1.1.1. - metody analityczne
i półanalityczne
6.8.2. - teoria plazmy

Krzysztof Żuchowski

NISKOCZĘSTOTLIWOŚCIOWE STRUKTURY ELEKTRYCZNE PLAZMY PYŁOWEJ W OPISIE WIELOPŁYNOWYM

10/1998

WARSZAWA 1998

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 grudnia 1998 r.

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 0,60 Ark. druk. 0,75
Oddano do drukarni w grudniu 1998r.

ATOS Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

Krzysztof Żuchowski
Samodzielna Pracownia Dynamiki Plazmy

NISKOCZĘSTOTLIWOŚCIOWE STRUKTURY ELEKTRYCZNE PLAZMY PYŁOWEJ W OPISIE WIELOPŁYNOWYM

Streszczenie

W pracy przeanalizowano wpływ pyłu na podstawowe charakterystyki plazmy. Ograniczono się do do niezbyt wysokich częstości, co pozwoliło zastosować opis wielopłynowy. Rozważono różne wersje układów wielopłynowych. Obecnośc pyłu w istotny sposób wpływa na warunki występowania rozważanych struktur elektrycznych.

1. Wstęp

W związku z rozwojem badań kosmicznych dużego znaczenia nabrało badanie tzw. plazmy pyłowej, która składa się oprócz elektronów i dodatnich jonów z cząstek (ziaren), które są konglomeratami jonów i innych cząstek. Plazma pyłowa została rozpoznana w dolnych obszarach jonosfery Ziemi, w atmosferach planet, w strefach asteroidów i mgławic oraz w ogonach komet (patrz [1]).

Ziarna są zazwyczaj naładowane ujemnie. Czasem mogą być jednak naładowane dodatnio, gdyż na ich ładunek wpływa kilka niezależnych czynników np. absorpcja naładowanych cząstek, fotojonizacja itd. (patrz [2]). Obecność elektronów i jonów dodatnich w istotny sposób modyfikuje oddziaływanie ziaren pyłu z polem elektromagnetycznym (ekranowanie Debyea [3]). W szczególności prowadzi do modyfikacji fal jonowo-akustycznych i występowania fal specyficznych dla plazmy pyłowej. Ze względu na dużą masę ziaren ich wpływ na plazmę uwidacznia się dla częstości mniejszych od elektronowej częstości plazmowej.

Ziarna w plazmie pyłowej mogą mieć różne rozmiary, różne masy oraz różne ładunki, które ponadto mogą się zmieniać w czasie. Przykładowo, ładunek ziarna pyłu może się wahać w granicach $10^4 - 10^6$ ładunku elektronu, zaś masa może być rzędu 10^6 masy protonu a nawet większa ([1]).

Często dla uproszczenia zakłada się, że wszystkie ziarna mają jednakowe masy i ładunki nie zmieniające się w czasie. W tak uproszczonym opisie plazma pyłowa wydaje się być podobna do plazmy klasycznej zawierającej oprócz elektronów dodatkowe ujemne jony ([6]). Mimo podobnej struktury matematycznej równań występuje istotna różnica dotycząca zachowania się ich rozwiązań. Wynika ona z dużej różnicy stosunku ładunku do masy dla ziaren pyłu i jonów ujemnych. Stosunek ładunku do masy dla danego składnika plazmy determinuje jego dynamikę.

2. Wielopłynowy opis plazmy pyłowej

Plazma pyłowa stanowi układ składający się z elektronów, jonów dodatnich oraz ujemnie naładowanych ziaren pyłu. Rozważamy przypadek plazmy neutralnej (globalnie) elektrycznie. Zakładamy, że ziarna pyłu są kuliste, mają jednakowe rozmiary, masy i jednakowe ujemne ładunki. Zwykle rozmiary ziaren pyłu są znacznie mniejsze niż odległości między ziarnami i mniejsze od długości fal występujących w plazmie pyłowej, co pozwala traktować je jako cząstki punktowe. Prowadzi to do wspomnianej wyżej analogii plazmy pyłowej i plazmy zawierającej elektrony, dodatnie jony i dodatkowo ujemne jony o dużych masach ([6]).

Ponieważ rozważamy przypadek bez zewnętrznego stałego pola magnetycznego, więc zagadnienie jest istotnie jednowymiarowe przestrzennie i samouzgodnione pole elektryczne $E(t, x)$ reprezentowane jest za pomocą potencjału elektrycznego $\phi(t, x)$

$$E(t, x) = -\partial_x \phi(t, x)$$

W tym przybliżeniu plazma pyłowa jest opisywana następującym układem równań składającym się z równania ciągłości i równania ruchu dla każdego ze składników plazmy oraz z równania Poissona (patrz [4])

$$\begin{aligned} &\partial_t n_j + \partial_x(n_j v_j) = 0 \\ &(\partial_t + v_j \partial_x) v_j = -\frac{Z_j q_j}{m_j}\partial_x \phi - \frac{\gamma_j k_B T_j}{n_j m_j}\partial_x n_j \\ &\partial_x^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\sum_j Z_j q_j n_j \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $n_j, v_j, m_j, T_j, q_j, Z_j, \gamma_j$ oznaczają odpowiednio gęstość cząstek, prędkość płynową, masę cząstek, temperaturę płynu, ładunek elementarny uwzględniający znak, liczbę ładunkową i współczynnik politropy dla j-tego składnika plazmy. Natomiast k_B i ϵ_0 oznaczają stałą Boltzmanna i przenikalność elektryczną próżni. Na ogół w plazmie pyłowej występują trzy składniki: $j = e$ - elektrony, $j = i$ - dodatnie jony oraz $j = d$ - pył. Czasem wygodnie jest wydzielić osobno gorące elektrony a nawet gorące jony. Może się również zdażyć, że w ogóle nie występują elektrony wskutek ich osiadania na ziarnach pyłu. Przyjmujemy następujące oznaczenia: $q_e = -e$, $q_i = e$ oraz $q_d = -e$, gdzie e oznacza moduł ładunku elektronu.

Badając układ równań (1) rozważymy również pewne szczególne przypadki ważne w praktyce. W szczególności często możemy potraktować pył jako zimny, co wynika z dużej masy ziaren. Wówczas płyn pyłowy opisywany jest przemianą izobaryczną $\gamma_d = 0$. Można również pomijać bezwładność lżejszych składników plazmy wobec cięższych składników np. elektronów względem jonów i pyłu lub elektronów i jonów względem pyłu. Na przykład, gdy pominiemy bezwładność elektronów, to dla składnika elektronowego $j = e$ w układzie równań (1) nie wystąpi równanie ciągłości a w równaniu ruchu lewa strona będzie równa zeru. Wówczas z równania ruchu można wyrazić gęstość elektronową n_e poprzez potencjał elektryczny ϕ. W przypadku elektronów izotermicznych prowadzi to do rozkładu Boltzmanna dla n_e.

Układ równań (1) należy uzupełnić warunkami brzegowymi i warunkami regularności wyznaczającymi dopuszczalną klasę rozwiązań. W szczególności rozważymy warunek brzegowy w nieskończoności

$$(\phi, \partial_x \phi, v_j) \longrightarrow 0, n_j \longrightarrow n_{j0} \text{ dla } x \longrightarrow \infty \tag{2}$$

gdzie n_{j0} oznacza równowagową gęstość j-tego składnika. W przypadku występowania strumieni cząstek warunek brzegowy (2) należy odpowiednio zmodyfikować lub przejść do poruszającego się układu odniesienia. W naszych rozważaniach ograniczamy się do plazmy obojętnej (globalnie) elektrycznie

$$\sum_j Z_j q_j n_{j0} = 0 \tag{3}$$

3. Ograniczenia dla rozwiązań propagujących się

W przypadku rozwiązań układu równań (1), spełniających warunki (2) i (3), propagujących się ze stałą prędkością u wygodnie jest przejść do zmiennej $\xi = x - ut$. Po scałkowaniu pierwszego równania (1) względem zmiennej ξ otrzymujemy

$$v_j = u\left(1 - \frac{n_{j0}}{n_j}\right) \tag{4}$$

Podstawienie (4) do drugiego równania (1) prowadzi, zgodnie z [7], do równania na gęstość j-tego składnika

$$\left[\gamma_j k_B T_j \left(\frac{n_j}{n_{j0}}\right) - m_j u^2 \left(\frac{n_{j0}}{n_j}\right)^2\right] \frac{dn_j}{d\xi} = -q_j n_j Z_j \frac{d\phi}{d\xi} \tag{5}$$

Całkując równanie (5) otrzymujemy dla $\gamma_j = 1$ (przypadek izotermiczny)

$$k_B T_j \ln\left(\frac{n_j}{n_{j0}}\right) + \frac{m_j u^2}{2}\left[\left(\frac{n_{j0}}{n_j}\right)^2 - 1\right] = -q_j Z_j \phi \tag{6}$$

natomiast dla $\gamma_j \neq 1$

$$\frac{\gamma_j k_B T_j}{\gamma_j - 1}\left[\left(\frac{n_j}{n_{j0}}\right)^{\gamma_j - 1} - 1\right] + \frac{m_j u^2}{2}\left[\left(\frac{n_{j0}}{n_j}\right)^2 - 1\right] = -q_j Z_j \phi \tag{7}$$

W przypadku izotermicznym (równanie (6)) jeśli dodatkowo zaniedbamy bezwładność lekkich składników, np. $m_e = 0$ lub $m_i = 0$, to otrzymamy w ten sposób rozkłady Boltzmanna dla gęstości tych lekkich składników.

W przypadku nieizotermicznym gdy pył jest dużo cięższy od pozostałych składników i w związku z tym można go opisać przemianą izobaryczną, wówczas z równania (7) otrzymujemy wzór na gęstość pyłu:

$$n_d = \frac{n_{d0}}{\sqrt{1+\frac{2eZ_d\phi}{m_d u^2}}} = \frac{n_{i0}-n_{e0}}{Z_d\sqrt{1+\frac{2eZ_d\phi}{m_d u^2}}} \tag{8}$$

We wzorze (8) istotną rolę odgrywa stosunek ładunku do masy Z_d/m_d. Jego wartość może być znacznie mniejsza niż w przypadku plazmy z ujemnymi jonami.

W ogólności, pewne składniki plazmy są opisywane przemianą izotermiczną ($\gamma_j = 1$) i ich gęstość jest dana wzorem (6) a pozostałe składniki są opisywane przemianą, która nie jest izotermiczna ($\gamma_j \neq 1$) i ich gęstość dana jest wzorem (7). Mnożąc każde z tych równań przez odpowiednią gęstość równowagową n_{j0}, następnie sumując te równania względem j wewnątrz każdej klasy tj. dla $\gamma_j = 1$ i dla $\gamma_j \neq 1$ i dodając tak otrzymane rezultaty stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned}(9)\qquad &\sum_{\gamma_j=1}\left\{k_B T_j \ln\left(\frac{n_j}{n_{j0}}\right) + \frac{m_j u^2}{2}\left[\left(\frac{n_{j0}}{n_j}\right)^2 - 1\right]\right\} n_{j0} \\ &+ \sum_{\gamma_j\neq 1}\left\{\frac{\gamma_j k_B T_j}{\gamma_j - 1}\left[\left(\frac{n_j}{n_{j0}}\right)^{\gamma_j-1} - 1\right] + \frac{m_j u^2}{2}\left[\left(\frac{n_{j0}}{n_j}\right)^2 - 1\right]\right\} n_{j0} = 0\end{aligned}$$

gdzie zerowanie się prawej strony wynika z warunku globalnej neutralności elektrycznej plazmy (3).

Związek (9) można zinterpretować geometrycznie. Oznacza on, że unormowane gęstości n_j/n_{j0} poszczególnych składników plazmy muszą leżeć na hiporpowierzchni opisanej tym równaniem w przestrzeni unormowanych gęstości.

Specyfikując wzór (9) dla przypadku zimnego pyłu oraz bezwładnych i izotermicznych elektronów otrzymujemy

$$n_{e0} k_B T_e \ln\left(\frac{n_e}{n_{e0}}\right) + n_{i0} k_B T_i \ln\left(\frac{n_i}{n_{i0}}\right) + n_{d0}\frac{m_d u^2}{2}\left[\left(\frac{n_{d0}}{n_d}\right)^2 - 1\right] = 0$$

co można przekształcić, wyznaczając z warunku neutralności (3) występującą osobno gęstość równowagową pyłu n_{d0} poprzez pozostałe gęstości równowagowe, do postaci

$$\frac{n_{e0}}{n_{i0}}\ln\left(\frac{n_e}{n_{e0}}\right) + \frac{T_i}{T_e}\ln\left(\frac{n_i}{n_{i0}}\right) + \frac{n_{i0}-n_{e0}}{n_{i0}} M^2\left[\left(\frac{n_{d0}}{n_d}\right)^2 - 1\right] = 0 \tag{10}$$

gdzie M oznacza bezwymiarową liczbę Macha $M^2 = m_d u^2/Z_d k_B T_e$.

Ponieważ w równaniu (10) występują tylko trzy zmienne niezależne, tj. unormowane gęstości pyłu, elektronów i jonów, więc przedstawia ono dwuwymiarową powierzchnię w przestrzeni gęstości unormowanych. Wybierając jedną z tych zmiennych jako parametr możemy sprowadzić analizę tej powierzchni do badania krzywych leżących w płaszczyznach odpowiadających ustalonej wartości parametru. Ponieważ interesuje nas wpływ pyłu na zachowanie się plazmy wybieramy jako parametr następującą wielkość: $P = M^2[(n_{d0}/n_d)^2 - 1]$. Parametr P może przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Wartość $P = 0$, gdy gęstość pyłu jest równa gęstości równowagowej, jest krytyczna w tym sensie, że w warunku (10) zależność od pyłu znika zupełnie. Z równania (10) wynika, że jednoczesny wzrost gęstości elektronowej i jonowej powyżej wartości równowagowych jest możliwy tylko przy wzroście gęstości pyłu względem wartości równowagowej. Wynikają stąd pewne ograniczenia na dopuszczalne zaburzenia w plazmie pyłowej.

Przy wyprowadzeniu warunku (9) istotne było wyeliminowanie pola elektrycznego dzięki warunkowi globalnej neutralności elektrycznej. W tym celu musieliśmy skorzystać z równań (6) i (7), otrzymanych przez całkowanie równań (5). Inny warunek wiążący gęstości unormowane otrzymamy bezpośrednio z równań (5). Musimy jednak uwzględnić występowanie pola elektrycznego. Wykorzystamy w tym celu równanie Poissona (trzecie równanie układu równań (1)). Sumując stronami równania układu (5) po wszystkich składnikach plazmy, wyrażając występujące po prawej stronie gestości ładunków za pomocą potencjału ϕ z równania Poissona i całkując względem zmiennej ξ otrzymujemy

$$\sum_j n_{j0}\left\{k_B T_j\left[\left(\frac{n_j}{n_{j0}}\right)^{\gamma_j} - 1\right] + m_j u^2\left[\left(\frac{n_j}{n_{j0}}\right)^{-1} - 1\right]\right\} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 \tag{11}$$

Jest to scałkowane względem zmiennej ξ równanie Sagdiejewa ([8], [9]), w którym lewa strona została jawnie wyrażona poprzez gęstości unormowane składników plazmy.

Prawa strona równania (11) jest zawsze nieujemna, więc lewa strona również musi być nieujemna. Otrzymana w ten sposób nierówność stanowi warunek na dopuszczalne wartości gęstości unormowanych. Hiperpowierzchnia opisywana równaniem (11) musi być zawarta w obszarze określonym tą nierównością. Granicę tego obszaru otrzymujemy zastępując w tej nierówności znak $\geq$ znakiem równości

$$\sum_j n_{j0}\left\{k_B T_j\left[\left(\frac{n_j}{n_{j0}}\right)^{\gamma_j} - 1\right] + m_j u^2\left[\left(\frac{n_j}{n_{j0}}\right)^{-1} - 1\right]\right\} = 0 \tag{12}$$

W przypadku zimnego pyłu oraz nieinercyjnych i izotermicznych elektronów i jonów równanie (12) przyjmuje postać

$$\frac{n_{i0} - n_{e0}}{n_{i0}} M^2\left[\left(\frac{n_d}{n_{d0}}\right)^{-1} - 1\right] + \frac{T_i}{T_e}\left[\frac{n_i}{n_{i0}} - 1\right] + \frac{n_{e0}}{n_{i0}}\left[\frac{n_e}{n_{e0}} - 1\right] = 0 \tag{13}$$

gdzie użyliśmy zdefiniowanej uprzednio bezwymiarowej liczby Macha M.

Dla sparametryzowania powierzchni opisanej równaniem (13) posłużymy się parametrem $P_1 = M^2\left((n_d/n_{d0})^{-1} - 1\right)$, który wiąże się z parametrem P w następujący sposób

$$P = \frac{P_1^2 + M^2 P_1}{M^2} \tag{14}$$

Związek (14) pozwala umieścić obie rodziny krzywych (parametryzowanych za pomocą P i P_1) na jednym rysunku. Postępujemy następująco. Dla danego rysunku zadajemy wielkości T_i/T_e i n_{e0}/n_{i0} a jako parametry wyjściowe wybieramy n_d/n_{d0} i M, które określają P_1 i w konsekwencji związany z nim parametr P. Dla ustalonych wartości parametru P_1 zaznzczamy na rysunku dopuszczalne obszary dla elektronowej i jonowej gęstości unormowanych. Następnie dla odpowiednich wartości parametru P kreślimy, zgodnie z równaniem (10), krzywe, które powinny leżeć wewnątrz wyznaczonych obszarów dopuszczalnych.

Warunków (10) i (13) można użyć do określenia relacji między dopuszczalnymi małymi zmianami gęstości pyłu δn_d, jonów δn_i i elektronów δn_e oraz liczby Macha δM (zmiany prędkości u). Różniczkując równanie (10) i nierówność, z której otrzymaliśmy równość graniczną (13) względem tych gęstości i liczby Macha otrzymujemy następujące warunki na przyrosty tych zmiennych

$$\frac{n_{i0}-n_{e0}}{n_{i0}}\left[\left(\frac{n_d}{n_{d0}}\right)^{-2}-1\right]2M\delta M-\frac{n_{i0}-n_{e0}}{n_{i0}}M^2 2\left(\frac{n_{d0}}{n_d}\right)^2\frac{\delta n_d}{n_d}+\frac{T_i}{T_e}\frac{n_{i0}}{n_i}\frac{\delta n_i}{n_{i0}}+\frac{n_{e0}}{n_{i0}}\frac{n_{e0}}{n_e}\frac{\delta n_e}{n_{e0}}=0 \tag{15}$$

oraz

$$\frac{n_{i0}-n_{e0}}{n_{i0}}\left[\left(\frac{n_d}{n_{d0}}\right)^{-1}-1\right]2M\delta M-\frac{n_{i0}-n_{e0}}{n_{i0}}M^2\frac{n_{d0}}{n_d}\frac{\delta n_d}{n_d}+\frac{T_i}{T_e}\frac{\delta n_i}{n_{i0}}+\frac{n_{e0}}{n_{i0}}\frac{\delta n_e}{n_{e0}}\geq 0 \tag{16}$$

W realnych układach fizycznych małych zaburzeń możemy oczekiwać wokół stanów równowagi. Specyfikując związki (15) i (16) dla stanu równowagi, tj. dla $n_d = n_{d0}$, $n_e = n_{e0}$, $n_i = n_{i0}$, otrzymujemy

$$-\frac{n_{i0}-n_{e0}}{n_{i0}}2M^2\frac{\delta n_d}{n_d}+\frac{T_i}{T_e}\frac{\delta n_i}{n_{i0}}+\frac{n_{e0}}{n_{i0}}\frac{\delta n_e}{n_{e0}}=0$$

$$-\frac{n_{i0}-n_{e0}}{n_{i0}}M^2\frac{\delta n_d}{n_d}+\frac{T_i}{T_e}\frac{\delta n_i}{n_{i0}}+\frac{n_{e0}}{n_{i0}}\frac{\delta n_e}{n_{e0}}\geq 0$$

skąd wynika

$$\frac{n_{i0}-n_{e0}}{n_{i0}}M^2\frac{\delta n_d}{n_d}\geq 0$$

czyli $\delta n_d \geq 0$. Zatem dla zimnego pyłu i izotermicznych i nieinercyjnych elektronów i jonów małe zaburzenia gęstości pyłu względem wartości równowagowej muszą mieć charakter zgęszczeniowy.

4. Równanie opisujące struktury jonowo-akustyczne w plazmie pyłowej

Korzystając z warunku dyspersyjnego wyprowadzimy obecnie z równań (6) i (7) oraz (11) równanie opisujące struktury typu jonowo-akustycznego (niskoczęstotliwościowe) w plazmie pyłowej. Zaletą tego równania jest jego bezwymiarowa postać. Równanie to stanowi szczególną postać równania Sagdiejewa ([6]). Wykorzystamy warunek dyspersyjny otrzymany (patrz np. [4]) w przybliżeniu małych zaburzeń wokół stanu równowagi:

$$1+\sum_j\frac{\omega_{pj}^2}{k^2v_{tj}^2-(\omega-kv_{j0})^2} \tag{17}$$

gdzie ω i k oznaczają odpowiednio częstość i wektor falowy fali, a v_{j0} prędkość strumienia (dryfu) j-tego składnika plazmy. Częstość plazmowa ω_{pj} j-tego składnika plazmy dana jest wzorem $\omega_{pj}^2 = n_{j0}Z_j^2q_j^2/\epsilon_0 m_j$, a prędkość termiczna v_{tj} tego składnika wzorem $v_{tj}^2 = \gamma_j k_B T_j/m_j$.

W rozważanym przybliżeniu jonowo-akustycznym pył jest zawsze ciężki, tj. prędkość termiczna składnika pyłowego spełnia silną nierówność $kv_{tp} \ll \omega$. Ponieważ rozważamy niezbyt duże częstóści, więc dla składnika elektronowego mamy nierówność skierowaną w drugą stronę $\omega \ll kv_{te}$. Natomiast prędkość termiczna jonów v_{ti} może być większa lub mniejsza od ω/k. Ze względów rachunkowych ograniczymy się do przypadku gdy jest ona dużo mniejsza lub dużo większa od ω/k. Możemy wówczas podzielić składniki plazmy na dwie grupy ($j \to r, s$):

$$kv_{tr} \ll \omega \ll kv_{ts} \tag{18}$$

Zatem, ze względu na zachowanie się jonów mamy dwa różne przypadki. Dla uproszczenia zakładamy izotermiczność lekkich składników, nieobecność strumieni cząstek oraz że dodatnie jony są tylko jednokrotnie zjonizowane ($Z_i = 1$). Pozwala to jawnie rozwikłać warunek dyspersyjny względem częstości ω.

W przypadku, gdy prędkość termiczna v_{ti} jonów jest dużo mniejsza od prędkości fazowej zaburzenia ω/k otrzymujemy następujące wyrażenie na częstość zaburzenia

$$\omega^2 = \frac{k^2\lambda_{De}^2\omega_{pi}^2}{1+k^2\lambda_{De}^2}\left(1+\frac{\omega_{pd}^2}{\omega_{pi}^2}\right)$$

Ponieważ dla typowych parametrów plazmy pyłowej $\omega_{pd}^2/\omega_{pi}^2 = Z_d(m_i/m_d)((n_i - n_e)/n_i)$ jest zaniedbywalne względem jedności, więc z powyższego wyrażenia na częstość ω znika jawna zależność od parametrów pyłu a wzór na prędkość fazową ulega modyfikacji

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{n_i}{n_e}\left(\frac{k_BT_e}{m_i}\right)$$

tj. pojawia się czynnik n_i/n_e, który w plazmie pyłowej jest dużo większy od jedności.

Tego typu zaburzenie nosi nazwę pyłowo-jonowo-akustycznego w skrócie DIAW od angielskiego określenia Dust Ionic Acoustic Wave. Obecność pyłu istotnie zmienia zachowanie się plazmy. Zwiększa prędkość fazową zaburzeń rozchodzących się w plazmie. Dopuszcza istnienie fal jonowo-akustycznych w przypadku zbliżonych temperatur jonów i elektronów $T_i = T_e$. Natomiast w plazmie bez pyłu (elektronowo-jonowej) w szczególnym przypadku gdy $T_i = T_i$ nie mogą wystąpić fale jonowo-akustyczne.

W przypadku, gdy prędkość termiczna v_{ti} jonów jest dużo większa od prędkości fazowej zaburzenia ω/k wyrażenie na częstość ω przyjmuje, zgodnie z pracą [4], następującą postać

$$\omega^2 = \beta^2k^2v_d^2\left(1+\frac{k^2\lambda_{De}^2}{1+\gamma\delta}\right)$$

gdzie $\beta^2 = Z_d(\delta-1)/(1+\gamma\delta)$, $v_d^2 = k_BT_e/m_d$, $\delta = n_{i0}/n_{e0}$ oraz $\gamma = T_e/T_i$. Zaburzenie tego typu nosi nazwę pyłowo-akustycznego, w skrócie DAW od Dust Acoustic Wave. Wynik ten nie ma odpowiednika w przypadku plazmy bez pyłu.

Wykorzystując podział składników plazmy opisany nierównościami (18) możemy nadać związkowi dyspersyjnemu następującą postać

$$\sum_r \frac{\omega_{pr}^2}{(\omega - kv_{r0})^2} = 1 + \sum_s \frac{\gamma_s}{k^2\lambda_{Dj}^2} \tag{19}$$

gdzie długość Debyea λ_{Dj} dla j-tego składnika dana jest wyrażeniem

$$\lambda_{Dj} = \frac{\epsilon_0 k_B T_j}{n_{j0} Z_j^2 q_j^2}$$

Jeżeli dla lekkich składników we wzorze (19) można zastosować przybliżenie izotermiczne ($\gamma_s = 1$), to wygodnie jest wprowadzić dla nich sumaryczną długość Debyea

$$\frac{1}{\lambda_D} = \sum_s \frac{1}{\lambda_{Ds}}$$

oraz temperaturę efektywną T_{eff}: $\lambda_D = \epsilon_0 k_B T_{eff}/n_0 e^2$ (porównaj [6], [10]), gdzie n_0 spełnia rolę gęstości odniesienia.

Natomiast dla składników ciężkich, lewa strona wzoru (19), wygodnie jest wprowadzić sumaryczną częstość plazmową

$$\omega_p^2 = \sum_r \omega_{pr}^2$$

Wprowadzając masę odniesienia m_0 można tę sumaryczną gęstość plazmową zapisać w typowej postaci $\omega_{pj}^2 = n_0 e^2/\epsilon_0 m_0$. W powyższych wyrażeniach istotne są tylko stosunki T_{eff}/n_0 oraz n_0/m_0, co daje nam pewną dowolność w wyborze wielkości odniesienia. Wykorzystamy ją dalej do wyboru różnych unormowań.

Jeżeli w równaniu (19) można zaniedbać strumień cząstek ciężkich, tj. $v_{r0} = 0$, to daje się ono efektywnie rozwiązać względem ω^2

$$\omega^2 = \frac{k^2\lambda_D^2\omega_p^2}{1 + k^2\lambda_D^2}$$

Dla długich fal ($k \to 0$) otrzymujemy stąd efektywną prędkość fazową v_a

$$v_a = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{k_B T_{eff}}{m_0}\right)^{1/2} \tag{20}$$

Wykorzystamy ją do normowania prędkości strumienia cząstek oraz prędkości propagacji rozważanych struktur jonowo-akustycznych.

Wprowadzone wyżej wielkości λ_D, T_{eff}, n_0, m_0 i v_a pozwalają na przedstawienie wyjściowego układu równań (1) w postaci bezwymiarowej. Postępujemy następująco. Przechodzimy do poruszającego się układu odniesienia: $\xi = x - ut$. Potencjał elektryczny ϕ dzielimy przez $k_B T_{eff}/e$, masy cząstek m_j przez m_0, gęstości cząstek n_j przez n_0, prędkości strumieni cząstek v_{r0} przez

przez efektywną prędkość jonowo-akustyczną v_a, zmienną przestrzenną ξ przez długość Debyea, a ładunki elementarne (uwzględniające znak) cząstek q_j przez dodatni ładunek elementarny e.

Tę procedurę normującą możemy zastosować bezpośrednio do równania (11), które otrzymaliśmy uprzednio z wyjściowych równań (1). Wyrażając gęstości częstości cząstek za pomocą wzorów (6) i (7) poprzez unormowany potencjał $\varphi = e\phi/k_B T_{eff}$ otrzymamy w ten sposób (porównaj [6], [9]) następujące równanie

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 + V(\varphi, M_0) = 0 \tag{21}$$

gdzie $\eta = \xi/\lambda_D$, M_0 liczba Macha, a potencjał Sagdiejewa V dany jest wzorem

$$\begin{aligned} V(\varphi, M_0) = & \sum_s \frac{\alpha_s}{\beta_s}\left[1 - \exp(-Z_{s0}\beta_s\varphi)\right] \\ & + \sum_r \alpha_r \mu_r M_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2Z_{r0}\varphi}{M_0^2}\right)^{1/2}\right] \end{aligned} \tag{22}$$

gdzie odpowiednie unormowane wielkości dane są wzorami $\alpha_s = n_s/n_0$, $\alpha_r = n_r/n_0$, $\beta_s = T_{eff}/T_s$, $Z_{s0} = Z_s \mathrm{signum}(q_s)$, $\mu_r = m_r/m_0$, a sumowanie względem j zostało rozdzielone na grupy ciężkich i lekkich składników plazmy zgodnie z (18).

Ponieważ lewa strona równania (21) zawsze jest nieujemna, więc potencjał Sagdiejewa musi być niedodatni $V(\varphi, M_0) \leq 0$, co stanowi warunek na rozwiązania φ. Ponadto z postaci wzoru (22) wynika dodatkowe ograniczenie $\varphi \leq M_0^2/2Z_{r0}$, które wiąże amplitudę dopuszczalnego zaburzenia z jego prędkością propagacji. Jak zawsze musi być spełniony warunek globalnej neutralności elektrycznej (3), który w przyjętych unormowanych oznaczeniach przyjmuje postać

$$\sum_s Z_{s0}\alpha_s + \sum_r Z_{r0}\alpha_r = 0$$

W pracy [11] wyprowadzono równania analogiczne do (21) i (22) w ramach opisu kinetycznego. Przedstawiona tam została analiza numeryczna dopuszczalnych rozwiązań solitonowych, a problem dowolności unormowania został rozstrzygnięty na podstawie właściwości fizycznych badanego procesu i wygody numerycznej.

4. Podsumowanie

Do analizy plazmy pyłowej użyty został opis mieszany, to znaczy składniki ciężkie (pył a czasem również jony) opisane były za pomocą równań płynowych, natomiast składniki lekkie (elektrony a czasem również jony) były opisane rozkładem Boltzmanna. Analiza warunków dopuszczalności rozwiązań dla rozważanych niskoczęstotliwościowych struktur elektrycznych doprowadziła do związków między gęstościami poszczególnych składników plazmy. W przybliżeniu małych zaburzeń względem stanu równowagi pokazano, że dopuszczalne zaburzenia badanych struktur mają charakter zgęszczeniowy. Analiza dopuszczalnych fal jonowo-akustycznych w plazmie pyłowej doprowadziła do dwóch różnych postaci warunku dyspersyjnego. W pierwszym przypadku (DIAW) dopuszczalne fale przypominają zwykłe fale jonowo-akustyczne, z tym, że temperatura elektronów nie musi być dużo większa od temperatury jonów. W drugim przypadku (DAW) postać dopuszczalnych fal istotnie zależy od parametrów pyłu i nie ma odpowiednika w zwykłej plazmie bez pyłu. Niskoczęstotliwościowa analiza związku dyspersyjnego pozwoliła wprowadzić odpowiednią normalizację używanych równań. Posługując się tą normalizacją otrzymano bezwymiarowe równanie Sagdiejewa dla plazmy pyłowej.

Literatura

1. C.K. GEORTZ, *Dusty plasmas in the solar system*, Rev. Geophys., **27**, 271, 1989

2. L. SPITZER, *Physical processes in the instellar medium*, Wiley, NY 1978

3. E.C. WHIPPLE, T.G. NORTHROP AND D.A. MENDIS, *The electroststics of dusty plasma*, J.Geoph.Res., **90**,7405, 1985

4. P.K. SHUKLA, *Low-frequency modes in dusty plasmas*, Phys.Scr., **45**, 504, 504, 1992

5. T.G. NORTHROP, *Dusty plasmas*, Phys.Scr., **45**, 475, 1992

6. S. BABOOLAL, R. BHARUTHRAM and M.A. HELLBERG, *Arbitrary-amplitude theory of ion-acoustic solitons in warm multi-fluid plasmas*, J. Plasma Phys., **41**, 341, 1989

7. A.O. HARIN and V.O. STRSSER, *Arbitrary-amplitude electroststic traveling structures in a plasma*, Phys.Rev. **E 51**, 2401, 1995

8. E. INFELD and M.A. ROWLANDS, *Nonlinear waves, solitons and chaos*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992

9. R.A. TREUMANN and W. BAUMJOHANN, *Advanced space plasma physics*, Imperial College Press, London 1997

10. F. VERHEEST and M.A. HELLBERG, *Bohm sheath criteria and double layers in multispecies plasmas*, J. Plasma Phys., **57**, 465, 1997

11. A.J. TURSKI, B. ATAMANIUK and K. ŻUCHOWSKI, *Dusty plasma solitons in Vlasov plasmas*, Arch. Mech. (in printing)