypadnie, używając dopełnienia arytmetycznego zamiast logarytmu odjąć się mającego, a tem samem zamieniając odciąganie na dodawanie.

$$\log.\ \frac{4}{9} = \log.\ 4 - \log.\ 9 = \log.\ 4 + \text{dop.}\ \log.\ 9 - 10.$$

$$\begin{aligned} \log.\ 4 &= 0{,}602060 \\ \text{dop.}\ \log.\ 9 &= \underline{9{,}045755} \\ \log.\ \frac{4}{9} &= 9{,}647815 - 10 = 9.647815. \end{aligned}$$

Logarytm odjemny zamienia się na dodatni za przydaniem 10 jedności, czyli gdy bez względu na jego znak odjemny, odciągamy ten logarytm od 10 jedności: i tak

$$10 - 0{,}352185 = 9.647815, \quad \text{gdyż}$$

$$-0{,}352185 = 10 - 0{,}352185 - 10 = 9{,}647815 - 10$$

120. *Logarytm z cechą tylko odjemną a zatem z częścią dziesiętną dodatnią, otrzymuje się przydając tyle jedności do logarytmu licznika, ile potrzeba, aby logarytm mianownika mógł być odciągnięty.*

Podług tego $\log.\ \frac{4}{9}$ z cechą tylko odjemną wypadnie następnie.

$$\begin{aligned} & \quad +1 \\ \log.\ 4 &= \ 0{,}602060 - 1 \\ \log.\ 9 &= \ \underline{0{,}954245} \\ \log.\ \frac{4}{9} &= \ 0{,}647815 - 1 = \bar{1}{,}647815 \end{aligned}$$

Znak *mniej* nad cechą zamieszczony oznacza, że w tym logarytmie cecha jest tylko odjemną.

Chcąc logarytm odjemny zamienić na logarytm z cechą tylko odjemną, dosyć jest bez względu na znak mu właściwy, wziąć za część dziesiętną dopełnienie logarytmu do tylu jedności więcej jedną, ile ich cecha zawiera, i też liczbę jedności podać jako cechę odjemną.

I tak $\log.\ \frac{4}{9} = -0{,}352185 = \bar{1}{,}647815$, gdyż

$$\begin{aligned} -0{,}352185 &= 1 - 0{,}352185 - 1 = 0{,}647815 - 1 \\ &= -1 + 0{,}647815 = \bar{1}{,}647815. \end{aligned}$$

Logarytm dodatni zamienia się na logarytm z cechą odjemną, biorąc dopełnienie samej tylko cechy do 10 jedności, i wypadłą stąd różnicę jako cechę odjemną przedstawiając. I tak

$$\log. \tfrac{4}{9} = 9.647815 = \bar{1},647815, \quad \text{gdyż}$$

$$9.647815 = 9,647815 - 10 = 0,647815 - 1$$

$$= -1 + 0,647815 = \bar{1},647815.$$

Odwrotnie, *od logarytmu z cechą odjemną powracamy do logarytmu dodatniego, podstawiając tylko za cechę odjemną, jej dopełnienie arytmetyczne, czyli różnicę od 10 jedności, bez względu na znak jej odjemny*, pamiętając jednak zawsze, że cecha tak otrzymana, jest za wielka o 10 jedności. *np.*

$$\log \tfrac{4}{9} = \bar{1},647815 = 9.647815, \quad \text{gdyż}$$

$$\bar{1},647815 = 0,647815 - 1 = 9,647815 - 10.$$

Jakkolwiek każdy z trzech sposobów oznaczania logarytmów, ułomkom odpowiednich, użytym być może, w praktyce jednak nigdy prawie nie używają logarytmów odjemnych i najczęściej logarytmom dodatnim nadają pierwszeństwo.

121. Zastosowania. 1. *Znaleźć w potrójnym sposobie logarytm ułomku* $\tfrac{6}{451}$.

Logarytm odjemny. $\text{Log.}\ \tfrac{6}{451} = -(\log.\ 451 - \log.\ 6)$

$$\log.\ 451 = 2,654177$$
$$\log.\ \ 6 = 0,778151$$
$$\log.\ \frac{6}{451} = -1,876026$$

Logarytm dodatni.

$\log.\ 6 = 10,778151 - 10.$	$\log.\ 6 = 0,778151$
$\log.\ 451 = 2,654177$	$\text{dop.}\log.\ 451 = 7,345823$
$\log.\ \tfrac{6}{451} = 8,123974 - 10$	$\log.\ \tfrac{6}{451} = 8,12397401 -$
$= 8.123974$	

Z odjemnego: $-1,876026 = 10 - 1,876026 - 10 = 8,123974 - 10.$

Logarytm z cechą tylko odjemną.

$$+2$$
$$\log.\ 6 = 0,778151 - 2$$
$$\log.\ 451 = 2,654177$$
$$\log.\ \tfrac{6}{451} = 0,123974 - 2 = \bar{2},123974.$$

Z dodatniego: 8,123974 − 10 = 0,123974 − 2

Z odjemnego: −1,876026 = 2 − 1,876026 − 2 = 0,123974 − 2

2. *Znaleźć w potrójnym sposobie* log. $^1/_{1024}$.

Log odjemny. Log. $^1/_{1024}$ = −(log. 1024 − 1) = −(3,010300 − 0)

= −3,010300

Log. dodatni. Log. $^1/_{1024}$ = log. 1 + dop. log. 1024 − 10

= 6,989700 − 10 = 6.989700

z odjemnego: 10 − 3,010300 = 6.989700.

Log. z cechą odjemną. Log. 1 = 4,000000 − 4

log. 1024 = 3,010300

log. $^1/_{1024}$ = 0,989700 − 4 = $\overline{4}$,989700.

z dodatniego: 6,989700 − 10 = 0,989700 − 4

z odjemnego: −3,010300 = 4 − 3,010300 − 4 = 0,989700 − 4.

122. *Oznaczyć logarytm ułomku dziesiętnego.*

Ponieważ każdy ułomek dziesiętny, w kształcie ułomku zwyczajnego wyrażony być może, przywracając mianownik, stąd sposoby oznaczania logarytmów jednych i drugich ułomków, są jedne i też same. I tak chcąc oznaczyć log. 0,086, gdy ten ułomek toż samo znaczy co $^{86}/_{1000}$, i gdy

log. 1000 = 3,000000

log. 86 = 1,934498

Różnica = 1,065502

stąd log. 0,086 = − 1,065502.

Jest to *logarytm* zupełnie *odjemny*. *Logarytm dodatni* otrzymamy przydając 10 jedności do log. 86, aby przez to od niego log. 1000 mógł być odciągnięty; albo zamieniając odciąganie na dodawanie przy pomocy dopełnień arytmetycznych.

log. 86 =	11,934498 − 10	log. 86 =	1,934498
log. 1000 =	3,000000	dop. log. 1000 =	7,000000
log. 0,086 =	8,934498 − 10		8,934498 − 10.

Logarytm z cechą odjemną otrzymuje się albo z dodatniego, pamiętając że 8,934498 − 10 = 0,934498 − 2 = $\overline{2}$,934498; albo przydając do cechy licznika tyle jedności, aby odciąganie uskutecznić się mogło; i tak

$$\begin{array}{rl} & \;+2 \\ \log.\ 86 = & 1,934498-2 \\ \log.\ 1000 = & 3,000000 \\ \hline \log.\ 0,086 = & 0,934498-2=\bar{2},934498. \end{array}$$

123. Logarytm z cechą odjemną można jeszcze wprost oznaczyć, przez uwagę tylko na ułomek dziesiętny podany. Część dziesiętna log. 0,086, jest takaż sama jak logarytmu liczby całkowitej 86, to jest 934498; zmiana tylko zachodzi co do cechy, która zmniejsza się o jedność w miarę, jak sama liczba 10 razy mniejszą się staje; i tak

$$\log.\ 86 = 1,934498$$
$$\log.\ 8,6 = 0,934498$$
$$\log.\ 0,86 = \bar{1},934498$$
$$\log. 0,086 = \bar{2},934498$$
$$\log. 0,0086 = \bar{3},934498 \text{ i t. d.}$$

Stąd aby znaleźć logarytm z cechą odjemną ułomku dziesiętnego, nie uważa się wcale na zera poprzedzające cyfry jego znaczące, lecz wyszukuje się w tablicach części dziesiętnej logarytmu odpowiedniego tym cyfrom znaczącym, wziętym jako całkowitym; nadaje się tylko cecha odjemna, mająca tyle jedności, ile zer poprzedza pierwszą cyfrę znaczącą.

Podług tego log. $0,000086 = \bar{5},934498$.

Cechy odjemne w tem są szczególniej dogodne, że podobnież jak cechy dodatnie logarytmów wszelkich liczb całkowitych, są wykładnikami potęg z 10, jakie dają poznać wartość miejscową cyfer najwyższego porządku, objętych w ułomkach im odpowiednich (94). Skoro bowiem ułomki dziesiętne

$$0,1\ ,\quad 0,01,\quad 0,001,\quad ,\quad 0,0001 \quad \text{i t. d.}$$

wyrażone być mogą przez

$$10^{-1},\quad 10^{-2},\quad 10^{-3},\quad 10^{-4} \text{ i t. d.}$$

przeto cechy logarytmów tym ułomkom odpowiednich

$$-1,\quad -2,\quad -3,\quad -4,\quad \text{i t. d.}$$

są wykładnikami powyższych potęg z 10.

Z tej przyczyny log. 0,86 ma za cechę -1, gdyż wartość miejscowa cyfry najwyższego porządku 8, jako części dziesiętnych jest 10^{-1}; log. 0,086 ma za cechę —2, gdyż wartość miejscowa cyfry 8 jest 10^{-2} i t. d. Stąd wypływa podobne jak wprzód prawidło, że *cecha odjemna wskazuje zawsze miejsce, które cyfra najwyższego porządku w ułomku po przecinku zajmuje.* np.

$$\log. 0{,}02645 = \bar{2}{,}422426$$
$$\log. 0{,}0002645 = \bar{4}{,}422426.$$

Cechy te odjemne są różne od cech odjemnych, należących do logarytmów zupełnie odjemnych. Te ostatnie logarytmy odpowiednie poprzednim ułomkom, byłyby,

$$\log. 0{,}02645 = -1{,}577574$$
$$\log. 0{,}0002645 = -3{,}577574$$

czyli takie, jakieby z pierwszych wypadły, po odjęciu od cech odjemnych, części dziesiętnéj dodatniej. Wiemy bowiem że

$$\bar{2}{,}422426 = -2 + 0{,}422426 = -1{,}577574$$
$$\bar{4}{,}422426 = -4 + 0{,}422426 = -3{,}577574$$

Cechy przeto logarytmów zupełnie odjemnych stały się większe co do wartości a mniejsze co do wielkości cyfer je oznaczających. Jakoż ułomek 0,02645 jest większym od 0,01, a mniejszym od 0,1; przeto jego logarytm winien być większym od —2, a mniejszym od —1. Takim jest właśnie co do wartości logarytm —1,577572. Podobnież w logarytmie odjemnym ułomku 0,2645, cecha będzie—0, czyli pośrednia pomiędzy cechami —1 i 0, logarytmów odpowiednich liczbom 0,1 i 1, pomiędzy któremi ułomek dany jest zawarty.

124. Łatwo także jest znaleźć prawidło do oznaczania wprost logarytmów dodatnich, odpowiednich ułomkom dziesiętnym. Dosyć jest bowiem uważać za logarytm jedności 10—10 =0, i podług tego wyprowadzić logarytmy następne po sobie liczb, jedna od drugiéj 10 razy mniejszych.

I tak gdy log. 1=10,000000—10, stąd

log. 0,1= 9,000000—10

log. 0,01= 8,000000—10

log. 0,001= 7,000000—10

log. 0,0001= 6,000000—10 i t. d.

Aby więc znaleźć logarytm dodatni ułomku dziesiętnego, potrzeba wyszukać części dziesiętnej logarytmu, odpowiedniego liczbie całkowitej złożonéj z cyfer znaczących tegoż ułomku, bez względu na przecinek, i nadać jej za cechę liczbę tyle się różniącą od dziesiątka, ile zer poprzedza pierwszą cyfrę znaczącą ułomku. Stąd zarazem wypływa: *że różnica zachodząca między cechą logarytmu dodatniego ułomku, a* 10, *wskazuje zawsze miejsce, jakie pierwsza cyfra znacząca tegoż ułomku po przecinku zajmuje.*

I tak log. 0,00175 będzie miał część dziesiętną tę samą jak log. 175, to jest 243038, za cechę zaś liczbę 7, czyli różnicę od 10 liczby 3, która podaje ilość zer poprzedzających pierwszą cyfrę znaczącą 1 w tymże ułomku. Cecha ta 7 w różnicy swojej od 10, wskazuje zarazem, iż pierwsza cyfra znacząca 1, trzecie miejsce w ułomku po przecinku zajmuje.

125. Zastosowania. 1^0. *Oznaczyć* log. 0, 3 *w potrójnym sposobie.*

Log. odjemny. log. $0,3 = \log. \frac{3}{10} = -(\log. 10 - \log. 3)$.

$$= -(1 - 0,477121) = -0,522879.$$

Log. dodatni. Część dziesiętna log. 3 jest 477121; że zaś cecha wskazać powinna w różnicy swojej od 10, liczbę zer poprzedzających pierwszą cyfrę znaczącą, równie jak i miejsce, które ta cyfra po przecinku zajmuje, stąd log. $0,3 = 9.477121$.

Z odjemnego: $-0,522879 = 10 - 0,522879 - 10 = 9,477121 - 10$

Logarytm z cechą odjemną. Część dziesiętna jak w log. 3, cecha zaś odjemna wskaże liczbę zer poprzedzających pierwszą cyfrę znaczącą; stąd log $0,3 = \bar{1},477121$.

Z odjemnego; $-0,522879 = 1 - 0,522879 - 1 = 0,477121 - 1$.

Z dodatniego; $9,477121 - 10 = 0,477121 - 1$.

2^0. *Oznaczyć w potrójnym sposobie* log. 0,00123.

Log. odjemny. Log. $0,00123 = -(\log. 100000 - 123)$.

$$= -(5 - 2,089905) = -2,910095$$

Log. dodatni. Część dziesiętna jak w log. 123; cecha 7, w różnicy swojej od 10 wskazuje, że pierwsza cyfra znacząca 3cie miejsce po przecinku zajmuje; stąd log. $0.00123 = 7.089905$.

Z odjemnego. $-2,910095 = 10 - 2,910095 - 10 = 7,089905 - 10$.

Log. z cechą odjemną. Część dziesiętna jak w log. 123. Cecha odjemna 3 wskaże, że pierwsza cyfra znacząca ułomku 3cie miejsce po przecinku zajmuje, stąd log. $0,00123=\bar{3},089905$.

Z dodatniego $7,089905-10=0,089905-3$

Z odjemnego $-2,910095=3-2,910095-3=0,089905-3$.

3. *Oznaczyć w potrójnym sposobie* log. 0,721367.

Log. odjemny. $\text{Log.}0,721367=\text{log.}\ \frac{721367}{1000000}=\text{log}\ \frac{7213,67}{10000}$

$=-(\text{log.}\ 10000-\text{log.}\ 7213,67)$

$\text{log.}\ 7213 = 3,858116$

Różnica tabl. 60, stąd $60\times 0,67=\quad 40$

$\text{log.}\ 7213,67=3,858156$

$\text{log.}\ 0,721367=-(4-3,858156)=-0,141844$.

Log. dodatni. Część dziesiętna log. 721367 jest 858156, stąd

$\text{log.}\ 0,721367=9.858156$

Z odjemnego. $-0,141844=10-0,141844-10=9,858156-10$.

Log. z cechą odjemną. $\bar{1},858156.=0,858156-1$

126. Gdy *ułomek dziesiętny jest peryodyczny*, zamieniamy go naprzód na ułomek zwyczajny, i szukamy logarytmu tego ułomku, sposobem w tym razie służącym. *np.*

1°. $\text{Log.}\ 0,55\ ..=\text{log.}\ {}^5/_9=-(\text{log.}\ 9-\text{log.}\ 5)$

$=-(0,954343-0,698970)=-0,255373$.

$-0,255373=10-0,255373-10=9.744627$

Skoro bowiem $\text{log.}\ 5=0,698970=10,698970-10$

$\text{log.}\ 9=0,954343$

stąd $\text{log.}\ {}^5/_9=9,744627-10$

$9,744627-10=0,744627-1=\bar{1},744627$.

2° $\text{Log.}\ 2,2727\ ..=\text{log.}\ {}^{25}/_{11}=\text{log.}\ 25-\text{log.}\ 11$

$=1,397940-1,041393=0,356547$.

3° $\text{Log.}\ 0,83\dot{3}\ ..=\text{log.}\ {}^5/_6=-(\text{log.}\ 6-\text{log.}\ 5)$

$=-(0,778151-0,69870)=-0,079181$

Log. dodatni. $\text{Log.}\ 0,83\dot{3}.=9.920819=9,920819-10$

Log. z cechą odjemną. $\text{Log.}\ 0,83\dot{3}.=\bar{1},920819=0,920819-1$.

Jeżeli zaś ułomek dziesiętny chociaż nie jest peryodycznym, jest jednak nieskończony, logarytm jemu odpowiedni co do liczby cyfer w nim objętych, będzie miał granicę zakreśloną przez same tablice.

127. Zadanie 2. *Mając logarytm dany, którego część dziesiętna nie znajduje się w tablicach, oznaczyć liczbę jemu odpowiednią.*

Sposób oznaczania, przykłady najlepiej objaśnią.

1^0 *Znaleźć liczbę odpowiednią logarytmowi* 2,444444.

Bez względu na cechę wynajdujemy dwa logarytmy najbliższe danemu, co do ich części dziesiętnych, czyli takie, pomiędzy któremi logarytm dany jako zawarty, uważany być może. Takiemi są logarytm bezpośrednio niższy 444357, a który odpowiada liczbie 2782 i logarytm bezpośrednio wyższy 444513, który odpowiada liczbie 2783. Liczba przeto szukana odpowiednia logarytmowi danemu, bez względu na wartość porządkową cyfer ją składających, która dopiero przez cechę się oznaczy, jest większą od 2782 a mniejszą od 2783; różni się przeto od 2782 o pewny ułomek. Dla wyszukania tego ułomku, bierzemy różnicę między logarytmami w tablicach znalezionemi, to jest pomiędzy 444357 i 444513, czyli róznicę pomiędzy liczbami z 4 ostatnich cyfer złożonemi, gdyż dwie pierwsze są im wspólne, a zatem pomiędzy 4357 i 4513; tą różnicą jest 156. Bierzemy podobnież różnicę pomiędzy logarytmem danym a najbliżéj niższym, znalezionym w tablicach, to jest pomiędzy 444444 a 444357, czyli pomiędzy 4444 i 4357; tą różnicą jest 87. Dzielimy potem tę ostatnią różnicę przez pierwszą, stąd wypadnie $^{87}/_{156} = 0{,}56$, ułomek dziesiętny, o który liczbę 2782 odpowiednią logarytmowi mniejszemu, znalezionemu w tablicach, powiększyć potrzeba, aby otrzymać liczbę 2782,56 odpowiednią logarytmowi danemu. Liczba ta jednak, ze względu na cechę 2 logarytmu danego, wskazującą iż część całkowita liczby trzy tylko cyfry obejmować może, zamieni się na 278,256, czyli że 2,444444=log. 278,256.

Prawidło zatem służące do rozwiązania podanego zadania jest następne; że *aby znaleźć ułomek dziesiętny mający się dodać* *do liczby odpowiedniej logarytmowi objętemu w tablicach, mniejszemu od danego, potrzeba podzielić różnicę pomiędzy tym logarytmem a logarytmem danym, przez różnicę między dwoma logarytmami w tablicach znalezionemi*, to jest *pomiędzy bezpośrednio wyższym i niższym od danego.* Prawidło to wynika z podobnegoż jak w pierwszym zadaniu przypuszczenia, że *różnice logarytmów mają się do siebie jak różnice liczb.* Mamy bowiem że

$$156 : 87 = 1 : x = {}^{87}/_{156}.$$

to jest, że jeżeli na 156 różnicy pomiędzy log. 2782 i log. 2783, przypada jedność różnicy między liczbami, ileż na 87 różnicy między logarytmem danym, a log. 2782 bezpośrednio od niego w tablicach mniejszym, przypadnie różnicy między liczbami im odpowiedniemi. Wypadek $^{87}/_{156}$ zamieniając na ułomek dziesiętny, ograniczamy się tylko na wyszukaniu 2 jego cyfer dziesiętnych; przy pomocy bowiem tablic 6-cyfrowych, 6 tylko cyfer dokładnych w liczbach logarytmom danym odpowiednich, wynaleźć można.

2^0. *Znaleźć liczbę odpowiednią logarytmowi* 0,777777.

Podobnież jak w poprzednim przykładzie, aby mieć potrzebne w tym razie różnice logarytmów, bez względu na ich cechy, wypisujemy tylko 4 ostatnie cyfry dziesiętne tychże logarytmów, a w których powyższe różnice zachodzić mogą. Urządzamy zaś następnie rachunek.

Część dzies. dana	7777,	tablicowa większa	7789
Tablicowa mniejsza	7717	. . . .	7717
Różnica	60		72

stąd $^{60}/_{72} = 0{,}83$. Że zaś liczbą odpowiednią logarytmowi mniejszemu 777717 jest 5994, liczbą przeto szukaną będzie 5994,83, czyli raczéj ze względu na cechę 0, która wskazuje, iż jedna tylko cyfra jest w częsci całkowitéj liczby, będzie 5,99483. Stąd 0,777777=log. 5,99483.

3^0 *Wyszukać jakim liczbom odpowiadają logarytmy*

0,334417, 1,334417, 2,334417 i 4,334417.

Ponieważ te logarytmy mają jednakową część dziesiętną, stąd liczby im odpowiednie składają się z jednakowych cyfer. Dosyć więc jest oznaczyć liczbę odpowiednią jednemu z nich, pierwszemu *np*. aby potem podług różności cechy, nadać rozmaitą wartość porządkową cyfrom składającym tę liczbę, a która to wartość jedyną stanowić będzie różnicę w liczbach odpowiednich danym logarytmom.

4417	4454	część dzies. wyższa w tablicach
4253	4253	„ „ niższa „
164 :	201 = 0,82	

Że zaś liczbą odpowiednią logarytmowi 334253 jest 2159, ta więc uzupełniona cyframi znalezionemi będzie 2159,82. Stąd liczby szukane, ze względu na cechy danych logarytmów, będą:

0,334417=log. 2,15982
1,334417=log. 21,5982
2,334417=log. 215,982
4,334417=log. 21598,2

4°. *Znaleźć liczbę odpowiednią logarytmowi* 7,888888 W tablicach znajdujemy naprzód, że część dziesiętna logarytmu bezpośrednio niższego 888853, odpowiada liczbie 7742.

8888	8909	
8853	8853	7742
35 :	56=	0,62

Liczbą zatem szukaną ze względu na cechę 7, będzie 77426200. Tym sposobem widzimy, że nie jesteśmy w stanie za pomocą naszych tablic, dokładnie oznaczyć 7ej i 8ej cyfry w liczbie szukanéj, mającej być odpowiednią logarytmowi danemu, i dla tego ich miejsca przez zera zapełniamy W ogóle przez tablice logarytmowe oznaczamy tyle tylko cyfer dokładnych w liczbach, ile cyfer dziesiętnych obejmują same logarytmy. To właśnie ogranicza użycie logarytmów w pewnych przypadkach, a szczególniej gdy idzie o mnożenie liczb wielocyfrowych. Przypadki te jednak w praktyce rzadziéj przytrafiają się; częściej daleko mnożymy liczby mniejsze połączone z wielu cyframi dziesiętnemi i to mnożenie, jak zobaczemy niżej, znacznie ułatwiają logarytmy. Sześć bowiem cyfer w iloczynie otrzymanych będą dostateczne, gdy tylko liczby dane do mnożenia, w częściach swych całkowitych nie są wielkie.

128. W poprzednich przykładach szło zawsze o wyszukanie liczby odpowiedniej logarytmowi zupełnie dodatniemu, takiej zatem liczby, która była zawsze większą od jedności, Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia przypadek, *gdy idzie o wyszukanie liczby mniejszej od jedności a której odpowiedni logarytm dany, może być,* albo *dodatni lecz z cechą o* 10 *jedności większą,* albo *z cechą tylko odjemną,* albo wreszcie *zupełnie odjemny.*

a. Gdy logarytm dany jest dodatni, lecz z cechą o 10 *jedności większą.*

Dajmy *np.* że mamy wynaleźć liczbę odpowiednią logarytmowi 9,089552—10, czyli logarytmowi 9.089552.

Bez względu na cechę szukamy naprzód, jakiéj liczbie część dziesiętna logarytmu danego odpowiada: tą liczbą jest 1229. Wartość miejscową cyfer składających tę liczbę poda cecha 9, która podług (124) odjęta od 10, daje liczbę wskazującą, albo ile zer poprzedza pierwszą cyfrę znaczącą, albo jakie miejsce cyfra pierwsza znacząca po przecinku zajmować winna; stąd

$$9.089552 = \log.\ 0,1229.$$

Podobnież gdy idzie o wyszukanie liczby odpowiedniej logarytmowi 7.858156, czyli 7,858156—10.

Ponieważ część dziesiętna logarytmu danego nie znajduje się w tablicach, oznaczamy więc liczbę jej odpowiednią sposobem wyżéj wskazanym. Część dziesiętna najbliżéj niższa 858116 odpowiada liczbie 7213, stąd,

$$\begin{array}{ccccc} 8156 & & 8176 & & \\ \underline{8116} & & \underline{8116} & 7213 & \\ 40 & : & 60 = & & 0,67 \end{array}$$

Przeto logarytmowi danemu odpowiada liczba 7213,67, lecz bez względu jeszcze na wartość porządkową cyfer tę liczbę składających. Wartość takową oznaczy cecha 7, która jako wyższa od własciwej o 10 jedności, w różnicy swojej od tychże 10 jedności wskazuje, że 3 zer poprzedza pierwszą cyfrę znaczącą liczby znalezionéj, albo że ta cyfra trzecie miejsce po przecinku zajmować winna. Stąd

$$7,858156 - 10 = \log.\ 0,00721367$$

b. Gdy logarytm dany jest z cechą odjemną.

Wynajdźmy *np.* liczbę odpowiednią logarytmowi

$\bar{1},333333$, czyli logarytmowi $0,333333-1$.

Nie zważając na cechę oznaczamy naprzód cyfry liczby, która odpowiada części dziesiętnej danego logarytmu. Znajdujemy, że bezpośrednio niższą częścią dziesiętną w tablicach jest 332246, i że ta odpowiada liczbie 2154.

Mamy nadto	3333	3447	część dzies. wyższa w tabl.
	3246	3246	„ „ niższa „
	87 :	201=0,43	

Cyfry więc składające liczbę szukaną są 215443. Że zaś cecha $\bar{1}$, wskazuje miejsce jakie cyfra pierwsza znacząca po przecinku zajmuje, stąd

$$\bar{1},333333,=\log.\ 0,215443.$$

Podobnież znaleźlibyśmy, że logarytm $\bar{3},089905$ odpowiada ułomkowi dziesiętnemu 0,00123, gdyż część dziesiętna logarytmu 089905, ma odpowiednią sobie liczbę 123: cecha zaś $\bar{3}$, wskazuje że pierwsza cyfra znacząca 1, zajmuje 3cie miejsce po przecinku.

c. Gdy logarytm jest zupełnie odjemny.

Ponieważ tablice zawsze tylko logarytmy dodatnie w sobie obejmują, stąd aby znaleźć liczbę odpowiednią logarytmowi danemu odjemnemu, potrzeba go wprzód zamienić, albo na logarytm dodatni, lecz z cechą o 10 jedności większą, albo na dodatni co do części dziesiętnej, lecz z cechą odjemną. *np.*

Znaleźć liczbę odpowiednią logarytmowi — 2,334419.

Logarytm odjemny zamieniamy na dodatni, biorąc jego dopełnienie do 10 jedności, bez względu na znak który go poprzedza(119). Mamy bowiem

$$-2,334419=10-2,334419-10=7.665581-10$$

Liczba odpowiednia części dziesiętnej powstałego tak z zamiany logarytmu dodatniego, jest 463. Cecha zaś 7 odjęta od 10, daje liczbę 3, która wskazuje, iż pierwsza cyfra znacząca 4, w liczbie znalezionej, trzecie miejsce po przecinku zajmować winna, stąd

$$-2,334419 \text{ czyli } 7.665581=\log.\ 0,00463$$

Przy zamianie logarytmu danego odjemnego na logarytm z cechą odjemną, bierzemy dopełnienie logarytmu do takiej liczby jedności, którąby była o jedną jedność większą od tej, jaką cecha obejmuje (120); stąd

$$-2{,}334419=3-2{,}334419-3=0{,}665581-3=\bar{3}{,}665581$$

Część dziesiętna wypadłego stąd logarytmu, taż sama jak i w poprzednim przypadku, odpowiada liczbie 463: cecha zaś $\bar{3}$,wskazuje wprost miejsce, które pierwsza cyfra znacząca po przecinku zajmuje; stąd

$$-2{,}334419=\bar{3}{,}665581=\log.\ 0{,}00463$$

Podobnież znajdziemy liczbę odpowiednią logarytmowi $-0{,}522879$.

$$-0{,}522879=10-0{,}522879-10=9.477121$$

$$-0{,}522879=1-0{,}522879-1=\bar{1}{,}477121.$$

Część dziesiętna 477121, taż sama w obu logarytmach z zamiany powstałych, odpowiada liczbie 300. Cecha 9 logarytmu dodatniego, różnicą swoją 1 od 10 wskazuje, iż cyfra pierwsza znacząca liczby znalezionej, zajmuje pierwsze miejsce po przecinku, co w logarytmie z cechą odjemną wprost przez tę cechę jest wskazane. Stąd

$$-0{,}522879=\log.\ 0{,}3.$$

Zastosowanie logarytmów

do rozwiązywania działań arytmetycznych.

129. W tych zastosowaniach rozwiążemy następnie przykłady ściągające się do mnożenia, dzielenia, podnoszenia do potęg, wyciągania pierwiastków i do postępów ilorazowych.

Opuściemy zaś zupełnie zastosowania logarytmów do rachunków z procentem składanym, z przyczyny, iż te rachunki wraz z ich teoryą są szczegółowo podane i wyjaśnione w osobnem dziele pod tytułem „*Rachunkowość handlowa w ważniejszych jéj zastosowaniach. Warszawa* 1846.“

Logarytmy ułomków zawsze tylko jako dodatnie przedstawiać będziemy, podług sposobu w rachunku praktycznym prawie powszechnie teraz używanego.

130. *Zastosowanie logarytmów do mnożenia ułomków dziesiętnych.*

1. *Rozmnożyć przez siebie 5 następnych ułomków dziesiętnych.*

1,2345, 2,3456, 3,4567, 4,5678, 5,6789

log. 1,2345=0,091491
log. 2,3456=0,370254
log. 3,4567=0,538662
log. 4,5678=0,659707
log. 5,6789=0,754264

log. *iloczynu* =2,414378=log. 259,643

Iloczyn przeto żądany, jako liczba odpowiednia logarytmowi 2,414378 jest 259,643.

2. *Znaleźć iloczyn* 10 *liczb następnych.*

1,0234, 1,0345, 1,0456, 1,0567, 1,0678
1,0789, 1,0890, 1,0901, 1,0012, 1,0123.

log. 1,0234=0,010045
log. 1,0345=0,014731
log. 1,0456=0,019366
log. 1,0567=0,023952
log. 1,0678=0,028490
log. 1,0789=0,032981
log. 1,0890=0,037028
log. 1,0901=0,037466
log. 1,0012=0,000521
log. 1,0123=0,005309

log. *iloczynu* =0,209889=log. 1,62139

3. *Znaleźć przy pomocy logarytmów iloczyn liczb*

497,86, 76,897, 0,67948

log. 497,86 = 2,697107
log. 76,897 = 1,885909
log. 0,67948= 9,832177—10

log. *iloczynu* =14,415193—10=4,415193

Iloczynem żądanym jest liczba odpowiednia temu logarytmowi, czyli 26013,1.

4. *Znaleźć iloczyn* 5 *liczb następnych.*

$$7{,}93258 \times 0{,}98765 \times 0{,}8765 \times 0{,}348 \times 0{,}0028.$$

$$\begin{aligned} \log.\ 7{,}93258 &= 0{,}899414 \\ \log.\ 0{,}98765 &= 9{,}994603-10 \\ \log.\ 0{,}8765 &= 9{,}942752-10 \\ \log.\ 0{,}348 &= 9{,}541579-10 \\ \log.\ 0{,}0028 &= 7{,}447158-10 \\ \hline \log.\ \textit{iloczynu} &= 37{,}825506-40 \\ &= 7{,}825506-10 = \log.\ 0{,}00669123 \end{aligned}$$

131. *Zastosowanie logarytmów do dzielenia w ogólności.*

1. *Podzielić* 87946 *przez* 9842.

Sposobem zwyczajnym		*przez dopełnienia*
log. 87946 =4,944216		log. 87946= 4,944216
log. 9842=3,993083		dop. log. 9842 = 6,006917
log. *ilorazu*=0,951133	albo	10,951133—10.

Iloraz przeto żądany, jako liczba odpowiednia temu logarytmowi jest 8,93578.

2. *Podzielić* 10460353203 *przez* 177147.

$$\begin{aligned} \log.\ 1046035\ldots &= 10{,}019547 \\ \log.\ 177147 &= 5{,}248334 \\ \hline \log.\ \textit{ilorazu} &= 4{,}771213 \end{aligned}$$

Liczba logarytmowi ilorazu odpowiednia 590409, jest dokładnym ilorazem, jakkolwiek tylko 7 pierwszych cyfer dzielnej wpływały na oznaczenie jej logarytmu. Pochodzi to stąd, iż w dzieleniu różność cyfer ilorazu zależy jedynie od pierwszych cyfer dzielnej, wziętych w ilości odpowiedniej dzielnikowi; ostatnie zaś cyfry służą tylko do ściślejszego oznaczenia reszty ostatniej, z dzielenia wynikającej.

3. *Podzielić* 7,654 *przez* 1,978.

$$\begin{aligned} \log.\ 7{,}654 &= 0{,}883888 \\ \log.\ 1{,}978 &= 0{,}296226 \\ \hline \log.\ \textit{ilorazu} &= 0{,}587662 = \log.\ 3{,}86956 \end{aligned}$$

4. *Podzielić* 1 *przez* 3,14159.

$$\text{log. } \textit{ilorazu} = \text{log. } 1 + \text{dop. log. } 3{,}14159 - 10$$
$$= 9{,}502850 - 10 = \text{log. } 0{,}318310.$$

5. *Podzielić* 0,5437 *przez* 28.

$$\text{log. } 0{,}5437 = 9{,}735359 - 10$$
$$\text{log. } 28 = 1{,}447158$$
$$\text{log. } \textit{ilorazu} = 8{,}288201 - 10 = \text{log. } 0{,}0194178.$$

6. *Podzielić* 28 *przez* 0,5437.

$$\text{log. } \textit{ilorazu} = \text{log. } 28 - \text{log. } 0{,}5437$$
$$= 1{,}447158 - (9{,}735359 - 10)$$
$$= 1{,}447158 + 10 - 9{,}735359 = 1{,}711799$$

Iloraz przeto żądany, jako liczba temu logarytmowi odpowiednia, będzie 5,14990.

7. *Podzielić* 0,345 *przez* 0,4567.

$$x = \frac{0{,}345}{0{,}4567} = \frac{3450}{4567}$$

$$\text{log. } x = \text{log. } 3450 + \text{dop. log. } 4567 - 10$$
$$= 3{,}537819 + 6{,}340369 - 10$$
$$= 9{,}878188 - 10 = \text{log. } 0{,}75542$$

132. *Zastosowanie logarytmów do działań, w których mnożenie i dzielenie są razem połączone.*

1. *Znaleźć iloczyn ułomków* $^{31}/_{75}$, $^{13}/_{12}$ i $^{47}/_{48}$.

$$\text{log. } 31 = 1{,}491362$$
$$\text{log. } 13 = 1{,}113943$$
$$\text{log. } 47 = 1{,}672098$$
$$\text{dop. log. } 75 = 8{,}124939$$
$$\text{dop. log. } 12 = 8{,}920819$$
$$\text{dop. log. } 48 = 8{,}318759$$
$$\text{log. } \textit{iloczynu} = 29{,}641920 - 30 = 9{,}641920 - 10$$

Z przyczyny 3 dopełnień wchodzących do dodawania, tyleż dziesiątek, czyli 30 od summy wynikłej odjąć było potrzeba. Liczba odpowiednia logarytmowi stąd powstałemu jest 0,438449.

2. *Znaleźć za pomocą logarytmów czwarty wyraz proporcyi.*

$$\frac{73}{99}:\frac{123}{235}=\frac{23}{27}:x$$

$$x=\frac{123\times23}{235\times27}\times\frac{99}{73}$$

$$\begin{array}{rl}
\log.\ 123= & 2,089905 \\
\log.\ 23= & 1,361728 \\
\log.\ 99= & 1,995635 \\
\text{dop.}\log.\ 235= & 7,628932 \\
\text{dop.}\log.\ 27= & 8,568636 \\
\text{dop.}\log.\ 73= & 8,136677 \\
\hline
 & 29,781513-30=9,781513-10.
\end{array}$$

Wypadek żądany, jako liczba temu logarytmowi odpowiednia, jest 0,604662.

3. *Znaleźć czwarty wyraz proporcyi.*

$$0,0963:0,24958=0,008967:x$$

Dla ułatwienia w samem zastosowaniu logarytmów, dwa pierwsze wyrazy proporcyi zamieniamy na całkowite, mnożąc przez 100000, stąd

$$9630:24958=0,008967:x$$

$$\log.\ x=\log.\ 24958+\log.\ 0,008967+\text{dop.}\log.\ 9630-10$$

$$\begin{array}{rl}
\log.\ 24958 = & 4,397210 \\
\log.\ 0,008967= & 7,952647-10 \\
\text{dop.}\log.\ 9630 = & 6,016374 \\
\hline
 & 18,366231-10-10 \\
 & =18,366231-20=8,366231-10
\end{array}$$

Wypadek więc żądany, jako liczba odpowiednia temu logarytmowi jest 0,0202397.

133. *Zastosowanie logarytmów do podnoszenia do potęg.* Logarytmy przy podnoszeniu do potęg liczb całkowitych, mniej są pomocne, gdyż liczba cyfer przez nie znalezionych jest zawsze dość ograniczona. Czasem jednak mając tak znalezione pierwsze cyfry wypadku, łatwiéj jest pozostałe przez mnożenie uzupełnić.

1. *Znaleźć 25tą potęgę liczby* 2.

log. 2=0,301030, stąd 25 log. 2=7,525750

zatem 2^{25}=33554400

Aby ostatnie dwie cyfry wynaleźć, które tu jako niewiadome przez zera są zastąpione podnosimy 2 do 25*tej* potęgi zwyczajnym sposobem ograniczając się tylko na wyszukaniu 3 ostatnich cyfer.

2^8=256	2^{16} 536
256	2^8, 256
536	216
80	80
2	2
2^{16}, 536	2^{24}, 216

Stąd ostatnie 3 cyfry 2^{25} są 432; zatem 2^{25}=33554432.

2. *Znaleźć ósmą potęgę liczby* 12.

log. 12=1,079181, stąd 8 log. 12=8,633448

zatem 12^8=429980000

Aby ostatnie cyfry dokładne wynaleźć, podnosimy 12 do 8éj potęgi, ograniczając się na 4 ostatnich cyfrach.

12^2 = 144	12^4, 0736
144	0736
576	4416
576	208
44	52
12^4, 0736	12^8, 1696

stąd 12^8=429981696.

3. *Znaleźć 5tą potęgę liczby* 2,3

log. 2,3=0,361728, stąd 5 log. 2,3=1,808640

przeto $2{,}3^5$=64,3635 z przybliżeniem na 0,0001 prawie.

4. *Znaleźć 9tą potęgę ułomku dziesiętnego* 0,458.

log. 0,458=9.660865—10

9 log. 0,458=9(9,660865—10)=86,947785—90

=6,947785—10.

Liczba odpowiednia temu logarytmowi jest 0,000886716.

5. *Podnieść do 11téj potęgi ułomek* $^3/_5$.

$$\log. 3 = 0,477121$$
$$\text{dop. log. } 5 = 9,301030$$
$$\log. {}^3/_5 = 9,778151-10$$
$$11 \log. {}^3/_5 = 11(9,778151-10) = 107,559661-110$$
$$= 7,559661-10 = \log. 0,003628$$

6. *Znaleźć wartość* $\left(\frac{643}{637}\right)^{21}$

$$\log. 643 = 2,808211$$
$$\log. 637 = 2,804139$$
$$\log. \textit{ilorazu} = 0,004072$$
$$\text{stąd } 21 \log. \frac{643}{637} = 0,085512 = \log. 1,21762$$

Wartością przeto żądaną jest 1,21762

134. *Zastosowanie logarytmów do wyciągania pierwiastków.*

Gdy przy pomocy naszych tablic logarytmowych znaleźć można dokładnie 6 pierwszych cyfer każdej liczby, któréj logarytm jest podany, stąd jakkolwiek wielka jest potęga liczby, niewięcéj jak 6 cyfer obejmującej, zawsze jej pierwiastek łatwo będzie otrzymać.

1. *Znaleźć wartość* $\sqrt[3]{185193}$

Ponieważ log. 185193=5,267624, stąd

$$\log. \sqrt[3]{185193} = \frac{\log. 185193}{3} = 1,755875$$

Temu logarytmowi dokładnie odpowiada liczba 57, przeto

$$\sqrt[3]{185193} = 57.$$

2. *Znaleźć* $\sqrt[3]{683797841}$.

Gdy log. 683797841=8,834928, stąd

$$\log \sqrt[3]{683797841} = \frac{8,834928}{3} = 2,944976$$

Pierwiastkiem przeto sześciennym żądanym jest 881, czyli liczba odpowiednia ostatniemu logarytmowi.

3. *Wynaleźć* $\sqrt[5]{1048576}$.

log. 1048576=6,020600

$\frac{1}{5}$ log. 1048576=1,204120=log. 16

4. *Znaleźć* $\sqrt[7]{10460353203}$.

log. 10460353203=10,019547

$\frac{1}{7}$ log. 1046035323=1,431364=log. 27.

Stąd żądany pierwiastek=27.

5. *Znaleźc* $\sqrt[3]{7,625597}$.

log. 7,625597=0,882273

$\frac{1}{3}$ tego log. =0,294091=log. 1.96830

6. *Znaleźć* $\sqrt[3]{0,5}$. Log. 0,5=9,698970—10.

$$\text{log. } \sqrt[3]{0,5} = \frac{\text{log. } 0,5}{3} = \frac{9,698970-10}{3}$$

Aby w wypadku dzielenia mieć zawsze 10, nie zaś inną liczbę do odjęcia, przed podzieleniem logarytmu przez wykładnik pierwiastku, dodajemy do dwóch liczb go składających, po tyle dziesiątków, ile jedności wykładnik zawiera, mniej jedną. Stąd

log. 0,5=29,698970—30

$$\frac{\text{log. } 0,5}{3} = 9,899656-10 = \text{log. } 0,79370$$

zatem $\sqrt[3]{0,5}=0,79370$.

7. *Wynaleźć* $\sqrt{0,1}$. Log. $\sqrt{0,1} = \frac{\text{log. } 0,1}{2}$

log. 0,1=9,000000—10=19,000000—20

$$\frac{\text{log. } 0,1}{2} = 9,50000-10$$

stąd $\sqrt{0,1}=0,316228$.

8. *Wynaleźć średnią geometrycznie proporcyonalną pomiędzy* 13,15 *i* 34,26.

Gdy ∺ 13,15 : x : 34,26, stąd $x=\sqrt{13,15\times34,26}$

log. $x=\frac{1}{2}$ (log. 13,15+log. 34,26).

log. 13,15=1,118926

log. 34,26=1,534787

log. *iloczynu* 2,653703

$\frac{1}{2}$ tego log.=1,326851=log. 21,2251

Żądaną więc średnią proporcyonalną jest 21,22, czyli że

$$\div\div 13,15:21,22:34,26.$$

9. *Wynaleźć wartość* $\sqrt[5]{13/16}$

$$\log.\sqrt[5]{13/16}=\tfrac{1}{5}(\log.13+\text{dop. log. }16-10)$$

$$\log.13=1,113943$$

$$\text{dop. log. }16=8,795880$$

$$\log.\,13/16=9,909823-10=49,909823-50$$

$$\tfrac{1}{5}\log.\,13/16=9,981965-10=\log.\,0,959324$$

10. *Wynaleźć* $\sqrt[20]{1/99}$.

$$\log.1=0,000000=10,000000-10$$

$$\log.99=1,995635$$

$$\log.\,1/99=8,004365-10$$

$$\tfrac{1}{20}\log.\,1/99=\tfrac{1}{20}(8,004365-10)=\tfrac{1}{20}(198,004365-200)$$

$$=9,900218-10=\log.\,0,79472$$

Podobnież byśmy znaleźli, że

$\sqrt[7]{8}=1,34590$	$\sqrt[7]{1171/345}=1,19075$
$\sqrt[4]{35246}=13,7018$	$\sqrt[11]{13/27}=0,935715.$
$\sqrt[12]{567348}=3,01639$	$\sqrt[7]{235/1643}=0,757438$
$\sqrt[6]{235,78}=2,48552$	

135. *Zastosowanie logarytmów do przykładów, w których wszystkie poprzednie działania są połączone.*

1. *Znaleźć wartość* $\sqrt[5]{(7/3\sqrt[4]{6})}$.

$$\log.\sqrt[5]{(7/3\sqrt[4]{6})}=\tfrac{1}{5}(\log.7+\text{dop. log. }3-10+\tfrac{1}{4}\log.6)$$

$$\log.7=0,845098$$

$$\text{dop. log. }3=9,522879$$

$$\tfrac{1}{4}\log.6=\tfrac{1}{4}\times0,778151=0,194538$$

$$\log.\ \textit{żądany}=10,562515-10$$

$$=0,562515=\log.\,1,29569.$$

2. *Znaleźć wartość* $\sqrt[8]{(21+\sqrt[6]{19})}$

Dodawanie i odciąganie liczb, za pomocą logarytmów zwyczajnych dokonane być nie mogą; dokonane bowiem, odpowiadałyby mnożeniu i dzieleniu na samychże liczbach. Podług tego, największy byłby błąd, gdybyśmy wzieli

$$\log. \sqrt[8]{(21+\sqrt[6]{19})} = \tfrac{1}{8}\log(21+\log.\sqrt[6]{19})$$

gdyż to właśnie jest wartością $\sqrt[8]{(21.\sqrt[6]{19})}$.

Działanie żądane następnie odbyć potrzeba.

$$\log. \sqrt[8]{(21+\sqrt[6]{19})} = \tfrac{1}{8} \log.(21 + \sqrt[6]{19})$$

Dla otrzymania przeto wypadku, potrzeba za pomocą logarytmów znaleźć wartość $\sqrt[6]{19}$, przydać ją do 21 i zsummy tak powstałéj wyciągnąć przez logarytmy pierwiastek 8éj potęgi.

Gdy log 19=1, 278754, stąd

$$\log. \sqrt[6]{19} = \tfrac{1}{6} \log. 19 = 0{,}213126$$

$$\text{przeto } \sqrt[6]{19} = 1{,}63352$$

$$21 + \sqrt[6]{19} = 22{,}63352$$

$$\log.(21+\sqrt[6]{19}) = \log. 22{,}63352 = 1{,}354752$$

$$\tfrac{1}{8} \log.(21+\sqrt[6]{19}) = 0{,}169344.$$

Wypadek przeto żądany jako liczba temu logarytmowi odpowiednia jest 1,47687.

Podobnym sposobem jak w tym przykładzie, znaleźć można następne wypadki.

$$\sqrt[3]{(5{,}03+\sqrt[5]{0{,}2})} = 1{,}79202.$$

$$\sqrt[5]{(9{,}921-3\sqrt{5{,}02})} = 1{,}26187.$$

$$\sqrt[16]{\frac{43+5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}} = 1{,}26495.$$

3. *Znaleźć wartość* $\frac{\sqrt[7]{466871^6}.\sqrt[9]{3576^{16}}}{996003.\sqrt{0,0071}}$

$$\log. 466871 = 5,669197 \qquad \log. 3576 = 3,553398$$
$$6 \log 466871 = 34,015182 \qquad 16 \log. 3576 = 56,854368$$
$$\frac{6 \log. 466871}{7} = 4,859312 \qquad \frac{16 \log. 3576}{9} = 6317152$$
$$\frac{16 \log. 3576}{9} = \underline{6,317152}$$
$$11,176464 = \log. \sqrt[7]{466871^6}.\sqrt[9]{3576^{16}}$$
$$\log. 0,0071 = 7,851258-10 = 17,851258-20$$

stąd $\log. \sqrt{0,0071} = 8,925629-10$
$\log. \quad 996003 = \underline{5,998262}$

$\log. (996003.\sqrt{0,0071} = 14,923891-10 = 4,923891$

Że zaś $\log. \sqrt[7]{466871^6}.\sqrt[9]{3576^{16}} = \underline{11,176464}$

stąd $\log. \frac{\sqrt[7]{466871^6}.\sqrt[9]{3576^{16}}}{996003.\sqrt{0,0071}} = 6,252573.$

Wypadek przeto żądany, jako liczba temu logarytmowi odpowiednia, jest 178850.

W podobnym sposobie znaleźlibyśmy, że

$1^0.\ 253\sqrt[3]{\frac{7165}{\sqrt{2}}} = 2106,91.$ $\quad 2^0\ \sqrt[4]{\frac{132.7,356^9}{\sqrt{3,25}}} = 144,597$

$3^0.\ \sqrt[3]{(0,26\sqrt{2/3})} = 0,596544.$ $\quad 4^0.\ \sqrt[5]{\frac{3425.\sqrt[7]{136}}{0,00034}} = 28,9464$

$5^0.\ \left(\frac{42666}{1147}\right)^{12}\left(\frac{765}{19432}\right)^{10} = 62756,9$

$6^0.\ \frac{991,767^5 \times 12,34}{(20,358 \times 10,1575)^6} = 151,437$

$7^0.\ \frac{52072^{13}.\sqrt{0,000734^9}}{255608^8} = 8930,83.$

136. *Zastosowanie logarytmów do postępów ilorazowych.* Wzory wynalezione do oznaczenia już jakiegokolwiek wyrazu w postępie ilorazowym; już summy, już iloczynu pewnej liczby tych wyrazów, użyte przy zwyczajnym rachunku, czynią robotę

zbyt długą i trudną. Wzór zaś służący do otrzymania wykładnika, a tem samem do umieszczenia pewnej liczby średnich geometrycznie proporcyonalnych, pomiędzy dwiema liczbami danemi, w podobnym sposobie niemoże być rozwiązanym. Przeciwnie każdy z tych rachunków staje się łatwym przy pomocy logarytmów; wzory tylko powyższe za użyciem tych logarytmów następnej podlegną zmianie. I tak

1 Wzór na oznaczenie jakiegobądź wyrazu w postępie ilorazowym,

$l=aq^{n-1}$ zamieni się na

$\log. l=\log. a+(n-1)\log. q$

2° Wzór na wynalezienie wykładnika w postępie

$q=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$ zamieni się na

$$\log. q=\frac{\log. l+\text{dop.} \log. a-10}{m+1}$$

3. Wzór na iloczyn $P=\sqrt{(al)^n}$, zamieni się na

$$\log. P=\frac{n(\log. a+\log. l)}{2}$$

4. Wzór na summę wyrazów $S=\frac{lq-a}{q-1}$ zamieni się na

$\log. S=\log. (lq-a)+\text{dop.} \log. (q-1)-10$

Jeżeli zaś wzięty będzie wzór drugi na summę wyrazów,

$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ wówczas

$\log. S=\log. a+\log. (q^n-1)+\text{dop.} \log. (q-1)-10$

Dla obrachowania $\log. (q^n-1)$, znajdziemy naprzód wartość $\log. q^n=n \log. q$, wyszukamy liczby jemu odpowiedniej, i po odjęciu od niej jedności, dopiero weźmiemy logarytm.

Przykłady. 1°. *Przypuszczając że ziarno przenicy zasiane wydało w kłosie* 30 *ziarn; że każde z tych ziarn na nowo posiane wydało także po* 30 *ziarn w* 2*gim roku, podobnież w trzecim i t. d., jakiż był zbiór otrzymany w ciągu* 10*go roku.*

Idzie tu o wynalezienie 10go wyrazu w postępie

$$1 : 30 : 30^2 : 30^3 \ldots\ldots 30^9.$$

Gdy $\log. l = \log. a + (n-1) \log. q$

stąd $\log. 30^9 = \log. 1 + 9 \log. 30 = 9 \log. 30$

$$= 9 \times 1.477121 = 13,294089.$$

Część dziesiętna logarytmu tak wypadłego odpowiada liczbie 19683, stąd 13,294089 będzie logarytmem liczby 19683 wziętej z dopisanemi dziewięciu jeszcze zerami, a która oznaczy zbiór ziarn w 10tym roku wydanych.

Ponieważ na objętość centymetru sześciennego 25 ziarn średniej wielkości rachować można, stąd na litr, czyli kwartę obejmującą 1000 takich centymetrów, wypadnie 25000 ziarn; na hektolitr zatem czyli na 100 kwart, ziarn 2500000. Przypuszczając zaś że hektar gruntu (nieco większy od 2 morgów), wydaje 20 hektolitrów, czyli 50 miljonów ziarn, potrzebaby przeto do 400000 hektarów, czyli przeszło 800000 morgów, aby w jednym zbiorze powyższa ilość zboża była wydaną.

2°. *Pewnemu Monarsze Indyjskiemu Matematyk Sessa przedstawił grę w szachy przez siebie wynalezioną. Monarcha tak był nią zadowolony, iż przyrzekł mu przyznać nagrodę chociażby największą. Ten ograniczył się tylko na żądaniu 1 ziarna zboża za pierwsze pole jego szachownicy, 2 ziarn za drugie, 4 za 3cie i tak następnie aż do ostatniego czyli 64go. Monarcha prawie urażony nagrodą, która mu zdawała się być małą, kazał Wezyrowi natychmiast ją zaspokoić. Lecz jakież było jego zdziwienie, gdy rachunek okazał, że do zaspokojenia zboże na całej kuli ziemskiej nie jest dostateczne. Musiał przeto wyznać że nie jest dosyć bogatym, dziwiąc się już więcéj subtelności zadania, niż samymże szachom.*

Idzie tu o wynalezienie summy 64 wyrazów postępu,

$$1 : 2 : 2^2 : 2^3 : \ldots\ldots 2^{63}$$

Gdy $\log. S = \log. (lq - a) + \text{dop. } \log. (q-1) - 10$

stąd $\log. S = \log. (2.2^{63} - 1) + \text{dop. } \log. (2-1) - 10$

$$= \log. (2^{64} - 1) + 10 - 10 = \log. (2^{64} - 1)$$

Że zaś $\log. 2 = 0,301030$, stąd

$\log. 2^{64} = 64 \log. 2 = 19,265920$

$$19{,}265920 = \log.\ 18446700000000000000.$$

Chociaż w wypadku 6 pierwszych tylko cyfer jest dokładnych, przybliżenie to jednak jest dostateczne przy tak ogromnej liczbie, której zawsze wielkość ocenioną być może. Liczba ta oznacza ilość ziarn żądanych za szachy. Że zaś podług poprzedniego przypuszczenia uważa się, iż hektar gruntu 50 milionów ziarn średnio wydać może, stąd myryametr kwadratowy, czyli 1000 hektarów wydadzą 50 miliardów ziarn. Liczba ta rozmnożona przez 5092960, czyli przez liczbę myryametrów, jaką liczą na całą powierzchnię ziemi, tworzy iloczyn jeszcze mieszczący się 7 razy, w liczbie ziarn żądanej za szachy, czyli w wartości 2^{64}. Potrzebaby zatem 7 zbiorów zboża na całej powierzchni ziemi, niewyłączając nawet jej miejsc przez wody zapełnionych, aby utworzyć ilość zboża żądaną.

3° *Umieścić pomiędzy 7 i 100 cztery średnie geometrycznie proporcyonalne.*

Szukajmy naprzód wykładnika w postępie, mającym za pierwszy wyraz 7, za ostatni 100, podług wzoru

$$\log.\ q = \frac{\log.\ l + \text{dop.}\log.\ a - 10}{m+1}$$

$$= \frac{\log.\ 100 + \text{dop.}\log.\ 7 - 10}{5}$$

$$\begin{aligned} \log.\ 100 &= 2{,}000000 \\ \text{dop.}\log.\ 7 &= 9{,}154902 \\ \hline &\ 11{,}154902 - 10 = 1{,}154902 \end{aligned}$$

$$\frac{1{,}154902}{5} = 0{,}230980 = \log.\ 1{,}702.$$

Wykładnik przeto szukany jest 1,702; mnożąc ten wykładnik przez 7, czyli przez pierwszy wyraz dany, otrzymamy drugi; mnożąc przez 2gi otrzymamy 3ci i t. d. Logarytmy wtym razie mogą jeszcze być na pomocy; i tak:

log. 1ej średniej = log. 1go wyr. + log. q = 1,076078 = log. 11,91
log. 2ej „ = log. 2go „ + log. q = 1,307058 = log. 20,28
log. 3ej „ = log. 3go „ + log. q = 1,538038 = log. 34,51
log. 4ej „ = log. 4go „ + log. q = 1,769018 = log. 58,75

Postęp przeto żądany będzie następny

$$\div\div 7 : 11,91 : 20,28 : 34,51 : 58,75 : 100$$

4°. *Wyszukać iloczyn* 6 *pierwszych wyrazów postępu ilorazowego,*

$$\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64.$$

Gdy $P = \sqrt{2.64^6} = \sqrt{128^6}$, stąd

$$\log. \sqrt{128^6} = \frac{6 \log. 128}{2}$$

$$\log. 128 = 2,107210$$

$$6 \log. 128 = 12,643260$$

$$\frac{6 \log. 128}{2} = 6,321630$$

Wypadek przeto żądany, jako liczba odpowiednia logarytmowi 6,321630, jest 2097150, zupełnie dokładny, co do wszystkich cyfer oprócz jedności; otrzymany bowiem przez mnożenie jest 2097152.

Podobnież byśmy znaleźli, że iloczynem wszystkich wyrazów w postępie (81)

$$1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243$$

jest 14348907, liczba któréj tylko 6 pierwszych cyfer przy pomocy tablic tu podanych, otrzymać można.

TABLICA LOGARYTMOWA LICZB

OD 1 DO 10000.

LOGARYTMY LICZB

od 1 do 10000.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	0·000000	26	1·414973	51	1·707570	76	1·880814
2	0·301030	27	1·431364	52	1·716003	77	1·886491
3	0·477121	28	1·447158	53	1·724276	78	1·892095
4	0·602060	29	1·462398	54	1·732394	79	1·897627
5	0·698970	30	1·477121	55	1·740363	80	1·903090
6	0·778151	31	1·491362	56	1·748188	81	1·908485
7	0·845098	32	1·505150	57	1·755875	82	1·913814
8	0·903090	33	1·518514	58	1·763428	83	1·919078
9	0·954243	34	1·531479	59	1·770852	84	1·924279
10	1·000000	35	1·544068	60	1·778151	85	1·929419
11	1·041393	36	1·556303	61	1·785330	86	1·934498
12	1·079181	37	1·568202	62	1·792392	87	1·939519
13	1·113943	38	1·579784	63	1·799341	88	1·944483
14	1·146128	39	1·591065	64	1·806180	89	1·949390
15	1·176091	40	1·602060	65	1·812913	90	1·954243
16	1·204120	41	1·612784	66	1·819544	91	1·959041
17	1 230449	42	1·623249	67	1·826075	92	1·963788
18	1·255273	43	1·633468	68	1·832509	93	1·968483
19	1·278754	44	1·643453	69	1·838849	94	1·973128
20	1.301030	45	1·653213	70	1·845098	95	1·977724
21	1·322219	46	1·662758	71	1·851258	96	1·982271
22	1.342423	47	1·672098	72	1·857332	97	1·986772
23	1·361728	48	1·681241	73	1·863323	98	1·991226
24	1.380211	49	1 690196	74	1·869232	99	1·995635
25	1·397940	50	1·698970	75	1·875061	100	2·000000

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	000000	0434	0868	1301	1734	2166	2598	3029	3461	3891
101	4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174
102	8600	9026	9451	9876	.300	.724	1147	1570	1993	2415
103	012837	3259	3680	4100	4521	4940	5360	5779	6197	6616
104	7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947	.361	.775
105	021189	1603	2016	2428	2841	3252	3664	4075	4486	4896
106	5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8164	8571	8978
107	9384	9789	.195	.600	1004	1408	1812	2216	2619	3021
108	033424	3826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028
109	7426	7825	8223	8620	9017	9414	9811	.207	.602	.998
110	041393	1787	2182	2576	2969	3362	3755	4148	4540	4932
111	5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8830
112	9218	9606	9993	.380	.766	1153	1538	1924	2309	2694
113	053078	3463	3846	4230	4613	4996	5378	5760	6142	6524
114	6905	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	.320
115	060698	1075	1452	1829	2206	2582	2958	3333	3709	4083
116	4458	4832	5206	5580	5953	6326	6699	7071	7443	7815
117	8186	8557	8928	9298	9668	..38	.407	.776	1145	1514
118	071882	2250	2617	2985	3352	3718	4085	4451	4816	5182
119	5547	5912	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819
120	9181	9543	9904	.266	.626	.987	1347	1707	2067	2426
121	082785	3144	3503	3861	4219	4576	4934	5291	5647	6004
122	6360	6716	7071	7426	7781	8136	8490	8845	9198	9552
123	9905	.258	.611	.963	1315	1667	2018	2370	2721	3071
124	093422	3772	4122	4471	4820	5169	5518	5866	6215	6562
125	6910	7257	7604	7951	8298	8644	8990	9335	9681	.026
126	100371	0715	1059	1403	1747	2091	2434	2777	3119	3462
127	3804	4146	4487	4828	5169	5510	5851	6191	6531	6871
128	7210	7549	7888	8227	8565	8903	9241	9579	9916	.253
129	110590	0926	1263	1599	1934	2270	2605	2940	3275	3609
130	3943	4277	46'1	4944	5278	5611	5943	6276	6608	6940
131	7271	7603	7934	8265	8595	8926	9256	9586	9915	.245
132	120574	0903	1231	1560	1888	2216	2544	2871	3198	3525
133	3852	4178	4504	4830	5156	5481	5806	6131	6456	6781
134	7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	..12
135	130334	0655	0977	1298	1619	1939	2260	2580	2900	3219
136	3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5769	6086	6403
137	6721	7037	7354	7671	7987	8303	8618	8934	9249	9564
138	9879	.194	.508	.822	1136	1450	1763	2076	2389	2702
139	143015	3327	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818
140	6128	6438	6748	7058	7367	7676	7985	8294	8603	8911
141	9219	9527	9835	.142	.449	.756	1063	1370	1676	1982
142	152288	2594	2900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032
143	5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7759	8061
144	8362	8664	8965	9266	9567	9868	.168	.469	.769	1068
145	161368	1667	1967	2266	2564	2863	3161	3460	3758	4055
146	4353	4650	4947	5244	5541	5838	6134	6430	6726	7022
147	7317	7613	7908	8203	8497	8792	9086	9380	9674	9968
148	170262	0555	0848	1141	1434	1726	2019	2311	2603	2895
149	3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	176091	6381	6670	6959	7248	7536	7825	8113	8401	8689
151	8977	9264	9552	9839	•126	•413	•699	•986	1272	1558
152	181844	2129	2415	2700	2985	3270	3555	3839	4123	4407
153	4691	4975	5259	5542	5825	6108	6391	6674	6956	7239
154	7521	7803	8084	8366	8647	8928	9209	9490	9771	••51
155	190332	0612	0892	1171	1451	1730	2010	2289	2567	2846
156	3125	3403	3681	3959	4237	4514	4792	5069	5346	5623
157	5900	6176	6453	6729	7005	7281	7556	7832	8107	8382
158	8657	8932	9206	9481	9755	••29	•303	•577	•850	1124
159	201397	1670	1943	2216	2488	2761	3033	3305	3577	3848
160	4120	4391	4663	4934	5204	5475	5746	6016	6286	6556
161	6826	7096	7365	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247
162	9515	9783	••51	•319	•586	•853	1121	1388	1654	1921
163	212188	2454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579
164	4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221
165	7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846
166	220108	0370	0631	0892	1153	1414	1675	1936	2196	2456
167	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051
168	5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630
169	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	•193
170	230449	0704	0960	1215	1470	1724	1979	2234	2488	2742
171	2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276
172	5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795
173	8046	8297	8548	8799	9049	9299	9550	9800	••50	•300
174	240549	0799	1048	1297	1546	1795	2044	2293	2541	2790
175	3038	3286	3534	3782	4030	4277	4525	4772	5019	5266
176	5513	5759	6006	6252	6499	6745	6991	7237	7482	7728
177	7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932	•176
178	250420	0664	0908	1151	1395	1638	1881	2125	2368	2610
179	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031
180	5273	5514	5755	5996	6237	6477	6718	6958	7198	7439
181	7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833
182	260071	0310	0548	0787	1025	1263	1501	1739	1976	2214
183	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4346	4582
184	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937
185	7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279
186	9513	9746	9980	•213	•446	•679	•912	1144	1377	1609
187	271842	2074	2306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927
188	4158	4389	4620	4850	5081	5311	5542	5772	6002	6232
189	6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525
190	8754	8982	9211	9439	9667	9895	•123	•351	•578	•806
191	281033	1261	1488	1715	1942	2169	2396	2622	2849	3075
192	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332
193	5557	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578
194	7802	8026	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9812
195	290035	0257	0480	0702	0925	1147	1369	1591	1813	2034
196	2256	2478	2699	2920	3141	3363	3584	3804	4025	4246
197	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446
198	6665	6884	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8635
199	8853	9071	9289	9507	9725	9943	•161	•378	•595	•813

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	301030	1247	1464	1681	1898	2114	2331	2547	2764	2980
201	3196	3412	3628	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136
202	5351	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7282
203	7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417
204	9630	9843	..56	.268	.481	.693	.906	1118	1330	1542
205	311754	1966	2177	2389	2600	2812	3023	3234	3445	3656
206	3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5551	5760
207	5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7646	7854
208	8063	8272	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938
209	320146	0354	0562	0769	0977	1184	1391	1598	1805	2012
210	2219	2426	2633	2839	3046	3252	3458	3665	3871	4077
211	4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131
212	6336	6541	6745	6950	7155	7359	7563	7767	7972	8176
213	8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805	...8	.211
214	330414	0617	0819	1022	1225	1427	1630	1832	2034	2236
215	2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253
216	4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	6059	6260
217	6460	6660	6860	7060	7260	7459	7659	7858	8058	8257
218	8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849	..47	.246
219	340444	0642	0841	1039	1237	1435	1632	1830	2028	2225
220	2423	2620	2817	3014	3212	3409	3606	3802	3999	4196
221	4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5962	6157
222	6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110
223	8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860	..54
224	350248	0442	0636	0829	1023	1216	1410	1603	1796	1989
225	2183	2375	2568	2761	2954	3147	3339	3532	3724	3916
226	4108	4301	4493	4685	4876	5068	5260	5452	5643	5834
227	6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744
228	7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646
229	9835	..25	.215	.404	.593	.783	.972	1161	1350	1539
230	361728	1917	2105	2294	2482	2671	2859	3048	3236	3424
231	3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301
232	5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169
233	7356	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030
234	9216	9401	9587	9772	9958	.143	.328	.513	.698	.883
235	371068	1253	1437	1622	1806	1991	2175	2360	2544	2728
236	2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565
237	4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6212	6394
238	6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216
239	8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849	..30
240	380211	0392	0573	0754	0934	1115	1296	1476	1656	1837
241	2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636
242	3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5428
243	5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6856	7034	7212
244	7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989
245	9166	9343	9520	9698	9875	..51	.228	.405	.582	.759
246	390935	1112	1288	1464	1641	1817	1993	2169	2345	2521
247	2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4277
248	4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025
249	6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	397940	8114	8287	8461	8634	8808	8981	9154	9328	9501
251	9674	9847	..20	.192	.365	.538	.711	.883	1056	1228
252	401401	1573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949
253	3121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663
254	4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370
255	6540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7901	8070
256	8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764
257	9933	.102	.271	.440	.609	.777	.946	1114	1283	1451
258	411620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132
259	3300	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806
260	4973	5140	5307	5474	5641	5808	5974	6141	6308	6474
261	6641	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135
262	8301	8467	8633	8798	8964	9129	9295	9460	9625	9791
263	9956	.121	.286	.451	.616	.781	.945	1110	1275	1439
264	421604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082
265	3246	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718
266	4882	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349
267	6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973
268	8135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591
269	9752	9914	..75	.236	.398	.559	.720	.881	1042	1203
270	431364	1525	1685	1846	2007	2167	2328	2488	2649	2809
271	2969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409
272	4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004
273	6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592
274	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175
275	9333	9491	9648	9806	9964	.122	.279	.437	.594	.752
276	440909	1066	1224	1381	1538	1695	1852	2009	2166	2323
277	2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889
278	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449
279	5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003
280	7158	7313	7468	7623	7778	7933	8088	8242	8397	8552
281	8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941	..95
282	450249	0403	0557	0711	0865	1018	1172	1326	1479	1633
283	1786	1940	2093	2247	2400	2553	2706	2859	3012	3165
284	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	4692
285	4845	4997	5150	5302	5454	5606	5758	5910	6062	6214
286	6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7731
287	7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242
288	9392	9543	9694	9845	9995	.146	.296	.447	.597	.748
289	460898	1048	1198	1348	1499	1649	1799	1948	2098	2248
290	2398	2548	2697	2847	2997	3146	3296	3445	3594	3744
291	3893	4042	4191	4340	4490	4639	4788	4936	5085	5234
292	5383	5532	5680	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719
293	6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200
294	8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675
295	9822	9969	.116	.263	.410	.557	.704	.851	.998	1145
296	471292	1438	1585	1732	1878	2025	2171	2318	2464	2610
297	2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4071
298	4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526
299	5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	477121	7266	7411	7555	7700	7844	7989	8133	8278	8422
301	8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863
302	480007	0151	0294	0438	0582	0725	0869	1012	1156	1299
303	1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731
304	2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157
305	4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579
306	5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997
307	7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410
308	8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818
309	9958	..99	.239	.380	.520	.661	.801	.941	1081	1222
310	491362	1502	1642	1782	1922	2062	2201	2341	2481	2621
311	2760	2900	3040	3179	3319	3458	3597	3737	3876	4015
312	4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406
313	5544	5683	5822	5960	6099	6238	6376	6515	6653	6791
314	6930	7068	7206	7344	7483	7621	7759	7897	8035	8173
315	8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550
316	9687	9824	9962	..99	.236	.374	.511	.648	.785	.922
317	501059	1196	1333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2291
318	2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3655
319	3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014
320	5150	5286	5421	5557	5693	5828	5964	6099	6234	6370
321	6505	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721
322	7856	7991	8126	8260	8395	8530	8664	8799	8934	9068
323	9293	9337	9471	9606	9740	9874	...9	.143	.277	.411
324	510545	0679	0813	0947	1081	1215	1349	1482	1616	1750
325	1883	2017	2151	2284	2418	2551	2684	2818	2951	3084
326	3218	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4415
327	4548	4681	4813	4946	5079	5211	5344	5476	5609	5741
328	5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064
329	7196	7328	7460	7592	7724	7855	7987	8119	8251	8382
330	8514	8646	8777	8909	9040	9171	9303	9434	9566	9697
331	9828	9959	..90	.221	.353	.484	.615	.745	.876	1007
332	521138	1269	1400	1530	1661	1792	1922	2053	2183	2314
333	2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616
334	3746	3876	4006	4136	4266	4396	4526	4656	4785	4915
335	5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210
336	6339	6469	6598	6727	6856	6985	7114	7243	7372	7501
337	7630	7759	7888	8016	8145	8274	8402	8531	8660	8788
338	8917	9045	9174	9302	9430	9559	9687	9815	9943	..72
339	530200	0328	0456	0584	0712	0840	0968	1096	1223	1351
340	1479	1607	1734	1862	1990	2117	2245	2372	2500	2627
341	2754	2882	3009	3136	3264	3391	3518	3645	3772	3899
342	4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167
343	5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6180	6306	6432
344	6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693
345	7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951
346	9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954	..79	.204
347	540329	0455	0580	0705	0830	0955	1080	1205	1330	1454
348	1579	1704	1829	1953	2078	2203	2327	2452	2576	2701
349	2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	544068	4192	4316	4440	4564	4688	4812	4936	5060	5183
351	5307	5431	5555	5678	5802	5925	6049	6172	6296	6419
352	6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652
353	7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8635	8758	8881
354	9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984	.106
355	550228	0351	0473	0595	0717	0840	0962	1084	1206	1328
356	1450	1572	1694	1816	1938	2060	2181	2303	2425	2547
357	2668	2790	2911	3033	3155	3276	3398	3519	3640	3762
358	3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973
359	5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6182
360	6303	6423	6544	6664	6785	6905	7026	7146	7267	7387
361	7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8349	8469	8589
362	8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787
363	9907	..26	.146	.265	.385	.504	.624	.743	.863	.982
364	561101	1221	1340	1459	1578	1698	1817	1936	2055	2174
365	2293	2412	2531	2650	2769	2887	3006	3125	3244	3362
366	3481	3600	3718	3837	3955	4074	4192	4311	4429	4548
367	4666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730
368	5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909
369	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084
370	8202	8319	8436	8554	8671	8788	8905	9023	9140	9257
371	9374	9491	9608	9725	9842	9959	..76	.193	.309	.426
372	570543	0660	0776	0893	1010	1126	1243	1359	1476	1592
373	1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755
374	2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915
375	4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072
376	5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226
377	6341	6457	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377
378	7492	7607	7722	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8525
379	8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669
380	9784	9898	..12	.126	.241	.355	.469	.583	.697	.811
381	580925	1039	1153	1267	1381	1495	1608	1722	1836	1950
382	2063	2177	2291	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085
383	3199	3312	3426	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218
384	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348
385	5461	5574	5686	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475
386	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599
387	7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720
388	8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838
389	9950	..61	.173	.284	.396	.507	.619	.730	.842	.953
390	591065	1176	1287	1399	1510	1621	1732	1843	1955	2066
391	2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175
392	3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282
393	4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5386
394	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487
395	6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586
396	7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681
397	8791	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774
398	9883	9992	.101	.210	.319	.428	.537	.646	.755	.864
399	600973	1082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	602060	2169	2277	2386	2494	2603	2711	2819	2928	3036
401	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118
402	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197
403	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	6059	6166	6274
404	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348
405	7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419
406	8526	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9381	9488
407	9594	9701	9808	9914	..21	.128	.234	.341	.447	.554
408	610660	0767	0873	0979	1086	1192	1298	1405	1511	1617
409	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678
410	2784	2890	2996	3102	3207	3313	3419	3525	3630	3736
411	3842	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	4792
412	4897	5003	5108	5213	5319	5424	5529	5634	5740	5845
413	5950	6055	6160	6265	6370	6476	6581	6686	6790	6895
414	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943
415	8048	8153	8257	8362	8466	8571	8676	8780	8884	8989
416	9093	9198	9302	9406	9511	9615	9719	9824	9928	..32
417	620136	0240	0344	0448	0552	0656	0760	0864	0968	1072
418	1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110
419	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146
420	3249	3353	3456	3559	3663	3766	3869	3973	4076	4179
421	4282	4385	4488	4591	4695	4798	4901	5004	5107	5210
422	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5929	6032	6135	6238
423	6340	6443	6546	6648	6751	6853	6956	7058	7161	7263
424	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287
425	8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308
426	9410	9512	9613	9715	9817	9919	..21	.123	.224	.326
427	630428	0530	0631	0733	0835	0936	1038	1139	1241	1342
428	1444	1545	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356
429	2457	2559	2660	2761	2862	2963	3064	3165	3266	3367
430	3468	3569	3670	3771	3872	3973	4074	4175	4276	4376
431	4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383
432	5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388
433	6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7290	7390
434	7490	7590	7690	7790	7890	7990	8090	8190	8290	8389
435	8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387
436	9486	9586	9686	9785	9885	9984	..84	.183	.283	.382
437	640481	0581	0680	0779	0879	0978	1077	1177	1276	1375
438	1474	1573	1672	1771	1871	1970	2069	2168	2267	2366
439	2465	2563	2662	2761	2860	2959	3058	3156	3255	3354
440	3453	3551	3650	3749	3847	3946	4044	4143	4242	4340
441	4439	4537	4636	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324
442	5422	5521	5619	5717	5815	5913	6011	6110	6208	6306
443	6404	6502	6600	6698	6796	6894	6992	7089	7187	7285
444	7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8262
445	8360	8458	8555	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9237
446	9335	9432	9530	9627	9724	9821	9919	..16	.113	.210
447	650308	0405	0502	0599	0696	0793	0890	0987	1084	1181
448	1278	1375	1472	1569	1666	1762	1859	1956	2053	2150
449	2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	3019	3116

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	653213	3309	3405	3502	3598	3695	3791	3888	3984	4080
451	4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4850	4946	5042
452	5138	5235	5331	5427	5523	5619	5715	5810	5906	6002
453	6098	6194	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960
454	7056	7152	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916
455	8011	8107	8202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870
456	8965	9060	9155	9250	9346	9441	9536	9631	9726	9821
457	9916	..11	.106	.201	.296	.391	.486	.581	.676	.771
458	660865	0960	1055	1150	1245	1339	1434	1529	1623	1718
459	1813	1907	2002	2096	2191	2286	2380	2475	2569	2663
460	2758	2852	2947	3041	3135	3230	3324	3418	3512	3607
461	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548
462	4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487
463	5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424
464	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7360
465	7453	7546	7640	7733	7826	7920	8013	8106	8199	8293
466	8386	8479	8572	8665	8759	8852	8945	9038	9131	9224
467	9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967	..60	.153
468	670246	0339	0431	0524	0617	0710	0802	0895	0988	1080
469	1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005
470	2098	2190	2283	2375	2467	2560	2652	2744	2836	2929
471	3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850
472	3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769
473	4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687
474	5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602
475	6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516
476	7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427
477	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337
478	9428	9519	9610	9700	9791	9882	9973	..63	.154	.245
479	680336	0426	0517	0607	0698	0789	0879	0970	1060	1151
480	1241	1332	1422	1513	1603	1693	1784	1874	1964	2055
481	2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957
482	3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857
483	3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756
484	4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652
485	5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547
486	6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440
487	7529	7618	7707	7796	7886	7975	8064	8153	8242	8331
488	8420	8509	8598	8687	8776	8865	8953	9042	9131	9220
489	9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930	..19	.107
490	690196	0285	0373	0462	0550	0639	0728	0816	0905	0993
491	1081	1170	1258	1347	1435	1524	1612	1700	1789	1877
492	1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759
493	2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639
494	3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517
495	4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394
496	5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6094	6182	6269
497	6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142
498	7229	7317	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8014
499	8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	698970	9057	9144	9231	9317	9404	9491	9578	9664	9751
501	9838	9924	..11	..98	.184	.271	.358	.444	.531	.617
502	700704	0790	0877	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482
503	1568	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344
504	2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205
505	3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065
506	4151	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4922
507	5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778
508	5864	5949	6035	6120	6206	6291	6376	6462	6547	6632
509	6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485
510	7570	7655	7740	7826	7911	7996	8081	8166	8251	8336
511	8421	8506	8591	8676	8761	8846	8931	9015	9100	9185
512	9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948	..33
513	710117	0202	0287	0371	0456	0540	0625	0710	0794	0879
514	0963	1048	1132	1217	1301	1385	1470	1554	1639	1723
515	1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566
516	2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407
517	3491	3575	3659	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246
518	4330	4414	4497	4581	4665	4749	4833	4916	5000	5084
519	5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920
520	6003	6087	6170	6254	6337	6421	6504	6588	6671	6754
521	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587
522	7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	8253	8336	8419
523	8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248
524	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	..77
525	720159	0242	0325	0407	0490	0573	0655	0738	0821	0903
526	0986	1068	1151	1233	1316	1398	1481	1563	1646	1728
527	1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552
528	2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374
529	3456	3538	3620	3702	3784	3866	3948	4030	4112	4194
530	4276	4358	4440	4522	4604	4685	4767	4849	4931	5013
531	5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830
532	5912	5993	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646
533	6727	6809	6890	6972	7053	7134	7216	7297	7379	7460
534	7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273
535	8354	8435	8516	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084
536	9165	9246	9327	9408	9489	9570	9651	9732	9813	9893
537	9974	..55	.136	.217	.298	.378	.459	.540	.621	.702
538	730782	0863	0944	1024	1105	1186	1266	1347	1428	1508
539	1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313
540	2394	2474	2555	2635	2715	2796	2876	2956	3037	3117
541	3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919
542	3999	4079	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720
543	4800	4880	4960	5040	5120	5200	5279	5359	5439	5519
544	5599	5679	5759	5838	5918	5998	6078	6157	6237	6317
545	6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113
546	7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	7749	7829	7908
547	7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	8543	8622	8701
548	8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493
549	9572	9651	9731	9810	9889	9968	..47	.126	.205	.284

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	740363	0442	0521	0600	0678	0757	0836	0915	0994	1073
551	1152	1230	1309	1388	1467	1546	1624	1703	1782	1860
552	1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2647
553	2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3275	3353	3431
554	3510	3588	3667	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215
555	4293	4371	4449	4528	4606	4684	4762	4840	4919	4997
556	5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777
557	5855	5933	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6479	6556
558	6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334
559	7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110
560	8188	8266	8343	8421	8498	8576	8653	8731	8808	8885
561	8963	9040	9118	9195	9272	9350	9427	9504	9582	9659
562	9736	9814	9891	9968	..45	.123	.200	.277	.354	.431
563	750508	0586	0663	0740	0817	0894	0971	1048	1125	1202
564	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972
565	2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740
566	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506
567	3583	3660	3736	3813	3889	3966	4042	4119	4195	4272
568	4348	4425	4501	4578	4654	4730	4807	4883	4960	5036
569	5112	5189	5265	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799
570	5875	5951	6027	6103	6180	6256	6332	6408	6484	6560
571	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320
572	7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079
573	8155	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8761	8836
574	8912	8988	9063	9139	9214	9290	9366	9441	9517	9592
575	9668	9743	9819	9894	9970	..45	.121	.196	.272	.347
576	760422	0498	0573	0649	0724	0799	0875	0950	1025	1101
577	1176	1251	1326	1402	1477	1552	1627	1702	1778	1853
578	1928	2003	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2529	2604
579	2679	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3203	3278	3353
580	3428	3503	3578	3653	3727	3802	3877	3952	4027	4101
581	4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848
582	4923	4998	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594
583	5669	5743	5818	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338
584	6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082
585	7156	7230	7304	7379	7453	7527	7601	7675	7749	7823
586	7898	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564
587	8638	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9303
588	9377	9451	9525	9599	9673	9746	9820	9894	9968	..42
589	770115	0189	0263	0336	0410	0484	0557	0631	0705	0778
590	0852	0926	0999	1073	1146	1220	1293	1367	1440	1514
591	1587	1661	1734	1808	1881	1955	2028	2102	2175	2248
592	2322	2395	2468	2542	2615	2688	2762	2835	2908	2981
593	3055	3128	3201	3274	3348	3421	3494	3567	3640	3713
594	3786	3860	3933	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444
595	4517	4590	4663	4736	4809	4882	4955	5028	5100	5173
596	5246	5319	5392	5465	5538	5610	5683	5756	5829	5902
597	5974	6047	6120	6193	6265	6338	6411	6483	6556	6629
598	6701	6774	6846	6919	6992	7064	7137	7209	7282	7354
599	7427	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	778151	8224	8296	8368	8441	8513	8585	8658	8730	8802
601	8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524
602	9596	9669	9741	9813	9885	9957	..29	.101	.173	.245
603	780317	0389	0461	0533	0605	0677	0749	0821	0893	0965
604	1037	1109	1181	1253	1324	1396	1468	1540	1612	1684
605	1755	1827	1899	1971	2042	2114	2186	2258	2329	2401
606	2473	2544	2616	2688	2759	2831	2902	2974	3046	3117
607	3189	3260	3332	3403	3475	3546	3618	3689	3761	3832
608	3904	3975	4046	4118	4189	4261	4332	4403	4475	4546
609	4617	4689	4760	4831	4902	4974	5045	5116	5187	5259
610	5330	5401	5472	5543	5615	5686	5757	5828	5899	5970
611	6041	6112	6183	6254	6325	6396	6467	6538	6609	6680
612	6751	6822	6893	6964	7035	7106	7177	7248	7319	7390
613	7460	7531	7602	7673	7744	7815	7885	7956	8027	8098
614	8168	8239	8310	8381	8451	8522	8593	8663	8734	8804
615	8875	8946	9016	9087	9157	9228	9299	9369	9440	9510
616	9581	9651	9722	9792	9863	9933	...4	..74	.144	.215
617	790285	0356	0426	0496	0567	0637	0707	0778	0848	0918
618	0988	1059	1129	1199	1269	1340	1410	1480	1550	1620
619	1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322
620	2392	2462	2532	2602	2672	2742	2812	2882	2952	3022
621	3092	3162	3231	3301	3371	3441	3511	3581	3651	3721
622	3790	3860	3930	4000	4070	4139	4209	4279	4349	4418
623	4488	4558	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5045	5115
624	5185	5254	5324	5393	5463	5532	5602	5672	5741	5811
625	5880	5949	6019	6088	6158	6227	6297	6366	6436	6505
626	6574	6644	6713	6782	6852	6921	6990	7060	7129	7198
627	7268	7337	7406	7475	7545	7614	7683	7752	7821	7890
628	7960	8029	8098	8167	8236	8305	8374	8443	8513	8582
629	8651	8720	8789	8858	8927	8996	9065	9134	9203	9272
630	9341	9409	9478	9547	9616	9685	9754	9823	9892	9961
631	800029	0098	0167	0236	0305	0373	0442	0511	0580	0648
632	0717	0786	0854	0923	0992	1061	1129	1198	1266	1335
633	1404	1472	1541	1609	1678	1747	1815	1884	1952	2021
634	2089	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705
635	2774	2842	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389
636	3457	3525	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071
637	4139	4208	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4685	4753
638	4821	4889	4957	5025	5093	5161	5229	5297	5365	5433
639	5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112
640	6180	6248	6316	6384	6451	6519	6587	6655	6723	6790
641	6858	6926	6994	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467
642	7535	7603	7670	7738	7806	7873	7941	8008	8076	8143
643	8211	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8684	8751	8818
644	8886	8953	9021	9088	9156	9223	9290	9358	9425	9492
645	9560	9627	9694	9762	9829	9896	9964	..31	..98	.165
646	810233	0300	0367	0434	0501	0569	0636	0703	0770	0837
647	0904	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508
648	1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178
649	2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	812913	2980	3047	3114	3181	3247	3314	3381	3448	3514
651	3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181
652	4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847
653	4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511
654	5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175
655	6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838
656	6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	7367	7433	7499
657	7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160
658	8226	8292	8358	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8820
659	8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478
660	9544	9610	9676	9741	9807	9873	9939	...4	..70	.136
661	820201	0267	0333	0399	0464	0530	0595	0661	0727	0792
662	0858	0924	0989	1055	1120	1186	1251	1317	1382	1448
663	1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103
664	2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756
665	2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409
666	3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3996	4061
667	4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711
668	4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361
669	5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010
670	6075	6140	6204	6269	6334	6399	6464	6528	6593	6658
671	6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305
672	7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7951
673	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595
674	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239
675	9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882
676	9947	..11	..75	.139	.204	.268	.332	.396	.460	.525
677	830589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166
678	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806
679	1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445
680	2509	2573	2637	2700	2764	2828	2892	2956	3020	3083
681	3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721
682	3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357
683	4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993
684	5056	5120	5183	5247	5310	5373	5437	5500	5564	5627
685	5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261
686	6324	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894
687	6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525
688	7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156
689	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786
690	8849	8912	8975	9038	9101	9164	9227	9289	9352	9415
691	9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981	..43
692	840106	0169	0232	0294	0357	0420	0482	0545	0608	0671
693	0733	0796	0859	0921	0984	1046	1109	1172	1234	1297
694	1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922
695	1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547
696	2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170
697	3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793
698	3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415
699	4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	845098	5160	5222	5284	5346	5408	5470	5532	5594	5656
701	5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275
702	6337	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894
703	6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511
704	7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128
705	8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743
706	8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9297	9358
707	9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972
708	850033	0095	0156	0217	0279	0340	0401	0462	0524	0585
709	0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197
710	1258	1320	1381	1442	1503	1564	1625	1686	1747	1809
711	1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419
712	2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029
713	3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3577	3637
714	3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4245
715	4306	4367	4428	4488	4549	4610	4670	4731	4792	4852
716	4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459
717	5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064
718	6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6608	6668
719	6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7152	7212	7272
720	7332	7393	7453	7513	7574	7634	7694	7755	7815	7875
721	7935	7995	8056	8116	8176	8236	8297	8357	8417	8477
722	8537	8597	8657	8718	8778	8838	8898	8958	9018	9078
723	9138	9198	9258	9318	9379	9439	9499	9559	9619	9679
724	9739	9799	9859	9918	9978	..38	..98	.158	.218	.278
725	860338	0398	0458	0518	0578	0637	0697	0757	0817	0877
726	0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475
727	1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072
728	2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2668
729	2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263
730	3323	3382	3442	3501	3561	3620	3680	3739	3799	3858
731	3917	3977	4036	4096	4155	4214	4274	4333	4392	4452
732	4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045
733	5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637
734	5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228
735	6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819
736	6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409
737	7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998
738	8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586
739	8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173
740	9232	9290	9349	9408	9466	9525	9584	9642	9701	9760
741	9818	9877	9935	9994	..53	.111	.170	.228	.287	.345
742	870404	0462	0521	0579	0638	0696	0755	0813	0872	0930
743	0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515
744	1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098
745	2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681
746	2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262
747	3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844
748	3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424
749	4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4888	4945	5003

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	875061	5119	5177	5235	5293	5351	5409	5466	5524	5582
751	5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160
752	6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737
753	6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314
754	7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889
755	7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464
756	8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039
757	9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612
758	9669	9726	9784	9841	9898	9956	..13	..70	.127	.185
759	880242	0299	0356	0413	0471	0528	0585	0642	0699	0756
760	0814	0871	0928	0985	1042	1099	1156	1213	1271	1328
761	1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898
762	1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468
763	2525	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3037
764	3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605
765	3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172
766	4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739
767	4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5248	5305
768	5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870
769	5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434
770	6491	6547	6604	6660	6716	6773	6829	6885	6942	6998
771	7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7449	7505	7561
772	7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123
773	8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685
774	8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246
775	9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806
776	9862	9918	9974	..30	..86	.141	.197	.253	.309	.365
777	890421	0477	0533	0589	0645	0700	0756	0812	0868	0924
778	0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482
779	1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039
780	2095	2150	2206	2262	2317	2373	2429	2484	2540	2595
781	2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151
782	3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706
783	3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261
784	4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4759	4814
785	4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367
786	5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5920
787	5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471
788	6526	6581	6636	6692	6747	6802	6857	6912	6967	7022
789	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572
790	7627	7682	7737	7792	7847	7902	7957	8012	8067	8122
791	8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670
792	8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218
793	9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766
794	9821	9875	9930	9985	..39	..94	.149	.203	.258	.312
795	900367	0422	0476	0531	0586	0640	0695	0749	0804	0859
796	0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404
797	1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948
798	2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492
799	2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
800	903090	3144	3199	3253	3307	3361	3416	3470	3524	3578
801	3633	3687	3741	3795	3849	3904	3958	4012	4066	4120
802	4174	4229	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661
803	4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202
804	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742
805	5796	5850	5904	5958	6012	6066	6119	6173	6227	6281
806	6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820
807	6874	6927	6981	7035	7089	7143	7196	7250	7304	7358
808	7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895
809	7949	8002	8056	8110	8163	8217	8270	8324	8378	8431
810	8485	8539	8592	8646	8699	8753	8807	8860	8914	8967
811	9021	9074	9128	9181	9235	9289	9342	9396	9449	9503
812	9556	9610	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	..37
813	910091	0144	0197	0251	0304	0358	0411	0464	0518	0571
814	0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104
815	1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637
816	1690	1743	1797	1850	1903	1956	2009	2063	2116	2169
817	2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700
818	2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231
819	3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761
820	3814	3867	3920	3973	4026	4079	4132	4184	4237	4290
821	4343	4396	4449	4502	4555	4608	4660	4713	4766	4819
822	4872	4925	4977	5030	5083	5136	5189	5241	5294	5347
823	5400	5453	5505	5558	5611	5664	5716	5769	5822	5875
824	5927	5980	6033	6085	6138	6191	6243	6296	6349	6401
825	6454	6507	6559	6612	6664	6717	6770	6822	6875	6927
826	6980	7033	7085	7138	7190	7243	7295	7348	7400	7453
827	7506	7558	7611	7663	7716	7768	7820	7873	7925	7978
828	8030	8083	8135	8188	8240	8293	8345	8397	8450	8502
829	8555	8607	8659	8712	8764	8816	8869	8921	8973	9026
830	9078	9130	9183	9235	9287	9340	9392	9444	9496	9549
831	9601	9653	9706	9758	9810	9862	9914	9967	..19	..71
832	920123	0176	0228	0280	0332	0384	0436	0489	0541	0593
833	0645	0697	0749	0801	0853	0906	0958	1010	1062	1114
834	1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634
835	1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154
836	2206	2258	2310	2362	2414	2466	2518	2570	2622	2674
837	2725	2777	2829	2881	2933	2985	3037	3089	3140	3192
838	3244	3296	3348	3399	3451	3503	3555	3607	3658	3710
839	3762	3814	3865	3917	3969	4021	4072	4124	4176	4228
840	4279	4331	4383	4434	4486	4538	4589	4641	4693	4744
841	4796	4848	4899	4951	5003	5054	5106	5157	5209	5261
842	5312	5364	5415	5467	5518	5570	5621	5673	5725	5776
843	5828	5879	5931	5982	6034	6085	6137	6188	6240	6291
844	6342	6394	6445	6497	6548	6600	6651	6702	6754	6805
845	6957	6908	6959	7011	7062	7114	7165	7216	7268	7319
846	7370	7422	7473	7524	7576	7627	7678	7730	7781	7832
847	7883	7935	7986	8037	8088	8140	8191	8242	8293	8345
848	8396	8447	8498	8549	8601	8652	8703	8754	8805	8857
849	8908	8959	9010	9061	9112	9163	9215	9266	9317	9368

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	929419	9470	9521	9572	9623	9674	9725	9776	9827	9879
851	9930	9981	..32	..83	.134	.185	.236	.287	.338	.389
852	930440	0491	0542	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898
853	0949	1000	1051	1102	1153	1204	1254	1305	1356	1407
854	1458	1509	1560	1610	1661	1712	1763	1814	1865	1915
855	1966	2017	2068	2118	2169	2220	2271	2322	2372	2423
856	2474	2524	2575	2626	2677	2727	2778	2829	2879	2930
857	2981	3031	3082	3133	3183	3234	3285	3335	3386	3437
858	3487	3538	3589	3639	3690	3740	3791	3841	3892	3943
859	3993	4044	4094	4145	4195	4246	4296	4347	4397	4448
860	4498	4549	4599	4650	4700	4751	4801	4852	4902	4953
861	5003	5054	5104	5154	5205	5255	5306	5356	5406	5457
862	5507	5558	5608	5658	5709	5759	5809	5860	5910	5960
863	6011	6061	6111	6162	6212	6262	6313	6363	6413	6463
864	6514	6564	6614	6665	6715	6765	6815	6865	6916	6966
865	7016	7066	7117	7167	7217	7267	7317	7367	7418	7468
866	7518	7568	7618	7668	7718	7769	7819	7869	7919	7969
867	8019	8069	8119	8169	8219	8269	8320	8370	8420	8470
868	8520	8570	8620	8670	8720	8770	8820	8870	8920	8970
869	9020	9070	9120	9170	9220	9270	9320	9369	9419	9469
870	9519	9569	9619	9669	9719	9769	9819	9869	9918	9968
871	940018	0068	0118	0168	0218	0267	0317	0367	0417	0467
872	0516	0566	0616	0666	0716	0765	0815	0865	0915	0964
873	1014	1064	1114	1163	1213	1263	1313	1362	1412	1462
874	1511	1561	1611	1660	1710	1760	1809	1859	1909	1958
875	2008	2058	2107	2157	2207	2256	2306	2355	2405	2455
876	2504	2554	2603	2653	2702	2752	2801	2851	2901	2950
877	3000	3049	3099	3148	3198	3247	3297	3346	3396	3445
878	3495	3544	3593	3643	3692	3742	3791	3841	3890	3939
879	3989	4038	4088	4137	4186	4236	4285	4335	4384	4433
880	4483	4532	4581	4631	4680	4729	4779	4828	4877	4927
881	4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419
882	5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912
883	5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403
884	6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894
885	6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385
886	7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875
887	7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364
888	8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853
889	8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9244	9292	9341
890	9390	9439	9488	9536	9585	9634	9683	9731	9780	9829
891	9878	9926	9975	..24	..73	.121	.170	.219	.267	.316
892	950365	0414	0462	0511	0560	0608	0657	0706	0754	0803
893	0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289
894	1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1775
895	1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2260
896	2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744
897	2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228
898	3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711
899	3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	954243	4291	4339	4387	4435	4484	4532	4580	4628	4677
901	4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158
902	5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640
903	5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120
904	6168	6216	6265	6313	6361	6409	6457	6505	6553	6601
905	6649	6697	6745	6793	6840	6888	6936	6984	7032	7080
906	7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7559
907	7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038
908	8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8421	8468	8516
909	8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994
910	9041	9089	9137	9185	9232	9280	9328	9375	9423	9471
911	9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947
912	9995	..42	..90	.138	.185	.233	.280	.328	.376	.423
913	960471	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899
914	0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374
915	1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848
916	1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322
917	2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795
918	2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268
919	3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741
920	3788	3835	3882	3929	3977	4024	4071	4118	4165	4212
921	4260	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684
922	4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155
923	5202	5249	5296	5343	5390	5437	5484	5531	5578	5625
924	5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095
925	6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564
926	6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7033
927	7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501
928	7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969
929	8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8436
930	8483	8530	8576	8623	8670	8716	8763	8810	8856	8903
931	8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369
932	9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835
933	9882	9928	9975	..21	..68	.114	.161	.207	.254	.300
934	970347	0393	0440	0486	0533	0579	0626	0672	0719	0765
935	0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229
936	1276	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1601	1647	1693
937	1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157
938	2203	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619
939	2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082
940	3128	3174	3220	3266	3313	3359	3405	3451	3497	3543
941	3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005
942	4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4374	4420	4466
943	4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926
944	4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386
945	5432	5478	5524	5570	5616	5662	5707	5753	5799	5845
946	5891	5937	5983	6029	6075	6121	6167	6212	6258	6304
947	6350	6396	6442	6488	6533	6579	6625	6671	6717	6763
948	6808	6854	6900	6946	6992	7037	7083	7129	7175	7220
949	7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7678

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
950	977724	7769	7815	7861	7906	7952	7998	8043	8089	8135
951	8181	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591
952	8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047
953	9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9503
954	9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958
955	980003	0049	0094	0140	0185	0231	0276	0322	0367	0412
956	0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867
957	0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320
958	1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773
959	1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226
960	2271	2316	2362	2407	2452	2497	2543	2588	2633	2678
961	2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130
962	3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3491	3536	3581
963	3626	3671	3716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032
964	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482
965	4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932
966	4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382
967	5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5830
968	5875	5920	5965	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279
969	6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727
970	6772	6817	6861	6906	6951	6996	7040	7085	7130	7175
971	7219	7264	7309	7353	7398	7443	7488	7532	7577	7622
972	7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068
973	8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514
974	8559	8604	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8916	8960
975	9005	9049	9094	9138	9183	9227	9272	9316	9361	0405
976	9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	0850
977	9895	9939	9983	..28	..72	.117	.161	.206	.250	.294
978	990339	0383	0428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738
979	0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182
980	1226	1270	1315	1359	1403	1448	1492	1536	1580	1625
981	1669	1713	1758	1802	1846	1890	1935	1979	2023	2067
982	2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509
983	2554	2598	2642	2686	2730	2774	2819	2863	2907	2951
984	2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392
985	3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833
986	3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273
987	4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4713
988	4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5065	5108	5152
989	5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591
990	5635	5679	5723	5767	5811	5854	5898	5942	5986	6030
991	6074	6117	6161	6205	6249	6293	6337	6380	6424	6468
992	6512	6555	6599	6643	6687	6731	6774	6818	6862	6906
993	6949	6993	7037	7080	7124	7168	7212	7255	7299	7343
994	7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779
995	7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8129	8172	8216
996	8259	8303	8347	8390	8434	8477	8521	8564	8608	8652
997	8695	8739	8782	8826	8869	8913	8956	9000	9043	9087
998	9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9479	9522
999	9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957

SPIS RZECZY

W TEM DZIELE ZAWARTYCH.

Stron.

OMYŁKI WAŻNIEJSZE.

stron. 8	wiersz	6. *zam.* $= 3^4$ *popr.* $= 3^9$.
„ 12	„	11. *zam.* na dwa następne czynniki *popr.* na czynniki pierwsze
„ 13	„	12. *zam.* 11 potęgi *popr.* 12 potęgi.
„ 24	„	10. *zam.* 119 *popr.* 116
„ 24	„	12. *zam.* 119 *popr.* 116
„ 35	„	5. od dołu *zam.* 700000 *popr.* 7000000
„ 36	„	8. *zam.* $591 . 7^2$ *popr.* 59.7^2
„ 39	„	2. od dołu. *zam.* przez ten czynnik *popr.* przez drugi czynnik.
„ 44	„	13. *zam.* 3744088 *popr.* 3754088
„ „	„	14. *zam.* 496783088 *popr.* 496793088
„ 51	„	15. *zam.* 29,249025 *popr.* 29,250025
„ 51	„	*w wypadku działania zam.* 1*B popr.* $0,1 \times B$
		„ *zam.* 2 *B' popr.* $0,02 \times B'$
		„ *zam.* 5 *B'' popr.* $0,005 \times B''$
„ 65	„	14. *zam.* $\frac{x^3}{3a}$ *popr.* $\frac{x^3}{3a^2}$
„ 95	„	11. od dołu *zam.* 12 *popr.* 512.

DZIEŁA TEGOŻ AUTORA.

O Papierach publicznych w ogólności, ze szczegółowym opisem papierów krajowych, ważniejszych zagranicznych i instytucyj które na ich handel wpływają. Warszawa 1843. Cena 2 ruble.

Rachunkowość handlowa w ważniejszych jej zastosowaniach. Warszawa 1846.—Cena 2 ruble.

Dzieła te dla młodzieży Szkolnej sprzedają się w mieszkaniu Autora Nr. 472, po 10 zł. exemplarz.